解析学ノート

目次

1　集合・写像

定義 1.1　思考の対象として "明確な意味"をもつものを要素または元 (element) といい, 確定した範囲の要素をひとつにまとめた "集り"を集合 (set) と呼ぶ.

記号 1.2　1) 要素 a が集合 A の要素であるとき, $a \in A$ または $A \ni a$ で表し, a は A に属するという. また要素 a が A の要素でないとき, $a \notin A$ または $A \not\ni a$ と表す.

2) 要素 $a, b, c, \ldots$ からなる集合を $\{a, b, c, \ldots\}$ で表し (外延的記法), 変数 x を含む命題関数 $P(x)$ に対し, $P(x)$ が真である x 全体の集合を $\{x|\, P(x)\}$ で表す (内包的記法). また, 集合 A の要素 x で, 命題関数 $P(x)$ が真であるもの全体からなる集合を $\{x \in A|\, P(x)\}$ で表す.

記号 1.3　自然数全体からなる集合 $\{1, 2, 3, \ldots,\}$ を $\boldsymbol{N}$, 整数全体からなる集合 $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots,\}$ を $\boldsymbol{Z}$, 有理数全体からなる集合 $\left\{ \frac{p}{q} \middle|\, p, q \in \boldsymbol{Z},\ q \neq 0 \right\}$ を $\boldsymbol{Q}$, 実数全体からなる集合を $\boldsymbol{R}$, 複素数全体からなる集合 $\{x + yi|\, x, y \in \boldsymbol{R}\}$ を $\boldsymbol{C}$ で表すことにする.

定義 1.4　1) 2 つの集合 A, B はそれらの構成要素が全く同じであるとき (すなわち "$x \in A$ ならば $x \in B$" と "$x \in B$ ならば $x \in A$" が成り立つとき) "等しい"といい, $A = B$ で表す.

2) 集合 A の要素がすべて集合 B の要素であるとき, A は B の部分集合であるといい, $A \subset B$ または $B \supset A$ で表す. すなわち $A \subset B$ は "$x \in A \Rightarrow x \in B$" と同値である.

3) 要素をもたない集合を空集合と呼び, $\emptyset$ で表す.

定義 1.5　1) 集合 A, B の合併集合 (union, cup) $A \cup B$, 共通部分 (intersection, cap) $A \cap B$ を次のように定める.

$$A \cup B = \{x|\, x \in A \text{ または } x \in B\}, \quad A \cap B = \{x|\, x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

2) 集合 A, B の差集合 $A - B$ を $A - B = \{x|\, x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$ で定める.

3) 集合の列 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ が与えられたとき, これらの合併集合 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 共通部分 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ を次のように定める.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x|\, x \in A_n \text{ となる } n \text{ がある }\}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x|\text{ すべての } n \text{ に対して } x \in A_n\}$$

定義 1.6　$a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a \leqq b)$ に対し, 実数の部分集合 (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ を

$$(a, b) = \{x \in \boldsymbol{R}|\, a < x < b\}, \quad (a, b] = \{x \in \boldsymbol{R}|\, a < x \leqq b\}, \quad [a, b) = \{x \in \boldsymbol{R}|\, a \leqq x < b\},$$
$$[a, b] = \{x \in \boldsymbol{R}|\, a \leqq x \leqq b\}, \quad (a, \infty) = \{x \in \boldsymbol{R}|\, x > a\}, \quad [a, \infty) = \{x \in \boldsymbol{R}|\, x \geqq a\},$$
$$(-\infty, b) = \{x \in \boldsymbol{R}|\, x < b\}, \quad (-\infty, b] = \{x \in \boldsymbol{R}|\, x \leqq b\}$$

によって定める. これらの部分集合を総称して区間と呼び, (a, b), (a, ∞), $(-\infty, b)$ を開区間, $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ を閉区間という.

定義 1.7　X, Y を集合として, X の各要素に対して Y の 1 つの要素を指定するとき, この対応を X から Y への写像と呼んで, $f : X \to Y$ や $X \xrightarrow{f} Y$ などで表す. このとき各 $x \in X$ に対し写像 $f : X \to Y$ で対応する Y の要素を $f(x)$ で表し, これを x の f による像と呼ぶ.
2 つの写像 $f : X \to Y$ と $g : Z \to W$ が「等しい」とは, $X = Z$ かつ $Y = W$ であり, すべての $x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ が成り立つことであり, これを $f = g$ で表す.

定義 1.8　1) X, Y, Z を集合, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像とする. 各 $x \in X$ に対して, $g(f(x)) \in Z$ を対応させる X から Z への写像を f と g の合成と呼んで $g \circ f$ で表す.

2) X の各要素 x を x 自身に対応させる写像を X の恒等写像と呼び, id_X または 1_X などで表す.

3) 写像 $f : X \to Y$ に対し, $g \circ f = id_X$, $f \circ g = id_Y$ を満たす写像 $g : Y \to X$ を f の逆写像といい, $g = f^{-1}$ で表す.

4) 写像 $f : X \to Y$ が, 条件「Y の各要素 c に対して, $f(x) = c$ となる $x \in X$ が存在する.」を満たすとき, f は上への写像 (または全射) であるという.

5) 写像 $f : X \to Y$ が, 条件「$f(x) = f(y)$ $(x, y \in X)$ ならば $x = y$.」を満たすとき, f は 1 対 1 写像 (または単射) であるという.

6) 1 対 1 かつ上への写像を全単射という.

命題 1.9 写像 $f : X \to Y$ の逆写像が存在するためには, f が全単射であることが必要かつ十分であり f の逆写像はただ一つに限る.

証明 写像 $f : X \to Y$ の逆写像 g が存在するとき, 任意の $y \in Y$ に対して $f(g(y)) = f \circ g(y) = id_Y(y) = y$ だから f は全射である. また $x, z \in X$ が $f(x) = f(z)$ を満たすとき, $x = id_X(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(z)) = g \circ f(z) = id_X(z) = z$ より f は単射である.

逆に f が全単射ならば, 任意の $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ がただ 1 つ存在するため $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ を対応させる写像を $g : X \to Y$ とする. このとき任意の $y \in Y$ に対して $f \circ g(y) = f(g(y)) = y = id_Y(y)$ だから $f \circ g = id_Y$ が成り立つ. 任意の $x \in Y$ に対して $f(x) = y$ とおくと, $g(y) = x$ だから $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x = id_X(x)$ となり, $g \circ f = id_X$ が得られる. 故に g は f の逆写像である.

$g, h : Y \to X$ を f の逆写像とすれば $f \circ h = id_Y$, $g \circ f = id_X$ だから, 任意の $y \in Y$ に対して $g(y) = g(id_Y(y)) = g(f \circ h(y)) = g(f(h(y)) = g \circ f(h(y)) = id_X(h(y)) = h(y)$ が成り立つ. 従って $h = g$ となるため, f の逆写像はただ一つだけである. □

$f : X \to Y$ の逆写像が存在するとき, それを $f^{-1} : Y \to X$ で表す.

2 数列と級数

定義 2.1 $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ $(a_n \in \boldsymbol{C})$ を数列, $\alpha \in \boldsymbol{C}$ とする. どんな $\varepsilon > 0$ に対しても自然数 N で,「$n > N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$」を満たすものがあるとき, $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は α に収束すると言い, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ で表す.

命題 2.2 $z \in \boldsymbol{C}$, $|z| < 1$ ならば $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$ である.

証明 $z = 0$ ならば主張は明らかだから $z \neq 0$ と仮定する. $\frac{1}{|z|} > 1$ だから $a = \frac{1}{|z|} - 1$ とおくと $a > 0$ となり, $(1+a)^n = 1 + na + \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^k \geqq 1 + na$ が成り立つ. 従って $|z^n| = |z|^n = \frac{1}{(1+a)^n} \leqq \frac{1}{1+na}$ だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $n > \frac{1}{a\varepsilon} - \frac{1}{a}$ ならば $|z^n| < \varepsilon$ である. □

命題 2.3 $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$, $\{b_n\}_{n=1,2,\ldots}$ を収束する数列とし, $c \in \boldsymbol{C}$ とすると以下が成り立つ.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$. また, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ ならば $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

証明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ とおき, ε を任意の正の実数とする.

1) 自然数 N_1, N_2 で,「$n > N_1$ ならば $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$」,「$n > N_2$ ならば $|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$」を満たすものがある. N_1, N_2 の大きい方を N_3 とする. $n > N_3$ ならば $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ かつ $|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ だから $|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| = |(a_n - \alpha) + (\beta - \beta)| \leqq |a_n - \alpha| + |\beta - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ となるため, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$ である. また, 自然数

N_4 で「$n > N_4$ ならば $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{1+|c|}$」を満たすものがある. このとき $|ca_n - c\alpha| = |c||a_n - c\alpha| \leqq \frac{\varepsilon|c|}{1+|c|} < \varepsilon$ だから $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\alpha$ が成り立つ.

2) 自然数 N_5, N_6, N_7 で, 「$n > N_5$ ならば $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2(1+|\beta|)}$」, 「$n > N_6$ ならば $|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2(1+|\alpha|)}$」, 「$n > N_7$ ならば $|a_n - \alpha| < 1$」を満たすものがある. N_5, N_6, N_7 のうちで最大のものを N_8 とする. $n > N_8$ ならば $|a_n| = |a_n - \alpha + \alpha| \leqq |a_n - \alpha| + |\alpha| \leqq 1 + |\alpha|$, $|a_nb_n - \alpha\beta| = |a_n(b_n - \beta) + (a_n - \alpha)\beta| \leqq |a_n||b_n - \beta| + |a_n - \alpha||\beta| \leqq (1 + |\alpha|)\frac{\varepsilon}{2(1+|\alpha|)} + \frac{\varepsilon}{2(1+|\beta|)}|\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ となるため, $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \alpha\beta$ である. また, $\beta \neq 0$ ならば自然数 N_9, N_{10} で, 「$n > N_9$ ならば $|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon|\beta|^2}{2}$」, 「$n > N_{10}$ ならば $|b_n - \beta| < \frac{|\beta|}{2}$」を満たすものがある. N_9, N_{10} の大きい方を N_{11} とする. $n > N_{11}$ ならば $|\beta| = |\beta - b_n + b_n| \leqq |\beta - b_n| + |b_n| < \frac{|\beta|}{2} + |b_n|$ より $|b_n| > \frac{|\beta|}{2}$ であり, $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{|b_n-\beta|}{|b_n||\beta|} < \frac{2|b_n-\beta|}{|\beta|^2} < \varepsilon$ が得られる. 従って $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$ が成り立つため $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n\frac{1}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \alpha\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$ である. □

命題 2.4　$\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$, $\{b_n\}_{n=1,2,\dots}$ をともに収束する実数列とする.

1) すべての $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $a_n \leqq b_n$ ならば $\lim_{n\to\infty} a_n \leqq \lim_{n\to\infty} b_n$ である.

2) 実数列 $\{c_n\}_{n=1,2,\dots}$ が, すべての $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ を満たし, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ ならば $\{c_n\}_{n=1,2,\dots}$ も収束して $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n$ である.

証明　$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とおく.

1) $\alpha > \beta$ と仮定すれば自然数 N_1, N_2 で, 「$n > N_1$ ならば $|a_n - \alpha| < \frac{\alpha-\beta}{2}$」, 「$n > N_2$ ならば $|b_n - \beta| < \frac{\alpha-\beta}{2}$」を満たすものがある. N_1, N_2 の大きい方を N_3 とする. $n > N_3$ ならば $-\frac{\alpha-\beta}{2} < a_n - \alpha$ かつ $b_n - \beta < \frac{\alpha-\beta}{2}$ が成り立つ. これらの不等式から $b_n < \frac{\alpha+\beta}{2} < a_n$ が得られるため, すべての $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $a_n \leqq b_n$ が成り立つという仮定と矛盾する. 故に $\alpha \leqq \beta$ である.

2) ε を任意の正の実数とすれば, 自然数 N_4, N_5 で, 「$n > N_4$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$」, 「$n > N_5$ ならば $|b_n - \alpha| < \varepsilon$」を満たすものがある. N_4, N_5 の大きい方を N_6 とする. 仮定からすべての自然数 n に対して $-|a_n - \alpha| \leqq a_n - \alpha \leqq c_n - \alpha \leqq b_n - \alpha \leqq |b_n - \alpha|$ が成り立つため, $n > N_6$ ならば $|c_n - \alpha| < \varepsilon$ である. 従って $\{c_n\}_{n=1,2,\dots}$ も α に収束する. □

定義 2.5　どんな $\varepsilon > 0$ に対しても自然数 N で, 「$m, n > N$ ならば $|a_m - a_n| < \varepsilon$」を満たすものがあるとき, 数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ はコーシー列であるという.

命題 2.6　収束する数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ はコーシー列である.

証明　$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とおくと, 任意の正の実数 ε に対して自然数 N で, 「$n > N$ ならば $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$」を満たすものがある. $m, n > N$ ならば $|a_m - a_n| = |(a_m - \alpha) + (\alpha - a_n)| \leqq |a_m - \alpha| + |\alpha - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ より $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ はコーシー列である. □

定義 2.7　1) S を $\boldsymbol{C}$ の部分集合とするとき, 正の実数 r で, すべての $x \in S$ に対して $|x| \leqq r$ を満たすものがあるとき S は有界であるという. 複素数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ に対し, 集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ が有界であるとき, $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ は有界であるという.

2) S が $\boldsymbol{R}$ の部分集合のとき, 実数 M で, すべての $x \in S$ に対して $x \leqq M$ を満たすものがあるとき S は上に有界であるといい, このような M を S の上界という. また, 実数 L で, すべての $x \in S$ に対して $x \geqq L$ を満たすものがあるとき S は下に有界であるという.

3) 実数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ に対し, 集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ が上に有界であるとき, $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ は上に有界であるといい, $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ が下に有界であるとき, $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ は下に有界であるという.

定義 2.8　数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ に対し, $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$ を満たす自然数列 $\{n_k\}_{k=1,2,\dots}$ が与えられ

たとき, 数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1,2,\ldots}$ を $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ の部分列という.

命題 2.9　$\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ を α に収束する数列の部分列も α に収束する.

証明　$\{a_{n_k}\}_{k=1,2,\ldots}$ を $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ の部分列とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 自然数 N で「$n \geqq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$」を満たすものがある. $1 \leqq n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ だから $n_k \geqq k$ がすべての k に対して成り立つため, $k \geqq N$ ならば $|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$ である. よって $\{a_{n_k}\}_{k=1,2,\ldots}$ も α に収束する. □

補題 2.10　S を上に有界な空でない実数の部分集合として S の上界全体からなる集合を U とおくと, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $(M - \varepsilon, \infty) \cap S \neq \emptyset$ を満たす $M \in U$ が存在する.

証明　もし $(M - \varepsilon, \infty) \cap S \neq \emptyset$ を満たす $M \in U$ が存在しないとすれば, ある $\varepsilon_0 > 0$ で, すべての $M \in U$ に対して $(M - \varepsilon_0, \infty) \cap S = \emptyset$ となるものが存在する. このとき $S \subset (-\infty, M - \varepsilon_0]$ となるため $M - \varepsilon_0 \in U$ である. n に関する帰納法で任意の $M \in U$ と自然数 n に対して $S \subset (-\infty, M - n\varepsilon_0]$ であることが示される. 実際, $S \subset (-\infty, M - n\varepsilon_0]$ ならば $M - n\varepsilon_0 \in U$ であり, $S \subset (-\infty, K - \varepsilon_0]$ が任意の $K \in U$ に対して成り立つことから, K に $M - n\varepsilon_0$ を代入して $S \subset (-\infty, M - (n+1)\varepsilon_0]$ が得られる. ところが, $S \subset \bigcap_{n \geqq 1} (-\infty, M - n\varepsilon_0] = \emptyset$ となり, S は空でないという仮定と矛盾が生じるため, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $(M - \varepsilon, \infty) \cap S \neq \emptyset$ を満たす $M \in U$ が存在する. □

補題 2.11　上に有界な単調増加数列はコーシー列である.

証明　$\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ を上に有界な単調増加数列とする. これがコーシー列でないと仮定すれば, $\rho > 0$ が存在し, 任意の自然数 k に対して $a_{n_k} - a_{m_k} \geqq \rho$ を満たす $n_k > m_k > k$ がある. 自然数の列 $\{s_l\}_{n=1,2,\ldots}$ を $s_1 = m_1$, $s_2 = n_1$ および $s_{2l+1} = m_{s_{2l}}$, $s_{2l+2} = n_{s_{2l}}$ $(l = 1, 2, \ldots)$ によって定めると, $s_2 > s_1$, $s_{2l+2} > s_{2l+1} > s_{2l}$, $a_{s_{2l}} - a_{s_{2l-1}} > \rho$ $(l = 1, 2, \ldots)$ が成り立つ. このとき $a_{s_{2p}} = \sum_{l=1}^{p} (a_{s_{2l}} - a_{s_{2l-1}}) + \sum_{l=1}^{p-1} (a_{s_{2l+1}} - a_{s_{2l}}) + a_{s_1} > p\rho + a_{s_1}$ が成り立つため, $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は上に有界ではない部分列 $\{a_{s_{2p}}\}_{p=1,2,\ldots}$ を含む. 従って $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ も上に有界ではないので, 仮定と矛盾が生じる. □

定理 2.12　次の命題はすべて同値である

(i) 上に有界な単調増加数列は収束する.
(ii) 下に有界な単調減少数列は収束する.
(iii) 上に有界な空でない実数の部分集合の上界全体からなる集合は最小元をもつ.
(iv) 下に有界な空でない実数の部分集合の下界全体からなる集合は最大元をもつ.
(v) 有界な実数列は収束する部分列をもつ.
(vi) コーシー列である実数列は収束する.

証明　$(i) \Rightarrow (ii)$; $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ が下に有界な単調減少数列ならば $\{-a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は上に有界な単調増加数列だから $i)$ を仮定すれば $\{-a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は収束し, (2.3) の 1) により $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は $-\lim_{n\to\infty}(-a_n)$ に収束する.

$(ii) \Rightarrow (iii)$; S を上に有界な空でない実数の部分集合として S の上界全体からなる集合を U とおく. U が最小元をもたないと仮定して, 単調減少数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ を次のように帰納的に定める. $a_1, a_2, \ldots, a_n \in U$ で $a_1 > a_2 > \cdots > a_n$ かつ $(a_i - 2^{-i}, \infty) \cap S \neq \emptyset$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を満たすものを選んだと仮定する. (2.10) から $M \in U$ で $(M - 2^{-n-1}, \infty) \cap S \neq \emptyset$ を満たすものがある. U が最小元をもたないという仮定から, $a_{n+1} < a_n$ かつ $a_{n+1} < M$ を満たす $a_{n+1} \in U$ がある. このとき $(a_{n+1} - 2^{-n-1}, \infty) \supset (M - 2^{-n-1}, \infty)$ だから $(a_{n+1} - 2^{-n-1}, \infty) \cap S \neq \emptyset$ が成り立つ. S の各要素は U の下界であるため $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は下に有界な単調減少数列になり, $ii)$ の仮定によって収束する. $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ とおくと, 任意の $x \in S$ に対して $a_n \geqq x$ だから (2.4)

の 1) によって $\alpha \geqq x$ である．従って $\alpha \in U$ であり, 再び U が最小元をもたないという仮定から, $\beta < \alpha$ を満たす $\beta \in U$ がある．すなわち $(-\infty, \beta] \supset S$ となるため $(\beta, \infty) \cap S = \emptyset$ である．一方, 任意の n に対して $\alpha \leqq a_n$ だから $(\alpha - 2^{-n}, \infty) \subset (a_n - 2^{-n}, \infty)$ である．よって $(\alpha - 2^{-n}, \infty) \cap S \neq \emptyset$ が任意の n について成り立つ．とくに $\alpha - \beta > 2^{-k}$ を満たす k をとると $(\beta, \infty) \supset (\alpha - 2^{-k}, \infty)$ となるため $(\beta, \infty) \cap S \neq \emptyset$ であるが, これは $(\beta, \infty) \cap S = \emptyset$ と矛盾する．故に U は最小元をもつ．

$(iii) \Leftrightarrow (iv)$; 実数の部分集合 S に対して $-S = \{x \in \boldsymbol{R} | -x \in S\}$ とおくことにする．S に最小元 c が存在すれば $-c$ が $-S$ の最大元であり, S に最大元 d が存在すれば $-d$ が $-S$ の最小元であることに注意する．S が下に有界であるとき, S の下界全体からなる集合 $\{M \in \boldsymbol{R} | x \in S$ ならば $x \geqq M\}$ を L とおくと $-L = \{M \in \boldsymbol{R} | -M \in L\} = \{M \in \boldsymbol{R} | x \in S$ ならば $x \geqq -M\} = \{M \in \boldsymbol{R} | x \in S$ ならば $-x \leqq M\} = \{M \in \boldsymbol{R} | y \in -S$ ならば $y \leqq M\}$ より $-L$ は $-S$ の上界全体からなる集合である．$iii)$ を仮定すれば $-L$ の最小元 μ が存在して $-\mu$ は L の最大元になるため $iv)$ が導かれる．S が上に有界であるとき, S の上界全体からなる集合 $\{M \in \boldsymbol{R} | x \in S$ ならば $x \leqq M\}$ を U とおくと $-U = \{M \in \boldsymbol{R} | -M \in U\} = \{M \in \boldsymbol{R} | x \in S$ ならば $x \leqq -M\} = \{M \in \boldsymbol{R} | x \in S$ ならば $-x \geqq M\} = \{M \in \boldsymbol{R} | y \in -S$ ならば $y \geqq M\}$ より $-U$ は $-S$ の下界全体からなる集合である．(iv) を仮定すれば $-U$ の最大元 μ が存在して $-\mu$ は U の最小元になるため (iii) が導かれる．

$(iii) \Rightarrow (i)$; $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ を上に有界な単調増加数列とする．$S = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ は上に有界だから S の上界の最小元を α とすれば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, α の最小性により $\alpha - \varepsilon$ は S の上界ではないので $a_N > \alpha - \varepsilon$ を満たす自然数 N がある．$\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ は単調増加数列だから $n > N$ ならば $\alpha - \varepsilon < a_n \leqq \alpha$ が成り立ち, $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ は α に収束することが分かる．

$(i) \Rightarrow (v)$; $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ を有界な実数列として単調増加数列 $\{\alpha_n\}_{n=1,2,\dots}$ と 単調減少数列 $\{\beta_n\}_{n=1,2,\dots}$ で, 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して条件

(1) $\beta_n - \alpha_n = 2^{-n+1}(\beta_1 - \alpha_1)$.

(2) $a_i \in [\alpha_n, \beta_n]$ となる i は無限個ある．

を満たすものを以下のように帰納的に定める．まず, すべての n に対して $a_n \in [\alpha_1, \beta_1]$ となる α_1, β_1 がある．$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ が各 $n = 1, 2, \dots, k$ に対して上の条件を満たすように定まったと仮定する．(2) により区間 $[\alpha_k, \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}]$, $[\frac{\alpha_k+\beta_k}{2}, \beta_k]$ の少なくとも一方は無限個の i に対して a_i を含む．$a_i \in [\alpha_k, \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}]$ となる i が無限個ある場合は $\alpha_{k+1} = \alpha_k$, $\beta_{k+1} = \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}$ によって $\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}$ を定め, そうでなければ $\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}$, $\beta_{k+1} = \beta_k$ によって $\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}$ を定める．いずれの場合にしても $\alpha_k \leqq \alpha_{k+1}$, $\beta_k \geqq \beta_{k+1}$ かつ $\beta_{k+1} - \alpha_{k+1} = \frac{\beta_k - \alpha_k}{2} = 2^{-k}(\beta_1 - \alpha_1)$ が成り立ち, $a_i \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$ となる i は無限個ある．

$\{\alpha_n\}_{n=1,2,\dots}$ は区間 $[\alpha_1, \beta_1]$ に含まれるため, 上に有界な単調増加数列である．従って仮定から $\{\alpha_n\}_{n=1,2,\dots}$ は収束する．$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ とおくと $\beta_n = \alpha_n + 2^{-n+1}(\beta_1 - \alpha_1)$ より $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \alpha$ である．$n_1 = 1$ とおき, 自然数の列 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ で, 各 $j = 1, 2, \dots, k$ に対して $a_{n_j} \in [\alpha_j, \beta_j]$ となるものを帰納的に選んだとすれば, $a_i \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$ となる i は無限個あるので, $a_{n_{k+1}} \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$ となる n_{k+1} で n_k より大きなものがある．このように定めた $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ は, すべての k に対して $\alpha_k \leqq a_{n_k} \leqq \beta_k$ を満たすため (2.4) の 2) によって α に収束する．

$(v) \Rightarrow (vi)$; $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ をコーシー列である実数列とする．自然数 N で,「$m, n > N$ ならば $|a_m - a_n| < 1$」を満たすものがあるため, $m > N$ ならば $a_{N+1} - 1 < a_m < a_{N+1} + 1$ である．そこで, $a_1, a_2, \dots, a_N, a_{N+1} - 1$ のうちで最小のものを A, $a_1, a_2, \dots, a_N, a_{N+1} + 1$ のうちで最大のものを B とすれば, すべての n に対して $A \leqq a_n \leqq B$ となるため $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ は有界である．よって $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ は収束する部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ をもつ．$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$ とおくと, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N_1, N_2 で「$k > N_1$ ならば $|a_{n_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$」,「$p, q > N_2$ ならば $|a_p - a_q| < \frac{\varepsilon}{2}$」を満たすものがある．$n_k > N_2$ かつ $k > N_1$ を満たす k (例えば $N_1 + 1$ と $N_2 + 1$ の大きい方) を 1 つとれば, $p > N_2$ ならば $|a_p - \alpha| \leqq |a_p - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ となるため $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ は α に収束する．

$(vi) \Rightarrow (i)$; (2.11) から明らかである. □

実数の集合は有理数全体の集合から構成され, その構成方法は 2 通りある. 1 つは有理数の大小の順序関係を用いる方法で, もう 1 つは有理数のコーシー列を用いる方法である. 前者の方法を用いて実数の集合を構成すれば, (2.12) の (iii) が成り立つことが示され, 後者の方法を用いれば (2.12) の (vi) が成り立つことが示される. いずれにしても (2.12) によって, これらの命題は同値であり, (2.12) の命題はすべて成り立つ.

定義 2.13 S が上に有界な実数の部分集合のとき, S の最小の上界を S の上限という. また, S が下に有界な実数の部分集合のとき, S の最大の下界を S の下限という.

補題 2.14 $\{c_n\}_{n=1,2,\dots}$ を複素数列とし, $c_n = a_n + ib_n$ $(a_n, b_n \in \boldsymbol{R},\ n = 1, 2, \dots)$ とする.

1) $\{c_n\}_{n=1,2,\dots}$ が有界であるためには, $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$, $\{b_n\}_{n=1,2,\dots}$ がともに有界であることが必要十分である.

2) $\{c_n\}_{n=1,2,\dots}$ がコーシー列であるためには, $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$, $\{b_n\}_{n=1,2,\dots}$ がともにコーシー列であることが必要十分である.

証明 不等式 $|a_n|, |b_n| \leqq |c_n| \leqq |a_n| + |b_n|$, $|a_n - a_m|, |b_n - b_m| \leqq |c_n - c_m| leqq |a_n - a_m| + |b_n - b_m|$ よりいずれの主張も明らかである. □

定理 2.15 有界な複素数列は収束する部分列をもつ.

証明 $\{c_n\}_{n=1,2,\dots}$ を有界な複素数列とし, $c_n = a_n + ib_n$ $(a_n, b_n \in \boldsymbol{R},\ n = 1, 2, \dots)$ とすると, $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ と $\{b_n\}_{n=1,2,\dots}$ はともに有界である. 従って (2.12) の (v) から $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ は収束する部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ をもつ. そこで $\{b_n\}_{n=1,2,\dots}$ の部分列 $\{b_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ を考えると (2.12) の (v) によって $\{b_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ は収束する部分列 $\{b_{n_{k_i}}\}_{i=1,2,\dots}$ をもつ. (2.9) により $\{a_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ の部分列 $\{a_{n_{k_i}}\}_{i=1,2,\dots}$ も収束する. 従って (2.3) の 1) によって $\{c_n\}_{n=1,2,\dots}$ の部分列 $\{c_{n_{k_i}}\}_{i=1,2,\dots}$ も収束する. □

定理 2.16 コーシー列である複素数列は収束する.

証明 $\{c_n\}_{n=1,2,\dots}$ をコーシー列とし, $c_n = a_n + ib_n$ $(a_n, b_n \in \boldsymbol{R},\ n = 1, 2, \dots)$ とすると, $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ と $\{b_n\}_{n=1,2,\dots}$ は (2.14) により, ともにコーシー列である. 従って (2.12) の (vi) から $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ と $\{b_n\}_{n=1,2,\dots}$ はともに収束する. 従って (2.3) の 1) によって $\{c_n\}_{n=1,2,\dots}$ も収束する. □

定義 2.17 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ $(a_n \in \boldsymbol{C})$ を数列, $\alpha \in \boldsymbol{C}$ とする.

1) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ とおき $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \alpha$ が成り立つとき, 級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は α に収束すると言う.

3) 級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき, 級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束するという.

命題 2.18 級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するとき, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(c \in \boldsymbol{C})$ が成り立つ.

証明 $S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$, $T_k = \sum\limits_{n=1}^{k} b_n$ とおくと $S_k + T_k = \sum\limits_{n=1}^{k}(a_n + b_n)$, $cS_k = \sum\limits_{n=1}^{k} ca_n$ だから (2.3) の 1) から $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{k\to\infty}(S_k+T_k) = \lim\limits_{k\to\infty} S_k + \lim\limits_{k\to\infty} T_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = \lim\limits_{k\to\infty} cS_k = c\lim\limits_{k\to\infty} S_k = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. □

命題 2.19 $\{a_n\}_{n=0,1,\dots}$ を単調に減少して 0 に収束する実数列とすれば, 級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ は収束する.

証明 $S_k = \sum\limits_{n=1}^{k}(-1)^n a_n$ とおくと $\{a_n\}_{n=0,1,\dots}$ が単調に減少することから $S_{2k+1} = S_{2k-1} + a_{2k} - a_{2k+1} \geqq S_{2k-1}$,

$S_{2k+2} = S_{2k} - (a_{2k+1} - a_{2k+2}) \leqq S_{2k}$ となる．従って $\{S_{2k+1}\}_{k=0,1,\dots}$ は単調増加数列であり，$\{S_{2k}\}_{k=0,1,\dots}$ は単調減少数列である．各 a_n は負でないため $S_{2k+1} = S_{2k} - a_{2k+1} \leqq S_{2k}$ だから，任意の k, l に対して $S_{2k+1} \leqq S_{2l}$ である．実際 $k \leqq l$ ならば $S_{2k+1} \leqq S_{2l+1} \leqq S_{2l}$ であり，$k \geqq l$ ならば $S_{2k+1} \leqq S_{2k} \leqq S_{2l}$ である．故に $\{S_{2k+1}\}_{k=0,1,\dots}$ は上に有界で $\{S_{2k}\}_{k=0,1,\dots}$ は下に有界であるため (2.12) の (i), (ii) により，これらはともに収束する．$\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k} = \alpha$ とおくと $S_{2k+1} = S_{2k} - a_{2k+1}$ と $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$ から $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k+1} = \alpha$ である．よって $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \alpha$ となり $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ は収束する． □

定理 2.20　級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するためには，どんな $\varepsilon > 0$ に対しても $N \in \boldsymbol{N}$ で,「$m \geqq n > N$ ならば $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$」を満たすものがあることが必要十分である．

証明　$S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$ とおくと $m \geqq n$ ならば $|S_m - S_{n-1}| = \left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k\right|$ だから，$\{S_k\}_{k=1,2,\dots}$ がコーシー列であるためには，どんな $\varepsilon > 0$ に対しても $N \in \boldsymbol{N}$ で，「$m \geqq n > N$ ならば $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$」を満たすものがあることが必要十分である．従って (2.16) により，主張が成立する． □

系 2.21　級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束するとする．

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．

2) $\{a_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ を数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ の部分列とすると，$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ も絶対収束する．

3) 数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ の項の順序を入れ替えた数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ から得られる級数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ も絶対収束して，$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ である．

証明　1) 級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するため，(2.20) によりどんな $\varepsilon > 0$ に対しても $N \in \boldsymbol{N}$ で,「$m \geqq n > N$ ならば $\sum\limits_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon$」を満たすものがある．このとき $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k\right| \leqq \sum\limits_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon$ だから (2.20) により $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．

2) $s_l = \sum\limits_{k=1}^{l} |a_{n_k}|$ とおくと $\{s_l\}_{l=1,2,\dots}$ は単調増加数列であり，$s_l = \sum\limits_{k=1}^{l} |a_{n_k}| \leqq \sum\limits_{m=1}^{n_l} |a_m| \leqq \sum\limits_{m=1}^{\infty} |a_m|$ だから，上に有界である．従って (2.12) の (i) により $\{s_l\}_{l=1,2,\dots}$ は収束する．

3) $t_l = \sum\limits_{k=1}^{l} |a_{n_k}|$, $s_l = \sum\limits_{k=1}^{l} |a_k|$ とおく．各 l に対して $n_1, n_2, \dots, n_l$ の中で最大のものを $m(l)$ とおけば $\{n_1, n_2, \dots, n_l\} \subset \{1, 2, \dots, m(l)\}$ だから $t_l \leqq s_{m(l)} \leqq \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ である．従って $\{t_l\}_{l=1,2,\dots}$ は上に有界な単調増加数列だから (2.12) の (i) により収束する．故に $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ も絶対収束する．

任意の $p = 1, 2, \dots$ に対して $n_k = p$ となる k がただ 1 つ存在するので，そのような k を $k(p)$ で表して，各 l に対して $k(1), k(2), \dots, k(l)$ の中で最大のものを $\mu(l)$ とおく．ここで $k(1), k(2), \dots, k(l)$ は相異なる正の整数だから $\mu(l) \geqq l$ であることに注意する．$N \geqq \mu(l)$ ならば $\{1, 2, \dots, l\} = \{n_{k(1)}, n_{k(2)}, \dots, n_{k(l)}\} \subset \{n_1, n_2, \dots, n_{\mu(l)}\} \subset \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$ である．$\{n_1, n_2, \dots, n_N\} - \{1, 2, \dots, l\} \subset \{l+1, l+2, \dots, m(N)\}$ だから $S_l = \sum\limits_{k=1}^{l} a_k$, $T_l = \sum\limits_{k=1}^{l} a_{n_k}$ とおくと $|S_l - T_N| = \left|\sum\limits_{1 \leqq k \leqq N,\, n_k > l} a_{n_k}\right| \leqq \sum\limits_{1 \leqq k \leqq N,\, n_k > l} |a_{n_k}| \leqq \sum\limits_{k=l+1}^{m(N)} |a_{n_k}| = s_{m(N)} - s_l$.
そこで $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{n_k}| = s_\infty$ とおけば $N \geqq \mu(l)$ ならば $|S_l - T_N| \leqq s_\infty - s_l$ が成り立つ．

$\{s_l\}_{l=1,2,\dots}$ は s_∞ に収束するため，任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N_1 で「$l > N_1$ ならば $s_\infty - s_l < \frac{\varepsilon}{2}$」をみたすものがある．$\{T_l\}_{l=1,2,\dots}$ は収束するため，任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N_2 で「$l, m > N_2$ ならば $|T_l - T_m| < \frac{\varepsilon}{2}$」をみたすものがある．$N_1$ と N_2 の大きい方を N_3 とすれば，$l > N_3$ ならば $|S_l - T_l| \leqq |S_l - T_{\mu(l)}| + |T_{\mu(l)} - T_l| < s_\infty - s_l + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

である．これは $\lim_{l\to\infty} S_l = \lim_{l\to\infty} T_l$ が成り立つことを意味する． □

命題 2.22　$\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ を複素数列とする．

1) $\{c_n\}_{n=1,2,\dots}$ が $n=1,2,\dots$ に対して $|a_n| \leqq c_n$ を満たす実数列で，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ が収束すれば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する．

2) $N \in \boldsymbol{N}$ と実数 $r<1$ で，「$n \geqq N$ ならば $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqq r$」を満たすものが存在すれば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する．

3) $N \in \boldsymbol{N}$ と実数 $r<1$ で，「$n \geqq N$ ならば $\sqrt[n]{|a_n|} \leqq r$」を満たすものが存在すれば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する．

証明 1) $S_k = \sum_{n=1}^{k} |a_n|$ とおくと 任意の $k=1,2,\dots$ に対して $S_k = \sum_{n=1}^{k} |a_n| \leqq \sum_{n=1}^{k} c_n \leqq \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ だから $\{S_k\}_{k=1,2,\dots}$ は上に有界な単調増加数列になるため (2.12) の (i) により収束する．従って $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する．

2) $n \geqq N$ ならば $|a_n| = |a_N|\left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right|\left|\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\right|\cdots\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \leqq |a_N|r^{n-N}$ だから $c_n = \begin{cases} |a_n| & 1 \leqq n \leqq N-1 \\ |a_N|r^{n-N} & n \geqq N \end{cases}$ により数列 $\{c_n\}_{n=1,2,\dots}$ を定めれば $n=1,2,\dots$ に対して $|a_n| \leqq c_n$ が成り立ち，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{N-1} |a_n| + \frac{|a_N|}{1-r}$ となるため 1) の結果により $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する．

3) $n \geqq N$ ならば $|a_n| \leqq r^n$ だから $c_n = \begin{cases} |a_n| & 1 \leqq n \leqq N-1 \\ r^n & n \geqq N \end{cases}$ により数列 $\{c_n\}_{n=1,2,\dots}$ を定めれば $n=1,2,\dots$ に対して $|a_n| \leqq c_n$ が成り立ち，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{N-1} |a_n| + \frac{r^n}{1-r}$ となるため 1) の結果により $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する． □

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとき，$\boldsymbol{N}$ の無限部分集合 S に対して $S=\{n_1,n_2,\dots,n_k,\dots\}$ ($i \neq j$ ならば $n_i \neq n_j$) とおくと，(2.21) の 2), 3) の結果から，級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ は収束して，その値は S の要素の番号の付け方に依存しない．すなわち，$S=\{m_1,m_2,\dots,m_k,\dots\}$ ($i \neq j$ ならば $m_i \neq m_j$) とすると $\sum_{k=1}^{\infty} a_{m_k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$. である．この一定の値を $\sum_{n\in S} a_n$ で表すことにする．(S が有限部分集合ならば $\sum_{n\in S} a_n$ は単に S に属するすべての n についての a_n の和を表す.)

定理 2.23　級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が α に絶対収束するとする．S_k $(k=1,2,\dots)$ は $\boldsymbol{N}$ の部分集合で $\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k = \boldsymbol{N}$ であり，$k \neq l$ ならば $S_k \cap S_l = \emptyset$ が成り立つとする．$s_k = \sum_{n\in S_k} a_n$ とおくとき，$\sum_{k=1}^{\infty} s_k$ は α に絶対収束する．

証明 $S_k = \{n_{k,i} | i=1,2,\dots\}$ ($i<j$ ならば $n_{k,i} < n_{k,j}$) とし，$t_k = \sum_{i=1}^{\infty} |a_{n_{k,i}}|$, $t_{k,l} = \sum_{1\leqq i\leqq l} |a_{n_{k,i}}|$ とおくと，任意の $m,l \in \boldsymbol{N}$ に対して $\sum_{k=1}^{m} t_{k,l} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ だから，この左辺で $l\to\infty$ とすると $\sum_{k=1}^{m} t_k \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ である．従って単調増加数列 $\{\sum_{k=1}^{m} t_k\}_{m=1,2,\dots}$ は上に有界だから級数 $\sum_{k=1}^{\infty} t_k$ は収束する．$|s_k| \leqq t_k$ がすべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対して成り立つため (2.22) の 1) により $\sum_{k=1}^{\infty} s_k$ は絶対収束する．

$\varepsilon > 0$ を任意にとると (2.20) により，$N \in \boldsymbol{N}$ で「$m \geqq n > N$ ならば $\sum_{i=n}^{m} |a_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ かつ $|\sum_{i=1}^{n} a_i - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$」を満たすものがある．従って $n > N$ ならば $\sum_{i=n}^{\infty} |a_i| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ である．そこで $\{1,2,\dots,N\} \subset S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_M$ を満たす

$M\in\boldsymbol{N}$ をとれば $m>M$ ならば $\left|\sum_{k=1}^{m}s_k-\alpha\right|\leqq\left|\sum_{k=1}^{m}s_k-\sum_{i=1}^{N+1}a_i\right|+\left|\sum_{i=1}^{N+1}a_i-\alpha\right|\leqq\sum_{i=N+2}^{\infty}|a_i|+\left|\sum_{i=1}^{N+1}a_i-\alpha\right|<\varepsilon$ だから $\sum_{k=1}^{\infty}s_k$ は α に収束する． □

定理 2.24 級数 $\sum_{m=0}^{\infty}a_m$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ はともに絶対収束するとする． $c_k=\sum_{m+n=k}a_mb_n=\sum_{m=0}^{k}a_mb_{k-m}$ とおくとき, $\sum_{k=0}^{\infty}c_k$ は絶対収束して $\sum_{k=0}^{\infty}c_k=\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)$ が成り立つ．

証明 $p_i=\sum_{l=0}^{i}|a_l|$, $q_i=\sum_{l=0}^{i}|b_l|$, $r_i=\sum_{l=0}^{i}|c_l|$ とおくと, 仮定から定数 α, β で, すべての i に対して $p_i\leqq\alpha$, $q_i\leqq\beta$ が成り立つようなものがとれる．このとき $r_i\leqq\sum_{l=0}^{i}\sum_{k=0}^{l}|a_k||b_{l-k}|\leqq p_iq_i\leqq\alpha\beta$ となるため $\{r_i\}_{i=0,1,\dots}$ は上に有界である．故に級数 $\sum_{k=0}^{\infty}c_k$ は絶対収束する．

とくに, $d_l=\sum_{k=0}^{l}|a_k||b_{l-k}|$, $e_i=\sum_{l=0}^{i}d_l$ とおくと, 上の議論から単調増加数列 $\{e_i\}_{i=0,1,\dots}$ は上に有界であるため (2.11) により Cauchy 列であることに注意する．

$S=\sum_{l=0}^{\infty}a_l$, $T=\sum_{l=0}^{\infty}b_l$, $S_i=\sum_{l=0}^{i}a_l$, $T_i=\sum_{l=0}^{i}b_l$, $R_i=\sum_{l=0}^{i}c_l$ とおくと, $|S_iT_i-R_i|=|\sum_{\substack{u,v\leqq i\\ u+v>i}}a_ub_v|\leqq\sum_{\substack{u,v\leqq i\\ u+v>i}}|a_u||b_v|\leqq\sum_{l=i+1}^{2i}d_l=e_{2i}-e_i$. このことと, $ST-R_i=(S-S_i)T+S_i(T-T_i)+S_iT_i-R_i$ に注意すれば, $|ST-R_i|\leqq|S-S_i||T|+|S_i||T-T_i|+e_{2i}-e_i$ が得られる． $i\to\infty$ のとき, $|S-S_i|$, $|T-T_i|\to0$, $|S_i|\to|S|$ であり, $\{e_i\}_{i=0,1,\dots}$ は Cauchy 列になっているため $e_{2i}-e_i$ も 0 に収束する．従って上の不等式から $\lim_{i\to\infty}R_i=ST$ がわかる． □

定義 2.25 $z\in\boldsymbol{C}$ に対し, $a_n=\frac{z^n}{n!}$ により数列 $\{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ を定義すれば $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{n+1}=0$ だから (2.22) の 2) により級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ は絶対収束する．そこで $\exp z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ とおき, 関数 $\exp:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$ を指数関数という．

命題 2.26 $\exp(z+w)=(\exp z)(\exp w)$, $\exp 0=1$, $\exp(-z)=(\exp z)^{-1}$ が成り立つ．

証明 $a_n=\frac{z^n}{n!}$, $b_n=\frac{w^n}{n!}$ により数列 $\{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}$, $\{b_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ を定義すれば級数 $\sum_{m=0}^{\infty}a_m$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ はともに絶対収束するため, (2.24) により $c_k=\sum_{m+n=k}a_mb_n$ とおけば, $\sum_{k=0}^{\infty}c_k$ は絶対収束して $\sum_{k=0}^{\infty}c_k=\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)=(\exp z)(\exp w)$ が成り立つ．一方 $c_k=\sum_{m+n=k}\frac{z^m}{m!}\frac{w^n}{n!}=\sum_{m+n=k}\frac{1}{k!}\binom{k}{m}z^mw^n=\frac{1}{k!}(z+w)^k$ だから $\sum_{k=0}^{\infty}c_k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(z+w)^k=\exp(z+w)$ である．また, $\exp 0=1$ は指数関数の定義から明らかである． $(\exp z)(\exp(-z))=\exp(z+(-z))=\exp 0=1$ より $\exp(-z)=(\exp z)^{-1}$ が得られる． □

補題 2.27 x を正の実数とするとき $n\geqq m>2x$ ならば $\frac{x^n}{n!}<\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\frac{1}{2^{n-m+1}}$ である．従って $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$, $\sum_{k=m}^{n}\frac{x^k}{k!}<\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$ が成り立つ．

証明 $\frac{x^n}{n!}=\frac{x}{1}\frac{x}{2}\cdots\frac{x}{(m-1)}\frac{x}{m}\cdots\frac{x}{n}<\frac{x}{1}\frac{x}{2}\cdots\frac{x}{(m-1)}\frac{x}{(2x)}\cdots\frac{x}{(2x)}=\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\frac{1}{2^{n-m+1}}$, $\sum_{k=m}^{n}\frac{x^k}{k!}<\sum_{k=m}^{n}\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\frac{1}{2^{k-m+1}}=\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\left(1-\frac{1}{2^{n-m+1}}\right)<\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$. □

命題 2.28 $x\in\boldsymbol{C}$ に対し, $a_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ で数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ を定める．

1) x が正の実数ならば a_n は単調増加数列で, すべての n に対して, $a_n < \exp x$ が成り立つ.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \exp x$ である.

証明 1) 二項定理から $a_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{x}{n}\right)^k = 1 + x + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$ より $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < 1$ に注意すれば, $a_n < 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} < \exp x$ である. また $1 - \frac{i}{n+1} > 1 - \frac{i}{n}$ だから

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{x^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) - \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!}\left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right) \\
&\quad + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right) > 0.
\end{aligned}$$

2) $\varepsilon > 0$ を任意にとると, (2.27) から $K > 2|x|$ となる 3 以上の $K \in \boldsymbol{N}$ で, $n \geqq K$ ならば $\sum\limits_{k=K}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \leqq \frac{|x|^{K-1}}{(K-1)!} < \frac{\varepsilon}{4}$ となるものがある. また $0 < \varepsilon < 4$, $K > 2$ のとき, $n > (K-2)\left(1-\left(1-\frac{\varepsilon}{4(1+|x|)^{K-1}}\right)^{\frac{1}{K-2}}\right)^{-1}$ ならば $1-\left(1-\frac{K-2}{n}\right)^{K-2} < \frac{\varepsilon}{4(1+|x|)^{K-1}}$ であり, $2 \leqq k \leqq K-1$ ならば $\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^{k-1} \geqq \left(1-\frac{K-2}{n}\right)^{K-2}$ である. また, (2.27) から $\sum\limits_{k=2}^{K-1} \frac{1}{k!} = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=3}^{K-1} \frac{1}{k!} < 1$ が成り立つ. そこで, K と $(K-2)\left(1-\left(1-\frac{\varepsilon}{4(1+|x|)^{K-1}}\right)^{\frac{1}{K-2}}\right)^{-1}$ の両方より大きい自然数 N を 1 つとれば $0 < \varepsilon < 2$ に対し, $n > N$ ならば以下の式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - a_n\right| &= \left|\sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)\right| \\
&\leqq \sum_{k=2}^{K-1} \frac{|x|^k}{k!}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right) + \sum_{k=K}^{n} \frac{|x|^k}{k!}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right) \\
&\leqq \sum_{k=2}^{K-1} \frac{|x|^k}{k!}\left(1-\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^{k-1}\right) + \sum_{k=K}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \leqq \sum_{k=2}^{K-1} \frac{|x|^k}{k!}\left(1-\left(1-\frac{K-2}{n}\right)^{K-2}\right) + \frac{|x|^{K-1}}{(K-1)!} \\
&< \sum_{k=2}^{K-1} \frac{|x|^k}{k!} \frac{\varepsilon}{4(1+|x|)^{K-1}} + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{4} \sum_{k=2}^{K-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{|x|}{1+|x|}\right)^k + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{4} \sum_{k=2}^{K-1} \frac{1}{k!} + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

従って, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N \in \boldsymbol{N}$ で $n > N$ ならば $\left|a_n - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \exp x\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ を満たすものがあるから, このとき $|a_n - \exp x| \leqq \left|a_n - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| + \left|\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \exp x\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ である. □

3 連続関数

定義 3.1 X, Y を $\boldsymbol{C}$ の部分集合, $p, q \in \boldsymbol{C}$ とし, $f : X \to Y$ を関数とする. どんな $\varepsilon > 0$ に対しても $\delta > 0$ で「$0 < |x-p| < \delta$ かつ $x \in X$ ならば $|f(x) - q| < \varepsilon$」を満たすものがあるとき, f の p における極限値は q であるといい, このことを $\lim\limits_{x\to p} f(x) = q$ で表す.

注意 3.2 $p \in \boldsymbol{C}$, $r > 0$ に対して $B(p\,;r) = \{x \in \boldsymbol{C} \,|\, |x-p| < r\}$ とおくと, $\lim\limits_{x\to p} f(x) = q$ であるためには, どんな $\varepsilon > 0$ に対しても $\delta > 0$ で「$x \in B(p\,;\delta) \cap X$ かつ $x \neq p$ ならば $f(x) \in B(q\,;\varepsilon)$」を満たすようなものが存在することが必要十分である.

定理 3.3 X, Y を $\boldsymbol{C}$ の部分集合, $p, q \in \boldsymbol{C}$ とし, $f : X \to Y$ を関数とするとき, $\lim_{x \to p} f(x) = q$ であるためには,「p に収束する数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ が, すべての $n \in \boldsymbol{N}$ に対し, $a_n \neq p$ かつ $a_n \in X$ を満たせば $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = q$ である.」ことが必要十分である.

証明 $\lim_{x \to p} f(x) = q$ が成り立つとして $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ をすべての $n \in \boldsymbol{N}$ に対し, $a_n \neq p$ かつ $a_n \in X$ を満たし, p に収束する数列とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ で「$0 < |x - p| < \delta$ かつ $x \in X$ ならば $|f(x) - q| < \varepsilon$」を満たすものがあり, 自然数 N で「$n > N$ ならば $|a_n - p| < \delta$」を満たすものがある. 従って $n > N$ ならば $0 < |a_n - p| < \delta$ となり, $a_n \in X$ だから $|f(a_n) - q| < \varepsilon$ が成り立ち, $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = q$ である.

もし $\lim_{x \to p} f(x) = q$ が成り立たないとすれば, $\rho > 0$ で, 「任意の自然数 n に対し, $0 < |a_n - p| < \frac{1}{n}$ かつ $|f(a_n) - q| \geqq \rho$ を満たす $a_n \in X$ が存在する.」という条件を満たすものある. このとき $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ は p に収束して, すべての $n \in \boldsymbol{N}$ に対し, $a_n \neq p$ かつ $a_n \in X$ を満たすが, $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = q$ は成り立たない. 故に「p に収束する数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ が, すべての $n \in \boldsymbol{N}$ に対し, $a_n \neq p$ かつ $a_n \in X$ を満たせば $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = q$ である.」という条件が成り立てば $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = q$ が成り立つ. $\square$

命題 3.4 関数 $f, g : X \to Y$ に対し, $\lim_{x \to p} f(x)$, $\lim_{x \to p} g(x)$ がともに存在するとき以下の等式が成り立つ. 但し, 4) においては $\lim_{x \to p} g(x) \neq 0$ であると仮定する.

1) $\lim_{x \to p} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to p} f(x) + \lim_{x \to p} g(x)$
2) $\lim_{x \to p} cf(x) = c \lim_{x \to p} f(x)$
3) $\lim_{x \to p} (f(x)g(x)) = \lim_{x \to p} f(x) \lim_{x \to p} g(x)$
4) $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to p} f(x)}{\lim_{x \to p} g(x)}$

証明 ε を任意の正の実数とし, $\lim_{x \to p} f(x) = a$, $\lim_{x \to p} g(x) = b$ とおく.

1) 仮定から $\delta_1, \delta_2 > 0$ で「$0 < |x - p| < \delta_1$ かつ $x \in X$ ならば $|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$」, 「$0 < |x - p| < \delta_2$ かつ $x \in X$ ならば $|g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$」を満たすようなものがある. δ_1, δ_2 の小さい方を δ とすれば, $0 < |x - p| < \delta$ かつ $x \in X$ ならば $|f(x) + g(x) - (a + b)| \leqq |f(x) - a| + |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ となるため $\lim_{x \to p} (f(x) + g(x)) = a + b$ である.

2) 仮定から $\delta > 0$ で「$0 < |x - p| < \delta$ かつ $x \in X$ ならば $|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{1+|c|}$」を満たすようなものがあるから, $0 < |x - p| < \delta$ かつ $x \in X$ ならば $|cf(x) - ca| = |c||f(x) - a| < \frac{\varepsilon|c|}{1+|c|} < \varepsilon$ となるため, $\lim_{x \to p} cf(x) = ca$ である.

3) まず $\delta_1 > 0$ で「$0 < |x - p| < \delta_1$ かつ $x \in X$ ならば $|f(x) - a| < 1$」となるものがある. また, $\delta_2, \delta_3 > 0$ で「$0 < |x - p| < \delta_2$ かつ $x \in X$ ならば $|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}$」,「$0 < |x - p| < \delta_3$ かつ $x \in X$ ならば $|g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2(1+|a|)}$」を満たすようなものがある. そこで δ_1, δ_2, δ_3 のうちで一番小さいものを δ とすれば, $0 < |x - p| < \delta$ かつ $x \in X$ ならば $|f(x)| = |f(x) - a + a| \leqq |f(x) - a| + |a| < 1 + |a|$ より $|f(x)g(x) - ab| = |f(x)(g(x) - b) + b(f(x) - a)| \leqq |f(x)||g(x) - b| + |b||f(x) - a| < (1 + |a|)\frac{\varepsilon}{2(1+|a|)} + |b|\frac{\varepsilon}{2(1+|b|)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

4) $b \neq 0$ より $\delta_1 > 0$ で「$0 < |x - p| < \delta_1$ かつ $x \in X$ ならば $|g(x) - b| < \frac{|b|}{2}$」となるものがある. また $\delta_2 > 0$ で「$0 < |x - p| < \delta_2$ かつ $x \in X$ ならば $|g(x) - b| < \frac{\varepsilon|b|^2}{2}$」となるものがある. δ_1, δ_2 の小さい方を δ とすれば, $0 < |x - p| < \delta$ かつ $x \in X$ ならば $|b| = |b - g(x)| + |g(x)| < \frac{|b|}{2} + |g(x)|$ より $|g(x)| > \frac{|b|}{2}$ となるため $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|g(x)-b|}{|b||g(x)|} < \frac{\varepsilon|b|^2}{2}\frac{2}{|b|^2} = \varepsilon$ である. 従って $\lim_{x \to p} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}$ が成り立ち, 3) を用いれば結果が得られる. $\square$

定義 3.5 $f : X \to Y$ を関数とし, $p \in X$ に対し, $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ が成り立つとき, f は p で連続であるという. すべての $p \in X$ で f が連続であるとき, f を連続関数という.

(3.4) からただちに, 次のことがわかる.

命題 3.6 関数 $f, g : X \to Y$ がともに $p \in X$ において連続ならば, 関数 $f + g, cf, fg : X \to Y$ はすべて $p \in X$ において連続である. また, すべての $x \in X$ に対して $g(x) \neq 0$ ならば, 関数 $\frac{f}{g} : X \to Y$ も $p \in X$ において連続である. 従って, 連続関数の和, スカラー倍, 積は連続関数であり, 常に 0 でない値をとる連続関数による商も連続関数である.

命題 3.7 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を関数とする．$\lim_{x\to p} f(x)$ が存在して, g が $\lim_{x\to p} f(x)$ において連続ならば, $\lim_{x\to p} g(f(x)) = g(\lim_{x\to p} f(x))$ である．とくに, f が $p \in X$ において連続, g が $f(p)$ において連続ならば, 合成関数 $g\circ f$ は p において連続である．従って, 連続関数の合成関数は連続関数である．

証明 $\lim_{x\to p} f(x) = q$ とおく．任意の $\varepsilon > 0$ に対し, g の q における連続性から, $\delta > 0$ で「$|y - q| < \delta$ かつ $y \in Y$ ならば $|g(y) - g(q)| < \varepsilon$」を満たすものがある．また $\lim_{x\to p} f(x) = q$ から $\rho > 0$ で「$0 < |x - p| < \rho$ かつ $x \in X$ ならば $|f(x) - q| < \delta$」を満たすものがある．したがって $0 < |x - p| < \rho$ かつ $x \in X$ ならば $|g(f(x)) - g(q)| < \varepsilon$ が成り立つため $\lim_{x\to p} g(f(x)) = q$ である． □

定理 3.8 (中間値の定理) $f : X \to \boldsymbol{R}$ を実数値連続関数とする．$[a, b] \subset X$ であり, $f(a) \neq f(b)$ ならば, $f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の値 d に対し, $f(c) = d$ となる $c \in (a, b)$ が存在する．

証明 $p, q \in [a, b]$ に対して y が $f(p)$ と $f(q)$ の間にあるとき, y は $f(p)$ と $f(\frac{p+q}{2})$ の間か $f(\frac{p+q}{2})$ と $f(q)$ の間にあることに注意する．そこで, $u(p, q)$ を前者の場合は $u(p, q) = \frac{3p+q}{4}$, 後者の場合は $u(p, q) = \frac{p+3q}{4}$ により定める．このとき, $\left|u(p, q) - \frac{p+q}{2}\right| = \frac{|q-p|}{4}$ であり, y は $f\left(u(p, q) - \frac{|q-p|}{4}\right)$ と $f\left(u(p, q) + \frac{|q-p|}{4}\right)$ の間にあることに注意する．

実数列 $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ を以下のように定める．$x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$ として, 帰納的に $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ $(n \geqq 3)$ が次の条件を満たすように定まったと仮定する．

(1) $i = 0, 1, \ldots, n-2$ に対して $|x_{i+1} - x_i| = \frac{b-a}{2^i}$.
(2) $i = 2, \ldots, n-1$ に対して y は $f\left(x_i - \frac{b-a}{2^{i-1}}\right)$ と $f\left(x_i + \frac{b-a}{2^{i-1}}\right)$ の間にある．

$x_n = u\left(x_{n-1} - \frac{b-a}{2^{n-2}}, x_{n-1} + \frac{b-a}{2^{n-2}}\right)$ で x_n を定めれば, 上で述べたことから $|x_n - x_{n-1}| = \frac{b-a}{2^{n-1}}$ であり, y は $f\left(x_n - \frac{b-a}{2^{n-1}}\right)$ と $f\left(x_n + \frac{b-a}{2^{n-1}}\right)$ の間にある．このように定めた数列はコーシー列である．実際, $|x_{n+k} - x_n| \leqq \sum_{i=0}^{k-1} |x_{n+i+1} - x_{n+i}| = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{b-a}{2^{n+i}} < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b-a}{2^{n+i}} = \frac{b-a}{2^{n-1}}$ が成り立つ．(2.12) の (vi) からこの数列は収束して, $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ とおくと, $x_0, x_1, \ldots$ の定め方から, これらはすべて $[a, b]$ に属するため (2.4) の 1) により $c \in [a, b]$ である．

$f(c) = y$ が成り立つことをみる．$\left(y - f\left(x_n - \frac{b-a}{2^{n-1}}\right)\right)\left(y - f\left(x_n + \frac{b-a}{2^{n-1}}\right)\right) \leqq 0$ がすべての n について成り立ち, $n \to \infty$ のとき $x_n - \frac{b-a}{2^{n-1}}, x_n + \frac{b-a}{2^{n-1}} \to c$ だから (3.3) と (2.4) の 1) から $(y - f(c))^2 \leqq 0$ が得られる．従って, $f(c) = y$ である． □

定義 3.9 $f : X \to \boldsymbol{R}$ を実数値関数とする．実数 M が, 条件「すべての $x \in X$ に対して $f(x) \leqq M$」と「$f(p) = M$ となる $p \in X$ がある.」を満たすとき, M を f の最大値という．また, 実数 m が, 条件「すべての $x \in X$ に対して $f(x) \geqq M$」と「$f(p) = M$ となる $p \in X$ がある.」を満たすとき, M を f の最小値という．

定理 3.10 (最大値・最小値の定理) 閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ は最大値と最小値を持つ．

証明 もし集合 $S = \{y \in \boldsymbol{R} | f(x) = y$ を満たす $x \in [a, b]$ がある $\}$ が上に有界でないとすれば, 任意の自然数 n に対して $f(a_n) > n$ を満たす $a_n \in [a, b]$ がある．(2.12) の (v) により, $[a, b]$ に含まれる数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は収束する部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1,2,\ldots}$ をもつ．$\lim_{p\to\infty} a_{n_k} = p$ とおけば, f の連続性により $\lim_{p\to\infty} f(a_{n_k}) = f(p)$ が成り立つ．一方 $f(a_{n_k}) > n_k \geqq k$ となるため, 実数列 $\{f(a_{n_k})\}_{k=1,2,\ldots}$ は収束しないため, 矛盾が生じる．故に S は上に有界となり, (2.12) の (iii) により S の上限が存在する．この上限を M とすれば, 任意の自然数 l に対して $f(b_l) > M - \frac{1}{l}$ を満たす $b_l \in [a, b]$ がある．再び (2.12) の (v) により, $[a, b]$ に含まれる数列 $\{b_l\}_{l=1,2,\ldots}$ は収束する部分列 $\{b_{l_k}\}_{k=1,2,\ldots}$ をもつ．$\lim_{p\to\infty} b_{l_k} = q$ とおけば, f の連続性により $\lim_{p\to\infty} f(b_{l_k}) = f(q)$ が成り立つ．一方 $M - \frac{1}{k} \leqq M - \frac{1}{l_k} < f(\boldsymbol{b}_{l_k}) \leqq M$ となるため, 実数列 $\{f(b_{l_k})\}_{k=1,2,\ldots}$ は M に収束する．従って $M = f(q)$ を満たす $q \in X$ があるため, M は f の最大値である．同様にして f の最小値の存在も示される． □

定義 3.11 X を実数の部分集合とする．実数値関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ が「$x < y$ ならば $f(x) \leqq f(y)$」を満たすとき, f を

単調増加関数といい，「$x < y$ ならば $f(x) < f(y)$」を満たすとき，f を狭義単調増加関数という．また，f が「$x < y$ ならば $f(x) \geqq f(y)$」を満たすとき，f を単調減少関数といい，「$x < y$ ならば $f(x) > f(y)$」を満たすとき，f を狭義減少増加関数という．

定理 3.12　閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ が単射ならば f は狭義単調増加関数であるか，または狭義減少増加関数である．さらに，前者の場合は f は $[f(a), f(b)]$ への全射であり，後者の場合は $[f(b), f(a)]$ への全射である．

証明 $a \neq b$ で f は単射だから $f(a) \neq f(b)$ である．$f(a) < f(b)$ の場合は f が狭義単調増加関数であることを示す．まず，任意の $x \in (a, b)$ に対して $f(a) < f(x) < f(b)$ である．実際，もし $f(x) < f(a)$ ならば $f(x) < p < f(a)$ となる p に対し，区間 $[a, x]$ において中間値の定理から $f(c) = p$ となる $c \in (a, x)$ があり，$f(x) < p < f(a) < f(b)$ でもあるから，区間 $[x, b]$ において中間値の定理により $f(d) = p$ となる $d \in (x, b)$ がある．$f(c) = f(d) = p$ であるが，$c < x < d$ であるため，これは f が単射であることに矛盾する．$f(x) > f(b)$ としても，同様に矛盾が生じるため，$x \in (a, b)$ ならば $f(a) < f(x) < f(b)$ である．

$a \leqq x < y \leqq b$ のとき，上の結果から $f(a) < f(y)$ だから，区間 $[a, y]$ に対して上の結果を用いると $f(x) < f(y)$ が得られ f は狭義単調増加関数である．

$f(a) < f(b)$ の場合は f の代りに $-f$ を考えれば上の場合に帰着して，$-f$ は狭義単調増加関数になるため，f は狭義減少増加関数である．後半の主張は中間値の定理から明らかである．□

系 3.13　I を区間 (すなわち I は (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, $\boldsymbol{R}$ のいずれか) とするとき，連続関数 $f : I \to \boldsymbol{R}$ が単射ならば f は狭義単調増加関数であるか，または狭義減少増加関数である．

証明 $c, d \in I$, $c < d$ とすると (3.12) により，f の閉区間 $[c, d]$ において狭義単調増加関数か狭義減少増加関数のいずれかである．後者の場合は，$-f$ を考えることにより，前者の場合に帰着できる．前者の場合，$x, y \in I$, $x < y$ に対し，c と x の小さい方を p, d と y の大きい方を q とすれば，f の閉区間 $[p, q]$ への制限は狭義単調増加関数か狭義減少増加関数のいずれかであり，$[c, d] \subset [p, q]$ だから f は閉区間 $[p, q]$ において，狭義単調増加関数となる．このとき $x, y \in [p, q]$ だから $f(x) < f(y)$ となり，f は狭義単調増加関数である．□

定理 3.14　区間 I で定義された連続関数 $f : I \to J$ が逆関数 $f^{-1} : J \to I$ をもてば f^{-1} も連続関数である．

証明 (3.13) により f は狭義単調増加関数か狭義減少増加関数のいずれかである．後者の場合は，$-f$ を考えることにより，前者の場合に帰着できるので，前者の場合について考える．任意の $p \in J$ をとり，$q = f^{-1}(p)$ とおく．$[q - r, q] \subset I$ となる $r > 0$ があるとき，f は単調増加関数だから，区間 $[q - r, q]$ を $[f(q - r), p]$ の上に 1 対 1 に写す．従って，任意の $0 < \varepsilon < r$ に対し，f^{-1} は $(f(q - \varepsilon), p]$ を $(q - \varepsilon, q]$ の上に 1 対 1 に写すため，$\delta = p - f(q - \varepsilon)$ とおけば「$p - \delta < x \leqq p$ ならば $q - \varepsilon < f^{-1}(x) \leqq q$」が成り立つ．同様にして $[q, q + r] \subset I$ となる $r > 0$ があるとき，$\delta = f(q + \varepsilon) - p$ とおけば「$p \leqq x < p + \delta$ ならば $q \leqq f^{-1}(x) < q + \varepsilon$」が成り立つ．故に，$f^{-1}$ は p において連続である．□

定義 3.15　$X \subset \boldsymbol{C}$ とし，X の部分集合 D が次の条件を満たすとき，D は X で稠密であるという．

「任意の $p \in X$ に対し，D に含まれる数列で p に収束するものがある.」

命題 3.16　$X, Y \subset \boldsymbol{C}$, $f, g : X \to Y$ を連続関数とする．D が稠密な X の部分集合で，「$x \in D$ ならば $f(x) = g(x)$」が成り立てば $f = g$ である．

証明 $p \in X$ に対し，D に含まれる数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ で p に収束するものがあり，仮定により，すべての自然数 n に対して $f(a_n) = g(a_n)$ が成り立つ．よって f, g の連続性から $f(p) = \lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = \lim\limits_{n \to \infty} g(a_n) = g(p)$ が得られ，$f = g$ である．□

4 指数関数

(2.25) において指数関数 $\exp : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ を $\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ によって定義し, (2.26) が成り立つことをみたが, 指数関数はさらに次の性質をもつ.

命題 4.1 1) $x \in \boldsymbol{R}$ ならば $\exp x$ は正の実数である.

2) $x, y \in \boldsymbol{R}$, $x < y$ ならば $\exp x < \exp y$ である.

3) $\exp : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ は連続関数である.

4) 任意の正の実数 y に対して, $\exp x = y$ を満たす実数 x がある.

証明 1) $x \in \boldsymbol{R}$ ならば $\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \in \boldsymbol{R}$ である. (2.26) により $\exp x = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geqq 0$. さらに $\exp x \exp(-x) = \exp(x + (-x)) = \exp 0 = 1$ より $\exp x \neq 0$ だから $\exp x$ は正の実数である.

2) $x < y$ のとき, (2.26) により $\frac{\exp y}{\exp x} = (\exp y)(\exp x)^{-1} = (\exp y)(\exp(-x)) = \exp(y - x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y-x)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y-x)^n}{n!} > 1$ だから $\exp x < \exp y$ である.

3) $z, p \in \boldsymbol{C}$ に対し, $|z-p| < 1$ ならば $|\exp z - \exp p| = |\exp(p+(z-p)) - \exp p| = |(\exp p)(\exp(z-p)) - \exp p| = |\exp p||\exp(z-p) - 1| = |\exp p|\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-p)^n}{n!}\right| \leqq |\exp p||z-p|\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z-p|^{n-1}}{n!}\right) < |\exp p||z-p|\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\right) = |\exp p||z-p|(\exp 1 - 1)$ である. 従って $|z-p| < 1$ ならば $|\exp z - \exp p| < |\exp p|(\exp 1 - 1)|z-p|$ となるため, $z \to p$ ならば $\exp z \to \exp p$ である.

4) $\exp 1 = 1 + 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} > 2$ だから自然数 n に対して $\exp n = \exp(n1) = (\exp 1)^n > 2^n$ である. これより $\exp(-n) = (\exp n)^{-1} < 2^{-n}$. $y > 0$ に対して $2^{-m} < y < 2^n$ を満たす自然数 m, n があるため, $\exp(-m) < y < \exp n$ である. 従って 1), 3) により区間 $[-m, n]$ において中間値の定理が適用できるため, $\exp x = y$ を満たす $x \in (-m, n)$ がある. □

上の 1), 3), 4) の結果から, 実数 x を $\exp x$ に対応させる関数は $\boldsymbol{R}$ から $(0, \infty)$ への全射である. この関数も $\exp : \boldsymbol{R} \to (0, \infty)$ で表すことにすれば, 2) により $\exp$ は狭義単調増加関数だから, 全単射である. $\exp 1 = e$ とおくことにする.

定義 4.2 指数関数 $\exp : \boldsymbol{R} \to (0, \infty)$ の逆関数を対数関数と呼び, $\log : (0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ で表す.

命題 4.3 狭義単調増加関数 $f : X \to Y$ $(X, Y \subset \boldsymbol{R})$ が逆関数 $f^{-1} : Y \to X$ をもつとき, f^{-1} も狭義単調増加関数である. また, 狭義単調減少関数 $f : X \to Y$ $(X, Y \subset \boldsymbol{R})$ が逆関数 $f^{-1} : Y \to X$ をもつとき, f^{-1} も狭義単調減少関数である.

証明 $x, y \in Y$, $x < y$ とする. もし $f^{-1}(y) \leqq f^{-1}(x)$ とすると f は単調増加関数だから $y = f(f^{-1}(y)) \leqq f(f^{-1}(x)) = x$ となって $x < y$ と矛盾する. 従って $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$ となるため f^{-1} は狭義単調増加関数である. 後半も同様である. □

命題 4.4 1) $\log(\exp x) = x$, $\exp(\log y) = y$ がすべての $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in (0, \infty)$ に対して成り立つ.

2) $\log : (0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ は $\log 1 = 0$ を満たす狭義単調増加関数である.

3) $x, y \in (0, \infty)$ に対し, $\log(xy) = \log x + \log y$ である.

証明 1) $\log(\exp x) = x$, $\exp(\log y) = y$ は $\log$ が $\exp$ の逆関数であることから明らか.

2) $\exp 0 = 1$ より $\log 1 = \log(\exp 0) = 0$. $\exp$ は狭義単調増加関数だから (4.3) により 2) $\log$ は狭義単調増加関数である.

3) $z = \log x + \log y$ とおくと $\exp z = \exp(\log x + \log y) = (\exp(\log x))(\exp(\log y)) = xy$ だから $\log(xy) = \log(\exp z) = z = \log x + \log y$ である. $\square$

定義 4.5 a を正の実数とするとき, 関数 $\exp_a : \boldsymbol{R} \to (0, \infty)$ を $\exp_a x = \exp(x \log a)$ により定義する.

命題 4.6 1) $\exp_a(x+y) = (\exp_a x)(\exp_a y)$, $\exp_{\exp_a x} y = \exp_a(xy)$.

2) x が有理数のとき, $\exp_a x = a^x$.

3) $0 < a < 1$ のとき, $\exp_a$ は狭義単調減少関数であり, $a > 1$ のとき, $\exp_a$ は狭義単調増加関数である.

4) $\exp_a : \boldsymbol{R} \to (0, \infty)$ は連続関数であり, $a \neq 1$ ならば関数 $\log_a : (0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ を $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$ で定めると, これは $\exp_a$ の逆関数である.

証明 1) $\exp_a(x+y) = \exp((x+y)\log a) = \exp(x \log a + y \log a) = \exp(x \log a)\exp(y \log a) = (\exp_a x)(\exp_a y)$. $\exp_{\exp_a x} y = \exp(y \log(\exp_a x)) = \exp(y \log(\exp(x \log a))) = \exp(yx \log a) = \exp_a(xy)$.

2) まず $\exp_a 1 = \exp(\log a) = a$ であり, 任意の自然数 n に対して, 1) のはじめの式から $\exp_a n = \exp_a(n1) = (\exp_a 1)^n = a^n$. また $\exp_a 0 = \exp 0 = 1$. 1) の最初の式で, $y = -x$ とすると $(\exp_a x)(\exp_a(-x)) = \exp_a 0 = 1$ だから $\exp_a(-x) = (\exp_a x)^{-1}$ である. 従って $\exp_a(-n) = (\exp_a n)^{-1} = (a^n)^{-1} = a^{-n}$ となるため, 任意の整数 n に対して $\exp_a n = a^n$ である. x を任意の有理数として $x = \frac{p}{q}$ (p は整数, q は自然数) とおく. $(\exp_a x)^q = \exp_a(qx) = \exp_a p = a^p$ であり, $a^x = a^{\frac{p}{q}}$ は $X^q = a^p$ の唯一の正の解だから $\exp_a x = a^x$ である.

3) $x < y$ とする. $0 < a < 1$ のとき, $\log a < 0$ だから $x \log a > y \log a$ であり, $\exp$ は狭義単調増加関数だから $\exp_a x = \exp(x \log a) > \exp(y \log a) = \exp_a y$. $a > 1$ のとき, $\log a > 0$ だから $x \log a < y \log a$. 従って $\exp_a x = \exp(x \log a) < \exp(y \log a) = \exp_a y$.

4) $\exp_a$ は $\log a$ 倍する関数と連続関数 $\exp$ の合成関数だから連続である. 任意の $y \in (0, \infty)$ に対して $\exp_a(\log_a y) = \exp\left(\left(\frac{\log y}{\log a}\right)\log a\right) = \exp(\log y) = y$. また, 任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $\log_a(\exp_a x) = \frac{\log(\exp(x \log a))}{\log a} = \frac{x \log a}{\log a} = x$. 故に $\log_a$ は $\exp_a$ の逆関数である. $\square$

$x \in \boldsymbol{R}$ に対して $\exp_a$ を a^x と表すことにすると, 上の 1) は指数法則 $a^{x+y} = a^x a^y$, $(a^x)^y = a^{xy}$ に他ならない.

定義 4.7 $\log_a : (0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ を a を底とする対数関数という.

命題 4.8 a を 1 でない正の実数, b, x, y を正の実数, z を実数とすると $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a b^z = z \log_a b$.

証明 $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ は $\log_a$ の定義と (4.4) の 3) からただちに示される. $\log_a b^z = \frac{\log(\exp_b z)}{\log a} = \frac{\log(\exp(z \log b))}{\log a} = \frac{z \log b}{\log a} = z\frac{\log b}{\log a} = z \log_a b$ $\square$

定理 4.9 関数 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ は, 任意の $x, y \in \boldsymbol{R}$ に対し $f(x+y) = f(x) + f(y)$ を満たすとする. f がある $a \in \boldsymbol{R}$ において連続ならば, すべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $f(x) = f(1)x$ である.

証明 任意の $x, h \in \boldsymbol{R}$ に対し, $f(x+h) - f(x) = f(x) + f(h) - f(x) = f(h) = f(a) + f(h) - f(a) = f(a+h) - f(a)$ であり, a における f の連続性から $h \to 0$ のとき, $f(x+h) - f(x) \to 0$ となるため f は x において連続である. まず仮定から, 任意の自然数 n と実数 x に対して $f(nx) = nf(x)$ が成り立つ. とくに $x = 1$ として $f(n) = nf(1) = f(1)n$ である. また $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ より $f(0) = 0$. さらに $f(n) + f(-n) = f(n + (-n)) = f(0) = 0$ だから $f(-n) = -f(n) = -f(1)n = f(1)(-n)$. 従って, 任意の整数 n に対して $f(n) = f(1)n$ である. x を任意の有理数として $x = \frac{p}{q}$ (p は整数, q は自然数) とおく. $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $g(x) = f(1)x$ で定義すれば, $qf(x) = f(qx) = f(p) = f(1)p$ だから $f(x) = f(1)x = g(x)$ である. 任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ となる有理数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ があるため f, g の連続性から, $f(x) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(\lim_{n\to\infty} a_n) = g(x)$ である. $\square$

定理 4.10 関数 $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ は, 任意の $x, y \in \boldsymbol{R}$ に対し $f(x+y) = f(x)f(y)$ を満たすとする. f がある $a \in \boldsymbol{R}$ において連続で, $f(b) \neq 0$ となる $b \in \boldsymbol{R}$ が存在すれば, すべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $f(x) = \exp(x \log f(1))$ である.

証明 もし $f(c) = 0$ となる $c \in \boldsymbol{R}$ が存在すれば, 任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $f(x) = f(x-c+c) = f(x-c)f(c) = 0$ となるため, $f(b) \neq 0$ となる $b \in \boldsymbol{R}$ の存在と矛盾する. 従って, すべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $f(x) \neq 0$ である. さらに $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})^2 \geqq 0$ だから, すべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $f(x) > 0$ である. そこで, $g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $g(x) = \log f(x)$ で定めれば, (3.7) により g は $a \in \boldsymbol{R}$ において連続であり, 仮定と (4.4) の 3) により, g は (4.9) における仮定を満たす. 従ってすべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $\log f(x) = g(x) = g(1)x = x \log f(1)$ だから $f(x) = \exp(x \log f(1))$ である. $\square$

定理 4.11 関数 $f: (0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ は, 任意の $x, y \in \boldsymbol{R}$ に対し $f(xy) = f(x) + f(y)$ を満たすとする. f がある $a \in \boldsymbol{R}$ において連続ならば, すべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $f(x) = f(\exp 1) \log x$ である.

証明 $g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $g(x) = f(\exp\, x)$ で定めれば, (3.7) により g は $a \in \boldsymbol{R}$ において連続であり, 仮定と (2.26) の 3) により, g は (4.9) における仮定を満たす. 従ってすべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $f(\exp\, x) = g(x) = g(1)x = f(\exp 1)x$ だから $f(x) = f(\exp 1) \log x$ である. $\square$

5 微分

定義 5.1 $X, Y \subset \boldsymbol{R}$, $p \in X$ とする. 関数 $f: X \to Y$ に対し, 極限値 $\lim\limits_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}$ が存在するとき, f は p において微分可能であるという. この極限値を f の p における微分係数と呼んで, $f'(p)$ で表す.

注意 5.2 上記の定義において, 通常 p は「$(p-r, p+r) \subset X$ を満たす $r > 0$ がある.」という条件を満たすことを仮定する. この条件を満たす点を X の「内点」と呼ぶ. 以後, 与えられた関数の定義域の点における微分可能性について論じるとき, その点は定義域の内点であるものとする.

定義 5.3 関数 $f: X \to Y$ が X のすべての点において微分可能であるとき, f は微分可能であるという. このとき, $x \in X$ を $f'(x)$ に対応させる関数を f の導関数と呼び, $f': X \to \boldsymbol{R}$ で表す.

例 5.4 1) $\exp\, x = e^x$ の導関数は e^x である. 実際 $\left|\frac{\exp(x+h)-\exp\, x}{h} - \exp\, x\right| = \left|\frac{(\exp\, x)(\exp\, h)-\exp\, x}{h} - \exp\, x\right| = (\exp\, x)\left|\frac{\exp\, h-1-h}{h}\right| = (\exp\, x)\left|\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!}\right| \leqq (\exp\, x)\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{|h|^{n-1}}{n!} = (\exp\, x)|h|\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{|h|^{n-2}}{n!}$ だから $|h| < 1$ ならば $\left|\frac{\exp(x+h)-\exp\, x}{h} - \exp\, x\right| \leqq (\exp\, x)|h|\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = (e-2)(\exp\, x)|h|$ となるため, $h \to 0$ のとき $\frac{\exp(x+h)-\exp\, x}{h} \to \exp\, x$ である.

2) n を自然数とすれば x^n の導関数は nx^{n-1} である. 実際 $\left|\frac{(x+h)^n-x^n}{h} - nx^{n-1}\right| = \left|\sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1}x^{n-k}\right| = |h|\left|\sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-2}x^{n-k}\right|$ だから $h \to 0$ のとき $\frac{(x+h)^n-x^n}{h} \to nx^{n-1}$ である.

命題 5.5 $f: X \to Y$ が $p \in X$ において微分可能であるとき, 条件「$0 < |x-p| < c$ ならば $|f(x)-f(p)| < K|x-p|$」を満たす正の実数 c, K がある. とくに, f は p において連続である.

証明 $\lim\limits_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = f'(p)$ より $c > 0$ で, $(p-c, p+c) \subset X$ かつ「$0 < |x-p| < c$ ならば $\left|\frac{f(x)-f(p)}{x-p} - f'(p)\right| < 1$」を満たすものがある. 従って $0 < |x-p| < c$ ならば $|f(x)-f(p)-f'(p)(x-p)| < |x-p|$ となるため, $|f(x)-f(p)| = |f(x)-f(p)-f'(p)(x-p)+f'(p)(x-p)| \leqq |f(x)-f(p)-f'(p)(x-p)| + |f'(p)(x-p)| < |x-p| + |f'(p)||x-p| = (1+|f'(p)|)|x-p|$ である. そこで, $A = 1 + |f'(p)|$ とおけばよい. $\square$

命題 5.6　$f : X \to Y$ が $p \in X$ において微分可能であるためには $\lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)-a(x-p)}{x-p} = 0$ を満たすような実数 a が存在することが必要十分である.

証明　$f : X \to Y$ が $p \in X$ において微分可能だとすれば, $\lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)-f'(p)(x-p)}{x-p} = \lim\limits_{x\to p}\left(\frac{f(x)-f(p)}{x-p} - f'(p)\right) = \lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} - f'(p) = 0$. 逆に $\lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)-a(x-p)}{x-p} = 0$ を満たすような実数 a が存在すれば $\lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = \lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} - a + a = \lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)-a(x-p)}{x-p} + a = a$ だから, 極限値 $\lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ は存在する. □

上の証明の後半から, $\lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)-a(x-p)}{x-p} = 0$ を満たすような実数 a が存在すれば, そのような a は $f'(p)$ に一致する.

命題 5.7　実数値関数 $f, g : X \to \boldsymbol{R}$ がともに $p \in X$ で微分可能であるとき, 次の等式が成り立つ. ただし 4) においては, すべての $x \in X$ において $g(x) \neq 0$ であるとする.

1) $(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p)$　　2) $(rf)'(p) = rf'(p)$ ($r \in \boldsymbol{R}$ は定数)

3) $(fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$　　4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p)-f(p)g'(p)}{g(p)^2}$

証明　1) $\lim\limits_{x\to p} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(p)}{x-p} = \lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)+g(x)-(f(p)+g(p))}{x-p} = \lim\limits_{x\to p}\left(\frac{f(x)-f(p)}{x-p} + \frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right) = \lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} + \lim\limits_{x\to p} \frac{g(x)-g(p)}{x-p} = f'(p) + g'(p)$

2) $\lim\limits_{x\to p} \frac{(rf)(x)-(rf)(p)}{x-p} = \lim\limits_{x\to p} \frac{rf(x)-rf(p)}{x-p} = \lim\limits_{x\to p} r\frac{f(x)-f(p)}{x-p} = r\lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = rf'(p)$

3) (5.5) から g は p で連続だから $\lim\limits_{x\to p} g(x) = g(p)$ である. 故に $\lim\limits_{x\to p} \frac{(fg)(x)-(fg)(p)}{x-p} = \lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)g(x)-f(p)g(p)}{x-p} = \lim\limits_{x\to p}\left(\frac{f(x)-f(p)}{x-p}g(x) + f(p)\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right) = \lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} \lim\limits_{x\to p} g(x) + f(p)\lim\limits_{x\to p} \frac{g(x)-g(p)}{x-p} = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$.

4) $\lim\limits_{x\to p} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x)-\left(\frac{1}{g}\right)(p)}{x-p} = \lim\limits_{x\to p} \frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right)-\left(\frac{1}{g(p)}\right)}{x-p} = \lim\limits_{x\to p} \frac{-g(x)+g(p)}{g(x)g(p)(x-p)} = -\lim\limits_{x\to p} \frac{g(x)-g(p)}{x-p} \lim\limits_{x\to p} \frac{1}{g(x)}\frac{1}{g(p)} = -\frac{g'(p)}{g(p)^2}$ よって $\left(\frac{1}{g}\right)'(p) = -\frac{g'(p)}{g(p)^2}$ となるため, 3) の結果から $\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \left(f\frac{1}{g}\right)'(p) = f'(p)\left(\frac{1}{g}\right)(p) + f(p)\left(\frac{1}{g}\right)'(p) = f'(p)\frac{1}{g(p)} - f(p)\frac{g'(p)}{g(p)^2} = \frac{f'(p)g(p)-f(p)g'(p)}{g(p)^2}$. □

定理 5.8　(合成関数の微分法) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ がそれぞれ $p \in X$, $f(p) \in Y$ で微分可能ならば合成関数 $g\circ f : X \to Z$ は p において微分可能であり, $(g\circ f)'(p) = g'(f(p))f'(p)$ が成り立つ.

証明　$\varphi(x) = f(x) - f(p) - f'(p)(x-p)$, $\psi(y) = g(y) - g(f(p)) - g'(f(p))(y - f(p))$ とおくと, y に $f(x)$ を代入して $(g\circ f)(x) - (g\circ f)(p) = g(f(x)) - g(f(p)) = g'(f(p))(f(x) - f(p)) + \psi(f(x)) = g'(f(p))f'(p)(x-p) + g'(f(p))\varphi(x) + \psi(f(x))$ より, 次の等式が得られる.

$$\frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(p)}{x-p} = g'(f(p))f'(p) + g'(f(p))\frac{\varphi(x)}{x-p} + \frac{\psi(f(x))}{x-p} \quad \cdots(*)$$

(5.5) から「$0 < |x-p| < c$ ならば $|f(x) - f(p)| < K|x-p|$」を満たす正の実数 c, K がある. 仮定から $\lim\limits_{y\to f(p)} \frac{\psi(y)}{y-f(p)} = 0$ だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,「$0 < |y - f(p)| < \delta_1$ ならば $\left|\frac{\psi(y)}{y-f(p)}\right| < \frac{\varepsilon}{K}$」となる δ_1 がある. 従って, $|y - f(p)| < \delta_1$ ならば $|\psi(y)| \leqq \frac{\varepsilon}{K}|y - f(p)|$ である. δ を c と $\frac{\delta_1}{K}$ の小さい方とするとき, $0 < |x-p| < \delta$ ならば $|f(x) - f(p)| < K|x-p| < K\delta \leqq \delta_1$ だから $|\psi(f(x))| \leqq \frac{\varepsilon}{K}|f(x) - f(p)| < \varepsilon|x-p|$ である. すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,「$0 < |x-p| < \delta$ ならば $\left|\frac{\psi(f(x))}{x-p}\right| < \varepsilon$」を満たす δ がとれたことになるため, $\lim\limits_{x\to p} \frac{\psi(f(x))}{x-p} = 0$ である. また, 仮定から $\lim\limits_{x\to p} \frac{\varphi(x)}{x-p} = 0$ でもあるため, $(*)$ から $\lim\limits_{x\to p} \frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(p)}{x-p} = g'(f(p))f'(p)$ が示された. □

定理 5.9　(逆関数の微分法) X, Y を区間とする. 連続関数 $f : X \to Y$ が逆関数 f^{-1} をもち, $p \in X$ において微分可能であり, $f'(p) \neq 0$ ならば f^{-1} は $f(p)$ において微分可能で, $(f^{-1})'(f(p)) = \frac{1}{f'(p)}$ が成り立つ.

証明　f は逆関数をもつため単射であり, とくに, $x \neq p$ ならば $f(x) \neq f(p)$ である. 仮定により $\lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} =$

$f'(p) \neq 0$ だから $\lim_{x\to p} \frac{x-p}{f(x)-f(p)} = \frac{1}{f'(p)}$. すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して「$0 < |x-p| < \delta_1$ ならば $\left|\frac{x-p}{f(x)-f(p)} - \frac{1}{f'(p)}\right| < \varepsilon$」を満たす δ_1 がある. (3.14) により f^{-1} は $f(p)$ において連続だから $\delta > 0$ で,「$0 < |y-f(p)| < \delta$ ならば $|f^{-1}(y)-p| < \delta_1$」を満たすものがある. 従って, $0 < |y-f(p)| < \delta$ ならば $\left|\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(p))}{y-f(p)} - \frac{1}{f'(p)}\right| < \varepsilon$ となるため, これは $\lim_{y\to f(p)} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(p))}{y-f(p)} = \frac{1}{f'(p)}$ であることを意味する. □

6 平均値の定理

定義 6.1 $X, Y \subset \boldsymbol{R}$, $f : X \to Y$ を関数, $p \in X$ とする. 正の実数 r で,「$x \in (p-r, p+r) \cap X$ ならば $f(x) \leqq f(p)$」を満たすものがあるとき, f は p において極大であるといい, $f(p)$ を f の極大値という. また, 正の実数 r で,「$x \in (p-r, p+r) \cap X$ ならば $f(x) \geqq f(p)$」を満たすものがあるとき, f は p において極小であるといい, $f(p)$ を f の極小値という.

f の最大値は f の極大値であり, f の最小値は f の極小値である.

命題 6.2 $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ が $p \in (a,b)$ において微分可能で, しかも極大または極小であるとき, $f'(p) = 0$ である.

証明 f が p において極大ならば正の実数 r で, $r < p-a, b-p$ かつ「$x \in (p-r, p+r)$ ならば $f(x) \leqq f(p)$」を満たすものがある. $a_n = p - \frac{r}{2n}$, $b_n = p - \frac{r}{2n}$ によって, 数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$, $\{b_n\}_{n=1,2,\dots}$ を定めれば, これらは $(p-r, p+r)$ に含まれるため, すべての n に対して $f(a_n), f(b_n) \leqq f(p)$ である. 従って $\frac{f(a_n)-f(p)}{a_n-p} = \frac{f(a_n)-f(p)}{-\frac{r}{2n}} \geqq 0$, $\frac{f(b_n)-f(p)}{a_n-p} = \frac{f(b_n)-f(p)}{\frac{r}{2n}} \leqq 0$ がすべての n に対して成り立つ. また, これらの数列はともに p に収束するため (3.3) により $f'(p) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)-f(p)}{a_n-p}$ であり (2.4) の 1) によって. $f'(p) \geqq 0$ である. 一方 $f'(p) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n)-f(p)}{b_n-p}$ より (2.4) の 1) によって, $f'(p) \leqq 0$ でもある. 故に $f'(p) = 0$ である. f が p において極小の場合も同様に示される. □

定理 6.3 (Rolle の定理) $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が連続関数で, (a,b) の各点で微分可能なとき, $f(a) = f(b)$ ならば $f'(c) = 0$ となる $c \in (a,b)$ がある.

証明 最大値・最小値の定理により f は最大値と最小値をとる. f の最大値, 最小値をそれぞれ $f(p), f(q)$ $(p, q \in [a,b])$ とすれば, $f(q) \leqq f(a) = f(b) \leqq f(p)$ だから, 以下の場合が考えられる.

(1) $f(p) > f(a) = f(b)$ の場合, $p \neq a, b$ だから f は p において微分可能である. 従って (6.2) により $f'(p) = 0$ となるため, $c = p$ とすればよい.

(2) $f(q) < f(a) = f(b)$ の場合, $q \neq a, b$ だから f は q において微分可能である. 従って (6.2) により $f'(q) = 0$ となるため, $c = q$ とすればよい.

(3) $f(q) = f(a) = f(b) = f(p)$ の場合, f は定数値関数にだから, 任意の $c \in (a,b)$ に対して $f'(c) = 0$ である. □

定理 6.4 (Cauchy の平均値の定理) $f, g : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が連続関数で, (a,b) の各点で微分可能であるとする. さらに $g(b) \neq g(a)$ であり, すべての $x \in (a,b)$ に対して $f'(x)$ と $g'(x)$ が同時に 0 になることがないならば $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ となる $c \in (a,b)$ がある.

証明 $F : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ を $F(x) = (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x)$ で定めれば, F は (6.3) の条件を満たすため, $F'(c) = 0$ となる $c \in (a,b)$ がある. 一方 $F'(x) = (f(b)-f(a))g'(x) - (g(b)-(a))f'(x)$ だから, $(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$ となる. もし, $g'(c) = 0$ ならば, $g(b)-g(a) \neq 0$ だから上式より $f'(c) = 0$ となるため仮定に反する. 従って, $g'(c) \neq 0$ となり, 上式から $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ が得られる. □

上の定理において, とくに $g(x) = x$ の場合を考えると次の結果が得られる.

系 6.5 (平均値の定理) $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が連続関数で, (a,b) の各点で微分可能なとき, $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ と

なる $c \in (a,b)$ がある.

命題 6.6　$f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ が連続関数で, (a,b) の各点 x で微分可能であり, $f'(x)=0$ が成り立つとき, f は定数値関数である.

証明　$x\in(a,b]$ に対し, 区間 $[a,x]$ において平均値の定理を用いると $f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$ となる $c\in(a,x)$ がある. 仮定から $f'(c)=0$ だから $f(x)=f(a)$ となり f は一定の値 $f(a)$ をとることがわかる. □

命題 6.7　$f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ が連続関数で, (a,b) の各点 x で微分可能であるとする.

1) すべての $x\in(a,b)$ に対し, $f'(x)\geqq 0$ が成り立てば f は単調増加関数であり, $f'(x)>0$ が成り立てば f は狭義単調増加関数である.

2) すべての $x\in(a,b)$ に対し, $f'(x)\leqq 0$ が成り立てば f は単調減少関数であり, $f'(x)<0$ が成り立てば f は狭義単調減少関数である.

証明　$a\leqq x<y\leqq b$ として区間 $[x,y]$ において平均値の定理を用いると $f(y)-f(x)=f'(c)(y-x)$ となる $c\in(x,y)$ がある. 従って, すべての $p\in(a,b)$ に対し, $f'(p)\geqq 0$ ならば $f(x)\leqq f(y)$ であり, $f'(p)>0$ ならば $f(x)>f(y)$ である. 2) も同様に示される. □

定義 6.8　$X,Y\subset \boldsymbol{R}$, $p,q\in\boldsymbol{R}$ とし, $f:X\to Y$ を関数とする.

1) 任意の $\varepsilon>0$ に対して,「$p<x<p+\delta$ $(p-\delta<x<p)$ かつ $x\in X$ ならば $|f(x)-q|<\varepsilon$」を満たす $\delta>0$ が存在するとき, q を $\lim\limits_{x\downarrow p} f(x)$ $(\lim\limits_{x\uparrow p} f(x))$ で表す.

2) 任意の $\varepsilon>0$ に対して,「$x>N$ $(x<N)$ かつ $x\in X$ ならば $|f(x)-q|<\varepsilon$」を満たす $N\in\boldsymbol{R}$ が存在するとき, q を $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ $(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x))$ で表す.

(3.3) と同様に次の結果が成り立つ.

定理 6.9　X, Y を $\boldsymbol{R}$ の部分集合, $p,q\in\boldsymbol{R}$ とし, $f:X\to Y$ を関数とする.

1) $\lim\limits_{x\downarrow p} f(x)=q$ $(\lim\limits_{x\uparrow p} f(x)=q)$ であるためには,「p に収束する単調減少数列 (単調増加数列) $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ が, すべての $n\in\boldsymbol{N}$ に対し, $a_n>p$ $(a_n<p)$ かつ $a_n\in X$ を満たせば $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=q$ である.」ことが必要十分である.

2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=q$ $(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=q)$ であるためには,「単調減少数列 (単調増加数列) $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ が $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty)$ を満たせば $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=q$ である.」ことが必要十分である.

定義 6.10　$X,Y\subset\boldsymbol{R}$, $p\in\boldsymbol{R}$ とし, $f:X\to Y$ を関数とする.

1) 任意の $M\in\boldsymbol{R}$ に対して,「$0<|x-p|<\delta$ かつ $x\in X$ ならば $f(x)>M$ $(f(x)<M)$」を満たす $\delta>0$ が存在することを $\lim\limits_{x\to p} f(x)=\infty$ $(\lim\limits_{x\to p} f(x)=-\infty)$ で表す.

2) 任意の $M\in\boldsymbol{R}$ に対して,「$p<x<p+\delta$ かつ $x\in X$ ならば $f(x)>M$ $(f(x)<M)$」を満たす $\delta>0$ が存在することを $\lim\limits_{x\downarrow p} f(x)=\infty$ $(\lim\limits_{x\downarrow p} f(x)=-\infty)$ で表す.

3) 任意の $M\in\boldsymbol{R}$ に対して,「$p-\delta<x<p$ かつ $x\in X$ ならば $f(x)>M$ $(f(x)<M)$」を満たす $\delta>0$ が存在することを $\lim\limits_{x\uparrow p} f(x)=\infty$ $(\lim\limits_{x\uparrow p} f(x)=-\infty)$ で表す.

4) 任意の $M\in\boldsymbol{R}$ に対して,「$x>N$ かつ $x\in X$ ならば $f(x)>M$ $(f(x)<M)$」を満たす $N\in\boldsymbol{R}$ が存在することを $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ $(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty)$ で表す.

5) 任意の $M\in\boldsymbol{R}$ に対して,「$x<N$ かつ $x\in X$ ならば $f(x)>M$ $(f(x)<M)$」を満たす $N\in\boldsymbol{R}$ が存在することを $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ $(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty)$ で表す.

定理 6.11　(ロピタルの定理) $p\in\boldsymbol{R}$, $r>0$ し, 以下の実数値関数 f, g はそれぞれの定義域で微分可能であるとし, g, g' は 0 にならないとする.

1) $f, g : (p, p+r) \to \boldsymbol{R}$ $(f, g : (p-r, p) \to \boldsymbol{R})$ は $\lim_{x \downarrow p} f(x) = \lim_{x \downarrow p} g(x) = 0$ $(\lim_{x \uparrow p} f(x) = \lim_{x \uparrow p} g(x) = 0)$ を満たし, $\lim_{x \downarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $(\lim_{x \uparrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)})$ が存在するとする. このとき $\lim_{x \downarrow p} \frac{f(x)}{g(x)}$ $(\lim_{x \uparrow p} \frac{f(x)}{g(x)})$ は存在して $\lim_{x \downarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $(\lim_{x \uparrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)})$ に等しい.

2) $f, g : (p, \infty) \to \boldsymbol{R}$ $(f, g : (-\infty, p) \to \boldsymbol{R})$ は $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ $(\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0)$ を満たし, $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $(\lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)})$ が存在するとする. このとき $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ $(\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)})$ は存在して $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $(\lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)})$ に等しい.

3) $f, g : (p, p+r) \to \boldsymbol{R}$ $(f, g : (p-r, p) \to \boldsymbol{R})$ は $\lim_{x \downarrow p} |f(x)| = \lim_{x \downarrow p} |g(x)| = \infty$ $(\lim_{x \uparrow p} |f(x)| = \lim_{x \uparrow p} |g(x)| = \infty$) を満たし, $\lim_{x \downarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $(\lim_{x \uparrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)})$ が存在するとする. このとき $\lim_{x \downarrow p} \frac{f(x)}{g(x)}$ $(\lim_{x \uparrow p} \frac{f(x)}{g(x)})$ は存在して $\lim_{x \downarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ に等しい. $(\lim_{x \uparrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)})$ に等しい.

4) $f, g : (p, \infty) \to \boldsymbol{R}$ $(f, g : (-\infty, p) \to \boldsymbol{R})$ は $\lim_{x \to \infty} |f(x)| = \lim_{x \to \infty} |g(x)| = \infty$ $(\lim_{x \to -\infty} |f(x)| = \lim_{x \to -\infty} |g(x)| = \infty)$ を満たし, $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $(\lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)})$ が存在するとする. このとき $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ $(\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)})$ は存在して $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $(\lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)})$ に等しい.

証明 1) $\lim_{x \downarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ とおけば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し「$p < x < p + \delta$ ならば $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \varepsilon$」を満たす $\delta > 0$ がある. $\bar{f}, \bar{g} : [p, p+r) \to \boldsymbol{R}$ を $\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & p < x < p+r \\ 0 & x = p \end{cases}$, $\bar{g}(x) = \begin{cases} g(x) & p < x < p+r \\ 0 & x = p \end{cases}$ で定めると, 仮定により $\bar{f}$, $\bar{g}$ はともに連続である. 従って任意の $x \in (p, p+r)$ に対し, 区間 $[p, x]$ において (6.4) の仮定が満たされるから, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\bar{f}(x) - \bar{f}(0)}{\bar{g}(x) - \bar{g}(0)} = \frac{\bar{f}'(c)}{\bar{g}'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ となる $c \in (p, x)$ がある. $p < c < x$ より $p < x < p + \delta$ ならば $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - A \right| < \varepsilon$ となるため, $\lim_{x \downarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ である. $f, g : (p-r, p) \to \boldsymbol{R}$ の場合も同様である.

2) $r > 0$ を $r > p$ であるようにとり, $\varphi, \psi : \left(0, \frac{1}{r}\right) \to \boldsymbol{R}$ を $\varphi(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\psi(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$ で定義すると, 仮定から $\lim_{x \downarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \downarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \downarrow 0} \psi(x) = \lim_{x \downarrow 0} g\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$. また, $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$, $\psi'(x) = -\frac{1}{x^2} g'\left(\frac{1}{x}\right)$ だから $\lim_{x \downarrow 0} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ となる. 従って 1) の結果から $\lim_{x \downarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ 一方, $\lim_{x \downarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ だから, 結果が得られる.

3) $A = \lim_{x \downarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ とおけば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $0 < \delta_1 < r$ で「$p < y < p + \delta_1$ ならば $\left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ かつ $\left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - A \right| < 1$」を満たすものがある. そこで, $p < q < p + \delta_1$ となる q を 1 つ選んでおくと, $\left| \frac{f'(q)}{g'(q)} - A \right| < 1$ だから $\left| \frac{f'(q)}{g'(q)} \right| < |A| + 1$ である. また, 仮定から $0 < \delta < q - p$ で「$p < x < p + \delta$ ならば $|g(x)| > \frac{2}{\varepsilon}(|f(q)| + |g(q)|(|A| + 1))$」を満たすものがある. $p < x < p + \delta$ として 区間 $[x, q]$ において (6.4) を用いると, $\frac{f(x) - f(q)}{g(x) - g(q)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ となる $c \in (x, q)$ がある. このとき, $x < c < q < p + \delta_1$ だから $\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ であり $|g(x)| > \frac{2}{\varepsilon}(|f(q)| + |g(q)|(|A| + 1))$ より $\frac{|f(q)|}{|g(x)|} + \frac{|g(q)|}{|g(x)|}(|A| + 1) < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ. 従って $\left| \frac{f(q)}{g(x)} - \frac{g(q)}{g(x)} \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| \leqq \frac{|f(q)|}{|g(x)|} + \frac{|g(q)|}{|g(x)|} \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| < \frac{|f(q)|}{|g(x)|} + \frac{|g(q)|}{|g(x)|}(|A| + 1) < \frac{\varepsilon}{2}$. さて $\frac{f(x) - f(q)}{g(x) - g(q)} = \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(q)}{g(x)} \right) \left(1 - \frac{g(q)}{g(x)} \right)^{-1}$ だから $\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(q)}{g(x)} = \left(1 - \frac{g(q)}{g(x)} \right) \frac{f'(c)}{g'(c)}$ である. 従って $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| = \left| \frac{f(q)}{g(x)} - \frac{g(q)}{g(x)} \frac{f'(c)}{g'(c)} \right|$ となり, $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| \leqq \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| + \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - A \right| = \left| \frac{f(q)}{g(x)} - \frac{g(q)}{g(x)} \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| + \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

4) 2) の証明と同様に $r > 0$ を $r > p$ であるようにとり, $\varphi, \psi : (0, r) \to \boldsymbol{R}$ を $\varphi(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\psi(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$ で定義して, 3) の結果を用いればよい. □

定義 6.12 I を区間とする. 関数 $f : I \to \boldsymbol{R}$ が任意の $p, q \in I$ $(p < q)$ と $t \in (0, 1)$ に対し, $(1-t)f(p) + tf(q) \geqq f((1-t)p + tq)$ を満たすとき, f は I において下に凸であるといい, $(1-t)f(p) + tf(q) \leqq f((1-t)p + tq)$ を満たすとき, f は I において上に凸であるという. また, f が任意の $p, q \in I$ $(p < q)$ と $t \in (0, 1)$ に対し, $(1-t)f(p) + tf(q) > f((1-t)p + tq)$ を満たすときは, f は I において狭義下に凸であるといい, $(1-t)f(p) + tf(q) > f((1-t)p + tq)$ を満たすとき, f は I において狭義上に凸であるという.

定理 6.13　区間 I で定義された連続関数 $f: I \to \boldsymbol{R}$ が I の端点以外の点で微分可能であるとするとき, f が I において下 (上) に凸であるためには, f の導関数が単調増加 (減少) 関数であることが必要十分である. また, f の導関数が狭義単調増加 (減少) 関数ならば, f は I において狭義下 (上) に凸である

証明　f が I において下に凸であるとする. $p, q \in I$ $(p < q)$, $t \in (0,1)$ に対し, $x_t = (1-t)p + tq$ とおくと, $(1-t)f(p) + tf(q) \geqq f(x_t)$ より $f(x_t) - f(p) \leqq t(f(q) - f(p))$, $f(x_t) - f(q) \leqq -(1-t)(f(q) - f(p))$ である. これら両辺をそれぞれ $x_t - p = t(q-p) > 0$, $x_t - q = -(1-t)(q-p) < 0$ で割れば

$$\frac{f(x_t) - f(p)}{x_t - p} \leqq \frac{f(q) - f(p)}{q - p} \leqq \frac{f(x_t) - f(q)}{x_t - q}$$

が得られる. $\lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{f(x_t)-f(p)}{x_t-p} = \lim\limits_{x\downarrow p} \frac{f(x)-f(p)}{x_t-p} = f'(p)$, $\lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{f(x_t)-f(q)}{x_t-q} = \lim\limits_{x\downarrow q} \frac{f(x)-f(q)}{x_t-q} = f'(q)$ だからこの不等式において $t \downarrow 0$ とすれば $f'(p) \leqq \frac{f(q)-f(p)}{q-p} \leqq f'(q)$ となるため, f' は単調増加関数である.

任意の $p, q \in I$ $(p < q)$, $t \in (0,1)$ に対し, 区間 $[p, (1-t)p+tq]$, $[(1-t)p+tq, q]$ において平均値の定理を用いると, $f((1-t)p+tq) - f(p) = t(q-p)f'(c)$, $f(q) - f((1-t)p+tq) = (1-t)(q-p)f'(d)$ を満たす $c \in (p, (1-t)p+tq)$, $d \in ((1-t)p+tq, q)$ があるため, $(1-t)f(p) + tf(q) - f((1-t)p+tq) = -(1-t)(f((1-t)p+tq) - f(p)) + t(f(q) - f((1-t)p+tq)) = (1-t)t(q-p)(f'(d) - f'(c))$ である. $c < d$ だから, 上式から f' が単調増加関数ならば $(1-t)f(p) + tf(q) \geqq f((1-t)p+tq)$, 狭義単調増加関数ならば $(1-t)f(p) + tf(q) > f((1-t)p+tq)$ が成り立つ. □

定理 6.14　区間 I で定義された連続関数 $f: I \to \boldsymbol{R}$ が I の端点以外の点で微分可能であるとする. f が I において下に凸であるためには, I の端点以外の任意の点 p と $x \in I$ に対して $f(x) \geqq f'(p)(x-p) + f(p)$ が成り立つことが必要十分である.

証明　f が I において下に凸であるとして, p を I の端点以外の任意の点とする. p と異なる任意の $x \in I$ と $t \in (0,1)$ に対し $x_t = tx + (1-t)p$ とおくと, $tf(x) + (1-t)f(p) \geqq f(x_t)$ だから $t(f(x) - f(p)) \geqq f(x_t) - f(p)$ となる. この両辺を $t(x-p) = x_t - p$ で割ると, $x < p$ ならば $\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \leqq \frac{f(x_t)-f(p)}{x_t-p}$, $x > p$ ならば $\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \geqq \frac{f(x_t)-f(p)}{x_t-p}$ を得る. $t \downarrow 0$ とすると x_t は p に近づくため上の不等式から $x < p$ ならば $\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \leqq f'(p)$, $x > p$ ならば $\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \geqq f'(p)$ となる. これらの両辺に $x - p$ をかけると, いずれの場合も $f(x) - f(p) \leqq f'(p)(x-p)$ が得られる.

逆に I の端点以外の任意の点 p と $x \in I$ に対して $f(x) \geqq f'(p)(x-p) + f(p)$ が成り立つと仮定する. p, q $(p < q)$ を I の端点以外の任意の点とすると, $f(q) \geqq f'(p)(q-p) + f(p)$ より $\frac{f(q)-f(p)}{q-p} \geqq f'(p)$, $f(p) \geqq f'(q)(p-q) + f(q)$ より $\frac{f(q)-f(p)}{q-p} \leqq f'(q)$ となるため, $f'(p) \leqq f'(q)$ が得られ, f' は単調増加関数である. 従って (6.13) により f は I において下に凸である. □

7　高階導関数

定義 7.1　関数 $f: X \to \boldsymbol{R}$ の n 階導関数 $f^{(n)}: X \to \boldsymbol{R}$ を次のように定義する. $n = 0$ のとき $f^{(0)} = f$ とする. 帰納的に $f^{(r)}: X \to \boldsymbol{R}$ が $0 \leqq r < n$ に対して定義されたとし, $f^{(n-1)}: X \to \boldsymbol{R}$ が X の各点で微分可能であるとき, $f^{(n)}$ を $f^{(n-1)}$ の導関数 $(f^{(n-1)})'$ であると定義する. f の n 階導関数が存在するとき, f は n 回微分可能であるという. また, 任意の自然数 n に対して f の n 階導関数が存在するとき, f は無限回微分可能であるという.

例 7.2　次の公式が成り立つ.

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \qquad (e^x)^{(n)} = e^x \qquad (\log x)^{(n)} = \frac{(-1)^n(n-1)!}{x^n} \ \ (n \geqq 1)$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

実数 α と 0 以上の整数 n に対して, 二項係数 $\binom{\alpha}{n}$ を $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ により定義する.

命題 7.3　関数 $f, g : X \to \boldsymbol{R}$ が n 回微分可能ならば, 次の公式が成り立つ.

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

証明　n による帰納法で示す. $n=1$ の場合, (5.7) の 3) により主張は成立する. $(fg)^{(r)} = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f^{(k)} g^{(r-k)}$ が成り立つと仮定して, この両辺の導関数を考えると (5.7) の 1), 2), 3) および $\binom{r}{i-1} + \binom{r}{i} = \binom{r+1}{i}$ から

$$\begin{aligned}
(fg)^{(r)} &= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(r-k)} + f^{(k)} g^{(r-k+1)} \right) \; = \; \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} f^{(k+1)} g^{(r-k)} + \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f^{(k)} g^{(r-k+1)} \\
&= \sum_{i=1}^{r+1} \binom{r}{i-1} f^{(i)} g^{(r-i+1)} + \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} f^{(i)} g^{(r-i+1)} \\
&= \sum_{i=1}^{r} \binom{r}{i-1} f^{(i)} g^{(r-i+1)} + f^{(r+1)} g + f g^{(r+1)} + \sum_{i=1}^{r} \binom{r}{i} f^{(i)} g^{(r-i+1)} \\
&= f g^{(r+1)} + \sum_{i=1}^{r} \left(\binom{r}{i-1} + \binom{r}{i} \right) f^{(i)} g^{(r-i+1)} + f^{(r+1)} g \\
&= f g^{(n+1)} + \sum_{i=1}^{r} \left(\binom{r}{i-1} + \binom{r}{i} \right) f^{(i)} g^{(r-i+1)} + f^{(r+1)} g \\
&= f g^{(r+1)} + \sum_{i=1}^{r} \binom{r+1}{i} f^{(i)} g^{(r-i+1)} + f^{(r+1)} g \; = \; \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} f^{(i)} g^{(r-i+1)}
\end{aligned}$$

となり $n = r+1$ の場合も主張は成立する. □

定理 7.4　連続関数 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ は (a,b) において n 回微分可能であるとする. λ を正の実数, $p, x \in [a,b]$ とするとき, $0 < \theta < 1$ で

$$f(x) = f(p) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)}{k!} (x-p)^k + \frac{f^{(n)}(p + \theta(x-p))}{(n-1)!} \frac{(1-\theta)^{n-\lambda}(x-p)^n}{\lambda}$$

を満たすものがある.

証明　$x \neq p$ と仮定してよい. $K = \frac{\lambda}{|x-p|^\lambda} \left(f(x) - f(p) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)}{k!} (x-p)^k \right)$ により K を定めると,

$$f(x) = f(p) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)}{k!} (x-p)^k + K \frac{|x-p|^\lambda}{\lambda} \quad \cdots (*)$$

が成り立つ. $F : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ を $F(t) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k - K \frac{|x-t|^\lambda}{\lambda}$ によって定義すると, $F(x) = F(p) = 0$ である. $x < p$ の場合, F は区間 (x, p) で微分可能, $x > p$ の場合, F は区間 (p, x) で微分可能だから (6.3) により, $F'(c) = 0$ となる c が p と x の間にある. ここで $\theta = \frac{c-p}{x-p}$ とおけば $0 < \theta < 1$, $c = p + \theta(x-p)$ である.

$$F'(t) = \begin{cases} -\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + K(x-t)^{\lambda-1} & t < x \\ -\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} - K(t-x)^{\lambda-1} & t > x \end{cases}$$

より, $x < p$ の場合 $c > x$ だから $K = (-1)^n \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(c-x)^{n-\lambda} = (-1)^n \frac{f^{(n)}(p+\theta(x-p))}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-\lambda}(p-x)^{n-\lambda}$ が得ら

れる．これを $(*)$ に代入すれば

$$f(x) = f(p) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k + \frac{f^{(n)}(p+\theta(x-p))}{(n-1)!}\frac{(1-\theta)^{n-\lambda}(x-p)^n}{\lambda}.$$

$x > p$ の場合 $c < x$ だから $K = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-\lambda} = \frac{f^{(n)}(p+\theta(x-p))}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-\lambda}(x-p)^{n-\lambda}$ が得られる．これを $(*)$ に代入すれば

$$f(x) = f(p) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k + \frac{f^{(n)}(p+\theta(x-p))}{(n-1)!}\frac{(1-\theta)^{n-\lambda}(x-p)^n}{\lambda}.$$

□

上の定理における $\frac{f^{(n)}(p+\theta(x-p))}{(n-1)!}\frac{(1-\theta)^{n-\lambda}(x-p)^n}{\lambda}$ を剰余項と呼んで，$R_n(x)$ で表す．

系 7.5　連続関数 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ は (a,b) において n 回微分可能で，$f^{(n)}$ は $p \in (a,b)$ において連続であるとする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ で $0 < |x-p| < \delta$ ならば次の不等式を満たすようなものが存在する．

$$\left| f(x) - f(p) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k \right| < \varepsilon |x-p|^n$$

証明　$f^{(n)}$ の p における連続性から，$\delta > 0$ で「$0 < |t-p| < \delta$ ならば $|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(p)| < \varepsilon n!$」を満たすものがある．一方，(7.4) で，$\lambda = n$ の場合を考えると $f(x) = f(p) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k + \frac{f^{(n)}(p+\theta(x-p))}{n!}(x-p)^n$ を満たす $0 < \theta < 1$ がある．$0 < |x-p| < \delta$ ならば $0 < |p+\theta(x-p)-p| = \theta|x-p| < \delta$ だから $\left| f(x) - f(p) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k \right| = \frac{1}{n!}|f^{(n)}(p+\theta(x-p)) - f^{(n)}(p)||x-p|^n < \varepsilon|x-p|^n$ である．□

定理 7.6　$f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ は n 回微分可能で，$f^{(n)}$ は $p \in (a,b)$ において連続であるとする．$f'(p) = f''(p) = \cdots = f^{(n-1)}(p) = 0$, $f^{(n)}(p) \neq 0$ が成り立つとき，n が奇数ならば f は p において極値をとらず，n が偶数で $f^{(n)}(p) > 0$ ならば f は p で極小値をとり，$f^{(n)}(p) < 0$ ならば f は p で極大値をとる．

証明　(7.5) において $\varepsilon = \left| \frac{f^{(n)}(p)}{2n!} \right|$ とすれば，$\delta > 0$ で $0 < |x-p| < \delta$ ならば次の不等式を満たすようなものが存在する．

$$\frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n - \left|\frac{f^{(n)}(p)}{2n!}\right||x-p|^n < f(x) - f(p) < \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n + \left|\frac{f^{(n)}(p)}{2n!}\right||x-p|^n$$

従って $p < x < p+\delta$ であるか，n が偶数で $0 < |x-p| < \delta$ ならば

$$\left(\frac{f^{(n)}(p)}{n!} - \left|\frac{f^{(n)}(p)}{2n!}\right|\right)(x-p)^n < f(x) - f(p) < \left(\frac{f^{(n)}(p)}{n!} + \left|\frac{f^{(n)}(p)}{2n!}\right|\right)(x-p)^n \quad \cdots (1)$$

が成り立ち，n が奇数で $p - \delta < x < p$ ならば

$$\left(\frac{f^{(n)}(p)}{n!} + \left|\frac{f^{(n)}(p)}{2n!}\right|\right)(x-p)^n < f(x) - f(p) < \left(\frac{f^{(n)}(p)}{n!} - \left|\frac{f^{(n)}(p)}{2n!}\right|\right)(x-p)^n \quad \cdots (2)$$

が成り立つ．n が偶数で $f^{(n)}(p) > 0$ の場合，(1) より $0 < |x-p| < \delta$ ならば $f(x) - f(p) > \frac{f^{(n)}(p)}{2n!}(x-p)^n > 0$ となるため，f は p において極小である．n が偶数で $f^{(n)}(p) < 0$ の場合，(1) より $0 < |x-p| < \delta$ ならば $f(x) - f(p) < \frac{f^{(n)}(p)}{2n!}(x-p)^n < 0$ となるため，f は p において極大である．n が奇数の場合，$f^{(n)}(p) > 0$ ならば $p < x < p+\delta$ のときは (1) より $f(x) - f(p) > \frac{f^{(n)}(p)}{2n!}(x-p)^n > 0$ となるが，$p - \delta < x < p$ のときは (2) より $f(x) - f(p) < \frac{f^{(n)}(p)}{2n!}(x-p)^n < 0$ となるため，f は p において極大でも極小でもない．n が奇数で $f^{(n)}(p) < 0$ の場合も同様にして，f は p において極大でも極小でもないことが示される．□

定理 7.7　連続関数 $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ は (a,b) において無限回微分可能であるとする. $p,x\in[a,b]$, $n\in\boldsymbol{N}$, $\lambda_n>0$ とするとき, $0<\theta_n<1$ で

$$f(x)=f(p)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\frac{f^{(n)}(p+\theta_n(x-p))}{(n-1)!}\frac{(1-\theta_n)^{n-\lambda_n}(x-p)^n}{\lambda_n}$$

を満たすものがあるが, $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(p+\theta_n(x-p))}{(n-1)!}\frac{(1-\theta_n)^{n-\lambda_n}(x-p)^n}{\lambda_n}=0$ ならば,

$$f(x)=f(p)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k$$

が成り立つ.

証明 $\left|f(x)-\left(f(p)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k\right)\right|=|R_n(x)|$ から主張は明らかである. □

上の定理における級数 $f(p)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k$ を f の p におけるテイラー展開という.

補題 7.8　$\alpha\in\boldsymbol{R}$ とする. $|x|<1$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ は絶対収束する. 従って, とくに $\lim_{n\to\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=0$ である.

証明 $a_n=\binom{\alpha}{n}x^n$ とおくと $x\neq0$ の場合, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\alpha}{n+1}|x|=|x|<1$ だから (2.22) の 2) により, 主張が成り立つ. □

例 7.9　e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$ $(\alpha\in\boldsymbol{R})$, $\log(1+x)$ の 0 におけるテイラー展開を求める.

1) $f(x)=e^x$ の場合, $x\in\boldsymbol{R}$, $\lambda_n=n$ とすると $f^{(k)}(0)=1$, $R_n(x)=\frac{x^n}{n!}e^{\theta_n x}$ であるが, (2.27) から $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$ となるため, $e^x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

2) $f(x)=\sin x$ の場合, $x\in\boldsymbol{R}$, $\lambda_n=n$ とすると $f^{(2k)}(0)=0$, $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k$, $R_n(x)=\frac{x^n}{n!}\sin\left(\theta_n x+\frac{n\pi}{2}\right)$ であるが, (2.27) から $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$ となるため, $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

3) $f(x)=\cos x$ の場合, $x\in\boldsymbol{R}$, $\lambda_n=n$ とすると $f^{(2k)}(0)=(-1)^k$, $f^{(2k+1)}(0)=0$, $R_n(x)=\frac{x^n}{n!}\cos\left(\theta_n x+\frac{n\pi}{2}\right)$ であるが, (2.27) から $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$ となるため, $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

4) $f(x)=(1+x)^\alpha$ の場合, $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\binom{\alpha}{k}$ であり, 剰余項は $\lambda_n=n$ とすれば $R_n(x)=\binom{\alpha}{n}x^n(1+\theta_n x)^{\alpha-n}$ で与えられ, $\lambda_n=1$ とすれば $R_n(x)=\alpha\binom{\alpha-1}{n-1}(1-\theta_n)^{n-1}(1+\theta_n x)^{\alpha-n}x^n$ で与えられる. 以下では $n>1$ とする.

i) $-1<x<0$ の場合, $0<(1-\theta_n)^{n-1}(1+\theta_n x)^{\alpha-n}=\left(\frac{1-\theta_n}{1+\theta_n x}\right)^{n-1}(1+\theta_n x)^{\alpha-1}<(1+\theta_n x)^{\alpha-1}$ より $\alpha\geqq1$ ならば $0<(1-\theta_n)^{n-1}(1+\theta_n x)^{\alpha-n}<(1+\theta_n x)^{\alpha-1}\leqq1$ だから $\lambda_n=1$ としたときの剰余項は

$$|R_n(x)|=\alpha\left|\binom{\alpha-1}{n-1}\right|(1-\theta_n)^{n-1}(1+\theta_n x)^{\alpha-n}|x|^n<\alpha|x|\left|\binom{\alpha-1}{n-1}x^{n-1}\right|$$

を満たすため, (7.8) により $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ である. また $\alpha<1$ ならば $0<(1-\theta_n)^{n-1}<(1+\theta_n x)^{n-1}$ より $0<(1-\theta_n)^{n-1}(1+\theta_n x)^{\alpha-n}<(1+\theta_n x)^{\alpha-1}<(1+x)^{\alpha-1}$ だから $\lambda_n=1$ としたときの剰余項は

$$|R_n(x)|=|\alpha|\left|\binom{\alpha-1}{n-1}\right|(1-\theta_n)^{n-1}(1+\theta_n x)^{\alpha-n}|x|^n<|\alpha x|(1+x)^{\alpha-1}\left|\binom{\alpha-1}{n-1}x^{n-1}\right|$$

を満たすため, (7.8) により $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ である.

ii) $0<x<1$ の場合, $n>\alpha$ ならば $0<(1+\theta_n x)^{\alpha-n}<1$ だから $\lambda_n=n$ としたときの剰余項は

$$|R_n(x)|=\left|\binom{\alpha}{n}\right|x^n(1+\theta_n x)^{\alpha-n}<\left|\binom{\alpha}{n}\right|x^n$$

を満たすため, (7.8) により $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ である.

以上から, $|x| < 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ が成り立つため, $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ である.

5) $f(x) = \log(1+x)$ の場合, $f(0) = 0$, $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ $(k \geqq 1)$ であり, 剰余項は $\lambda_n = n$ とすれば $R_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{1+\theta_n x}\right)^n$ で与えられ, $\lambda_n = 1$ とすれば $R_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{(1-\theta_n)^{n-1} x^n}{(1+\theta_n x)^n}$ で与えられる.

i) $-1 < x < 0$ の場合, $0 < \frac{(1-\theta_n)^{n-1}}{(1+\theta_n x)^n} < \frac{1}{1+\theta_n x} < \frac{1}{1+x}$ だから $\lambda_n = 1$ としたときの剰余項は $|R_n(x)| = \frac{(1-\theta_n)^{n-1}|x|^n}{(1+\theta_n x)^n} < \frac{|x|^n}{1+x}$ を満たすため, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ である.

ii) $0 \leqq x \leqq 1$ の場合, $0 \leqq \frac{x}{1+\theta_n x} < 1$ だから $\lambda_n = n$ としたときの剰余項は $|R_n(x)| = \frac{1}{n} \left(\frac{x}{1+\theta_n x}\right)^n < \frac{1}{n}$ を満たすため, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ である.

以上から, $-1 < x \leqq 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ が成り立つため, $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ である.

8 べき級数

定義 8.1 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を x のべき級数という.

命題 8.2 数列 $\{a_n x_0^n\}_{n=0,1,\dots}$ が有界ならば, $|x| < |x_0|$ である $x \in \boldsymbol{C}$ に対し, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束する.

証明 仮定から $K > 0$ で, すべての $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して $|a_n x_0^n| < K$ となるものが存在するため, $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < K \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ である. 一方, 仮定から $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ だから $\sum_{n=0}^{\infty} K \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ は収束する. 従って (2.22) の 1) により $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束する. □

定義 8.3 x のべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に対し, 集合 $M = \{r \,|\, |x| < r$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束する $\} \cup \{0\}$ の上限があれば, その値を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径と呼び, M に上限が無ければ, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は無限大であるという.

(8.2) により, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を R $(0 \leqq R \leqq \infty)$ とすると, $|x| < R$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束し, $|x| > R$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束しない.

補題 8.4 $\varphi(n)$ を n の多項式, $|a| < 1$ とするとき, $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) a^n = 0$ である.

証明 任意の自然数 k に対して, $\lim_{n\to\infty} n^k |a|^n = 0$ であることを示せばよい. $|a| < 1$ だから, $\alpha = -\log|a|$ とおけば $\alpha > 0$ である. 従って $\frac{1}{|a|^n} = e^{n\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^j n^j}{j!} > \frac{\alpha^{k+1} n^{k+1}}{(k+1)!}$ だから $n^k |a|^n < \frac{(k+1)! n^k}{\alpha^{k+1} n^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{\alpha^{k+1} n}$ が得られる. $n \to \infty$ のとき, $\frac{(k+1)!}{\alpha^{k+1} n} \to 0$ だから $\lim_{n\to\infty} n^k a^n = 0$ である. □

命題 8.5 $\varphi(n)$ を 0 でない n の多項式とするとき, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径と $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(n) x^n$ の収束半径は一致する.

証明 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を R, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(n) x^n$ の収束半径を S $(0 \leqq R, S \leqq \infty)$ とする. また, $\varphi(n)$ が定数ならば, 命題の主張は明らかだから $\varphi(n)$ は 1 次以上の n の多項式であると仮定する.

$|x| < R$ のとき, $|x| < r < R$ を満たす r をとると, $\left|\frac{x}{r}\right| < 1$ だから (8.4) により $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) \left(\frac{x}{r}\right)^n = 0$ である. 従って,「$n > N$ ならば $\left|\varphi(n) \left(\frac{x}{r}\right)^n\right| < 1$」を満たす自然数 N があるため $n > N$ ならば $|a_n \varphi(n) x^n| = \left|a_n \varphi(n) \left(\frac{x}{r}\right)^n\right| r^n < |a_n| r^n$ である. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ は絶対収束するため, (2.22) の 1) により $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(n) x^n$ も絶対収束す

る．故に $S < R$ とはなり得ないため $S \geqq R$ である．

$\varphi(n)$ は 1 次以上の n の多項式だから「$n > N$ ならば $|\varphi(n)| > 1$」を満たす自然数 N がある．$|x| < S$ とすると，$n > N$ ならば $|a_n x^n| < |a_n \varphi(n) x^n|$ であり，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(n) x^n$ は絶対収束するため，(2.22) の 1) により $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ も絶対収束する．故に $R < S$ とはなり得ないため $R \geqq S$ である．以上から $R = S$ である．□

定理 8.6　べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を R とし，関数 $f : (-R, R) \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ で定める．このとき，$|x| < R$ ならば $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ が成り立つ．

証明　k が 2 以上の整数ならば $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)}\binom{n-2}{k-2} \leqq n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ が成り立つため，$\left|\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1}\right| = |h|\left|\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-2} x^{n-k}\right| \leqq |h| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |h|^{k-2} |x|^{n-k} \leqq |h| \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} |h|^{k-2} |x|^{n-k} = n(n-1)|h|(|h| + |x|)^{n-2}$．
$|x| < R$ のとき，$|h| < R - |x|$ を満たす h に対し，(8.5) により $\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(|h| + |x|)^{n-2}$ は収束する．一方，
$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1}\right)\right| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left|\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1}\right| \leqq$
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)|h|(|h| + |x|)^{n-2} = |h| \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(|h| + |x|)^{n-2}$ だから $\lim_{n \to \infty} \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}\right| = 0$ が得られる．□

系 8.7　べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が R のとき，$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ で定義される関数 $f : (-R, R) \to \boldsymbol{R}$ は無限回微分可能であり，$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ が成り立つ．

証明　(8.6) により $f^{(k)}(x) = a_k k! + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1) x^{n-k}$ だから $f^{(k)}(0) = a_k k!$．□

定理 8.8　x のべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を R とする．

1) $\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ が存在すれば，$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}$．　　2) $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ が存在すれば，$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$．

証明　1) $\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$ とおく．$x \in \boldsymbol{C}$ に対し，$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| = r|x|$ だから，(2.22) の 2) により $r > 0$ の場合，$|x| < \frac{1}{r}$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束し，$r = 0$ の場合は任意の x に対して $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束する．$r > 0$ かつ $|x| > \frac{1}{r}$ ならば，$1 < c < r|x|$ を満たす c をとる．自然数 N で「$n > N$ ならば $\left|\frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n}\right| > c$」を満たすものがある．従って $n > N$ ならば $|a_n x^n| > c^{n-N} |a_N x^N|$ であり，$\sum_{n=0}^{k} |a_n x^n| > \sum_{n=0}^{N} |a_n x^n| + \sum_{n=N+1}^{k} |a_N x^N| c^{n-N} = \sum_{n=0}^{N} |a_n x^n| + \frac{c|a_N x^N|}{c-1}(c^{k-N} - 1)$ だから $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束しない．以上から $r > 0$ の場合 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は $\frac{1}{r}$ であり $r = 0$ の場合 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は ∞ である．

2) $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$ とおく．$x \in \boldsymbol{C}$ に対し，$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} |x| = r|x|$ だから，(2.22) の 3) により $r > 0$ の場合，$|x| < \frac{1}{r}$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束し，$r = 0$ の場合は任意の x に対して $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束する．$r > 0$ かつ $|x| > \frac{1}{r}$ ならば，$1 < c < r|x|$ を満たす c をとる．自然数 N で「$n > N$ ならば $\sqrt[n]{|a_n x^n|} > c$」を満たすものがある．従って $n > N$ ならば $|a_n x^n| > c^n$ であり，$\sum_{n=0}^{k} |a_n x^n| > \sum_{n=0}^{N} |a_n x^n| + \sum_{n=N+1}^{k} c^n = \sum_{n=0}^{N} |a_n x^n| + \frac{c^{N+1}}{c-1}(c^{k-N} - 1)$ だから $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束しない．以上から $r > 0$ の場合 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は $\frac{1}{r}$ であり $r = 0$ の場合 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は ∞ である．□

補題 8.9 $\{a_n\}_{n=0,1,\dots}$ を 0 に収束する数列とする．関数 $f:(-1,1)\to \boldsymbol{C}$ を $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ で定めると，$\lim_{x\uparrow 1}(x-1)f(x)=0$ が成り立つ．

証明 (8.2) により，任意の $x\in(-1,1)$ に対して $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ は収束する．仮定から任意の $\varepsilon>0$ に対して整数 N で「$n\geqq N$ ならば $|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$」をみたすものが存在する．$|a_0|,|a_1|,\dots,|a_{N-1}|$ の中で最大のものを M とおくと，$\left(1-\frac{\varepsilon}{2M+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{N}}<x<1$ ならば $1-x^N<\frac{\varepsilon}{2M+\varepsilon}<\frac{\varepsilon}{2M}$ だから $|(x-1)f(x)|\leqq\left|(x-1)\sum_{n=0}^{N-1}a_nx^n\right|+\left|(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right|\leqq(1-x)\sum_{n=0}^{N-1}|a_n|x^n+\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|(1-x)x^n\leqq M(1-x^N)+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ となるため $\lim_{x\uparrow 1}(x-1)f(x)=0$ を得る． □

定理 8.10 x のべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径を R とし，関数 $f:(-R,R)\to\boldsymbol{C}$ を $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ で定める．$\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ が収束すれば，$\lim_{x\uparrow R}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ が成り立つ．

証明 $s=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ とおくと $x\in(-R,R)$ に対して，$f(x)-s=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x^n-R^n)=(x-R)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}a_nx^jR^{n-j}=(x-R)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}a_nR^n\left(\frac{x}{R}\right)^j$．ここで $s_k=\sum_{n=0}^{k}a_nR^n$ とおけば $\sum_{n=1}^{k}\sum_{j=0}^{n-1}a_nR^n\left(\frac{x}{R}\right)^j=\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{n=j+1}^{k}a_nR^n\left(\frac{x}{R}\right)^j=\sum_{j=0}^{k-1}(s_k-s_j)\left(\frac{x}{R}\right)^j=\sum_{j=0}^{k-1}s_k\left(\frac{x}{R}\right)^j-\sum_{j=0}^{k-1}s_j\left(\frac{x}{R}\right)^j$ となるため $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}a_nR^n\left(\frac{x}{R}\right)^j=\sum_{j=0}^{\infty}s\left(\frac{x}{R}\right)^j-\sum_{j=0}^{\infty}s_j\left(\frac{x}{R}\right)^j=\sum_{j=0}^{\infty}(s-s_j)\left(\frac{x}{R}\right)^j$．故に $f(x)-s=R\left(\frac{x}{R}-1\right)\sum_{j=0}^{\infty}(s-s_j)\left(\frac{x}{R}\right)^j$．仮定から $\lim_{j\to\infty}(s-s_j)=0$ だから $g(y)=\sum_{j=0}^{\infty}(s-s_j)y^j$ に対して (8.9) を用いると $\lim_{x\uparrow R}(f(x)-s)=\lim_{x\uparrow R}R\left(\frac{x}{R}-1\right)\sum_{j=0}^{\infty}(s-s_j)\left(\frac{x}{R}\right)^j=R\lim_{y\uparrow 1}(y-1)g(y)=0$ である． □

9 積分

定義 9.1 $X,Y\subset\boldsymbol{C}$ とする．関数 $f:X\to Y$ が次の条件を満たすとき，f は一様連続であるという．

任意の $\varepsilon>0$ に対し，$\delta>0$ で「$|x-y|<\delta$ ならば $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$」を満たすものが存在する．

定理 9.2 有限閉区間で定義された関数 $f:[a,b]\to\boldsymbol{C}$ は一様連続である．

証明 背理法で証明する．主張を否定すれば，ある $\varepsilon>0$ で 次のようなものがある; $\delta>0$ をどのように選んでも「$|x-y|<\delta$ かつ $|f(x)-f(y)|\geqq\varepsilon$」が成り立つような $x,y\in[a,b]$ がある．$\delta=2^{-n}$ に対して「$|x_n-y_n|<2^{-n}$ かつ $|f(x_n)-f(y_n)|\geqq\varepsilon$」が成り立つような $x_n,y_n\in[a,b]$ を選んでおく．$\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$, $\{y_n\}_{n=1,2,\dots}$ は有界な点列だから (2.12) の (v) により，これらは収束する部分列を含む．$\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$, $\{y_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ が両方とも収束するように自然数の列 $n_0<n_1<\cdots<n_k<\cdots$ がとれる．$p=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}$, $q=\lim_{k\to\infty}y_{n_k}$ とおくと $x_{n_k},y_{n_k}\in[a,b]$ だから (2.4) の 1) から $p,q\in[a,b]$ である．$|x_{n_k}-y_{n_k}|<2^{-n_k}$ がすべての k について成り立つため，(2.4) の 1) から $|p-q|\leqq 0$ すなわち $p=q$ である．f は連続だから (3.3) により，$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim_{k\to\infty}f(y_{n_k})=f(p)$ が得られるが，$|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geqq\varepsilon$ において，$k\to\infty$ とすれば $0\geqq\varepsilon>0$ となって矛盾が生じる． □

関数 $f:X\to\boldsymbol{R}$ に対し，正の実数 M で，すべての $x\in X$ に対して $|f(x)|\leqq M$ を満たすものがあるとき，f は有界であるという．このとき，X の部分集合 S に対して，集合 $\{y|\,y=f(x)$ となる $x\in S$ がある $\}$ の上限を $\sup_{x\in S}f(x)$，下限を $\inf_{x\in S}f(x)$ で表すことにする．

定義 9.3 1) $a=a_0\leqq a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_n=b$ を満たす数列 $\Delta=\{a_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ を区間 $[a,b]$ の分割という．このとき，$a_1-a_0,a_2-a_1,\dots,a_n-a_{n-1}$ のうちで最大のものを，分割 Δ の幅と呼んで，$|\Delta|$ で表し，各 a_i を Δ の分点と

いう．また, $\xi_i \in [a_{i-1}, a_i]$ を満たす数列 $\xi = \{\xi_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ を分割 Δ の代表点という．

2) $\Delta = \{a_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$, $\Delta' = \{a'_j\}_{j=0,1,\ldots,m}$ を区間 $[a,b]$ の分割とする．数列 $a_0, a_1, \ldots, a_n, a'_0, a'_1, \ldots, a'_m$ を並び替えて得られる $[a,b]$ の分割を Δ と Δ' の合併と呼んで, $\Delta \cup \Delta'$ で表す．また $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset \{a'_0, a'_1, \ldots, a'_m\}$ が成り立つとき, Δ' は Δ より細かいという．

3) 関数 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が与えられているとする．区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{a_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ と Δ の代表点 $\xi = \{\xi_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ に対して $S(f,\Delta,\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(a_i - a_{i-1})$ とおき, これを分割 Δ, 代表点 ξ に関する f のリーマン和という．f が有界な場合, 区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{a_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ に対し $m_i = \inf_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x)$, $M_i = \sup_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x)$ とおく．このとき, $\overline{S}(f,\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(a_i - a_{i-1})$, $\underline{S}(f,\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(a_i - a_{i-1})$ をそれぞれ分割 Δ に関する f の過剰和, 不足和という．

4) 関数 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ に対し, 次の条件 $(*)$ を満たすような実数 R が存在するとき, f は (リーマン) 積分可能であるといい, R を $\int_a^b f(x)dx$ で表す．

$(*)$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ で「$|\Delta| < \delta$ である $[a,b]$ の任意の分割 Δ と Δ の任意の代表点 ξ に対して $|S(f,\Delta,\xi) - R| < \varepsilon$」を満たすものがある．

命題 9.4 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が積分可能ならば有界である．

証明 仮定から $[a,b]$ の分割 Δ で, Δ の任意の代表点 ξ に対して $\left|S(f,\Delta,\xi) - \int_a^b f(x)dx\right| \leqq 1$ となるものがあるため $|S(f,\Delta,\xi)| \leqq \left|\int_a^b f(x)dx\right| + 1$ である．ここで $\Delta = \{a_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$, $\xi = \{\xi_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ とおく．もし, ある区間 $[a_{k-1}, a_k]$ で f が有界でないとすると ξ_i $(i \neq k)$ をすべて固定して, $\xi_k \in [a_{k-1}, a_k]$ の選び方をかえれば $|f(\xi_k)|(a_k - a_{k-1}) - \left|\sum\limits_{i \neq k} f(\xi_i)(a_i - a_{i-1})\right| \leqq |S(f,\Delta,\xi)| \leqq \left|\int_a^b f(x)dx\right| + 1$ より, この左辺はいくらでも大きくなるため矛盾が生じる．従って f は各区間 $[a_{k-1}, a_k]$ で有界だから $[a,b] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [a_{k-1}, a_k]$ において有界である． □

命題 9.5 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ を有界な関数, $\Delta = \{a_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$, $\Delta' = \{a'_j\}_{j=0,1,\ldots,k}$ を $[a,b]$ の分割とする．

1) Δ' が Δ より細かいとき $\underline{S}(f,\Delta) \leqq \underline{S}(f,\Delta') \leqq \overline{S}(f,\Delta') \leqq \overline{S}(f,\Delta)$ である．

2) $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$, $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$ とおくと次の不等式が成り立つ．

$$\underline{S}(f,\Delta') - \underline{S}(f,\Delta) \leqq (k-1)(M-m)|\Delta|, \qquad \overline{S}(f,\Delta) - \overline{S}(f,\Delta') \leqq (k-1)(M-m)|\Delta|$$

3) Δ の任意の代表点 ξ に対して $\underline{S}(f,\Delta) \leqq S(f,\Delta,\xi) \leqq \overline{S}(f,\Delta)$ が成り立つ．

証明 1) 仮定から, 各 i に対して $a_i = a'_{s_i}$ となる s_i がある．$m_i = \inf_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x)$, $M_i = \sup_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x)$, $m'_j = \inf_{x \in [a'_{j-1}, a'_j]} f(x)$, $M'_j = \sup_{x \in [a'_{j-1}, a'_j]} f(x)$ とおくと, $[a_{i-1}, a_i] = \bigcup\limits_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} [a'_{j-1}, a'_j]$ だから m_i は $m'_{s_{i-1}+1}, m'_{s_{i-1}+2}, \ldots, m'_{s_i}$ のうちで最小のものであり, M_i は $M'_{s_{i-1}+1}, M'_{s_{i-1}+2}, \ldots, M'_{s_i}$ のうちで最大のものである．従って $m_i(a_i - a_{i-1}) = \sum\limits_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} m_i(a'_j - a'_{j-1}) \leqq \sum\limits_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} m'_j(a'_j - a'_{j-1})$ に注意すれば $\underline{S}(f,\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(a_i - a_{i-1}) \leqq \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} m'_j(a'_j - a'_{j-1}) = \sum\limits_{j=1}^{l} m'_j(a'_j - a'_{j-1}) = \underline{S}(f,\Delta')$ が得られる．同様に $M_i(a_i - a_{i-1}) = \sum\limits_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} M_i(a'_j - a'_{j-1}) \geqq \sum\limits_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} M'_j(a'_j - a'_{j-1})$ より $\overline{S}(f,\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(a_i - a_{i-1}) \geqq \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} M'_j(a'_j - a'_{j-1}) = \sum\limits_{j=1}^{l} M'_j(a'_j - a'_{j-1}) = \overline{S}(f,\Delta')$ を得る．$\underline{S}(f,\Delta') \leqq \overline{S}(f,\Delta')$ は $m'_j \leqq M'_j$ がすべての j に対して成り立つことから明らかである．

2) $\Delta \cup \Delta' = \Delta'' = \{b_j\}_{j=0,1,\ldots,k+n}$, $m''_j = \inf_{x \in [b_{j-1}, b_j]} f(x)$, $M''_j = \sup_{x \in [b_{j-1}, b_j]} f(x)$ とおき, $a_i = b_{s_i}$ となる s_i を選んでおく．各 i に対し, (a_{i-1}, a_i) が Δ' の分点を含むとき, $\sum\limits_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} m''_j(b_j - b_{j-1}) - m_i(a_i - a_{i-1}) =$

$\sum_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} m''_j(b_j-b_{j-1}) - \sum_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} m_i(b_j-b_{j-1}) \leqq \sum_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} (M(b_j-b_{j-1}) - m(b_j-b_{j-1})) = (M-m)(a_i-a_{i-1}) \leqq (M-m)|\Delta|$ であり, (a_{i-1}, a_i) が Δ' の分点を含まないときは $\sum_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} m''_j(b_j-b_{j-1}) - m_i(a_i-a_{i-1}) = 0$ である. 前者の場合は, 高々 $k-1$ 個の i に対して該当するため $\underline{S}(f,\Delta'') - \underline{S}(f,\Delta) = \sum_{j=1}^{p+n} m''_j(b_j-b_{j-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(a_i-a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} m''_j(b_j-b_{j-1}) - m_i(a_i-a_{i-1})\right) \leqq (k-1)(M-m)|\Delta|$ である. Δ'' は Δ' より細かいから 1) から $\underline{S}(f,\Delta') - \underline{S}(f,\Delta) \leqq (k-1)(M-m)|\Delta|$ が得られる. $\overline{S}(f,\Delta) - \overline{S}(f,\Delta') \leqq (k-1)(M-m)|\Delta|$ も同様に示される.

3) $\xi = \{\xi_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ とすれば $m_i \leqq f(\xi_i) \leqq M_i$ より主張は明らかである. □

定義 9.6 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ を有界な関数とする. (9.5) の 1) から $\{x | x = \underline{S}(f,\Delta)$ となる $[a,b]$ の分割 Δ がある.$\}$ は上に有界であり, $\{x | x = \overline{S}(f,\Delta)$ となる $[a,b]$ の分割 Δ がある.$\}$ は下に有界である. これらの上限, 下限をそれぞれ $\underline{\int_a^b} f(x)dx$, $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ で表し, f の下積分, 上積分という.

命題 9.7 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ を有界な関数とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ で「Δ が $|\Delta| < \delta$ を満たす $[a,b]$ の分割ならば $\underline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{S}(f,\Delta) < \varepsilon$ かつ $\overline{S}(f,\Delta) - \overline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon$ 」を満たすものがある.

証明 $L = \underline{\int_a^b} f(x)dx$, $U = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ とおくと, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $L - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f,\Delta_1)$, $\overline{S}(f,\Delta_2) < U + \frac{\varepsilon}{2}$ を満たす $[a,b]$ の分割 Δ_1, Δ_2 がある. $\Delta_0 = \Delta_1 \cup \Delta_2$ とおくと (9.5) の 1) から $L - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f,\Delta_0) \leqq \overline{S}(f,\Delta_0) < U + \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ. $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ とおき, $\Delta_0 = \{c_k\}_{k=0,1,\dots,p}$ として $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{a_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ を考えると (9.5) の 2) より $\underline{S}(f,\Delta_0) - \underline{S}(f,\Delta) \leqq (p-1)(M-m)|\Delta|$, $\overline{S}(f,\Delta) - \overline{S}(f,\Delta_0) \leqq (p-1)(M-m)|\Delta|$. 従って $|\Delta| < \frac{\varepsilon}{2(p-1)(M-m)}$ ならば $L - \underline{S}(f,\Delta), \overline{S}(f,\Delta) - U < \frac{\varepsilon}{2} + (p-1)(M-m)|\Delta| < \varepsilon$ が成り立つ. □

定理 9.8 関数 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が有界で,$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ ならば f は積分可能であり, $\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ である. 逆に f が積分可能ならば $\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ が成り立つ.

証明 $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ が成り立つとし, この両辺の値を R とおく. (9.7) から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ で「Δ が $|\Delta| < \delta$ を満たす $[a,b]$ の分割ならば $R - \underline{S}(f,\Delta) < \varepsilon$ かつ $\overline{S}(f,\Delta) - R < \varepsilon$」を満たすものがあるため, $|\Delta| < \delta$ ならば, 任意の Δ の代表点 ξ に対して (9.5) の 3) から $R - \varepsilon < \underline{S}(f,\Delta) < S(f,\Delta,\xi) < \overline{S}(f,\Delta) < R + \varepsilon$ である. 従って $|S(f,\Delta,\xi) - R| < \varepsilon$ となるため f は積分可能で, $\int_a^b f(x)dx = R$ が成り立つ.

逆に f が積分可能であるとし, $L = \underline{\int_a^b} f(x)dx$, $U = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ とおく. (9.7) から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ で「Δ が $|\Delta| < \delta$ を満たす $[a,b]$ の分割ならば $L - \underline{S}(f,\Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$ かつ $\overline{S}(f,\Delta) - U < \frac{\varepsilon}{2}$」を満たすものがある. $\Delta = \{a_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ を $|\Delta| < \delta$ を満たす $[a,b]$ の任意の分割として $m_i = \inf_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x)$, $M_i = \sup_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x)$ とおくと, 各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対し $f(\xi_i) - m_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, $M_i - f(\zeta_i) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ を満たす $\xi_i, \zeta_i \in [a_{i-1}, a_i]$ がある. Δ の代表点 $\xi = \{\xi_i\}_{i=1,2,\dots,n}$, $\zeta = \{\zeta_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ に対し, $S(f,\Delta,\xi) - \underline{S}(f,\Delta) = \sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i) - m_i)(a_i - a_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(a_i - a_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{2}$, $\overline{S}(f,\Delta) - S(f,\Delta,\zeta) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - f(\zeta_i))(a_i - a_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(a_i - a_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{2}$. 従って, $|\Delta| < \delta$ ならば $0 \leqq L - \underline{S}(f,\Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$ と $-\frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f,\Delta) - S(f,\Delta,\xi) \leqq 0$ から $-\frac{\varepsilon}{2} < L - S(f,\Delta,\xi) < \frac{\varepsilon}{2}$, $0 \leqq \overline{S}(f,\Delta) - U < \frac{\varepsilon}{2}$ と $-\frac{\varepsilon}{2} < S(f,\Delta,\zeta) - \overline{S}(f,\Delta) \leqq 0$ から $-\frac{\varepsilon}{2} < S(f,\Delta,\zeta) - U < \frac{\varepsilon}{2}$ が得られる. 故に $-\varepsilon < L - U < \varepsilon$ であるが, ε は任意の正の数だから $L = U$ である. □

系 9.9 有界な関数 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が積分可能であるためには, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) < \varepsilon$ を満たす $[a,b]$ の分割 Δ が存在することが必要十分である.

証明 f が積分可能ならば (9.8) により $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ だから (9.7) から任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\overline{S}(f,\Delta) -$

$\underline{S}(f,\Delta) < \varepsilon$ を満たす $[a,b]$ の分割 Δ が存在する．逆に任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) < \varepsilon$ を満たす $[a,b]$ の分割 Δ が存在すると仮定すれば，そのような Δ に対して $\underline{S}(f,\Delta) \leqq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leqq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leqq \overline{S}(f,\Delta)$ だから $0 \leqq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \leqq \overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) < \varepsilon$ である．ε は任意の正の数だから $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$ でなくてはならない．従って (9.8) により f は積分可能である． □

定理 9.10 連続関数は積分可能である．また，単調増加関数，単調減少関数は積分可能である．

証明 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする．(9.1) から，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ で「$|x-y| < \delta$ ならば $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$」を満たすものがある．$|\Delta| < \delta$ を満たす $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{a_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ に対し $m_i = \inf_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x)$, $M_i = \sup_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x)$ とおくと，最大値・最小値の定理から $M_i = f(p_i)$, $m_i = f(q_i)$ となる $p_i, q_i \in [a_{i-1}, a_i]$ があるため $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$ である．このとき $\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) < \varepsilon$ となるため (9.9) により f は積分可能である．

$f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ を単調増加関数とする．$[a,b]$ の分割 $\Delta = \{a_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ に対し $m_i = \inf_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x)$, $M_i = \sup_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x)$ とおくと，仮定から $m_i = f(a_{i-1})$, $M_i = f(a_i)$ である．このとき $\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) = \sum_{i=1}^{n}(f(a_i) - f(a_{i-1}))(a_i - a_{i-1}) \leqq \sum_{i=1}^{n}(f(a_i) - f(a_{i-1}))|\Delta| = (f(b) - f(a))|\Delta|$ だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$|\Delta| < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}$ を満たす $[a,b]$ の分割 Δ に対し $\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) < \varepsilon$ が成り立つ．従って (9.9) により f は積分可能である．f が単調減少関数の場合も同様にして積分可能であることが示される． □

積分の定義 (9.3) から次の結果がただちに得られる．

命題 9.11 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が積分可能ならば $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}(i-1)\right) = \int_a^b f(x)dx$ である．

例 9.12 1) $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が定数値関数の場合，$f(x) = C$ とすると $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} C = C(b-a)$.

2) k を 1 以上の整数として，$f : [0,t] \to \boldsymbol{R}$ が $f(x) = x^k$ で与えられるとき $\int_0^t f(x)dx$ を直接計算するために少し準備をする．$x^{[k]} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ $(k = 1,2,\dots)$ とおくと $x^k - x^{[k]}$ は，定数項を含まない x の $n-1$ 次の整数係数の多項式だから k による帰納法で，$x^k = x^{[k]} + \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x^{[j]}$ と満たす整数 a_{kj} があることが分かる．また，$(x+1)^{[k+1]} - x^{[k+1]} = (k+1)x^{[k]}$ だから，この両辺に $x = 1,2,\dots,n$ を代入して辺々加えれば，$1^{[k+1]} = 0$ より $\sum_{i=1}^{n} i^{[k]} = \frac{1}{k+1}(n+1)^{[k+1]}$ を得る．従って $\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{i=1}^{n} i^{[k]} + \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} \sum_{i=1}^{n} i^{[j]} = \frac{1}{k+1}(n+1)^{[k+1]} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{a_{kj}}{j+1}(n+1)^{[j+1]}$ となるため $\sum_{i=1}^{n} i^k$ は n の $k+1$ 次多項式で，n^{k+1} の係数は $\frac{1}{k+1}$ である．故に $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{1}{k+1}$ だから $\int_0^t f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{t}{n}\left(\frac{t}{n} i\right)^k = t^{k+1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{t^{k+1}}{k+1}$.

10 積分の性質

実数値関数 $f, g : X \to \boldsymbol{R}$ に対し，関数 $f \vee g : X \to \boldsymbol{R}$ を $(f \vee g)(x) = (f(x)$ と $g(x)$ の大きい方$)$ で定義する．

補題 10.1 $f, g : X \to \boldsymbol{R}$ を有界な関数とする．$\sup_{x\in X}(f\vee g)(x)$ は $\sup_{x\in X} f(x)$ と $\sup_{x\in X} g(x)$ の大きい方に等しく，$\inf_{x\in X}(f\vee g)(x) \geqq \inf_{x\in X} f(x), \inf_{x\in X} g(x)$ である．

証明 任意の $x \in X$ に対して $f(x), g(x) \leqq (f\vee g)(x) \leqq \sup_{x\in X}(f\vee g)(x)$, $\inf_{x\in X} f(x), \inf_{x\in X} g(x) \leqq (f\vee g)(x)$ だから $\sup_{x\in X} f(x), \sup_{x\in X} g(x) \leqq \sup_{x\in X}(f\vee g)(x)$, $\inf_{x\in X} f(x), \inf_{x\in X} g(x) \leqq \inf_{x\in X}(f\vee g)(x)$ である．

ここで $\sup_{x\in X} f(x), \sup_{x\in X} g(x) < \sup_{x\in X}(f\vee g)(x)$ と仮定すれば，$\sup_{x\in X} f(x), \sup_{x\in X} g(x) < (f\vee g)(x_0) <$

$\sup_{x\in X}(f\vee g)(x)$ を満たす x_0 がある. $(f\vee g)(x_0)$ は $f(x_0)$ か $g(x_0)$ のいずれかに等しいため, $\sup_{x\in X} f(x) < f(x_0)$ と $\sup_{x\in X} g(x) < g(x_0)$ の少なくとも一方が成り立ち, 矛盾が生じる. 従って $\sup_{x\in X}(f\vee g)(x)$ は $\sup_{x\in X} f(x)$ と $\sup_{x\in X} g(x)$ の大きい方に等しい. □

命題 10.2 $f, g : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ を積分可能な関数, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ とする.

1) $\alpha f + \beta g : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ は積分可能で, $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$ が成り立つ.

2) $f\vee g, fg : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ はともに積分可能である. さらに $c > 0$ で, すべての $x \in [a, b]$ に対し $|f(x)| > c$ を満たすものがあるとき, $\frac{1}{f} : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ は積分可能である.

証明 1) $\int_a^b f(x)dx = A$, $\int_a^b g(x)dx = B$ とおく. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ で,「$[a, b]$ の分割 Δ が $|\Delta| < \delta$ を満たせば, 任意の Δ の代表点 ξ に対し, $|S(f, \Delta, \xi) - A| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|+|\beta|+1}$ かつ $|S(g, \Delta, \xi) - B| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|+|\beta|+1}$ を満たすものがある. 従って $|\Delta| < \delta$ ならば, $|S(\alpha f+\beta g, \Delta, \xi) - (\alpha A+\beta B)| = |\alpha(S(f, \Delta, \xi) - A) + \beta(S(g, \Delta, \xi) - B)| \leqq |\alpha||S(f, \Delta, \xi) - A| + |\beta||S(g, \Delta, \xi) - B)| < \frac{\varepsilon(|\alpha|+|\beta|)}{|\alpha|+|\beta|+1} < \varepsilon$ となるため $\alpha f + \beta g$ は積分可能で, $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha A + \beta B$ が成り立つ.

2) すべての $x \in [a, b]$ に対して $|f(x)|, |g(x)| \leqq C$ となる実数 C を選んでおく. $[a, b]$ の分割 Δ に対し, 不等式

$$\overline{S}(f\vee g, \Delta) - \underline{S}(f\vee g, \Delta) \leqq \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) + \overline{S}(g, \Delta) - \underline{S}(g, \Delta),$$

$$\overline{S}(fg, \Delta) - \underline{S}(fg, \Delta) \leqq C(\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) + \overline{S}(g, \Delta) - \underline{S}(g, \Delta)),$$

$$\overline{S}\left(\frac{1}{f}, \Delta\right) - \underline{S}\left(\frac{1}{f}, \Delta\right) \leqq \frac{1}{c^2}(\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta)) \ (\text{ただし } |f(x)| > c > 0)$$

が成り立つことを示す. これらが示されれば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < \frac{\varepsilon}{2+2C}$ かつ $\overline{S}(g, \Delta) - \underline{S}(g, \Delta) < \frac{\varepsilon}{2+2C}$ を満たす分割 Δ に対して $\overline{S}(f\vee g, \Delta) - \underline{S}(f\vee g, \Delta) < \varepsilon$ と $\overline{S}(fg, \Delta) - \underline{S}(fg, \Delta) < \varepsilon$ が成り立つため (9.9) により $f\vee g$, fg は積分可能である. また $\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) < c^2\varepsilon$ を満たす分割 Δ に対して $\overline{S}\left(\frac{1}{f}, \Delta\right) - \underline{S}\left(\frac{1}{f}, \Delta\right) < \varepsilon$ が成り立つため (9.9) により $\frac{1}{f}$ は積分可能である.

$\Delta = \{a_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ として, $M_i = \sup_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x)$, $M'_i = \sup_{x\in[a_{i-1},a_i]} g(x)$ とおくと, (10.1) の結果から $\sup_{x\in[a_{i-1},a_i]}(f\vee g)(x)$ は M_i か M'_i のいずれかだから, 整数列 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-k}$ で $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}\cup\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-k}\} = \{1, 2, \dots, n\}$ かつ $\sup_{x\in[a_{\lambda_s-1},a_{\lambda_s}]}(f\vee g)(x) = M_{\lambda_s}$, $\sup_{x\in[a_{\mu_s-1},a_{\mu_s}]}(f\vee g)(x) = M'_{\mu_s}$ となるものがある. また $m_i = \inf_{x\in[a_{i-1},a_i]} f(x)$, $m'_i = \inf_{x\in[a_{i-1},a_i]} g(x)$, $p_i = \inf_{x\in[a_{i-1},a_i]}(f\vee g)(x)$ とおくと $p_i \geqq m_i, m'_i$ だから $\overline{S}(f\vee g, \Delta) - \underline{S}(f\vee g, \Delta) = \sum_{s=1}^{k} M_{\lambda_s}(a_{\lambda_s} - a_{\lambda_s-1}) + \sum_{s=1}^{n-k} M'_{\mu_s}(a_{\mu_s} - a_{\mu_s-1}) - \sum_{i=1}^{n} p_i(a_i - a_{i-1}) = \sum_{s=1}^{k}(M_{\lambda_s} - p_{\lambda_s})(a_{\lambda_s} - a_{\lambda_s-1}) + \sum_{s=1}^{n-k}(M'_{\mu_s} - p_{\mu_s})(a_{\mu_s} - a_{\mu_s-1}) \leqq \sum_{s=1}^{k}(M_{\lambda_s} - m_{\lambda_s})(a_{\lambda_s} - a_{\lambda_s-1}) + \sum_{s=1}^{n-k}(M'_{\mu_s} - m'_{\mu_s})(a_{\mu_s} - a_{\mu_s-1}) \leqq \overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) + \overline{S}(g, \Delta) - \underline{S}(g, \Delta)$.

$x, y \in [a_{i-1}, a_i]$ に対し $|f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |(f(x) - f(y))g(x) + f(y)(g(x) - g(y))| \leqq |f(x) - f(y)||g(x)| + |f(y)||g(x) - g(y)| \leqq C(|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|) \leqq C(M_i - m_i + M'_i - m'_i)$ である. 従って $q_i = \inf_{x\in[a_{i-1},a_i]}(fg)(x)$, $Q_i = \sup_{x\in[a_{i-1},a_i]}(fg)(x)$ とおけば, $Q_i - q_i \leqq C(M_i - m_i + M'_i - m'_i)$ となるため $\overline{S}(fg, \Delta) - \underline{S}(fg, \Delta) \leqq C(\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta) + \overline{S}(g, \Delta) - \underline{S}(g, \Delta))$.

$c > 0$ で, すべての $x \in [a, b]$ に対し $|f(x)| > c$ を満たすものがあれば $x, y \in [a_{i-1}, a_i]$ に対し $\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\right| = \frac{|f(x)-f(y)|}{|f(x)||f(y)|} < \frac{1}{c^2}(M_i - m_i)$ となる. 故に $\overline{S}\left(\frac{1}{f}, \Delta\right) - \underline{S}\left(\frac{1}{f}, \Delta\right) \leqq \frac{1}{c^2}(\overline{S}(f, \Delta) - \underline{S}(f, \Delta))$ が得られる. □

命題 10.3 $f, g : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ をともに積分可能な関数とする.

1) すべての $x \in [a, b]$ に対して $f(x) \leqq g(x)$ が成り立てば, $\int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx$ である. さらに $g - f$ が連続である点 $c \in [a, b]$ で, $f(c) < g(c)$ を満たすものが存在すれば $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$ である.

2) E は, 条件「$a \leqq x < y \leqq b$ ならば $E \cap [x, y] \neq \emptyset$」を満たす $[a, b]$ の部分集合であるとする. 任意の $x \in E$ に対して $f(x) = g(x)$ ならば $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ である.

証明 1) $[a,b]$ の任意の分割 Δ と Δ の任意の代表点 ξ に対して $S(f,\Delta,\xi) \leqq S(g,\Delta,\xi)$ が成り立つため, $\int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx$ は明らかである.

$g-f$ が連続である点 $c \in [a,b]$ で, $f(c) < g(c)$ を満たすものが存在すると仮定する. $h = g-f$ とおくと h は c で連続で $h(c) > 0$ だから $\delta > 0$ で $x \in (c-\delta, c+\delta) \cap [a,b]$ ならば $|h(x) - h(c)| < \frac{h(c)}{2}$ となるものがある. $|\Delta| < \frac{\delta}{6}$ である $[a,b]$ の任意の分割 $\Delta = \{a_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ と Δ の代表点 $\xi = \{\xi_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ を考える. $c \neq a$ ならば $\delta < c-a$ と仮定してよいから, $[a_{k-1}, a_k] \subset (c-\delta, c-\frac{2\delta}{3})$, $[a_{l-1}, a_l] \subset (c-\frac{\delta}{3}, c)$ となる k, l が存在する. このとき $\xi_k, \xi_{k+1}, \cdots, \xi_l \in (c-\delta, c)$ だから $k \leqq i \leqq l$ ならば $h(\xi_i) > \frac{h(c)}{2}$ であり, $a_l - a_{k-1} > \frac{\delta}{3}$ である. 従って $S(h,\Delta,\xi) > \sum_{i=k}^{l} \frac{h(c)}{2}(a_i - a_{i-1}) = \frac{h(c)}{2}(a_l - a_{k-1}) > \frac{\delta h(c)}{6}$ だから $|\Delta| \to 0$ として $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b h(x)dx \geqq \frac{\delta h(c)}{6} > 0$ が得られる. $c = a$ の場合は $\delta < b-a$ と仮定してよいから, $[a_{k-1}, a_k] \subset (a, a+\frac{\delta}{3})$, $[a_{l-1}, a_l] \subset (a+\frac{2\delta}{3}, a+\delta)$ となる k, l が存在する. あとは, 上と同様にして $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx > 0$ が得られる.

2) 任意の $x \in E$ に対して $f(x) = 0$ ならば $\int_a^b f(x)dx = 0$ であることを示せばよい. $R = \int_a^b f(x)dx$ とおき, $\varepsilon > 0$ を任意にとる. このとき, $\delta > 0$ で「$|\Delta| < \frac{\delta}{6}$ である $[a,b]$ の任意の分割 $\Delta = \{a_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ と Δ の代表点 ξ に対して $|S(f,\Delta,\xi) - R| < \varepsilon$」を満たすものがある. 仮定から $\xi_i \in E$ $(i = 1,2,\dots,n)$ となるように代表点 $\xi = \{\xi_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ がとれて, このとき $S(f,\Delta,\xi) = 0$ だから $|R| < \varepsilon$ である. $\varepsilon > 0$ は任意だから $R = 0$ である. □

系 10.4 関数 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が積分可能ならば $|f|(x) = |f(x)|$ で定義される関数 $|f| : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ も積分可能で, $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|dx$ が成り立つ.

証明 $|f| = f \vee (-f)$ だから (10.2) の 2) により $|f|$ は積分可能で, すべての $x \in [a,b]$ に対して $-|f(x)| \leqq f(x) \leqq |f(x)|$ だから (10.3) の 1) により $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|dx$ が成り立つ. □

$a \leqq c \leqq b$ のとき $[a,c]$ の分割 $\Delta = \{a_i\}_{i=0,1,\dots,n}$, $[c,b]$ の分割 $\Delta' = \{b_i\}_{i=0,1,\dots,m}$ と, これらの代表点 $\xi = \{\xi_i\}_{i=1,2,\dots,n}$, $\xi' = \{\xi'_i\}_{i=1,2,\dots,m}$ に対し, $c_i = a_i$ $(0 \leqq i \leqq n)$, $c_i = b_{i-n}$ $(n \leqq i \leqq m+n)$ で定義される $[a,b]$ の分割 $\{c_i\}_{i=0,1,\dots,m+n}$ を $\Delta + \Delta'$ で表し, $\zeta_i = \xi_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$, $\zeta_i = \xi'_{i-n}$ $(n+1 \leqq i \leqq m+n)$ で定義される $\Delta + \Delta'$ の代表点 $\{\zeta_i\}_{i=1,2,\dots,m+n}$ を $\xi + \xi'$ で表せば, $S(f, \Delta+\Delta', \xi+\xi') = S(f,\Delta,\xi) + S(f,\Delta',\xi')$ である.

命題 10.5 $c \in [a,b]$ と関数 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が与えられているとする.

1) f が $[a,c]$ と $[c,b]$ において積分可能ならば f は $[a,b]$ において積分可能で, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ が成り立つ.

2) f が $[a,b]$ において積分可能ならば f は $[a,c]$ と $[c,b]$ において積分可能である.

証明 1) (9.4) より, f は $[a,c]$, $[c,b]$ で有界だから, 実数 M で, 任意の $x \in [a,b]$ に対し $|f(x)| \leqq M$ を満たすものがとれる. 仮定から任意の $\varepsilon > 0$ に対し $0 < \delta \leqq \frac{\varepsilon}{4M}$ で次の条件を満たすものがある. 「Δ_1 が $|\Delta_1| < \delta$ を満たす $[a,c]$ の分割, Δ_2 が $|\Delta_1| < \delta$ を満たす $[c,b]$ の分割ならば, Δ_1, Δ_2 の任意の代表点 ζ, η に対して $|S(f,\Delta_1,\zeta) - \int_a^c f(x)dx| < \frac{\varepsilon}{4}$ かつ $|S(f,\Delta_2,\eta) - \int_c^b f(x)dx| < \frac{\varepsilon}{4}$.」

$|\Delta| < \delta$ を満たす $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{a_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ と Δ の代表点 $\xi = \{\xi_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ に対し $\Delta_1 = \{b_i\}_{i=0,1,\dots,l}$, $\Delta_2 = \{c_i\}_{i=0,1,\dots,n-l+1}$ を $a_{l-1} \leqq c \leqq a_l$ ならば $b_i = a_i$ $(i < l)$, $b_l = c_0 = c$, $c_i = a_{i+l-1}$ $(i > 0)$ で定め, $\zeta = \{\zeta_i\}_{i=1,2,\dots,l}$, $\eta = \{\eta_i\}_{i=1,2,\dots,n-l+1}$ を $\zeta_i = \xi_i$ $(i < l)$, $\zeta_l = \eta_1 = c$, $\eta_i = \xi_{i+l-1}$ $(i > 1)$ で定めれば, Δ_1, Δ_2 はそれぞれ $[a,c]$, $[c,b]$ の分割で $|\Delta_1|, |\Delta_2| < \delta$ を満たし, ζ, η はそれぞれ Δ_1, Δ_2 の代表点である. $S(f,\Delta,\xi) - S(f,\Delta_1,\zeta) - S(f,\Delta_2,\eta) = (f(\xi_l) - f(c))(a_l - a_{l-1})$ に注意すると, $|S(f,\Delta,\xi) - \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx| \leqq |f(\xi_l) - f(c)|(a_l - a_{l-1}) + |S(f,\Delta_1,\zeta) - \int_a^c f(x)dx| + |S(f,\Delta_2,\eta) - \int_c^b f(x)dx| < 2M\delta + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ が得られるため, 主張が示される.

2) 各 $n \geqq 1$ に対して, $\Delta_n = \left\{a + \frac{c-a}{n}i\right\}_{i=0,1,\dots,n}$, $\xi_n = \left\{a + \frac{c-a}{n}i\right\}_{i=1,2,\dots,n}$, $\Delta'_n = \left\{c + \frac{b-c}{n}i\right\}_{i=0,1,\dots,n}$,

$\xi'_n = \left\{c + \frac{b-c}{n}i\right\}_{i=1,2,\dots,n}$ とおくと, Δ_n, Δ'_n はそれぞれ $[a,c]$, $[c,b]$ の分割で, ξ_n, ξ'_n はそれぞれ Δ_n, Δ'_n の代表点である．$S_n = S(f,\Delta_n,\xi_n)$, $S'_n = S(f,\Delta'_n,\xi'_n)$ とおいて, $\{S_n\}_{n=1,2,\dots}$, $\{S'_n\}_{n=1,2,\dots}$ はコーシー列になることを示す．$R = \int_a^b f(x)dx$ とおき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ で「Δ が $|\Delta| < \delta$ を満たす $[a,b]$ の分割ならば, Δ の任意の代表点 ξ に対して $|S(f,\Delta,\xi) - R| < \frac{\varepsilon}{2}$」を満たすものをとる．$n, m > \frac{b-a}{\delta}$ ならば $|\Delta_n| = \frac{c-a}{n} < \delta$, $|\Delta'_n| = \frac{b-c}{n} < \delta$ より $|\Delta_n + \Delta'_m| < \delta$ である．従って $|S(f,\Delta_n+\Delta'_m,\xi_n+\xi'_m) - R| < \frac{\varepsilon}{2}$ だから $|S_n - S_m| = |S(f,\Delta_n+\Delta'_m,\xi_n+\xi'_m) - S(f,\Delta_m+\Delta'_m,\xi_m+\xi'_m)| \leqq |S(f,\Delta_n+\Delta'_m,\xi_n+\xi'_m) - R| + |R - S(f,\Delta_m+\Delta'_m,\xi_m+\xi'_m)| < \varepsilon$ が成り立つ．同様にして $|S'_n - S'_m| < \varepsilon$ が得られる．故に $\{S_n\}_{n=1,2,\dots}$, $\{S'_n\}_{n=1,2,\dots}$ は V のコーシー列だから (2.12) の (vi) により, これらは収束する．そこで $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = R_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = R_2$ とおく．

任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 上と同様に $\delta > 0$ をとり, n を $n > \frac{b-a}{\delta}$ かつ $|S_n - R_1|, |S'_n - R_2| < \varepsilon$ となるようにとっておく．このとき $[a,c]$ の分割 Δ' が $|\Delta'| < \delta$ を満たせば, Δ' の任意の分割 ξ' に対して $|\Delta' + \Delta'_n|, |\Delta_n + \Delta'_n| < \delta$ に注意すると $|S(f,\Delta',\xi') - R_1| \leqq |S(f,\Delta'+\Delta'_n,\xi'+\xi'_n) - R| + |R - S(f,\Delta_n+\Delta'_n,\xi_n+\xi'_n)| + |S(f,\Delta_n,\xi_n) - R_1| < 2\varepsilon$ となるため, f は $[a,c]$ で積分可能であり, $\int_a^c f(x)dx = R_1$ が成り立つ．同様にして f は $[c,b]$ で積分可能で, $\int_c^b f(x)dx = R_2$ が成り立つ． □

注意 10.6 1) $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が積分可能なとき, $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ により $\int_b^a f(x)dx$ を定めれば, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ は a, b, c の大小関係にかかわらず成立する．

2) f が $[a,b]$ において積分可能で $a \leqq c \leqq d \leqq b$ ならば, (10.5) の 2) により f は $[c,b]$ において積分可能である．従って再び (10.5) の 2) により f は $[c,d]$ において積分可能である．すなわち f は $[a,b]$ に含まれる任意の閉区間で積分可能である．

定理 10.7 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が積分可能ならば, 任意の $a \leqq c < d \leqq b$ に対し, f が連続であるような点 $p \in (c,d)$ が存在する．言い換えれば, f が連続であるような点全体からなる $[a,b]$ の部分集合を E とすれば, 任意の $a \leqq c < d \leqq b$ に対して $E \cap (c,d) \neq \emptyset$ である．

証明 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が積分可能ならば, (a,b) に f が連続である点が存在することが示されれば, (10.6) により主張が示される．(9.4) から, すべての $x \in [a,b]$ に対して $|f(x)| < M$ となる実数 M がある．$[a,b]$ に含まれる単調増加数列 $\{\alpha_i\}_{i=1,2,\dots}$ と単調減少数列 $\{\beta_i\}_{i=1,2,\dots}$ で $i = 1,2,\dots$ に対して $\alpha_i < \beta_i$ かつ「$x, y \in [\alpha_i, \beta_i]$ ならば $|f(x) - f(y)| < \frac{2M}{i}$」を満たすものを次のように定義する．$\alpha_1 = a$, $\beta_1 = b$ とおけば $x, y \in [\alpha_1, \beta_1]$ に対し $|f(x)|, |f(y)| < M$ より $|f(x) - f(y)| < 2M$ である．帰納的に $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{i-1} < \beta_{i-1} < \cdots < \beta_2 < \beta_1$ が定義され, $s = 1,2,\dots,i-1$ に対し $x, y \in [\alpha_s, \beta_s]$ ならば $|f(x) - f(y)| < \frac{2M}{s}$ が成り立つとする．$\alpha_{i-1} < u < v < \beta_{i-1}$ を満たす u, v をとれば, (9.9) により, $\overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) < \frac{2M(v-u)}{i}$ を満たす $[u,v]$ の分割 Δ が存在する．$\Delta = \{a_j\}_{j=0,1,\dots,n}$ $(u = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = v)$, $M_j = \sup_{x\in[a_{j-1},a_j]} f(x)$, $m_j = \inf_{x\in[a_{j-1},a_j]} f(x)$ とおき $M_1 - m_1, M_2 - m_2, \dots, M_n - m_n$ の中で最小のものを $M_{j(\Delta)} - m_{j(\Delta)}$ とすると, $(M_{j(\Delta)} - m_{j(\Delta)})(v-u) = \sum\limits_{j=1}^{n}(M_{j(\Delta)} - m_{j(\Delta)})(a_j - a_{j-1}) \leqq \overline{S}(f,\Delta) - \underline{S}(f,\Delta) < \frac{2M(v-u)}{i}$ だから $M_{j(\Delta)} - m_{j(\Delta)} < \frac{2M}{i}$ である．そこで, $\alpha_i = a_{j(\Delta)-1}$, $\beta_i = a_{j(\Delta)}$ で α_i, β_i を定めれば $\alpha_{i-1} < \alpha_i < \beta_i < \beta_{i-1}$ であり,「$x, y \in [\alpha_i, \beta_i]$ ならば $|f(x) - f(y)| < \frac{2M}{i}$」を満たす．

$\{\alpha_i\}_{i=1,2,\dots}$, $\{\beta_i\}_{i=1,2,\dots}$ はともに有界だから収束して, $\lim\limits_{i\to\infty} \alpha_i \leqq \lim\limits_{i\to\infty} \beta_i$ だから $p \in [\lim\limits_{i\to\infty} \alpha_i, \lim\limits_{i\to\infty} \beta_i]$ がとれる．任意の $\varepsilon > 0$ に対して $i \geqq \frac{\varepsilon}{2M}$ となる自然数 i をとる．$p \in (\alpha_i, \beta_i)$ だから $\delta < p - \alpha, \beta - p$ を満たす $\delta > 0$ をとれば $|x - p| < \delta$ ならば $x \in (p-\delta, p+\delta) \subset [\alpha_i, \beta_i]$ となるため $|f(x) - f(p)| < \frac{2M}{i} \leqq \varepsilon$ である．従って f は p において連続である． □

11 微分積分学の基本定理

定義 11.1 関数 $f:(a,b)\to \boldsymbol{R}$ に対し, 微分可能な関数 $F:(a,b)\to \boldsymbol{R}$ が $F'=f$ を満たすとき, F を f の原始関数という.

定理 11.2 $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ が積分可能ならば, $c\in[a,b]$ に対し $F:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ を $F(x)=\int_c^x f(t)dt$ で定義すれば F は連続関数である. さらに f が $p\in(a,b)$ において連続ならば F は p において微分可能であり, $F'(p)=f(p)$ が成り立つ. 従って, f が連続関数ならば, F は f の原始関数である.

証明 (9.4) により, 実数 M で, すべての $x\in[a,b]$ に対して $|f(x)|\leqq M$ となるものがある. (10.6) の 1), (10.4), (10.3) の 1), (9.12) の 1) から $|F(x+h)-F(x)|=\left|\int_c^{x+h} f(t)dt-\int_c^x f(t)dt\right|=\left|\int_x^{x+h} f(t)dt\right|\leqq\left|\int_x^{x+h}|f(t)|dt\right|\leqq\left|\int_x^{x+h} Mdt\right|=|h|M$. 従って $h\to 0$ のとき $F(x+h)\to F(x)$ となるため, F は連続関数である.

任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ で $(p-\delta,p+\delta)\subset[a,b]$ かつ 「$|h|<\delta$ ならば $|f(p+h)-f(p)|<\varepsilon$」を満たすものをとる. $|h|<\delta$ のとき $\left|\frac{F(p+h)-F(p)}{h}-f(p)\right|=\left|\frac{1}{h}\left(\int_c^{p+h} f(t)dt-\int_c^p f(t)dt-\int_p^{p+h} f(p)dt\right)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_p^{p+h}(f(t)-f(p))dt\right|\leqq\left|\frac{1}{h}\int_p^{p+h}|f(t)-f(p)|dt\right|\leqq\left|\frac{1}{h}\int_p^{p+h}\varepsilon dt\right|=\varepsilon$ より $\lim_{h\to 0}\frac{F(p+h)-F(p)}{h}=f(p)$ である. □

系 11.3 $f,F:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする. F は (a,b) の各点 x で微分可能であり, $F'(x)=f(x)$ が成り立てば $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ である.

証明 $G(x)=\int_a^x f(t)dt$ で $G:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ を定めれば (11.2) から, 任意の $x\in(a,b)$ に対して $G'(x)=f(x)=F'(x)$ である. 従って (6.6) により, $G-F$ は定数値関数となるため, $G(a)=0$ より $\int_a^b f(t)dt=G(b)-G(a)=F(b)-F(a)$. □

命題 11.4 1) $f,g:(a,b)\to \boldsymbol{R}$ がともに (a,b) の各点 x で微分可能であり, 導関数 $f',g':(a,b)\to \boldsymbol{R}$ がともに連続ならば $p,q\in(a,b)$ に対し $\int_p^q f'(x)g(x)dx=f(q)g(q)-f(p)g(p)-\int_p^q f(x)g'(x)dx$ が成り立つ.

2) $g:(a,b)\to \boldsymbol{R}$ が (a,b) の各点 x で微分可能で, 導関数 $g':(a,b)\to \boldsymbol{R}$ は連続とする. $p,q\in(a,b)$ に対し g の p, q を両端とする閉区間における最大値を M, 最小値を m とするとき, 関数 $f:[m,M]\to \boldsymbol{R}$ が連続ならば $\int_p^q f(g(t))g'(t)dt=\int_{g(p)}^{g(q)} f(x)dx$ が成り立つ.

証明 1) $f'g=(fg)'-fg'$ だから, この両辺の p から q まで積分すれば (11.3) から結果が得られる.

2) I を p, q を両端とする閉区間として $F,G:I\to \boldsymbol{R}$ を $F(x)=\int_p^x f(g(t))g'(t)dt$, $G(x)=\int_{g(p)}^{g(x)} f(t)dt$ で定義すると, (11.2) により $F'(x)=f(g(x))g'(x)=G'(x)$ だから (6.6) から $F-G$ は定数値関数である. $F(p)=G(p)=0$ だから $F=G$, 従ってとくに $F(q)=G(q)$ となる. □

定理 11.5 $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ は連続関数で, $\varphi:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ は積分可能な関数とする. すべての $x\in[a,b]$ に対して $\varphi(x)\geqq 0$ ならば $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=f(c)\int_a^b \varphi(x)dx$ を満たす $c\in(a,b)$ がある.

証明 f は連続だから, f の最大値と最小値がある. 最大値を M, 最小値を m とすれば, すべての $x\in[a,b]$ に対して $m\leqq f(x)\leqq M$ だから $\varphi(x)\geqq 0$ より $m\varphi(x)\leqq f(x)\varphi(x)\leqq M\varphi(x)$ である. 従って (10.3) の 1) から $m\int_a^b \varphi(x)dx\leqq\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\leqq M\int_a^b \varphi(x)dx$ となる.

$m\int_a^b \varphi(x)dx<\int_a^b f(x)\varphi(x)dx<M\int_a^b \varphi(x)dx$ ならば $m<\frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)dx}{\int_a^b \varphi(x)dx}<M$ だから $f(p)=M$, $f(q)=m$ を満たす $p,q\in[a,b]$ をとれば, 中間値の定理により p と q の間に $f(c)=\frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)dx}{\int_a^b \varphi(x)dx}$ を満たす c がある. $p<q$ ならば $a\leqq p<c<q\leqq b$, $p>q$ ならば $a\leqq q<c<p\leqq b$ だから, いずれにしても $c\in(a,b)$ であり, $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=f(c)\int_a^b \varphi(x)dx$ が成り立つ.

$Z=\{x|\,x\in(a,b),\ \varphi(x)=0\}$ とおき, φ が連続である点全体からなる (a,b) の部分集合を C とする.

$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = M\int_a^b \varphi(x)dx$ のとき, $f(c) = M$ となる $c \in (a,b)$ が存在する場合は主張が成り立つので, そのような c が存在しない場合を考える. このとき, $x \in (a,b)$ ならば $f(x) < M$ であり (10.3) の 1) から $x \in C$ において $f(x)\varphi(x) = M\varphi(x)$ となるため, $x \in Z$ である. 故にこの場合 $C \subset Z$ が成り立つ. また, $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = m\int_a^b \varphi(x)dx$ のとき, $f(c) = m$ となる $c \in (a,b)$ が存在する場合は主張が成り立つので, そのような c が存在しない場合も同様に $C \subset Z$ が成り立つ.

$C \subset Z$ が成り立てば (10.7) により, 任意の $a \leqq c < d \leqq b$ に対して $Z \cap (c,d) \supset C \cap (c,d) \neq \emptyset$ であり, 明らかに $x \in Z$ ならば $f(x)\varphi(x) = \varphi(x) = 0$ となるため (10.3) の 2) により $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx = 0$ である. 故に $C \subset Z$ ならば, 任意の $c \in (a,b)$ に対して $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)dx$ が成り立つ. □

定理 11.6 関数 $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ は n 回微分可能で, n 階導関数 $f^{(n)} : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ が連続ならば, $x, p \in (a,b)$ に対して次の等式が成り立つ.

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f^{(i)}(p)}{i!}(x-p)^i + \frac{1}{(n-1)!}\int_p^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt$$

証明 k による帰納法で $f(x) = f(p) + \sum\limits_{i=1}^{k-1} \frac{f^{(i)}(p)}{i!}(x-p)^i + \frac{1}{(k-1)!}\int_p^x (x-t)^{k-1} f^{(k)}(t)dt$ を示す. (11.3) により $f(x) = f(p) + \int_p^x f'(t)dt$ となるため, $k = 1$ のとき, 上の等式は成り立つ. $k = r$ のとき, 上の等式が成り立つとすれば, (11.4) の 1) から $\int_p^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt = \int_p^x \left(-\frac{1}{r}(x-t)^r\right)' f^{(r)}(t)dt = \frac{1}{r}(x-p)^r f^{(r)}(p) + \frac{1}{r}\int_p^x (x-t)^r f^{(r+1)}(t)dt$ となるため, これを上の等式に代入すれば $k = r+1$ のときも上の等式が成り立つ. □

定理 11.7 べき級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を R とし, 関数 $f : (-R,R) \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ で定める. このとき, $|x| < R$ ならば $\int_0^x f(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ が成り立つ.

証明 まず (8.5) からべき級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ の収束半径も R であり, この級数で定義される関数を F とすれば (8.6) により, F の導関数は f に一致する. $F(0) = 0$ だから (11.3) から $\int_0^x f(t)dt = F(x)$ である. □

12 広義積分

定義 12.1 I を区間とし, 関数 $f : I \to \boldsymbol{R}$ が与えられているとする.

1) $I = [a,b)$ ($I = (a,b]$) のとき, 任意の $t \in I$ に対し f が $[a,t]$ ($[t,b]$) において積分可能であり, 極限 $\lim\limits_{t \uparrow b} \int_a^t f(x)dx$ ($\lim\limits_{t \downarrow a} \int_t^b f(x)dx$) が存在する場合, f は I において (広義) 積分可能であるといい, $\int_a^b f(x)dx$ を $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t \uparrow b} \int_a^t f(x)dx$ ($\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t \downarrow b} \int_t^b f(x)dx$) により定義する.

2) $I = [a,\infty)$ ($I = (-\infty,b]$) のとき, 任意の $t \in I$ に対し f が $[a,t]$ ($[t,b]$) において積分可能であり, 極限 $\lim\limits_{t \to \infty} \int_a^t f(x)dx$ ($\lim\limits_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx$) が存在する場合, f は I において (広義) 積分可能であるといい, $\int_a^\infty f(x)dx$ ($\int_{-\infty}^b f(x)dx$) を $\int_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{t \to \infty} \int_a^t f(x)dx$ ($\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx$ により定義する.

3) $I = (a,b)$ ($-\infty \leqq a < b \leqq \infty$) のとき, 任意の $s,t \in (a,b)$ に対して f が $[s,t]$ において積分可能であり, $c \in I$ に対し $\int_a^c f(x)dx$ と $\int_c^b f(x)dx$ が上の 1), 2) のように定義されるとする. そこで $\int_a^b f(x)dx$ を $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ により定義する. このとき (10.6) の 1) から $\int_a^b f(x)dx$ の値は c の選び方によらない.

例 12.2 連続関数 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が (a,b) の各点で微分可能であり, 導関数 $f' : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ が連続であるとする. 任意の $s,t \in (a,b)$ ($s < t$) に対し (11.3) から $\int_s^t f'(x)dx = f(t) - f(s)$ であり, f の連続性から $\lim\limits_{s \downarrow a} f(s) = f(a)$, $\lim\limits_{t \uparrow b} f(t) = f(b)$ だから f' は $[a,b]$ において積分可能であり, $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ が成り立つ.

補題 12.3 I を区間, $f : I \to [0, \infty)$ を, I に含まれる任意の有限閉区間で積分可能な関数とする.

1) $I = [a, b)$ $(I = (a, b])$ のとき, b (a) に収束する単調増加 (減少) 数列 $\{p_n\}_{n=1,2,\dots}$ で, すべての n 対して $p_n < b$ $(p_n > a)$ を満たし, $\alpha_n = \int_a^{b_n} f(x)dx$ で定義される数列 $\{\alpha_n\}_{n=1,2,\dots}$ が収束するようなものが存在すれば f は I において積分可能で $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$ が成り立つ.

2) $I = [a, \infty)$ $(I = (-\infty, b])$ のとき, 単調増加 (減少) 数列 $\{p_n\}_{n=1,2,\dots}$ で, $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$ ($\lim_{n\to\infty} p_n = -\infty$) を満たし, $\alpha_n = \int_a^{b_n} f(x)dx$ で定義される数列 $\{\alpha_n\}_{n=1,2,\dots}$ が収束するようなものが存在すれば f は I において積分可能で $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$ $(\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \alpha_n)$ が成り立つ.

証明 1) b に収束する任意の単調増加数列 $\{b_n\}_{n=1,2,\dots}$ で, すべての n 対して $p_n < b$ を満たすようなものを考え, $\beta_n = \int_a^{b_n} f(x)dx$ により数列 $\{\beta_n\}_{n=1,2,\dots}$ を定める. $R = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$ とおき, $\varepsilon > 0$ を任意にとると, 「$n > N_1$ ならば $\alpha_n > R - \varepsilon$」を満たす自然数 N_1 がある. $\{p_n\}_{n=1,2,\dots}$ も $\{b_n\}_{n=1,2,\dots}$ もともに単調に増加して b に収束するため $b_N \geqq p_{N_1+1}$ を満たす N がある. $n > N$ ならば $b_n \geqq b_N \geqq p_{N_1+1}$ だから $\beta_n = \int_a^{b_n} f(x)dx = \int_a^{p_{N_1+1}} f(x)dx + \int_{p_{N_1+1}}^{b_n} f(x)dx \geqq \alpha_{N_1+1} > R - \varepsilon$ となる. 従って $\{\beta_n\}_{n=1,2,\dots}$ も R に収束するため (6.9) により f は I において積分可能で $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$ が成り立つ.

2) $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ となる任意の単調増加数列 $\{b_n\}_{n=1,2,\dots}$ を考えて 1) と同様に示される. □

命題 12.4 I を区間とし, 関数 $f, g : I \to [0, \infty)$ が与えられていて, f は I に含まれる任意の有限閉区間で積分可能であり, g は I において積分可能であるとする.

1) 任意の $x \in I$ に対して $f(x) \leqq g(x)$ が成り立てば f は I において積分可能である.

2) $I = [a, b)$ $(I = (a, b])$ のとき, 極限値 $\lim_{x\uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)}$ $(\lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)})$ が存在すれば f は I において積分可能である. $I = [a, \infty)$ $(I = (-\infty, b])$ の場合, 極限値 $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ $(\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)})$ が存在すれば f は I において積分可能である.

証明 1) $I = [a, b)$ のとき, $b \neq \infty$ ならば b に収束する単調増加数列 $\{b_n\}_{n=1,2,\dots}$ で $b_n < b$ を満たすものに対し, $\alpha_n = \int_a^{b_n} f(x)dx$, $\beta_n = \int_a^{b_n} g(x)dx$ により数列 $\{\alpha_n\}_{n=1,2,\dots}$, $\{\beta_n\}_{n=1,2,\dots}$ を定めると (10.6) と (10.3) の 1) により, これらの数列はともに単調増加数列であり, すべての n に対して $\alpha_n \leqq \beta_n$ である. $\{\beta_n\}_{n=1,2,\dots}$ は $\int_a^b g(x)dx$ に収束するため $\{\alpha_n\}_{n=1,2,\dots}$ は上に有界である. 従って $\{\alpha_n\}_{n=1,2,\dots}$ も収束するため (6.9) により f は積分可能である. $b = \infty$ ならば単調増加数列 $\{b_n\}_{n=1,2,\dots}$ で $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ を満たすものに対し, 上と同様の議論で f は積分可能であることが示される. $I = (a, b]$, $I = (a, b)$ の場合も同様にして示される.

2) $\lim_{x\uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = C$ とおくと, $a < c < b$ で「$c < x < b$ ならば $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - C\right| < 1$」を満たすものがある. 従って $c < x < b$ ならば $f(x) < (C+1)g(x)$ となるため 1) の結果により f は $[c, b)$ において積分可能である. 故に (10.5) の 1) から f は I において積分可能である. $I = (a, b]$, $I = [a, \infty)$, $I = (-\infty, b]$ の場合も同様に示される. □

例 12.5 1) $f : (-1, 1) \to [0, \infty)$ を $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $g, h : [-1, 1] \to \boldsymbol{R}$ を $g(x) = -2\sqrt{1-x}$, $h(x) = 2\sqrt{1+x}$ により定義すると $g', h' : (-1, 1) \to \boldsymbol{R}$ は $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ で与えられるため, $x \in [0, 1)$ ならば $f(x) \leqq g'(x)$, $x \in (-1, 0]$ ならば $f(x) \leqq h'(x)$ が成り立つ. (12.2) により g', h' はそれぞれ区間 $[0, 1]$, $[-1, 0]$ において積分可能である. 従って (12.4) により f は区間 $(-1, 0]$, $[0, 1)$ において積分可能である.

2) $p, q > 0$ に対して, 積分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ が存在することを示す. $p, q \geqq 1$ ならば $x \mapsto x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ で定義される関数 $[0, 1] \to \boldsymbol{R}$ は連続だから, この積分は存在する. $0 < p < 1$ の場合 $f(x) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$, $g(x) = x^{p-1}$ で関数 $f, g : (0, \frac{1}{2}] \to \boldsymbol{R}$ で定義すれば g の原始関数 $\frac{x^p}{p}$ は区間 $[0, \frac{1}{2}]$ において連続だから (12.2) により g は積分可能である. また $\lim_{x\downarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\downarrow 0}(1-x)^{q-1} = 1$ だから (12.4) の 2) により $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ は存在する. 同様にして $0 < q < 1$ の場合も $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ が存在することが示されるため, 任意の $p, q > 0$ に対して, 積分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ は存在する.

3) 任意の $s > 0$ に対して, 積分 $\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$ が存在することを示す. $x \in (0, 1]$ ならば $x^{s-1}e^{-x} \leqq x^{s-1}$ であり,

x^{s-1} の原始関数 $\frac{x^s}{s}$ は区間 $[0,1]$ において連続だから (12.2) により $\int_0^1 x^{s-1}dx$ は存在する．従って (12.4) の 1) から $\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx$ は存在する．$x \in [1,\infty)$ のとき，$f(x) = x^{s-1}e^{-x}$, $g(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ により関数 $f,g : [1,\infty) \to [0,\infty)$ を定義する．$N \geqq s-1$ を満たす自然数をとれば，$x \geqq 1$ のとき $\frac{f(x)}{g(x)} = x^{s-1}e^{-\frac{x}{2}} \leqq x^N\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^x$ であり (8.4) から $\lim_{x\to\infty} x^N\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^x = 0$ だから $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ である．故に (12.4) の 2) から $\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$ も存在する．以上から積分 $\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$ は存在する．

13　曲線の長さ

m 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^m = \{(x_1,x_2,\dots,x_m)|\, x_1,x_2,\dots,x_m \in \boldsymbol{R}^m\}$ の 2 点 $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\dots,x_m)$, $\boldsymbol{y} = (y_1,y_2,\dots,y_m)$ の間の距離 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j-y_j)^2}$ により定義する．

補題 13.1　$u_1,u_2,\dots,u_m,v_1,v_2,\dots,v_m \in \boldsymbol{R}$ に対し，$\left|\sum_{j=1}^m u_jv_j\right| \leqq \sqrt{\sum_{j=1}^m u_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^m v_j^2}$ が成り立つ．

証明　示すべき不等式の両辺の 2 乗の差を考えると，

$$\left(\sqrt{\sum_{j=1}^m u_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^m v_j^2}\right)^2 - \left|\sum_{j=1}^m u_jv_j\right|^2 = \sum_{i\neq j} u_i^2v_j^2 - 2\sum_{i<j} u_iu_jv_iv_j = \sum_{i<j}(u_i^2v_j^2 - 2u_iu_jv_iv_j + u_j^2v_i^2)$$
$$= \sum_{i<j}(u_iv_j - u_jv_i)^2 \geqq 0$$

だから結果が得られる．　□

命題 13.2　1) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^m$ に対して，$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \leqq d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ が成り立つ．

2) $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\dots,x_m), \boldsymbol{y} = (y_1,y_2,\dots,y_m) \in \boldsymbol{R}^m$ に対して，$|x_k - y_k| \leqq d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leqq \sum_{j=1}^m |x_j - y_j|$ が成り立つ．

3) $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\dots,x_m), \boldsymbol{y} = (y_1,y_2,\dots,y_m) \in \boldsymbol{R}^m$ に対して，$\left|\sqrt{\sum_{j=1}^m x_j^2} - \sqrt{\sum_{j=1}^m y_j^2}\right| \leqq d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成り立つ．

証明　1) $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\dots,x_m)$, $\boldsymbol{y} = (y_1,y_2,\dots,y_m)$, $\boldsymbol{z} = (z_1,z_2,\dots,z_m)$ とし，さらに $u_j = x_j - y_j$, $v_j = y_j - z_j$ $(j = 1,2,\dots,n)$ とおけば，$u_j + v_j = x_j - z_j$ だから $\sqrt{\sum_{j=1}^m (u_j+v_j)^2} \leqq \sqrt{\sum_{j=1}^m u_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^m v_j^2}$ を示せば結果が得られる．補題 17.8 より $\left(\sqrt{\sum_{j=1}^m u_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^m v_j^2}\right)^2 - \left(\sqrt{\sum_{j=1}^m (u_j+v_j)^2}\right)^2 = 2\left(\sqrt{\sum_{j=1}^m u_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^m v_j^2} - \sum_{j=1}^m u_jv_j\right) \geqq 0$ だから，上記の不等式が示された．

2) $|x_k - y_k|^2 \leqq \sum_{j=1}^m (x_j-y_j)^2 \leqq \left(\sum_{j=1}^m |x_j - y_j|\right)^2$ より，各辺の平方根をとれば，結果が得られる．

3) $\boldsymbol{R}^3$ の原点を $\boldsymbol{0}$ で表せば，1) より $\sqrt{\sum_{j=1}^m x_j^2} = d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}) \leqq d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{0}) = d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \sqrt{\sum_{j=1}^m y_j^2}$ だから $\sqrt{\sum_{j=1}^m x_j^2} - \sqrt{\sum_{j=1}^m y_j^2} \leqq d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成り立つ．従って $\sqrt{\sum_{j=1}^m y_j^2} - \sqrt{\sum_{j=1}^m x_j^2} \leqq d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ も成り立つため，結果が得られる．　□

定義 13.3　写像 $\boldsymbol{\varphi} : [a,b] \to \boldsymbol{R}^m$ を m 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^m$ における曲線と呼ぶ．各 $t \in [a,b]$ に対し $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t),\varphi_2(t),\dots,\varphi_m(t))$ とおくことにより，関数 $\varphi_j : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ $(j = 1,2,\dots,m)$ が定義されるが，この関数を $\boldsymbol{\varphi}$ の第 j 成分という．

定義 13.4　$\boldsymbol{R}^m$ における曲線 $\boldsymbol{\varphi}:[a,b]\to\boldsymbol{R}^m$ と $[a,b]$ の分割 $\Delta=\{a_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ に対し

$$s(\boldsymbol{\varphi},\Delta)=\sum_{i=1}^{n}d(\boldsymbol{\varphi}(a_i),\boldsymbol{\varphi}(a_{i-1}))$$

とおく．集合 $S_{\boldsymbol{\varphi}}=\{x|\,x=s(\boldsymbol{\varphi},\Delta)$ となる $[a,b]$ の分割 Δ がある $\}$ が上に有界であるとき, $\boldsymbol{\varphi}$ は長さを持つといい, $S_{\boldsymbol{\varphi}}$ の上限を $\boldsymbol{\varphi}$ の長さと呼ぶ．とくに $m=1$ の場合に $\boldsymbol{\varphi}$ が長さをもつとき, $\boldsymbol{\varphi}$ は有界変動であるといい, $\boldsymbol{\varphi}$ の長さを $\boldsymbol{\varphi}$ の全変動という．

命題 13.5　関数 $\varphi:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ は連続であり, (a,b) の各点で微分可能であるとする．さらに, 導関数 $\varphi':(a,b)\to\boldsymbol{R}$ が有界ならば φ は有界変動である．さらに, 実数 M で, すべての $x\in(a,b)$ に対して $|\varphi'(x)|\leqq M$ となるものをとり, $\boldsymbol{\varphi}$ の全変動を V とすれば $V\leqq M(b-a)$ が成り立つ．

証明　$\Delta=\{a_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ を $[a,b]$ の分割とすれば, 平均値の定理から $\varphi(a_i)-\varphi(a_{i-1})=\varphi'(c_i)(a_i-a_{i-1})$ を満たす $c_i\in(a_{i-1},a_i)$ があるため, $s(\varphi,\Delta)=\sum\limits_{i=1}^{n}|\varphi(a_i)-\varphi(a_{i-1})|=\sum\limits_{i=1}^{n}|\varphi'(c_i)|(a_i-a_{i-1})\leqq\sum\limits_{i=1}^{n}M(a_i-a_{i-1})=M(b-a)$ である．従って集合 S_φ は上界 $M(b-a)$ をもつ．□

命題 13.6　$\boldsymbol{R}^m$ における曲線 $\boldsymbol{\varphi}:[a,b]\to\boldsymbol{R}^m$ が与えられているとして, $\boldsymbol{\varphi}$ の第 j 成分を φ_j とする．

1) Δ, Δ' を $[a,b]$ の分割とし, Δ' が Δ より細かければ $s(\boldsymbol{\varphi},\Delta)\leqq s(\boldsymbol{\varphi},\Delta')$ である．

2) $[a,b]$ の分割 Δ に対し, $s(\varphi_k,\Delta)\leqq s(\boldsymbol{\varphi},\Delta)\leqq\sum\limits_{j=1}^{m}s(\varphi_j,\Delta)$ が成り立つ．

3) $\boldsymbol{\varphi}$ が長さを持つためには, $\boldsymbol{\varphi}$ の各成分が有界変動であることが必要十分である．

4) $\boldsymbol{\varphi}$ の各成分 $\varphi_j:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ が連続で, (a,b) の各点で微分可能であり, 導関数 $\varphi_j':(a,b)\to\boldsymbol{R}$ が有界ならば $\boldsymbol{\varphi}$ は長さをもつ．

証明　1) $\Delta=\{a_i\}_{i=0,1,\dots,n}$, $\Delta'=\{a_i'\}_{i=0,1,\dots,k}$ とすると, 各 $i=0,1,\dots,n$ に対し $a_i=a'_{s_i}$ となる s_i がある．(13.2) の 1) から $d(\boldsymbol{\varphi}(a_i),\boldsymbol{\varphi}(a_{i-1}))\leqq\sum\limits_{l=s_{i-1}+1}^{s_i}d(\boldsymbol{\varphi}(a_l'),\boldsymbol{\varphi}(a_{l-1}'))$ であり, これらを $i=0,1,\dots,n$ に対して辺々加えれば $s(\boldsymbol{\varphi},\Delta)\leqq s(\boldsymbol{\varphi},\Delta')$ が得られる．

2) $\Delta=\{a_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ とすると, (13.2) の 1) から $|\varphi_k(a_i)-\varphi_k(a_{i-1})|\leqq d(\boldsymbol{\varphi}(a_i),\boldsymbol{\varphi}(a_{i-1}))\leqq\sum\limits_{j=1}^{m}|\varphi_j(a_i)-\varphi_j(a_{i-1})|$ であり, これを $i=1,2,\dots,n$ として辺々加えれば $s(\varphi_k,\Delta)\leqq s(\boldsymbol{\varphi},\Delta)\leqq\sum\limits_{j=1}^{m}s(\varphi_j,\Delta)$ が得られる．

3) $\boldsymbol{\varphi}$ が長さ L を持つならば, 2) より, 各 $k=1,2,\dots,m$ と $[a,b]$ の任意の分割 Δ に対して $s(\varphi_k,\Delta)\leqq s(\boldsymbol{\varphi},\Delta)\leqq L$ だから S_{φ_k} は上に有界である．従って φ_k は有界変動である．逆に $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_m$ がすべて有界変動であるとして, φ_j の全変動を L_j とおけば, 2) より $[a,b]$ の任意の分割 Δ に対して $s(\boldsymbol{\varphi},\Delta)\leqq\sum\limits_{j=1}^{m}s(\varphi_j,\Delta)\leqq\sum\limits_{j=1}^{m}L_j$ だから $S_{\boldsymbol{\varphi}}$ は上に有界である．

4) (13.5) と 3) の結果から明らか．□

命題 13.7　$\boldsymbol{R}^m$ における曲線 $\boldsymbol{\varphi}:[a,b]\to\boldsymbol{R}^m$ が与えられており, $c\in[a,b]$ に対し, 曲線 $\boldsymbol{\varphi}_1:[a,c]\to\boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{\varphi}_2:[c,b]\to\boldsymbol{R}^m$ を $\boldsymbol{\varphi}_1(t)=\boldsymbol{\varphi}(t)$ $(t\in[a,c])$, $\boldsymbol{\varphi}_2(t)=\boldsymbol{\varphi}(t)$ $(t\in[c,b])$ で定める．$\boldsymbol{\varphi}$ が長さをもつためには, $\boldsymbol{\varphi}_1$ と $\boldsymbol{\varphi}_2$ がともに長さをもつことが必要十分であり, $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2$ の長さをそれぞれ L, L_1, L_2 とすれば, $L=L_1+L_2$ が成り立つ．

証明　$\boldsymbol{\varphi}$ が長さ L をもつとする．Δ_1, Δ_2 をそれぞれ $[a,c]$, $[c,b]$ の分割とすると, $\Delta_1+\Delta_2$ は $[a,b]$ の分割であり, $s(\boldsymbol{\varphi}_1,\Delta_1),s(\boldsymbol{\varphi}_2,\Delta_2)\leqq s(\boldsymbol{\varphi}_1,\Delta_1)+s(\boldsymbol{\varphi}_2,\Delta_2)=s(\boldsymbol{\varphi},\Delta_1+\Delta_2)\leqq L$ だから, 集合 $S_{\boldsymbol{\varphi}_1}$, $S_{\boldsymbol{\varphi}_2}$ は上に有界である．従って, $\boldsymbol{\varphi}_1$ と $\boldsymbol{\varphi}_2$ はともに長さをもち, $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2$ の長さをそれぞれ L_1, L_2 とすれば, 上の不等式から $L_1+L_2\leqq L$ が成り立つ．逆に $\boldsymbol{\varphi}_1$ と $\boldsymbol{\varphi}_2$ がそれぞれ長さ L_1, L_2 をもつとして, $[a,b]$ の任意の分割 $\Delta=\{a_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ に対し, $a_{k-1}\leqq c\leqq a_k$ を満たす k をとり, $[a,c]$, $[c,b]$ の分割 $\Delta_1=\{b_i\}_{i=0,1,\dots,k}$, $\Delta_2=\{c_i\}_{i=0,1,\dots,n-k+1}$ を

$b_i = \begin{cases} a_i & 0 \leqq i \leqq k-1 \\ c & i = k \end{cases}$, $c_i = \begin{cases} c & i = 0 \\ a_{i+k-1} & 1 \leqq i \leqq n-k+1 \end{cases}$ により定めれば $s(\boldsymbol{\varphi}, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} d(\boldsymbol{\varphi}(a_i), \boldsymbol{\varphi}(a_{i-1})) = \sum_{i=1}^{k-1} d(\boldsymbol{\varphi}(a_i), \boldsymbol{\varphi}(a_{i-1})) + d(\boldsymbol{\varphi}(a_k), \boldsymbol{\varphi}(a_{k-1})) + \sum_{i=k+1}^{n} d(\boldsymbol{\varphi}(a_i), \boldsymbol{\varphi}(a_{i-1})) \leqq \sum_{i=1}^{k-1} d(\boldsymbol{\varphi}(a_i), \boldsymbol{\varphi}(a_{i-1})) + d(\boldsymbol{\varphi}(c), \boldsymbol{\varphi}(a_{k-1})) + d(\boldsymbol{\varphi}(a_k), \boldsymbol{\varphi}(c)) + \sum_{i=k+1}^{n} d(\boldsymbol{\varphi}(a_i), \boldsymbol{\varphi}(a_{i-1})) = s(\boldsymbol{\varphi}_1, \Delta_1) + s(\boldsymbol{\varphi}_2, \Delta_2) \leqq L_1 + L_2$ となるため, $S_{\boldsymbol{\varphi}}$ は上界 $L_1 + L_2$ をもつ. 従って, $\boldsymbol{\varphi}$ は長さをもち, その長さを L とすれば, $L \leqq L_1 + L_2$ が成り立つ. 以上から $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2$ が長さをもつ場合, $L = L_1 + L_2$ である. □

$\boldsymbol{R}^m$ における曲線 $\boldsymbol{\varphi} : [a,b] \to \boldsymbol{R}^m$ が長さをもつ場合, 上の結果から, 各 $p, q \in [a,b]$ $(p \leqq q)$ に対して $\boldsymbol{\varphi}_{p,q}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$ で与えられる曲線 $\boldsymbol{\varphi}_{p,q} : [p,q] \to \boldsymbol{R}^m$ も長さをもつ. この曲線の長さを $L_{\boldsymbol{\varphi}}(p,q)$ で表し, $p > q$ の場合は $L_{\boldsymbol{\varphi}}(p,q) = -L_{\boldsymbol{\varphi}}(q,p)$ とおくことにする.

命題 13.8 $\boldsymbol{R}^m$ における曲線 $\boldsymbol{\varphi} : [a,b] \to \boldsymbol{R}^m$ が長さをもつとし, $\boldsymbol{\varphi}$ の第 j 成分を φ_j とする. このとき, $p, q, r \in [a,b]$ に対し, 不等式 $L_{\boldsymbol{\varphi}}(p,q) \leqq \sum_{j=1}^{m} L_{\varphi_j}(p,q)$ および等式 $L_{\boldsymbol{\varphi}}(p,r) = L_{\boldsymbol{\varphi}}(p,q) + L_{\boldsymbol{\varphi}}(q,r)$ が成り立つ.

証明 $[p,q]$ の分割 $\Delta = \{a_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ に対し (13.2) の 2) より $d(\boldsymbol{\varphi}(a_i), \boldsymbol{\varphi}(a_{i-1})) \leqq \sum_{j=1}^{m} |\varphi_j(a_i) - \varphi_j(a_{i-1})|$ だから, $i = 1, 2, \dots, n$ について辺々加えれば $s(\boldsymbol{\varphi}_{p,q}, \Delta) \leqq \sum_{j=1}^{m} s((\varphi_j)_{p,q}, \Delta) \leqq \sum_{j=1}^{m} L_{\varphi_j}(p,q)$ となるため $L_{\boldsymbol{\varphi}}(p,q) \leqq \sum_{j=1}^{m} L_{\varphi_j}(p,q)$ が得られる. $L_{\boldsymbol{\varphi}}(p,r) = L_{\boldsymbol{\varphi}}(p,q) + L_{\boldsymbol{\varphi}}(q,r)$ は (13.7) からただちに得られる. □

命題 13.9 関数 $\varphi : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が有界変動であるためには, φ が単調増加関数と単調減少関数の和で表されることが必要十分である.

証明 φ が有界変動であるとき, $\varphi_+, \varphi_- : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ を $\varphi_+(x) = L_\varphi(a,x)$, $\varphi_-(x) = \varphi(x) - L_\varphi(a,x)$ で定めれば $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$ である. $x, y \in [a,b]$, $x < y$ のとき, (13.8) により $\varphi_+(y) = L_\varphi(a,y) = L_\varphi(a,x) + L_\varphi(x,y) \geqq L_\varphi(a,x) = \varphi_+(x)$, $\varphi_-(x) - \varphi_-(y) = \varphi(x) - L_\varphi(a,x) - \varphi(y) + L_\varphi(a,y) = L_\varphi(x,y) - (\varphi(y) - \varphi(x)) = L_\varphi(x,y) - s(\varphi_{x,y}, \{x,y\}) \geqq 0$ だから φ_+ は単調増加関数, φ_- は単調増加関数である.

$\varphi = f + g$ を満たす単調増加関数 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$, 単調減少関数 $g : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ があるとする. $[a,b]$ の任意の分割 $\Delta = \{a_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ に対し, $s(\varphi, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} |\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |f(a_i) - f(a_{i-1}) + g(a_i) - g(a_{i-1})| \leqq \sum_{i=1}^{n} (|f(a_i) - f(a_{i-1})| + |g(a_i) - g(a_{i-1})|) = \sum_{i=1}^{n} (f(a_i) - f(a_{i-1}) - g(a_i) + g(a_{i-1})) = f(b) - f(a) - g(b) + g(a)$ だから S_φ は上界 $f(b) - f(a) - g(b) + g(a)$ をもつ. □

注意 13.10 (9.10) により, 有界変動である関数は積分可能である.

定理 13.11 $\boldsymbol{R}^m$ における曲線 $\boldsymbol{\varphi} : [a,b] \to \boldsymbol{R}^m$ の第 j 成分を φ_j として, すべての j に対して φ_j は連続であり, (a,b) の各点で微分可能であるとする.

1) すべての j に対して導関数 $\varphi'_j : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ が有界であるとき, 実数 M で, すべての $x \in (a,b)$ と $j = 1, 2, \dots, m$ に対して $|\varphi'_j(x)| \leqq M$ 満たすものをとれば $p, q \in [a,b]$ に対し $L_{\boldsymbol{\varphi}}(p,q) \leqq mM|q-p|$ が成り立つ. 従って $x \in [a,b]$ を $L_{\boldsymbol{\varphi}}(p,x)$ に対応させる関数は一様連続である.

2) $\boldsymbol{\varphi}$ が長さを持ち, φ'_j が $t \in (a,b)$ において連続ならば, $p \in [a,b]$ として, $x \in [a,b]$ を $L_{\boldsymbol{\varphi}}(p,x)$ に対応させる関数は t において微分可能であり, t における微分係数は $\sqrt{\sum_{j=1}^{m} \varphi'_j(t)^2}$ で与えられる.

証明 1) (13.6) の 3) から $\boldsymbol{\varphi}$ は長さをもち, (13.8) と (13.5) から $L_{\boldsymbol{\varphi}}(p,q) \leqq \sum_{j=1}^{m} L_{\varphi_j}(p,q) \leqq mM|q-p|$. また $x,y \in [a,b]$ に対し, $|L_{\boldsymbol{\varphi}}(p,x) - L_{\boldsymbol{\varphi}}(p,y)| = |L_{\boldsymbol{\varphi}}(x,y)| \leqq mM|y-x|$ だから主張が示された.

2) 仮定から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ で $(t-\delta, t+\delta) \subset (a,b)$ かつ「$|x-t| < \delta$ ならば $|\varphi_j'(x) - \varphi_j'(t)| < \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{m}}$」を満たすものがある. また $0 < h < \delta$ である任意の h に対し, 区間 $[t, t+h]$ の分割 $\Delta = \{a_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ で, $0 \leqq L_{\boldsymbol{\varphi}}(t,t+h) - s(\boldsymbol{\varphi},\Delta) < \dfrac{h\varepsilon}{2}$ を満たすものがある. 一方, 区間 $[a_{i-1}, a_i]$ において平均値の定理を用いると $\varphi_j(a_i) - \varphi_j(a_{i-1}) = \varphi_j'(c_i)(a_i - a_{i-1})$ を満たす $c_i \in (a_{i-1}, a_i)$ がある. $h = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})$ に注意すれば

$$
\begin{aligned}
\left| s(\boldsymbol{\varphi},\Delta) - h\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\varphi_j'(t)^2} \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(\varphi_j(a_i) - \varphi_j(a_{i-1}))^2} - \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\varphi_j'(t)^2(a_i - a_{i-1})^2} \right) \right| \\
&\leqq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(\varphi_j(a_i) - \varphi_j(a_{i-1}) - \varphi_j'(t)(a_i - a_{i-1})\right)^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(\varphi_j'(c_i) - \varphi_j'(t)\right)^2 (a_i - a_{i-1})^2} < \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon^2}{4m}}(a_i - a_{i-1}) < \frac{h\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

従って $\left| L_{\boldsymbol{\varphi}}(t,t+h) - h\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\varphi_j'(t)^2} \right| \leqq |L_{\boldsymbol{\varphi}}(t,t+h) - s(\boldsymbol{\varphi},\Delta)| + \left| s(\boldsymbol{\varphi},\Delta) - h\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\varphi_j'(t)^2} \right| < h\varepsilon$ となるため

$$
\left| \frac{L_{\boldsymbol{\varphi}}(p,t+h) - L_{\boldsymbol{\varphi}}(p,t)}{h} - \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\varphi_j'(t)^2} \right| = \left| \frac{L_{\boldsymbol{\varphi}}(t,t+h)}{h} - \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\varphi_j'(t)^2} \right| < \varepsilon
$$

である. $-\delta < h < 0$ の場合は, 区間 $[t+h, t]$ の分割 $\Delta' = \{a_i'\}_{i=0,1,\ldots,k}$ で, $0 < L_{\boldsymbol{\varphi}}(t+h,t) - s(\boldsymbol{\varphi},\Delta) < -\dfrac{h\varepsilon}{2}$ を満たすものをとる. 上と同様にして $\left| s(\boldsymbol{\varphi},\Delta') + h\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\varphi_j'(t)^2} \right| < -\dfrac{h\varepsilon}{2}$ が得られるため,

$$
\left| \frac{L_{\boldsymbol{\varphi}}(p,t+h) - L_{\boldsymbol{\varphi}}(p,t)}{h} - \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\varphi_j'(t)^2} \right| = \left| \frac{L_{\boldsymbol{\varphi}}(t+h,t)}{-h} - \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\varphi_j'(t)^2} \right| < \varepsilon
$$

が得られる. 以上から $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{L_{\boldsymbol{\varphi}}(p,t+h) - L_{\boldsymbol{\varphi}}(p,t)}{h} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\varphi_j'(t)^2}$ である. □

命題 13.12 $\boldsymbol{R}^m$ における曲線 $\boldsymbol{\varphi} : [a,b] \to \boldsymbol{R}^m$ の各成分 $\varphi_j : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ は有界であるとする.

1) 任意の $x \in (a,b)$ に対して, 曲線 $\boldsymbol{\varphi}_{a,x} : [a,x] \to \boldsymbol{R}^m$ が長さ $L_{\boldsymbol{\varphi}}(a,x)$ をもち, $x \in (a,b)$ を $L_{\boldsymbol{\varphi}}(a,x)$ に対応させる関数が有界なとき $\boldsymbol{\varphi}$ は長さをもつ. さらに, 各 φ_j が b で連続ならば, $\boldsymbol{\varphi}$ の長さは $\displaystyle\lim_{x\uparrow b} L_{\boldsymbol{\varphi}}(a,x)$ である.

2) 任意の $x \in (a,b)$ に対して, 曲線 $\boldsymbol{\varphi}_{x,b} : [x,b] \to \boldsymbol{R}^m$ が長さ $L_{\boldsymbol{\varphi}}(x,b)$ をもち, $x \in (a,b)$ を $L_{\boldsymbol{\varphi}}(x,b)$ に対応させる関数が有界なとき $\boldsymbol{\varphi}$ は長さをもつ. さらに, 各 φ_j が a で連続ならば, $\boldsymbol{\varphi}$ の長さは $\displaystyle\lim_{x\downarrow a} L_{\boldsymbol{\varphi}}(x,b)$ である.

証明 正の実数 M で, すべての $j = 1,2,\ldots,m$ と $x \in [a,b]$ に対して $|\varphi_j(x)| \leqq M$ を満たすものがある.

1) 関数 $x \mapsto L_{\boldsymbol{\varphi}}(a,x)$ は単調増加で有界だから, 極限 $\displaystyle\lim_{x\uparrow b} L_{\boldsymbol{\varphi}}(a,x)$ が存在する. この極限値を L とおき, $\Delta = \{a_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ を $[a,b]$ の任意の分割とする. $a_k < b$ のとき, $[a, a_k]$ の分割 $\Delta' = \{a_i\}_{i=0,1,\ldots,k}$ を考えると $s(\boldsymbol{\varphi},\Delta) = s(\boldsymbol{\varphi},\Delta') + d(\boldsymbol{\varphi}(a_k), \boldsymbol{\varphi}(b)) \leqq L_{\boldsymbol{\varphi}}(a,a_k) + \sum_{j=1}^{m}|\boldsymbol{\varphi}_j(a_k) - \boldsymbol{\varphi}_j(b)| \leqq L + 2mM$ だから集合 $S_{\boldsymbol{\varphi}}$ は上界 $L + 2mM$ をもち, $\boldsymbol{\varphi}$ は長さをもつ.

各 φ_j が b において連続であると仮定し, $\varepsilon > 0$ を任意にとる. このとき $L - \frac{\varepsilon}{2} < L_{\boldsymbol{\varphi}}(a,p)$ を満たす $p \in (a,b)$ をとり, さらに $L_{\boldsymbol{\varphi}}(a,p) - \frac{\varepsilon}{2} < s(\boldsymbol{\varphi}, \Delta_1)$ を満たす $[a,p]$ の分割 Δ_1 をとると, $L - \varepsilon < s(\boldsymbol{\varphi}, \Delta_1)$ が成り立つ. 従って Δ_1 に分点 b を加えて得られる $[a,b]$ の分割を Δ_2 とすれば $s(\boldsymbol{\varphi}, \Delta_2) \geqq s(\boldsymbol{\varphi}, \Delta_1) > L - \varepsilon$ である.

一方 $[a,b]$ の任意の分割 Δ を考え, $c \in (a,b)$ で「$c < x < b$ ならば $j = 1, 2, \ldots, m$ に対して $|\varphi_j(x) - \varphi_j(b)| < \frac{\varepsilon}{m}$」を満たすものをとる. Δ の b 以外の分点のうちで最大のものを d として Δ に $c, d < p < b$ を満たす分点 p を付け加えた $[a,b]$ の分割を $\bar{\Delta}$, $\bar{\Delta}$ から b を除いてできる $[a,p]$ の分割を $\tilde{\Delta}$ とすると, $s(\boldsymbol{\varphi}, \Delta) \leqq s(\boldsymbol{\varphi}, \bar{\Delta}) = s(\boldsymbol{\varphi}, \tilde{\Delta}) + d(\boldsymbol{\varphi}(p), \boldsymbol{\varphi}(b)) \leqq L_{\boldsymbol{\varphi}}(a,p) + \sum_{j=1}^{m} |\boldsymbol{\varphi}_j(p) - \boldsymbol{\varphi}_j(b)| < L + \varepsilon$ である. ここで $\varepsilon > 0$ は任意に選べたので $s(\boldsymbol{\varphi}, \Delta) \leqq L$ が得られ, L は集合 $S_{\boldsymbol{\varphi}}$ の上限であることが分かる.

2) も 1) と同様にして示される. □

系 13.13 $\boldsymbol{R}^m$ における曲線 $\boldsymbol{\varphi} : [a,b] \to \boldsymbol{R}^m$ の第 j 成分を φ_j とする. 各 j に対して φ_j は連続であり, (a,b) の各点で微分可能で, 導関数 $\varphi_j' : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ は連続であると仮定する. 広義積分 $\displaystyle\int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \varphi_j'(t)^2}\,dt$ が存在すれば, $\boldsymbol{\varphi}$ は長さをもち, $\boldsymbol{\varphi}$ の長さは $\displaystyle\int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \varphi_j'(t)^2}\,dt$ である.

証明 $c \in (a,b)$ を選んでおく. 仮定と (13.6) の 4) から, 任意の $x \in (a,c)$, $y \in (c,b)$ に対して曲線 $\boldsymbol{\varphi}_{x,c} : [x,c] \to \boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{\varphi}_{c,y} : [c,y] \to \boldsymbol{R}^m$ はそれぞれ長さ $L_{\boldsymbol{\varphi}}(x,c)$, $L_{\boldsymbol{\varphi}}(c,y)$ をもち, (13.11) と (11.3) から

$$L_{\boldsymbol{\varphi}}(x,c) = \int_x^c \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \varphi_j'(t)^2}\,dt, \qquad L_{\boldsymbol{\varphi}}(c,y) = \int_c^y \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \varphi_j'(t)^2}\,dt$$

である. 仮定から $\displaystyle\lim_{x \downarrow a} L_{\boldsymbol{\varphi}}(x,c) = \int_a^c \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \varphi_j'(t)^2}\,dt$, $\displaystyle\lim_{y \uparrow b} L_{\boldsymbol{\varphi}}(c,y) = \int_c^b \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \varphi_j'(t)^2}\,dt$ は存在するため, (13.12) から, 曲線 $\boldsymbol{\varphi}_{a,c} : [a,c] \to \boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{\varphi}_{c,b} : [c,b] \to \boldsymbol{R}^m$ の長さは存在して, それぞれ $\displaystyle\int_a^c \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \varphi_j'(t)^2}\,dt$, $\displaystyle\int_c^b \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \varphi_j'(t)^2}\,dt$ で与えられる. 従って (13.7) により, 結果が得られる. □

例 13.14 1) $\boldsymbol{\varphi} : [-1,1] \to \boldsymbol{R}^2$ を $\boldsymbol{\varphi}(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ で定めれば, $\boldsymbol{\varphi}$ は, 原点を中心として, 半径 1 の半円を描く. このとき, $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = \sqrt{1-t^2}$ だから, $\varphi_1'(t) = 1$, $\varphi_2'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ であり, (12.5) の 1) から広義積分 $\int_{-1}^{1} \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ は存在する. 従って (13.13) により, $\boldsymbol{\varphi}$ の長さは存在して, 広義積分 $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ によって与えられる.

2) 関数 $r, \theta, \psi : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ は連続で, (a,b) の各点で微分可能であり, 導関数 $r', \theta', \psi' : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ は連続であるとする. 各成分が $\varphi_1(t) = r(t)\sin\theta(t)\cos\psi(t)$, $\varphi_2(t) = r(t)\sin\theta(t)\sin\psi(t)$, $\varphi_3(t) = r(t)\cos\theta(t)$ で与えられる曲線 $\boldsymbol{\varphi} : [a,b] \to \boldsymbol{R}^3$ を考えると $(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2 + (\varphi_3'(t))^2 = r'(t)^2 + r(t)^2\theta'(t)^2 + r(t)^2\psi'(t)^2(\sin\theta(t))^2$ だから, $\boldsymbol{\varphi}$ の長さは $\int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2\theta'(t)^2 + r(t)^2\psi'(t)^2(\sin\theta(t))^2}\,dt$ で与えられる.

命題 13.15 $\boldsymbol{R}^m$ における曲線 $\boldsymbol{\varphi} : [a,b] \to \boldsymbol{R}^m$ に対して, 次の条件 $(*)$ を満たすような実数 L が存在するとき, $\boldsymbol{\varphi}$ は長さを持ち, L は $\boldsymbol{\varphi}$ の長さに一致する.

$(*)$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ で「$|\Delta| < \delta$ である $[a,b]$ の任意の分割 Δ に対して $|L - s(\boldsymbol{\varphi}, \Delta)| < \varepsilon$」を満たすものがある.

証明 条件 $(*)$ を満たすような実数 L が存在すると仮定する. もし $s(\boldsymbol{\varphi}, \Delta_0) > L$ となる $[a,b]$ の分割 Δ_0 があれば Δ_0 より細かい $[a,b]$ の分割 Δ で, $s(\boldsymbol{\varphi}, \Delta) - L < s(\boldsymbol{\varphi}, \Delta_0) - L$ を満たすものが存在する. このとき, $s(\boldsymbol{\varphi}, \Delta) < s(\boldsymbol{\varphi}, \Delta_0)$ であるが, これは (13.6) の 1) の結果と矛盾する. 従って L は $S_{\boldsymbol{\varphi}}$ の上界になるため $\boldsymbol{\varphi}$ は長さをもつ. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $L - s(\boldsymbol{\varphi}, \Delta) < \varepsilon$ を満たす $[a,b]$ の分割 Δ があるため, L は $S_{\boldsymbol{\varphi}}$ の上限である. □

補題 13.16　有限開区間で定義された実数値関数が一様連続ならば有界である.

証明　$f:(a,b)\to \boldsymbol{R}$ は一様連続であるとする. このとき, $\delta>0$ で「$|x-y|<\delta$ ならば $|f(x)-f(y)|<1$」を満たすものがある. $n \geqq \frac{b-a}{\delta}$ を満たす整数 n をとり, $c_i = a+\frac{i(b-a)}{n}$ とおくと, $x\in(c_i-\delta, c_i+\delta)\cap(a,b)$ ならば $|f(x)|\leqq|f(x)-f(c_i)|+|f(c_i)|<1+|f(c_i)|$ である. そこで $|f(c_1)|,|f(c_2)|,\dots,|f(c_{n-1})|$ の中で最大のものを M とおく. $c_1-\delta = a+\frac{b-a}{n}-\delta\leqq a$, $(c_i+\delta)-(c_{i+1}-\delta)=2\delta-\frac{b-a}{n}\geqq\delta>0$, $c_{n-1}+\delta=a+\frac{(n-1)(b-a)}{n}+\delta=b-\frac{b-a}{n}+\delta\geqq b$ だから $(a,b)\subset\bigcup_{i=1}^{n-1}(c_i-\delta,c_i+\delta)$ である. 従って, 任意の $x\in(a,b)$ に対し $|f(x)|<1+M$ となるため f は有界である. □

命題 13.17　$\boldsymbol{R}^m$ の曲線 $\boldsymbol{\varphi}:[a,b]\to\boldsymbol{R}^m$ の第 j 成分を φ_j とする. 各 j に対して φ_j は連続で, (a,b) の各点で微分可能であり, さらに導関数 $\varphi_j':(a,b)\to\boldsymbol{R}$ が一様連続ならば (13.15) の条件 $(*)$ を満たす実数 L が存在する.

証明　(13.16) と (13.6) の 4) から, $\boldsymbol{\varphi}$ は長さをもつ. $\boldsymbol{\varphi}$ の長さを L とおくと, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $L-s(\boldsymbol{\varphi},\Delta_1)<\frac{\varepsilon}{2}$ を満たす $[a,b]$ の分割 Δ_1 がある. また, 仮定から $\delta>0$ で「$|x-y|<\delta$ ならば $|\varphi_j'(x)-\varphi_j'(y)|<\frac{\varepsilon}{2m(b-a)}$」を満たすものがある. $|\Delta|<\delta$ を満たす $[a,b]$ の任意の分割 $\Delta=\{a_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ に対し $\Delta_1\cup\Delta=\{a_i'\}_{i=0,1,\dots,k}$ とおくと, 各 $i=0,1,\dots,n$ に対し $a_i=a'_{s_i}$ となる s_i がある. 平均値の定理から, 各 $l=1,2,\dots,k$, $i=1,2,\dots,n$ に対して $\varphi_j(a_l')-\varphi_j(a_{l-1}')=\varphi_j'(\xi_l)(a_l'-a_{l-1}')$, $\varphi_j(a_i)-\varphi_j(a_{i-1})=\varphi_j'(\zeta_i)(a_i-a_{i-1})$ を満たす $\xi_l\in(a_{l-1}',a_l')$, $\zeta_i\in(a_{i-1},a_i)$ がある. $s_{i-1}+1\leqq l\leqq s_i$ ならば $(a_{l-1}',a_l')\subset(a_{i-1},a_i)$ だから $|\xi_l-\zeta_i|<a_i-a_{i-1}\leqq|\Delta|<\delta$ となるため $|\varphi_j'(\xi_l)-\varphi_j'(\zeta_i)|<\frac{\varepsilon}{2m(b-a)}$ である. このことと, (13.2) の 2) より

$$
\begin{aligned}
s(\boldsymbol{\varphi},\Delta_1\cup\Delta)-s(\boldsymbol{\varphi},\Delta) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{l=s_{i-1}+1}^{s_i}\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(\varphi_j(a_l')-\varphi_j(a_{l-1}'))^2}-\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(\varphi_j(a_i)-\varphi_j(a_{i-1}))^2}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{l=s_{i-1}+1}^{s_i}(a_l'-a_{l-1}')\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\varphi_j'(\xi_l)^2}-(a_{s_i}'-a_{s_{i-1}}')\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\varphi_j'(\zeta_i)^2}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=s_{i-1}+1}^{s_i}(a_l'-a_{l-1}')\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\varphi_j'(\xi_l)^2}-\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\varphi_j'(\zeta_i)^2}\right)\\
&\leqq \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=s_{i-1}+1}^{s_i}(a_l'-a_{l-1}')\left(\sum_{j=1}^{m}|\varphi_j'(\xi_l)-\varphi_j'(\zeta_i)|\right)\\
&< \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=s_{i-1}+1}^{s_i}(a_l'-a_{l-1}')\frac{\varepsilon}{2(b-a)}=\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

故に $0\leqq L-s(\boldsymbol{\varphi},\Delta)=L-s(\boldsymbol{\varphi},\Delta_1\cup\Delta)+s(\boldsymbol{\varphi},\Delta_1\cup\Delta)-s(\boldsymbol{\varphi},\Delta)\leqq L-s(\boldsymbol{\varphi},\Delta_1)+s(\boldsymbol{\varphi},\Delta_1\cup\Delta)-s(\boldsymbol{\varphi},\Delta)<\varepsilon$ となるため, L は (13.15) の条件 $(*)$ を満たす. □

14　三角関数

(13.14) の 1) により, $\boldsymbol{\varphi}(t)=(t,\sqrt{1-t^2})$ で与えられる $\boldsymbol{R}^2$ の曲線 $\boldsymbol{\varphi}:[-1,1]\to\boldsymbol{R}^2$ は長さをもつ. $f:[-1,1]\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ で定義すると, $x>0$ ならば $f(x)$ は $\boldsymbol{\varphi}$ の区間 $[0,x]$ における長さであり, $f(-x)=-f(x)$ が成り立つことに注意する. ここで, $\pi=2f(1)=2\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ とおけば, $f(1)=\frac{\pi}{2}$, $f(-1)=-f(1)=-\frac{\pi}{2}$ だから $f:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ は連続な全単射である. $\varphi=f^{-1}:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$ とおき, $\psi:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[0,1]$ を $\psi(x)=\sqrt{1-\varphi(x)^2}$ によって定義すると, $\varphi(0)=0$, $\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $\psi(0)=1$, $\psi\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ である.

$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に対し, $\varphi'(x) = \frac{1}{f'(\varphi(x))} = \sqrt{1-\varphi(x)^2} = \psi(x)$, $\psi'(x) = -\frac{\varphi'(x)\varphi(x)}{\sqrt{1-\varphi(x)^2}} = -\varphi(x)$ だから φ は単調増加関数であり, ψ は区間 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ において単調に増加し, 区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ において単調に減少する. さらに, n による帰納法で

$$\varphi^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\varphi(x) & n \text{ は偶数} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\psi(x) & n \text{ は奇数} \end{cases} \qquad \psi^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\psi(x) & n \text{ は偶数} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}\varphi(x) & n \text{ は奇数} \end{cases}$$

が示される. $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 1$ だから, テイラーの定理から $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ に対して

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^N\frac{\psi^{(2N+1)}(\theta_1 x)}{(2N+1)!}x^{2N+1}, \qquad \psi(x) = \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^N\frac{\psi^{(2N)}(\theta_2 x)}{(2N)!}x^{2N}$$

を満たす $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ がある. $0 \leqq \psi^{(2N+1)}(\theta_i x) \leqq 1$ だから上式より

$$\left|\varphi(x) - \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \leqq \frac{|x|^{2N+1}}{(2N+1)!}, \qquad \left|\psi(x) - \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right| \leqq \frac{|x|^{2N}}{(2N)!}$$

である. $N \to \infty$ とすると $\frac{|x|^{2N+1}}{(2N+1)!}, \frac{|x|^{2N}}{(2N)!} \to 0$ だから $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ならば

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

さて, $z \in \boldsymbol{C}$ に対して

$$\sin z = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz)) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

とおくと $\exp(iz) = \cos z + i\sin z$ であり, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ならば $\sin x = \varphi(x)$, $\cos x = \psi(x)$ である.

命題 14.1　$z, w \in \boldsymbol{C}$ に対して以下の等式が成り立つ.

1) $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos 0 = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

2) $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$, $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

3) $\sin(z+w) = \sin z\cos w + \cos z\sin w$, $\cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w$.

証明　1) $\sin x = \varphi(x)$, $\cos x = \psi(x)$ と $\varphi(0) = 0$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\psi(0) = 1$, $\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ から結果が得られる.

2) $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$ は $\sin z = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$, $\cos z = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz))$ から明らか. また, $\exp(-iz) = \frac{1}{\exp(iz)}$ だから $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ が得られる.

3) 指数法則から $\sin z\cos w + \cos z\sin w = \frac{(\exp(iz)-\exp(-iz))(\exp(iw)+\exp(-iw))}{4i} + \frac{(\exp(iz)+\exp(-iz))(\exp(iw)-\exp(-iw))}{4i}$ $= \frac{1}{2i}(\exp(i(z+w)) - \exp(-i(z-w))) = \sin(z+w)$. 2 つ目の式も同様に示される. □

命題 14.2　1) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$.

2) $\sin 2z = 2\cos z\sin z$, $\cos 2z = 2\cos^2 z - 1$, $\sin 3z = 3\sin z - 4\sin^3 z$, $\cos 3z = 4\cos^3 z - 3\cos z$.

3) $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$, $\sin(z+\pi) = -\sin z$, $\sin(z+2\pi) = \sin z$, $\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z$, $\cos(z+\pi) = -\cos z$, $\cos(z+2\pi) = \cos z$.

4) $\sin\pi = \sin 2\pi = 0$, $\cos\pi = -1$, $\cos 2\pi = 1$, $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

証明　1) (8.6) から容易に示される.

2) (14.1) の 3) で $w = z$ とし, $\sin^2 z = 1 - \cos^2 z$ を用いれば $\sin 2z = 2\cos z\sin z$, $\cos 2z = 2\cos^2 z - 1$ が得られる. さらに (14.1) の 3) で $w = 2z$ として, $\sin 2z = 2\cos z\sin z$, $\cos 2z = 2\cos^2 z - 1$ を代入し, $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ を用いればよい.

3) (14.1) の 3) と $\sin\frac{\pi}{2} = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = \psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ から $\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \cos z$, $\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin z$ が得られる．従って $\sin(z+\pi) = \sin\left(z+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin z$, $\cos(z+\pi) = \cos\left(z+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = -\cos z$, $\sin(z+2\pi) = \sin(z+\pi+\pi) = -\sin(z+\pi) = \sin z$, $\cos(z+2\pi) = \cos(z+\pi+\pi) = -\cos(z+\pi) = \cos z$.

4) 3) の第 2, 3, 5, 6 式において $z=0$ を代入すれば $\sin 0 = \varphi(0) = 0$, $\cos 0 = \psi(0) = 1$ から $\sin\pi = \sin 2\pi = 0$, $\cos\pi = -1$, $\cos 2\pi = 1$ である．2) の第 1, 2 式で $z = \frac{\pi}{4}$ とすると $2\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} = 1$, $2\cos^2\frac{\pi}{4} - 1 = 0$ であり，$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ならば $\cos x = \psi(x) \in [0,1]$ だから $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ を得る．これを $2\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} = 1$ に代入すれば $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ が得られる．また 2) の第 3, 4 式で $z = \frac{\pi}{6}$ とすると $3\sin\frac{\pi}{6} - 4\sin^3\frac{\pi}{6} = 1$, $4\cos^3\frac{\pi}{6} - 3\cos\frac{\pi}{6} = 0$ だから $(\sin\frac{\pi}{6}+1)(2\sin\frac{\pi}{6}-1)^2 = 0$, $\cos\frac{\pi}{6}(4\cos^2\frac{\pi}{6}-3) = 0$ となるが，$\sin\frac{\pi}{6} = \varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$, $\cos\frac{\pi}{6} = \psi\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$ だから $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である．2) の第 1, 2 式で $z = \frac{\pi}{6}$ とすると $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ が得られる． □

$x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ のとき (14.2) の 3) から $\sin x = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \psi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ だから区間 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ において $\sin x$ は単調に減少する．$x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ のとき (14.2) の 3) から $\sin x = -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \psi\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ だから区間 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ において $\sin x$ は単調に増加する．従って区間 $[-\pi, \pi]$ において $\sin x = 0$ となるのは $x = 0, \pm\pi$ に限る．この事実と sin の周期性 $\sin(z+2\pi) = \sin z$ および $\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \cos z$ から次のことが分かる．

命題 14.3 $\sin x = 0$ を満たす実数 x は π の整数倍であり，$\cos x = 0$ を満たす実数 x は $n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n は整数) の形のものに限る．

sin の定義域を区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ に縮小して得られる関数は φ であり，その逆関数は，この節の最初に定義した f に他ならない．この f を $\sin^{-1}$ で表す．また (14.1) の 2) と (14.2) の 3) から $\cos x = \cos(-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ で sin は区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ において単調に増加するため，cos は区間 $[0, \pi]$ において単調に減少する．そこで cos の定義域を区間 $[0, \pi]$ に縮小して得られる関数の逆関数を $\cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ で表す．

命題 14.4 1) $\sin^{-1} 0 = \cos^{-1} 1 = 0$, $\sin^{-1} 1 = \cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$, $\sin^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\cos^{-1}(-1) = \pi$, $\sin^{-1}\frac{1}{2} = \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

2) $x \in [-1, 1]$ に対して $\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ が成り立つ．

3) $x \in (-1, 1)$ ならば $(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ である．

証明 1) (14.1) の 1) と (14.2) の 4) から明らかである．

2) $x \in [-1, 1]$ に対して $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x\right) = \cos(\cos^{-1} x) = x$ だから $\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x = \sin^{-1} x$ となる．

3) $(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ は f の定義と (11.2) により明らかである．$\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ の両辺を微分すれば $(\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ が得られる． □

$D = \{x \in \boldsymbol{R} | \, x \neq n\pi + \frac{\pi}{2} \, (n \in \boldsymbol{Z})\}$ とおけば (14.3) により D は $\cos x \neq 0$ を満たす実数全体からなる集合である．そこで $\tan : D \to \boldsymbol{R}$ を $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ で定義する．

命題 14.5 1) $x \in D$ に対して $\tan(x+\pi) = \tan x$, $\tan(-x) = -\tan x$, $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ が成り立つ．

2) $x, y, x+y \in D$ ならば $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$ である．とくに $x, 2x \in D$ ならば $\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ である．

3) $\tan 0 = 0$, $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

証明 1) (14.2) の 2) から $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$. (14.1) の 2) から $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ だから $\cos x \neq 0$ ならば，この両辺を $\cos^2 x$ で割れば $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ が得られる．

2) (14.1) の 3) から $\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$ であり，この右辺の分母と分子を $\cos x \cos y$ で割れば結果が得られる．

3) (14.2) の 4) から明らかである． □

命題 14.6 1) $x \in D$ に対して $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ が成り立つ．

2) tan は区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ において単調増加関数であり, $\lim\limits_{x\downarrow -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$, $\lim\limits_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$ が成り立つ. 従って tan は 区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ を実数全体の集合の上に 1 対 1 に写す.

3) $\tan : D \to \boldsymbol{R}$ を $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に制限した関数の逆関数を $\tan^{-1} : \boldsymbol{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ で表せば $(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ である.

証明 1) (14.2) の 1) により $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

2) $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ならば $(\tan x)' > 0$ だから tan は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ において単調増加である. (14.2) の 1) から $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ならば $\cos x > 0$ であり, $\lim\limits_{x\downarrow -\frac{\pi}{2}} \cos x = \lim\limits_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \cos x = 0$, $\lim\limits_{x\downarrow -\frac{\pi}{2}} \sin x = -1$, $\lim\limits_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ だから $\lim\limits_{x\downarrow -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$, $\lim\limits_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$ となる.

3) 1) と (14.5) の 1) から $\tan^{-1}$ の $\tan x$ における微分係数は $\frac{1}{(\tan x)'} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$ となるため $(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ である. □

命題 14.7 $x \in (-1, 1)$ ならば $\tan^{-1} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ が成り立つ.

証明 $|t| < 1$ のとき, 初項 1, 公比 $-t^2$ の等比級数は収束するため, $\frac{1}{1+t^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$ であり, この右辺のべき級数の収束半径は 1 である. $|x| < 1$ として, この両辺の 0 から x までの積分を考えれば (11.7) と (14.6) の 3) から $\tan^{-1} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ が得られる. □

系 14.8 次の等式が成り立つ.

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

証明 (2.19) により $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ は収束するため (8.10) と (14.7) から $\lim\limits_{x\uparrow 1} \tan^{-1} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. 一方 $\tan^{-1}$ の 1 における連続性から $\lim\limits_{x\uparrow 1} \tan^{-1} x = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ となり, 主張が示された. □

系 14.9 次の等式が成り立つ.

$$\pi = 16\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{2n+1}(2n+1)}\right) - 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{239^{2n+1}(2n+1)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{16}{5\cdot 25^n} - \frac{4}{239\cdot 57121^n}\right)$$

証明 $\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{5}$ とおくと, $\tan\alpha = \frac{1}{5}$ だから (14.5) の 2) により $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan\alpha^2} = \frac{5}{12}$, $\tan 4\alpha = \frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan 2\alpha^2} = \frac{120}{119}$, $\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\alpha - \tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan 4\alpha\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{239}$. 最後の式から $4\alpha - \frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{239}$ だから $\pi = 16\alpha - 4\tan^{-1}\frac{1}{239} = 16\tan^{-1}\frac{1}{5} - 4\tan^{-1}\frac{1}{239}$. よって (14.7) から結果が得られる. □

15 ガンマ関数とベータ関数

補題 15.1 正の整数 n に対し, $x > 0$ ならば $e^x > \frac{x^n}{n!}$ である.

証明 テイラーの定理により $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$ を満たす $0 < \theta < 1$ があるため, $x > 0$ ならば $e^x > \frac{x^n}{n!}$ が成り立つ. □

命題 15.2 正の実数 s に対して, 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$ は存在する.

証明 関数 $\gamma_1 : (0,1) \to \boldsymbol{R}$, $\gamma_2 : (1,\infty) \to \boldsymbol{R}$ を $\gamma_1(t) = \int_t^1 x^{s-1}e^{-x}dx$, $\gamma_2(t) = \int_1^t x^{s-1}e^{-x}dx$ によって定義する. $\gamma_1'(t) = -t^{s-1}e^{-t} < 0$, $\gamma_2'(t) = t^{s-1}e^{-t} > 0$ だから γ_1 は単調減少関数であり, γ_2 は単調増加関数である.

$0 < x \leqq 1$ のとき, $e^{-x} < 1$ より $\gamma_1(t) \leqq \int_t^1 x^{s-1}dx = \frac{1}{s}(1-t^s) < \frac{1}{s}$ となるため, γ_1 は上に有界である. 従って, 極限 $\lim_{t\downarrow 0}\gamma_1(t)$ は存在するため, $0 < s < 1$ の場合は広義積分 $\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx$ は存在する.

$n > s$ を満たす整数 n をとると, (15.1) から, $x > 0$ ならば $x^{s-1}e^{-x} < n!x^{s-n-1}$ となるため $\gamma_2(t) \leqq \int_1^t n!x^{s-n-1}dx = \frac{n!}{n-s}\left(1-\frac{1}{t^{n-s}}\right) \leqq \frac{n!}{n-s}$ である. 従って γ_2 も上に有界であり, 極限 $\lim_{t\to\infty}\gamma_1(t)$ は存在して広義積分 $\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$ も存在する. □

命題 15.3 正の実数 p, q に対して, 積分 $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ は存在する.

証明 関数 $\beta_1 : \left(0,\frac{1}{2}\right) \to \boldsymbol{R}$, $\beta_2 : \left(\frac{1}{2},1\right) \to \boldsymbol{R}$ を $\beta_1(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$, $\beta_2(t) = \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ によって定義する. $\beta_1'(t) = -t^{p-1}(1-t)^{q-1} < 0$, $\beta_2'(t) = t^{p-1}(1-t)^{q-1} > 0$ だから β_1 は単調減少関数であり, β_2 は単調増加関数である. $m_1 = \begin{cases} 2^{1-q} & 0 < q < 1 \\ 1 & q \geqq 1 \end{cases}$ とおけば $0 < x < \frac{1}{2}$ のとき, $(1-x)^{q-1} < m_1$ だから $\beta_1(t) \leqq \int_t^{\frac{1}{2}} m_1x^{p-1}dx = \frac{m_1}{p}\left(\frac{1}{2^p}-t^p\right) < \frac{m_1}{p2^p}$ となるため, β_1 は上に有界である. 従って, 極限 $\lim_{t\downarrow 0}\beta_1(t)$ は存在するため, $0 < p < 1$ の場合は広義積分 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ は存在する. $m_2 = \begin{cases} 2^{1-p} & 0 < p < 1 \\ 1 & p \geqq 1 \end{cases}$ とおけば $\frac{1}{2} < x < 1$ のとき, $x^{p-1} < m_2$ だから $\beta_2(t) \leqq \int_{\frac{1}{2}}^t m_2(1-x)^{q-1}dx = \frac{m_2}{q}\left(\frac{1}{2^q}-(1-t)^q\right) < \frac{m_2}{q2^q}$ となるため, β_2 は上に有界である. 従って, 極限 $\lim_{t\uparrow 1}\beta_2(t)$ は存在するため, $0 < q < 1$ の場合は広義積分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ は存在する. □

$\boldsymbol{R}$ の部分集合 I, J に対し, $I \times J = \{(x,y)|\, x \in I,\ y \in J\}$ によって xy-平面の部分集合 $I \times J$ を定義する.

定義 15.4 関数 $\Gamma : (0,\infty) \to \boldsymbol{R}$, $B : (0,\infty)\times(0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ を

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx, \qquad B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

によって定義する. Γ をガンマ関数, B をベータ関数と呼ぶ.

命題 15.5 $\Gamma(1) = 1$ であり, $s > 0$ に対して $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ が成り立つ. 従って, 正の整数 n に対して $\Gamma(n) = (n-1)!$ である.

証明 $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 1$. $m > s$ を満たす整数 m をとると, (15.1) から $x > 0$ ならば $0 < x^se^{-x} < \frac{m!}{x^{m-s}}$ だから $\lim_{x\to\infty} x^se^{-x} = 0$ が成り立つため $\Gamma(s+1) = \int_0^\infty x^se^{-x}dx = [-x^se^{-x}]_0^\infty - \int_0^\infty sx^{s-1}e^{-x}dx = s\Gamma(s)$.□

定理 15.6 正の実数 p, q に対して等式 $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ が成り立つ.

証明 $0 < s < 1 < t$ に対し, xy-平面の領域 $E_{s,t}$ を $E_{s,t} = \left\{(u,v)\,\middle|\, \frac{s}{u} \leqq v \leqq \frac{t}{u},\ 1-\frac{t}{u} \leqq v \leqq 1-\frac{s}{u}\right\}$ によって定義する. 写像 $\varphi : E_{s,t} \to [s,t]\times[s,t]$ を $\varphi(u,v) = (uv, u-uv)$ で定義すれば, φ は全単射で, 逆写像 φ^{-1} は

$\varphi^{-1}(x,y) = \left(x+y, \frac{x}{x+y}\right)$ で与えられる. $\varphi'(u,v) = \begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix}$ だから, φ によって重積分の変数変換を行えば

$$\begin{aligned}
\left(\int_s^t x^{p-1}e^{-x}dx\right)\left(\int_s^t y^{q-1}e^{-y}dy\right) &= \int_s^t \left(\int_s^t x^{p-1}y^{q-1}e^{-x-y}dx\right)dy \\
&= \iint_{[s,t]\times[s,t]} x^{p-1}y^{q-1}e^{-x-y}dxdy \\
&= \iint_{E_{s,t}} (uv)^{p-1}(u-uv)^{q-1}e^{-u}ududv \\
&= \iint_{E_{s,t}} v^{p-1}(1-v)^{q-1}u^{p+q-1}e^{-u}dudv
\end{aligned}$$

$E_{s,t} \subset [2s,2t] \times \left[\frac{s}{s+t}, \frac{t}{s+t}\right]$ であり, $0<v<1$, $u>0$ ならば $v^{p-1}(1-v)^{q-1}u^{p+q-1}e^{-u}$ は常に正の値をとるため, 上式から

$$\begin{aligned}
\left(\int_s^t x^{p-1}e^{-x}dx\right)\left(\int_s^t y^{q-1}e^{-y}dy\right) &\leqq \iint_{[2s,2t]\times\left[\frac{s}{s+t},\frac{t}{s+t}\right]} v^{p-1}(1-v)^{q-1}u^{p+q-1}e^{-u}dudv \\
&= \int_{2s}^{2t}\left(\int_{\frac{s}{s+t}}^{\frac{t}{s+t}} v^{p-1}(1-v)^{q-1}u^{p+q-1}e^{-u}dv\right)du \\
&= \left(\int_{2s}^{2t} u^{p+q-1}e^{-u}du\right)\left(\int_{\frac{s}{s+t}}^{\frac{t}{s+t}} v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv\right) \\
&\leqq \Gamma(p+q)B(p,q)
\end{aligned}$$

一般に $2s < r < s+t$ ならば $E_{s,t} \supset \left[r, \frac{rt}{r-s}\right] \times \left[\frac{s}{r}, 1-\frac{s}{r}\right]$ である. とくに $r = 2\sqrt{s}$ の場合を考えると $E_{s,t} \supset \left[2\sqrt{s}, \frac{2t}{2-\sqrt{s}}\right] \times \left[\frac{\sqrt{s}}{2}, 1-\frac{\sqrt{s}}{2}\right]$ であるから

$$\begin{aligned}
\left(\int_s^t x^{p-1}e^{-x}dx\right)\left(\int_s^t y^{q-1}e^{-y}dy\right) &\geqq \iint_{\left[2\sqrt{s},\frac{2t}{2-\sqrt{s}}\right]\times\left[\frac{\sqrt{s}}{2},1-\frac{\sqrt{s}}{2}\right]} v^{p-1}(1-v)^{q-1}u^{p+q-1}e^{-u}dudv \\
&= \int_{2\sqrt{s}}^{\frac{2t}{2-\sqrt{s}}}\left(\int_{\frac{\sqrt{s}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{s}}{2}} v^{p-1}(1-v)^{q-1}u^{p+q-1}e^{-u}dv\right)du \\
&= \left(\int_{2\sqrt{s}}^{\frac{2t}{2-\sqrt{s}}} u^{p+q-1}e^{-u}du\right)\left(\int_{\frac{\sqrt{s}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{s}}{2}} v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv\right)
\end{aligned}$$

が得られる. 以上から $0<s<1<t$ ならば

$$\left(\int_{2\sqrt{s}}^{\frac{2t}{2-\sqrt{s}}} u^{p+q-1}e^{-u}du\right)\left(\int_{\frac{\sqrt{s}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{s}}{2}} v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv\right) \leqq \left(\int_s^t x^{p-1}e^{-x}dx\right)\left(\int_s^t y^{q-1}e^{-y}dy\right) \leqq \Gamma(p+q)B(p,q)$$

が成り立つ. $s\to 0$, $t\to\infty$ のとき, 上式の左端は $\Gamma(p+q)B(p,q)$ に近づき, 中央の部分は $\Gamma(p)\Gamma(q)$ に近づくため, 等式 $\Gamma(p+q)B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)$ が得られる. □

命題 15.7 $\alpha, \beta > -1$ ならば次の等式が成り立つ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \cos^\beta x dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right)$$

証明 $t = \sin^2 x$ とおいて置換積分する. $\sin^\alpha x = t^{\frac{\alpha}{2}}$, $\cos^\beta x = (1-t)^{\frac{\beta}{2}}$, $\frac{dt}{dx} = 2\sin x\cos x = 2\sqrt{t}\sqrt{1-t}$ より

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\cos^\beta x dx = \int_0^1 \frac{t^{\frac{\alpha}{2}}(1-t)^{\frac{\beta}{2}}}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^{\frac{\alpha+1}{2}-1}t^{\frac{\beta+1}{2}-1}dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right)$$

□

負でない整数 n に対し,

$$(2n)!! = (2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdots 2 = 2^n n!,\quad (2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1 = \frac{(2n+1)!}{(2n)!!}$$

とおく.

定理 15.8 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ であり, 正の整数 n に対して $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$ が成り立つ.

証明 (15.6), (15.5), (15.7) より $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Gamma(1) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \pi$. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ だから $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ を得る. (15.5) と (1) より $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ だから $n=1$ の場合は $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$ が成り立つ. $\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}}\sqrt{\pi}$ が成り立つと仮定すれば $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(2n-1)\frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}}\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$ となる. □

16 積分の近似式

定理 16.1 $p_0, p_1, \ldots, p_n, q_0, q_1, \ldots, q_n$ を実数とし, $p_0, p_1, \ldots, p_n$ は互い相異なるとする. このとき, 実数係数の n 次以下の多項式 $P(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ で $i = 0, 1, \ldots, n$ に対して $P(p_i) = q_i$ を満たすものがただ 1 つ存在する.

証明 $c_0, c_1, \ldots, c_n$ は p_{i-1}^{j-1} を (i,j) 成分とする $n+1$ 次正方行列 A を係数行列とする連立 1 次方程式の解である. Van der Monde の行列式の公式により $|A| = \prod_{0\leqq i<j\leqq n}(p_j - p_i)$ であり, $p_0, p_1, \ldots, p_n$ は互い相異なるため $|A| \neq 0$ である. 従って A は正則行列となるため, $c_0, c_1, \ldots, c_n$ は 1 通りに定まる. □

関数 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が与えられているとする. $a \leqq p < q \leqq b$ に対し, $r = \frac{p+q}{2}$, $\rho = \frac{q-p}{2}$ とおくと, $2n$ 次関数 $P_f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ で $-n \leqq i \leqq n$ の範囲の任意の整数 i に対して $P_f\left(r+\frac{\rho i}{n}\right) = f\left(r+\frac{\rho i}{n}\right)$ を満たすものが (16.1) により, ただ 1 つ存在する.

補題 16.2 関数 $f, g : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ と $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ に対して $P_{\alpha f+\beta g} = \alpha P_f + \beta P_g$ が成り立つ.

証明 まず, 関数 f が与えられたとき, $-n \leqq i \leqq n$ の範囲の任意の整数 i に対して $P_f\left(r+\frac{\rho i}{n}\right) = f\left(r+\frac{\rho i}{n}\right)$ を満たす $2n$ 次関数 P_f は一通りに定まることに注意する. $-n \leqq i \leqq n$ の範囲の任意の整数 i に対して $(\alpha P_f + \beta P_g)\left(r+\frac{\rho i}{n}\right) = \alpha P_f\left(r+\frac{\rho i}{n}\right) + \beta P_g\left(r+\frac{\rho i}{n}\right) = \alpha f\left(r+\frac{\rho i}{n}\right) + \beta g\left(r+\frac{\rho i}{n}\right) = (\alpha f + \beta g)\left(r+\frac{\rho i}{n}\right)$ となり, $P_{\alpha f+\beta g}$ の一意性から, 結果が得られる. □

命題 16.3 f が $2n+1$ 次以下の多項式で与えられる関数ならば $\displaystyle\int_p^q f(x)dx = \int_p^q P_f(x)dx$ が成り立つ.

証明 (16.2) により, $f(x) = (x-r)^k$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n+1)$ の場合に $\displaystyle\int_p^q f(x)dx = \int_p^q P_f(x)dx$ が成り立つことを示せばよい. $P_f(x) = \sum_{j=1}^{2n} c_j(x-r)^j + f(r)$ とおけば $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\sum_{j=1}^{2n} c_j\left(\frac{\rho i}{n}\right)^j = \left(\frac{\rho i}{n}\right)^k,\qquad \sum_{j=1}^{2n}(-1)^j c_j\left(\frac{\rho i}{n}\right)^j = (-1)^k\left(\frac{\rho i}{n}\right)^k$$

が成り立つ.

$k \leqq 2n$ ならば $c_j = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$ が上式を満たす $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ であり, このとき $f = P_f$ となって, $\displaystyle\int_p^q f(x)dx = \int_p^q P_f(x)dx$ が成り立つ. $k = 2n+1$ ならば上式を辺々加えた式の両辺を 2 で割れば $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\sum_{j=1}^{n} c_{2j} \left(\frac{\rho i}{n}\right)^{2j} = 0$$

が成り立つことがわかるが, $\left(\frac{\rho i}{n}\right)^{2j}$ を (i, j) 成分とする n 次正方行列は Van der Monde の行列式の公式により正則だから, $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $c_{2j} = 0$ である. 従って $P_f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{2j-1}(x-r)^{2j-1}$ となるため $\displaystyle\int_p^q P_f(x)dx = 0 = \int_p^q (x-r)^{2n+1}dx$ が成り立つ. □

$P_f(x) = \sum_{j=1}^{2n} c_j (x-r)^j + f(r)$ とおけば $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\sum_{j=1}^{2n} c_j \left(\frac{\rho i}{n}\right)^{j} = f\left(r + \frac{\rho i}{n}\right) - f(r), \qquad \sum_{j=1}^{2n} (-1)^j c_j \left(\frac{\rho i}{n}\right)^{j} = f\left(r - \frac{\rho i}{n}\right) - f(r)$$

が成り立つ. この 2 つの等式を辺々加えたものの両辺を 2 で割れば

$$\sum_{j=1}^{n} c_{2j} \left(\frac{\rho i}{n}\right)^{2j} = \frac{1}{2}\left(f\left(r + \frac{\rho i}{n}\right) + f\left(r - \frac{\rho i}{n}\right)\right) - f(r)$$

が得られる. そこで, $x_j = \rho^{2j} c_{2j}$ とおくと, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^{2j} x_j = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{(n-i)p + (n+i)q}{2n}\right) + f\left(\frac{(n+i)p + (n-i)q}{2n}\right)\right) - f\left(\frac{p+q}{2}\right) \tag{16.1}$$

である.

命題 16.4 $\left(\frac{i}{n}\right)^{2j}$ を (i, j) 成分とする n 次正方行列を A_n とすれば, A_n の行列式は次で与えられる.

$$|A_n| = \frac{1}{n^{n(n+1)}} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(n-i)!(n+i)!}{(2i)!}.$$

証明

$$|A_n| = \begin{vmatrix} \frac{1^2}{n^2} & \frac{1^4}{n^4} & \cdots & \frac{1^{2n}}{n^{2n}} \\ \frac{2^2}{n^2} & \frac{2^4}{n^4} & \cdots & \frac{2^{2n}}{n^{2n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{n^2}{n^2} & \frac{n^4}{n^4} & \cdots & \frac{n^{2n}}{n^{2n}} \end{vmatrix} = \frac{1}{n^2 n^4 \ldots n^{2n}} \begin{vmatrix} 1^2 & 1^4 & \cdots & 1^{2n} \\ 2^2 & 2^4 & \cdots & 2^{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^2 & n^4 & \cdots & n^{2n} \end{vmatrix} = \frac{1^2 2^2 \ldots n^2}{n^{2(1+2+\cdots+n)}} \begin{vmatrix} 1 & 1^2 & \cdots & (1^2)^{n-1} \\ 1 & 2^2 & \cdots & (2^2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n^2 & \cdots & (n^2)^{n-1} \end{vmatrix}$$

より, Van der Monde の行列式の公式を用いると

$$|A_n| = \frac{(n!)^2}{n^{n(n+1)}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j^2 - i^2)$$

ここで

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j^2 - i^2) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j-i)(j+i) = \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-k} k(2i+k) = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{n-i} k(2i+k) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(n-i)!(n+i)!}{(2i)!}$$

となるため, 結果が得られる. □

各 $j=1,2,\ldots,n$ に対し, A_n の第 i 行と第 j 列を除いて得られる $n-1$ 次正方行列を $A_n(i,j)$ とすれば, (16.1) と Cramer の公式から

$$x_j = \frac{1}{|A_n|}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}|A_n(i,j)|\left(\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{(n-i)p+(n+i)q}{2n}\right)+f\left(\frac{(n+i)p+(n-i)q}{2n}\right)\right)-f\left(\frac{p+q}{2}\right)\right)$$

$v_i=\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{(n-i)p+(n+i)q}{2n}\right)+f\left(\frac{(n+i)p+(n-i)q}{2n}\right)\right)$ とおいて, 上式を次の等式

$$\int_p^q P_f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} c_{2j}\frac{2\rho^{2j+1}}{2j+1}+2\rho f(r) = (q-p)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{2j+1}+f\left(\frac{p+q}{2}\right)\right)$$

に代入すれば

$$\int_p^q P_f(x)dx = \frac{q-p}{|A_n|}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\frac{|A_n(i,j)|}{2j+1}\left(v_i - f\left(\frac{p+q}{2}\right)\right)+|A_n|f\left(\frac{p+q}{2}\right)\right)$$

さらに

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\frac{|A_n(i,j)|}{2j+1} = \begin{vmatrix} \frac{1^2}{n^2} & \frac{1^4}{n^4} & \cdots & \frac{1^{2j}}{n^{2j}} & \cdots & \frac{1^{2n}}{n^{2n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{(i-1)^2}{n^2} & \frac{(i-1)^4}{n^4} & \cdots & \frac{(i-1)^{2j}}{n^{2j}} & \cdots & \frac{(i-1)^{2n}}{n^{2n}} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{2j+1} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \\ \frac{(i+1)^2}{n^2} & \frac{(i+1)^4}{n^4} & \cdots & \frac{(i+1)^{2j}}{n^{2j}} & \cdots & \frac{(i+1)^{2n}}{n^{2n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{n^2}{n^2} & \frac{n^4}{n^4} & \cdots & \frac{n^{2j}}{n^{2j}} & \cdots & \frac{n^{2n}}{n^{2n}} \end{vmatrix}$$

とおくと次の結果が得られる.

命題 16.5 $\displaystyle\int_p^q P_f(x)dx$ は次で与えられる.

$$\frac{q-p}{|A_n|}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i}{2}\left(f\left(\frac{(n-i)p+(n+i)q}{2n}\right)+f\left(\frac{(n+i)p+(n-i)q}{2n}\right)\right)+\left(|A_n|-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\right)f\left(\frac{p+q}{2}\right)\right)$$

$x_1,x_2,\ldots,x_n$ の多項式 $D_{n,j}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ を

$$D_{n,j}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & x_1^{k-1} & \cdots & x_1^{j-1} & x_1^{j+1} & \cdots & x_1^{l-1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & \cdots & x_2^{k-1} & \cdots & x_2^{j-1} & x_2^{j+1} & \cdots & x_2^{l-1} & \cdots & x_2^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & x_i^{k-1} & \cdots & x_i^{j-1} & x_i^{j+1} & \cdots & x_i^{l-1} & \cdots & x_i^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & x_n^{k-1} & \cdots & x_n^{j-1} & x_n^{j+1} & \cdots & x_n^{l-1} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

で定義する. また $\sigma_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ を $x_1,x_2,\ldots,x_n$ の k 次基本対称式とする. すなわち, $\sigma_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ $(k=0,1,2,\ldots,n)$ は

$$(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sigma_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)X^{n-k}$$

を満たす多項式である.

命題 16.6 次の等式が成り立つ.

$$D_{n,j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sigma_{n-j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \prod_{1 \leqq p < q \leqq n} (x_q - x_p)$$

証明 $D_{n,j}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は

$$\prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i)\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{j-2} & x_1^{j-1}(x_1 + x_n) & x_1^{j+1} & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_i & \cdots & x_i^{j-2} & x_i^{j-1}(x_i + x_n) & x_i^{j+1} & \cdots & x_i^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{j-2} & x_{n-1}^{j-1}(x_{n-1} + x_n) & x_{n-1}^{j+1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i)(D_{n-1,j-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + x_n D_{n-1,j}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}))$$

と変形されるため,

$$D_{n,j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i)(D_{n-1,j-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + x_n D_{n-1,j}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}))$$

が成り立つ.

$$G_{n,j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{D_{n,j}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\prod_{1 \leqq p < q \leqq n} (x_q - x_p)}$$

とおいて, 上式の両辺を $\prod_{1 \leqq p < q \leqq n} (x_q - x_p)$ で割れば

$$G_{n,j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = G_{n-1,j-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + x_n G_{n-1,j}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

が得られる. Van der Monde の行列式の公式から

$$D_{n,0}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n \prod_{1 \leqq p < q \leqq n} (x_q - x_p), \qquad D_{n,j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqq p < q \leqq n} (x_q - x_p)$$

であるため, $G_{n,0}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$, $G_{n,n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ である. $n \geqq 2$ のとき, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ に対して $G_{n-1,j}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \sigma_{n-1-j}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ が成り立つと仮定すれば

$$(X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k G_{n-1,n-1-k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) X^{n-1-k}$$

が成り立つ. この両辺に $X - x_n$ をかければ

$$(X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k G_{n-1,n-1-k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) X^{n-k-1}(X - x_n)$$

この右辺は

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k G_{n-1,n-1-k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) X^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x_n G_{n-1,n-k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) X^{n-k} \\ &= X^n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (G_{n-1,n-1-k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + x_n G_{n-1,n-k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})) X^{n-k} \\ &\quad + (-1)^n G_{n,0}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= G_{n,n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) X^n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k G_{n,n-k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) X^{n-k} + (-1)^n G_{n,0}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k G_{n,n-k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) X^{n-k} \end{aligned}$$

となるため, 恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sigma_k(x_1,x_2,\dots,x_n)X^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k G_{n,n-k}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})X^{n-k}$$

が成り立つ．この両辺の X^j の係数を比較すれば $G_{n,j}(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sigma_{n-j}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ が $j=0,1,\dots,n$ に対して成り立つことがわかる．よって n による帰納法で, $G_{n,j}(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sigma_{n-j}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ が任意の自然数 n に対して成り立つため, 主張が示された. □

定理 16.7　次の等式が成り立つ.

$$\delta_i=\frac{2n^2}{n^{n(n+1)}}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k)!(n+k)!}{(2k)!}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}n^{2j-2}\sigma_{n-j}(1^2,\dots,(i-1)^2,(i+1)^2,\dots,n^2)}{(2j+1)(n-i)!(n+i)!}$$

証明

$$A_n(i,j)=\begin{pmatrix}\frac{1^2}{n^2}&\cdots&\frac{1^{2j-2}}{n^{2j-2}}&\frac{1^{2j+2}}{n^{2j+2}}&\cdots&\frac{1^{2n}}{n^{2n}}\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ \frac{(i-1)^2}{n^2}&\cdots&\frac{(i-1)^{2j-2}}{n^{2j-2}}&\frac{(i-1)^{2j+2}}{n^{2j+2}}&\cdots&\frac{(i-1)^{2n}}{n^{2n}}\\ \frac{(i+1)^2}{n^2}&\cdots&\frac{(i+1)^{2j-2}}{n^{2j-2}}&\frac{(i+1)^{2j+2}}{n^{2j+2}}&\cdots&\frac{(i+1)^{2n}}{n^{2n}}\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ \frac{n^2}{n^2}&\cdots&\frac{n^{2j-2}}{n^{2j-2}}&\frac{n^{2j+2}}{n^{2j+2}}&\cdots&\frac{n^{2n}}{n^{2n}}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{(n!)^2}{i^2n^{n(n+1)-2j}}\begin{pmatrix}1&\cdots&1^{2j-4}&1^{2j}&\cdots&1^{2n-2}\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 1&\cdots&(i-1)^{2j-4}&(i-1)^{2j}&\cdots&(i-1)^{2n-2}\\ 1&\cdots&(i+1)^{2j-4}&(i+1)^{2j}&\cdots&(i+1)^{2n-2}\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 1&\cdots&n^{2j-4}&n^{2j}&\cdots&n^{2n-2}\end{pmatrix}$$

より

$$|A_n(i,j)|=\frac{(n!)^2}{i^2n^{n(n+1)-2j}}D_{n-1,j-1}(1^2,\dots,(i-1)^2,(i+1)^2,\dots,n^2)$$

である．さらに

$$D_{n-1,j-1}(1^2,\dots,(i-1)^2,(i+1)^2,\dots,n^2)=\sigma_{n-j}(1^2,\dots,(i-1)^2,(i+1)^2,\dots,n^2)\prod_{\substack{1\leqq p<q\leqq n\\ p,q\neq i}}(q^2-p^2),$$

$$\prod_{\substack{1\leqq p<q\leqq n\\ p,q\neq i}}(q^2-p^2)=\frac{\prod_{1\leqq p<q\leqq n}(q^2-p^2)}{\prod_{k=1}^{i-1}(i^2-k^2)\prod_{k=i+1}^{n}(k^2-i^2)}=\frac{2i^2}{(n-i)!(n+i)!}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(n-k)!(n+k)!}{(2k)!}$$

だから

$$|A_n(i,j)|=\frac{2}{n^{n(n+1)-2j}(n-i)!(n+i)!}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k)!(n+k)!}{(2k)!}\sigma_{n-j}(1^2,\dots,(i-1)^2,(i+1)^2,\dots,n^2)$$

を得る．従って $\delta_i=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\frac{|A_n(i,j)|}{2j+1}$ より結果を得る. □

補題 16.8

$$K_n=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\sigma_{n-j}(1^2,\ldots,(n-1)^2)\frac{2(n-j)+1}{2j+1}n^{2j-2}$$

とおけば, 次の等式が成り立つ.

$$2(n+1)\delta_n-|A_n|=\frac{2n^2}{n^{n(n+1)}(2n)!}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k)!(n+k)!}{(2k)!}K_n$$

証明 (16.7) の証明, および結果から

$$|A_n(n,j)|=\frac{2}{n^{n(n+1)-2j}(2n)!}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k)!(n+k)!}{(2k)!}\sigma_{n-j}(1^2,\ldots,(n-1)^2),$$

$$\delta_n=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k)!(n+k)!}{(2k)!}\sum_{j=1}^{n}\frac{2(-1)^{n+j}}{(2j+1)n^{n(n+1)-2j}(2n)!}\sigma_{n-j}(1^2,\ldots,(n-1)^2)$$

である. そこで $|A_n|$ を第 n 行に関して展開すれば

$$|A_n|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}|A_n(n,j)|=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k)!(n+k)!}{(2k)!}\sum_{j=1}^{n}\frac{2(-1)^{n+j}}{n^{n(n+1)-2j}(2n)!}\sigma_{n-j}(1^2,\ldots,(n-1)^2)$$

となるため

$$2(n+1)\delta_n-|A_n|=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k)!(n+k)!}{(2k)!}\sum_{j=1}^{n}\frac{2(-1)^{n+j}(2(n-j)+1)}{n^{n(n+1)-2j}(2n)!(2j+1)}\sigma_{n-j}(1^2,\ldots,(n-1)^2)$$

である. これより結果が得られる. □

$f:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ は $2n+2$ 回微分可能で, $2n+2$ 次導関数 $f^{(2n+2)}:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ は連続であるとする.

$$F(x)=f(r)+\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{f^{(i)}(r)}{i!}(x-r)^i,\quad E(x)=\frac{1}{(2n+1)!}\int_r^x(x-t)^{2n+1}f^{(2n+2)}(t)dt$$

とおけば, テイラーの公式により $f(x)=F(x)+E(x)$ である. $F(x)$ は $2n+1$ 次以下の多項式だから (16.2), (16.3) により

$$\begin{aligned}\int_p^q f(x)dx-\int_p^q P_f(x)dx&=\int_p^q F(x)dx+\int_p^q E(x)dx-\int_p^q P_F(x)dx-\int_p^q P_E(x)dx\\&=\int_p^q E(x)dx-\int_p^q P_E(x)dx.\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}\int_p^q E(x)dx&=\frac{1}{(2n+1)!}\int_p^q\left(\int_r^x(x-t)^{2n+1}f^{(2n+2)}(t)dt\right)dx\\&=\frac{1}{(2n+1)!}\left(\int_p^r\left(-\int_x^r(x-t)^{2n+1}f^{(2n+2)}(t)dt\right)dx+\int_r^q\left(\int_r^x(x-t)^{2n+1}f^{(2n+2)}(t)dt\right)dx\right)\\&=\frac{1}{(2n+1)!}\left(\int_p^r\left(-\int_p^t(x-t)^{2n+1}f^{(2n+2)}(t)dx\right)dt+\int_r^q\left(\int_t^q(x-t)^{2n+1}f^{(2n+2)}(t)dx\right)dt\right)\\&=\frac{1}{(2n+2)!}\left(\int_p^r(p-t)^{2n+2}f^{(2n+2)}(t)dt+\int_r^q(q-t)^{2n+2}f^{(2n+2)}(t)dt\right).\end{aligned}$$

一方, $E\left(\frac{p+q}{2}\right)=0$ だから (16.5) により

$$\int_p^q P_E(x)dx=\frac{q-p}{2|A_n|}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(E\left(r+\frac{\rho i}{n}\right)+E\left(r-\frac{\rho i}{n}\right)\right).$$

命題 16.9 $\displaystyle\int_p^q f(x)dx - \int_p^q P_f(x)dx$ は

$$\frac{1}{(2n+2)!}\int_p^r \left(t - \frac{(|A_n|-\delta_n(n+1))p+\delta_n(n+1)q}{|A_n|}\right)(t-p)^{2n+1}f^{(2n+2)}(t)dt$$
$$+\frac{1}{(2n+2)!}\int_r^q \left(\frac{\delta_n(n+1)p+(|A_n|-\delta_n(n+1))q}{|A_n|} - t\right)(q-t)^{2n+1}f^{(2n+2)}(t)dt$$
$$-\frac{q-p}{2|A_n|(2n+1)!}\sum_{i=1}^{n-1}\delta_i\left(\int_{r-\frac{\rho i}{n}}^r \left(t-r+\frac{\rho i}{n}\right)^{2n+1}f^{(2n+2)}(t)dt + \int_r^{r+\frac{\rho i}{n}}\left(r+\frac{\rho i}{n}-t\right)^{2n+1}f^{(2n+2)}(t)dt\right)$$

で与えられる.

定理 16.10 正の実数 M で, 任意の $t \in [p,q]$ に対して $|f^{(2n+2)}(t)| \leqq M$ を満たすものがあるとき, 次の不等式が成り立つ.

$$\left|\int_p^q f(x)dx - \int_p^q P_f(x)dx\right| \leqq \begin{cases} \frac{2M\rho^{2n+3}}{|A_n|(2n+2)!}\left(\delta_n - \frac{|A_n|}{2n+3} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^{2n+2}|\delta_i|\right) & |A_n| \leqq 2\delta_n(n+1) \\ \frac{2M\rho^{2n+3}}{|A_n|(2n+2)!}\left(\frac{2\delta_n^{2n+3}(2n+2)^{2n+2}}{|A_n|^{2n+2}(2n+3)} - \delta_n + \frac{|A_n|}{2n+3} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^{2n+2}|\delta_i|\right) & |A_n| > 2\delta_n(n+1) \end{cases}$$

証明
$$u = \frac{(|A_n|-\delta_n(n+1))p+\delta_n(n+1)q}{|A_n|}, \qquad v = \frac{\delta_n(n+1)p+(|A_n|-\delta_n(n+1))q}{|A_n|}$$
とおけば $|A_n| \leqq 2\delta_n(n+1)$ ならば $u \geqq r$, $v \leqq r$, $|A_n| > 2\delta_n(n+1)$ ならば $u < r$, $v > r$ となるため,

$$\int_p^r |t-u||t-p|^{2n+1}dt = \int_r^q |v-t||q-t|^{2n+1}dt = \begin{cases} \rho^{2n+3}\left(\frac{\delta_n}{|A_n|} - \frac{1}{2n+3}\right) & |A_n| \leqq 2\delta_n(n+1) \\ \rho^{2n+3}\left(\frac{2\delta_n^{2n+3}(2n+2)^{2n+2}}{|A_n|^{2n+3}(2n+3)} - \frac{\delta_n}{|A_n|} + \frac{1}{2n+3}\right) & |A_n| > 2\delta_n(n+1) \end{cases}$$

が得られる. また,

$$\int_{r-\frac{\rho i}{n}}^r \left|t-r+\frac{\rho i}{n}\right|^{2n+1}dt = \int_r^{r+\frac{\rho i}{n}}\left|r+\frac{\rho i}{n}-t\right|^{2n+1}dt = \frac{1}{2n+2}\left(\frac{\rho i}{n}\right)^{2n+2}$$

より, (16.9) から結果が得られる. □

$n=1$ の場合, $|A_1| = 1$, $\delta_1 = \frac{1}{3}$ だから $|A_1| \leqq 4\delta_1$ が成り立つ. $p = a + \frac{j-1}{m}(b-a)$, $q = a + \frac{j}{m}(b-a)$ に対して (16.5) を用いると

$$\int_{a+\frac{j-1}{m}(b-a)}^{a+\frac{j}{m}(b-a)} P_f(x)dx = \frac{b-a}{6m}\left(f\left(a+\frac{j-1}{m}(b-a)\right) + f\left(a+\frac{j}{m}(b-a)\right) + 4f\left(a+\frac{2j-1}{2m}(b-a)\right)\right)$$

これを $j = 1, 2, \ldots, m$ として加えれば

$$\int_a^b P_f(x)dx = \frac{b-a}{6m}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{m-1}f\left(a+\frac{j}{m}(b-a)\right) + 4\sum_{j=1}^{m}f\left(a+\frac{2j-1}{2m}(b-a)\right)\right).$$

一方, (16.10) により
$$\left|\int_p^q f(x)dx - \int_p^q P_f(x)dx\right| \leqq \frac{M\rho^5}{90} = \frac{M(q-p)^5}{2880}$$

だから
$$\left|\int_{a+\frac{j-1}{m}(b-a)}^{a+\frac{j}{m}(b-a)} f(x)dx - \int_{a+\frac{j-1}{m}(b-a)}^{a+\frac{j}{m}(b-a)} P_f(x)dx\right| \leqq \frac{M}{2880}\left(\frac{b-a}{m}\right)^5$$

である．故に

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_f(x)dx\right| \leqq \frac{M(b-a)^5}{2880m^4}.$$

以上をまとめると，

定理 16.11 $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ は 4 回微分可能で，4 次導関数 $f^{(4)}:(a,b)\to \boldsymbol{R}$ は連続で，実数 M は任意の $t\in[p,q]$ に対して $|f^{(4)}(t)|\leqq M$ を満たすとする．$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ を

$$\int_a^b P_f(x)dx = \frac{b-a}{6m}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{m-1} f\left(a+\frac{j}{m}(b-a)\right)+4\sum_{j=1}^{m} f\left(a+\frac{2j-1}{2m}(b-a)\right)\right)$$

で近似したときの誤差は $\displaystyle\frac{M(b-a)^5}{2880m^4}$ 以下である．

$n=2$ の場合，$|A_2|=\frac{3}{16}$，$\delta_1=\frac{2}{15}$，$\delta_2=\frac{7}{240}$ だから $|A_2|>6\delta_2$ が成り立つ．$p=a+\frac{j-1}{m}(b-a)$，$q=a+\frac{j}{m}(b-a)$ に対して (16.5) を用いると

$$\begin{aligned}\int_{a+\frac{j-1}{m}(b-a)}^{a+\frac{j}{m}(b-a)} P_f(x)dx = \frac{b-a}{90m}&\left(32\left(f\left(a+\frac{4j-3}{4m}(b-a)\right)+f\left(a+\frac{4j-1}{4m}(b-a)\right)\right)\right.\\ &\left.+7\left(f\left(a+\frac{j-1}{m}(b-a)\right)+f\left(a+\frac{j}{m}(b-a)\right)\right)+12f\left(a+\frac{2j-1}{2m}(b-a)\right)\right)\end{aligned}$$

これを $j=1,2,\ldots,m$ として加えれば

$$\begin{aligned}\int_a^b P_f(x)dx = \frac{b-a}{90m}&\left(7\left(f(a)+f(b)\right)+32\sum_{j=1}^{m}\left(f\left(a+\frac{4j-3}{4m}(b-a)\right)+f\left(a+\frac{4j-1}{4m}(b-a)\right)\right)\right.\\ &\left.+14\sum_{j=1}^{m-1} f\left(a+\frac{j}{m}(b-a)\right)+12\sum_{j=1}^{m} f\left(a+\frac{2j-1}{2m}(b-a)\right)\right).\end{aligned}$$

一方，(16.10) により

$$\left|\int_p^q f(x)dx - \int_p^q P_f(x)dx\right| \leqq \frac{199436383M\rho^7}{2583393750000} = \frac{199436383M(q-p)^7}{330674400000000}$$

だから

$$\left|\int_{a+\frac{j-1}{m}(b-a)}^{a+\frac{j}{m}(b-a)} f(x)dx - \int_{a+\frac{j-1}{m}(b-a)}^{a+\frac{j}{m}(b-a)} P_f(x)dx\right| \leqq \frac{199436383M}{330674400000000}\left(\frac{b-a}{m}\right)^7$$

である．故に

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_f(x)dx\right| \leqq \frac{199436383M(b-a)^7}{330674400000000m^6}.$$

以上をまとめると，

定理 16.12 $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ は 6 回微分可能で，6 次導関数 $f^{(6)}:(a,b)\to \boldsymbol{R}$ は連続で，実数 M は任意の $t\in[p,q]$ に対して $|f^{(6)}(t)|\leqq M$ を満たすとする．$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ を

$$\begin{aligned}\int_a^b P_f(x)dx = \frac{b-a}{90m}&\left(7\left(f(a)+f(b)\right)+32\sum_{j=1}^{m}\left(f\left(a+\frac{4j-3}{4m}(b-a)\right)+f\left(a+\frac{4j-1}{4m}(b-a)\right)\right)\right.\\ &\left.+14\sum_{j=1}^{m-1} f\left(a+\frac{j}{m}(b-a)\right)+12\sum_{j=1}^{m} f\left(a+\frac{2j-1}{2m}(b-a)\right)\right)\end{aligned}$$

で近似したときの誤差は $\dfrac{199436383M(b-a)^7}{330674400000000m^6}$ 以下である.

17　数ベクトル空間と行列

定義 17.1　1) n 個の実数を縦に並べた $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_j\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ を n 次元実ベクトルという. このとき x_i を $\boldsymbol{x}$ の第 i-成分と呼ぶ.

2) $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を n 次元実ベクトルとするとき, これらのベクトルが「等しい」とは, すべての $1\leqq i\leqq n$ に対して $\boldsymbol{x}$ の第 i-成分 $\boldsymbol{y}$ の第 i-成分が等しくなることで, これを $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ で表す. n 次元実ベクトル全体の集合を $\boldsymbol{R}^n$ で表す.

3) $\boldsymbol{R}^n$ における加法 $+$ と, スカラー倍 $\cdot$ を次で定義する.

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_j\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_j\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^n,\ r\in\boldsymbol{R}\text{ に対し }\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\ \vdots\\ x_j+y_j\\ \vdots\\ x_n+y_n\end{pmatrix},\ r\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}rx_1\\ \vdots\\ rx_j\\ \vdots\\ rx_n\end{pmatrix}$$

命題 17.2　$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}^n$, $r,s\in\boldsymbol{R}$ とするとき, 次が成り立つ.

(1) 結合法則 ： $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$, $(rs)\boldsymbol{x}=r(s\boldsymbol{x})$.

(2) 単位元の存在 ： すべての成分が 0 であるベクトルを $\boldsymbol{0}$ で表すと, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ である. また, $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

(3) 逆元の存在 ： $-\boldsymbol{x}=(-1)\boldsymbol{x}$ とおけば $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=(-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

(4) 交換法則 ： $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$.

(5) 分配法則 ： $r(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=r\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{y}$, $(r+s)\boldsymbol{x}=r\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{x}$.

定義 17.3　上のように加法とスカラー倍の定義された集合 $\boldsymbol{R}^n$ を n 次元実ベクトル空間という.

定義 17.4　$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_j\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_j\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{j=1}^n x_jy_j$ で定義する.

命題 17.5　$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}^n$, $r\in\boldsymbol{R}$ とするとき, 次のことが成り立つ.

1) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$.

2) $(r\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},r\boldsymbol{y})$.

3) $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.

4) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geqq 0$ であり, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ ならば $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})>0$ である.

定義 17.6　$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し, $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$ とおいて, $\|\boldsymbol{x}\|$ を $\boldsymbol{x}$ の長さという.

命題 17.7　$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ の第 i-成分を x_i とするとき, $|x_i|\leqq\|\boldsymbol{x}\|\leqq|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$ が成り立つ.

定理 17.8　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ のとき, 以下の不等式が成り立つ.

1) $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|$　(シュワルツの不等式).　　2) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$　(三角不等式).

証明 1) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ならば 両辺はともに 0 になって不等式は成り立つため, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ と仮定する. $\|\boldsymbol{x}\| \neq 0$ に注意して (17.5) の 1), 2), 3) を用いれば, 任意の実数 t に対して $(t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x}) + (t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = (t\boldsymbol{x}, t\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x}) + (t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 t^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})t + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 \left(t + \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\right)^2 + \frac{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$ だから $t = \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$ のとき, $(t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ は最小値 $\frac{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$ をとる. 一方, (17.5) の 4) から $(t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \geqq 0$ が成り立つため, この最小値は 0 以上であるから $\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2 \geqq 0$ が得られる.

2) 上の結果から $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqq \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|$ であり, 上の計算で $t = 1$ とすれば, $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 \leqq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2$ だから結果が得られる. □

定義 17.9　$\boldsymbol{R}$ の mn 個の要素 a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ を下のように長方形に並べたものを $m \times n$ 行列 (m 行 n 列行列, (m, n) 型行列) という.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

横の並びを上から順に第 1 行 ～ 第 m 行, 縦の並びを左から順に第 1 列 ～ 第 n 列と呼ぶ. また, a_{ij} を A の (i, j)-成分といい, A を (a_{ij}) で表すことがある.

2 つの $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ が「等しい」とは, $a_{ij} = b_{ij}$ がすべての $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ について成り立つことをいう.

とくに, $m = n$ の場合 $m \times m$ 行列を m 次正方行列という.

定義 17.10　上から j 番目の成分が 1 で, 他の成分はすべて 0 であるような $\boldsymbol{R}^n$ の要素を $\boldsymbol{e}_j$ で表し, n 個のベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を $\boldsymbol{R}^n$ の基本ベクトルという.

定義 17.11　$A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ を $m \times n$ 行列, $C = (c_{ij})$ を $l \times m$ 行列, $r \in \boldsymbol{R}$ とする. 行列の和 $A + B$, スカラー倍 rA を $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, $rA = (ra_{ij})$ で定義し, 積 CA を $CA = (p_{ij})$ (但し $p_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{m} c_{ik}a_{kj}$) によって定義する. さらに $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, $\boldsymbol{x}$ を $n \times 1$ 行列とみなして $A\boldsymbol{x}$ が定義される.

命題 17.12　行列の和, スカラー倍, 積, ベクトルとの積に関し, 以下の等式が成り立つ.

1) $m \times n$ 行列 A, B, C に対し, $(A + B) + C = A + (B + C)$, $A + O = O + A = A$ (ただし O は, すべての成分が 0 である $m \times n$ 行列), $A + (-A) = (-A) + A = O$ (ただし $-A = (-1)A$), $A + B = B + A$.

2) $m \times n$ 行列 A, B, $r, s \in \boldsymbol{R}$ に対し, $(rs)A = r(sA)$, $1A = A$, $r(A + B) = rA + rB$, $(r + s)A = rA + sA$.

3) $m \times n$ 行列 A, B, $l \times m$ 行列 C, $n \times k$ 行列 D, $r \in \boldsymbol{R}$ に対し, $(rC)A = r(CA) = C(rA)$, $(CA)D = C(AD)$, $C(A + B) = CA + CB$, $(A + B)D = AD + BD$.

4) $m \times n$ 行列 A, B, $l \times m$ 行列 C, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$, $r \in \boldsymbol{R}$ に対し, $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y}$, $A(r\boldsymbol{x}) = r(A\boldsymbol{x}) = (rA)\boldsymbol{x}$, $(A + B)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x}$.

補題 17.13　$A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 行列として $M = \sqrt{\sum\limits_{1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n} a_{ij}^2}$ とおくと, $\|A\boldsymbol{x}\| \leqq M\|\boldsymbol{x}\|$ が任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して成り立つ.

証明 $\boldsymbol{x}$ の第 i 成分を x_i とし, A の第 i 行の成分を縦に並べて得られるベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ とすると, シュワルツ

の不等式から $\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2 = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x})^2 \leqq \|\boldsymbol{a}_i\|^2\|\boldsymbol{x}\|^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\|\boldsymbol{x}\|^2$. 従って $\|A\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2 \leqq \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\|\boldsymbol{x}\|^2 = M^2\|\boldsymbol{x}\|^2$. □

18 写像の極限と連続写像

定義 18.1 $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$, $r > 0$ に対して $B(\boldsymbol{p}\,;r) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \,|\, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < r\}$ とおき, これを半径 r 中心 $\boldsymbol{p}$ の開球という.

定義 18.2 X を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合, $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ とする.

(1) 正の実数 r で, $B(\boldsymbol{p}\,;r) \subset X$ を満たすものがあるとき, $\boldsymbol{p}$ を X の内点という. X の内点全体からなる集合を, X の内部といい, X^i で表す.

(2) 正の実数 r で, $B(\boldsymbol{p}\,;r) \cap X = \emptyset$ を満たすものがあるとき, $\boldsymbol{p}$ を X の外点という. X の外点全体からなる集合を, X の外部といい, X^e で表す.

(3) 任意の正の実数 r に対して $B(\boldsymbol{p}\,;r) \not\subset X$ かつ $B(\boldsymbol{p}\,;r) \cap X \neq \emptyset$ であるとき, $\boldsymbol{p}$ を X の境界点という. X の境界点全体からなる集合を, X の境界といい, ∂X で表す.

命題 18.3 X を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合とする.

1) $\boldsymbol{R}^n = X^i \cup X^e \cup \partial X$, $X^i \cap X^e = X^i \cap \partial X = X^e \cap \partial X = \emptyset$.

2) $(\boldsymbol{R}^n - X)^i = X^e$, $(\boldsymbol{R}^n - X)^e = X^i$, $\partial(\boldsymbol{R}^n - X) = \partial X$.

3) $X^i \subset X$, $X^e \cap X = \emptyset$, $X \subset X^i \cup \partial X$.

証明 1) (18.2) の X^i, X^e, ∂X の定義から, 任意の $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ は X^i, X^e, ∂X のいずれか 1 つだけに必ず属するため, $\boldsymbol{R}^n = X^i \cup X^e \cup \partial X$, $X^i \cap X^e = X^i \cap \partial X = X^e \cap \partial X = \emptyset$ が成り立つ.

2) $\boldsymbol{p} \in (\boldsymbol{R}^n - X)^i$ は $B(\boldsymbol{p}\,;r) \subset \boldsymbol{R}^n - X$ を満たす $r > 0$ が存在することと同値であり, $B(\boldsymbol{p}\,;r) \subset \boldsymbol{R}^n - X$ は $B(\boldsymbol{p}\,;r) \cap X = \emptyset$ と同値だから, $\boldsymbol{p} \in (\boldsymbol{R}^n - X)^i$ は $\boldsymbol{p} \in X^e$ と同値である. 従って $(\boldsymbol{R}^n - X)^i = X^e$ が得られる. この等式の X を $\boldsymbol{R}^n - X$ で置き換えると $\boldsymbol{R}^n - (\boldsymbol{R}^n - X) = X$ だから 2 つ目の等式 $(\boldsymbol{R}^n - X)^e = X^i$ が得られる. $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ と $r > 0$ に対して $B(\boldsymbol{p}\,;r) \not\subset X$ は $B(\boldsymbol{p}\,;r) \cap (\boldsymbol{R}^n - X) \neq \emptyset$ と同値であり, $B(\boldsymbol{p}\,;r) \cap X \neq \emptyset$ は $B(\boldsymbol{p}\,;r) \not\subset \boldsymbol{R}^n - X$ と同値である. 従って「$B(\boldsymbol{p}\,;r) \not\subset X$ かつ $B(\boldsymbol{p}\,;r) \cap X \neq \emptyset$」は「$B(\boldsymbol{p}\,;r) \cap (\boldsymbol{R}^n - X) \neq \emptyset$ かつ $B(\boldsymbol{p}\,;r) \not\subset \boldsymbol{R}^n - X$」と同値であるため, $\boldsymbol{p} \in \partial X$ であることと $\boldsymbol{p} \in \partial(\boldsymbol{R}^n - X)$ であることは同値である.

3) $\boldsymbol{p} \in X^i$ ならば, 正の実数 r で $B(\boldsymbol{p}\,;r) \subset X$ を満たすものが存在し, $\boldsymbol{p} \in B(\boldsymbol{p}\,;r)$ だから $\boldsymbol{p} \in X$ である. よって $X^i \subset X$ である. この結果と 2) で示したことから $X^e = (\boldsymbol{R}^n - X)^i \subset \boldsymbol{R}^n - X$ だから $X^e \subset \boldsymbol{R}^n - X$ であり, この式は $X^e \cap X = \emptyset$ と同値である. 1) より $X = X \cap \boldsymbol{R}^n = X \cap (X^i \cup X^e \cup \partial X) = (X \cap (X^i \cup \partial X)) \cup (X \cap X^e)$ $= (X \cap (X^i \cup \partial X)) \cup \emptyset = X \cap (X^i \cup \partial X) \subset X^i \cup \partial X$ である. □

定義 18.4 X を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合とする.

1) X の点がすべて内点であるとき, X を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合という.

2) X の補集合 $\boldsymbol{R}^n - X$ が開集合であるとき, X を $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合という.

3) $X \subset B(\boldsymbol{0}\,;r)$ となる $r > 0$ が存在するとき, X は有界であるという.

注意 18.5 (18.3) の (3) の 1 つめの等式から, X が開集合であるためには, $X^i = X$ が成り立つことが必要十分である.

命題 18.6 X を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合とすれば次の 3 つは同値である.

(1) X は閉集合である.　(2) $X^i \cup \partial X = X$　(3) $\partial X \subset X$

証明 (18.5) から, X が閉集合であることと $(\boldsymbol{R}^n - X)^i = \boldsymbol{R}^n - X$ が成り立つことは同値である. (18.3) の 2), 1) から $(\boldsymbol{R}^n - X)^i = X^e = \boldsymbol{R}^n - (X^i \cup \partial X)$ だから $(\boldsymbol{R}^n - X)^i = \boldsymbol{R}^n - X$ は $\boldsymbol{R}^n - (X^i \cup \partial X) = \boldsymbol{R}^n - X$ と同値である. この両辺の補集合を考えることによって, $\boldsymbol{R}^n - (X^i \cup \partial X) = \boldsymbol{R}^n - X$ は $X^i \cup \partial X = X$ と同値であるため (1) と (2) は同値である. (2) の左辺は ∂X を含むため, (2) が成り立てば (3) も成り立つ. 逆に (3) が成り立つならば, (18.3) の 3) から $X^i \subset X$ でもあるため, $X^i \cup \partial X \subset X$ である. (18.3) の 3) の 3 つ目の式から $X \subset X^i \cup \partial X$ はつねに成り立つため, (2) が成り立つことがわかる. □

例 18.7 $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$, $\varepsilon > 0$ とする.

(1) $B(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$ は $\boldsymbol{R}^n$ の開集合である. 実際, $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$ ならば任意の $\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}\,;\varepsilon - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|)$ は $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| < \varepsilon - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|$ より $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{p}\| \leqq \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < \varepsilon$ を満たし, $\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$ となるため, $B(\boldsymbol{x}\,;\varepsilon - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|) \subset B(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$ である. よって $B(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$ のすべての点は内点である.

(2) $\overline{B}(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$ を $\overline{B}(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \,|\, \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| \leqq \varepsilon\}$ で定めれば, これは $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合である. 実際 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n - \overline{B}(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$ ならば任意の $\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x}\,;\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| - \varepsilon)$ は $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| < \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| - \varepsilon$ と $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| \leqq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{p}\|$ より $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{p}\| \geqq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| - \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| > \varepsilon$ を満たし, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n - \overline{B}(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$ となるため, $B(\boldsymbol{x}\,;\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| - \varepsilon) \subset \boldsymbol{R}^n - \overline{B}(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$ である. よって $\boldsymbol{R}^n - \overline{B}(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$ のすべての点は内点になるため, $\boldsymbol{R}^n - \overline{B}(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$ は開集合である.

(3) $S(\boldsymbol{p};\varepsilon)$ を $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \,|\, \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| = \varepsilon\}$ で定めれば, これは $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合である. 実際 $S(\boldsymbol{p};\varepsilon) = \overline{B}(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon) - B(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$ だから $\boldsymbol{R}^n - S(\boldsymbol{p};\varepsilon) = (\boldsymbol{R}^n - \overline{B}(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)) \cap B(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$ であり, (1), (2) から $\boldsymbol{R}^n - \overline{B}(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$, $B(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$ の各点はすべて内点となるため, $\boldsymbol{R}^n - S(\boldsymbol{p};\varepsilon)$ は開集合である.

注意 18.8 $\overline{B}(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon) \subset B(\boldsymbol{0}\,;\|\boldsymbol{p}\|+\varepsilon+1)$ だから $\overline{B}(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$ は有界である. 従って, $\overline{B}(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$ の部分集合である $B(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$, $S(\boldsymbol{p};\varepsilon)$ も有界である.

命題 18.9 X, Y が $\boldsymbol{R}^n$ の開集合ならば $X \cap Y$ も開集合である.

証明 $\boldsymbol{p} \in X \cap Y$ とする. $r_1, r_2 > 0$ で $B(\boldsymbol{p}\,;r_1) \subset X$, $B(\boldsymbol{p}\,;r_2) \subset Y$ を満たすものがある. r_1, r_2 の小さい方を r とすれば $B(\boldsymbol{p}\,;r) \subset X \cap Y$ となるため, $\boldsymbol{p}$ は $X \cap Y$ の内点である. □

命題 18.10 X が $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合であるためには, 次の条件 $(*)$ が成り立つことが必要十分である.

$(*)$ X の点列 $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1,2,\ldots}$ が $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ に収束すれば $\boldsymbol{p} \in X$ である.

証明 X を $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合, $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1,2,\ldots}$ を $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ に収束する X の点列とする. もし, $\boldsymbol{p} \notin X$ ならば X が $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合であることから, $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{R}^n - X$ の内点である. 従って $B(\boldsymbol{p}\,;r) \subset \boldsymbol{R}^n - X$ を満たす $r > 0$ がある. 一方 $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1,2,\ldots}$ は $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ に収束するため,「$i \geqq N$ ならば $\boldsymbol{a}_i \in B(\boldsymbol{p}\,;r)$」を満たす自然数 N がある. 故に $\boldsymbol{a}_N \in B(\boldsymbol{p}\,;r) \cap X$ となって $B(\boldsymbol{p}\,;r) \subset \boldsymbol{R}^n - X$ と矛盾するため $\boldsymbol{p} \in X$ である.

条件 $(*)$ が満たされるとする. $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n - X$ が $\boldsymbol{R}^n - X$ の内点でないとすると, 任意の $i = 1, 2, \ldots$ に対して $B\left(\boldsymbol{p}; \frac{1}{i}\right) \cap X$ は空集合ではないため $\boldsymbol{a}_i \in B\left(\boldsymbol{p}; \frac{1}{i}\right) \cap X$ が選べる. このとき, X の点列 $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1,2,\ldots}$ は $\boldsymbol{p}$ に収束するが, 仮定から $\boldsymbol{p} \in X$ となって矛盾がおきる. よって $\boldsymbol{R}^n - X$ の点はすべて内点である. □

定理 18.11 X が $\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合ならば, X の点列は収束する部分列を含む.

証明 $X \subset B(\boldsymbol{0}\,;r)$ とし, $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1,2,\ldots}$ を X の点列とする. $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1,2,\ldots}$ の部分列 $\{\boldsymbol{a}_i^s\}_{i=1,2,\ldots}$ $(s = 0, 1, 2, \ldots, n)$ を次のように定義する. まず $\boldsymbol{a}_i^0 = \boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ で $\{\boldsymbol{a}_i^0\}_{i=1,2,\ldots}$ を定める. 帰納的に $\{\boldsymbol{a}_i^{s-1}\}_{i=1,2,\ldots}$ $(1 \leqq s \leqq n)$ が定まり, $\boldsymbol{a}_i^{s-1}$ の第 j 成分を a_{ij}^{s-1} とすれば, 各 $j = 1, 2, \ldots, s-1$ に対し, 実数列 $\{a_{ij}^{s-1}\}_{i=1,2,\ldots}$ が収束すると仮定する. $\boldsymbol{a}_i \in B(\boldsymbol{0}\,;r)$ より $\{a_{is}^{s-1}\}_{i=1,2,\ldots}$ は $[-r, r]$ の数列だから $\{a_{is}^{s-1}\}_{i=1,2,\ldots}$ は収束する部分列 $\{a_{i_p s}^{s-1}\}_{p=1,2,\ldots}$ を含む. そこで $\{\boldsymbol{a}_i^{s-1}\}_{i=1,2,\ldots}$ の部分列 $\{\boldsymbol{a}_{i_p}^{s-1}\}_{p=1,2,\ldots}$ を $\{\boldsymbol{a}_i^s\}_{i=1,2,\ldots}$ とすると, $j \leqq s$ ならば $\boldsymbol{a}_i^s$ の第 j 成分からなる数列は収束する. このとき, $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1,2,\ldots}$ の部分列 $\{\boldsymbol{a}_i^n\}_{i=1,2,\ldots}$ の各成分からなる数列は収束するため, $\{\boldsymbol{a}_i^n\}_{i=1,2,\ldots}$

は収束する．その極限を $\boldsymbol{p}$ とすれば，X は閉集合だから (18.10) により $\boldsymbol{p} \in X$ である． □

$X \subset \boldsymbol{R}^n$, $Y \subset \boldsymbol{R}^m$ とし，$f : X \to Y$ を写像とする．

定義 18.12　$\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^m$ とする．どんな $\varepsilon > 0$ に対しても，$\delta > 0$ で

「$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;\delta) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \in B(\boldsymbol{q}\,;\varepsilon)$」

を満たすものがあるとき，$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{p}$ に近づけたときの f の極限は $\boldsymbol{q}$ であるといい，これを $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ で表す．

注意 18.13　$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ であることは，言い換えると，どんな $\varepsilon > 0$ に対しても，$\delta > 0$ で「$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < \delta$, $\boldsymbol{x} \in X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $\|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| < \varepsilon$)」を満たすものがあることである．従って，このことは $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| = 0$ と同値である．

写像の極限に関して次の結果が成り立つ．

命題 18.14　$X \subset \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}^m$, $a, b, c \in \boldsymbol{R}$ とし，写像 $f, g : X \to \boldsymbol{R}^m$ は $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{r}$ を満たし，関数 $s : X \to \boldsymbol{R}$ は $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} s(\boldsymbol{x}) = c$ を満たすとする．このとき，次の等式が成り立つ．

1) $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} (af(\boldsymbol{x}) + bg(\boldsymbol{x})) = a\boldsymbol{q} + b\boldsymbol{r}$　　2) $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} s(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}) = c\boldsymbol{q}$

証明　1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta_1, \delta_2 > 0$ で，「$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;\delta_1) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \in B\left(\boldsymbol{q}; \frac{\varepsilon}{2+2|a|}\right)$」,「$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;\delta_2) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $g(\boldsymbol{x}) \in B\left(\boldsymbol{r}; \frac{\varepsilon}{2+2|b|}\right)$」を満たすものがある．$\delta_1$, δ_2 の小さい方を δ とするとき，$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;\delta) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $\|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| < \frac{\varepsilon}{2+2|a|}$ かつ $\|g(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{r}\| < \frac{\varepsilon}{2+2|b|}$ が成り立つため，三角不等式を用いると $\|(af(\boldsymbol{x}) + bg(\boldsymbol{x})) - (a\boldsymbol{q} + b\boldsymbol{r})\| = \|a(f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}) + b(g(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{r})\| \leqq \|a(f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q})\| + \|b(g(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{r})\| = |a|\|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| + |b|\|g(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{r}\| \leqq \frac{\varepsilon|a|}{2+2|a|} + \frac{\varepsilon|b|}{2+2|b|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ である．従って，このとき $af(\boldsymbol{x}) + bg(\boldsymbol{x}) \in B(a\boldsymbol{q} + b\boldsymbol{r}\,;\varepsilon)$ が成り立つため，1) が示された．

2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta_1, \delta_2 > 0$ で，「$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;\delta_1) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \in B\left(\boldsymbol{q}; \frac{\varepsilon}{2+2|c|}\right)$」,「$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;\delta_2) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $s(\boldsymbol{x}) \in B\left(\boldsymbol{r}; \frac{\varepsilon}{2+2\|\boldsymbol{q}\|}\right)$」を満たすものがある．また $\delta_3 > 0$ で，「$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;\delta_3) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \in B(\boldsymbol{q}\,;1)$」を満たすものがある．$\delta_1$, δ_2, δ_3 のうちの最小のもの方を δ とするとき，$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;\delta) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $\|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| < \frac{\varepsilon}{2+2|c|}$, $|s(\boldsymbol{x}) - c| < \frac{\varepsilon}{2+2\|\boldsymbol{q}\|}$ かつ $\|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| < 1$ が成り立つ．このとき，$\|f(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{q} + (f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q})\| \leqq \|\boldsymbol{q}\| + \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| < \|\boldsymbol{q}\| + 1$ が成り立つことに注意すれば $\|s(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}) - c\boldsymbol{q}\| = \|s(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}) - cf(\boldsymbol{x}) + cf(\boldsymbol{x}) - c\boldsymbol{q}\| = \|(s(\boldsymbol{x}) - c)f(\boldsymbol{x}) + c(f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q})\| \leqq |s(\boldsymbol{x}) - c|\|f(\boldsymbol{x})\| + |c|\|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| < \frac{\varepsilon(1+\|\boldsymbol{q}\|)}{2+2\|\boldsymbol{q}\|} + \frac{\varepsilon|c|}{2+2|c|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ である．従って $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;\delta) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $s(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}) \in B(c\boldsymbol{q}\,;\varepsilon)$ が成り立つため，2) が示された． □

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し，$f(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}^m$ の第 i-成分を $f_i(\boldsymbol{x})$ で表すことにする．$\boldsymbol{x}$ を $f_i(\boldsymbol{x})$ に対応させることにより，関数 $f_i : X \to \boldsymbol{R}$ が定まる．

命題 18.15　$\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^m$ の第 i-成分を q_i とすれば，$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ が成り立つためには $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f_i(\boldsymbol{x}) = q_i$ が成り立つことが必要十分である．

証明　$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f_i(\boldsymbol{x}) = q_i$ が $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して成り立つとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta_i > 0$ で「$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;\delta_i) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $|f_i(\boldsymbol{x}) - q_i| < \frac{\varepsilon}{m}$」を満たすものがとれる．$\delta$ を $\delta_1, \ldots, \delta_m$ の中で最小のものとすれば，$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;\delta) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば (17.7) から $\|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| \leqq \sum_{k=1}^{m} |f_k(\boldsymbol{x}) - q_k| < m\frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon$ である．従って，$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ が成り立つ．逆は，$|f_i(\boldsymbol{x}) - q_i| < \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\|$ から明らか． □

定義 18.16　$\boldsymbol{p} \in X$ に対し，$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p})$ が成り立つとき，f は $\boldsymbol{p}$ で連続であるという．すべての $\boldsymbol{p} \in X$ に対し，f が $\boldsymbol{p}$ で連続であるとき f を連続写像という．

命題 18.17 $\boldsymbol{p} \in X$ に対し, 正の実数 r, L で「$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;r) \cap X$ ならば $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\| \leqq L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|$」を満たすものがあれば, f は $\boldsymbol{p}$ で連続である.

証明 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, δ を r と $\frac{\varepsilon}{L}$ の小さい方とすれば, $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;\delta) \cap X$ ならば $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\| \leqq L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < L\delta \leqq \varepsilon$ だから f は $\boldsymbol{p}$ で連続である. □

一般に X, Y を集合とし, 写像 $f : X \to Y$ が与えられているとき, Y の部分集合 Z に対し $f^{-1}(Z) = \{x \in X |\, f(x) \in Z\}$ とおいて, これを f による Z の逆像と呼ぶ.

命題 18.18 X, Y をそれぞれ $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ の開集合とする. 写像 $f : X \to Y$ が連続ならば, Y に含まれる $\boldsymbol{R}^m$ の任意の開集合 O に対して, $f^{-1}(O)$ は $\boldsymbol{R}^n$ の開集合である.

証明 $\boldsymbol{p} \in f^{-1}(O)$ ならば $f(\boldsymbol{p}) \in O$ だから $\varepsilon > 0$ で $B(f(\boldsymbol{p})\,;\varepsilon) \subset O$ を満たすものがある. f の連続性から $\delta > 0$ で,「$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;\delta)$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \in B(f(\boldsymbol{p})\,;\varepsilon)$」を満たすものがある. よって $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;\delta)$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \in O$ だから $B(\boldsymbol{p}\,;\delta) \subset f^{-1}(O)$ となるため $\boldsymbol{p}$ は $f^{-1}(O)$ の内点である. 従って $f^{-1}(O)$ は開集合である. □

命題 18.19 $X \subset \boldsymbol{R}^n$, $Y \subset \boldsymbol{R}^m$, $Z \subset \boldsymbol{R}^k$, $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{q} \in Y$ とし, 写像 $f : X \to Y$ は $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ を満たし, 写像 $g : Y \to Z$ は $\boldsymbol{q}$ で連続であるとする. このとき $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} g\circ f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{q})$ が成り立つ.

証明 g の $\boldsymbol{q}$ における連続性から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta_1 > 0$ で「$\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{q}\,;\delta_1) \cap Y$ ならば $g(\boldsymbol{y}) \in B(g(\boldsymbol{q})\,;\varepsilon)$」を満たすものがある. また, f についての仮定から, $\delta > 0$ で,「$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;\delta) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \in B(\boldsymbol{q}\,;\delta_1)$」を満たすものがある. 従って $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;\delta) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $g\circ f(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x})) \in B(g(\boldsymbol{q})\,;\varepsilon)$ となるため, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} g\circ f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{q})$ が成り立つ. □

定理 18.20 X が $\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合ならば, X で定義された連続な実数値関数は最大値と最小値をもつ.

証明 もし f が上に有界でないとすれば, 任意の自然数 k に対して $f(\boldsymbol{a}_k) > k$ を満たす $\boldsymbol{a}_k \in X$ がある. (18.11) により, X の点列 $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1,2,\ldots}$ は収束する部分列 $\{\boldsymbol{a}_{k_p}\}_{p=1,2,\ldots}$ をもつ. $\displaystyle\lim_{p\to\infty} \boldsymbol{a}_{k_p} = \boldsymbol{p}$ とおけば, f の連続性により $\displaystyle\lim_{p\to\infty} f(\boldsymbol{a}_{k_p}) = f(\boldsymbol{p})$ が成り立つ. 一方 $f(\boldsymbol{a}_{k_p}) > k_p \geqq p$ となるため, 実数列 $\{f(\boldsymbol{a}_{k_p})\}_{p=1,2,\ldots}$ は収束しないため, 矛盾が生じた. 故に f は上に有界となり, 集合 $\{y \in \boldsymbol{R} |\, f(\boldsymbol{x}) = y$ を満たす $\boldsymbol{x} \in X$ がある.$\}$ の上限が存在する. この上限を M とすれば, 任意の自然数 k に対して $f(\boldsymbol{b}_k) > M - \frac{1}{k}$ を満たす $\boldsymbol{b}_k \in X$ がある. 再び (18.11) により, X の点列 $\{\boldsymbol{b}_k\}_{k=1,2,\ldots}$ は収束する部分列 $\{\boldsymbol{b}_{l_p}\}_{p=1,2,\ldots}$ をもつ. $\displaystyle\lim_{p\to\infty} \boldsymbol{b}_{l_p} = \boldsymbol{q}$ とおけば, f の連続性により $\displaystyle\lim_{p\to\infty} f(\boldsymbol{b}_{l_p}) = f(\boldsymbol{q})$ が成り立つ. 一方 $M - \frac{1}{p} \leqq M - \frac{1}{l_p} < f(\boldsymbol{b}_{l_p}) \leqq M$ となるため, 実数列 $\{f(\boldsymbol{b}_{l_p})\}_{p=1,2,\ldots}$ は M に収束する. 従って $M = f(\boldsymbol{q})$ を満たす $\boldsymbol{q} \in X$ があるため, M は f の最大値である. 同様にして f の最小値の存在も示される. □

19 写像の微分

定義 19.1 $\boldsymbol{p}$ を X の内点とする. $m \times n$ 行列 A で

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|} = \boldsymbol{0} \quad \cdots \quad (*)$$

を満たすものがあるとき f は $\boldsymbol{p}$ で微分可能であるという.

以後,「f は $\boldsymbol{p}$ で微分可能である.」といったときは $\boldsymbol{p}$ は f の定義域 X の内点であることは仮定する.

命題 19.2 f が $\boldsymbol{p}$ で微分可能ならば $r, L > 0$ で $B(\boldsymbol{p}\,;r) \subset X$ かつ「$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;r)$ ならば $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\| \leqq L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|$」

を満たすものがある．従って (18.17) から f は $\boldsymbol{p}$ で連続である．

証明 $m \times n$ 行列 A は (19.1) の $(*)$ を満たすとする．$\varphi(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})$ とおけば，三角不等式と (17.13) から $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\| = \|A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}) + \varphi(\boldsymbol{x})\| \leqq \|A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\| + \|\varphi(\boldsymbol{x})\| \leqq \left(M + \frac{\|\varphi(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}\right)\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| \cdots (*)$ である．仮定から $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \frac{\|\varphi(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} = 0$ であるため，$r > 0$ で $B(\boldsymbol{p}\,;r) \subset X$ かつ「$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;r)$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $\frac{\|\varphi(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} < 1$」を満たすものがとれる．従って $(*)$ から $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;r)$ ならば $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\| < (M+1)\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|$ である． □

定義 19.3 $\boldsymbol{p} \in X$, $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}$ とし，十分小さな $r > 0$ に対して $|t| < r$ ならば $\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v} \in X$ であるとする．極限

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{p})}{t}$$

が存在するとき，f は $\boldsymbol{p}$ において $\boldsymbol{v}$ 方向に微分可能であるといい，この極限のベクトルを f の $\boldsymbol{p}$ における $\boldsymbol{v}$ 方向の微分という．とくに $Y = \boldsymbol{R}$ $(m=1)$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_j$ の場合，上の極限値を $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ で表し，f の $\boldsymbol{p}$ における j 番目の変数に関する偏微分といい，このとき，f は j 番目の変数に関して偏微分可能であるという．さらに f が X の各点で j 番目の変数に関して偏微分可能なとき，$\boldsymbol{p} \in X$ を $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ に対応させる関数を j 番目の変数に関する偏導関数と呼んで $\frac{\partial f}{\partial x_j} : X \to \boldsymbol{R}$ で表す．

命題 19.4 $f : X \to Y$ が $\boldsymbol{p}$ で微分可能なとき，任意の $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して f は $\boldsymbol{p}$ において $\boldsymbol{v}$ 方向に微分可能である．このとき (19.1) の等式 $(*)$ における $m \times n$ 行列 A は

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{p})}{t} = A\boldsymbol{v}$$

を満たす．とくに A の第 j 列は $\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{p})}{t}$ で与えられるため (19.1) の等式 $(*)$ を満たす行列 A は存在すればただ 1 つだけである．

証明 $\varphi(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})$ とおけば仮定から $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \frac{\varphi(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} = \boldsymbol{0}$ である．$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ の場合，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}$ とおき，$t \to 0$ とすれば $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}$ だから $\lim_{t\to 0} \frac{\|\varphi(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})\|}{|t|\|\boldsymbol{v}\|} = 0$ である．従って $\lim_{t\to 0} \frac{\|\varphi(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})\|}{|t|} = 0$ が成り立つ．一方，$\left\|\frac{f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{p})}{t} - A\boldsymbol{v}\right\| = \frac{\|\varphi(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})\|}{|t|}$ だから $\lim_{t\to 0}\left\|\frac{f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{p})}{t} - A\boldsymbol{v}\right\| = 0$ すなわち $\lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{p})}{t} = A\boldsymbol{v}$ を得る．$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の場合は主張は明らかに成り立つ． □

定義 19.5 上の命題から (19.1) の等式 $(*)$ を満たす行列 A は f と $\boldsymbol{p}$ を与えればただ 1 つに定まるため，これを $f'(\boldsymbol{p})$ で表して，f の $\boldsymbol{p}$ における微分という．

命題 19.6 $f : X \to Y$ を写像とし，$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し $f(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}^m$ の第 i 成分を $f_i(\boldsymbol{x})$ で表し，X で定義された実数値関数 $f_i : X \to \boldsymbol{R}$ を考える．

1) f が $\boldsymbol{p}$ で微分可能ならば，各 f_i は $\boldsymbol{p}$ で微分可能で，$f'(\boldsymbol{p})$ の (i,j)-成分は $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ である．
2) 逆に各 f_i が $\boldsymbol{p}$ で微分可能ならば f は $\boldsymbol{p}$ で微分可能である．

証明 1) $f'(\boldsymbol{p})$ の第 i 行を A_i とすると $\frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}$ の第 i 成分は $\frac{f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{p}) - A_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}$ だから

$$\left|\frac{f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{p}) - A_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}\right| \leqq \left\|\frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}\right\|$$

が成り立つ．$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}$ のとき，右辺は 0 に近づくため $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \frac{f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{p}) - A_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} = 0$ となり，f_i は $\boldsymbol{p}$ で微分可能で $f_i'(\boldsymbol{p}) = A_i$ である．A の (i,j)-成分は A_i の第 j 列だから (19.4) と偏微分の定義から $A_i\boldsymbol{e}_j = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ に等しくなる．

2) A を $f_i'(\boldsymbol{p})$ を第 i 行とする $m \times n$ 行列とすれば，$\frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}$ の第 i 成分は $\frac{f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{p}) - f_i'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}$ だから仮定と (18.15) から $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} = \boldsymbol{0}$ である． □

命題 19.7　$X \subset \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ とし, $t \in (a,b)$ ならば $\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v} \in X$ であるとする. $\omega : (a,b) \to X$ を $\omega(t) = \boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}$ で定め, 関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ は $\omega(t)$ $(t \in (a,b))$ において微分可能であるとする. このとき,

$$(f \circ \omega)'(t) = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})$$

が成り立つ. ただし, v_j は $\boldsymbol{v}$ の第 j-成分である.

証明　(19.6) から $f'(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})\right)$ である. 一方 (19.4) から $(f \circ \omega)'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f((\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})+h\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})}{h} = f'(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$ だから結果を得る. □

定理 19.8　(合成写像の微分法) $X \subset \boldsymbol{R}^n$, $Y \subset \boldsymbol{R}^m$, $Z \subset \boldsymbol{R}^l$ とする. $f : X \to Y$ が $\boldsymbol{p}$ で微分可能であり, $g : Y \to Z$ が $f(\boldsymbol{p})$ で微分可能ならば, 合成写像 $g \circ f : X \to Z$ も $\boldsymbol{p}$ で微分可能で, $(g \circ f)'(\boldsymbol{p}) = g'(f(\boldsymbol{p}))f'(\boldsymbol{p})$ が成り立つ.

証明　$\varphi(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})$, $\psi(\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{y}) - g(f(\boldsymbol{p})) - g'(f(\boldsymbol{p}))(\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{p}))$ とおくと, 仮定から

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}} \frac{\varphi(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} = \boldsymbol{0} \ \cdots \ (1) \qquad \lim_{\boldsymbol{y} \to f(\boldsymbol{p})} \frac{\psi(\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{p})\|} = \boldsymbol{0} \ \cdots \ (2)$$

が成り立つ. さらに $\lambda(\boldsymbol{x}) = (g \circ f)(\boldsymbol{x}) - (g \circ f)(\boldsymbol{p}) - g'(f(\boldsymbol{p}))f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})$ とおくと, $\psi(f(\boldsymbol{x})) = g(f(\boldsymbol{x})) - g(f(\boldsymbol{p})) - g'(f(\boldsymbol{p}))(f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})) = g(f(\boldsymbol{x})) - g(f(\boldsymbol{p})) - g'(f(\boldsymbol{p}))f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}) - g'(f(\boldsymbol{p}))\varphi(\boldsymbol{x}) = \lambda(\boldsymbol{x}) - g'(f(\boldsymbol{p}))\varphi(\boldsymbol{x})$ だから $\lambda(\boldsymbol{x}) = \psi(f(\boldsymbol{x})) + g'(f(\boldsymbol{p}))\varphi(\boldsymbol{x})$ である. 三角不等式から

$$\frac{\|\lambda(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} \leqq \frac{\|\psi(f(\boldsymbol{x}))\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} + \frac{\|g'(f(\boldsymbol{p}))\varphi(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} \ \cdots \ (3)$$

であり, $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{p}$ に近づくとき上の不等式の左辺が 0 に近づくことが示されれば, $\lambda(\boldsymbol{x})$ の定義から主張が示される. まず, $A = g'(f(\boldsymbol{p}))$ として (17.13) を用いると

$$\frac{\|g'(f(\boldsymbol{p}))\varphi(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} \leqq M \frac{\|\varphi(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}$$

を満たす定数 M があり, (1) から $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{p}$ に近づくとき上式の右辺は 0 に近づくため

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}} \frac{\|g'(f(\boldsymbol{p}))\varphi(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} = 0 \ \cdots \ (4)$$

である. (19.2) から, $r, L > 0$ で $B(\boldsymbol{p}; r) \subset X$ かつ $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < r$ ならば

$$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\| \leqq L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| \ \cdots \ (5)$$

を満たすものがある. さて $\varepsilon > 0$ 任意にとると, (2) から $\delta_1 > 0$ で, $\|\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{p})\| < \delta_1$ ならば

$$\|\psi(\boldsymbol{y})\| \leqq \frac{\varepsilon}{L}\|\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{p})\| \ \cdots \ (6)$$

を満たすものがとれる. そこで r と $\frac{\delta_1}{L}$ の小さい方を δ とすれば, $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < \delta$ ならば (5) から $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\| \leqq L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < L\delta \leqq \delta_1$ だから (6), (5) を用いると $\|\psi(f(\boldsymbol{x}))\| \leqq \frac{\varepsilon}{L}\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\| \leqq \varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|$ となるため,

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}} \frac{\|\psi(f(\boldsymbol{x}))\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} = 0$$

が得られる. これと (4) から $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{p}$ に近づくとき (3) の左辺が 0 に近づくことがわかる. □

20 偏微分

補題 20.1 $x_1, \ldots, x_n$ を負でない実数とするとき, $x_1 + \cdots + x_n \leqq \sqrt{n}\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ が成り立つ.

証明 $(\sqrt{n}\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2})^2 - (x_1 + \cdots + x_n)^2 = \sum\limits_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_i - x_j)^2 \geqq 0$ □

定理 20.2 $f : X \to Y$ を写像とし, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し $f(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}^m$ の第 i 成分を $f_i(\boldsymbol{x})$ で表し, X で定義された実数値関数 $f_i : X \to \boldsymbol{R}$ を考える. $i = 1, 2, \ldots, m$ に対し, f_i は X の各点ですべての変数に対して微分可能で, 偏導関数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : X \to \boldsymbol{R}$ は連続であるとする. このとき, f は X の各点で微分可能である.

証明 (19.6) の 2) から $Y = \boldsymbol{R}$ の場合に対して主張を示せばよい. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p} \in X$ の第 j 成分をそれぞれ x_j, p_j として, $g_i : [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ を

$$g_i(t) = f\left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j \boldsymbol{e}_j + (p_i + t(x_i - p_i))\boldsymbol{e}_i + \sum_{j=i+1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j\right)$$

で定めると, g_i は $(0, 1)$ の各点で微分可能であり,

$$g_i'(t) = (x_i - p_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j \boldsymbol{e}_j + (p_i + t(x_i - p_i))\boldsymbol{e}_i + \sum_{j=i+1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j\right) \quad \cdots \ (*)$$

が成り立つ. さらに $i = 2, 3, \ldots, n$ に対し, $g_i(1) = g_{i-1}(0)$ であり, $g_1(1) = f(\boldsymbol{x})$, $g_n(0) = f(\boldsymbol{p})$ だから $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) = \sum\limits_{i=1}^{n}(g_i(1) - g_i(0))$ が成り立つ. 平均値の定理から $g_i(1) - g_i(0) = g_i'(\theta_i)$ を満たす $0 < \theta_i < 1$ があるため, $\boldsymbol{c}_i = \sum\limits_{j=1}^{i-1} p_j \boldsymbol{e}_j + (p_i + \theta_i(x_i - p_i))\boldsymbol{e}_i + \sum\limits_{j=i+1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j$ とおいて $(*)$ に注意すれば,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})(x_i - p_i) &= \sum_{i=1}^{n}\left(g_i(1) - g_i(0) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})(x_i - p_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(g_i'(\theta_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})(x_i - p_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})\right)(x_i - p_i) \end{aligned}$$

である. $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ の連続性から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ で $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{p}\| < \delta$ ならば $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{v}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ を満たすものがある. $\|\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{p}\| = \sqrt{\theta_i^2(x_i - p_i)^2 + \sum\limits_{j=i+1}^{n}(x_j - p_j)^2} \leqq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|$ だから $0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < \delta$ ならば $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ であり, これと上の計算および (20.1) から

$$\left|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})(x_i - p_i)\right| \leqq \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})\right||x_i - p_i| < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}|x_i - p_i| \leqq \varepsilon\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|$$

が得られる. これは $A = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{p}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{p})\right)$ とおけば $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|} = 0$ が成り立つことを意味するため, f は $\boldsymbol{p}$ で微分可能である. □

定義 20.3 $X \subset \boldsymbol{R}^n$ とし, 各 $\boldsymbol{x} \in X$ に対して $B(\boldsymbol{x}\,; r) \subset X$ を満たす $r > 0$ があるとする. 関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ と $1 \leqq i_s \leqq n$ $(s = 1, 2, \ldots, r)$ を満たす数列 $i_1, i_2, \ldots, i_r$ に対し, f の r 次偏導関数

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \partial x_{i_{r-1}} \ldots \partial x_{i_1}} : X \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

を次のように帰納的に定義する. f が X の各点で i_1 番目の変数に関して偏微分可能であるとき, $\frac{\partial^1 f}{\partial x_{i_1}}$ は $\boldsymbol{x} \in X$ を $\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{x})$ に対応させる関数とする. $\frac{\partial^{r-1} f}{\partial x_{i_{r-1}} \ldots \partial x_{i_1}} : X \to \boldsymbol{R}$ $(r \geqq 2)$ が定まり, X の各点で i_r 番目の変数に関して偏微分可能であるとき, $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \partial x_{i_{r-1}} \ldots \partial x_{i_1}}$ を

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \partial x_{i_{r-1}} \ldots \partial x_{i_1}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \left(\frac{\partial^{r-1} f}{\partial x_{i_{r-1}} \ldots \partial x_{i_1}} \right)(\boldsymbol{x})$$

によって定義する.

$1 \leqq i_s \leqq n$ $(s = 1, 2, \ldots, r)$ を満たす任意の数列 $i_1, i_2, \ldots, i_r$ に対し, f の r 次偏導関数が定義できるとき,「f は X で r 回偏微分可能である」という.

定理 20.4 $\boldsymbol{p} \in X \subset \boldsymbol{R}^n$ とし, $B(\boldsymbol{p}; r) \subset X$ を満たす $r > 0$ があるとする. また $f : X \to \boldsymbol{R}$ は X の各点で i 番目と j 番目の変数に関して偏微分可能であるとし, $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} : X \to \boldsymbol{R}$ がともに連続であるとする. さらに, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : X \to \boldsymbol{R}$ が存在して, $\boldsymbol{p} \in X$ において連続ならば $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ は $\boldsymbol{p}$ で i 番目の変数に関して偏微分可能であり, $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\boldsymbol{p}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p})$ が成り立つ.

証明 $J \subset \boldsymbol{R}^2$ を $J = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, |x|, |y| < \frac{r}{\sqrt{2}} \right\}$ で定め, $F : J \to \boldsymbol{R}$ を

$$F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = f(\boldsymbol{p} + x\boldsymbol{e}_i + y\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{p} + x\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{p} + y\boldsymbol{e}_j) + f(\boldsymbol{p})$$

で定義する. $t \in (-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}})$ を固定して $\varphi_t : (-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}) \to \boldsymbol{R}$ を $\varphi_t(x) = f(\boldsymbol{p} + x\boldsymbol{e}_i + t\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{p} + x\boldsymbol{e}_i)$ で定めれば, $\varphi_t'(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p} + x\boldsymbol{e}_i + t\boldsymbol{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i} f(\boldsymbol{p} + x\boldsymbol{e}_i)$ および $\varphi_t(x) - \varphi_t(0) = F\left(\begin{smallmatrix} x \\ t \end{smallmatrix}\right)$ が成り立つ. $s \in (-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}})$ に対し, 0 と s で挟まれた区間において平均値の定理を用いると $0 < \theta_1 < 1$ で $\varphi_t(s) - \varphi_t(0) = s\varphi_t'(\theta_1 s)$ をみたすものがあるため,

$$F\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) = s\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p} + \theta_1 s\boldsymbol{e}_i + t\boldsymbol{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p} + \theta_1 s\boldsymbol{e}_i)\right) \cdots (1)$$

が成り立つ. ここで θ_1 は s と t の両方に依存することに注意する. さらに, s, t を固定して $\psi : (-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}) \to \boldsymbol{R}$ を $\psi(u) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p} + \theta_1 s\boldsymbol{e}_i + u\boldsymbol{e}_j)$ で定義すれば, 仮定から ψ は微分可能で, 0 と t で挟まれる区間で平均値の定理を用いると, $0 < \theta_2 < 1$ で $\psi(t) - \psi(0) = t\psi'(\theta_2 t)$ を満たすものがある. $\psi'(u) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p} + \theta_1 s\boldsymbol{e}_i + u\boldsymbol{e}_j)$ だから

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p} + \theta_1 s\boldsymbol{e}_i + t\boldsymbol{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p} + \theta_1 s\boldsymbol{e}_i) = t\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p} + \theta_1 s\boldsymbol{e}_i + \theta_2 t\boldsymbol{e}_j) \cdots (2)$$

が得られる. (1), (2) から

$$F\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) = st\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p} + \theta_1 s\boldsymbol{e}_i + \theta_2 t\boldsymbol{e}_j) \cdots (3)$$

を満たす $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ の存在が示せたことになる. $s, t \in (-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}})$ を固定して $\lambda_s : (-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}) \to \boldsymbol{R}$ を $\lambda_s(y) = f(\boldsymbol{p} + s\boldsymbol{e}_i + y\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{p} + y\boldsymbol{e}_j)$ で定めて, 0 と t で挟まれた区間で平均値の定理を用いれば, $\lambda_s(t) - \lambda_s(0) = t\lambda_s'(\theta_3 t)$ を満たす $0 < \theta_3 < 1$ がある. $\lambda_s(t) - \lambda_s(0) = F\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)$, $\lambda_s'(y) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p} + s\boldsymbol{e}_i + y\boldsymbol{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p} + y\boldsymbol{e}_j)$ より

$$F\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) = t\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p} + s\boldsymbol{e}_i + \theta_3 t\boldsymbol{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p} + \theta_3 t\boldsymbol{e}_j)\right) \cdots (4)$$

である. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ の $\boldsymbol{p}$ における連続性から $0 < \delta < 1$ で, $x^2 + y^2 < \delta^2$ ならば

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p} + x\boldsymbol{e}_i + y\boldsymbol{e}_j) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p})\right| < \varepsilon \cdots (5)$$

を満たすものがある. 従って, $s^2 + t^2 < \delta^2$ ならば (3), (4), (5) から

$$\left|\frac{1}{s}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p} + s\boldsymbol{e}_i + \theta_3 t\boldsymbol{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p} + \theta_3 t\boldsymbol{e}_j)\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p})\right| = \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p} + \theta_1 s\boldsymbol{e}_i + \theta_2 t\boldsymbol{e}_j) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p})\right| < \varepsilon$$

が成り立つ. $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ の連続性から, 上式で $t \to 0$ とすれば $|s| < \delta$ ならば

$$\left| \frac{1}{s} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p} + s\boldsymbol{e}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}) \right) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p}) \right| \leqq \varepsilon$$

が成り立つことが分かる. ε は任意だから上式は定理の主張が成り立つことを示している. □

上の定理から, f が r 回偏微分可能で r 次までの偏導関数がすべて連続ならば r 次偏導関数は偏微分する変数の順序には依存しないことが分かる.

21 多変数関数のテイラーの定理

X を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合, $f : X \to \boldsymbol{R}$ を関数とする. $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$ の第 i 成分を v_i とし, f がすべての変数について偏微分可能であるとき, 関数

$$\left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f : X \to \boldsymbol{R}$$

を

$$\left(\left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f \right)(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$$

で定義する. 帰納的に, f が r 回偏微分可能であるとき

$$\left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^r f : X \to \boldsymbol{R}$$

を

$$\left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \left(\left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{r-1} f \right)$$

で定める.

補題 21.1 $f : X \to \boldsymbol{R}$ は r 回偏微分可能であるとする. $\boldsymbol{p} \in X$, $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$, $a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a < b)$ に対し, $t \in (a, b)$ ならば $\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v} \in X$ であるとき, $g : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ を $g(t) = f(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v})$ で定める. このとき, g の r 次導関数は

$$g^{(r)}(t) = \left(\left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^r f \right)(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v})$$

で与えられる.

証明 (19.6) から, $g'(t) = \big(\big(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}\big)f\big)(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v})$ であるため, $r = 1$ のとき主張は正しい. $g^{(r-1)}(t) = \big(\big(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}\big)^{r-1} f\big)(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v})$ が成り立つと仮定し, $h = \big(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}\big)^{r-1} f$ とおくと, $g^{(r-1)}(t) = h(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v})$ だから再び合成写像の微分法から $g^{(r)}(t) = h'(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} = \big(\big(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}\big)h\big)(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}) = \big(\big(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}\big)^r f\big)(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v})$ となるため, r のときも主張が成り立つ. □

補題 21.2 $l_1, \ldots, l_k$ は正の整数とし, $r = l_1 + \cdots l_k$ とおくと,

$$\sum_{s=1}^{k} \frac{(r-1)!}{l_1! \cdots (l_s - 1)! \cdots l_k!} = \frac{r!}{l_1! \cdots l_k!}$$

が成り立つ.

証明 k による帰納法で示す. $k = 1$ のとき, 主張は明らかに成り立つ. $k - 1$ のとき, 主張が正しいと仮定すると, $\sum_{s=1}^{k} \frac{(r-1)!}{l_1! \cdots (l_s-1)! \cdots l_k!} = \sum_{s=1}^{k-1} \frac{(r-l_k-1)!}{l_1! \cdots (l_s-1)! \cdots l_{k-1}!} \frac{(r-1)!}{l_k!(r-l_k-1)!} + \frac{(r-1)!}{l_1! \cdots l_{k-1}!(l_k-1)!} = \frac{(r-l_k)!}{l_1! \cdots l_{k-1}!} \frac{(r-1)!}{l_k!(r-l_k-1)!} + \frac{(r-1)!}{l_1! \cdots l_{k-1}!(l_k-1)!} = \frac{r!}{l_1! \cdots l_{k-1}! l_k!}$ となって, k のときも主張は成り立つ. □

命題 21.3　$f : X \to \boldsymbol{R}$ が r 回偏微分可能で, r 次までの偏導関数がすべて連続であるとき, $\boldsymbol{x} \in X$ に対し,

$$\left(\left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+v_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^r f\right)(\boldsymbol{x}) = \sum_{i_1+\cdots+i_n=r}\frac{r!}{i_1!\cdots i_n!}v_1^{i_1}\cdots v_n^{i_n}\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ.

証明　r による帰納法で示す. $r=1$ のときは主張は明らかに成り立つ. $r-1$ のとき主張が正しいと仮定すると, $((v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+v_n\frac{\partial}{\partial x_n})^r f)(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{j_1+\cdots+j_n=r-1}\frac{(r-1)!}{j_1!\cdots j_n!}(\sum\limits_{s=1}^{n} v_1^{j_1}\cdots v_s^{j_s+1}\cdots v_n^{j_n}\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_s^{j_s+1}\cdots\partial x_n^{j_n}})(\boldsymbol{x}))\cdots(*)$ ここで $i_1+\cdots+i_n=r$ を満たす負でない整数 $i_1,\ldots,i_n$ に対して, 上式の $v_1^{i_1}\cdots v_n^{i_n}\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{x})$ の項を集めると, その係数は $\sum\limits_{1\le s\le n, i_s\ne 0}\frac{(r-1)!}{i_1!\cdots(i_s-1)!\cdots i_n!}$ だから (21.2) により, $\frac{r!}{i_1!\cdots i_n!}$ に等しくなる. 従って, $(*) = \sum\limits_{i_1+\cdots+i_n=r}\frac{r!}{i_1!\cdots i_n!}v_1^{i_1}\cdots v_n^{i_n}\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{x})$ となって r のときも主張が成り立つ. □

定理 21.4　(テイラーの定理) $f : X \to \boldsymbol{R}$ が r 回偏微分可能で, r 次までの偏導関数がすべて連続であるとする. $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \in X$ に対し, $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{x}$ を結ぶ線分は X に含まれるとするとき, $0<\theta<1$ で,

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{p}) + \sum_{k=1}^{r-1}\sum_{i_1+\cdots+i_n=k}\frac{1}{i_1!\cdots i_n!}\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p})(x_1-p_1)^{i_1}\cdots(x_n-p_n)^{i_n}\\ &\quad + \sum_{i_1+\cdots+i_n=r}\frac{1}{i_1!\cdots i_n!}\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p}+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))(x_1-p_1)^{i_1}\cdots(x_n-p_n)^{i_n}\end{aligned}$$

を満たすものがある. ここで, x_i, p_i はそれぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{p}$ の第 i 成分である.

証明　$g : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を $g(t) = f(\boldsymbol{p}+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))$ で定めれば, g に関するテイラーの定理から,

$$g(1) = g(0) + \sum_{k=1}^{r-1}\frac{1}{k!}g^{(k)}(0) + \frac{1}{r!}g^{(r)}(\theta)$$

を満たす $0<\theta<1$ がある. (21.1), (21.3) により,

$$\begin{aligned}g^{(k)}(t) &= \left(\left((x_1-p_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+(x_2-p_2)\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+(x_n-p_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f\right)(\boldsymbol{p}+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))\\ &= \sum_{i_1+\cdots+i_n=k}\frac{k!}{i_1!\cdots i_n!}\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p}+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))(x_1-p_1)^{i_1}\cdots(x_n-p_n)^{i_n}\end{aligned}$$

だから, これを上式に代入すれば結果が得られる. □

補題 21.5

$$(x_1+\cdots+x_n)^r = \sum_{i_1+\cdots+i_n=r}\frac{r!}{i_1!\cdots i_n!}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$$

証明　n による帰納法で示す. $n=1$ のときは主張は明らか. $n-1$ のときに主張が成立すると仮定すると, 二項定理から, $(x_1+\cdots+x_n)^r = \sum\limits_{s+i_n=r}\frac{r!}{s!i_n!}(x_1+\cdots+x_{n-1})^s x_n^{i_n} = \sum\limits_{s+i_n=r}\frac{r!}{s!i_n!}(\sum\limits_{i_1+\cdots+i_{n-1}=s}\frac{s!}{i_1!\cdots i_{n-1}!}x_1^{i_1}\cdots x_{n-1}^{i_{n-1}})x_n^{i_n} = \sum\limits_{i_1+\cdots+i_n=r}\frac{r!}{i_1!\cdots i_n!}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ □

系 21.6　(21.4) と同じ仮定のもとで, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\delta>0$ で, $0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|<\delta$ ならば

$$\left|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - \sum_{k=1}^{r}\sum_{i_1+\cdots+i_n=k}\frac{1}{i_1!\cdots i_n!}\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p})(x_1-p_1)^{i_1}\cdots(x_n-p_n)^{i_n}\right| < \varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^r$$

を満たすようなものがある.

証明 $\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}$ の連続性から任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ で, $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < \delta$ ならば $i_1+\cdots+i_n = r$ を満たすすべての負でない整数 $i_1,\dots,i_n$ に対して

$$\left|\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p})\right| < \frac{r!}{\sqrt{n^r}}\varepsilon$$

を満たすようなものがある. テイラーの定理と (21.5), (20.1) を用いると, $0 < \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}
&\left|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - \sum_{k=1}^{r}\sum_{i_1+\cdots+i_n=k}\frac{1}{i_1!\cdots i_n!}\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p})(x_1-p_1)^{i_1}\cdots(x_n-p_n)^{i_n}\right| \\
&= \left|\sum_{i_1+\cdots+i_n=r}\frac{1}{i_1!\cdots i_n!}\left(\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p}+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})) - \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p})\right)(x_1-p_1)^{i_1}\cdots(x_n-p_n)^{i_n}\right| \\
&\leqq \sum_{i_1+\cdots+i_n=r}\frac{1}{i_1!\cdots i_n!}\left|\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p}+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})) - \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p})\right||x_1-p_1|^{i_1}\cdots|x_n-p_n|^{i_n} \\
&< \sum_{i_1+\cdots+i_n=r}\frac{1}{i_1!\cdots i_n!}|x_1-p_1|^{i_1}\cdots|x_n-p_n|^{i_n}\frac{r!}{\sqrt{n^r}}\varepsilon = (|x_1-p_1|+\cdots+|x_n-p_n|)^r\frac{\varepsilon}{\sqrt{n^r}} \leqq \varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^r
\end{aligned}$$

□

22　2 次形式

n 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し, ${}^t\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}$ を $n\times 1$ 行列とみなしたときの転置行列とする.

定義 22.1　A を実数を成分にもつ n 次対称行列とする. $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を対応させる関数 $Q_A : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ を A を係数行列とする (実)2 次形式という.

$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ の第 j 成分を x_j とし, A の (i,j)-成分を a_{ij} とすれば, $a_{ji} = a_{ij}$ より

$$Q_A(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\leqq i<j\leqq n} 2a_{ij}x_ix_j \quad \cdots(*)$$

である. 従って Q_A は $x_1, x_2, \dots, x_n$ の「2 次関数」であるといえる. このとき, 以下の命題が明らかに成り立つ.

命題 22.2　$r\in\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し, $Q_A(r\boldsymbol{x}) = r^2Q_A(\boldsymbol{x})$.

命題 22.3　A が零行列でないならば 2 次形式 $Q_A : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ に関して以下のいずれか 1 つだけが成り立つ.

1) $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ ならば $Q_A(\boldsymbol{x}) > 0$ である.
2) $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ ならば $Q_A(\boldsymbol{x}) < 0$ である.
3) すべての $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し, $Q_A(\boldsymbol{x}) \geqq 0$ であり, $Q_A(\boldsymbol{a}) = 0$ となる $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ がある.
4) すべての $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し, $Q_A(\boldsymbol{x}) \leqq 0$ であり, $Q_A(\boldsymbol{a}) = 0$ となる $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ がある.
5) $Q_A(\boldsymbol{a}) > 0$ となる $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{R}^n$ と $Q_A(\boldsymbol{b}) < 0$ となる $\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^n$ がある.

定義 22.4　実対称行列 A が上の命題の 1) を満たすとき, A を正値対称行列といい, 2) を満たすとき, A を負値対称行列という. また, 5) を満たすとき A は不定符号であるという.

命題 22.5　A, B を n 次実対称行列とする. $Q_A = Q_B : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ (すなわち, すべての $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して $Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_B(\boldsymbol{x})$) ならば $A = B$ である.

証明　$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ とし, $\boldsymbol{e}_j \in \boldsymbol{R}^n$ の基本ベクトルとすれば, $Q_A(\boldsymbol{e}_i) = {}^t\boldsymbol{e}_iA\boldsymbol{e}_i = a_{ii}$, $Q_A(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j) = {}^t(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)A(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j) = {}^t\boldsymbol{e}_iA\boldsymbol{e}_i + {}^t\boldsymbol{e}_iA\boldsymbol{e}_j + {}^t\boldsymbol{e}_jA\boldsymbol{e}_i + {}^t\boldsymbol{e}_jA\boldsymbol{e}_j = a_{ii}+a_{ij}+a_{ji}+a_{jj} = a_{ii}+2a_{ij}+a_{jj}$ であり, 同様

に $Q_B(\boldsymbol{e}_i) = b_{ii}$, $Q_B(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j) = b_{ii}+2b_{ij}+b_{jj}$ を得る．仮定からすべての $1 \leqq i,j \leqq n$ に対して $Q_A(\boldsymbol{e}_i) = Q_B(\boldsymbol{e}_i)$ $Q_A(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j) = Q_B(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)$ だから $a_{ii} = b_{ii}$, $a_{ii}+2a_{ij}+a_{jj} = b_{ii}+2b_{ij}+b_{jj}$ が成り立つ．これらの式から $a_{ij} = b_{ij}$ が得られる． □

命題 22.6　A を n 次対称行列, P を n 次正方行列とするとき, 任意の $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $Q_A(P\boldsymbol{y}) = Q_{{}^tPAP}(\boldsymbol{y})$ が成り立つ．

証明　$Q_A(P\boldsymbol{y}) = {}^t(P\boldsymbol{y})A(P\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{y}({}^tPAP)\boldsymbol{y} = Q_{{}^tPAP}(\boldsymbol{y})$． □

R_{ij} $(1 \leqq i,j \leqq n)$ を n 次単位行列 E_n の第 i 行と第 j 行を入れ替えて得られる行列とすると $R_{ij}^{-1} = {}^tR_{ij} = R_{ij}$ であり, 次の結果は容易に示される．

補題 22.7　A を n 次正方行列とするとき, $R_{ij}A$ は A の第 i 行と第 j 行を入れ替えて得られる行列, AR_{ij} は A の第 i 列と第 j 列を入れ替えて得られる行列である．従って $R_{ij}AR_{ij}$ の対角成分は A の対角成分の i 番目と j 番目を入れ替えたものである．

2 次形式 Q_A は「平方完成」できる．すなわち, 次の定理が成り立つ．

定理 22.8　A を n 次実対称行列とするとき, 正則行列 P で $P^{-1}\boldsymbol{x}$ の第 j 成分を y_j とすれば,

$$Q_A(\boldsymbol{x}) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2 \qquad (0 \leqq p \leqq n,\ 0 \leqq q \leqq n-p)$$

という形になるものが存在する．

証明　まず, 正則行列 T で $T^{-1}\boldsymbol{x}$ の第 j 成分を y_j とすれば, $Q_A(\boldsymbol{x}) = c_1y_1^2 + \cdots + c_ny_n^2$ の形になるものがあることを n による帰納法で示す．$A = O$ ならば主張は明らかだから, $A \neq O$ と仮定する．A の (i,j)-成分を a_{ij} とする．まず $n=1$ のときは主張は明らかであり, A が $n-1$ 次対称行列のときに主張が成り立つと仮定する．

(1) $a_{kk} \neq 0$ となる k がある場合;
$\boldsymbol{u} = R_{kn}^{-1}\boldsymbol{x}$ とおいて, $\boldsymbol{u}$ の第 j 成分を u_j とすれば, (22.6) から $Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_A(R_{kn}\boldsymbol{u}) = Q_{{}^tR_{kn}AR_{kn}}(\boldsymbol{u})$ である．${}^tR_{kn}AR_{kn} = R_{kn}AR_{kn} = (b_{ij})$ とすれば, (22.7) から $b_{nn} = a_{kk} \neq 0$ であり, ${}^tR_{kn}AR_{kn}$ は対称行列であることに注意する．そこで $b_{in} = b_{ni}$ を用いて, 以下のように u_n に関して平方完成する．

$$\begin{aligned}
Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_{{}^tR_{kn}AR_{kn}}(\boldsymbol{u}) &= \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}u_iu_j = \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}u_iu_j + b_{nn}u_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2b_{in}u_iu_n \\
&= \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}u_iu_j + b_{nn}\left(u_n + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_{in}}{b_{nn}}u_i\right)^2 - b_{nn}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_{in}}{b_{nn}}u_i\right)^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n-1}\left(b_{ij} - \frac{b_{in}b_{jn}}{b_{nn}}\right)u_iu_j + b_{nn}\left(u_n + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_{in}}{b_{nn}}u_i\right)^2 \qquad \cdots\ (i)
\end{aligned}$$

従って $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \text{\Large 0} & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ \text{\Large 0} & & 1 & 0 \\ \frac{b_{1n}}{b_{nn}} & \cdots & \frac{b_{n-1\,n}}{b_{nn}} & 1 \end{pmatrix}$ (P_1 の (n,i)-成分 $(i=1,2,\ldots,n-1)$ は $\frac{b_{in}}{b_{nn}}$) とおき, $\boldsymbol{v} = P_1\boldsymbol{u}$ とおいて $\boldsymbol{v}$ の第 i 成分を v_i とすれば P_1 は正則行列であり, $v_i = u_i$ $(i<n)$, $v_n = u_n + \sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{b_{in}}{b_{nn}}u_i$ が成り立つ．このとき $\boldsymbol{v} = P_1R_{kn}^{-1}\boldsymbol{x}$ であり, (i) から

$$Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_A(R_{kn}P_1^{-1}\boldsymbol{v}) = Q_{{}^tR_{kn}AR_{kn}}(P_1^{-1}\boldsymbol{v}) = \sum_{i,j=1}^{n-1}\left(b_{ij} - \frac{b_{in}b_{jn}}{b_{nn}}\right)v_iv_j + b_{nn}v_n^2 \qquad \cdots\ (ii)$$

を得る. さらに $b_{ij} - \frac{b_{in}b_{jn}}{b_{nn}}$ を (i,j)-成分にもつ $n-1$ 次対称行列を B として, $C = \begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & b_{nn} \end{pmatrix}$ とおき, $\boldsymbol{v}' \in \boldsymbol{R}^{n-1}$ を $\boldsymbol{v}$ から第 n 成分を除いたベクトルとすれば $\boldsymbol{v} = P_1 R_{kn}^{-1}\boldsymbol{x}$ ならば (ii) から以下の等式が得られる.

$$Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_C(\boldsymbol{v}) = Q_B(\boldsymbol{v}') + b_{nn}v_n^2 \quad \cdots \quad (iii)$$

B に帰納法の仮定を用いると, $n-1$ 次正則行列 T_1 で $\boldsymbol{v}' \in \boldsymbol{R}^{n-1}$ に対し $\boldsymbol{w}' = T_1^{-1}\boldsymbol{v}'$ の第 i 成分を w_i とすれば $Q_B(\boldsymbol{v}') = c_1 w_1^2 + \cdots + c_{n-1}w_{n-1}^2$ いう形になるものがある. $T_2 = \begin{pmatrix} T_1 & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$, とおくと T_2 も正則である. $\boldsymbol{w} = T_2^{-1}\boldsymbol{v}$ とおいて, $\boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}' \in \boldsymbol{R}^{n-1}$ をそれぞれ $\boldsymbol{v}$, vw から第 n 成分を除いたベクトルとすれば $\boldsymbol{w}' = T_1^{-1}\boldsymbol{v}'$, $w_n = v_n$ と (iii) から $\boldsymbol{w} = T_2^{-1}P_1R_{kn}^{-1}\boldsymbol{x}$ ならば $Q_A(\boldsymbol{x}) = c_1w_1^2 + \cdots + c_{n-1}w_{n-1}^2 + b_{nn}w_n^2$ である. ゆえに A が n 次対称行列の場合も主張が成り立つ.

(2) $a_{11} = \cdots = a_{nn} = 0$ の場合;

$A \neq O$ だから a_{kl} が 0 でないような k, l がある. $x_k = u_k + u_l$, $x_l = u_k - u_l$, $x_i = u_i$ $(i \neq k, l)$, すなわち P_3 を第 i 行が $i = k$ なら ${}^t\boldsymbol{e}_k + {}^t\boldsymbol{e}_l$, $i = l$ なら ${}^t\boldsymbol{e}_k - {}^t\boldsymbol{e}_l$, $i \neq k, l$ なら ${}^t\boldsymbol{e}_i$ であるような n 次正則行列として $\boldsymbol{u} = P_3^{-1}\boldsymbol{x}$ とおけば, $Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_A(P_3\boldsymbol{u}) = 2a_{kl}u_k^2 + \cdots$ となり, u_k^2 の係数は 0 でないため, $Q_{{}^tP_3AP_3}(\boldsymbol{u}) = Q_A(P_3\boldsymbol{u})$ は上の (1) の場合に帰着する.

正則行列 T で $\boldsymbol{y} = T^{-1}\boldsymbol{x}$ の第 j 成分を y_j とすれば, $Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_A(T\boldsymbol{y}) = c_1y_1^2 + \cdots + c_ny_n^2$ の形になるものを選ぶ. $\boldsymbol{y}$ の成分の順序を入れ替えることにより, $c_1, \ldots, c_p > 0$, $c_{p+1}, \ldots, c_{p+q} < 0$, $c_{p+q+1} = \cdots = c_n = 0$ の形にする. すなわち R_{ij} の形をした行列の積で表される行列 R で $\boldsymbol{z} = R^{-1}\boldsymbol{y}$ とおけば,

$$Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_A(TR\boldsymbol{z}) = c_1'z_1^2 + \cdots + c_p'z_p^2 + c_{p+1}'z_{p+1}^2 + \cdots + c_{p+q}'z_{p+q}^2 \quad (c_1', \ldots, c_p' > 0,\ c_{p+1}', \ldots, c_{p+q}' < 0)$$

となるものがある. 最後に, D を対角行列で i 番目の対角成分が $1 \leqq i \leqq p$ なら $\frac{1}{\sqrt{c_i'}}$, $p+1 \leqq i \leqq p+q$ なら $\frac{1}{\sqrt{-c_i'}}$, $p+q+1 \leqq i \leqq n$ なら 1 で与えられるものとして $\boldsymbol{w} = D^{-1}\boldsymbol{z}$ とおけば

$$Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_A(TRD\boldsymbol{w}) = w_1^2 + \cdots + w_p^2 - w_{p+1}^2 - \cdots - w_{p+q}^2$$

となる. □

n 次対角行列 $\begin{pmatrix} E_p & & \text{\huge 0} \\ & -E_q & \\ \text{\huge 0} & & O \end{pmatrix}$ を $D_{p,q}$ で表すことにする.

系 22.9 実数を成分にもつ n 次対称行列 A に対し, 正則行列 P で, ${}^tPAP = D_{p,q}$ という形になるものがある.

証明 2 次形式 Q_A に対し, 正則行列 P で (22.8) の条件を満たすものをとれば, (22.6) から任意の $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, $Q_{{}^tPAP}(\boldsymbol{y}) = Q_A(P\boldsymbol{y}) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2 = Q_{D_{p,q}}(\boldsymbol{y})$ が成り立つため (22.5) から ${}^tPAP = D_{p,q}$ である. □

命題 22.10 零でない実対称行列 A に対し, 正則行列 P で ${}^tPAP = D_{p,q}$ という形になるものをとる.

(1) A が正値対称行列 $\Leftrightarrow p = n$ かつ $q = 0$.

(2) A が負値対称行列 $\Leftrightarrow p = 0$ かつ $q = n$.

(3) A が (22.3) の 3) を満たす $\Leftrightarrow p < n$ かつ $q = 0$.

(4) A が (22.3) の 4) を満たす $\Leftrightarrow p = 0$ かつ $q < n$.

(5) A が不定符号 $\Leftrightarrow p > 0$ かつ $q > 0$.

証明 任意の $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, $Q_A(P\boldsymbol{y}) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2$ であり P は正則行列だから $\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{R}^n$ 全体を動けば $P\boldsymbol{y}$ も $\boldsymbol{R}^n$ 全体を動く. 従って $p = n$ かつ $q = 0$ ならば A は正値対称行列, $p = 0$ かつ $q = n$ ならば A は負値対称行列, $p < n$ かつ $q = 0$ ならば A は (22.3) の 3) を満たし, $p = 0$ かつ $q < n$ ならば A は (22.3) の 4) を満たし, $p > 0$ かつ $q > 0$ ならば A は不定符号である. □

補題 22.11 A が正値対称行列ならば正の実数 μ で,「$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ ならば $Q_A(\boldsymbol{x}) \geqq \mu\|\boldsymbol{x}\|^2$」を満たすものがある. また A が負値対称行列ならば負の実数 ν で,「$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ ならば $Q_A(\boldsymbol{x}) \leqq \nu\|\boldsymbol{x}\|^2$」を満たすものがある.

証明 A が正値対称行列ならば (22.9), (22.10) から正則行列 P で ${}^tPAP = E_n$ となるものがとれる. $P = (p_{ij})$, $\mu = (\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}^2)^{-1}$, $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ とおくと, P, $\boldsymbol{y}$ に対し (17.13) を用いると $\|\boldsymbol{x}\| = \|P\boldsymbol{y}\| \leqq \frac{1}{\sqrt{\mu}}\|\boldsymbol{y}\|$ だから $Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_A(P\boldsymbol{y}) = Q_{E_n}(\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{y}\|^2 \geqq \mu\|\boldsymbol{x}\|^2$. 後半も同様. □

最後に $n = 2$ の場合を考える.

命題 22.12 2 次実対称行列 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ について以下のことが成り立つ.

(1) A が正値対称行列 $\Leftrightarrow$ $a > 0$ かつ $ac - b^2 > 0$.

(2) A が負値対称行列 $\Leftrightarrow$ $a < 0$ かつ $ac - b^2 > 0$.

(3) A が (22.3) の 3) または 4) を満たす $\Leftrightarrow$ $ac - b^2 = 0$.

(4) A が不定符号 $\Leftrightarrow$ $ac - b^2 < 0$.

証明 $a \neq 0$ ならば $Q_A(\boldsymbol{x}) = a(x + \frac{b}{a}y)^2 + \frac{ac-b^2}{a}y^2$ だからこの場合, 上の 4 つの主張の $\Leftarrow$ が成り立つことがわかる. $a = 0$ の場合, $b = 0$ ならば $Q_A(\boldsymbol{x}) = cy^2$ より (3) の主張の $\Leftarrow$ が成り立ち, $b \neq 0$ ならば $Q_A(\boldsymbol{x}) = 2bxy + cy^2 = (bx + \frac{c+1}{2}y)^2 - (bx + \frac{c-1}{2}y)^2$ より (4) の主張の $\Leftarrow$ が成り立つ. □

23 多変数関数の極大・極小

定義 23.1 X を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合, $f : X \to \boldsymbol{R}$ を関数とする. $\boldsymbol{p} \in X$ に対し, $\varepsilon > 0$ で "$\boldsymbol{x} \in X$ かつ $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < \varepsilon$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \leqq f(\boldsymbol{p})$"を満たすものがあるとき, f は $\boldsymbol{p}$ で極大であるといい, $f(\boldsymbol{p})$ を f の極大値という. また, $\varepsilon > 0$ で "$\boldsymbol{x} \in X$ かつ $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < \varepsilon$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \geqq f(\boldsymbol{p})$"を満たすものがあるとき, f は $\boldsymbol{p}$ で極小であるといい, $f(\boldsymbol{p})$ を f の極小値という.

命題 23.2 $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 X で定義された実数値関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ が X の内点 $\boldsymbol{p}$ において微分可能であり, 極大または極小ならば $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}) = 0$ である.

証明 $B(\boldsymbol{p}; r) \subset X$ を満たす $r > 0$ をとり, $f_j : (-r, r) \to \boldsymbol{R}$ を $f_j(t) = f(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{e}_j)$ で定める. f が $\boldsymbol{p}$ で極大 (極小) ならば f_j は 0 で極大 (極小) だから 1 変数関数の場合の結果により $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}) = f_j'(0) = 0$ となる. □

X を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合, $f : X \to \boldsymbol{R}$ を 2 回偏微分可能で 2 次までの偏導関数がすべて連続であるような関数とする. $\boldsymbol{x} \in X$ に対し, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x})$ が (i, j)-成分であるような n 次正方行列を $f''(\boldsymbol{x})$ とする. すなわち

$$f''(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_j}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_j}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}.$$

このとき $f''(\boldsymbol{x})$ は対称行列であることに注意する.

$f : X \to \boldsymbol{R}$ は 2 回偏微分可能で 2 次までの偏導関数は連続であるとする. このとき f が X の内点 $\boldsymbol{p}$ で極大か極小であるかを判定する次の定理を証明する.

定理 23.3 $f'(\boldsymbol{p}) = (0, \ldots, 0)$ とする.

(1) $f''(\boldsymbol{p})$ が正値対称行列ならば $\boldsymbol{p}$ で f は極小.

(2) $f''(\boldsymbol{p})$ が負値対称行列ならば $\boldsymbol{p}$ で f は極大.

(3) $f''(\boldsymbol{p})$ が不定符号ならば $\boldsymbol{p}$ で f は極大でも極小でもない.

証明 まず

$$\sum_{i_1+\cdots+i_n=2}\frac{1}{i_1!\cdots i_n!}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p})(x_1-p_1)^{i_1}\cdots(x_n-p_n)^{i_n}=\frac{1}{2}{}^t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})f''(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})=\frac{1}{2}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})$$

が成り立つことに注意し, これと (21.6) から, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $0<\delta<r$ で $0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|<\delta$ ならば

$$\frac{1}{2}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})-\varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2<f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})<\frac{1}{2}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})+\varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2 \quad\cdots\quad (*)$$

を満たすようなものがある.

(1) $f''(\boldsymbol{p})$ が正値対称行列ならば (22.11) から正の実数 μ で,「$\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^n$ ならば $Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{v})\geqq\mu\|\boldsymbol{v}\|^2$」を満たすものがとれる. $\varepsilon=\frac{1}{2}\mu$ に対して $\delta>0$ を選べば, $(*)$ から $0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|<\delta$ ならば $f(\boldsymbol{x})>f(\boldsymbol{p})$ が成り立つ.

(2) 証明は (1) と同様にできる.

(3) $f''(\boldsymbol{p})$ が不定符号ならば $Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{a})>0$, $Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{b})<0$ となる $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^n$ をとり, (22.2) から, 適当なスカラー倍をすることにより $\|\boldsymbol{a}\|=\|\boldsymbol{b}\|=1$ と仮定してよい. $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{a}$ $(|t|<r)$ のとき $\varepsilon=\frac{1}{3}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{a})$ に対して $0<\delta\leqq r$ を選んで $(*)$ から $0<|t|<\delta$ ならば $f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})>\frac{t^2}{6}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{a})>0$ である. 従って f は $\boldsymbol{p}$ で極大ではない. また $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{b}$ $(|t|<r)$ のとき $\varepsilon=-\frac{1}{3}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{b})$ に対して $0<\delta\leqq r$ を選んで $(*)$ から $0<|t|<\delta$ ならば $f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})<\frac{t^2}{6}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{b})<0$ である. 従って f は $\boldsymbol{p}$ で極小ではない. □

$f''(\boldsymbol{p})$ が上の定理の条件のどれにもあてはまらない場合, すなわち $f''(\boldsymbol{p})$ が (22.3), (22.10) の 3), 4) の場合にあてはまる場合は $f''(\boldsymbol{p})$ だけでは以下の例が示すように極大・極小の判定はできない.

例 23.4 $f,g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^4+y^4$, $g\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^3+y^3$ で定めると, $f'(\boldsymbol{0})=g'(\boldsymbol{0})=(0,0)$ であり $f''(\boldsymbol{0})=g''(\boldsymbol{0})=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ となる. 明らかに任意の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^2$ に対して $f(\boldsymbol{x})\geqq f(\boldsymbol{0})=0$ だから f は原点で極小 (最小) であるが, $g(t\boldsymbol{e}_1)=t^3$ だから x-軸に沿って g は負から正に符号を変えるため g は原点で極大でも極小でもない.

$n=2$ の場合, (23.3) と (22.12) から次の結果が得られる.

定理 23.5 $X\subset\boldsymbol{R}^2$ とし, $f:X\to\boldsymbol{R}$ は 2 回偏微分可能で 2 次偏導関数は連続であるとする. $\boldsymbol{p}\in X$ に対し, 十分小さな $r>0$ をとれば「$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|<r$ ならば $\boldsymbol{x}\in X$」が成り立ち $\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p})=\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p})=0$ とする.

(1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{p})>0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{p})\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{p})-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\boldsymbol{p})\right)^2>0$ ならば f は $\boldsymbol{p}$ で極小.

(2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{p})<0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{p})\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{p})-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\boldsymbol{p})\right)^2>0$ ならば f は $\boldsymbol{p}$ で極大.

(3) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{p})\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{p})-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\boldsymbol{p})\right)^2<0$ ならば f は $\boldsymbol{p}$ で極大でも極小でもない.

24 逆写像定理

定義 24.1 X を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合, Y を $\boldsymbol{R}^m$ の部分集合とする. 写像 $f:X\to Y$ が与えられたとき $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し, $f(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{R}^m$ の第 i-成分を $f_i(\boldsymbol{x})$ で表すことにする. $\boldsymbol{x}$ を $f_i(\boldsymbol{x})$ に対応させることにより, 関数 $f_i:X\to\boldsymbol{R}$ が定まるが, f_i が r 次までのすべての偏導関数をもち, それらがすべて連続であるとき, f を C^r-級写像という.

$M_n(\boldsymbol{R})$ を実数を成分とする n 次正方行列全体からなる集合とする. これを n^2 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^{n^2}$ と同一視して, 内積を定義すると, 行列式を対応させる関数 $\det:M_n(\boldsymbol{R})\to\boldsymbol{R}$ は連続である.

補題 24.2 X を $\boldsymbol{R}^k$ の開集合とし, 連続写像 $f : X \to M_n(\boldsymbol{R})$ が与えられているとき, $f(\boldsymbol{x})$ が正則行列であるようなベクトル全体からなる X の部分集合は $\boldsymbol{R}^k$ の開集合である.

証明 $\boldsymbol{R} - \{0\}$ は $\boldsymbol{R}$ の開集合であり, 連続写像の合成写像 $f \circ \det : X \to \boldsymbol{R}$ は連続だから, (18.18) により $(f \circ \det)^{-1}(\boldsymbol{R} - \{0\})$ は X の開集合である. この集合は $f(\boldsymbol{x})$ が正則行列であるようなベクトル全体からなる X の部分集合に他ならない. □

$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 X の任意の 2 点を結ぶ線分が X に含まれるとき X は凸であると言うことにする.

補題 24.3 X を $\boldsymbol{R}^n$ の凸である開集合, Y を $\boldsymbol{R}^m$ の部分集合, $f : X \to Y$ を C^1-級写像とする. 実数 M は, すべての $\boldsymbol{x} \in X$ と $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\right| \leqq M$ を満たすとする. このとき, すべての $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\| \leqq mnM\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

証明 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ の第 j 成分をそれぞれ x_j, y_j として, $g_{ik} : [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ を

$$g_{ik}(t) = f_i\left(\sum_{j=1}^{k-1} y_j\boldsymbol{e}_j + (y_k + t(x_k - y_k))\boldsymbol{e}_k + \sum_{j=k+1}^{n} x_j\boldsymbol{e}_j\right)$$

で定めると, g_{ik} は $(0, 1)$ の各点で微分可能であり,

$$g'_{ik}(t) = (x_k - y_k)\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{k-1} y_j\boldsymbol{e}_j + (y_k + t(x_k - y_k))\boldsymbol{e}_k + \sum_{j=k+1}^{n} x_j\boldsymbol{e}_j\right) \cdots (*)$$

が成り立つ. さらに $k = 2, 3, \ldots, n$ に対し, $g_{ik}(1) = g_{i\,k-1}(0)$ であり, $g_{i1}(1) = f_i(\boldsymbol{x})$, $g_{in}(0) = f_i(\boldsymbol{y})$ だから $f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{y}) = \sum\limits_{k=1}^{n}(g_{ik}(1) - g_{ik}(0))$ が成り立つ. 平均値の定理から $g_{ik}(1) - g_{ik}(0) = g'_{ik}(\theta_{ik})$ を満たす $0 < \theta_{ik} < 1$ があるため, $\boldsymbol{c}_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{k-1} y_j\boldsymbol{e}_j + (y_k + \theta_{ik}(x_k - y_k))\boldsymbol{e}_k + \sum\limits_{j=k+1}^{n} x_j\boldsymbol{e}_j$ とおいて $(*)$ に注意すれば,

$$|f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{y})| = \left|\sum_{k=1}^{n}(g_{ik}(1) - g_{ik}(0))\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} g'_{ik}(\theta_{ik})\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{c}_{ik})(x_k - y_k)\right| \leqq \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{c}_{ik})\right||x_k - y_k|$$

より, $|f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{y})| \leqq \sum\limits_{k=1}^{n} M|x_k - y_k|$ である. 従って (17.7) により

$$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\| \leqq \sum_{i=1}^{m}|f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{y})| \leqq \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} M|x_k - y_k| \leqq mnM\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

□

定理 24.4 X, Y を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合, $f : X \to Y$ を C^r-級写像 $(r \geqq 1)$ とする. $\boldsymbol{p} \in X$ に対し, $f'(\boldsymbol{p})$ が正則行列ならば, $\boldsymbol{p}$ を含む開集合 U と $f(\boldsymbol{p})$ を含む開集合 V で, f は U から V の上への 1 対 1 写像であり, 逆写像 $f^{-1} : V \to U$ も C^r-級写像になるものがとれる. このとき, $\boldsymbol{x} \in U$ に対し, $(f^{-1})'(f(\boldsymbol{x})) = f'(\boldsymbol{x})^{-1}$ が成り立つ.

証明 $f'(\boldsymbol{p}) = E_n$ を満たす f に対して主張が示されたとする. 一般の f に対しては, $g : X \to \boldsymbol{R}^n$ を $g(\boldsymbol{x}) = f'(\boldsymbol{p})^{-1}f(\boldsymbol{x})$ で定めれば, $g'(\boldsymbol{p}) = f'(\boldsymbol{p})^{-1}f'(\boldsymbol{p}) = E_n$, $f = T \circ g$ ($T : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ は $T(\boldsymbol{x}) = f'(\boldsymbol{p})\boldsymbol{x}$ で与えられる同型写像) だから f に対する主張が示される. 従って以下では $f'(\boldsymbol{p}) = E_n$ の場合を考える.

もし, $r_1 > 0$ で「$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}; r_1)$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{p})$」を満たすものが存在しないならば, 各 $n = 1, 2, \ldots$ に対して $\boldsymbol{x}_n \in B(\boldsymbol{p}; \frac{1}{n})$, $\boldsymbol{x}_n \neq \boldsymbol{p}$ で $f(\boldsymbol{x}_n) = f(\boldsymbol{p})$ を満たすものがある. このとき, $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{p}$ であるが,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|f(\boldsymbol{x}_n) - f(\boldsymbol{p}) - f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{p})\|}{\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{p}\|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{p}\|}{\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{p}\|} = 1$$

となるため, これは $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \frac{\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})-f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\|}{\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{p}\|}=0$ と矛盾する. よって

[1] $\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{p}\,;r_1)$ かつ $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{p}$ ならば $f(\boldsymbol{x})\neq f(\boldsymbol{p})$

を満たす $r_1>0$ は存在する. $f':X\to M_n(\boldsymbol{R})$ に対し (24.2) を用いると, $f'(\boldsymbol{p})$ は正則行列だから $r_2>0$ で

[2] $\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{p}\,;r_2)$ ならば $f'(\boldsymbol{x})$ は正則行列.

を満たすものがある. また, f は C^1-級写像だから $r_3>0$ で

[3] $\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{p}\,;r_3)$ ならば, すべての $i,j=1,2,\ldots,n$ に対して $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})\right|<\frac{1}{2n^2}$

を満たすものがとれる.

$\varphi(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}$ で定義される写像 $\varphi:B(\boldsymbol{p}\,;r_3)\to\boldsymbol{R}^n$ に (24.3) を用いると, $\varphi'(\boldsymbol{x})=f'(\boldsymbol{x})-E_n=f'(\boldsymbol{x})-f'(\boldsymbol{p})$ と [3] により $M=\frac{1}{2n^2}$ ととれるため, $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in B(\boldsymbol{p}\,;r_3)$ に対して $\|f(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{x}_1-(f(\boldsymbol{x}_2)-\boldsymbol{x}_2)\|\leqq\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|$ が成り立つ. 三角不等式により $\|f(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{x}_1-(f(\boldsymbol{x}_2)-\boldsymbol{x}_2)\|+\|f(\boldsymbol{x}_2)-f(\boldsymbol{x}_1)\|\geqq\|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1\|$ だから上の不等式から $\frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|\geqq\|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1\|-\|f(\boldsymbol{x}_2)-f(\boldsymbol{x}_1)\|$ が得られ, 次の主張が成り立つ.

[4] $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in B(\boldsymbol{p}\,;r_3)$ ならば $\|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1\|\leqq 2\|f(\boldsymbol{x}_2)-f(\boldsymbol{x}_1)\|$

r を $\frac{r_1}{2}$, $\frac{r_2}{2}$, $\frac{r_3}{2}$ の中で一番小さいものとする. $S(\boldsymbol{p};r)$ は (18.7) の (3) と (18.8) により, 有界閉集合である. $\psi:S(\boldsymbol{p};r)\to\boldsymbol{R}$ を $\psi(\boldsymbol{x})=\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})\|$ で定義すれば (18.20) によって, ψ は最小値をとる. この最小値を d とすれば [1] から $d>0$ である. $\boldsymbol{x}\in S(\boldsymbol{p};r)$, $\boldsymbol{y}\in B\left(f(\boldsymbol{p});\frac{d}{2}\right)$ ならば $\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})\|\geqq d$, $\|\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{p})\|<\frac{d}{2}$ より $\|\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{x})\|\geqq\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})\|-\|\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{p})\|>d-\frac{d}{2}=\frac{d}{2}$. 従って

[5] $\boldsymbol{x}\in S(\boldsymbol{p};r)$, $\boldsymbol{y}\in B\left(f(\boldsymbol{p});\frac{d}{2}\right)$ ならば $\|\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{x})\|>\frac{d}{2}$.

各 $\boldsymbol{y}\in B\left(f(\boldsymbol{p});\frac{d}{2}\right)$ に対し, $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ を満たす $\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{p}\,;r)$ がただ 1 つ存在することを示す. $\xi:\overline{B}(\boldsymbol{p}\,;r)\to\boldsymbol{R}$ を $\xi(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{x})\|^2$ で定めると (18.7) の (2) と (18.8) により $\overline{B}(\boldsymbol{p}\,;r)$ は有界閉集合だから, (18.20) によって, ξ は最小値をとる. $\boldsymbol{x}\in S(\boldsymbol{p};r)$ ならば [5] と $\boldsymbol{y}\in B\left(f(\boldsymbol{p});\frac{d}{2}\right)$ から $\xi(\boldsymbol{x})>\left(\frac{d}{2}\right)^2>\xi(\boldsymbol{p})$ となるため, ξ は $\overline{B}(\boldsymbol{p}\,;r)$ の部分集合 $S(\boldsymbol{p};r)$ においては最小値をとらない. 従って ξ は $\overline{B}(\boldsymbol{p}\,;r)$ の内点において最小値をとるため, (23.2) から, $\xi'(\boldsymbol{x})=O$ を満たす $\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{p}\,;r)$ がある. ここで $\xi'(\boldsymbol{x})=-2({}^t\boldsymbol{y}-{}^tf(\boldsymbol{x}))f'(\boldsymbol{x})$ であり, [2] によって $f'(\boldsymbol{x})$ は正則行列だから, $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$ である. さらに [4] により, $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$ を満たす $\boldsymbol{x}$ はただ 1 つである.

$U=B(\boldsymbol{p}\,;r)\cap f^{-1}\left(B\left(f(\boldsymbol{p});\frac{d}{2}\right)\right)$, $V=B\left(f(\boldsymbol{p});\frac{d}{2}\right)$ とおくと (18.4) の (1), (18.9), (18.18) により U, V は $\boldsymbol{R}^n$ の開集合であり, f は U から V の上への 1 対 1 写像である. この逆写像を $f^{-1}:V\to U$ とすると $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in V$ に対し, $\boldsymbol{x}_1=f^{-1}(\boldsymbol{y}_1)$, $\boldsymbol{x}_2=f^{-1}(\boldsymbol{y}_2)$ とおくと $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in U$ だから [4] により

[6] $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in V$ ならば $\|f^{-1}(\boldsymbol{y}_2)-f^{-1}(\boldsymbol{y}_1)\|\leqq 2\|\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_1\|$.

故に f^{-1} は連続である.

最後に f^{-1} の $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x}\in V)$ における微分可能性を示す. f の $\boldsymbol{x}$ における微分可能性から $\zeta(\boldsymbol{x}_1)=f(\boldsymbol{x}_1)-f(\boldsymbol{x})-f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)$ とおけば $\lim\limits_{\boldsymbol{x}_1\to\boldsymbol{x}}\frac{\|\zeta(\boldsymbol{x}_1)\|}{\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}\|}=0$ である. $\boldsymbol{y}_1=f(\boldsymbol{x}_1)$ とおくと $\boldsymbol{x}=f^{-1}(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x}_1=f^{-1}(\boldsymbol{y}_1)$ であり, [2] により, $f'(\boldsymbol{x})$ は正則行列だから $f'(\boldsymbol{x})^{-1}\zeta(f^{-1}(\boldsymbol{y}_1))=f'(\boldsymbol{x})^{-1}(\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y})-(f^{-1}(\boldsymbol{y}_1)-f^{-1}(\boldsymbol{y}))$ となるため

$$f^{-1}(\boldsymbol{y}_1)=f^{-1}(\boldsymbol{y})+f'(\boldsymbol{x})^{-1}(\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y})-f'(\boldsymbol{x})^{-1}\zeta(f^{-1}(\boldsymbol{y}_1)).$$

従って $\lim\limits_{\boldsymbol{y}_1\to\boldsymbol{y}}\frac{\|f'(\boldsymbol{x})^{-1}\zeta(f^{-1}(\boldsymbol{y}_1))\|}{\|\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}\|}=0$ を示せば f^{-1} は $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$ において微分可能で, $(f^{-1})'(f(\boldsymbol{x}))=f'(\boldsymbol{x})^{-1}$ が得られる. まず (17.13) により $\|f'(\boldsymbol{x})^{-1}\zeta(f^{-1}(\boldsymbol{y}_1))\|\leqq M\|\zeta(f^{-1}(\boldsymbol{y}_1))\|$ を満たす M があるので, $\lim\limits_{\boldsymbol{y}_1\to\boldsymbol{y}}\frac{\|\zeta(f^{-1}(\boldsymbol{y}_1))\|}{\|\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}\|}=0$ を示せばよい.

任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ で「$0 < \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}\| < \delta$ ならば $\frac{\|\zeta(\boldsymbol{x}_1)\|}{\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}\|} < \frac{\varepsilon}{2}$」を満たすものがある. $\delta_1 > 0$ を $\frac{\delta}{2}$ と $\frac{d}{2} - \|\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{p})\|$ の小さい方とすれば, $0 < \|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}\| < \delta_1$ ならば $\boldsymbol{y}_1 \in V$ であり, [6] から $0 < \|f^{-1}(\boldsymbol{y}_1) - f^{-1}(\boldsymbol{y})\| \leqq 2\|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}\| < 2\delta_1 \leqq \delta$ が成り立つ. このとき $\frac{\|\zeta(f^{-1}(\boldsymbol{y}_1))\|}{\|f^{-1}(\boldsymbol{y}_1)-f^{-1}(\boldsymbol{y})\|} < \frac{\varepsilon}{2}$ であり, 再び [6] により $0 < \frac{\|f^{-1}(\boldsymbol{y}_1)-f^{-1}(\boldsymbol{y})\|}{\|\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}\|} \leqq 2$ だから, この 2 つの不等式を辺々掛けあわせて「$0 < \|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}\| < \delta_1$ ならば $\frac{\|\zeta(f^{-1}(\boldsymbol{y}_1))\|}{\|\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}\|} < \varepsilon$」を得る. 故に $\lim\limits_{\boldsymbol{y}_1\to\boldsymbol{y}} \frac{\|\zeta(f^{-1}(\boldsymbol{y}_1))\|}{\|\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}\|} = 0$ が示された.

上で示したことから $\boldsymbol{y} \in V$ に対し, $(f^{-1})'(\boldsymbol{y}) = f'(f^{-1}(\boldsymbol{y}))^{-1}$ であり, f^{-1}, f' と $A \mapsto A^{-1}$ で与えられる写像の連続性から f^{-1} は C^1-級写像である. 帰納的に f^{-1} が C^s-級写像 $(s \leqq r-1)$ であると仮定すれば, f' と $A \mapsto A^{-1}$ で与えられる写像が C^s-級写像であることから $(f^{-1})'$ も C^s-級写像である. 従って f^{-1} は C^{s+1}-級写像である. 故に, 帰納法により f^{-1} は C^r-級写像である. □

$\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ の第 j 成分を x_j, $\boldsymbol{R}^m$ のベクトル $\boldsymbol{y}$ の第 j 成分を y_j とするとき, $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)$ によって, 第 j 成分が $j \leqq n$ ならば x_j, $j \geqq n+1$ ならば y_{j-n} である $\boldsymbol{R}^{n+m}$ のベクトルを表すことにする. さらに $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 X, $\boldsymbol{R}^m$ の部分集合 Y に対し, $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の部分集合 $X \times Y$ を $X \times Y = \{\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right) \,|\, \boldsymbol{x} \in X,\ \boldsymbol{y} \in Y\}$ によって定義する.

補題 24.5 $r, r_1, r_2 > 0$, $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^m$ に対し, $r \leqq r_1, r_2$ ならば

$$B\left(\boldsymbol{p}; \tfrac{r}{\sqrt{2}}\right) \times B\left(\boldsymbol{q}; \tfrac{r}{\sqrt{2}}\right) \subset B\left(\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right); r\right) \subset B(\boldsymbol{p}\,; r_1) \times B(\boldsymbol{q}\,; r_2)$$

が成り立つ. 従って $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right)$ が $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の部分集合 X の内点ならば $B(\boldsymbol{p}\,; r) \times B(\boldsymbol{q}\,; r) \subset X$ を満たす $r > 0$ がある.

証明 $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right) \in B\left(\boldsymbol{p}; \frac{r}{\sqrt{2}}\right) \times B\left(\boldsymbol{q}; \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ ならば $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|^2 + \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{q}\|^2 < \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 = r^2$ だから $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right) \in B\left(\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right); r\right)$.

$\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right) \in B\left(\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right); r\right)$ ならば $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|^2 \leqq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|^2 + \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{q}\|^2 < r^2 \leqq r_1^2$, $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{q}\|^2 \leqq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|^2 + \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{q}\|^2 < r^2 \leqq r_2^2$ だから $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right) \in B(\boldsymbol{p}\,; r_1) \times B(\boldsymbol{q}\,; r_2)$. □

命題 24.6 X, Y がそれぞれ $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ の開集合ならば $X \times Y$ は $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の開集合である.

証明 任意の $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right) \in X \times Y$ に対し, $B(\boldsymbol{p}\,; r_1) \subset X$, $B(\boldsymbol{q}\,; r_2) \subset Y$ を満たす $r_1, r_2 > 0$ が存在する. r を r_1, r_2 の小さい方とすれば, (24.5) から, $B\left(\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right); r\right) \subset B(\boldsymbol{p}\,; r_1) \times B(\boldsymbol{q}\,; r_2) \subset X \times Y$ となるため $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right)$ は $X \times Y$ の内点である. □

定理 24.7 X, Y をそれぞれ $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ の開集合とし, $F : X \times Y \to \boldsymbol{R}^m$ を C^r-級写像とする. $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right) \in X \times Y$ に対し $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)$ $(i = 1, 2, \dots, m,\ j = 1, 2, \dots, n)$ を (i, j) 成分とする $m \times n$ 行列を $D_1F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)$, $\frac{\partial F_i}{\partial x_{n+j}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)$ $(i, j = 1, 2, \dots, m)$ を (i, j) 成分とする m 次正方行列を $D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)$ で表す. $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right) \in X \times Y$ は $F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right) = \boldsymbol{0}$ を満たし, $D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right)$ が正則ならば, $\boldsymbol{p}$ を含む $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U, $\boldsymbol{q}$ を含む $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 V と C^r-級写像 $f : U \to V$ で, $f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{q}$ かつ, すべての $\boldsymbol{x} \in U$ に対して $D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$ は正則であり, $F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right) = \boldsymbol{0}$ を満たすものがある. さらに $\boldsymbol{x} \in U$ に対し $f'(\boldsymbol{x}) = -D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)^{-1} D_1F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$ が成り立つ.

証明 $G : X \times Y \to \boldsymbol{R}^{n+m}$ を

$$G\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix}$$

で定めれば, これは C^r-級写像であり, $D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right)$ は正則だから,

$$G'\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}E_n & O\\ D_1F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right) & D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix}$$

は正則行列である. 従って (24.4) から $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right)$ を含む開集合 Z と $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{0}\end{smallmatrix}\right)$ を含む開集合 W で, G が Z から W の上への 1 対 1 写像であり, 逆写像 $G^{-1} : W \to Z$ が C^r-級写像になるものが存在する.

(24.5) から $B(\boldsymbol{p}\,; r_1) \times B(\boldsymbol{q}\,; r_1) \subset Z$ を満たす $r_1 > 0$ がある. (24.6) から $B(\boldsymbol{p}\,; r_1) \times B(\boldsymbol{q}\,; r_1)$ は $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の開集合だから $(G^{-1})^{-1}(B(\boldsymbol{p}\,; r_1) \times B(\boldsymbol{q}\,; r_1))$ は G^{-1} の連続性と (18.18) から $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{0}\end{smallmatrix}\right)$ を含む $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の開集合である. 再び

(24.5) から $B(\boldsymbol{p};r_2)\times B(\boldsymbol{0};r_2)\subset (G^{-1})^{-1}(B(\boldsymbol{p};r_1)\times B(\boldsymbol{q};r_1))$ を満たす $0<r_2\leqq r_1$ をとれば $B(\boldsymbol{p};r_2)\times B(\boldsymbol{0};r_2)$ は (24.6) により $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の開集合である．$Z'=G^{-1}(B(\boldsymbol{p};r_2)\times B(\boldsymbol{0};r_2))$ とおくと G の連続性と (18.18) から Z' も $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の開集合である．$\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)\in Z'$ ならば $G\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)\in B(\boldsymbol{p};r_2)\times B(\boldsymbol{0};r_2)\subset (G^{-1})^{-1}(B(\boldsymbol{p};r_1)\times B(\boldsymbol{0};r_1))$ だから $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)=G^{-1}\left(G\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)\right)\in B(\boldsymbol{p};r_1)\times B(\boldsymbol{q};r_1)$ となるため，$Z'\subset B(\boldsymbol{p};r_1)\times B(\boldsymbol{q};r_1)$ が成り立つ．

各 $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)\in Z$ に対し，$G^{-1}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}g_1\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)\\ g_2\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix}$ とおくと，$G\left(G^{-1}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)\right)=\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)$ だから $g_1\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)=\boldsymbol{x}$，$F\begin{pmatrix}g_1\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)\\ g_2\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix}=\boldsymbol{y}$ である．$\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)\in B(\boldsymbol{p};r_2)\times B(\boldsymbol{0};r_2)$ ならば $G^{-1}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)\in B(\boldsymbol{p};r_1)\times B(\boldsymbol{q};r_1)$ より $g_2\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)\in B(\boldsymbol{q};r_1)$ である．そこで，$U=B(\boldsymbol{p};r_2)$，$V=B(\boldsymbol{q};r_1)$ とおいて，$f:U\to V$ を $f(\boldsymbol{x})=g_2\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{0}\end{smallmatrix}\right)$ で定めると，上のことから $F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)=\boldsymbol{0}$ が成り立ち，G^{-1} が C^r-級写像であることから f も C^r-級写像である．また，$G\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{0}\end{smallmatrix}\right)$ だから $G^{-1}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{0}\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right)$ である．従って $f(\boldsymbol{p})=g_2\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{0}\end{smallmatrix}\right)=\boldsymbol{q}$ である．

写像 $\mu:B(\boldsymbol{p};r_2)\to M_n(\boldsymbol{R})$ を $\mu(\boldsymbol{x})=D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$ で定めると，μ は連続で，$\mu(\boldsymbol{p})$ は正則だから (24.2) により，$0<r_3\leqq r_2$ で，$\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{p};r_3)$ ならば $D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$ は正則行列になるものが取れる．従って r_2 を r_3 で置き換えて，U の各点で $D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$ は正則行列であるとしてよい．

一般に C^r-写像 $g:U\to V$ に対し，写像 $h:U\to\boldsymbol{R}^m$ を $h(\boldsymbol{x})=F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ g(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$ で定めると，h は $\Delta(\boldsymbol{x})=\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}\end{smallmatrix}\right)$，$(id_U\times g)\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ g(\boldsymbol{x}_2)\end{smallmatrix}\right)$ によって定められる写像 $\Delta:U\to U\times U$，$id_U\times g:U\times U\to U\times V$ と $F:U\times V\to\boldsymbol{R}^m$ の合成写像である．

$$F'\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)=\left(D_1F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)\quad D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)\right),\qquad (id_U\times g)'\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}E_n & O\\ O & g'(\boldsymbol{x}_2)\end{pmatrix},\qquad \Delta'(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}E_n\\ E_n\end{pmatrix}$$

となるため，(19.8) から

$$\begin{aligned}h'(\boldsymbol{x})&=F'((id_U\times g)\circ\Delta(\boldsymbol{x}))((id_U\times g)\circ\Delta)'(\boldsymbol{x})=F'((id_U\times g)(\Delta(\boldsymbol{x})))(id_U\times g)'(\Delta(\boldsymbol{x}))\Delta'(\boldsymbol{x})\\&=F'\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ g(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)(id_U\times g)'\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}\end{smallmatrix}\right)\Delta'(\boldsymbol{x})=\left(D_1F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ g(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\quad D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ g(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)\right)\begin{pmatrix}E_n & O\\ O & g'(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_n\\ E_n\end{pmatrix}\\&=D_1F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ g(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)+D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ g(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)g'(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

とくに $g=f$ とすれば，h は恒等的に $\boldsymbol{0}$ である写像だから，任意の $\boldsymbol{x}\in U$ に対して $h'(\boldsymbol{x})=O$ である．故に上式から $D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)f'(\boldsymbol{x})=-D_1F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$ が得られ，U の各点で $D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$ は正則行列であったので，$f'(\boldsymbol{x})=-D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)^{-1}D_1F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$ が成り立つ． □

注意 24.8 (24.7) の条件の下で，U'，V' を，それぞれ $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$ を含む $\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{R}^m$ の開集合とし，$g:U'\to V'$ を C^r-級写像で，$g(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{q}$ かつ，すべての $\boldsymbol{x}\in U'$ に対して $F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ g(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)=\boldsymbol{0}$ を満たすものとする．(24.7) の証明における写像 $G:X\times Y\to\boldsymbol{R}^{n+m}$ を考えると，$\boldsymbol{x}\in U\cap U'$ ならば $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{0}\end{smallmatrix}\right)\in U\times\{\boldsymbol{0}\}\subset B(\boldsymbol{p};r_2)\times B(\boldsymbol{0};r_2)\subset W$ だから $G\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ g(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{0}\end{smallmatrix}\right)=G\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$ の各辺を G^{-1} で写すことによって，$\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ g(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)=G\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{0}\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$ を得る．従って，$\boldsymbol{x}\in U\cap U'$ ならば $g(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})$ となるため，(24.7) の条件を満たす写像が 2 つあれば，それらの定義域の共通部分に属する各ベクトルを同じベクトルに写す．

定理 24.9 X を $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の開集合とし，$F:X\to\boldsymbol{R}^m$ は C^1-級写像で，$Z=\{\boldsymbol{x}\in X|\,F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}$ の各点において $F'(\boldsymbol{x})$ の階数は m に等しいと仮定する．C^1-級関数 $f:X\to\boldsymbol{R}$ の定義域を Z に制限した関数 $f|_Z:Z\to\boldsymbol{R}$ が $\boldsymbol{p}\in Z$ において極値をとるならば，$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m\in\boldsymbol{R}$ で $f'(\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m\end{pmatrix}F'(\boldsymbol{p})$ を満たすものが存在する．

証明 $\boldsymbol{x}\in X$ に対し $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$ $(i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,n)$ を (i,j) 成分とする $m\times n$ 行列を $D_1F(\boldsymbol{x})$，$\frac{\partial F_i}{\partial x_{n+j}}(\boldsymbol{x})$ $(i,j=1,2,\dots,m)$ を (i,j) 成分とする m 次正方行列行列を $D_2F(\boldsymbol{x})$ で表すと，$F'(\boldsymbol{x})=(D_1F(\boldsymbol{x})\,D_2F(\boldsymbol{x}))$ である．$F'(\boldsymbol{p})$ の階数は m だから $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の座標の座標の順序を入れ替えることにより，$D_2F(\boldsymbol{p})$ は正則であると仮定する．$\boldsymbol{p}=\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{p}_2\end{smallmatrix}\right)$ $(\boldsymbol{p}_1\in\boldsymbol{R}^n,\ \boldsymbol{p}_2\in\boldsymbol{R}^m)$ とおくと (24.5) により，$r>0$ で $B(\boldsymbol{p}_1;r)\times B(\boldsymbol{p}_2;r)\subset X$ となるものがある．

そこで, F の定義域を $B(\boldsymbol{p}_1\,;r)\times B(\boldsymbol{p}_2\,;r)$ に制限した写像に対して (24.7) を用いると, $\boldsymbol{p}_1$ を含み, $B(\boldsymbol{p}_1\,;r)$ に含まれる開集合 U, $\boldsymbol{p}_2$ を含み, $B(\boldsymbol{p}_2\,;r)$ に含まれる開集合 V と C^1-級写像 $g:U\to V$ で, $g(\boldsymbol{p}_1)=\boldsymbol{p}_2$ であり, 各 $\boldsymbol{x}\in U$ に対して $F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ g(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)=\boldsymbol{0}$ を満たすものがある. そこで, 関数 $\varphi:U\to\boldsymbol{R}$ を $\varphi(\boldsymbol{x})=f\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ g(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$ で定めると, φ は $\boldsymbol{p}_1$ において極値をとるため, (23.2) から $\varphi'(\boldsymbol{p}_1)=O$ である. $\boldsymbol{x}\in X$ に対して

$$D_1f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\end{pmatrix},\quad D_2f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f}{\partial x_{n+2}}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{n+m}}(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}$$

とおくと, (24.7) の証明から $\boldsymbol{x}_1\in U$ に対し, $\varphi'(\boldsymbol{x}_1)=D_1f\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ g(\boldsymbol{x}_1)\end{smallmatrix}\right)+D_2f\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ g(\boldsymbol{x}_1)\end{smallmatrix}\right)g'(\boldsymbol{x}_1)$ である. さらに, (24.7) により $g'(\boldsymbol{x}_1)=-D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ g(\boldsymbol{x}_1)\end{smallmatrix}\right)^{-1}D_1F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ f(\boldsymbol{x}_1)\end{smallmatrix}\right)$ が成り立つため,

$$\varphi'(\boldsymbol{x}_1)=D_1f\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ g(\boldsymbol{x}_1)\end{smallmatrix}\right)-D_2f\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ g(\boldsymbol{x}_1)\end{smallmatrix}\right)D_2F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ g(\boldsymbol{x}_1)\end{smallmatrix}\right)^{-1}D_1F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ f(\boldsymbol{x}_1)\end{smallmatrix}\right)$$

が得られる. $\varphi'(\boldsymbol{p}_1)=O$, $g(\boldsymbol{p}_1)=\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}=\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{p}_2\end{smallmatrix}\right)$ だから上式より, $D_1f(\boldsymbol{p})=D_2f(\boldsymbol{p})D_2F(\boldsymbol{p})^{-1}D_1F(\boldsymbol{p})$ を得る. そこで $D_2f(\boldsymbol{p})D_2F(\boldsymbol{p})^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m\end{pmatrix}$ とおくと,

$$D_1f(\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m\end{pmatrix}D_1F(\boldsymbol{p}),\qquad D_2f(\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m\end{pmatrix}D_2F(\boldsymbol{p})$$

である. ここで $f'(\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}D_1f(\boldsymbol{p}) & D_2f(\boldsymbol{p})\end{pmatrix}$, $F'(\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}D_1F(\boldsymbol{p}) & D_2F(\boldsymbol{p})\end{pmatrix}$ に注意すれば, 上式から $f'(\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m\end{pmatrix}F'(\boldsymbol{p})$ を得る. □

例 24.10 上の定理において $m=n=1$ の場合, $f'(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x})\ \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x})\right)$, $F'(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{x})\ \frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x})\right)$ より, $f|_Z$ が $\boldsymbol{p}\in Z$ で極値をとるならば, $\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p})=\lambda\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p})$ かつ $\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p})=\lambda\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})$ を満たす $\lambda\in\boldsymbol{R}$ が存在する.

25 微分方程式

定義 25.1 X, Y を それぞれ $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ の部分集合とし, X から Y への写像 f と写像の列 $f_0, f_1, \dots, f_i, \dots$ が与えられているとする.

(1) 各 $\boldsymbol{x}\in X$ に対し $\lim\limits_{i\to\infty}f_i(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})$ が成り立つとき, 写像の列 $f_0, f_1, \dots, f_i, \dots$ は f に各点収束するという.

(2) 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $N\geqq 0$ で「$i\geqq N$ ならばすべての $\boldsymbol{x}\in X$ に対して $\|f_i(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})\|<\varepsilon$」をみたすものが存在するとき, 写像の列 $f_0, f_1, \dots, f_i, \dots$ は f に一様収束するという.

定理 25.2 $f_i:X\to Y$ $(i=0,1,\dots)$ を連続写像とする. $f_0, f_1, \dots, f_i, \dots$ が写像 f に一様収束すれば, f は連続である.

証明 $\boldsymbol{p}\in X$, $\varepsilon>0$ とすると, 仮定から $N\geqq 0$ で, 「$i\geqq N$ ならばすべての $\boldsymbol{x}\in X$ に対して $\|f_i(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})\|<\frac{\varepsilon}{3}$」を満たすものがとれる. さらに f_N の連続性から $\delta>0$ で「$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|<\delta$ かつ $\boldsymbol{x}\in X$ ならば $\|f_N(\boldsymbol{x})-f_N(\boldsymbol{p})\|<\frac{\varepsilon}{3}$」を満たすものがとれる. 従って $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|<\delta$ かつ $\boldsymbol{x}\in X$ ならば $\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})\|=\|(f(\boldsymbol{x})-f_N(\boldsymbol{x}))+(f_N(\boldsymbol{x})-f_N(\boldsymbol{p}))+(f_N(\boldsymbol{p})-f(\boldsymbol{p}))\|\leqq\|f(\boldsymbol{x})-f_N(\boldsymbol{x})\|+\|f_N(\boldsymbol{x})-f_N(\boldsymbol{p})\|+\|f_N(\boldsymbol{p})-f(\boldsymbol{p})\|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$ となるため f は $\boldsymbol{p}$ において連続である. □

定理 25.3 f_i $(i=0,1,\dots)$ を閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数とする. $f_0, f_1, \dots, f_i, \dots$ が関数 f に一様収束すれば, $\displaystyle\lim_{i\to\infty}\int_a^b f_i(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$ が成り立つ.

証明 $\varepsilon>0$ を任意にとると, 仮定から $N\geqq 0$ で, 「$i\geqq N$ ならばすべての $x\in[a,b]$ に対して $|f_i(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|<\frac{\varepsilon}{b-a}$」を満たすものがとれる. $i\geqq N$ ならば $\left|\int_a^b f_i(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\int_a^b(f_i(x)-f(x))dx\right|\leqq\int_a^b|f_i(x)-f(x)|dx\leqq\int_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}dx=\varepsilon$ が成り立つため $\lim\limits_{i\to\infty}\int_a^b f_i(x)dx=\int_a^b f(x)dx$ である. □

$\boldsymbol{\varphi}:[a,b]\to\boldsymbol{R}^n$ を写像とする．$t\in[a,b]$ に対し $\boldsymbol{\varphi}(t)$ の第 j 成分を $\varphi_j(t)$ で表し，t を $\varphi_j(t)$ に対応させる関数を φ_j で表す．各 φ_j $(j=1,2,\dots,n)$ が積分可能なとき，$\int_a^b\varphi_j(t)dt$ を第 j 成分とする $\boldsymbol{R}^n$ のベクトルを $\int_a^b\boldsymbol{\varphi}(t)dt$ で表すことにする．

区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta=\{a_i\}_{i=0,1,\dots,k}$ と Δ の代表点 $\xi=\{\xi_i\}_{i=1,2,\dots,k}$ に対し $S(\boldsymbol{\varphi},\Delta,\xi)=\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})\boldsymbol{\varphi}(\xi_i)$ とおくと，これは分割 Δ, 代表点 ξ に関する φ_j のリーマン和 $S(\varphi_j,\Delta,\xi)$ を第 j 成分とする $\boldsymbol{R}^n$ のベクトルである．従って (17.7) により $i=1,2,\dots,n$ に対し $\left\|S(\boldsymbol{\varphi},\Delta,\xi)-\int_a^b\boldsymbol{\varphi}(t)dt\right\|\leqq\sum\limits_{j=1}^{n}\left|S(\varphi_j,\Delta,\xi)-\int_a^b\varphi_j(t)dt\right|$ が成り立つため，リーマン積分の定義から次の結果が得られる．

命題 25.4 各 φ_j $(j=1,2,\dots,n)$ が積分可能であるとする．任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ で，「$|\Delta|<\delta$ である $[a,b]$ の任意の分割 Δ と Δ の任意の代表点 ξ に対して $\left\|S(\boldsymbol{\varphi},\Delta,\xi)-\int_a^b\boldsymbol{\varphi}(t)dt\right\|<\varepsilon$」を満たすものがある．

注意 25.5 写像 $\boldsymbol{\varphi}:[a,b]\to\boldsymbol{R}^n$ に対し，次の条件 $(*)$ を満たすような $\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{r}$ が存在するとき，各 φ_j $(j=1,2,\dots,n)$ は積分可能である．

$(*)$ 任意の $\varepsilon>0$ に対し，$\delta>0$ で「$|\Delta|<\delta$ である $[a,b]$ の任意の分割 Δ と Δ の任意の代表点 ξ に対して $\|S(\boldsymbol{\varphi},\Delta,\xi)-\boldsymbol{r}\|<\varepsilon$」を満たすものがある．

実際 $\boldsymbol{r}$ の第 j 成分を r_j とすれば，(17.7) により $|S(\varphi_j,\Delta,\xi)-r_j|\leqq\|S(\boldsymbol{\varphi},\Delta,\xi)-\boldsymbol{r}\|$ が成り立つため，φ_j は積分可能で，$\int_a^b\varphi_j(t)dt=r_j$ である．

命題 25.6 連続写像 $\boldsymbol{\varphi}:[a,b]\to\boldsymbol{R}^n$ に対し，不等式 $\left\|\int_a^b\boldsymbol{\varphi}(t)dt\right\|\leqq\int_a^b\|\boldsymbol{\varphi}(t)\|dt$ が成り立つ．

証明 $t\in[a,b]$ を $\|\boldsymbol{\varphi}(t)\|$ に対応させる関数を $\|\boldsymbol{\varphi}\|$ で表す．任意の $\varepsilon>0$ に対し，$\delta>0$ で，「$|\Delta|<\delta$ である $[a,b]$ の分割 Δ と Δ の任意の代表点 ξ に対して $\left\|S(\boldsymbol{\varphi},\Delta,\xi)-\int_a^b\boldsymbol{\varphi}(t)dt\right\|<\frac{\varepsilon}{2}$, $\left|S(\|\boldsymbol{\varphi}\|,\Delta,\xi)-\int_a^b\|\boldsymbol{\varphi}(t)\|dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}$」を満たすものがある．一方，三角不等式から $\|S(\boldsymbol{\varphi},\Delta,\xi)\|\leqq\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})\|\boldsymbol{\varphi}(\xi_i)\|=S(\|\boldsymbol{\varphi}\|,\Delta,\xi)$ が成り立つ．従って $|\Delta|<\delta$ である $[a,b]$ の分割 Δ と Δ の代表点 ξ に対して

$$\left\|\int_a^b\boldsymbol{\varphi}(t)dt\right\|\leqq\left\|\int_a^b\boldsymbol{\varphi}(t)dt-S(\boldsymbol{\varphi},\Delta,\xi)\right\|+\|S(\boldsymbol{\varphi},\Delta,\xi)\|<\frac{\varepsilon}{2}+S(\|\boldsymbol{\varphi}\|,\Delta,\xi)<\int_a^b\|\boldsymbol{\varphi}(t)\|dt+\varepsilon$$

が成り立つ．ε は任意の正の実数だから $\left\|\int_a^b\boldsymbol{\varphi}(t)dt\right\|\leqq\int_a^b\|\boldsymbol{\varphi}(t)\|dt$ が得られる． □

定義 25.7 I を $\boldsymbol{R}$ の部分集合，X を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合とし，(a,b) を I に含まれる開区間とする．写像 $\boldsymbol{f}:I\times X\to\boldsymbol{R}^n$ に対し，微分可能な写像 $\boldsymbol{\varphi}:(a,b)\to X$ がすべての $t\in(a,b)$ に対して $\boldsymbol{\varphi}'(t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}(t))$ を満たすとき，$\boldsymbol{\varphi}$ は (a,b) における微分方程式 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ の解であるという．

命題 25.8 I, X をそれぞれ $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合とし，連続写像 $\boldsymbol{f}:I\times X\to\boldsymbol{R}^n$ が与えられているとする．$(a,b),(c,d)\subset I$ に対し，写像 $\boldsymbol{\varphi}:(a,b)\to X$, $\boldsymbol{\psi}:(c,d)\to X$ はそれぞれ，(a,b), (c,d) における微分方程式 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ の解であるとする．$K>0$ で，

「$t\in(a,b)\cap(c,d)$ ならば $\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}(t))-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\psi}(t))\|\leqq K\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\psi}(t)\|$」

を満たすものが存在すると仮定する．$\boldsymbol{\varphi}(u)=\boldsymbol{\psi}(u)$ をみたす $u\in(a,b)\cap(c,d)$ があれば，任意の $t\in(a,b)\cap(c,d)$ に対して $\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\psi}(t)$ が成り立つ．

証明 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{\varphi}(u)=\boldsymbol{\psi}(u)$ とおき，$0<\varepsilon<u-a,b-u,u-c,d-u$ をみたす ε をとる．$t\in(a,b)\cap(c,d)$ を $\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\psi}(t)\|$ に対応させる関数の $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]\cap[c+\varepsilon,d-\varepsilon]$ における最大値を M_ε とする．任意の $i=1,2,\dots$ と任意の $t\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]\cap[c+\varepsilon,d-\varepsilon]$ に対して $\|\boldsymbol{\psi}(t)-\boldsymbol{\varphi}(t)\|\leqq\frac{M_\varepsilon K^i|t-a|^i}{i!}$ が成り立つことを i による帰納法で示す．$\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{p}=\int_u^t\boldsymbol{\varphi}'(t)dt=\int_u^t\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}(t))dt$, $\boldsymbol{\psi}(t)-\boldsymbol{p}=\int_u^t\boldsymbol{\psi}'(t)dt=\int_u^t\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\psi}(t))dt$ より $\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\psi}(t)\|=$

$\left\|\int_u^t(\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\varphi}(x))-\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\psi}(x)))dx\right\| \leqq \left|\int_u^t\|\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\varphi}(x))-\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\psi}(x))\|dx\right| \leqq \left|\int_u^t K\|\boldsymbol{\varphi}(x)-\boldsymbol{\psi}(x)\|dx\right|$
だから $\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\psi}(t)\| \leqq \left|\int_u^t KM_\varepsilon dx\right| = KM_\varepsilon|t-u|$ となり，主張は成立する．$i=j$ のときに主張が成立すると仮定すると，上で示した不等式から $\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\psi}(t)\| \leqq \left|\int_u^t K\frac{M_\varepsilon K^j|t-a|^j}{j!}dx\right| = \frac{M_\varepsilon K^{j+1}|t-a|^{j+1}}{(j+1)!}dx$ となって $i=j+1$ のときも主張は成立する．$\lim\limits_{i\to\infty}\frac{M_\varepsilon K^i|t-a|^i}{i!}=0$ だから $\|\boldsymbol{\psi}(t)-\boldsymbol{\varphi}(t)\| \leqq \frac{M_\varepsilon K^i|t-a|^i}{i!}$ がすべての $i=1,2,\dots$ と $t\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]\cap[c+\varepsilon,d-\varepsilon]$ に対して成り立つことは $\boldsymbol{\psi}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t)$ がすべての $t\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]\cap[c+\varepsilon,d-\varepsilon]$ に対して成り立つことを意味する．$\varepsilon>0$ はいくらでも小さくとれるので，任意の $t\in(a,b)\cap(c,d)$ に対して $\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\psi}(t)$ が成り立つ． □

(18.7) において $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$, $\varepsilon>0$ に対し $\overline{B}(\boldsymbol{p};\varepsilon)$ を $\overline{B}(\boldsymbol{p};\varepsilon)=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\,|\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\leqq\varepsilon\}$ によって定義した．

定理 25.9 $a\in\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$, $r,\rho>0$ とする．連続写像 $\boldsymbol{f}:[a-r,a+r]\times\overline{B}(\boldsymbol{p};\rho)\to\boldsymbol{R}^n$ は Lipschitz の条件と呼ばれる次の条件をみたすと仮定する．

「$t\in[a-r,a+r]$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\overline{B}(\boldsymbol{p};\rho)$ ならば $\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y})\|\leqq K\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$」を満たす $K>0$ が存在する．
$(t,\boldsymbol{x})\in[a-r,a+r]\times\overline{B}(\boldsymbol{p};\rho)$ を $\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\|$ に対応させる関数の最大値を M として，r と $\frac{\rho}{M}$ の小さい方を c とするとき，連続写像 $\boldsymbol{\varphi}:[a-c,a+c]\to\overline{B}(\boldsymbol{p};\rho)$ で，$\boldsymbol{\varphi}(a)=\boldsymbol{p}$ を満たし，任意の $t\in(a-c,a+c)$ において $\boldsymbol{\varphi}$ は微分可能で $\boldsymbol{\varphi}'(t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}(t))$ を満たすものがただ 1 つ存在する．

証明 $[a-c,a+c]$ から $\overline{B}(\boldsymbol{p};\rho)$ への連続写像の列 $\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{\varphi}_1,\dots,\boldsymbol{\varphi}_i,\dots$ を次のように帰納的に定義する．まず，$\boldsymbol{\varphi}_0$ は常に値が $\boldsymbol{p}$ である定値写像とする．$[a-c,a+c]$ から $\overline{B}(\boldsymbol{p};\rho)$ への連続写像 $\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{\varphi}_1,\dots,\boldsymbol{\varphi}_{i-1}$ が定められたとして，$\boldsymbol{\varphi}_i$ を $\boldsymbol{\varphi}_i(t)=\boldsymbol{p}+\int_a^t\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\varphi}_{i-1}(x))dx$ で定義すると，$\boldsymbol{\varphi}_i$ は $[a-c,a+c]$ の各点で連続であり，$t\in(a-c,a+c)$ ならば，微分積分学の基本定理により $\boldsymbol{\varphi}_i'(t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}_{i-1}(t))$ が成り立つ．$t\in[a-c,a+c]$ ならば (25.6) から $\|\boldsymbol{\varphi}_i(t)-\boldsymbol{p}\|=\left\|\int_a^t\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\varphi}_{i-1}(x))dx\right\|\leqq\left|\int_a^t\|\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\varphi}_{i-1}(x))\|dx\right|\leqq\left|\int_a^t Mdx\right|=M|t-a|\leqq cM\leqq\rho$ となるため，$\boldsymbol{\varphi}_i$ も $[a-c,a+c]$ から $\overline{B}(\boldsymbol{p};\rho)$ への連続写像である．

$t\in[a-c,a+c]$ ならば次の不等式 $(*)$ が成り立つことを i による帰納法で示す．

$$\|\boldsymbol{\varphi}_i(t)-\boldsymbol{\varphi}_{i-1}(t)\|\leqq\frac{MK^{i-1}|t-a|^i}{i!}\leqq\frac{MK^{i-1}c^i}{i!}\quad\cdots\quad(*)$$

まず $\|\boldsymbol{\varphi}_1(t)-\boldsymbol{\varphi}_0(t)\|=\left\|\int_a^t\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{p})dx\right\|\leqq\left|\int_a^t\|\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{p})\|dx\right|\leqq\left|\int_a^t Mdx\right|=M|t-a|\leqq Mc$ だから $i=1$ のとき，$(*)$ は成立する．$i=j$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定すれば (25.6) と Lipschitz の条件により $\|\boldsymbol{\varphi}_{j+1}(t)-\boldsymbol{\varphi}_j(t)\|=\left\|\int_a^t(\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\varphi}_j(x))-\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\varphi}_{j-1}(x)))dx\right\|\leqq\left|\int_a^t\|\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\varphi}_j(x))-\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{\varphi}_{j-1}(x))\|dx\right|\leqq\left|\int_a^t K\|\boldsymbol{\varphi}_j(x)-\boldsymbol{\varphi}_{j-1}(x)\|dx\right|\leqq\left|\int_a^t\frac{MK^j|t-a|^i}{j!}dx\right|=\frac{MK^j|t-a|^{j+1}}{(j+1)!}\leqq\frac{MK^jc^{j+1}}{(j+1)!}$ となって $i=j+1$ のときも $(*)$ が成立する．

各 $t\in[a-c,a+c]$ に対して，$j>i$ ならば上で示した不等式により $\|\boldsymbol{\varphi}_j(t)-\boldsymbol{\varphi}_i(t)\|=\left\|\sum\limits_{k=i+1}^{j}(\boldsymbol{\varphi}_k(t)-\boldsymbol{\varphi}_{k-1}(t))\right\|\leqq\sum\limits_{k=i+1}^{j}\|\boldsymbol{\varphi}_k(t)-\boldsymbol{\varphi}_{k-1}(t)\|\leqq\sum\limits_{k=i+1}^{j}\frac{MK^{k-1}c^k}{k!}\leqq\frac{M}{K}\sum\limits_{k=i+1}^{\infty}\frac{(cK)^k}{k!}=\frac{M}{K}\left(e^{cK}-\sum\limits_{k=0}^{i}\frac{(cK)^k}{k!}\right)$ であり，$\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{i}\frac{(cK)^k}{k!}=e^{cK}$ だから $\boldsymbol{\varphi}_0(t),\boldsymbol{\varphi}_1(t),\dots,\boldsymbol{\varphi}_i(t),\dots$ は $\boldsymbol{R}^n$ の Cauchy 列である．故に $\lim\limits_{i\to\infty}\boldsymbol{\varphi}_i(t)$ は収束して，この極限値を $\boldsymbol{\varphi}(t)$ とおく．すべての $i=0,1,\dots$ に対して $\boldsymbol{\varphi}_i(t)\in\overline{B}(\boldsymbol{p};\rho)$ すなわち $\|\boldsymbol{\varphi}_i(t)-\boldsymbol{p}\|\leqq\rho$ だから $\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{p}\|\leqq\rho$ である．そこで $t\in[a-c,a+c]$ を $\boldsymbol{\varphi}(t)$ に対応させる写像 $\boldsymbol{\varphi}:[a-c,a+c]\to\overline{B}(\boldsymbol{p};\rho)$ を考える．$\|\boldsymbol{\varphi}_j(t)-\boldsymbol{\varphi}_i(t)\|\leqq\frac{M}{K}\left(e^{cK}-\sum\limits_{k=0}^{i}\frac{(cK)^k}{k!}\right)$ において $j\to\infty$ とすれば $\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\varphi}_i(t)\|\leqq\frac{M}{K}\left(e^{cK}-\sum\limits_{k=0}^{i}\frac{(cK)^k}{k!}\right)$ を得る．従って任意の $\varepsilon>0$ に対して $N\geqq0$ で「$i\geqq N$ ならば $e^{cK}-\sum\limits_{k=0}^{i}\frac{(cK)^k}{k!}<\frac{\varepsilon K}{M}$」をみたすものがあるため，$i\geqq N$ ならば任意の $t\in[a-c,a+c]$ に対して $\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\varphi}_i(t)\|<\varepsilon$ が成り立つ．故に連続写像の列 $\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{\varphi}_1,\dots,\boldsymbol{\varphi}_i,\dots$ は $\boldsymbol{\varphi}$ に一様収束し，(25.2) により $\boldsymbol{\varphi}$ は連続である．

$i=1,2,\dots$ に対して写像 $\boldsymbol{\xi}_i:[a-c,a+c]\to\boldsymbol{R}^n$ を $\boldsymbol{\xi}_i(t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}_{i-1}(t))$ で定め，写像 $\boldsymbol{\xi}:[a-c,a+c]\to\boldsymbol{R}^n$ を

$\boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ で定める．Lipschitz の条件と上で得た不等式から，任意の $t \in [a-c, a+c]$ に対し $\|\boldsymbol{\xi}_i(t) - \boldsymbol{\xi}(t)\| = \|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}_{i-1}(t)) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))\| \leqq K\|\boldsymbol{\varphi}_{i-1}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\| \leqq M\left(e^{cK} - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(cK)^k}{k!}\right)$ が得られ，写像の列 $\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_i, \dots$ は $\boldsymbol{\xi}$ に一様収束する．すべての i に対して $\boldsymbol{\varphi}_i(t) = \boldsymbol{p} + \int_a^t \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{\varphi}_{i-1}(x))dx = \boldsymbol{p} + \int_a^t \boldsymbol{\xi}_i(x)dx$ が成り立つから (25.3) により $i \to \infty$ として $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{p} + \int_a^t \boldsymbol{\xi}(x)dx = \boldsymbol{p} + \int_a^t \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{\varphi}(x))dx$ を得る．$t \in (a-c, a+c)$ ならば $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{p} + \int_a^t \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{\varphi}(x))dx$ の右辺は t において微分可能だから $\boldsymbol{\varphi}$ は t で微分可能で $\boldsymbol{\varphi}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ が成り立つ．また $t = a$ のとき $\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{p} + \int_a^a \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{\varphi}(x))dx = \boldsymbol{p}$ である．

連続写像 $\boldsymbol{\psi} : [a-c, a+c] \to \overline{B}(\boldsymbol{p}\,; \rho)$ が $(a-c, a+c)$ の各点 t で微分可能で $\boldsymbol{\psi}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\psi}(t))$ かつ $\boldsymbol{\psi}(a) = \boldsymbol{p}$ をみたすと仮定すれば，Lipschitz の条件が満たされるため，(25.8) により，任意の $t \in (a-c, a+c)$ に対して $\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$ である．$\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}$ の連続性により $t = a-c, a+c$ の場合も $\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$ である． □

補題 25.10 X, Y を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合とする．関数 $\delta : X \to \boldsymbol{R}$ を $\delta(\boldsymbol{x}) = \inf\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \,|\, \boldsymbol{y} \in Y\}$ で定義すれば，δ は連続である．また，Y が閉集合ならば $\delta(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ をみたす $\boldsymbol{y} \in Y$ が存在する．とくに $\delta(\boldsymbol{x}) = 0$ であることと $\boldsymbol{x} \in Y$ であることは同値である．

証明 $\boldsymbol{p} \in X$, $\varepsilon > 0$ とすれば $\|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{y}_1\| - \frac{\varepsilon}{2} < \delta(\boldsymbol{p})$ をみたす $\boldsymbol{y}_1 \in Y$ がある．$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ をみたす $\boldsymbol{x} \in X$ に対し $\delta(\boldsymbol{x}) - \delta(\boldsymbol{p}) < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_1\| - \|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{y}_1\| + \frac{\varepsilon}{2} \leqq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ が成り立つ．また $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_2\| - \frac{\varepsilon}{2} < \delta(\boldsymbol{x})$ をみたす $\boldsymbol{y}_1 \in Y$ があるため $\delta(\boldsymbol{p}) - \delta(\boldsymbol{x}) < \|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{y}_2\| - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_2\| + \frac{\varepsilon}{2} \leqq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ が成り立つ．従って $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ かつ $\boldsymbol{x} \in X$ ならば $|\delta(\boldsymbol{x}) - \delta(\boldsymbol{p})| < \varepsilon$ が成り立つため δ は $\boldsymbol{p}$ において連続である．

任意の $n = 1, 2, \dots$ に対し，$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_n\| - \frac{1}{n} < \delta(\boldsymbol{x})$ をみたす $\boldsymbol{y}_n \in Y$ がある．Y が閉集合ならば，$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots$ は有界閉集合 $Y \cap \overline{B}(\boldsymbol{x}\,; \delta(\boldsymbol{x}) + 1)$ の点列だから (18.11) により，$Y \cap \overline{B}(\boldsymbol{x}\,; \delta(\boldsymbol{x}) + 1)$ のある点 $\boldsymbol{q}$ に収束する部分列 $\boldsymbol{y}_{i_1}, \boldsymbol{y}_{i_2}, \dots$ がある．$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_{i_n}\| - \frac{1}{i_n} < \delta(\boldsymbol{x}) \leqq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_{i_n}\|$ において $n \to \infty$ とすれば $\delta(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}\|$ が得られる．□

命題 25.11 $[a-r, a+r] \times \overline{B}(\boldsymbol{p}\,; \rho) \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ とみなし，写像 $\boldsymbol{f} : [a-r, a+r] \times \overline{B}(\boldsymbol{p}\,; \rho) \to \boldsymbol{R}^n$ が $[a-r, a+r] \times \overline{B}(\boldsymbol{p}\,; \rho)$ を含む $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の開集合 X で定義された C^1-級写像 $F : X \to \boldsymbol{R}^n$ の制限として得られる写像ならば $\boldsymbol{f}$ は Lipschitz の条件を満たす．

証明 $\delta : [a-r, a+r] \times \overline{B}(\boldsymbol{p}\,; \rho) \to \boldsymbol{R}$ を $\delta(\boldsymbol{z}) = \inf\{\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{w}\| \,|\, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{R}^{n+1} - X\}$ で定義する．$[a-r, a+r] \times \overline{B}(\boldsymbol{p}\,; \rho)$ は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の有界閉集合だから (18.20) により δ は最小値をとる．$\boldsymbol{q} \in [a-r, a+r] \times \overline{B}(\boldsymbol{p}\,; \rho)$ において δ は最小値 m をとるとすれば，$\boldsymbol{R}^{n+1} - X$ は閉集合だから，もし $m = 0$ ならば (25.10) から $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^n - X$ となるが，これは $[a-r, a+r] \times \overline{B}(\boldsymbol{p}\,; \rho) \subset X$ であることと矛盾する．従って $m > 0$ である．

$[a-r-\frac{m}{3}, a+s+\frac{m}{3}] \times \overline{B}(\boldsymbol{p}\,; \rho+\frac{m}{3}) \subset X$ であることを示す．$(t, \boldsymbol{x}) \in [a-r-\frac{m}{3}, a+r+\frac{m}{3}] \times \overline{B}(\boldsymbol{p}\,; \rho+\frac{m}{3})$ を任意にとる．$(t, \boldsymbol{x}) \in [a-r, a+r] \times \overline{B}(\boldsymbol{p}\,; \rho)$ ならば $(t, \boldsymbol{x}) \in X$ だから $(t, \boldsymbol{x}) \notin [a-r, a+r] \times \overline{B}(\boldsymbol{p}\,; \rho)$ である以下の場合を考える．

(1) $|t-a| > r$ かつ $\boldsymbol{x} \in \overline{B}(\boldsymbol{p}\,; \rho)$ の場合; $t - a < -r$ ならば $s = a-r$, $t - a > r$ ならば $s = a+r$ とおき，$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{x}$ とおくと $(s, \boldsymbol{q}) \in [a-r, a+r] \times \overline{B}(\boldsymbol{p}\,; \rho)$ であり，$\|(s, \boldsymbol{q}) - (t, \boldsymbol{x})\| = |t-s| \leqq \frac{m}{3} < m$ となる．

(2) $t \in [a-r, a+r]$ かつ $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| > \rho$ の場合; $s = t$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} + \frac{\rho}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})$ とおくと $(s, \boldsymbol{q}) \in [a-r, a+r] \times \overline{B}(\boldsymbol{p}\,; \rho)$ かつ $\|(s, \boldsymbol{q}) - (t, \boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| - \rho \leqq \frac{m}{3} < m$ である．

(3) $|t-a| > r$ かつ $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| > \rho$ の場合; $t - a < -r$ ならば $s = a-r$, $t - a > r$ ならば $s = a+r$ とおき，$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} + \frac{\rho}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})$ とおくと $(s, \boldsymbol{q}) \in [a-r, a+r] \times \overline{B}(\boldsymbol{p}\,; \rho)$ であり，$\|(s, \boldsymbol{q}) - (t, \boldsymbol{x})\| \leqq \|(s, \boldsymbol{q}) - (s, \boldsymbol{x})\| + \|(s, \boldsymbol{x}) - (t, \boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{x}\| + |s-t| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| - \rho + |s-t| \leqq \frac{2m}{3} < m$ となる．

いずれの場合にしても，$\|(s, \boldsymbol{q}) - (t, \boldsymbol{x})\| < m$ をみたす $(s, \boldsymbol{q}) \in [a-r, a+r] \times \overline{B}(\boldsymbol{p}\,; \rho)$ がとれるため $(t, \boldsymbol{x}) \in X$ である．実際 $(t, \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}^{n+1} - X$ ならば m の最小性から $\|(s, \boldsymbol{q}) - (t, \boldsymbol{x})\| \geqq m$ となって矛盾が生じる．よって $[a-r-\frac{m}{3}, a+s+\frac{m}{3}] \times \overline{B}(\boldsymbol{p}\,; \rho+\frac{m}{3}) \subset X$ であることが示された．$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} : X \to \boldsymbol{R}$ $(i = 1, 2, \dots, n,\ j = 1, 2, \dots, n+1)$

の連続性から, $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の有界閉集合 $[a-r-\frac{m}{3}, a+s+\frac{m}{3}] \times \overline{B}(\boldsymbol{p}\,;\rho+\frac{m}{3})$ における最大値と最小値が存在する. よって, F の $(a-r-\frac{m}{3}, a+s+\frac{m}{3}) \times B(\boldsymbol{p}\,;\rho+\frac{m}{3})$ への制限に対して (24.3) を用いると, 正の実数 K で, 任意の $(t,\boldsymbol{x}),(s,\boldsymbol{y}) \in (a-r-\frac{m}{3}, a+s+\frac{m}{3}) \times B(\boldsymbol{p}\,;\rho+\frac{m}{3})$ に対して $\|F(t,\boldsymbol{x})-F(s,\boldsymbol{y})\| \leqq K\|(t,\boldsymbol{x})-(s,\boldsymbol{y})\|$ をみたすものがある. とくに $s=t\in[a-r,a+r]$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\overline{B}(\boldsymbol{p}\,;\rho)$ の場合, 不等式 $\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y})\| \leqq K\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ が成り立つ. $\square$

定義 25.12 I を $\boldsymbol{R}$ の部分集合, X を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合とし, (a,b) を I に含まれる開区間とする. 関数 $f: I\times X\to\boldsymbol{R}$ に対し, n 回微分可能な関数 $\varphi:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ がすべての $t\in(a,b)$ に対して

$$\begin{pmatrix}\varphi(t)\\ \varphi'(t)\\ \vdots\\ \varphi^{(n-1)}(t)\end{pmatrix} \in X \text{ かつ } \varphi^n(t) = f\left(t, \begin{pmatrix}\varphi(t)\\ \varphi'(t)\\ \vdots\\ \varphi^{(n-1)}(t)\end{pmatrix}\right)$$

を満たすとき, φ は (a,b) における n 階微分方程式 $\frac{d^nx}{dt^n}=f(t,x,\frac{dx}{dt},\dots,\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}})$ の解であるという.

注意 25.13 関数 $f: I\times X\to\boldsymbol{R}$ と n 回微分可能な関数 $\varphi:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ が与えられたとき, 写像 $\boldsymbol{f}: I\times X\to\boldsymbol{R}^n$ と $\boldsymbol{\varphi}:(a,b)\to\boldsymbol{R}^n$ を

$$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix}x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_n\\ f(t,\boldsymbol{x})\end{pmatrix} \text{ ただし } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{pmatrix}\varphi(t)\\ \varphi'(t)\\ \vdots\\ \varphi^{(n-1)}(t)\end{pmatrix}$$

によって定義すれば φ が微分方程式 $\frac{d^nx}{dt^n}=f(t,x,\frac{dx}{dt},\dots,\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}})$ の解であるためには, $\boldsymbol{\varphi}$ が微分方程式 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ の解であることが必要十分である.

定理 25.14 $a\in\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$, $r,\rho>0$ とし, $\boldsymbol{p}$ の第 j 成分を p_j とする. 連続関数 $f:[a-r,a+r]\times\overline{B}(\boldsymbol{p}\,;\rho)\to\boldsymbol{R}$ は次の Lipschitz の条件をみたすと仮定する.

「$t\in[a-r,a+r]$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\overline{B}(\boldsymbol{p}\,;\rho)$ ならば $|f(t,\boldsymbol{x})-f(t,\boldsymbol{y})| \leqq K\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$」を満たす $K>0$ が存在する.
$(t,\boldsymbol{x})\in[a-r,a+r]\times\overline{B}(\boldsymbol{p}\,;\rho)$ を $|f(t,\boldsymbol{x})|$ に対応させる関数の最大値を M として, r と $\frac{\rho}{\sqrt{(\|\boldsymbol{p}\|+\rho)^2+M^2}}$ の小さい方を c とするとき, 連続関数 $\varphi:[a-c,a+c]\to[p_1-\rho,p_1+\rho]$ で, $(a-c,a+c)$ における n 階微分方程式 $\frac{d^nx}{dt^n}=f(t,x,\frac{dx}{dt},\dots,\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}})$ の解であり $\varphi^{(i)}(a)=p_{i+1}$ $(i=0,1,\dots,n-1)$ を満たすものがただ 1 つ存在する.

証明 写像 $\boldsymbol{f}:[a-r,a+r]\times\overline{B}(\boldsymbol{p}\,;\rho)\to\boldsymbol{R}^n$ を (25.13) のように定義する. $t\in[a-r,a+r]$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\overline{B}(\boldsymbol{p}\,;\rho)$ ならば $\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y})\|^2 = \sum_{i=2}^{n}(x_i-y_i)^2+(f(t,\boldsymbol{x})-f(t,\boldsymbol{y}))^2 \leqq (1+K^2)\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2$ となるため, $\boldsymbol{f}$ は (25.9) における Lipschitz の条件をみたす. また $(t,\boldsymbol{x})\in[a-r,a+r]\times\overline{B}(\boldsymbol{p}\,;\rho)$ に対し $\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\|^2 = \sum_{i=2}^{n}x_i^2+f(t,\boldsymbol{x})^2 \leqq \|\boldsymbol{x}\|^2+M^2 \leqq (\|\boldsymbol{p}\|+\rho)^2+M^2$ だから $(t,\boldsymbol{x})\in[a-r,a+r]\times\overline{B}(\boldsymbol{p}\,;\rho)$ を $\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\|$ に対応させる関数の最大値は $\sqrt{(\|\boldsymbol{p}\|+\rho)^2+M^2}$ を越えない. 従って (25.9) から連続写像 $\boldsymbol{\varphi}:[a-c,a+c]\to\overline{B}(\boldsymbol{p}\,;\rho)$ で, $\boldsymbol{\varphi}(a)=\boldsymbol{p}$ を満たし, 任意の $t\in(a-c,a+c)$ において $\boldsymbol{\varphi}$ は微分可能で $\boldsymbol{\varphi}'(t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\varphi}(t))$ を満たすものがただ 1 つ存在する. $\boldsymbol{\varphi}(t)$ の第 j 成分を $\varphi_j(t)$ として, $t\in[a-c,a+c]$ を $\varphi_j(t)\in[p_j-\rho,p_j+\rho]$ に対応させる関数を $\varphi_j:[a-c,a+c]\to[p_j-\rho,p_j+\rho]$ とすれば, $\varphi_j'(t)=\varphi_{j+1}(t)$ $(j=1,2,\dots,n-1)$, $\varphi_n'(t)=f(t,\boldsymbol{\varphi}(t))$ が成り立つため, $\varphi=\varphi_1$ とすれば φ は $(a-c,a+c)$ における n 階微分方程式 $\frac{d^nx}{dt^n}=f(t,x,\frac{dx}{dt},\dots,\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}})$ の解であり $\boldsymbol{\varphi}^{(i)}(a)=p_{i+1}$ $(i=0,1,\dots,n-1)$ を満たす. φ の一意性は (25.13) と $\boldsymbol{\varphi}$ の一意性から導かれる. $\square$

26 線型微分方程式

実数を成分とする n 次正方行列全体の集合を $M_n(\boldsymbol{R})$ で表し, $M_n(\boldsymbol{R})$ を n^2 次元実ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^{n^2}$ と同一視する.

定理 26.1 $A:[a,b]\to M_n(\boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{\beta}:[a,b]\to\boldsymbol{R}^n$ を連続写像, $c\in(a,b)$, $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$ とする. 連続写像 $\boldsymbol{\varphi}:[a,b]\to\boldsymbol{R}^n$ で $\boldsymbol{\varphi}(c)=\boldsymbol{p}$ かつ, 各 $t\in(a,b)$ において $\boldsymbol{\varphi}$ は微分可能であり $\boldsymbol{\varphi}'(t)=A(t)\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{\beta}(t)$ をみたすものがただ 1 つ存在する.

証明 $f:[a,b]\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ を $f(t,\boldsymbol{x})=A(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\beta}(t)$ で定める. $A(t)$ の (i,j) 成分を $a_{ij}(t)$ とすれば $t\in[a,b]$ を $a_{ij}(t)$ に対応させる関数 $a_{ij}:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ は連続だから, 関数 $\nu:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ を $\nu(t)=\sqrt{\displaystyle\sum_{1\leqq i,j\leqq n}a_{ij}(t)^2}$ で定めれば ν も連続である. 従って (18.20) から ν の最大値は存在し, それを μ とする. 任意の $t\in[a,b]$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し, (17.13) から $\|f(t,\boldsymbol{x})-f(t,\boldsymbol{y})\|=\|A(t)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\|\leqq\nu(t)\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\leqq\mu\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ が得られ f は Lipschitz の条件をみたす.

$t\in[a,b]$ を $\|\boldsymbol{\beta}(t)\|$ に対応させる関数の最大値を λ とすれば $\rho>0$, $\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{x}\in\overline{B}(\boldsymbol{q}\,;\rho)$ に対し, $\|\boldsymbol{x}\|\leqq\rho+\|\boldsymbol{q}\|$ だから $\|f(t,\boldsymbol{x})\|=\|A(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\beta}(t)\|\leqq\|A(t)\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{\beta}(t)\|\leqq\mu\|\boldsymbol{x}\|+\lambda\leqq\mu(\rho+\|\boldsymbol{q}\|)+\lambda$ である. このとき $(t,\boldsymbol{x})\in[a,b]\times\overline{B}(\boldsymbol{q}\,;\rho)$ を $\|f(t,\boldsymbol{x})\|$ に対応させる関数の最大値を $M_{\boldsymbol{q},\rho}$ とすれば $M_{\boldsymbol{q},\rho}\leqq\mu(\rho+\|\boldsymbol{q}\|)+\lambda$ である. 従って $\rho\geqq\|\boldsymbol{q}\|+\frac{\lambda}{\mu}$ ならば $\frac{\rho}{M_{\boldsymbol{q},\rho}}\geqq\frac{\rho}{\mu(\rho+\|\boldsymbol{q}\|)+\lambda}\geqq\frac{1}{2\mu}$ である.

$[a,b]$ に含まれる単調増加数列 $t_0<t_1<\cdots<t_N$ $(N\geqq 4)$ を次のようにとる.

(1) $t_0=a$, $t_N=b$ であり, $t_k=c$ となる $2\leqq k\leqq N-2$ がある.
(2) $i=1,2,\dots,N$ に対し $t_i-t_{i-1}<\frac{1}{4\mu}$ である.

このとき, 任意の $i=2,\dots,N-2$ と $\boldsymbol{p}_i\in\boldsymbol{R}^n$ に対し, $\rho_i=\|\boldsymbol{p}_i\|+\frac{\lambda}{\mu}$ とおけば, $\frac{\rho}{M_{\boldsymbol{q}_i,\rho_i}}\geqq\frac{1}{2\mu}>t_i-t_{i-2},t_{i+2}-t_i$ だから, (25.9) により, 連続写像 $\boldsymbol{\varphi}_i:[t_{i-2},t_{i+2}]\to\boldsymbol{R}^n$ で $\boldsymbol{\varphi}_i(t_i)=\boldsymbol{p}_i$ かつ, 微分方程式 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=f(t,\boldsymbol{x})$ の (t_{i-2},t_{i+2}) における解になるものがただ 1 つ存在する. とくに $i=k$ の場合, $\boldsymbol{\varphi}_k(t_k)=\boldsymbol{p}$ をみたす $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=f(t,\boldsymbol{x})$ の (t_{k-2},t_{k+2}) における解 $\boldsymbol{\varphi}_k$ を考える.

帰納的に $i=k,k-1,\dots,k-j$ $(0\leqq j\leqq k-3)$ に対し, 連続写像 $\boldsymbol{\varphi}_i:[t_{i-2},t_{i+2}]\to\boldsymbol{R}^n$ で $\boldsymbol{\varphi}_i(t_i)=\boldsymbol{\varphi}_{i+1}(t_i)$ $(k-j\leqq i\leqq k-1)$ かつ, 微分方程式 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=f(t,\boldsymbol{x})$ の (t_{i-2},t_{i+2}) における解になるものが定まったとする. 連続写像 $\boldsymbol{\varphi}_{k-j-1}:[t_{k-j-3},t_{k-j-1}]\to\boldsymbol{R}^n$ で, 微分方程式 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=f(t,\boldsymbol{x})$ の (t_{i-2},t_{i+2}) における解になり, $\boldsymbol{\varphi}_{k-j-1}(t_{k-j-1})=\boldsymbol{\varphi}_{k-j}(t_{k-j-1})$ をみたすものがあるため, この手順を繰り返して, 連続写像の列 $\boldsymbol{\varphi}_k,\boldsymbol{\varphi}_{k-1},\dots,\boldsymbol{\varphi}_2$ を得る. 各 $i=3,4,\dots,k$ に対して $t_{i-1}\in(t_{i-3},t_{i+1})\cap(t_{i-2},t_{i+2})$ において $\boldsymbol{\varphi}_{i-1}$ と $\boldsymbol{\varphi}_i$ の値は一致するため, (25.8) により, すべての $t\in(t_{i-3},t_{i+1})\cap(t_{i-2},t_{i+2})=(t_{i-2},t_{i+1})$ 対して $\boldsymbol{\varphi}_{i-1}(t)=\boldsymbol{\varphi}_i(t)$ である. さらに $\boldsymbol{\varphi}_{i-1}$ と $\boldsymbol{\varphi}_i$ の連続性から $t=t_{i-2},t_{i+1}$ の場合も $\boldsymbol{\varphi}_{i-1}(t)=\boldsymbol{\varphi}_i(t)$ である.

同様に, 帰納的に $i=k,k+1,\dots,k+j$ $(0\leqq j\leqq N-k-3)$ に対し, 連続写像 $\boldsymbol{\varphi}_i:[t_{i-2},t_{i+2}]\to\boldsymbol{R}^n$ で $\boldsymbol{\varphi}_i(t_i)=\boldsymbol{\varphi}_{i-1}(t_i)$ $(k+1\leqq i\leqq k+j)$ かつ, 微分方程式 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=f(t,\boldsymbol{x})$ の (t_{i-2},t_{i+2}) における解になるものが定まったとする. 連続写像 $\boldsymbol{\varphi}_{k+j+1}:[t_{k+j-1},t_{k+j+3}]\to\boldsymbol{R}^n$ で, 微分方程式 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=f(t,\boldsymbol{x})$ の (t_{i-2},t_{i+2}) における解になり, $\boldsymbol{\varphi}_{k+j+1}(t_{k+j+1})=\boldsymbol{\varphi}_{k+j}(t_{k+j+1})$ をみたすものがあるため, この手順を繰り返して, 連続写像の列 $\boldsymbol{\varphi}_k,\boldsymbol{\varphi}_{k+1},\dots,\boldsymbol{\varphi}_{N-2}$ を得る. 各 $i=k+1,k+2,\dots,N-2$ に対して $t_{i+1}\in(t_{i-2},t_{i+2})\cap(t_{i-1},t_{i+3})$ において $\boldsymbol{\varphi}_i$ と $\boldsymbol{\varphi}_{i+1}$ の値は一致するため, (25.8) により, すべての $t_{\in}(t_{i-2},t_{i+2})\cap(t_{i-1},t_{i+3})=(t_{i-1},t_{i+2})$ 対して $\boldsymbol{\varphi}_{i+1}(t)=\boldsymbol{\varphi}_i(t)$ である. さらに $\boldsymbol{\varphi}_i$ と $\boldsymbol{\varphi}_{i+1}$ の連続性から $t=t_{i-1},t_{i+2}$ の場合も $\boldsymbol{\varphi}_{i+1}(t)=\boldsymbol{\varphi}_i(t)$ である.

以上から $\boldsymbol{\varphi}:[a,b]\to\boldsymbol{R}^n$ を $t\in[t_{i-2},t_{i+2}]$ に対して $\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\varphi}_i(t)$ によって定めることができる. このとき $\boldsymbol{\varphi}$ は微分方程式 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=f(t,\boldsymbol{x})$ の (a,b) における解であり, $\boldsymbol{\varphi}(c)=\boldsymbol{\varphi}_k(t_k)=\boldsymbol{p}$ をみたす. (25.8) から $\boldsymbol{\varphi}$ の一意性が得ら

れる. $\square$

定理 26.2　$A:[a,b]\to M_n(\boldsymbol{R})$ を連続写像, $c\in(a,b)$, $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n$ を $\boldsymbol{R}^n$ の基底とする. 微分方程式 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x}$ の (a,b) における解で c を $\boldsymbol{v}_j$ に写すものを $\boldsymbol{\varphi}_j$ とすれば, すべての $t\in(a,b)$ に対して $\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_2(t),\dots,\boldsymbol{\varphi}_n(t)$ は 1 次独立であり, $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x}$ の (a,b) における解全体からなる集合は $\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_2,\dots,\boldsymbol{\varphi}_n$ を基底とする $\boldsymbol{R}$ 上の n 次元ベクトル空間である.

証明　まず, $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi}$ が $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x}$ の (a,b) における解ならば, $\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\psi}$, $r\boldsymbol{\varphi}$ $(r\in\boldsymbol{R})$ も $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x}$ の (a,b) における解であることに注意すれば, $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x}$ の (a,b) における解全体からなる集合は $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間であることがわかる.

$d\in(a,b)$ で $\boldsymbol{\varphi}_1(d),\boldsymbol{\varphi}_2(d),\dots,\boldsymbol{\varphi}_n(d)$ が 1 次従属になるものが存在すると仮定する. このとき, $\boldsymbol{\varphi}_i(d)=\sum\limits_{j\neq i}r_j\boldsymbol{\varphi}_j(d)$ をみたす i と実数 $r_1,\dots,r_{i-1},r_{i+1},\dots,r_n$ が存在するため, 写像 $\boldsymbol{\varphi}_i$ と $\sum\limits_{j\neq i}r_j\boldsymbol{\varphi}_j$ は d において同じ値をとる. 一方 $\boldsymbol{\varphi}_i$ と $\sum\limits_{j\neq i}r_j\boldsymbol{\varphi}_j$ はともに $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x}$ の (a,b) における解だから (25.8) によって, これらの写像は一致するが, このことは $\boldsymbol{\varphi}_1(c),\boldsymbol{\varphi}_2(c),\dots,\boldsymbol{\varphi}_n(c)$ が 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n$ であることに矛盾する. 故に, すべての $t\in(a,b)$ に対して $\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_2(t),\dots,\boldsymbol{\varphi}_n(t)$ は 1 次独立である.

$\boldsymbol{\varphi}$ を $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x}$ の (a,b) における任意の解として $\boldsymbol{\varphi}(c)=\sum\limits_{j=1}a_j\boldsymbol{v}_j=\sum\limits_{j=1}a_j\boldsymbol{\varphi}_j(c)$ とおくと, $\boldsymbol{\varphi}$ と $\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\boldsymbol{\varphi}_j$ はともに $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x}$ の (a,b) における解で, c における値は一致するため, (25.8) によって, これらの写像は一致する. 従って, $\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_2,\dots,\boldsymbol{\varphi}_n$ は $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x}$ の (a,b) における解全体からなるベクトル空間を生成する. また, $\boldsymbol{\varphi}_1(c),\boldsymbol{\varphi}_2(c),\dots,\boldsymbol{\varphi}_n(c)$ が 1 次独立であることから $\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_2,\dots,\boldsymbol{\varphi}_n$ は 1 次独立である. $\square$

系 26.3　微分方程式 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x}$ の (a,b) における解全体からなるベクトル空間を S とする. $\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_2,\dots,\boldsymbol{\varphi}_n$ を S の基底とし, $t\in(a,b)$ に対して, $\boldsymbol{\varphi}_j(t)$ を第 j 列とする n 次正方行列を $X(t)$ とすれば $X(t)$ は正則行列である. このとき, $t\in(a,b)$ を $X(t)\in M_n(\boldsymbol{R})$ に対応させる写像 X は $X'(t)=A(t)X(t)$ をみたす. また, $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し, $t\in(a,b)$ を $X(t)\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^n$ に対応させる写像を $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{v}}$ とすれば $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{v}}\in S$ であり, $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^n$ を $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{v}}\in S$ に対応させる写像を $\Phi:\boldsymbol{R}^n\to S$ とすれば, Φ はベクトル空間の同型写像である.

証明　(26.2) により, 任意の $t\in(a,b)$ に対して, $X(t)$ の列ベクトルは 1 次独立だから $X(t)$ は正則行列である. $X'(t)$ の第 j 列は $\boldsymbol{\varphi}'_j(t)=A(t)\boldsymbol{\varphi}_j(t)$ だから $X'(t)=A(t)X(t)$ が得られる.

また $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^n$ の第 j 成分を v_j とすれば $X(t)\boldsymbol{v}=\sum\limits_{j=1}^{n}v_j\boldsymbol{\varphi}_j(t)$ であるため $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{v}}=\sum\limits_{j=1}^{n}v_j\boldsymbol{\varphi}_j\in S$ である. $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{R}^n$, $r\in\boldsymbol{R}$ に対して $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{w}}$, $\boldsymbol{\varphi}_{r\boldsymbol{v}}=r\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{v}}$ が成り立つことは容易に確かめられ, Φ が線型写像であることがわかる. $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{e}_j}=\boldsymbol{\varphi}_j$ だから Φ は基本ベクトルからなる $\boldsymbol{R}^n$ の基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\dots,\boldsymbol{e}_n$ を S の基底 $\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_2,\dots,\boldsymbol{\varphi}_n$ に写す. 従って Φ は同型写像である. $\square$

命題 26.4　I を $\boldsymbol{R}$ の部分集合, $A:I\to M_n(\boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{\beta}:I\to\boldsymbol{R}^n$ を写像とする. (a,b) を I に含まれる開区間とし, $\boldsymbol{\psi}:(a,b)\to\boldsymbol{R}^n$ を微分方程式 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\beta}(t)$ の (a,b) における解の 1 つとする. 微分方程式 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\beta}(t)$, $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x}$ の (a,b) における解全体からなる集合をそれぞれ S, S_h とおけば, $S=\{\boldsymbol{\varphi}\,|\,\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\psi}\in S_h\}$ が成り立つ.

証明　$\boldsymbol{\varphi}\in S$ ならば任意の $t\in(a,b)$ に対して $\boldsymbol{\varphi}'(t)=A(t)\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{\beta}(t)$ であり, 仮定から $\boldsymbol{\psi}'(t)=A(t)\boldsymbol{\psi}(t)+\boldsymbol{\beta}(t)$ も成り立つため, 辺々引くことによって $\boldsymbol{\varphi}'(t)-\boldsymbol{\psi}'(t)=A(t)(\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\psi}(t))$ が任意の $t\in(a,b)$ に対して成り立つことがわかる. 従って $\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\psi}\in S_h$ である. 逆に, 写像 $\boldsymbol{\varphi}:(a,b)\to\boldsymbol{R}^n$ が $\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\psi}\in S_h$ をみたすと仮定して $\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\psi}=\zeta$ とおくと, 任意の $t\in(a,b)$ に対して $\boldsymbol{\varphi}'(t)=\boldsymbol{\psi}'(t)+\zeta'(t)=A(t)\boldsymbol{\psi}(t)+\boldsymbol{\beta}(t)+A(t)\zeta(t)=A(t)(\boldsymbol{\psi}(t)+\zeta(t))+\boldsymbol{\beta}(t)=A(t)\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{\beta}(t)$ となるため $\boldsymbol{\varphi}\in S$ である. $\square$

実数を成分とする $n\times n$ 行列全体の集合を $M(m,n;\boldsymbol{R})$ で表し, $M(m,n;\boldsymbol{R})$ を mn 次元実ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^{mn}$ と

同一視する.

補題 26.5　I を $\boldsymbol{R}$ の部分集合とし, 写像 $X: I \to M(m,n;\boldsymbol{R})$, $Y: I \to M(n,l;\boldsymbol{R})$ はともに $p \in I$ において微分可能であるとする. 写像 $Z: I \to M(m,l;\boldsymbol{R})$ を $Z(t) = X(t)Y(t)$ で定めれば, Z も $p \in I$ において微分可能であり, $Z'(p) = X'(p)Y(p) + X(p)Y'(p)$ が成り立つ.

証明　$\lim\limits_{t\to p} \frac{1}{t-p}(Z(t) - Z(p)) = \lim\limits_{t\to p} \frac{1}{t-p}(X(t)Y(t) - X(p)Y(p)) = \lim\limits_{t\to p} \frac{1}{t-p}(X(t)Y(t) - X(p)Y(t) + X(p)Y(t) - X(p)Y(p)) = \lim\limits_{t\to p} \frac{1}{t-p}(X(t) - X(p))Y(t) + \lim\limits_{t\to p} X(p)\frac{1}{t-p}(Y(t) - Y(p)) = X'(p)Y(p) + X(p)Y'(p)$. □

命題 26.6　I を $\boldsymbol{R}$ の部分集合, $A: I \to M_n(\boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{\beta}: I \to \boldsymbol{R}^n$ を連続写像とする. (a,b) を I に含まれる開区間とし, $X: (a,b) \to M_n(\boldsymbol{R})$ を (26.3) で定義した写像とする. $c \in (a,b)$ として, 写像 $\boldsymbol{v}: (a,b) \to \boldsymbol{R}^n$ を $\boldsymbol{v}(t) = \int_c^t X(s)^{-1}\boldsymbol{\beta}(s)ds$ で定め, 写像 $\boldsymbol{\psi}: (a,b) \to \boldsymbol{R}^n$ を $\boldsymbol{\psi}(t) = X(t)\boldsymbol{v}(t)$ によって定めれば, $\boldsymbol{\psi}$ は微分方程式 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}(t)$ の (a,b) における解である.

証明　(26.3) により $X'(t) = A(t)X(t)$ が成り立つことに注意すると, (26.5) により $\boldsymbol{\psi}'(t) = X'(t)\boldsymbol{v}(t) + X(t)\boldsymbol{v}'(t) = A(t)X(t)\boldsymbol{v}(t) + X(t)X(t)^{-1}\boldsymbol{\beta}(t) = A(t)\boldsymbol{\psi}(t) + \boldsymbol{\beta}(t)$ となるため, $\boldsymbol{\psi}$ は微分方程式 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}(t)$ の (a,b) における解である. □

27　高次元球体の体積

$\boldsymbol{R}^2$ の極座標を与える写像 $f^{(2)}: [0,\infty) \times [0,2\pi] \to \boldsymbol{R}^2$ は $f_1^{(2)}\binom{r}{\varphi} = r\cos\varphi$, $f_2^{(2)}\binom{r}{\varphi} = r\sin\varphi$ とおくと $f^{(2)}\binom{r}{\varphi} = \begin{pmatrix} f_1^{(2)}\binom{r}{\varphi} \\ f_2^{(2)}\binom{r}{\varphi} \end{pmatrix}$ で与えられる. $\boldsymbol{R}^3$ の極座標を与える写像 $f^{(3)}: [0,\infty) \times [0,2\pi] \times [0,\pi] \to \boldsymbol{R}^3$ の第 i 成分が $f_i^{(3)}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta_1 \end{pmatrix}$ で与えられるとする. $\boldsymbol{R}^3$ の点 $f^{(3)}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta_1 \end{pmatrix}$ を P として P から xy-平面に下した垂線の足を H とする. 原点 O から P までの距離を r, ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と z 軸の正の方向となす角を θ_1 とすれば線分 OH の長さは $r\sin\theta_1$ であり, P の第 3 成分は $f_3^{(3)}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta_1 \end{pmatrix} = r\cos\theta_1$ である. H を $\boldsymbol{R}^2$ の点とみなせば, H の第 1 成分, 第 2 成分はそれぞれ $f_1^{(2)}\binom{r\sin\theta_1}{\varphi} = r\sin\theta_1\cos\varphi$, $f_2^{(2)}\binom{r\sin\theta_1}{\varphi} = r\sin\theta_1\sin\varphi$ で与えられる. これらはそれぞれ P の第 1 成分, 第 2 成分でもあるから $f_1^{(3)}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta_1 \end{pmatrix} = f_1^{(2)}\binom{r\sin\theta_1}{\varphi} = r\sin\theta_1\cos\varphi$, $f_2^{(3)}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta_1 \end{pmatrix} = f_2^{(2)}\binom{r\sin\theta_1}{\varphi} = r\sin\theta_1\sin\varphi$ が得られる. 以上から $f^{(3)}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta_1\cos\varphi \\ r\sin\theta_1\sin\varphi \\ r\cos\theta_1 \end{pmatrix}$ が成り立つ.

$\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqq 3)$ の極座標を与える写像を $f^{(n)}: [0,\infty) \times [0,2\pi] \times [0,\pi]^{n-2} \to \boldsymbol{R}^n$ として, この第 i 成分が $f_i^{(n)}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \end{pmatrix}$ で与えられるとする. 上と同様に考えれば $i = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して $f_i^{(n)}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \end{pmatrix} = f_i^{(n-1)}\begin{pmatrix} r\sin\theta_{n-2} \\ \varphi \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-3} \end{pmatrix}$ および $f_n^{(n)}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \end{pmatrix} = r\cos\theta_{n-2}$ が成り立つことがわかる. このことから n による帰納法で,

$$f_i^{(n)}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{cases} r\cos\varphi\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2} & i = 1 \\ r\sin\varphi\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2} & i = 2 \\ r\cos\theta_{i-2}\sin\theta_{i-1}\sin\theta_i\cdots\sin\theta_{n-2} & 3 \leqq i \leqq n \end{cases}$$

が示される. また $\psi_n: [0,\infty) \times [0,2\pi] \times [0,\pi]^{n-2} \to [0,\infty) \times [0,2\pi] \times [0,\pi]^{n-3}$, $\rho_n: [0,\infty) \times [0,2\pi] \times [0,\pi]^{n-2} \to \boldsymbol{R}$

を

$$\psi_n\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta_{n-2} \\ \varphi \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-3}\end{pmatrix}, \qquad \rho_n\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2}\end{pmatrix} = r\cos\theta_{n-2}$$

で定めれば, $\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2}\end{pmatrix} \in [0,\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi]^{n-2}$ に対して $f^{(n)}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} f^{(n-1)}\circ\psi_n(\boldsymbol{\theta}) \\ \rho_n(\boldsymbol{\theta})\end{pmatrix}$ だから

$$\left(f^{(n)}\right)'(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \left(f^{(n-1)}\circ\psi_n\right)'(\boldsymbol{\theta}) \\ \rho_n'(\boldsymbol{\theta})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(f^{(n-1)}\right)'(\psi_n(\boldsymbol{\theta}))\psi_n'(\boldsymbol{\theta}) \\ \rho_n'(\boldsymbol{\theta})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(f^{(n-1)}\right)'(\psi_n(\boldsymbol{\theta})) & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_n'(\boldsymbol{\theta}) \\ \rho_n'(\boldsymbol{\theta})\end{pmatrix}$$

が成り立つ. $J_n(\boldsymbol{\theta})$ を $\left(f^{(n)}\right)'(\boldsymbol{\theta})$ の行列式とすれば, 上式と

$$\psi_n'(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \sin\theta_{n-2} & 0 & \cdots & 0 & r\cos\theta_{n-2} \\ 0 & 1 & & \text{\huge 0} & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \text{\huge 0} & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_n'(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\theta_{n-2} & 0 & \cdots & 0 & -r\sin\theta_{n-2}\end{pmatrix}$$

より

$$J_n(\boldsymbol{\theta}) = J_{n-1}(\psi_n(\boldsymbol{\theta}))\det\begin{pmatrix} \psi_n'(\boldsymbol{\theta}) \\ \rho_n'(\boldsymbol{\theta})\end{pmatrix} = -rJ_{n-1}(\psi_n(\boldsymbol{\theta}))$$

が得られる.

命題 27.1 $\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2}\end{pmatrix} \in [0,\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi]^{n-2}$ に対して, 次の等式が成り立つ.

$$J_n(\boldsymbol{\theta}) = (-1)^n r^{n-1}\sin\theta_1\sin^2\theta_2\cdots\sin^{n-2}\theta_{n-2} = (-1)^n r^{n-1}\prod_{i=1}^{n-2}\sin^i\theta_i$$

証明 $J_2(\boldsymbol{\theta}) = r$ だから $n=2$ の場合は主張が成り立つ. $J_{n-1}(\boldsymbol{\theta}) = (-1)^{n-1}r^{n-2}\prod\limits_{i=1}^{n-3}\sin^i\theta_i$ が成り立つと仮定すると, 上で得た漸化式から $J_n(\boldsymbol{\theta}) = -r(-1)^{n-1}(r\sin\theta_{n-2})^{n-2}\prod\limits_{i=1}^{n-3}\sin^i\theta_i = (-1)^n r^{n-1}\prod\limits_{i=1}^{n-2}\sin^i\theta_i$ を得る. □

正の整数 n と正の実数 r に対して $D^n(r)$ を $\boldsymbol{R}^n$ の原点を中心として半径 r の球体 $\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqq r\}$ を表す.

定理 27.2 $D^n(R)$ の体積は, n が偶数 $n=2m$ ならば $\dfrac{\pi^m R^{2m}}{m!}$, 奇数 $n=2m+1$ ならば $\dfrac{2^{m+1}\pi^m R^{2m+1}}{(2m+1)!!}$ で与えられる.

証明 まず, 任意の $\theta\in\boldsymbol{R}$ に対して $\sin\theta = \sin(\pi-\theta)$ が成り立つため $\pi-\theta_i = \varphi_i$ とおいて置換積分すると,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^i\theta_i d\theta_i = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^i(\pi-\theta_i)d\theta_i = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^i\varphi_i(-1)d\varphi_i = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^i\theta_i d\theta_i$$

である. このことと, (15.7), (15.6), (15.8) より

$$\int_0^{\pi}\sin^i\theta_i d\theta_i = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^i\theta_i d\theta_i + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^i\theta_i d\theta_i = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^i\theta_i d\theta_i = B\left(\frac{i+1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{2}+1\right)}$$

$f^{(n)} : [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]^{n-2} \to D^n(R)$ により極座標に変数変換すれば, (27.1) と上式から $D^n(R)$ の体積は

$$\begin{aligned}
\int \cdots \int_{D^n(R)} dx_1 \cdots dx_n &= \int \cdots \int_{[0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]^{n-2}} r^{n-1} \sin\theta_1 \sin^2\theta_2 \cdots \sin^{n-2}\theta_{n-2} dr d\varphi d\theta_1 \cdots d\theta_{n-2} \\
&= \left(\int_0^R r^{n-1} dr\right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \prod_{i=1}^{n-2} \int_0^{\pi} \sin^i \theta_i d\theta_i \\
&= \frac{2\pi R^n}{n} \prod_{i=1}^{n-2} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+2}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}
\end{aligned}$$

で与えられる. 従って, (15.5), (15.8) から結果が得られる. □