微積分学 I ノート

目 次

1　関数の微分

開区間 (a, b) で定義された関数 f が p において微分可能であるとは, 極限値

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}=\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$$

が存在することであり, この極限値を f の p における微分 (係数) と呼んで, $f'(p)$ で表すことは高校でも学んだ.

以下で,「1 次関数による近似」という観点から, この微分という概念を見直してみる.

xy 平面上の点 $(p, f(p))$ における f のグラフの「接線」を与える 1 次関数 $f(p)+f'(p)(x-p)$ を考えて, $f(x)$ を x の 1 次関数 $f(p)+f'(p)(x-p)$ で近似したときの誤差

$$f(x)-(f(p)+f'(p)(x-p))$$

を $\varphi(x)$ とおく. これを x の関数とみなせば,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to p}\frac{\varphi(x)}{x-p}&=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-(f(p)+f'(p)(x-p))}{x-p}=\lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)-f(p)}{x-p}-f'(p)\right)\\&=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}-\lim_{x\to p}f'(p)=f'(p)-f'(p)=0\end{aligned}$$

が成り立ち, x を p に近づければ, $\varphi(x)$ と $x-p$ との比が 0 に近づくことがわかる. すなわち $x\to p$ のとき $\varphi(x)$ は $x-p$ より「高位の無限小」である. このことを感覚的に表現すれば, 次のようになる.

x を p に近づけたとき, 誤差 $\varphi(x)$ は $x-p$ とは比べものにならないくらい速く 0 に近づくため, 1 次関数 $f(p)+f'(p)(x-p)$ は関数 f の p の近くでの「よい近似」である.

逆に, 開区間 (a, b) で定義された関数 f に対し, $f(p)+A(x-p)$ (A は定数) という形の, $x=p$ における値が $f(p)$ である 1 次関数で, 上で「よい近似」と表現した条件

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-(f(p)+A(x-p))}{x-p}=0\ \cdots(*)$$

を満たすものが存在すると仮定すれば,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}&=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-(f(p)+A(x-p))+A(x-p)}{x-p}=\lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)-(f(p)+A(x-p))}{x-p}+A\right)\\&=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-(f(p)+A(x-p))}{x-p}+\lim_{x\to p}A=0+A=A\end{aligned}$$

となるため, f は p で微分可能で, f の p における微分は A である. 従って, 条件 $(*)$ を満たす定数 A が存在すれば, f の p における微分として 1 とおりに定まる.

ここで, $(*)$ は $\displaystyle\lim_{x\to p}\left|\frac{f(x)-(f(p)+A(x-p))}{x-p}\right|=0$ と同値で, さらにこの等式は $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{f(x)-(f(p)+A(x-p))}{|x-p|}=0$ と同値であることに注意すれば, 以上の考察から次のことがわかる.

命題 1.1 開区間 (a, b) で定義された関数 f が p において微分可能であるためには,

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-(f(p)+A(x-p))}{|x-p|}=0$$

を満たす定数 A が存在することが必要十分である. 上式を満たす定数 A が存在するとき, A は f の p における微分 $f'(p)$ にほかならない.

このように, 一般の関数を最も基本的 (定数値関数の次に簡単) な関数である 1 次関数で近似するという考え方が, 微分という概念の本質である.

2 合成関数・逆関数の微分法

前節の命題 1.1 は次のように言い換えることができる.

命題 2.1 開区間 (a,b) で定義された関数 f, 実数 A, $p \in (a,b)$ に対して, 関数 $\varepsilon = \varepsilon_{f,A,p} : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ を

$$\varepsilon_{f,A,p}(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - (f(p) + A(x-p))}{|x-p|} & x \neq p \\ 0 & x = p \end{cases}$$

で定義する. このとき, 任意の $x \in (a,b)$ に対して, 等式

$$f(x) = f(p) + A(x-p) + |x-p|\varepsilon_{f,A,p}(x)$$

が成り立ち, f が p で微分可能であるためには, $\varepsilon_{f,A,p}$ が p において連続 (すなわち $\lim\limits_{x\to p} \varepsilon_{f,A,p}(x) = 0$) となるような, 実数 A が存在することが必要十分である. さらに, $\lim\limits_{x\to p} \varepsilon_{f,A,p}(x) = 0$ を満たす定数 A が存在するとき, A は f の p における微分 $f'(p)$ にほかならない.

上の結果から, f が p で微分可能ならば, $\lim\limits_{x\to p} f(x) = \lim\limits_{x\to p} (f(p) + A(x-p) + |x-p|\varepsilon_{f,A,p}(x)) = f(p)$ となるため, f は p で連続である.

命題 2.2 $I, J \subset \boldsymbol{R}$, $p \in \boldsymbol{R}$, $q \in J$ とする. 関数 $f : I \to J$, $g : J \to \boldsymbol{R}$ が $\lim\limits_{x\to p} f(x) = q$, $\lim\limits_{y\to q} g(y) = g(q)$ を満たせば $\lim\limits_{x\to p} g(f(x)) = g(q)$ である. 故に $p \in I$ で, f が p で連続, g が q で連続ならば, 合成関数 $g\circ f$ は p で連続である.

証明 $\lim\limits_{y\to q} g(y) = g(q)$ だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta_1 > 0$ で, 条件「$|y-q| < \delta_1$ かつ $y \in J$ ならば $|g(y)-g(q)| < \varepsilon$」を満たすものが存在する. $\lim\limits_{x\to p} f(x) = q$ だから, この $\delta_1 > 0$ に対して $\delta > 0$ で, 条件「$0 < |x-p| < \delta$ かつ $x \in I$ ならば $|f(x) - q| < \delta_1$」を満たすものが存在する. 従って, $0 < |x-p| < \delta$ かつ $x \in I$ ならば $|g(f(x)) - g(q)| < \varepsilon$ が成り立つため, $\lim\limits_{x\to p} g(f(x)) = g(q)$ である. □

定理 2.3 f, g をそれぞれ開区間 (a,b), (c,d) で定義された関数とし, $x \in (a,b)$ ならば $f(x) \in (c,d)$ であるとする. f が $p \in (a,b)$ で微分可能, g が $f(p)$ で微分可能ならば, 合成関数 $g\circ f$ は p で微分可能で, $(g\circ f)'(p) = g'(f(p))f'(p)$ が成り立つ.

証明 $\varepsilon_{f,f'(p),p}$, $\varepsilon_{g,g'(f(p)),f(p)}$ をそれぞれ ε_f, ε_g で表すと, f, g はそれぞれ p, $f(p)$ で微分可能だから, 命題 2.1 から

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + |x-p|\varepsilon_f(x) \cdots (i) \qquad g(y) = g(f(p)) + g'(f(p))(y - f(p)) + |y - f(p)|\varepsilon_g(y) \cdots (ii)$$

が成り立つ. 等式 (ii) の y に $f(x)$ を代入すれば次の等式が得られる.

$$g(f(x)) = g(f(p)) + g'(f(p))(f(x) - f(p)) + |f(x) - f(p)|\varepsilon_g(f(x))$$

(i) より $f(x) - f(p) = f'(p)(x-p) + |x-p|\varepsilon_f(x)$ だから, 上の等式に代入すれば次の等式が得られる.

$$g(f(x)) = g(f(p)) + g'(f(p))(f'(p)(x-p) + |x-p|\varepsilon_f(x)) + |f'(p)(x-p) + |x-p|\varepsilon_f(x)|\varepsilon_g(f(x))$$

上の等式を適当に移項すれば

$$(g\circ f)(x) - ((g\circ f)(p) + g'(f(p))f'(p)(x-p)) = |x-p|g'(f(p))\varepsilon_f(x) + |f'(p)(x-p) + |x-p|\varepsilon_f(x)|\varepsilon_g(f(x))$$

が得られるが, この両辺を $|x-p|$ で割って, さらに両辺の絶対値をとれば, 三角不等式から

$$\begin{aligned} \left|\frac{(g\circ f)(x) - ((g\circ f)(p) + g'(f(p))f'(p)(x-p))}{|x-p|}\right| &= \left|g'(f(p))\varepsilon_f(x) + \left|f'(p)\frac{x-p}{|x-p|} + \varepsilon_f(x)\right|\varepsilon_g(f(x))\right| \\ &\leqq |g'(f(p))\varepsilon_f(x)| + \left|f'(p)\frac{x-p}{|x-p|} + \varepsilon_f(x)\right||\varepsilon_g(f(x))| \\ &\leqq |g'(f(p))\varepsilon_f(x)| + |f'(p)||\varepsilon_g(f(x))| + |\varepsilon_f(x)\varepsilon_g(f(x))| \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$ であり, ε は $f(p)$ で連続だから, 命題 2.2 より $\lim_{x\to p} \varepsilon(f(x)) = \varepsilon(f(p)) = 0$ である. さらに $\lim_{x\to p} \varepsilon_f(x) = 0$ だから, 上の不等式とはさみうちの原理から

$$\lim_{x\to p} \frac{(g\circ f)(x) - ((g\circ f)(p) + g'(f(p))f'(p)(x-p))}{|x-p|} = 0$$

が成り立つため, 命題 1.1 により, $g\circ f$ は p で微分可能で, $(g\circ f)'(p) = g'(f(p))f'(p)$ が成り立つ. □

逆関数の微分についての定理を証明するために, 以下で少し準備をする. 次の「中間値の定理」は連続関数について最も基本的な定理の一つである.

定理 2.4 (中間値の定理) $f : X \to \boldsymbol{R}$ を実数値連続関数とする. $[a,b] \subset X$ であり, $f(a) \neq f(b)$ ならば, $f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の値 d に対し, $f(c) = d$ となる $c \in (a,b)$ が存在する.

この中間値の定理を用いれば, 次の結果が示される.

定理 2.5 閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が単射ならば f は狭義単調増加関数であるか, または狭義減少増加関数である. さらに, 前者の場合は f は $[f(a), f(b)]$ への全射であり, 後者の場合は $[f(b), f(a)]$ への全射である.

証明 $a \neq b$ で f は単射だから $f(a) \neq f(b)$ である. $f(a) < f(b)$ の場合は f が狭義単調増加関数であることを示す. まず, 任意の $x \in (a,b)$ に対して $f(a) < f(x) < f(b)$ である. 実際, もし $f(x) < f(a)$ ならば $f(x) < p < f(a)$ となる p に対し, 区間 $[a,x]$ において中間値の定理から $f(c) = p$ となる $c \in (a,x)$ があり, $f(x) < p < f(a) < f(b)$ でもあるから, 区間 $[x,b]$ において中間値の定理により $f(d) = p$ となる $d \in (x,b)$ がある. $f(c) = f(d) = p$ であるが, $c < x < d$ であるため, これは f が単射であることに矛盾する. $f(x) > f(b)$ としても, 同様に矛盾が生じるため, $x \in (a,b)$ ならば $f(a) < f(x) < f(b)$ である.

$a \leqq x < y \leqq b$ のとき, 上の結果から $f(a) < f(y)$ だから, 区間 $[a,y]$ に対して上の結果を用いると $f(x) < f(y)$ が得られ f は狭義単調増加関数である.

$f(a) < f(b)$ の場合は f の代りに $-f$ を考えれば上の場合に帰着して, $-f$ は狭義単調増加関数になるため, f は狭義減少増加関数である. 後半の主張は中間値の定理から明らかである. □

系 2.6 I を区間 (すなわち I は $(a,b), [a,b], (a,b], [a,b), (-\infty,b), (-\infty,b], (a,\infty), [a,\infty), \boldsymbol{R}$ のいずれか) とするとき, 連続関数 $f : I \to \boldsymbol{R}$ が単射ならば f は狭義単調増加関数であるか, または狭義減少増加関数である.

証明 $c, d \in I$, $c < d$ とすると定理 2.5 により, f は閉区間 $[c,d]$ において狭義単調増加関数か狭義減少増加関数のいずれかである. 後者の場合は, $-f$ を考えることにより, 前者の場合に帰着できる. 前者の場合, $x, y \in I$, $x < y$ に対し, c と x の小さい方を p, d と y の大きい方を q とすれば, f の閉区間 $[p,q]$ への制限は狭義単調増加関数か狭義減少増加関数のいずれかであり, $[c,d] \subset [p,q]$ だから f は閉区間 $[p,q]$ において, 狭義単調増加関数となる. このとき $x, y \in [p,q]$ だから $f(x) < f(y)$ となり, f は狭義単調増加関数である. □

定理 2.7 区間 I で定義された連続関数 $f : I \to J$ が全単射ならば逆関数 $f^{-1} : J \to I$ も連続関数である.

証明 系 2.6 により f は狭義単調増加関数か狭義減少増加関数のいずれかである. 後者の場合は, $-f$ を考えることにより, 前者の場合に帰着できるので, 前者の場合について考える. 任意の $p \in J$ をとり, $q = f^{-1}(p)$ とおく. $[q-r, q] \subset I$ となる $r > 0$ があるとき, f は単調増加関数だから, 区間 $[q-r, q]$ を $[f(q-r), p]$ の上に 1 対 1 に写す. 従って, 任意の $0 < \varepsilon < r$ に対し, f^{-1} は $(f(q-\varepsilon), p]$ を $(q-\varepsilon, q]$ の上に 1 対 1 に写すため, $\delta = p - f(q-\varepsilon)$ とおけば「$p - \delta < x \leqq p$ ならば $q - \varepsilon < f^{-1}(x) \leqq q$」が成り立つ. 同様にして $[q, q+r] \subset I$ となる $r > 0$ があるとき, $\delta = f(q+\varepsilon) - p$ とおけば「$p \leqq x < p + \delta$ ならば $q \leqq f^{-1}(x) < q + \varepsilon$」が成り立つ. 故に, f^{-1} は p において連続である. □

定理 2.8 $f:(a,b)\to(c,d)$ は連続な全単射で, p において微分可能であるとする. $f'(p)\neq 0$ ならば f の逆関数 $f^{-1}:(c,d)\to(a,b)$ は $f(p)$ で微分可能であり, $(f^{-1})'(f(p))=\dfrac{1}{f'(p)}$ が成り立つ.

証明 (a,b) で定義された関数 F を $F(t)=\begin{cases}\frac{f(t)-f(p)}{t-p} & t\neq p\\ f'(p) & t=p\end{cases}$ によって定める. f^{-1} は単射だから, $x\neq f(p)$ ならば $f^{-1}(x)\neq f^{-1}(f(p))=p$ であるため $F(f^{-1}(x))=\dfrac{f(f^{-1}(x))-f(p)}{f^{-1}(x)-p}=\dfrac{x-f(p)}{f^{-1}(x)-f^{-1}(f(p))}$ が成り立つ. 従って $x\neq f(p)$ ならば次の等式が得られる.

$$\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(f(p))}{x-f(p)}=\frac{1}{F(f^{-1}(x))}\ \cdots(i)$$

定理 2.7 より f^{-1} は $f(p)$ で連続だから $\displaystyle\lim_{x\to f(p)}f^{-1}(x)=f^{-1}(f(p))=p$ が成り立つ. 一方 f は p で微分可能だから $\displaystyle\lim_{t\to p}F(t)=\lim_{t\to p}\frac{f(t)-f(p)}{t-p}=f'(p)=F(p)$ となるため, 命題 2.2 によって

$$\lim_{x\to f(p)}F(f^{-1}(x))=F(p)=f'(p)\ \cdots(ii)$$

が成り立つ. (i), (ii) と仮定から $F(p)=f'(p)\neq 0$ だから,

$$\lim_{x\to f(p)}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(f(p))}{x-f(p)}=\lim_{x\to f(p)}\frac{1}{F(f^{-1}(x))}=\frac{1}{\displaystyle\lim_{x\to f(p)}F(f^{-1}(x))}=\frac{1}{f'(p)}$$

であるため, 主張が示された. □

系 2.9 関数 $f:(a,b)\to(c,d)$, $g:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ はともに p において微分可能であるとする. さらに f は連続な全単射で, $f'(p)\neq 0$ が成り立つとき, f の逆関数 $f^{-1}:(c,d)\to(a,b)$ と $g:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ の合成関数は $g\circ f^{-1}$ は $f(p)$ で微分可能であり, $f(p)$ における微分係数は $\dfrac{g'(p)}{f'(p)}$ である.

証明 定理 2.3, 2.8 から $(g\circ f^{-1})'(f(p))=g'(f^{-1}(f(p)))(f^{-1})'(f(p))=g'(p)\dfrac{1}{f'(p)}=\dfrac{g'(p)}{f'(p)}$ である. □

3 テイラーの定理

与えられた関数の 1 次関数を用いた近似より精密な n 次関数による近似を考えることが, 次に述べるテイラーの定理である. 以後, f は開区間 (a,b) で定義された n 回微分可能な関数で, p を開区間 (a,b) の点とする. このとき, テイラーの定理は次のように述べられる.

定理 3.1 開区間 (a,b) の任意の点 x に対し, x と p の間の点 c で次の等式を満たすものがある.

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\cdots+\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}(x-p)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n$$

定理の式の右辺の最後の項 $\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n$ を剰余項という. この定理の証明は後ほど行うとして, まずテイラーの定理を用いて次の結果を示す.

定理 3.2 f の n 次導関数 $f^{(n)}$ が p において連続ならば, 次の等式が成り立つ.

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-\left(f(p)+f'(p)(x-p)+\cdots+\dfrac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n\right)}{(x-p)^n}=0$$

証明 テイラーの定理から, 各 x に対して x と p の間の点 c_x で次の等式を満たすものがある.

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\cdots+\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}(x-p)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-p)^n$$

この右辺を示すべき等式の左辺の $f(x)$ に代入すれば

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-\left(f(p)+\cdots+\dfrac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n\right)}{(x-p)^n}=\lim_{x\to p}\frac{f^{(n)}(c_x)-f^{(n)}(p)}{n!}.$$

ここで, c_x はつねに x と p の間にあるため x が p に近づけば, c_x も p に近づく. 従って, $f^{(n)}$ の p における連続性から, $\lim_{x\to p} f^{(n)}(c_x)=f^{(n)}(p)$ となるため, 上式の右辺は 0 になることがわかる. □

$m<n$ ならば $\lim_{x\to p}\dfrac{(x-p)^n}{(x-p)^m}=0$ だから, x を p に近づけたとき $(x-p)^n$ は $(x-p)^m$ よりも「速く」0 に近づく関数である. その意味では, n が大きければ大きいほど, 多項式

$$f(p)+\cdots+\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\cdots+\frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n$$

は x が p の近くでの $f(x)$ のより精密な近似であるといえる.

補題 3.3 実数列 $a_0,a_1,\dots,a_n$ で $\lim_{x\to p}\dfrac{a_0+a_1(x-p)+\cdots+a_n(x-p)^n}{(x-p)^n}=0$ を満たすものは $a_0=a_1=\cdots=a_n=0$ に限る.

証明 帰納的に $a_0=a_1=\cdots=a_{k-1}=0$ $(0\leqq k\leqq n)$ が示せたと仮定すれば, 仮定より

$$\lim_{x\to p}\frac{a_k+a_{k+1}(x-p)+\cdots+a_n(x-p)^{n-k}}{(x-p)^{n-k}}=0\ \cdots(*)$$

が成り立つ. $k<n$ ならば $(*)$ より

$$a_k=\lim_{x\to p}(a_k+a_{k+1}(x-p)+\cdots+a_n(x-p)^{n-k})=\lim_{x\to p}\frac{a_k+a_{k+1}(x-p)+\cdots+a_n(x-p)^{n-k}}{(x-p)^{n-k}}(x-p)^{n-k}=0$$

である. また, $k=n$ ならば $(*)$ より明らかに $a_n=0$ である. □

命題 3.4 実数値関数 $f:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ と $p\in(a,b)$ に対し,

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-(a_0+a_1(x-p)+\cdots+a_n(x-p)^n)}{(x-p)^n}=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-(b_0+b_1(x-p)+\cdots+b_n(x-p)^n)}{(x-p)^n}$$

を満たす実数列 $a_0,a_1,\dots,a_n$ と $b_0,b_1,\dots,b_n$ が存在すれば $a_k=b_k$ $(k=0,1,\dots,n)$ が成り立つ.

証明 仮定から $\lim_{x\to p}\dfrac{(b_0-a_0)+(b_1-a_1)(x-p)+\cdots+(b_n-a_n)(x-p)^n}{(x-p)^n}=0$ が得られるため補題 3.3 により $a_k=b_k$ $(k=0,1,\dots,n)$ である. □

定理 3.2 と命題 3.4 から次の結果が得られる.

系 3.5 $f:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ は n 回微分可能であり, f の n 次導関数 $f^{(n)}$ が p において連続であるとする. 実数列 $a_0,a_1,\dots,a_n$ が

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-(a_0+a_1(x-p)+\cdots+a_n(x-p)^n)}{(x-p)^n}=0$$

を満たすならば $k=0,1,\dots,n$ に対して $a_k=\dfrac{f^{(k)}(p)}{k!}$ である.

定理 3.2, 系 3.5 により, $f^{(n)}$ が p において連続であるという仮定のもとでは, 実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - \bigl(a_0 + a_1(x-p) + \cdots + a_k(x-p)^k + \cdots + a_n(x-p)^n\bigr)}{(x-p)^n} = 0$$

を満たすことと, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ に対して $a_k = \dfrac{f^{(k)}(p)}{k!}$ が成り立つことは同値である.

系 3.6 定理 3.2 の仮定のもとで, f が $x \to p$ のときに n 位の無限小であるためには, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ に対して $f^{(k)}(p) = 0$ かつ $f^{(n)}(p) \neq 0$ が成り立つことが必要十分である.

証明 f が $x \to p$ のときに n 位の無限小であるとき, $\displaystyle\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{(x-p)^n} = L$ とおくと, $L \neq 0$ であり,

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - \bigl(0 + 0(x-p) + \cdots + 0(x-p)^{n-1} + L(x-p)^n\bigr)}{(x-p)^n} = \lim_{x \to p} \left(\frac{f(x)}{(x-p)^n} - L \right) = 0$$

だから, 系 3.5 によって, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ に対して $\dfrac{f^{(k)}(p)}{k!} = 0$ であり, $\dfrac{f^{(n)}(p)}{n!} = L$ が成り立つ. 故に $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ に対して $f^{(k)}(p) = 0$ かつ $f^{(n)}(p) = Ln! \neq 0$ である.

逆に $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ に対して $f^{(k)}(p) = 0$ かつ $f^{(n)}(p) \neq 0$ が成り立つならば, 定理 3.2 から

$$\lim_{x \to p} \left(\frac{f(x)}{(x-p)^n} - \frac{f^{(n)}(p)}{n!} \right) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n}{(x-p)^n} = 0$$

だから $\displaystyle\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{(x-p)^n} = \frac{f^{(n)}(p)}{n!} \neq 0$ となって, f が $x \to p$ のときに n 位の無限小であることがわかる. □

4 平均値の定理

テイラーの定理を証明するために「コーシーの平均値の定理」と呼ばれる定理を用いるが, この定理を示すために以下で準備を行う.

定義 4.1 $X, Y \subset \boldsymbol{R}$, $f : X \to Y$ を関数, $p \in X$ とする. 正の実数 r で,「$x \in (p-r, p+r) \cap X$ ならば $f(x) \leqq f(p)$」を満たすものがあるとき, f は p において極大であるといい, $f(p)$ を f の極大値という. また, 正の実数 r で,「$x \in (p-r, p+r) \cap X$ ならば $f(x) \geqq f(p)$」を満たすものがあるとき, f は p において極小であるといい, $f(p)$ を f の極小値という.

f の最大値は f の極大値であり, f の最小値は f の極小値である. 次の結果は高校でも学んだ.

命題 4.2 $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ が $p \in (a, b)$ において微分可能で, しかも極大または極小であるとき, $f'(p) = 0$ である.

証明 f が p において極大ならば正の実数 r で, $r < p - a, b - p$ かつ「$x \in (p-r, p+r)$ ならば $f(x) \leqq f(p)$」を満たすものがある. また, f は p で微分可能だから

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to p-0} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to p+0} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \quad \cdots (1)$$

が成り立つ. 一方, $x \in (p-r, p)$ ならば $\dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} \geqq 0$ だから $\displaystyle\lim_{x \to p-0} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geqq 0 \cdots (2)$ であり, $x \in (p, p+r)$ ならば $\dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} \leqq 0$ だから $\displaystyle\lim_{x \to p+0} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \leqq 0 \cdots (3)$ である. 従って (1) と (2) から $f'(p) \geqq 0$ であり, (1) と (3) から $f'(p) \leqq 0$ だから $f'(p) = 0$ である. f が p において極小の場合も同様にして $f'(p) = 0$ が示される.□

「中間値の定理」と並んで次の定理は連続関数についての基本的な定理であり, この定理は「上に有界な単調増加数列は収束する.」という「実数の連続性」を用いて示される.

定理 4.3 (最大値・最小値の定理) 閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 $f:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ は最大値と最小値を持つ.

まず, 平均値の定理の特別な場合である「ロルの定理」と呼ばれる次の定理を示す.

定理 4.4 閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 f が (a,b) の各点で微分可能なとき, $f(a)=f(b)$ ならば $f'(c)=0$ となる $c\in(a,b)$ がある.

証明 最大値･最小値の定理により f は最大値と最小値をとる. f の最大値, 最小値をそれぞれ $f(p), f(q)$ $(p,q\in[a,b])$ とすれば, $f(q)\leqq f(a)=f(b)\leqq f(p)$ だから, 以下の場合が考えられる.

(1) $f(p)>f(a)=f(b)$ の場合, $p\neq a,b$ だから f は p において微分可能である. 従って命題 4.2 により $f'(p)=0$ となるため, $c=p$ とすればよい.

(2) $f(q)<f(a)=f(b)$ の場合, $q\neq a,b$ だから f は q において微分可能である. 従って命題 4.2 により $f'(q)=0$ となるため, $c=q$ とすればよい.

(3) $f(q)=f(a)=f(b)=f(p)$ の場合, f は定数値関数にだから, 任意の $c\in(a,b)$ に対して $f'(c)=0$ である. □

この定理は「コーシーの平均値の定理」と呼ばれる次の定理に一般化される.

定理 4.5 $f,\ g$ を閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数で, 開区間 (a,b) の各点で微分可能であるとする. さらに $g(b)\neq g(a)$ であり, (a,b) のすべての点 x に対して $f'(x)$ と $g'(x)$ が同時に 0 になることがないならば, 次の等式を満たす $c\in(a,b)$ がある.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

証明 関数 $F:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ を $F(x)=(f(b)-f(a))g(x)-(g(b)-g(a))f(x)$ で定めれば, F は定理 4.4 の条件を満たすため, $F'(c)=0$ となる $c\in(a,b)$ がある. 一方 $F'(x)=(f(b)-f(a))g'(x)-(g(b)-(a))f'(x)$ だから, $F'(c)=0$ より次の等式を得る.

$$(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c)\ \cdots(*)$$

もし, $g'(c)=0$ ならば, $g(b)-g(a)\neq 0$ だから $(*)$ より $f'(c)=0$ となって仮定に反する. 従って, $g'(c)\neq 0$ となり, $(*)$ の両辺を $(g(b)-g(a))g'(c)$ で割れば, 示すべき等式が得られる. □

上の定理において, とくに g が $g(x)=x$ で与えられる関数の場合を考えると, 次の「平均値の定理」が得られる.

系 4.6 (平均値の定理) $f:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ が連続関数で, (a,b) の各点で微分可能なとき, $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ となる $c\in(a,b)$ がある.

系 4.7 $f:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ が連続関数で, (a,b) のすべての点における微分係数が 0 ならば f は定数値関数である.

証明 $a<x\leqq b$ とし, 区間 $[a,x]$ に対して平均値の定理を定理を用いれば, $f(x)-f(a)=f'(c)(b-a)$ となる $c\in(a,x)$ があるが, 仮定から $f'(c)=0$ だから $(x)=f(a)$ である. 故に f は定数値関数である. □

以上の準備のもとで, テイラーの定理の証明を行う.

f を開区間 (a,b) で定義された n 回微分可能な関数, p を開区間 (a,b) の点とする. 関数 F を

$$F(x)=f(x)-\left(f(p)+f'(p)(x-p)+\cdots+\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}(x-p)^{n-1}\right)\ \cdots(*)$$

により定義する. このとき, F の m 次導関数 $(m=0,1,\ldots,n-1)$ は

$$F^{(m)}(x)=f^{(m)}(x)-\left(f^{(m)}(p)+\cdots+\frac{f^{(k)}(p)}{(k-m)!}(x-p)^{k-m}+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-m-1)!}(x-p)^{n-m-1}\right)$$

となり, F の n 次導関数は $F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$ である. とくに

$$F(p) = F'(p) = \cdots = F^{(m)}(p) = \cdots = F^{(n-1)}(p) = 0$$

が成り立つことに注意する.

F と $(x-p)^n$ に対してコーシーの平均値の定理を用いると x と p の間の実数 c_1 で次の等式 (1) を満たすものがある.

$$\frac{F(x)}{(x-p)^n} = \frac{F(x)-F(p)}{(x-p)^n-(p-p)^n} = \frac{F'(c_1)}{n(c_1-p)^{n-1}} \quad \cdots (1)$$

同様に, F' と $(x-p)^{n-1}$ に対してコーシーの平均値の定理を用いると c_1 と p の間の実数 c_2 (よって c_2 は x と p の間にある) で次の等式 (2) を満たすものがある.

$$\frac{F'(c_1)}{(c_1-p)^{n-1}} = \frac{F'(c_1)-F'(p)}{(c_1-p)^{n-1}-(p-p)^{n-1}} = \frac{F''(c_2)}{(n-1)(c_2-p)^{n-2}} \quad \cdots (2)$$

これを繰り返して, 帰納的に x と p の間にある実数 $c_1, c_2, \ldots, c_m$ $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$ で, $k = 1, 2, \ldots, m$ に対して次の等式 (k) を満たすものが得られたとする. (ただし $c_0 = x$ とする)

$$\frac{F^{(k-1)}(c_{k-1})}{(c_{k-1}-p)^{n-k+1}} = \frac{F^{(k)}(c_k)}{(n-k+1)(c_k-p)^{n-k}} \quad \cdots (k)$$

$F^{(m)}$ と $(x-p)^{n-m}$ に対してコーシーの平均値の定理を用いると c_m と p の間の実数 c_{m+1} (よって c_{m+1} は x と p の間にある) で次の等式 $(m+1)$ を満たすものがある.

$$\frac{F^{(m)}(c_m)}{(c_m-p)^{n-m}} = \frac{F^{(m)}(c_m)-F^{(m)}(p)}{(c_m-p)^{n-m}-(p-p)^{n-m}} = \frac{F^{(m+1)}(c_{m+1})}{(n-m)(c_{m+1}-p)^{n-m-1}} \quad \cdots (m+1)$$

従って, m による帰納法で, x と p の間にある実数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ で, $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して上の等式 (k) を満たすものがある. これらの等式から

$$\frac{F(x)}{(x-p)^n} = \frac{F'(c_1)}{n(c_1-p)^{n-1}} = \cdots = \frac{F^{(k)}(c_k)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)(c_k-p)^{n-k}} = \cdots = \frac{F^{(n)}(c_n)}{n!}$$

となるため, $c = c_n$ とおくと,

$$F(x) = \frac{F^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n$$

を満たす c が x と p の間にある. この等式の左辺に, $F(x)$ を定義した式 $(*)$ を代入すれば,

$$f(x) - \left(f(p) + f'(p)(x-p) + \cdots + \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}(x-p)^{n-1} \right) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n$$

となり, 左辺の括弧でくくられた部分を右辺に移項すれば, テイラーの定理の等式が得られる.

5　テイラーの定理の応用例

まず, 基本的な関数 $(1+x)^\alpha$, $\log(1+x)$, e^x, $\sin x$, $\cos x$ の n 次導関数が次で与えられることを思い出しておく.

$$(e^x)^{(n)} = e^x, \qquad ((1+x)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

$$(\log(1+x))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$$

従って, これらの $x = 0$ における値は

$$(e^x)^{(n)}(0) = 1, \quad ((1+x)^\alpha)^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1), \quad (\log(1+x))^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

$$(\sin x)^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0 & n \text{ は偶数} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ は奇数} \end{cases}, \quad (\cos x)^{(n)}(0) = \cos\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ は偶数} \\ 0 & n \text{ は奇数} \end{cases}$$

で与えられる．これらの関数に対し, $p=0$ として定理 3.1 を用いると, 0 と x の間に以下の等式を満たす c がそれぞれ存在する．ただし, 2 つめの等式では, $\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ を $\dbinom{\alpha}{k}$ で表し, 4 つめの等式では $n=2m+1$ の場合, 5 つめの等式では $n=2m$ の場合を考えた．また, 加法定理を用いれば

$$\sin\left(c + \frac{(2m+1)\pi}{2}\right) = \cos\left(c + \frac{(2m)\pi}{2}\right) = (-1)^m \cos c$$

が成り立つことに注意する．

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c x^n}{n!} \tag{5.1}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k + \cdots + \binom{\alpha}{n-1}x^{n-1} + \binom{\alpha}{n}(1+c)^{\alpha-n}x^n \tag{5.2}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n(1+c)^n} \tag{5.3}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m\frac{(\cos c)x^{2m+1}}{(2m+1)!} \tag{5.4}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} + (-1)^m\frac{(\cos c)x^{2m}}{(2m)!} \tag{5.5}$$

関数 f を多項式で近似したときの誤差の評価について考える．n 回微分可能な関数 $f:(a,b)\to \boldsymbol{R}$ が与えられたとき, $x, p \in (a,b)$ に対して $f(x)$ を n 次多項式

$$f(p) + f'(p)(x-p) + \cdots + \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n$$

で近似したときの誤差は, テイラーの定理によって x と p の間の数 c を用いて

$$\frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n$$

と表される．実数 M で, x と p の間のすべての実数 t に対して $\left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(p)\right| \leqq M$ を満たすものがあるとき,

$$\left|\frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n\right| \leqq \frac{M|x-p|^n}{n!}$$

となるため, 上記の誤差は $\dfrac{M|x-p|^n}{n!}$ 以下であることがわかる．この結果を, $p=0$ で f が e^x, $(1+x)^\alpha$, $\log(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$ の場合に用いる．

(1) $f(x)=e^x$, $p=0$ の場合, $M=|e^x-1|$ ととれるため, (5.1) から e^x を $1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^k}{k!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$ で近似したときの誤差は $\dfrac{|e^x-1||x|^n}{n!}$ 以下である．

(2) $f(x)=(1+x)^\alpha$ $(x>-1)$, $p=0$ の場合, $M=|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)||(1+x)^{\alpha-n}-1|$ ととれるため, (5.2) から $(1+x)^\alpha$ を $1+\dbinom{\alpha}{1}x+\cdots+\dbinom{\alpha}{k}x^k+\cdots+\dbinom{\alpha}{n}x^n$ で近似したときの誤差は $\left|\dbinom{\alpha}{n}\right||(1+x)^{\alpha-n}-1||x|^n$ 以下である．

(3) $f(x)=\log(1+x)$ $(x>-1)$, $p=0$ の場合, $M=(n-1)!|(1+x)^{-n}-1|$ ととれるため, (5.3) から $\log(1+x)$ を $x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ で近似したときの誤差は $\dfrac{|(1+x)^{-n}-1||x|^n}{n}$ 以下である．

(4) $f(x)=\sin x$, $p=0$ の場合, $M=2$ ととれるため, (5.4) から $\sin x$ を $x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^k\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots+(-1)^m\dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$ で近似したときの誤差は $\dfrac{2|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}$ 以下である.

(5) $f(x)=\cos x$, $p=0$ の場合, $M=2$ ととれるため, (5.5) から $\cos x$ を $1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^k\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}+\cdots+(-1)^m\dfrac{x^{2m}}{(2m)!}$ で近似したときの誤差は $\dfrac{2|x|^{2m}}{(2m)!}$ 以下である.

補題 11.1 から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ だから, 上の (1), (4), (5) の誤差は, 近似する x の多項式の次数を大きくすれば, 0 に近づいてゆくことがわかる. また, $\dfrac{|(1+x)^{-n}-1||x|^n}{n}\leqq\dfrac{1}{n}\left(\left(\dfrac{|x|}{1+x}\right)^n+|x|^n\right)$ であり, $-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ ならば $0\leqq\dfrac{|x|}{1+x}\leqq 1$ だから, $-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ のとき (3) の誤差は n を大きくすれば 0 に近づいてゆく. (実は, $|x|\leqq 1$ ならば (3) のように近似を行った誤差は 0 に近づくことが示される.) 上の (2) の場合, n を大きくしたときの誤差の様子を以下で調べてみる.

補題 5.1 実数 α に対し $|x|<1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=0$ である.

証明 $x=0$ の場合は主張は明らかだから, $x\neq 0$ と仮定する. $N\geqq\max\left\{\alpha,\frac{|x|(2|\alpha|-1)-1}{1-|x|}\right\}$ を満たす自然数 N を選ぶと, $n\geqq N$ ならば次の不等式が成り立つ.

$$\frac{|\alpha-n|}{n+1}=1+\frac{-\alpha-1}{n+1}\leqq 1+\frac{|\alpha|-1}{n+1}\leqq 1+\frac{|\alpha|-1}{N+1}\leqq 1+\frac{|\alpha|-1}{\frac{|x|(2|\alpha|-1)-1}{1-|x|}+1}=\frac{1+|x|}{2|x|}$$

$a_n=\left|\dbinom{\alpha}{n}x^n\right|$ とおけば, $a_{n+1}=a_n\dfrac{|\alpha-n||x|}{n+1}$ だから, 上式より $n\geqq N$ ならば $a_{n+1}\leqq\left(\dfrac{1+|x|}{2}\right)a_n$ である. 従って $n\geqq N$ ならば $0\leqq a_n\leqq\left(\dfrac{1+|x|}{2}\right)^{n-N}a_N$ であり, $0<\dfrac{1+|x|}{2}<1$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=0$ が成り立つ. □

$-\dfrac{1}{2}<x<1$ ならば $0\leqq\dfrac{|x|}{1+x}<1$ であり, $\left|\dbinom{\alpha}{n}\right||(1+x)^{\alpha-n}-1||x|^n\leqq(1+x)^\alpha\left|\dbinom{\alpha}{n}\right|\left(\dfrac{|x|}{1+x}\right)^n+\left|\dbinom{\alpha}{n}\right||x|^n$ であることに注意すれば, 補題 5.1 から $-\dfrac{1}{2}<x<1$ のとき (2) の誤差は n を大きくすれば 0 に近づいてゆく. (実は, $|x|<1$ ならば (2) のように近似を行った誤差は 0 に近づくことが示される.) この結果を用いて, 与えられた正の実数 A の m 乗根の近似値とその誤差を見積もってみる.

$\sqrt[m]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を近似する多項式は $-\dfrac{1}{2}<x<1$ の場合以外は, 上で見たように n を大きくしても (2) で見積もった誤差の範囲は狭まっていかないので, $(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を近似する多項式の x に $A-1$ を代入しても $\sqrt[m]{A}$ のよい近似値が得られる保証はない.

そこで, まず $\sqrt[m]{A}=B(1+x)^{\frac{1}{m}}$ となる x が $-\dfrac{1}{2}$ と 1 の間に存在するように B を定める. $\sqrt[m]{A}=B(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を x について解けば $x=\dfrac{A}{B^m}-1$ となり, これを $-\dfrac{1}{2}<x<1$ に代入すれば $\dfrac{1}{2}A<B^m<2A$ が得られる. 従って $\dfrac{1}{2}A<B^m<2A$ を満たすような B を選び, x を $x=\dfrac{A}{B^m}-1$ で定めればよい. ($|x|$ が小さいほど誤差を見積もった値は小さくなるため, $\dfrac{A}{B^m}$ が 1 に近くなる. すなわち B^m が A に近くなるように選べれば, よい近似値が得られる.)

ここで, $\sqrt[m]{A}=B(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を $B\left(1+\dbinom{\frac{1}{m}}{1}x+\cdots+\dbinom{\frac{1}{m}}{k}x^k+\cdots+\dbinom{\frac{1}{m}}{n}x^n\right)$ で近似したときの誤差は (2) により $B\left|\dbinom{\frac{1}{m}}{n}\right|\left|(1+x)^{\frac{1}{m}-n}-1\right||x|^n$ 以下である. $\dfrac{1}{2}A<B^m<A$ ならば $0<x<1$ となるため, $(1+x)^{-n}<(1+x)^{\frac{1}{m}-n}<1$ だから $\left|(1+x)^{\frac{1}{m}-n}-1\right|<1-\dfrac{1}{(1+x)^n}$ である. また, $A<B^m<2A$ ならば $-\dfrac{1}{2}<x<0$ とな

るため, $1 < (1+x)^{\frac{1}{m}-n} < (1+x)^{-n}$ だから, $\left|(1+x)^{\frac{1}{m}-n}-1\right| < \dfrac{1}{(1+x)^n}-1$ である. 従って, いずれの場合でも $B\left|\dbinom{\frac{1}{m}}{n}\right|\left|(1+x)^{\frac{1}{m}-n}-1\right||x|^n < B\left|\dbinom{\frac{1}{m}}{n}\right|\left|\dfrac{1}{(1+x)^n}-1\right||x|^n$ となって, 次のことがわかる.

命題 5.2 正の実数 A に対し, $\dfrac{1}{2}A < B^m < 2A$ を満たす B を選んで, $x = \dfrac{A}{B^m}-1$ とおくとき, $\sqrt[m]{A}$ を $B\left(1+\dbinom{\frac{1}{m}}{1}x+\cdots+\dbinom{\frac{1}{m}}{k}x^k+\cdots+\dbinom{\frac{1}{m}}{n}x^n\right)$ で近似すれば, 誤差は $B\left|\dbinom{\frac{1}{m}}{n}\right|\left|\dfrac{1}{(1+x)^n}-1\right||x|^n$ 以下である.

例題 5.3 上の方法で $B=1.4$ としたとき, $\sqrt{2}$ を小数第 5 位まで求めるのに必要な x の多項式の次数を求めよ.

解答 $x=\dfrac{A}{B^2}-1=\dfrac{1}{49}$ より, 上の結果から $\sqrt{2}$ を $B\left(1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dbinom{\frac{1}{2}}{k}x^k\right)$ で近似すれば, 誤差は $\dfrac{7}{5}\left|\dbinom{\frac{1}{2}}{n}\right|\left(\dfrac{1}{49^n}-\dfrac{1}{50^n}\right)$ 以下である. $n=2$ ならば, この値は $\dfrac{495}{336140000}=0.0000014\cdots$ となる. 一方 $x=\dfrac{1}{49}$ ならば $\dfrac{7}{5}\left(1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2\right)$ の値は $1.4142128\cdots$ となり, $\sqrt{2}$ はこの値のプラスマイナス 0.0000015 の範囲 $1.4142113 < \sqrt{2} < 1.4142143$ にある. よって, $\sqrt{2}$ の小数第 5 位までは 1.41421 と確定できるため, 必要な x の多項式の次数は 2 である. □

テイラーの定理のもう一つの応用として「ニュートン法」と呼ばれる, 漸化式を用いて方程式の近似解を求める方法を述べる.

補題 5.4 関数 $f:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ は 2 回微分可能であるとし, $x,\alpha\in(a,b)$ は $f'(x)\neq 0$, $f(\alpha)=0$ を満たし, さらに正の定数 M で, 任意の $0<\theta<1$ に対して $|f''(\alpha+\theta(x-\alpha))|\leqq M$ が成り立つようなものが存在するとする. このとき, 次の不等式が成り立つ.

$$\left|x-\frac{f(x)}{f'(x)}-\alpha\right|\leqq\frac{M}{2|f'(x)|}|x-\alpha|^2$$

証明 テイラーの定理より $0<\theta<1$ で, $f(x)+f'(x)(\alpha-x)+\dfrac{f''(\alpha+\theta(x-\alpha))}{2}(\alpha-x)^2=f(\alpha)=0$ を満たすものがある. これより $\left|x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}-\alpha\right|=\left|\dfrac{f''(\alpha+\theta(x-\alpha))}{2f'(x)}\right||\alpha-x|^2\leqq\dfrac{M}{2|f'(x)|}|x-\alpha|^2$ を得る. □

命題 5.5 関数 $f:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ は 2 回微分可能であるとし, $\alpha\in(a,b)$ は $f(\alpha)=0$ を満たすとする. 漸化式 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ によって帰納的に定まる数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し, 実数 $p,\ q$ と正の定数 $L,\ M$ で, 次の条件を満たすものがあるとする.

(1) $a\leqq p\leqq\alpha\leqq q\leqq b$, $p<q$ であり, 任意の $n=0,1,2,\cdots$ に対して $p\leqq x_n\leqq q$ かつ $a<x_n<b$.

(2) 任意の $n=0,1,2,\cdots$ に対して $|f'(x_n)|\geqq L$.

(3) $x\in(p,q)$ ならば $|f''(x)|\leqq M$.

このとき, 任意の $n=0,1,2,\cdots$ に対して $|x_n-\alpha|\leqq\dfrac{2L}{M}\left(\dfrac{M|x_0-\alpha|}{2L}\right)^{2^n}$ が成り立つ. 従って $|x_0-\alpha|<\dfrac{2L}{M}$ ならば $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ は α に収束する.

証明 任意の n に対し, x_n と α の間の数は, 条件 (1) によって, 区間 (p,q) に含まれるため, 条件 (2), (3) と補題 5.4 から $|x_{n+1}-\alpha|=\left|x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\alpha\right|\leqq\dfrac{M}{2|f'(x_n)|}|x_n-\alpha|^2\leqq\dfrac{M}{2L}|x_n-\alpha|^2$ が得られる. この不等式から, k による帰納法により $|x_n-\alpha|\leqq\left(\dfrac{M}{2L}\right)^{2^k-1}|x_{n-k}-\alpha|^{2^k}$ が示されるため, とくに $k=n$ とすれば $|x_n-\alpha|\leqq\left(\dfrac{M}{2L}\right)^{2^n-1}|x_0-\alpha|^{2^n}=\dfrac{2L}{M}\left(\dfrac{M|x_0-\alpha|}{2L}\right)^{2^n}$ が得られる. □

注意 5.6 上の命題において，x_{n+1} は xy 平面における点 $(x_n, f(x_n))$ における f のグラフの接線と x 軸の交点の x 座標である．また，$|x_0-\alpha| < b-a$ だから，上の命題より $b-a < \dfrac{2L}{M}$ ならば $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ は α に収束し，$|x_n-\alpha| < \dfrac{2L}{M}\left(\dfrac{M(b-a)}{2L}\right)^{2^n}$ が成り立つ．

とくに m を 2 以上の整数, $A>0$ として $f(x)=x^m-A$ の場合, $b^m > x_0^m > A > a^m$ を満たす正の実数 a, b, x_0 を選んで, $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}=\left(1-\dfrac{1}{m}\right)x_n+\dfrac{A}{mx_n^{m-1}}$ によって定まる数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考えると, この数列は単調に減少して $\sqrt[m]{A}$ に収束するため, 任意の n に対して $a < x_n \leqq x_0$ であり, $x\in(a,x_0)$ ならば $f'(x) \geqq ma^{m-1}$, $|f''(x)| \leqq m(m-1)x_0^{m-2}$ より $L=ma^{m-1}$, $M=m(m-1)x_0^{m-2}$ ととることができる．$\left|x_0-\sqrt[m]{A}\right| < x_0-a$ であることに注意すると, 命題 5.5 から $\sqrt[m]{A}$ を x_n で近似した誤差は

$$\frac{2L}{M}\left(\frac{M(x_0-a)}{2L}\right)^{2^n}=\frac{2a^{m-1}}{(m-1)x_0^{m-2}}\left(\frac{m-1}{2}\left(\left(\frac{x_0}{a}\right)^{m-1}-\left(\frac{x_0}{a}\right)^{m-2}\right)\right)^{2^n}$$

以下となるため, $\left(\dfrac{x_0}{a}\right)^{m-1}-\left(\dfrac{x_0}{a}\right)^{m-2} < \dfrac{2}{m-1}$ となるように a, x_0 を選べば, この誤差は急速に 0 に近づく．

上の議論から, とくに $m=2$ の場合は $a^2 < A < x_0^2 < b^2$ かつ $x_0 < 3a$ となるように a, x_0 を選べばよい．

例題 5.7 上で $A=2$ の場合, $x_0=1.5$, $a=1.4$ としたとき, x_n が小数第 5 位まで $\sqrt{2}$ に一致するためには, n はいくらであればよいか答えよ．

解答 命題 5.5 により, $\sqrt{2}$ を x_n で近似した誤差は $\dfrac{14}{5}\left(\dfrac{1}{28}\right)^{2^n}$ 以下であるため, $\dfrac{14}{5}\left(\dfrac{1}{28}\right)^{2^n} < 10^{-6}$ となるには, $2^n(-\log_{10}28)+\log_{10}14-\log_{10}5 < -6$ より $2^n > 1+\dfrac{5}{\log_{10}28}=4.455\cdots$ だから $n=3$ でよい．ちなみに $n=3$ のとき誤差は $\dfrac{1}{10(28)^7}=0.0000000000074113\ldots$ 以下であり, $x_1=\dfrac{17}{12}=1.41666\cdots$, $x_2=\dfrac{577}{408}=1.4142156\cdots$, $x_3=\dfrac{665857}{470832}=1.4142135623746899\cdots$, $\sqrt{2}=1.414213562373095\cdots$ で, x_3 は小数第 11 位まで $\sqrt{2}$ に一致する.$\square$

関数 $f:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ は何回でも微分可能であると仮定する．$x,p\in(a,b)$ と任意の自然数 n に対し, テイラーの定理から x と p の間の点 $c_{n,x}$ で等式

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\cdots+\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\cdots+\frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n+\frac{f^{(n+1)}(c_{n,x})}{(n+1)!}(x-p)^{n+1}$$

を満たすものがあるため, $f(x)$ を多項式

$$f(p)+f'(p)(x-p)+\cdots+\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\cdots+\frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n$$

で近似したときの誤差は $\dfrac{f^{(n+1)}(c_{n,x})}{(n+1)!}(x-p)^{n+1}$ である．n を大きくしたときに, この誤差が 0 に近づくことは, 無限級数

$$f(p)+f'(p)(x-p)+\cdots+\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\cdots$$

が $f(x)$ に収束することに他ならないため, 次の定理が成り立つことがわかる．

定理 5.8 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(c_{n,x})}{(n+1)!}(x-p)^{n+1}=0$ ならば, 等式 $f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\cdots+\dfrac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\cdots$ が成り立つ．

この結果をふまえて, p の近くの x に対し, $f(x)$ に収束する無限級数

$$a_0+a_1(x-p)+\cdots+a_k(x-p)^k+\cdots$$

を p における f のテイラー展開 (級数) と呼ぶ．とくに p が 0 の場合にはマクローリン展開またはマクローリン級数ともいう．

6 微分積分学の基本定理

命題 6.1 $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ が積分可能ならば有界である.

証明 仮定から $[a,b]$ の分割 Δ で, Δ の任意の代表点 Ξ に対して $\left|R_{\Delta,\Xi}(f)-\int_a^b f(x)dx\right| \leqq 1$ となるものがあるため $|R_{\Delta,\Xi}(f)| \leqq \left|\int_a^b f(x)dx\right|+1$ である. ここで $\Delta=\{x_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$, $\Xi=\{\xi_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ とおく. もし, ある区間 $[x_{k-1},x_k]$ で f が有界でないとすると ξ_i $(i\neq k)$ をすべて固定して, $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ の選び方をかえれば $|f(\xi_k)|(x_k-x_{k-1})-\left|\sum_{i\neq k} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\right| \leqq |R_{\Delta,\Xi}(f)| \leqq \left|\int_a^b f(x)dx\right|+1$ より, この左辺はいくらでも大きくなるため矛盾が生じる. 従って f は各区間 $[x_{k-1},x_k]$ で有界だから $[a,b]=\bigcup_{i=1}^{n}[x_{k-1},x_k]$ において有界である. □

定義 6.2 関数 $f:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ に対し, 微分可能な関数 $F:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ が $F'=f$ を満たすとき, F を f の原始関数という.

定理 6.3 $f:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ が積分可能ならば, $c\in[a,b]$ に対し $F:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ を $F(x)=\int_c^x f(t)dt$ で定義すれば F は連続関数である. さらに f が $p\in(a,b)$ において連続ならば F は p において微分可能であり, $F'(p)=f(p)$ が成り立つ. 従って, f が連続関数ならば, F は f の原始関数である.

証明 命題 6.1 により, 実数 M で, すべての $x\in[a,b]$ に対して $|f(x)|\leqq M$ となるものがある. 積分の性質から, 任意の $p\in[a,b]$ に対して

$$|F(p+h)-F(p)|=\left|\int_c^{p+h} f(t)dt-\int_c^p f(t)dt\right|=\left|\int_p^{p+h} f(t)dt\right|\leqq\left|\int_p^{p+h}|f(t)|dt\right|\leqq\left|\int_p^{p+h}Mdt\right|=|h|M.$$

従って $h\to 0$ のとき $F(p+h)\to F(p)$ となるため, F は p で連続である.

f は p で連続だから, 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ で $(p-\delta,p+\delta)\subset[a,b]$ かつ「$|t-p|<\delta$ ならば $|f(t)-f(p)|<\varepsilon$」を満たすものがとれる. $|h|<\delta$ のとき

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(p+h)-F(p)}{h}-f(p)\right|&=\left|\frac{1}{h}\left(\int_c^{p+h} f(t)dt-\int_c^p f(t)dt-\int_p^{p+h} f(p)dt\right)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_p^{p+h}(f(t)-f(p))dt\right|\\&\leqq\left|\frac{1}{h}\int_p^{p+h}|f(t)-f(p)|dt\right|\leqq\left|\frac{1}{h}\int_p^{p+h}\varepsilon dt\right|=\varepsilon\end{aligned}$$

より $\lim_{h\to 0}\frac{F(p+h)-F(p)}{h}=f(p)$ である. □

系 6.4 $f,F:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ を連続関数とする. F は (a,b) の各点 x で微分可能であり, $F'(x)=f(x)$ が成り立てば $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ である.

証明 $G(x)=\int_a^x f(t)dt$ で $G:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ を定めれば定理 6.3 から, 任意の $x\in(a,b)$ に対して $G'(x)=f(x)=F'(x)$ である. 従って系 4.7 により, $G-F$ は定数値関数となるため, $G(b)-F(b)=G(a)-F(a)$ が成り立つ. このことと $G(a)=0$ より $\int_a^b f(t)dt=G(b)=G(b)-G(a)=F(b)-F(a)$. □

微分積分学の基本定理を用いずに, 関数の積分を求めることは, 次の例題でみるように基本的な関数 x^k の場合のように, 難しいことが多い.

例題 6.5 k を正の整数, a を正の実数とするとき, 区間 $[0,a]$ を n 等分する分割を考えることによって, $\displaystyle\int_0^a x^k dx$ を積分の定義に従って計算せよ.

解答 まず少し準備をする. $x^{[k]} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ $(k=1,2,\dots)$ とおくと $x^k - x^{[k]}$ は, 定数項を含まない x の $n-1$ 次の整数係数の多項式だから k による帰納法で, $x^k = x^{[k]} + \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}x^{[j]}$ と満たす整数 a_{kj} があることが分かる. また, $(x+1)^{[k+1]} - x^{[k+1]} = (k+1)x^{[k]}$ だから, この両辺に $x = 1,2,\dots,n$ を代入して辺々加えれば, $1^{[k+1]} = 0$ より $\sum_{i=1}^n i^{[k]} = \dfrac{1}{k+1}(n+1)^{[k+1]}$ を得る. 従って $\sum_{i=1}^n i^k = \sum_{i=1}^n i^{[k]} + \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} \sum_{i=1}^n i^{[j]} = \dfrac{1}{k+1}(n+1)^{[k+1]} + \sum_{j=1}^{k-1} \dfrac{a_{kj}}{j+1}(n+1)^{[j+1]}$ となるため $\sum_{i=1}^n i^k$ は n の $k+1$ 次多項式で, n^{k+1} の係数は $\dfrac{1}{k+1}$ である. 故に $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^n i^k = \dfrac{1}{k+1}$ だから $\displaystyle\int_0^a x^k dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \frac{a}{n}\left(\frac{ai}{n}\right)^k = a^{k+1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^n i^k = \frac{a^{k+1}}{k+1}.$ □

7 テイラーの定理再考

定理 7.1 関数 $f:(a,b)\to \boldsymbol{R}$ は n 回微分可能で, n 次導関数 $f^{(n)}:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ が連続ならば, $x,p\in(a,b)$ に対して次の等式が成り立つ.

$$f(x) = f(p) + \cdots + \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}(x-p)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\int_p^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt$$

証明 n による帰納法で主張を示す. 微分積分学の基本定理により $f(x) = f(p) + \displaystyle\int_p^x f'(t)\,dt$ となるため, $n=1$ のとき主張は正しい. $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_p^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt$ が成り立つとすれば, 部分積分法により,

$$\int_p^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt = \int_p^x \left(-\frac{1}{n}(x-t)^n\right)' f^{(n)}(t)\,dt = \frac{1}{n}(x-p)^n f^{(n)}(p) + \frac{1}{n}\int_p^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

となるため, これを上の等式に代入すれば $n+1$ のときも主張が正しいことがわかる. □

$\displaystyle\int_p^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(p)dt = \frac{f^{(n)}(p)}{n}(x-p)^n$ だから, 上の定理より, 次の等式が成り立つ.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_p^x (x-t)^{n-1}\left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(p)\right)dt$$

故に $f(x)$ を x の多項式 $\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k$, $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k$ で近似したときの誤差はそれぞれ次で与えられる.

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_p^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt, \qquad \frac{1}{(n-1)!}\int_p^x (x-t)^{n-1}\left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(p)\right)dt \tag{7.1}$$

$p=0$, $f(x) = (1+x)^\alpha$ $(\alpha \neq 0,1)$ の場合に, これらの誤差を評価する. $f^{(n)}(t) = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(1+t)^{n-\alpha}}$ より

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt = n\binom{\alpha}{n}\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-\alpha}}\,dt \tag{7.2}$$

$-1 < x < 0$ ならば, 任意の $x \leqq t \leqq 0$ に対して $x \leqq \dfrac{x-t}{1+t} \leqq 0$ だから n が奇数ならば $0 \leqq \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-1}} \leqq x^{n-1}$, n が偶数ならば $x^{n-1} \leqq \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-1}} \leqq 0$ が成り立つため, 次の不等式が成り立つ.

$$0 \leqq \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-\alpha}} \leqq x^{n-1}(1+t)^{\alpha-1}\ \ (n\ \text{は奇数}) \qquad x^{n-1}(1+t)^{\alpha-1} \leqq \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-\alpha}} \leqq 0\ \ (n\ \text{は偶数})$$

$-1<x<0$ であることに注意してこれらの不等式の各辺を 0 から x まで t で積分すれば以下の不等式が得られる.

$$\frac{x^{n-1}}{\alpha}((1+x)^\alpha-1) \leqq \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-\alpha}}\,dt \leqq 0 \ \ (n \text{ は奇数}) \quad 0 \leqq \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-\alpha}}\,dt \leqq \frac{x^{n-1}}{\alpha}((1+x)^\alpha-1) \ \ (n \text{ は偶数})$$

$0<x<1$ かつ $n \geqq \alpha$ ならば, 任意の $0 \leqq t \leqq x$ に対して $0 \leqq \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-\alpha}} \leqq (x-t)^{n-1}$ だから, この各辺を 0 から x まで t で積分して不等式 $0 \leqq \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-\alpha}}\,dt \leqq \frac{x^n}{n}$ を得る. 故に (7.1), (7.2) と補題 5.1 から次がわかる.

命題 7.2 $(1+x)^\alpha$ を $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{\alpha}{k}x^k$ で近似した誤差は, $-1<x<0$ ならば $\left|\dbinom{\alpha-1}{n-1}x^{n-1}\right||(1+x)^\alpha-1|$ 以下であり, $0<x<1$ かつ $n \geqq \alpha$ ならば, $\left|\dbinom{\alpha}{n}x^n\right|$ 以下である. 従って $|x|<1$ ならば $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$ が成り立つ.

$\displaystyle\int_0^x (x-t)^{n-1}dt = \frac{x^n}{n}$ だから, (7.1) の後者の値は次で与えられる.

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}\left(f^{(n)}(t)-f^{(n)}(0)\right)dt = n\binom{\alpha}{n}\left(\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-\alpha}}\,dt - \frac{x^n}{n}\right) \tag{7.3}$$

$-1<x<0$ の場合, 上の結果から次の不等式が得られる.

$$\frac{x^{n-1}}{\alpha}((1+x)^\alpha-1)-\frac{x^n}{n} \leqq \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-\alpha}}\,dt - \frac{x^n}{n} \leqq -\frac{x^n}{n} \ \ (n \text{ は奇数}) \tag{7.4}$$

$$-\frac{x^n}{n} \leqq \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-\alpha}}\,dt - \frac{x^n}{n} \leqq \frac{x^{n-1}}{\alpha}((1+x)^\alpha-1)-\frac{x^n}{n} \ \ (n \text{ は偶数}) \tag{7.5}$$

補題 7.3 $\varphi(x) = \dfrac{1}{2\alpha}((1+x)^\alpha-1)-\dfrac{x}{n}$ によって関数 $\varphi : (-1,\infty) \to \boldsymbol{R}$ を定義する. $n \geqq \max\{2, 2\alpha\}$ ならば $-1<x \leqq 0$ に対して $\varphi(x) \leqq 0$ である.

証明 $\varphi'(x) = \dfrac{(x+1)^{\alpha-1}}{2}-\dfrac{1}{n}$ だから $\alpha<1$ の場合, φ は $\left(-1, \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}-1\right]$ で単調増加, $\left[\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}-1, \infty\right)$ で単調減少である. n が 2 以上ならば $\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}-1 \geqq 0$ となり, $\varphi(0)=0$ だから $-1<x \leqq 0$ ならば $\varphi(x) \leqq 0$ である.

$\alpha>1$ の場合, φ は $\left(-1, \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}-1\right]$ で単調減少, $\left[\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}-1, \infty\right)$ で単調増加である. また, n が 2α 以上ならば $\displaystyle\lim_{x\to-1+0}\varphi(x) = \frac{2\alpha-n}{2\alpha n} \leqq 0$ であり, $\varphi(0)=0$ だから $-1<x \leqq 0$ ならば $\varphi(x) \leqq 0$ である. □

上の補題から $n \geqq \max\{2, 2\alpha\}$ ならば $-1<x \leqq 0$ に対して, $\dfrac{x^{n-1}}{\alpha}((1+x)^\alpha-1)-\dfrac{x^n}{n}$ と $-\dfrac{x^n}{n}$ の平均は, n が奇数ならば 0 以下であり, n が奇数ならば 0 以上だから, (7.4), (7.5) から $n \geqq \max\{2, 2\alpha\}$ かつ $-1<x<0$ ならば

$$\left|\int_0^x \left(\frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-\alpha}}-(x-t)^{n-1}\right)dt\right| \leqq \left|\frac{x^{n-1}}{\alpha}((1+x)^\alpha-1)-\frac{x^n}{n}\right| \tag{7.6}$$

が成り立つ. また, $0<x<1$ かつ $n \geqq \alpha$ ならば, 上でみたように $0 \leqq \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-\alpha}}\,dt \leqq \frac{x^n}{n}$ だから

$$-\frac{x^n}{n} \leqq \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n-\alpha}}\,dt - \frac{x^n}{n} \leqq 0 \tag{7.7}$$

である. (7.3), (7.6), (7.7) から次の結果が得られる.

命題 7.4 $-1<x<1$ に対し, $(1+x)^\alpha$ を $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k$ で近似した誤差は, $-1<x<0$ かつ $n \geqq \max\{2, 2\alpha\}$ ならば $\left|\dbinom{\alpha-1}{n-1}x^{n-1}((1+x)^\alpha-1)-\dbinom{\alpha}{n}x^n\right|$ 以下であり, $0<x<1$ かつ $n \geqq \alpha$ ならば $\left|\dbinom{\alpha}{n}x^n\right|$ 以下である.

注意 7.5 $-1<x<0$ の場合は, $(1+x)^\alpha$ を $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k$ で近似した誤差の方が $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{\alpha}{k}x^k$ で近似した誤差より $\left|\dbinom{\alpha}{n}x^n\right|$ だけ小さい.

8 $\log(1+x)$, $\tan^{-1}x$ の多項式による近似

初項 1, 公比 $-t$ の等比数列 $1, -t, t^2, -t^3, \ldots$ の第 n 項までの和

$$1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}t^{k-1} = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$$

を考える．この両辺の 0 から x まで積分して得られる等式

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \int_0^x \frac{1-(-t)^n}{1+t}dx = \log(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt$$

から, 次の等式が得られる．

$$\log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right) = \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt \tag{8.1}$$

$-1 < x < 0$ ならば, 任意の $t \in [x, 0]$ に対して $\dfrac{(-t)^n}{1+t} \leqq \dfrac{(-t)^n}{1+x}$ だから

$$\left|\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt\right| \leqq \int_x^0 \left|\frac{(-t)^n}{1+t}\right|dt = \int_x^0 \frac{(-t)^n}{1+t}dt \leqq \int_x^0 \frac{(-t)^n}{1+x}dt = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)(1+x)}$$

$0 < x \leqq 1$ ならば, 任意の $t \in [0, x]$ に対して $\dfrac{t^n}{1+t} \leqq t^n$ だから

$$\left|\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt\right| \leqq \int_0^x \left|\frac{(-t)^n}{1+t}\right|dt = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \leqq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

となるため, 等式 (8.1) から次のことがわかる．

命題 8.1 $\log(1+x)$ を x の n 次多項式 $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$ で近似した誤差は, $-1 < x < 0$ ならば $\dfrac{(-x)^{n+1}}{(n+1)(1+x)}$ 以下であり, $0 < x \leqq 1$ ならば $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ 以下である．従って $-1 < x \leqq 1$ ならば $\log(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$ が成り立つ．

とくに $x = 1$ の場合, $\log 2$ を $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ で近似した誤差は $\dfrac{1}{n+1}$ 以下である．

初項 1, 公比 $-t^2$ の等比数列 $1, -t^2, t^4, -t^6, \ldots$ の第 n 項までの和

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{2n-2} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}t^{2k-2} = \frac{1-(-t^2)^n}{1+t^2}$$

を考える．この両辺の 0 から x まで積分して得られる等式

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \tan^{-1}x - \int_0^x \frac{(-t^2)^n}{1+t^2}dt$$

から, 次の等式が得られる．

$$\tan^{-1}x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) = \int_0^x \frac{(-t^2)^n}{1+t^2}dt \tag{8.2}$$

不等式 $0 \leqq \dfrac{t^{2n}}{1+t^2} \leqq t^{2n}$ が任意の実数 t に対して成り立つことに注意すれば, $x \geqq 0$ ならば

$$\left|\int_0^x \frac{(-t^2)^n}{1+t^2}dt\right| = \left|(-1)^n\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt\right| = \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt \leqq \int_0^x t^{2n}dt = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1},$$

$x < 0$ ならば

$$\left|\int_0^x \frac{(-t^2)^n}{1+t^2}dt\right| = \left|(-1)^n\int_x^0 \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt\right| = \int_x^0 \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt \leqq \int_x^0 t^{2n}dt = -\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$$

となるため, いずれにしても $\left|\displaystyle\int_0^x \frac{(-t^2)^n}{1+t^2}dt\right| \leqq \dfrac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$ が成り立つ．従って等式 (8.2) から次のことがわかる．

命題 8.2 $\tan^{-1} x$ を x の $2n-1$ 次多項式 $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{x^{2k-1}}{2k-1}$ で近似した誤差は, $|x| \leqq 1$ ならば $\dfrac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$ 以下である. 従って $|x| \leqq 1$ ならば $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{x^{2k-1}}{2k-1}$ が成り立つ.

とくに $x=1$ の場合, $\dfrac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1$ を $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ で近似したときの誤差は $\dfrac{1}{2n+1}$ 以下だから, π を $4\left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)$ で近似したときの誤差は $\dfrac{4}{2n+1}$ 以下である. 従って, この級数を用いて π を例えば小数点以下 10 万桁まで求めたければ, $\dfrac{4}{2n+1} \leqq 10^{-100001}$ を満たす n, すなわち $2{\cdot}10^{100001}$ 項目までの級数の和を計算する必要がある. これでは, コンピューターを用いても労力がかかり過ぎる (不可能かも) ので, もう少し工夫をする.

次の等式をマチン (John.Machin ; 1685〜1751, 1706) の公式というが, これと命題 8.2 を用いて, π を近似する級数を導く.

$$\pi = 16\tan^{-1}\frac{1}{5} - 4\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

実際 1949 年に「世界最初」と宣伝された ENIAC と呼ばれるのデジタル電子計算機で, マチンの公式から導かれた級数を用いて π を 2037 桁まで求めた.

命題 8.2 で $x = \dfrac{1}{5}$, $x = \dfrac{1}{239}$ とすれば

$$\left|16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5^3{\cdot}3} + \frac{1}{5^5{\cdot}5} - \frac{1}{5^7{\cdot}7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{5^{2n-1}(2n-1)}\right) - 16\tan^{-1}\frac{1}{5}\right| \leqq \frac{16}{5^{2n+1}(2n+1)}$$

$$\left|4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{239^3{\cdot}3} + \frac{1}{239^5{\cdot}5} - \frac{1}{239^7{\cdot}7} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{239^{2m-1}(2m-1)}\right) - 4\tan^{-1}\frac{1}{239}\right| \leqq \frac{4}{239^{2m+1}(2m+1)}$$

が得られる. 従って, マチンの公式と三角不等式 $|x+y| \leqq |x| + |y|$ を用いると, 上の 2 つの不等式から

$$\begin{aligned}\left|16\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{5^{2k-1}(2k-1)} - 4\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{239^{2k-1}(2k-1)} - \pi\right| &\leqq \left|16\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{5^{2k-1}(2k-1)} - 16\tan^{-1}\frac{1}{5}\right| \\ &\quad + \left|4\tan^{-1}\frac{1}{239} - 4\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{239^{2k-1}(2k-1)}\right| \\ &\leqq \frac{16}{5^{2n+1}(2n+1)} + \frac{4}{239^{2m+1}(2m+1)}\end{aligned}$$

となるため, π を $16\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{5^{2k-1}(2k-1)} - 4\sum_{k=1}^{m}\dfrac{(-1)^{k-1}}{239^{2k-1}(2k-1)}$ で近似したときの誤差は

$$\frac{16}{5^{2n+1}(2n+1)} + \frac{4}{239^{2m+1}(2m+1)}$$

以下である. 自然数 l に対して, $\dfrac{16}{5^{2n+1}(2n+1)} < \dfrac{1}{2{\cdot}10^{l}}$ かつ $\dfrac{4}{239^{2m+1}(2m+1)} < \dfrac{1}{2{\cdot}10^{l}}$ が成り立つならば, $\dfrac{16}{5^{2n+1}} < \dfrac{16}{5^{2n+1}(2n+1)}$, $\dfrac{4}{239^{2m+1}} < \dfrac{4}{239^{2m+1}(2m+1)}$ より, $\dfrac{16}{5^{2n+1}} < \dfrac{1}{2{\cdot}10^{l}}$ かつ $\dfrac{4}{239^{2m+1}} < \dfrac{1}{2{\cdot}10^{l}}$ が成り立つ. これらの両辺の常用対数を考えて, n, m について解けば

$$n > \frac{l + 5\log_{10}2 - 1}{2\log_{10}5} \fallingdotseq \frac{l + 0.505}{1.398}, \quad m > \frac{l + 3\log_{10}2 - \log_{10}239}{2\log_{10}239} \fallingdotseq \frac{l - 1.4754}{4.7568}$$

となる. 従って, π を例えば小数点以下 10 万桁まで求めたければ $l = 100001$ として,

$$n > \frac{100001.505}{1.398} \fallingdotseq 71532, \quad m > \frac{99999.5246}{4.7568} \fallingdotseq 21022$$

だから $16\sum_{k=1}^{71533}\dfrac{(-1)^{k-1}}{5^{2k-1}(2k-1)}-4\sum_{k=1}^{21023}\dfrac{(-1)^{k-1}}{239^{2k-1}(2k-1)}$ を計算すればよい.

以下で, Web で見つけた $\tan^{-1}$ を用いた π の公式を挙げておく.

・ハットン (Charles Huttion ; 1737〜1823) の公式

$$\frac{\pi}{4}=2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7},\qquad \frac{\pi}{4}=3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{5}{99}$$

・オイラー (Leonhard Euler ; 1707〜1783) の公式

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3},\qquad \frac{\pi}{4}=5\tan^{-1}\frac{1}{7}+2\tan^{-1}\frac{3}{79}$$

・ベガ (Vega) の公式 (この公式はヘルマンまたはクラウゼンの発見であるという説もある.)

$$\frac{\pi}{4}=2\tan^{-1}\frac{1}{2}-\tan^{-1}\frac{1}{7}$$

・ベガ (Vega) の公式

$$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-2\tan^{-1}\frac{1}{408}+\tan^{-1}\frac{1}{1393}$$

・ダーゼ (Z. Dase ; 1804〜1861) の公式

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}$$

・ガウス (Carl Friedrich Gauss ; 1777〜1855) の公式

$$\frac{\pi}{4}=12\tan^{-1}\frac{1}{18}+8\tan^{-1}\frac{1}{57}-5\tan^{-1}\frac{1}{239},\qquad \frac{\pi}{4}=3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{20}+\tan^{-1}\frac{1}{1985}$$

・ラザフォード (Rutherford) の公式

$$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{70}+\tan^{-1}\frac{1}{99}$$

・クリンジェンシェルナ (S. Klingenstierna, 1730) の公式・フゼインガーの公式

$$\frac{\pi}{4}=8\tan^{-1}\frac{1}{10}-\tan^{-1}\frac{1}{239}-4\tan^{-1}\frac{1}{515}$$

・シャンクス (W. Shanks ; 1812〜1882) の公式・シュテルマー (F. C. M. Störmer) の公式

$$\frac{\pi}{4}=6\tan^{-1}\frac{1}{8}+2\tan^{-1}\frac{1}{57}+\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

・シュテルマー (F. C. M. Störmer,1896) の公式

$$\frac{\pi}{4}=44\tan^{-1}\frac{1}{57}+7\tan^{-1}\frac{1}{239}-12\tan^{-1}\frac{1}{682}+24\tan^{-1}\frac{1}{12943}$$

・エスコットの公式

$$\frac{\pi}{4}=22\tan^{-1}\frac{1}{28}+2\tan^{-1}\frac{1}{443}-5\tan^{-1}\frac{1}{1393}-10\tan^{-1}\frac{1}{11018}$$

・高野喜久雄 (1982) の公式 (この公式を用いて, 東京大学の金田教授と日立製作所は 2002 年 11 月に当時の π の計算の世界新記録である約 1 兆 2411 億桁を計算した. 現在の記録は 2016 年 11 月 15 日の 22,459,157,718,361 桁.)

$$\frac{\pi}{4}=12\tan^{-1}\frac{1}{49}+32\tan^{-1}\frac{1}{57}-5\tan^{-1}\frac{1}{239}+12\tan^{-1}\frac{1}{110443}$$

9　広義積分

定理 9.1 a を実数, b を a より大きい実数または ∞ とし, 区間 $[a,b)$ で定義された実数値関数 f は単調増加であるとする．実数 M で, 条件「$x\in[a,b)$ ならば $f(x)\leqq M$」を満たすものが存在するとき, 極限 $\displaystyle\lim_{x\to b-0}f(x)$ は存在する．もし, 上記の条件を満たす実数 M が存在しなければ, $\displaystyle\lim_{x\to b-0}f(x)$ は正の無限大に発散する．

証明 実数 M で, 条件「$x\in[a,b)$ ならば $f(x)\leqq M$」を満たすものが存在すると仮定する．数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を, $b\neq\infty$ ならば $a_n=b-\dfrac{b-a}{n}$, $b=\infty$ ならば $a_n=a+n-1$ で定めれば, 各 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列で, 各項は区間 $[a,b)$ に属し, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=b$ が成り立つ．f は単調増加関数だから $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列で, 仮定からすべての n に対して $f(a_n)\leqq M$ が成り立つため, $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である．従って連続性の公理によって $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するため, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(a_n)=L$ とおいて, $\displaystyle\lim_{x\to b-0}f(x)=L$ であることを以下で示す．

$f(c)>L$ となる $c\in[a,b)$ が存在すると仮定する．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調に増加して b に収束 ($b=\infty$ のときは正の無限大に発散) するため, $c<a_K<b$ を満たす自然数 K がある．ところが, f は単調増加関数で, $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は単調に増加して L に収束するため $L<f(c)\leqq f(a_K)\leqq L$ となって矛盾が生じる．故に, 任意の $x\in[a,b)$ に対して $f(x)\leqq L$ である．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(a_n)=L$ より, 任意の $\varepsilon>0$ に対して自然数 N で, 条件「$n\geqq N$ ならば $|f(a_n)-L|<\varepsilon$」を満たすものがある．$b\neq\infty$ の場合, $b-\dfrac{b-a}{N}=a_N<x<b$ ならば $f(a_N)\leqq f(x)$ であり, $L-\varepsilon<f(a_N)$ だから $L-\varepsilon<f(x)\leqq L$ が成り立つため $\displaystyle\lim_{x\to b-0}f(x)=L$ である．$b=\infty$ の場合, $x>a_N=a+N-1$ ならば $f(a_N)\leqq f(x)$ であり, $L-\varepsilon<f(a_N)$ だから $L-\varepsilon<f(x)\leqq L$ が成り立つため $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=L$ である．

実数 M で, 条件「$x\in[a,b)$ ならば $f(x)\leqq M$」を満たすものは存在しないと仮定すれば, 任意の実数 R に対して, $f(x)>R$ を満たす $x\in[a,b)$ が存在するため, そのような x を 1 つ選んで x_R とする．f は単調増加関数だから, $x_R<x<b$ ならば $f(x)\geqq f(x_R)>R$ となるため, $\displaystyle\lim_{x\to b-0}f(x)=\infty$ である． □

実数値関数 f がつねに 0 以上の値をとるとき, f を正値関数という．

定理 9.2 $a<b\leqq\infty$ とし, 区間 $[a,b)$ で定義された正値関数 f が, 任意の $x\in[a,b)$ に対して, 区間 $[a,x]$ で積分可能であるとする．このとき, 広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ が収束するか, または正の無限大に発散し, 収束するための必要十分条件は, 実数 M で条件「$t\in[a,b)$ ならば $\displaystyle\int_a^t f(x)dx\leqq M$」を満たすものが存在することである．

証明 関数 $F:[a,b)\to\boldsymbol{R}$ を $F(t)=\displaystyle\int_a^t f(x)dx$ で定めれば, F は単調増加関数である．実際 $a\leqq s\leqq t<b$ ならば $F(t)=\displaystyle\int_a^t f(x)dx=\int_a^s f(x)dx+\int_s^t f(x)dx=F(s)+\int_s^t f(x)dx$ であり $f(x)\geqq 0$ だから $\displaystyle\int_s^t f(x)dx\geqq 0$ となるため $F(t)\geqq F(s)$ である．従って, 定理 9.1 を関数 F に対して用いると, 条件「$t\in[a,b)$ ならば $\displaystyle\int_a^t f(x)dx\leqq M$」を満たす実数 M が存在するとき, 広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to b-0}F(t)$ は収束し, そのような M が存在しなければ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は正の無限大に発散する． □

系 9.3 $a<b\leqq\infty$ とし, 区間 $[a,b)$ で定義された正値関数 f, g が, 任意の $x\in[a,b)$ に対して, 区間 $[a,x]$ で積分可能であり, $f(x)\leqq g(x)$ が成り立つとする．

(1) $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ が収束すれば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ も収束する．　(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ が発散すれば $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ も発散する．

証明 仮定から任意の $t\in[a,b)$ に対して, $\displaystyle\int_a^t f(x)dx\leqq\int_a^t g(x)dx$ が成り立ち, $\displaystyle\int_a^t g(x)dx$ は t の単調増加関数だか

ら, $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ が収束すれば, 任意の $t \in [a,b)$ に対して, $\displaystyle\int_a^t f(x)dx \leqq \int_a^t g(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx$ が成り立つため, 定理 9.2 により $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ も収束する. (2) の主張は (1) の対偶である. □

系 9.4 $a < b \leqq \infty$ とし, 区間 $[a,b)$ で定義された正値関数 f, g が, 任意の $x \in [a,b)$ に対して, 区間 $[a,x]$ で積分可能であり, $g(x) > 0$ が成り立つとする.

(1) $c \in [a,b)$ と正の実数 K で, 条件「$x \in [c,b)$ ならば $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leqq K$」を満たすものが存在するとき, $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ が収束すれば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ も収束し, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ が発散すれば $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ も発散する.

(2) $c \in [a,b)$ と正の実数 K で, 条件「$x \in [c,b)$ ならば $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqq K$」を満たすものが存在するとき, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ が収束すれば $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ も収束し, $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ が発散すれば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ も発散する.

証明 (1) 仮定から $x \in [c,b)$ ならば $f(x) \leqq Kg(x)$ であり, $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ が収束すれば $\displaystyle\int_c^b Kg(x)dx$ も収束するため, 系 9.3 の (1) によって, $\displaystyle\int_c^b f(x)dx$ も収束する. 従って $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ も収束する. 後半の主張は前半の主張の対偶である.

(2) 仮定から $x \in [c,b)$ ならば $g(x) \leqq \dfrac{1}{K}f(x)$ であり, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ が収束すれば $\displaystyle\int_c^b \frac{1}{K}f(x)dx$ も収束するため, 系 9.3 の (1) によって, $\displaystyle\int_c^b g(x)dx$ も収束する. 従って $\displaystyle\int_a^b g(x)dx = \int_a^c g(x)dx + \int_c^b g(x)dx$ も収束する. 後半の主張は前半の主張の対偶である. □

10 正項級数の収束判定法

補題 10.1 収束する数列は有界である.

証明 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束するならば, 自然数 N で条件「$n \geqq N$ ならば $|a_n - \alpha| < 1$」を満たすものがある. 三角不等式から $n \geqq N$ ならば $|a_n| = |a_n - \alpha + \alpha| \leqq |a_n - \alpha| + |\alpha| < 1 + |\alpha|$ だから, $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |\alpha| + 1\}$ とおけば, すべての自然数 n に対して $|a_n| \leqq K$ となるため, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である. □

命題 10.2 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対し, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ によって数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定める. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するためには $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界であることが必要十分である.

証明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は正項級数だから, 任意の自然数 n に対して $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geqq 0$ である. 従って $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列だから, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界ならば実数の連続性によって $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するため, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する. 逆に $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ も収束するので, 補題 10.1 から $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である. □

命題 10.3 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が与えられていて, 自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $a_n \geqq b_n$」を満たすものがあるとする.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束すれば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する. (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散すれば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も発散する.

証明 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ によって数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定める. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束すれば命題 10.2 によって, 実数 K で, すべての自然数 n に対して $T_n \leqq K$ を満たすものがある. 仮定から $n \geqq N$ ならば

$$S_n = S_{N-1} + \sum_{k=N}^{n} a_k \leqq S_{N-1} + \sum_{k=N}^{n} b_k = S_{N-1} + T_n - T_{N-1} \leqq K + S_{N-1}$$

が成り立ち, $K > 0$ より $n \leqq N-1$ の場合も $S_n \leqq K + S_{N-1}$ が成り立つため, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である. 従って命題 10.2 によって $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する. (2) は (1) の対偶である. □

命題 10.4 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が与えられていて, すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ であり, 数列 $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であるとする.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も収束する. (2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が発散すれば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も発散する.

証明 仮定から, 正の実数 K で, すべての自然数 n に対して $\dfrac{b_n}{a_n} \leqq K$ となるものがある.

(1) 任意の自然数 n に対して $b_n \leqq K a_n$ であり, 仮定から $\sum_{n=1}^{\infty} K a_n$ は収束するため, 命題 10.3 の (1) により $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も収束する.

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n \geqq \dfrac{b_n}{K}$ であり, 仮定から $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{K}$ は発散するため, 命題 10.3 の (2) により $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ も発散する. □

注意 10.5 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束するとき, $K < \alpha < L$ を満たす任意の実数 K, L に対し, 自然数 N で条件「$n \geqq N$ ならば $K < a_n < L$」を満たすものがある. 従って, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が正の値に収束すれば, 正の実数 K と自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $a_n > K$」を満たすものがある.

定理 10.6 (ダランベールの判定法) すべての項が正である数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられているとする.

(1) 実数 $K < 1$ と自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqq K$」を満たすものがあれば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) 実数 $K > 1$ と自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqq K$」を満たすものがあれば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する.

証明 (1) $n > N$ ならば $a_n \leqq K a_{n-1} \leqq K^2 a_{n-2} \leqq \cdots \leqq K^{i-1} a_{n-i+1} \leqq K^i a_{n-i} \leqq \cdots \leqq K^{n-N} a_N$ だから, $\dfrac{a_n}{K^n} \leqq \dfrac{a_N}{K^N}$ が N 以上の自然数 n に対して成り立つため, 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{K^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である. また, $0 < K < 1$ だから, 等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} K^n$ は収束するため, 命題 10.4 の (1) によって $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する.

(2) $n > N$ ならば $a_n \geqq K a_{n-1} \geqq K^2 a_{n-2} \geqq \cdots \geqq K^{i-1} a_{n-i+1} \geqq K^i a_{n-i} \geqq \cdots \geqq K^{n-N} a_N$ だから, $\dfrac{K^n}{a_n} \leqq \dfrac{K^N}{a_N}$ が N 以上の自然数 n に対して成り立つため, 数列 $\left\{\dfrac{K^n}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である. また, $K > 1$ だから, 等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} K^n$ は発散するため, 命題 10.4 の (2) から $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も発散する. □

注意 10.7 上の定理において, 数列 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が収束する場合, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ とおくと, 注意 10.5 から, $r < 1$ ならば上の定理の (1) の条件が満たされるため, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束し, $r > 1$ ならば上の定理の (2) の条件が満たされるため, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する.

定理 10.8 (コーシーの判定法) すべての項が 0 以上である数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられているとする.

(1) 実数 $K < 1$ と自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $\sqrt[n]{a_n} \leqq K$」を満たすものがあれば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) 実数 $K > 1$ と自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $\sqrt[n]{a_n} \geqq K$」を満たすものがあれば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する.

証明 (1) $n \geqq N$ ならば $a_n \leqq K^n$ だから, $\dfrac{a_n}{K^n} \leqq 1$ が N 以上の自然数 n に対して成り立つため, 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{K^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である. $0 < K < 1$ だから, 等比級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} K^n$ は収束するため, 命題 10.4 の (1) によって $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する.

(2) $n \geqq N$ ならば $a_n \geqq K^n$ だから, $\dfrac{K^n}{a_n} \leqq 1$ が N 以上の自然数 n に対して成り立つため, 数列 $\left\{\dfrac{K^n}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である. また, $K > 1$ だから, 等比級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} K^n$ は発散するため, 命題 10.4 の (2) から $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ も発散する. □

注意 10.9 上の定理において, 数列 $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が収束する場合, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ とおくと, 注意 10.5 から, $r < 1$ ならば上の定理の (1) の条件が満たされるため, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束し, $r > 1$ ならば上の定理の (2) の条件が満たされるため, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する.

すべての項が正である数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が定理 10.6 の (1) の条件を満たせば, 定理 10.8 の (1) の条件を満たすことが以下のようにして確かめられる.

定理 10.6 の (1) の証明から, $n \geqq N$ ならば $a_n \leqq K^{n-N} a_N$ が成り立つため, $\sqrt[n]{a_n} \leqq K\left(\dfrac{a_N}{K^N}\right)^{\frac{1}{n}}$ である. $0 < K < 1$ だから $1 < L < \dfrac{1}{K}$, を満たす実数 L が選べる. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_N}{K^N}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$ だから, N 以上の自然数 M で, 条件「$n \geqq M$ ならば $\left(\dfrac{a_N}{K^N}\right)^{\frac{1}{n}} \leqq L$」を満たすものがある. 従って $n \geqq M$ ならば $\sqrt[n]{a_n} \leqq K\left(\dfrac{a_N}{K^N}\right)^{\frac{1}{n}} \leqq KL < 1$ となって, 定理 10.6 の (1) の条件が満たされる.

すべての項が正である数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が定理 10.6 の (2) の条件を満たせば, 定理 10.8 の (2) の条件を満たすことも以下のようにして確かめられる.

定理 10.6 の (2) の証明から, $n \geqq N$ ならば $a_n \geqq K^{n-N} a_N$ が成り立つため, $\sqrt[n]{a_n} \geqq K\left(\dfrac{a_N}{K^N}\right)^{\frac{1}{n}}$ である. $K > 1$ だから $\dfrac{1}{K} < L < 1$, を満たす実数 L が選べる. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_N}{K^N}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$ だから, N 以上の自然数 M で, 条件「$n \geqq M$ ならば $\left(\dfrac{a_N}{K^N}\right)^{\frac{1}{n}} \geqq L$」を満たすものがある. 従って $n \geqq M$ ならば $\sqrt[n]{a_n} \geqq K\left(\dfrac{a_N}{K^N}\right)^{\frac{1}{n}} \geqq KL > 1$ となって, 定理 10.6 の (2) の条件が満たされる.

上の考察から, コーシーの判定法の方がダランベールの判定法よりも一般的な判定法であると言える.

補題 10.10 正項級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ は発散する.

証明 $a_k = \sum\limits_{n=2^{k-1}}^{2^k} \dfrac{1}{n}$ $(k \geqq 1)$ によって数列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ を定めれば, $a_k \geqq \sum\limits_{n=2^{k-1}}^{2^k} \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{2^k - (2^{k-1} - 1)}{2^k} > \dfrac{1}{2}$ がすべての自然数 k に対して成り立つため, $S_i = \sum\limits_{n=1}^{i} \dfrac{1}{n}$ とおけば $S_{2^m} = \sum\limits_{n=1}^{2^m} \dfrac{1}{n} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k > 1 + \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{2} = 1 + \dfrac{m}{2}$ がすべての自然数 m に対して成り立つ. 従って数列 $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ は上に有界でないため, 命題 10.2 から $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ は発散する. □

定理 10.11 (ラーベの判定法) 正項級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ において $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = r$ ($r = \pm\infty$ も許す) とする. $-\infty \leqq r < -1$ ならば $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束し, $-1 < r \leqq +\infty$ ならば $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する.

証明 $-\infty \leqq r < -1$ の場合, $r < -c < -1$ となる c をとる. このとき $c > 1$ であり, 仮定から, 自然数 N で,「$k \geqq N$ ならば $k\left(\dfrac{a_{k+1}}{a_k} - 1\right) < -c$」を満たすものがある. すなわち,「$k \geqq N$ ならば $-ka_{k+1} + (k-1)a_k > (c-1)a_k$」が成り立つ. $n \geqq N$ のとき $k = N, N+1, \cdots, n$ として上の不等式を辺々を足し合わせれば,

$$(N-1)a_N - na_{n+1} = \sum_{k=N}^{n} (-ka_{k+1} + (k-1)a_k) > \sum_{k=N}^{n} (c-1)a_k$$

を得る．故に $n \geqq N$ ならば $\sum_{k=N}^{n} a_k < \frac{-na_{n+1}+(N-1)a_N}{c-1} < \frac{(N-1)a_N}{c-1}$ となる．これは正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の部分和が有界であることを示しているから，この正項級数は収束する．

$-1 < r \leqq +\infty$ の場合，仮定から，自然数 N で，「$m \geqq N$ ならば $m\left(\frac{a_{m+1}}{a_m}-1\right) > -1$」を満たすものがある．すなわち，「$m \geqq N$ ならば $\frac{a_{m+1}}{a_m} > \frac{m-1}{m}$」が成り立つ．$n > N$ のとき $m = N, N+1, \cdots, n-1$ として上の不等式を用いれば，

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} > \frac{N-1}{N}, \quad \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} > \frac{N}{N+1}, \quad \cdots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} > \frac{n-2}{n-1}$$

であるから，辺々を掛け合わせて $\frac{a_n}{a_N} > \frac{N-1}{n-1}$ となり，$n > N$ ならば $a_n > \frac{N-1}{n-1}$ である．補題 10.10 により，$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ は発散するため，命題 10.3 から $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する． □

注意 10.12 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ のとき，次の等式が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty}(n+1)\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

さらに $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ が成り立つ．

例 10.13 実数 s に対して正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ を考える．$a_n = \frac{1}{n^s}$ とおき，関数 $f(x) = x^s$ の 1 における微分係数 $f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^s-1}{h}$ は s に等しいことに注意すれば，

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{s+1}-n(n+1)^s}{(n+1)^s} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^s}{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s} = -\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f(1)}{\frac{1}{n}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s} = -s$$

が成り立つ．従ってラーベの判定法から $s > 1$ ならば正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ は収束する．

命題 10.14 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が与えられていて，すべての自然数 n に対して $a_n, b_n > 0$ であり，自然数 N で，条件「$n \geqq N$ ならば $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geqq \frac{b_n}{b_{n+1}}$」を満たすものがあるとする．

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束すれば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する．　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散すれば $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も発散する．

証明 (1) $n \geqq N$ ならば $a_{n+1} \leqq a_n \frac{b_{n+1}}{b_n}$ だから，$k \geqq N+1$ に対して次の不等式が成り立つ．

$$a_k \leqq a_{k-1}\frac{b_k}{b_{k-1}} \leqq a_{k-2}\frac{b_{k-1}}{b_{k-2}}\frac{b_k}{b_{k-1}} \leqq \cdots \leqq a_N \frac{b_{N+1}}{b_N}\frac{b_{N+2}}{b_{N+1}}\cdots\frac{b_k}{b_{k-1}} = \frac{a_N}{b_N}b_k$$

従って $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{n} a_k \leqq \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{a_N}{b_N}b_k < \sum_{k=1}^{N} a_k + \frac{a_N}{b_N}\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ が成り立ち，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束するため，部分和 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ は上に有界である．故に $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する．

(2) $n \geqq N$ ならば $b_{n+1} \geqq b_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ だから，$k \geqq N+1$ に対して次の不等式が成り立つ．

$$b_k \geqq b_{k-1}\frac{a_k}{a_{k-1}} \geqq b_{k-2}\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}\frac{a_k}{a_{k-1}} \geqq \cdots \geqq b_N \frac{a_{N+1}}{a_N}\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\cdots\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{b_N}{a_N}a_k$$

従って $\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{N} b_k + \sum_{k=N+1}^{n} b_k \geqq \sum_{k=1}^{N} b_k + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{b_N}{a_N}a_k = \sum_{k=1}^{N}\left(b_k - \frac{b_N}{a_N}a_k\right) + \frac{b_N}{a_N}\sum_{k=1}^{n} a_k$ であり，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散するため，部分和 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ は上に有界ではない．故に部分和 $\sum_{k=1}^{n} b_k$ も上に有界ではないため，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も発散する． □

定理 10.15 (ガウスの判定法)　すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ である数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し, 実数 c と $s > 1$ で, 次の条件 $(*)$ を満たすものがあるとする.

$(*)$ $p_n = \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \dfrac{c}{n}$ によって数列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めれば, 数列 $\{n^s p_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である.

このとき $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は $c > 1$ ならば収束し, $c \leqq 1$ ならば発散する.

証明 仮定より, 実数 K で, すべての自然数 n に対して $|n^s p_n| < K$ となるものが存在する. $s > 1$ より $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{K}{n^{s-1}} = 0$ であり, $|np_n| < \dfrac{K}{n^{s-1}}$ だから $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = 0$ である.

$c > 1$ とし, $1 < t < c$ を満たす実数 t をとる. $|x| < 1$ ならば

$$(1+x)^t = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{t}{k} x^k = 1 + tx + x^2 \left(\sum_{k=2}^{\infty} \binom{t}{k} x^{k-2} \right)$$

だから, 関数 $\rho : (-1,1) \to \boldsymbol{R}$ を $\rho(x) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \binom{t}{k} x^{k-2}$ によって定義すれば, $n \geqq 2$ に対して次の等式が成り立つ.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^t = 1 + \frac{t}{n} + \frac{1}{n^2}\rho\left(\frac{1}{n}\right)$$

従って $b_n = \dfrac{1}{n^t}$ とおくと, $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - \dfrac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \dfrac{c}{n} + p_n - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^t = \dfrac{c-t}{n} + p_n - \dfrac{1}{n^2}\rho\left(\dfrac{1}{n}\right)$ である. $\lim\limits_{x\to 0} \rho(x) = \rho(0) = \dfrac{t(t-1)}{2}$ だから $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\rho\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$ である. 故に

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{b_n}{b_{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(c - t + np_n - \frac{1}{n}\rho\left(\frac{1}{n}\right)\right) = c - t > 0$$

が成り立つため, 自然数 N で条件「$n \geqq N$ ならば $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - \dfrac{b_n}{b_{n+1}}\right) > \dfrac{c-t}{2} > 0$」を満たすものが存在する. 従って $n \geqq N$ ならば $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} > \dfrac{b_n}{b_{n+1}}$ が成り立ち, $t > 1$ だから例 10.13 により $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^t}$ は収束するため, 命題 10.14 の (1) によって $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

$c < 1$ とする. $b_n = \dfrac{1}{n}$ とおくと, $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - \dfrac{b_n}{b_{n+1}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}(c - 1 + np_n) = c - 1 < 0$ だから, 自然数 N で条件「$n \geqq N$ ならば $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - \dfrac{b_n}{b_{n+1}}\right) < \dfrac{c-1}{2} < 0$」を満たすものが存在する. 従って $n \geqq N$ ならば $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} < \dfrac{b_n}{b_{n+1}}$ が成り立ち, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ は発散するため, 命題 10.14 の (2) によって $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する.

$c = 1$ の場合, $b_1 = 1$, $b_n = \dfrac{1}{n\log n}$ $(n \geqq 2)$ とおく. $x\log x$ に関する平均値の定理から $(n+1)\log(n+1) - n\log n = \log t + 1$ を満たす $n < t < n+1$ が存在するため, $(n+1)\log(n+1) - n\log n = \log t + 1 > \log n + 1$ が成り立つ. 故に $n \geqq 2$ ならば $\dfrac{b_n}{b_{n+1}} = \dfrac{(n+1)\log(n+1)}{n\log n} = 1 + \dfrac{(n+1)\log(n+1) - n\log n}{n\log n} > 1 + \dfrac{\log n + 1}{n\log n} = 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n\log n}$ が成り立ち, さらに $p_n \leqq \dfrac{K}{n^s}$ だから $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - \dfrac{b_n}{b_{n+1}} < p_n - \dfrac{1}{n\log n} \leqq \dfrac{K}{n\log n}\left(\dfrac{\log n}{n^{s-1}} - \dfrac{1}{K}\right)$ が得られる. $s > 1$ だから $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n^{s-1}} = 0$ となるため, 2 以上の自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $\dfrac{\log n}{n^{s-1}} < \dfrac{1}{K}$」を満たすものが存在する. 従って上の不等式から $n \geqq N$ ならば $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} < \dfrac{b_n}{b_{n+1}}$ が成り立ち, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\log n}$ は発散するため, 命題 10.14 の (2) によって $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する. □

定理 10.16 (ディリクレの判定法)　数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は条件「$C \geqq 0$ で, すべての自然数 n に対して $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leqq C$ を満たすものが存在する.」を満たし, 数列 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ は各項が負でない単調減少数列であるとする. このとき, $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ または $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束すれば, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} p_n a_n$ は収束し, その和の絶対値は Cp_0 以下である.

証明　整数 $0 \leqq n \leqq m$ に対し, $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $s_{-1} = 0$, $S(n,m) = \sum_{k=n}^{m} p_k a_k$ とおくと次の等式が成り立つ.

$$S(n,m) = \sum_{k=n}^{m} p_k(s_k - s_{k-1}) = \sum_{k=n}^{m-1} s_k(p_k - p_{k+1}) - s_{n-1}p_n + s_m p_m$$

仮定から $|s_k| \leqq C$, $p_k - p_{k+1} \geqq 0$ だから, 以下の不等式が得られる.

$$|S(n,m)| \leqq \sum_{k=n}^{m-1} |s_k|(p_k - p_{k+1}) + |s_{n-1}|p_n + |s_m|p_m \leqq C\left(\sum_{k=n}^{m-1}(p_k - p_{k+1}) + p_n + p_m\right) = 2Cp_n \quad (n > 0)$$

$$|S(0,m)| \leqq \sum_{k=0}^{m-1} |s_k|(p_k - p_{k+1}) + |s_m|p_m \leqq C\left(\sum_{k=0}^{m-1}(p_k - p_{k+1}) + p_m\right) = Cp_0$$

$\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ ならば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $0 \leqq p_n < \dfrac{\varepsilon}{2C}$」を満たすものが存在するため, 最初の不等式から $m \geqq n \geqq N$ ならば $|S(m,n)| < \varepsilon$ となり, $\left\{\sum_{k=0}^{n} p_k a_k\right\}_{n=0}^{\infty}$ はコーシー列である. 故に $\sum_{n=0}^{\infty} p_n a_n$ は収束する. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束すると仮定する. $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ は下に有界な単調減少数列だから収束するため, $\lim_{n\to\infty} p_n = \alpha$ とおくと, $\{p_n - \alpha\}_{n=0}^{\infty}$ は各項が負でない単調減少数列である. 従って, 上で示したことから $\sum_{n=0}^{\infty} (p_n - \alpha)a_n$ は収束し, $\sum_{n=0}^{\infty} p_n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (p_n - \alpha)a_n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束する. □

11　指数関数

補題 11.1 x を正の実数とするとき $n \geqq m > 2x$ ならば $\dfrac{x^n}{n!} < \dfrac{x^{m-1}}{(m-1)!}\dfrac{1}{2^{n-m+1}}$ である. 従って $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$, $\sum_{k=m}^{n} \dfrac{x^k}{k!} < \dfrac{x^{m-1}}{(m-1)!}$ が成り立つ.

証明 $\dfrac{x^n}{n!} = \dfrac{x}{1}\dfrac{x}{2}\cdots\dfrac{x}{(m-1)}\dfrac{x}{m}\cdots\dfrac{x}{n} < \dfrac{x}{1}\dfrac{x}{2}\cdots\dfrac{x}{(m-1)}\dfrac{x}{(2x)}\cdots\dfrac{x}{(2x)} = \dfrac{x^{m-1}}{(m-1)!}\dfrac{1}{2^{n-m+1}}$ だから, 1 つめの主張が示された. 従って, はさみうちの原理から 2 つめの主張が示される. 1 つめの主張と, 等比数列の和の公式を用いれば,

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{k!} < \sum_{k=m}^{n} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\frac{1}{2^{k-m+1}} = \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\left(1 - \frac{1}{2^{n-m+1}}\right) < \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$$

より, 3 つめの主張が示される. □

実数 x に対して数列 $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ をそれぞれ $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$, $a_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ で定める.

命題 11.2 $x > 0$ ならば, $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加数列である. さらに, 任意の実数 x に対して級数 $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$ は絶対収束する.

証明 $s_{n+1}(x) - s_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} > 0$ だから $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列である. $m > 2x$ を満たす m を 1 つ選ぶと, 上の補題から $n \geqq m$ ならば

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{k!} < \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$$

となり, この右辺は n に無関係な定数であるため, $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である. 従って連続性の公理から $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する. 任意の実数 x に対して $s_n(|x|) = \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{x^k}{k!}\right|$ だから, 前半の主張から $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ は絶対収束する. □

上の命題から, 実数全体で定義された関数 exp を $\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ で定義する.

命題 11.3 x が正ならばすべての n に対して, $a_n(x) \leqq s_n(x)$ が成り立ち, $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加数列である.

証明 二項定理から

$$a_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{x}{n}\right)^k = 1 + x + \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

より $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < 1$ に注意すれば, $a_n(x) \leqq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} = s_n(x)$ である. 補題 11.2 により $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界だから, $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ も上に有界である.

$i = 1, 2, \cdots, k-1 < n$ に対して $1 - \frac{i}{n+1} > 1 - \frac{i}{n} > 0$ だから次の式から $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列である.

$$\begin{aligned}
a_{n+1}(x) - a_n(x) &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{x^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) - \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!}\left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right) \\
&\quad + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right) > 0.
\end{aligned}$$

□

定理 11.4 任意の実数 x に対して $\lim_{n\to\infty} a_n(x) = \exp x$ である.

証明 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 補題 11.1 から $K > 2|x|$ を満たす 3 以上の整数 K で, 条件「$n \geqq K$ ならば $\frac{|x|^{K-1}}{(K-1)!} < \frac{\varepsilon}{4}$」を満たすものがあるため, そのような K を 1 つ選んでおく. ここで, $n > (K-2)\left(1 - \left|1 - \frac{\varepsilon}{4(1+|x|)^{K-1}}\right|^{\frac{1}{K-2}}\right)^{-1}$ ならば $1 - \left(1-\frac{K-2}{n}\right)^{K-2} < \frac{\varepsilon}{4(1+|x|)^{K-1}}$ であり, $2 \leqq k \leqq K-1$ ならば $\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^{k-1} \geqq \left(1-\frac{K-2}{n}\right)^{K-2}$ である. そこで, K と $(K-2)\left(1 - \left|1 - \frac{\varepsilon}{4(1+|x|)^{K-1}}\right|^{\frac{1}{K-2}}\right)^{-1}$ の両方より大きい自然数 N_1 を 1 つ選んで $n > N_1$ とする. このとき, 補題 11.1 から $\sum_{k=K}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \leqq \frac{|x|^{K-1}}{(K-1)!}$ と $\sum_{k=2}^{K-1} \frac{1}{k!} = \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{K-1} \frac{1}{k!} < 1$ が成り立つことに注意すれば,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - a_n(x)\right| &= \left|\sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!}\left(1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)\right| \\
&\leqq \sum_{k=2}^{K-1} \frac{|x|^k}{k!}\left(1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right) \\
&\quad + \sum_{k=K}^{n} \frac{|x|^k}{k!}\left(1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right) \\
&\leqq \sum_{k=2}^{K-1} \frac{|x|^k}{k!}\left(1 - \left(1-\frac{k-1}{n}\right)^{k-1}\right) + \sum_{k=K}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \leqq \sum_{k=2}^{K-1} \frac{|x|^k}{k!}\left(1 - \left(1-\frac{K-2}{n}\right)^{K-2}\right) + \frac{|x|^{K-1}}{(K-1)!} \\
&< \sum_{k=2}^{K-1} \frac{|x|^k}{k!}\frac{\varepsilon}{4(1+|x|)^{K-1}} + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{4}\sum_{k=2}^{K-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{|x|}{1+|x|}\right)^k + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{4}\sum_{k=2}^{K-1} \frac{1}{k!} + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, 任意の $\varepsilon>0$ に対して N_1 以上の自然数 N で, $n>N$ ならば

$$\left|a_n(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\ \text{かつ}\ \left|\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}-\exp x\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

を満たすものがあるから, 三角不等式を用いると, $n>N$ ならば

$$|a_n(x)-\exp x|\leqq\left|a_n(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|+\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}-\exp x\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

である. 故に $\lim_{n\to\infty}a_n(x)=\exp x$ であることが示された. □

定理 11.5 任意の実数 x, y に対して $\exp(x+y)=(\exp x)(\exp y)$ が成り立つ. 従って $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp x}$ である.

証明 自然数 n, $k=0,1,\dots,n-1$ に対して, 命題 11.3 から次の不等式が成り立つ.

$$\left(1+\frac{|x+y|}{n}\right)^{n-1-k}=\left(1+\frac{|x+y|}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{|x+y|}{n}\right)^{-1-k}\leqq a_n(|x+y|)\leqq s_n(|x+y|)\leqq\exp(|x+y|)$$

上式と等式 $X^n-Y^n=(X-Y)\sum_{k=0}^{n-1}X^kY^{n-k-1}$ から, $n>\max\{|x|,|y|\}$ を満たす任意の自然数 n に対して

$$\begin{aligned}|a_n(x)a_n(y)-a_n(x+y)|&=\left|\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n-\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n\right|=\left|\frac{xy}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{xy}{n^2}\right)^k\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^{n-1-k}\right|\\&\leqq\frac{|xy|}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{|xy|}{n^2}\right)^k\left(1+\frac{|x+y|}{n}\right)^{n-1-k}\leqq\frac{|xy|\exp(|x+y|)}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{|xy|}{n^2}\right)^k\\&=\frac{|xy|\exp(|x+y|)}{n^2}\frac{1-\left(\frac{|xy|}{n^2}\right)^n}{1-\frac{|xy|}{n^2}}\leqq\frac{|xy|\exp(|x+y|)}{n^2-|xy|}\end{aligned}$$

が成り立つ. $n\to\infty$ のとき, $\dfrac{|xy|\exp(|x+y|)}{n^2-|xy|}$ は 0 に近づくため, 上の不等式から $\lim_{n\to\infty}(a_n(x)a_n(y)-a_n(x+y))=0$ である. 定理 11.4 から $\lim_{n\to\infty}a_n(x)a_n(y)=(\exp x)(\exp y)$, $\lim_{n\to\infty}a_n(x+y)=\exp(x+y)$ だから, 結果が得られる.□

極限値 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}a_n(1)$ を e で表すことにすると, 定理 11.4 から $e=\exp 1=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}$ である.

定理 11.6 x が有理数ならば $e^x=\exp x$ である.

証明 まず自然数 n に対して $e^n=\exp n$ が成り立つことを, n による数学的帰納法で示す. $n=1$ のときは, e の定義と定理 11.4 から主張は正しい. $e^k=\exp k$ が成り立つと仮定すれば, 定理 11.5 から $e^{k+1}=e^ke=(\exp k)(\exp 1)=\exp(k+1)$ となるため, $n=k+1$ のときも主張が成り立つ.

明らかに $\exp 0=1=e^0$ は成立する. n を負の整数とすれば, $-n$ は自然数だから, 上の結果より $e^{-n}=\exp(-n)$ である. 一方, 定理 11.4 より $(\exp n)(\exp(-n))=\exp(n+(-n))=\exp 0=1$ だから $\exp n=\dfrac{1}{\exp(-n)}=\dfrac{1}{e^{-n}}=e^n$ である. 以上から, 任意の整数 n に対して $e^n=\exp n$ が成り立つ.

x を任意の有理数とすると, 自然数 m と整数 n を用いて $x=\dfrac{n}{m}$ と表せる. $mx=n$ だから $(e^x)^m=e^{mx}=e^n=\exp n=\exp(mx)$ であり, 定理 11.4 から $\exp(mx)=(\exp x)^m$ が成り立つため $(e^x)^m=(\exp x)^m$ である. ここで, $\exp x=\exp\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\right)=\left(\exp\dfrac{x}{2}\right)^2\geqq 0$ より $(e^x)^m=(\exp x)^m$ の両辺の m 乗根を考えて $e^x=\exp x$ を得る. □

補題 11.7 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\exp x-1}{x}=1$ が成り立つ.

証明 命題 11.3 の証明の 2 行目の等式と補題 11.1 より, 2 以上の自然数 n に対して, $0<|x|<1$ ならば

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n(x)-1}{x}-1\right| &= \left|\frac{1}{x}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1-x\right)\right| = \left|\frac{1}{x}\sum_{k=2}^{n}\frac{x^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right| \\ &\leqq |x|\sum_{k=2}^{n}\frac{|x|^{k-2}}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leqq |x|\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} \leqq |x|\end{aligned}$$

が成り立つ. よって $\left|\dfrac{a_n(x)-1}{x}-1\right| \leqq |x|$ の左辺で $n\to\infty$ とすれば, 定理 11.4 から $\left|\dfrac{\exp x-1}{x}-1\right| \leqq |x|$ が $0<|x|<1$ を満たす x に対して成り立つことがわかる. この不等式の右辺は $x\to 0$ のとき 0 に近づくため, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\exp x-1}{x}=1$ であることがわかる. □

定理 11.8 exp は各点で微分可能であり, exp の導関数は exp である. とくに exp は連続関数である.

証明 定理 11.5 と補題 11.7 より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x+h)-\exp x}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{(\exp x)(\exp h)-\exp x}{h}=\exp x\lim_{x\to 0}\frac{\exp h-1}{h}=\exp x$ が任意の実数 x に対して成り立つため, 主張が示された. □

命題 11.9 exp は狭義単調増加関数で $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\exp x=0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\exp x=\infty$ が成り立つ. 従って exp は実数全体の集合から正の実数全体の集合への全単射を与える.

証明 もし $\exp c=0$ を満たす c が存在すれば, 定理 11.5 から $1=\exp 0=\exp(c+(-c))=(\exp c)(\exp(-c))=0$ となって矛盾が生じるため, すべての実数 x に対して $\exp x\neq 0$ である. また, 定理 11.6 の証明で示したように, 任意の実数 x に対して $\exp x\geqq 0$ だから exp は常に正の値をとる. $\exp x$ の定義から $x>0$ ならば $\exp x=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}>1$ である. 従って $x<y$ ならば $y-x>0$ だから, 定理 11.5 から $\dfrac{\exp y}{\exp x}=\exp(y-x)>1$ であり, $\exp x>0$ だから $\exp x<\exp y$ が得られるため, exp は狭義単調増加関数である.

$e>1$ だから, 定理 11.6 より, 任意の正の数 ε に対して自然数 N で, $\exp(-N)=e^{-N}<\varepsilon$ を満たすものがある. exp は正の値をとる単調増加関数だから, $x\leqq -N$ を満たす任意の実数 x に対して $0<\exp x\leqq\exp(-N)<\varepsilon$ となるため, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\exp x=0$ である. 同様に, 任意の正の数 λ に対して自然数 M で, $\exp M=e^M>\lambda$ を満たすものがある. exp は単調増加関数だから, $x\leqq M$ を満たす任意の実数 x に対して $\exp x\geqq\exp M>\lambda$ となるため, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\exp x=\infty$ である. □

定義 11.10 関数 $\exp:\boldsymbol{R}\to(0,\infty)$ を指数関数といい, 任意の実数 x に対して $\exp x$ を e^x で表す. exp の逆関数を $\log:(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ で表し, log を対数関数と呼ぶ.

注意 11.11 exp と log は互いに逆関数だから, 任意の実数 x に対して $\log(e^x)=x$ が成り立ち, 任意の正の実数 x に対して $e^{\log x}=x$ が成り立つ. とくに, $\log 1=0$, $\log e=1$ である. また, exp は狭義単調増加関数だから log も狭義単調増加関数であり, $0<x<1$ ならば $\log x<0$, $x>1$ ならば $\log x>0$ が成り立つ. さらに, 任意の実数 K に対し,「$0<x<e^K$ ならば $\log x<\log(e^K)=K$」および「$x>K$ ならば $\log x>\log(e^K)=K$」が成り立つため, $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log x=-\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log x=\infty$ である.

命題 11.12 正の実数 x, y に対して, $\log(xy)=\log x+\log y$ が成り立つ.

証明 $z=\log x$, $w=\log y$ とおけば $x=e^z$, $y=e^w$ だから, 定理 11.5 により $xy=e^ze^w=e^{z+w}$ である. 従って $\log(xy)=z+w=\log x+\log y$ が得られる. □

定理 11.13 log は各点で微分可能であり, log の x における微分係数は $\dfrac{1}{x}$ である.

証明 まず $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$ を示す．$y=\log(1+x)$ とおけば，$x=\exp y-1$ であり，補題 11.7 より $y\to0$ のとき，$x\to0$ だから定理 2.7 により，$x\to0$ のとき $y=\log(1+x)\to0$ である．そこで関数 $f,\,g$ を $f(x)=\log(1+x)$，$g(y)=\begin{cases}\frac{y}{\exp y-1} & y\neq0\\ 1 & y=0\end{cases}$ によって定めれば，$\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=0$ であり，補題 11.7 より $\displaystyle\lim_{y\to0}g(y)=\lim_{y\to0}\frac{y}{\exp y-1}=\lim_{y\to0}\frac{1}{\frac{\exp y-1}{y}}=1=g(0)$ だから，命題 2.2 より $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}g(f(x))=g(0)=1$ である．

この結果を用いれば $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$ である． □

定義 11.14 a を正の実数する．実数 x に対して正の実数 $e^{x\log a}=\exp(x\log a)$ を対応させる関数を，(a を底とする) 指数関数といい，$e^{x\log a}$ を a^x で表す．

命題 11.15 (1) $0<a<1$ ならば a を底とする指数関数は狭義単調減少関数であり，実数全体の集合から正の実数全体の集合への全単射である．$a>1$ ならば a を底とする指数関数は狭義単調増加関数であり，実数全体の集合から正の実数全体の集合への全単射である．

(2) 正の実数 $a,\,b$ と，任意の実数 $x,\,y$ に対して等式 $(ab)^x=a^xb^x$，$a^{x+y}=a^xa^y$，$(a^x)^y=a^{xy}$ が成り立つ．

証明 (1) 注意 11.11 でみたように，$0<a<1$ ならば $\log a<0$ だから，$x<y$ ならば $x\log a>y\log a$ である．$\exp$ は単調増加関数だから $a^x=\exp(x\log a)>\exp(y\log a)=a^y$ となり，a を底とする指数関数は狭義単調減少関数であり，とくに単射であることがわかる．$a>1$ の場合は $\log a>0$ だから，同様にして a を底とする指数関数は狭義単調増加関数であることがわかる．また，任意の正の実数 z に対して $a^{\frac{\log z}{\log a}}=\exp(\log z)=z$ となるため，a を底とする指数関数は全射でもある．

(2) 命題 11.12，定理 11.5 から $(ab)^x=e^{x\log ab}=e^{x(\log a+\log b)}=e^{x\log a+x\log b}=e^{x\log a}e^{x\log b}=a^xb^x$，$a^{x+y}=e^{(x+y)\log a}=e^{x\log a+y\log a}=e^{x\log a}e^{y\log a}=a^xa^y$ であり，また，任意の正の実数 z に対して $e^{\log z}=z$ が成り立つため，$(a^x)^y=e^{y\log a^x}=e^{y\log e^{x\log a}}=e^{xy\log a}=a^{xy}$ が得られる． □

定義 11.16 1 でない正の実数 a に対し，a を底とする指数関数の逆関数を a を底とする対数関数と呼び，$\log_a$ で表す．

命題 11.17 $a,\,b$ を 1 でない正の実数，$x,\,y$ を正の実数とする．

(1) 等式 $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ が成り立つ．とくに $b=e$ の場合，$\log_a x=\dfrac{\log x}{\log a}$ である

(2) 等式 $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$，$\log_a(x^y)=y\log_a x$ が成り立つ．

証明 (1) e^x と $\log x$，a^x と $\log_a x$ はそれぞれ互いに逆関数だから $e^{\log x}=x$ と $a^{\log_a x}=x$ が成り立ち，$a^x=e^{x\log a}$ より，$a^{\frac{\log x}{\log a}}=e^{\log x}=x=a^{\log_a x}$ である．a を底とする指数関数は単射だから $a^{\frac{\log x}{\log a}}=a^{\log_a x}$ より，$\dfrac{\log x}{\log a}=\log_a x$ を得る．この等式から一般の場合は，$\dfrac{\log_b x}{\log_b a}=\dfrac{\frac{\log x}{\log_b}}{\frac{\log a}{\log_b}}=\dfrac{\log x}{\log a}=\log_a x$ として示される．

(2) (1) の結果と命題 11.12 から $\log_a(xy)=\dfrac{\log(xy)}{\log a}=\dfrac{\log x+\log y}{\log a}=\dfrac{\log x}{\log a}+\dfrac{\log y}{\log a}=\log_a x+\log_a y$ を得る．また，$\log(e^z)=z$ に注意すれば $\log_a(x^y)=\dfrac{\log(x^y)}{\log a}=\dfrac{\log(e^{y\log x})}{\log a}=\dfrac{y\log x}{\log a}=y\log_a x$ である． □

定理 11.18 関数 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ は，任意の $x,y\in\boldsymbol{R}$ に対し $f(x+y)=f(x)+f(y)$ を満たすとする．f がある $a\in\boldsymbol{R}$ において連続ならば，すべての $x\in\boldsymbol{R}$ に対して $f(x)=f(1)x$ である．

証明 任意の $x,h\in\boldsymbol{R}$ に対し，$f(x+h)-f(x)=f(x)+f(h)-f(x)=f(h)=f(a)+f(h)-f(a)=f(a+h)-f(a)$ であり，a における f の連続性から $h\to0$ のとき，$f(x+h)-f(x)\to0$ となるため f は x において連続である．まず仮定から，任意の自然数 n と実数 x に対して $f(nx)=nf(x)$ が成り立つ．とくに $x=1$ として $f(n)=nf(1)=f(1)n$

である. また $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$ より $f(0)=0$. さらに $f(n)+f(-n)=f(n+(-n))=f(0)=0$ だから $f(-n)=-f(n)=-f(1)n=f(1)(-n)$. 従って, 任意の整数 n に対して $f(n)=f(1)n$ である. x を任意の有理数として $x=\dfrac{p}{q}$ (p は整数, q は自然数) とおく. $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $g(x)=f(1)x$ で定義すれば, $qf(x)=f(qx)=f(p)=f(1)p$ だから $f(x)=f(1)x=g(x)$ である. 任意の $x\in\boldsymbol{R}$ に対して $\lim_{n\to\infty}a_n=x$ となる有理数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ があるため f, g の連続性から, $f(x)=f\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}g(a_n)=g\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)=g(x)$ である. □

定理 11.19 関数 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ は, 任意の $x,y\in\boldsymbol{R}$ に対し $f(x+y)=f(x)f(y)$ を満たすとする. f がある $a\in\boldsymbol{R}$ において連続で, $f(b)\neq 0$ となる $b\in\boldsymbol{R}$ が存在すれば, すべての $x\in\boldsymbol{R}$ に対して $f(x)=\exp(x\log f(1))$ である.

証明 もし $f(c)=0$ となる $c\in\boldsymbol{R}$ が存在すれば, 任意の $x\in\boldsymbol{R}$ に対して $f(x)=f(x-c+c)=f(x-c)f(c)=0$ となるため, $f(b)\neq 0$ となる $b\in\boldsymbol{R}$ の存在と矛盾する. 従って, すべての $x\in\boldsymbol{R}$ に対して $f(x)\neq 0$ である. さらに $f(x)=f\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\right)=f\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\geqq 0$ だから, すべての $x\in\boldsymbol{R}$ に対して $f(x)>0$ である. そこで, $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $g(x)=\log f(x)$ で定めれば, 命題 2.2 により g は $a\in\boldsymbol{R}$ において連続であり, 仮定と命題 11.12 により, g は定理 11.18 における仮定を満たす. 従ってすべての $x\in\boldsymbol{R}$ に対して $\log f(x)=g(x)=g(1)x=x\log f(1)$ だから $f(x)=\exp(x\log f(1))$ である. □

定理 11.20 関数 $f:(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ は, 任意の $x,y\in\boldsymbol{R}$ に対し $f(xy)=f(x)+f(y)$ を満たすとする. f がある $a\in\boldsymbol{R}$ において連続ならば, すべての $x\in\boldsymbol{R}$ に対して $f(x)=f(\exp 1)\log x$ である.

証明 $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $g(x)=f(\exp\,x)$ で定めれば, 命題2.2 により g は$a\in\boldsymbol{R}$ において連続であり, 仮定と定理 11.5 により, g は定理 11.18 における仮定を満たす. 従ってすべての $x\in\boldsymbol{R}$ に対して $f(\exp\,x)=g(x)=g(1)x=f(\exp 1)x$ だから $f(x)=\exp(x\log f(1))$ である. □

12　整級数について

定義 12.1 A を $\boldsymbol{R}$ の部分集合とする.

(1) 実数 K で, 条件「$x\in A$ ならば $x\leqq K$」を満たすものを, A の上界と呼び, A の上界が存在するとき, A は上に有界であるという. また, 実数 L で, 条件「$x\in A$ ならば $x\geqq L$」を満たすものを, A の下界と呼び, A の下界が存在するとき, A は下に有界であるという.

(2) A が上に有界であるとき, A の上界全体からなる集合の最小元を A の上限と呼んで, $\sup A$ で表す. また, A が下に有界であるとき, A の下界全体からなる集合の最大元を A の下限と呼んで, $\inf A$ で表す.

定理 12.2 $\boldsymbol{R}$ の空でない部分集合 A が上に有界ならば、A は上限をもつ.

証明 A の上界全体からなる集合を B として, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次のように帰納的に定める. まず $a_1\in A$, $b_1\in B$ を一つずつ選ぶ. $a_1,a_2,\dots,a_n$, $b_1,b_2,\dots,b_n$ が, 条件 $a_i\in A$, $b_i\in B$ $(i=1,2,\dots,n)$, $a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_n$, $b_1\geqq b_2\geqq\cdots\geqq b_n$, $b_i-a_i\leqq 2^{-i+1}(b_1-a_1)$ $(i=1,2,\dots,n)$ を満たすように選べたと仮定する.

$\dfrac{a_n+b_n}{2}\in B$ の場合は $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ と定めれば, $a_{n+1}\in A$, $b_{n+1}\in B$ であり, $b_n\in B$ だから $a_n\leqq b_n$ となっているため, $b_n\geqq b_{n+1}$ である. さらに, $b_{n+1}-a_{n+1}=\dfrac{b_n-a_n}{2}\leqq 2^{-n}(b_1-a_1)$ も成り立つ.

$\dfrac{a_n+b_n}{2}\notin B$ の場合は A の要素で, $\dfrac{a_n+b_n}{2}$ より大きなものがある. その一つを a_{n+1} として $b_{n+1}=b_n$ と定めれば, $a_{n+1}\in A$, $b_{n+1}\in B$ であり, $b_n\in B$ だから $a_n\leqq b_n$ となっているため, $a_n\leqq\dfrac{a_n+b_n}{2}<a_{n+1}$ である. さらに, $b_{n+1}-a_{n+1}<b_n-\dfrac{a_n+b_n}{2}=\dfrac{b_n-a_n}{2}\leqq 2^{-n}(b_1-a_1)$ も成り立つ.

以上から, すべての項が A に属する単調増加数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ とすべての項が B に属する単調減少数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ で, 任意の n に対して $b_n-a_n\leqq 2^{-n+1}(b_1-a_1)$ を満たすものがある. すべての n に対して $a_1\leqq a_n\leqq b_n\leqq b_1$ が成り立つため, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であり, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界である. 故に連続性の公理によって $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$

はともに収束する．そこで $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$ とおけば, 不等式 $b_n - a_n \leqq 2^{-n+1}(b_1 - a_1)$, $a_n \leqq b_n$ より, それぞれ $\beta - \alpha \leqq 0$, $\alpha \leqq \beta$ を得るため, $\alpha = \beta$ であることがわかる．

任意の $x \in A$ と自然数 n に対し, $b_n \in B$ だから $x \leqq b_n$ が成り立つ．この不等式で $n \to \infty$ とすれば, $x \leqq \beta = \alpha$ が得られるため, $\alpha \in B$ であることがわかる．もし α より小さな B の要素 γ が存在すれば, $a_n \leqq \gamma$ が任意の自然数 n に対して成り立つため, $n \to \infty$ とすれば, $\alpha \leqq \gamma$ が得られて, γ が α より小さいことと矛盾する．従って, α より小さい B の要素は存在しないため, α は B の最小元, すなわち, α は A の上限である． □

定理 12.3 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $x = x_0 \neq 0$ で収束すれば, $|x| < |x_0|$ を満たす任意の x に対して $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束し, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $x = x_0$ で発散すれば, $|x| > |x_0|$ を満たす任意の x に対して $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は発散する．

証明 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ が収束すれば, $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$ だから, 補題 10.1 によって, 実数 K で 0 以上のすべての整数 n に対して $|a_n x_0^n| \leqq K$ を満たすものが存在する．$|x| < |x_0|$ ならば $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n \leqq M \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$ が 0 以上のすべての整数 n に対して成り立つ．$\left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1$ だから等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\dfrac{x}{x_0}\right|$ は収束するため, 命題 10.4 によって $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ は収束する．故に $|x| < |x_0|$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束する．もし $|x| > |x_0|$ を満たす x で $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が収束するものがあれば, 上の結果から $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ は絶対収束する．従って $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $x = x_0$ で発散すれば, $|x| > |x_0|$ を満たす任意の x に対して $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は発散する． □

定理 12.4 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ について, 以下の三つのうち一つが成り立つ．

(1) 任意の実数 x に対して $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束する．

(2) 正の実数 ρ で, 条件「$|x| < \rho$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束し, $|x| > \rho$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は発散する.」を満たすものがある．

(3) $x \neq 0$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は発散する．

証明 明らかに, (1), (2), (3) のうちのどの二つも同時に成り立たない．(1) と (3) が成り立たない場合に (2) が成り立つことを示す．(3) が成り立たないことから, 0 でない実数 r で $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ が収束するものがあるため, 定理 12.3 から, $|x| < |r|$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束する．そこで, 正の実数の部分集合 S を次のように定める．

$$S = \left\{ s \in \boldsymbol{R} \,\middle|\, |x| < s \text{ ならば } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ は絶対収束する.} \right\}$$

このとき $|r| \in S$ だから S は空集合ではない．また, (1) が成り立たないことから, S に属さない正の実数 d がある．もし $s_0 > d$ である S の要素 s_0 が存在すれば, $|d| = d < s_0$ だから $\sum_{n=0}^{\infty} a_n d^n$ は絶対収束するため, 定理 12.3 から, $|x| < d$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束する．このことは, d が S に属さないことに矛盾する．故に, 任意の $s \in S$ に対して $s \leqq d$ となるため, S は上に有界な空でない $\boldsymbol{R}$ の部分集合である．

定理 12.2 によって S は上限をもつため, それを ρ とおく．$|x| < \rho$ ならば $\dfrac{|x| + \rho}{2} < \rho$ であり, ρ は S の上限であることから $\dfrac{|x| + \rho}{2} < s \leqq \rho$ を満たす $s \in S$ が存在する．さらに $|x| < \dfrac{|x| + \rho}{2} < s$ だから $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束する．故に, 「$|x| < \rho$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束する.」ことが示せた．

$|x_0| > \rho$ を満たす実数 x_0 で, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ が収束するものが存在すると仮定する. このとき定理 12.3 によって, $|x| < |x_0|$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束するため, $|x_0| \in S$ となって, $|x_0| > \rho$ は ρ が S の上界であることと矛盾する. 従って, $|x| > \rho$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は発散する. □

定理 12.5 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ が存在するか, または正の無限大に発散するとき, この極限は整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径に一致する.

証明 $b_n = \sqrt[n]{|a_n x^n|}$, $\rho = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ とおくと, 仮定から $\lim_{n\to\infty} b_n = \dfrac{|x|}{\rho}$ となるため, コーシーの判定法 (定理 10.8, 注意 10.9) により $|x| < \rho$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束し, $|x| > \rho$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ は収束しない. もし, $|x_0| > \rho$ を満たす x_0 で, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ が収束するものがあれば, 定理 12.3 から $\rho < |x| < |x_0|$ を満たす任意の x に対して $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束するため, 上のことと矛盾が生じる. 故に $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は ρ である. □

$|a| < 1$ ならば任意の負でない整数 k に対して $\lim_{n\to\infty} n^k a^n = 0$ だから, 次のことがわかる.

補題 12.6 $\varphi(n)$ を n の多項式, $|a| < 1$ とするとき, $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) a^n = 0$ である.

命題 12.7 $\varphi(n)$ を 0 でない n の多項式とするとき, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径と $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(n) x^n$ の収束半径は一致する.

証明 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を R, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(n) x^n$ の収束半径を S $(0 \leqq R, S \leqq \infty)$ とする. また, $\varphi(n)$ が定数ならば, 命題の主張は明らかだから $\varphi(n)$ は 1 次以上の n の多項式であると仮定する.

$|x| < R$ のとき, $|x| < r < R$ を満たす r をとると, $\left|\dfrac{x}{r}\right| < 1$ だから補題 12.6 により $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) \left(\dfrac{x}{r}\right)^n = 0$ である. 従って,「$n > N$ ならば $\left|\varphi(n) \left(\dfrac{x}{r}\right)^n\right| < 1$」を満たす自然数 N があるため $n > N$ ならば $|a_n \varphi(n) x^n| = \left|a_n \varphi(n) \left(\dfrac{x}{r}\right)^n\right| r^n < |a_n| r^n$ である. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ は絶対収束するため, 命題 10.3 の (1) により $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(n) x^n$ も絶対収束する. 故に $S < R$ とはなり得ないため $S \geqq R$ である.

$\varphi(n)$ は 1 次以上の n の多項式だから「$n > N$ ならば $|\varphi(n)| > 1$」を満たす自然数 N がある. $|x| < S$ とすると, $n > N$ ならば $|a_n x^n| < |a_n \varphi(n) x^n|$ であり, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(n) x^n$ は絶対収束するため, 命題 10.3 の (1) により $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ も絶対収束する. 故に $R < S$ とはなり得ないため $R \geqq S$ である. 以上から $R = S$ である. □

定理 12.8 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を R とし, 関数 $f : (-R, R) \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ で定める. このとき, $|x| < R$ ならば $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ が成り立つ.

証明 k が 2 以上の整数ならば $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)}{k(k-1)} \dbinom{n-2}{k-2} \leqq n(n-1) \dbinom{n-2}{k-2}$ が成り立つため,

$$\begin{aligned}\left|\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1}\right| &= |h| \left|\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-2} x^{n-k}\right| \leqq |h| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |h|^{k-2} |x|^{n-k} \\ &\leqq |h| \sum_{k=2}^{n} n(n-1) \binom{n-2}{k-2} |h|^{k-2} |x|^{n-k} = n(n-1)|h|(|h| + |x|)^{n-2}.\end{aligned}$$

$|x| < R$ のとき, $|h| < R - |x|$ を満たす h に対し, 命題 12.7 により $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(|h|+|x|)^{n-2}$ は収束する. 一方,

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}\right| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1}\right)\right| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left|\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1}\right| \\ &\leqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)|h|(|h|+|x|)^{n-2} = |h| \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(|h|+|x|)^{n-2}\end{aligned}$$

だから $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}\right| = 0$ が得られる. □

系 12.9 整級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が R のとき, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ で定義される関数 $f : (-R, R) \to \boldsymbol{R}$ は無限回微分可能であり, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ が成り立つ.

証明 定理 12.8 により $f^{(k)}(x) = a_k k! + \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$ だから $f^{(k)}(0) = a_k k!$. □

系 12.10 整級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ はともに正または無限大の収束半径をもつとする. これらの整級数の収束半径以下である正の実数 δ で, $|x| < \delta$ ならば $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ となるものが存在するとき, 0 以上のすべての整数 n に対して $a_n = b_n$ が成り立つ.

定理 12.11 整級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を R とし, 関数 $f : (-R, R) \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ で定める. このとき, $|x| < R$ ならば $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ が成り立つ.

証明 0 以上の任意の整数 n に対して $\left|\dfrac{a_n}{n+1} x^n\right| \leqq |a_n x^n|$ であり, $|x| < R$ ならば整級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束するため, $|x| < R$ ならば $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^n$ も絶対収束する. 従って, この整級数を x 倍して得られる整級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ も $|x| < R$ ならば 絶対収束する. そこで, 関数 $F : (-R, R) \to \boldsymbol{R}$ を $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ で定めれば, 定理 12.8 から $F'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ だから, 系 6.4 から $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = F(x) - F(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ である. □

13 曲線の長さ

定義 13.1 写像 $\boldsymbol{\varphi} : [a, b] \to \boldsymbol{R}^n$ を $\boldsymbol{R}^n$ の曲線という. $t \in [a, b]$ を $\boldsymbol{\varphi}(t)$ の第 j 成分に対応させる関数を φ_j で表して, $[a, b]$ の分割 $\Delta = \{t_i\}_{i=0}^N$ に対して, $L(\boldsymbol{\varphi}; \Delta) = \sum\limits_{i=1}^{N} \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} (\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i-1}))^2}$ とおく. 実数 λ で, 次の条件 (L1) と (L2) を満たすものが存在するとき, 曲線 $\boldsymbol{\varphi}$ は長さをもつといい, λ を $\boldsymbol{\varphi}$ の長さと呼ぶ.

(L1) $[a, b]$ の任意の分割 Δ に対して, $L(\boldsymbol{\varphi}; \Delta) \leqq \lambda$ である.

(L2) $\lambda' < \lambda$ ならば $[a, b]$ の分割 Δ で $\lambda' < L(\boldsymbol{\varphi}; \Delta)$ を満たすものが存在する.

補題 13.2 実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ に対して, 次の不等式が成り立つ.

$$\left|\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} - \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}\right| \leqq \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$$

証明 (右辺)^2 − (左辺)$^2 = 2\left(\sum_{1\leqq i<j\leqq n}|x_i-y_i||x_j-y_j| + \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2} - \sum_{j=1}^n x_jy_j\right)\cdots(*)$ であり,

$$\left(\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2}\right)^2 - \left(\sum_{j=1}^n x_jy_j\right)^2 = \sum_{1\leqq i<j\leqq n}(x_i^2y_j^2+x_j^2y_i^2) - \sum_{1\leqq i<j\leqq n}2x_iy_ix_jy_j = \sum_{1\leqq i<j\leqq n}(x_iy_j-x_jy_j)^2 \geqq 0$$

だから, $\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2} \geqq \left|\sum_{j=1}^n x_jy_j\right| \geqq \sum_{j=1}^n x_jy_j$ が成り立つため, $(*)\geqq 0$ である. □

定理 13.3 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ を有界な数列とすれば, すべての項が自然数である狭義単調増加数列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ で, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ が収束するようなものがある.

証明 単調増加数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}$ と 単調減少数列 $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ で, 各 $n=1,2,\dots$ に対して条件

(1) $\beta_n-\alpha_n = 2^{-n+1}(\beta_1-\alpha_1)$. (2) $a_i\in[\alpha_n,\beta_n]$ となる i は無限個ある.

を満たすものを以下のように帰納的に定める. まず, すべての n に対して $a_n\in[\alpha_1,\beta_1]$ となる α_1, β_1 がある. $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k,\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_k$ が各 $n=1,2,\dots,k$ に対して上の条件を満たすように定まったと仮定する. (2) により区間 $\left[\alpha_k,\frac{\alpha_k+\beta_k}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha_k+\beta_k}{2},\beta_k\right]$ の少なくとも一方は無限個の i に対して a_i を含む. $a_i\in\left[\alpha_k,\frac{\alpha_k+\beta_k}{2}\right]$ となる i が無限個ある場合は $\alpha_{k+1}=\alpha_k,\beta_{k+1}=\dfrac{\alpha_k+\beta_k}{2}$ によって α_{k+1},β_{k+1} を定め, そうでなければ$\alpha_{k+1}=\dfrac{\alpha_k+\beta_k}{2}$, $\beta_{k+1}=\beta_k$ によって α_{k+1},β_{k+1} を定める. いずれの場合にしても $\alpha_k\leqq\alpha_{k+1}$, $\beta_k\geqq\beta_{k+1}$ かつ $\beta_{k+1}-\alpha_{k+1}=\dfrac{\beta_k-\alpha_k}{2}=2^{-k}(\beta_1-\alpha_1)$ が成り立ち, $a_i\in[\alpha_{k+1},\beta_{k+1}]$ となる i は無限個ある.

$\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ は区間 $[\alpha_1,\beta_1]$ に含まれるため, 上に有界な単調増加数列である. 従って仮定から $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ は収束する. $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$ とおくと $\beta_n=\alpha_n+2^{-n+1}(\beta_1-\alpha_1)$ より $\lim_{n\to\infty}\beta_n=\alpha$ である. $n_1=1$ とおき, 自然数の列 $n_1<n_2<\cdots<n_k$ で, 各 $j=1,2,\dots,k$ に対して $a_{n_j}\in[\alpha_j,\beta_j]$ となるものを帰納的に選んだとすれば, $a_i\in[\alpha_{k+1},\beta_{k+1}]$ となる i は無限個あるので, $a_{n_{k+1}}\in[\alpha_{k+1},\beta_{k+1}]$ となる n_{k+1} で n_k より大きなものがある. このように定めた $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ に対し, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ は, すべての k に対して $\alpha_k\leqq a_{n_k}\leqq\beta_k$ を満たすため, はさみうちの原理によって α に収束する. □

定理 13.4 関数 $f:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ が連続ならば, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\delta>0$ で, 条件「$x,y\in[a,b]$ かつ $|x-y|<\delta$ ならば $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$」を満たすものが存在する.

証明 背理法で証明する. 主張を否定すれば, ある $\varepsilon>0$ で 次のようなものがある; $\delta>0$ をどのように選んでも「$|x-y|<\delta$ かつ $|f(x)-f(y)|\geqq\varepsilon$」が成り立つような $x,y\in[a,b]$ がある. $\delta=2^{-n}$ に対して「$|x_n-y_n|<2^{-n}$ かつ $|f(x_n)-f(y_n)|\geqq\varepsilon$」が成り立つような $x_n,y_n\in[a,b]$ を選んでおく. $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ は有界な数列だから定理 13.3 により, $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$, $\{y_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ が両方とも収束するように自然数の列 $n_0<n_1<\cdots<n_k<\cdots$ がとれる. $p=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}$, $q=\lim_{k\to\infty}y_{n_k}$ とおくと $x_{n_k},y_{n_k}\in[a,b]$ だから $p,q\in[a,b]$ である. $|x_{n_k}-y_{n_k}|<2^{-n_k}$ がすべての k について成り立つため, $|p-q|\leqq 0$ すなわち $p=q$ である. f は連続だから, $\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim_{k\to\infty}f(y_{n_k})=f(p)$ が得られるが, $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geqq\varepsilon$ において, $k\to\infty$ とすれば $0\geqq\varepsilon>0$ となって矛盾が生じる. □

区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta=\{t_i\}_{i=0}^N$ と $\Gamma=\{u_j\}_{j=0}^M$ に対し, $\{t_0,t_1,\dots,t_N\}$ が $\{u_0,u_1,\dots,u_M\}$ の部分集合であるとき, Γ は Δ の細分であるいい, このことを $\Gamma\supset\Delta$ または $\Delta\subset\Gamma$ で表す. また, $M+N$ 個の項からなる数列 $t_0,t_1,\dots,t_N,u_0,u_1,\dots,u_M$ を並び替えて単調増加数列にしたものを $v_0,v_1,\dots,v_{M+N}$ とし, 分割 $\{v_k\}_{k=0}^{M+N}$ を $\Delta\cup\Gamma$ で表す. このとき, $\Delta\cup\Gamma\supset\Delta$ かつ $\Delta\cup\Gamma\supset\Gamma$ である. また, $\Gamma\supset\Delta$ ならば, $\|\Gamma\|\leqq\|\Delta\|$ であり, $\boldsymbol{R}^n$ の曲線 $\boldsymbol{\varphi}:[a,b]\to\boldsymbol{R}^n$ に対し, 三角不等式から $L(\boldsymbol{\varphi};\Gamma)\geqq L(\boldsymbol{\varphi};\Delta)$ が成り立つ.

命題 13.5 $\boldsymbol{R}^n$ の曲線 $\boldsymbol{\varphi}:[a,b]\to\boldsymbol{R}^n$ に対し, 実数 λ が次の条件 (L3) を満たせば, 定義 13.1 の条件 (L1) と (L2) を満たす. また, $\boldsymbol{\varphi}$ の各成分が連続関数ならば, 定義 13.1 の条件 (L1) と (L2) を満たす実数 λ は条件 (L3) を満たす.

(L3) 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\delta>0$ で, 条件「$\|\Delta\|<\delta$ ならば $|L(\boldsymbol{\varphi};\Delta)-\lambda|<\varepsilon$」を満たすものが存在する.

証明 実数 λ が条件 (L3) を満たすとする．$[a,b]$ の分割 Δ_1 で $L(\boldsymbol{\varphi};\Delta_1) > \lambda$ を満たすものが存在すると仮定する．(L3) から $\delta > 0$ で, 条件「$\|\Delta\| < \delta$ ならば $|L(\boldsymbol{\varphi};\Delta) - \lambda| < L(\boldsymbol{\varphi};\Delta_1) - \lambda$」を満たすものが存在する．$\|\Delta_2\| < \delta$ を満たす $[a,b]$ の分割 Δ_2 を 1 つ選び, $\Delta_3 = \Delta_1 \cup \Delta_2$ とおけば, $\|\Delta_3\| \leqq \|\Delta_2\| < \delta$ かつ $\Delta_3 \supset \Delta_1$ が成り立つため, $|L(\boldsymbol{\varphi};\Delta_3) - \lambda| < L(\boldsymbol{\varphi};\Delta_1) - \lambda$ と $L(\boldsymbol{\varphi};\Delta_3) \geqq L(\boldsymbol{\varphi};\Delta_1) > \lambda$ が成り立つ．これらの不等式から $L(\boldsymbol{\varphi};\Delta_3) < L(\boldsymbol{\varphi};\Delta_1)$ が得られて矛盾が生じるため, λ は (L1) を満たす．$\lambda' < \lambda$ とすれば, (L3) から $\delta > 0$ で, 条件「$\|\Delta\| < \delta$ ならば $|L(\boldsymbol{\varphi};\Delta) - \lambda| < \lambda - \lambda'$」を満たすものが存在する．$\lambda$ は (L1) を満たすので, $\delta > 0$ で, 条件「$\|\Delta\| < \delta$ ならば $\lambda - L(\boldsymbol{\varphi};\Delta) < \lambda - \lambda'$」を満たす．従って $\|\Delta\| < \delta$ ならば $L(\boldsymbol{\varphi};\Delta) > \lambda'$ が成り立つため (L2) が成り立つ．

$t \in [a,b]$ を $\boldsymbol{\varphi}(t)$ の第 j 成分に対応させる関数を φ_j で表し, $j = 1,2,\ldots,n$ に対して φ_j が連続関数であるとする．実数 λ が条件 (L1) と (L2) を満たすならば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $[a,b]$ の分割 $\Delta_\varepsilon = \{s_k\}_{k=0}^m$ で $\lambda - \dfrac{\varepsilon}{2} < L(\boldsymbol{\varphi};\Delta_\varepsilon)$ を満たすものが存在する．このとき, $k = 1,2,\ldots,m$ に対して $s_{k-1} < s_k$ であると仮定してよい．定理 13.4 から, $j = 1,2,\ldots,n$ に対し, $\delta_j > 0$ で条件「$x,y \in [a,b]$ かつ $|x-y| < \delta_j$ ならば, $|\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| < \dfrac{\varepsilon}{4mn}$」を満たすものが存在する．そこで $\delta > 0$ を $\delta < \min\{s_k - s_{k-1}\,|\,k = 1,2,\ldots,m\}$ かつ $\delta \leqq \min\{\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n\}$ を満たすように選ぶ．$[a,b]$ の分割 $\Delta = \{t_i\}_{i=0}^N$ に対し, $i_k = \max\{i \in \{0,1,\ldots,N\}\,|\,t_i \in [a,s_k]\}$ によって整数列 $i_0,i_1,\ldots,i_m$ を定める．$i_{k-1} > i_k$ を満たす k が存在すれば, $a \leqq t_{i_k} \leqq t_{i_{k-1}} \leqq s_{k-1}$ だから, i_{k-1} が $t_i \in [a,s_{k-1}]$ を満たす最大の整数であることと矛盾が生じるため, $i_0,i_1,\ldots,i_m$ は単調増加数列である．Δ が $\|\Delta\| < \delta$ を満たすとき, $\{t_0,t_1,\ldots,t_N\} \cap (s_k - \delta, s_k] \neq \emptyset$ であり, $s_{k-1} < s_k - \delta$ だから $\{t_0,t_1,\ldots,t_N\} \cap (s_k - \delta, s_k] = \{t_{i_k}\}$ である．$a \leqq t_{i_0} \leqq s_0 = a$ だから $t_{i_0} = a$, また $t_N = b = s_m$ だから $t_{i_m} = b$ である．従って $\Delta' = \{t_{i_k}\}_{k=0}^m$ とおくと Δ' は $[a,b]$ の分割であり, $\Delta' \cup \Delta_\varepsilon = \{t_{i_0}, s_0, t_{i_1}, s_1, \ldots, t_{i_m}, s_m\}$ が成り立つ．このとき, $\alpha_{j,k} = \varphi_j(s_k) - \varphi_j(t_{i_k})$, $\beta_{j,k} = \varphi_j(t_{i_k}) - \varphi_j(s_{k-1})$ とおけば $\alpha_{j,0} = \alpha_{j,m} = 0$, $|\alpha_{j,k}| < \dfrac{\varepsilon}{4mn}$, $\varphi_j(t_{i_k}) - \varphi_j(t_{i_{k-1}}) = \beta_{j,k} + \alpha_{j,k-1}$ が成り立つため, 補題 13.2 から次の不等式が得られる．

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\varphi};\Delta' \cup \Delta_\varepsilon) - L(\boldsymbol{\varphi};\Delta') &= \sum_{k=0}^m \sqrt{\sum_{j=1}^n \alpha_{j,k}^2} + \sum_{k=1}^m \sqrt{\sum_{j=1}^n \beta_{j,k}^2} - \sum_{k=1}^m \sqrt{\sum_{j=1}^n (\beta_{j,k} + \alpha_{j,k-1})^2} \\
&\leqq \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n |\alpha_{j,k}| + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n |\alpha_{j,k-1}| = 2\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n |\alpha_{j,k}| < \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

従って $\lambda - \dfrac{\varepsilon}{2} < L(\boldsymbol{\varphi};\Delta_\varepsilon) \leqq L(\boldsymbol{\varphi};\Delta' \cup \Delta_\varepsilon) < L(\boldsymbol{\varphi};\Delta') + \dfrac{\varepsilon}{2}$ であり, $\Delta \supset \Delta'$ より $\lambda - \varepsilon < L(\boldsymbol{\varphi};\Delta') \leqq L(\boldsymbol{\varphi};\Delta)$ が得られるので, (L1) も用いれば, $\|\Delta\| < \delta$ ならば $0 \leqq \lambda - L(\boldsymbol{\varphi};\Delta) < \varepsilon$ である．故に (L3) が成り立つ． □

定理 13.6 各 $j = 1,2,\ldots,n$ に対し, 関数 $\varphi_j : (p,q) \to \boldsymbol{R}$ は各点で微分可能であり, 導関数 φ_j' は連続であるとする．$p < a < b < q$ のとき, $t \in [a,b]$ を, 第 j 成分が $\varphi_j(t)$ である $\boldsymbol{R}^n$ の点に対応させる $\boldsymbol{R}^n$ の曲線 $\boldsymbol{\varphi} : [a,b] \to \boldsymbol{R}^n$ の長さは $\displaystyle\int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^n (\varphi_j'(t))^2 dt}$ で与えられる．

証明 ε を任意の正の実数とすると, 定理 13.4 から $j = 1,2,\ldots,n$ に対し, $\delta_j > 0$ で条件「$x,y \in [a,b]$ かつ $|x-y| < \delta_j$ ならば $|\varphi_j'(x) - \varphi_j'(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2n(b-a)}$」を満たすものが存在する．そこで, $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n$ のうち最小のものを δ' とする．

$[a,b]$ の分割 $\Delta = \{t_i\}_{i=0}^N$ は $\|\Delta\| < \delta'$ を満たすとする．平均値の定理から $\xi_{ij} \in (t_{i-1},t_i)$ で $\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i-1}) = \varphi_j'(\xi_{ij})(t_i - t_{i-1})$ を満たすものがある．このとき $\left|\varphi_j'(\xi_{ij}) - \varphi_j'(t_i)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2n(b-a)}$ であり, 補題 13.2 から

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{\sum_{j=1}^n (\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i-1}))^2} - \sqrt{\sum_{j=1}^n (\varphi_j'(t_i))^2 (t_i - t_{i-1})}\right| &= \left|\sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\varphi_j'(\xi_{ij})\right)^2} - \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\varphi_j'(t_i)\right)^2}\right|(t_i - t_{i-1}) \\
&\leqq \sum_{j=1}^n \left|\varphi_j'(\xi_{ij}) - \varphi_j'(t_i)\right|(t_i - t_{i-1}) \\
&\leqq \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{2n(b-a)}(t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon(t_i - t_{i-1})}{2(b-a)}
\end{aligned}$$

が成り立つため,

$$\left|L(\boldsymbol{\varphi};\Delta)-\sum_{i=1}^{N}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\varphi_j'(t_i))^2}(t_i-t_{i-1})\right| \leqq \sum_{i=1}^{N}\left|\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\varphi_j(t_i)-\varphi_j(t_{i-1}))^2}-\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\varphi_j'(t_i))^2}(t_i-t_{i-1})\right|$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{N}\frac{\varepsilon(t_i-t_{i-1})}{2(b-a)}=\frac{\varepsilon}{2}\ \cdots(*)$$

である. さらに, $\|\Delta\| \to 0$ ならば $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\varphi_j'(t_i))^2}(t_i-t_{i-1}) \to \int_a^b\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\varphi_j'(t))^2}dt$ だから $\delta''>0$ で, 条件「$\|\Delta\|<\delta''$ ならば $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{N}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\varphi_j'(t_i))^2}(t_i-t_{i-1})-\int_a^b\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\varphi_j'(t))^2}dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}$」を満たすものがあるため, δ' と δ'' の小さい方を δ とすれば, $(*)$ と三角不等式より, $\|\Delta\|<\delta$ ならば

$$\left|L(\boldsymbol{\varphi};\Delta)-\int_a^b\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\varphi_j'(t))^2}dt\right| \leqq \left|L(\boldsymbol{\varphi};\Delta)-\sum_{i=1}^{N}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\varphi_j'(t_i))^2}(t_i-t_{i-1})\right|$$

$$+\left|\sum_{i=1}^{N}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\varphi_j'(t_i))^2}(t_i-t_{i-1})-\int_a^b\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\varphi_j'(t))^2}dt\right|$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

が成り立つ. 従って, 任意の正の実数 ε に対して $\delta>0$ で, 条件「$\|\Delta\|<\delta$ ならば $\displaystyle\left|L(\boldsymbol{\varphi};\Delta)-\int_a^b\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\varphi_j'(t))^2}dt\right| \leqq \varepsilon$」を満たすものがあるため, $\displaystyle\lambda=\int_a^b\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\varphi_j'(t))^2}dt$ は命題 13.5 の条件 (L3) を満たす. □

注意 13.7 連続関数 $f_1,f_2,\ldots,f_n,\lambda\colon[a,b]\to\boldsymbol{R}$ と $c_1,c_2,\ldots,c_n\in\boldsymbol{R}$ に対して, 関数 $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\colon[a,b]\to\boldsymbol{R}$ を

$$\varphi_1(t)=\int_a^t\lambda(x)(f_1(x))^2dx-\sum_{k=2}^{n}\int_a^t\lambda(x)(f_k(x))^2dx+c_1,\quad \varphi_k(t)=2\int_a^t\lambda(x)f_1(x)f_k(x)dx+c_k\ (k=2,3,\ldots,n)$$

によって定めれば, 次の等式が成り立つ.

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\varphi_k'(t)\right)^2}=|\lambda(t)|\sum_{k=1}^{n}\left(f_k(t)\right)^2$$

λ が単調増加関数である原始関数 μ をもち, 各 $k=1,2,\ldots,n$ に対して, 連続関数 g_k が存在して, 任意の $t\in[a,b]$ に対して $f_k(t)=g_k(\mu(t))$ が成り立つとき, $x=\mu(t)$ とおいて置換積分を行えば, 次の等式が得られる.

$$\int_a^b\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\varphi_k'(t)\right)^2}dt=\sum_{k=1}^{n}\int_a^b\left(g_k(\mu(t))\right)^2\mu'(t)dt=\sum_{k=1}^{n}\int_{\mu(a)}^{\mu(b)}\left(g_k(x)\right)^2dx$$

このとき $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$ は次の形になる.

$$\varphi_1(t)=\int_a^t\mu'(x)(g_1(\mu(x)))^2dx-\sum_{k=2}^{n}\int_a^t\mu'(x)(g_k(\mu(x)))^2dx+c_1=\int_{\mu(a)}^{\mu(t)}(g_1(x))^2dx-\sum_{k=2}^{n}\int_{\mu(a)}^{\mu(t)}(g_k(x))^2dx+c_1$$

$$\varphi_k(t)=2\int_{\mu(a)}^{\mu(t)}g_1(\mu(x))g_k(\mu(x))dx+c_k=2\int_{\mu(a)}^{\mu(t)}g_1(x)g_k(x)dx+c_k\quad(k=2,3,\ldots,n)$$