微積分学 I・II 演習問題

目次

微積分学 I 演習問題　第 1 回　数列の極限

1. 次の極限を求めよ．ただし, $|a| < |b|$, $b \neq -1$, $c \neq 0$, k は 0 でない整数, m は整数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c^n + c^{-n}}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{b^n+1}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(kn+m+1)^n}{(kn+m)^n}$　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{1}{kn}\right)$　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n}$

2. $a, b, c \in \boldsymbol{R}$ を定数とし a は 0 でないとする．$x_1 = c$, $x_{n+1} = ax_n + b$ を満たす数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の一般項を求め, この数列が収束するための条件を求めよ．

3. $|r| < 1$ ならば, 任意の実数 α に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} r^n = 0$ であることを示せ．

4. $f(x)$ を x^k の係数が 1 である x の k 次多項式とし, $g(x)$, $h(x)$ を $m-1$ 次以下の x の多項式とする．p, q を相異なる実数, r を正の整数とするとき

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt[r]{n^{m+1}f(n) + pn^m + g(n)} - \sqrt[r]{n^{m+1}f(n) + qn^m + h(n)}\right)$$

が 0 でない値に収束するような α の値と, そのときの極限値を求めよ．

5. (1) 正の実数 a に対し, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ であることを示せ．

(2) 「$i = 2, 3, \ldots, m$ に対して $a_1 \geqq a_i \geqq 0$」または「$i = 2, 3, \ldots, m$ に対して $a_1 > |a_i|$」ならば

$$\lim_{n\to\infty} (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} = a_1$$

であることを示せ．

6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r < 1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ．

7. k を正の実数, l を 1 以上の実数とする．0 以上の実数からなる数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が任意の自然数 n に対して, 不等式 $x_{n+1} \leqq kx_n^l$ を満たすとき, 以下の問いに答えよ．

(1) $l = 1$ かつ $k < 1$ ならば, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束することを示せ．

(2) $l > 1$ であり, $x_m < k^{\frac{1}{1-l}}$ を満たす自然数 m が存在すれば, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束することを示せ．

8. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の各項が $0 \leqq a_n < 1$ を満たし, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ ならば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) = 0$ であることを示せ．

9. $a, b > 0$ とし, $x_1 \geqq -\dfrac{b}{a}$ かつ $x_{n+1} = \sqrt{ax_n + b}$ を満たす数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．

(1) α を方程式 $x = \sqrt{ax+b}$ の解とするとき, 「$x_n < \alpha$ ならば $x_{n+1} < \alpha$」と「$x_n > \alpha$ ならば $x_{n+1} > \alpha$」が成り立つことを示せ．

(2) 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $x_1 < \alpha$ ならば単調増加数列であり, $x_1 > \alpha$ ならば単調減少数列であることを示せ．

(3) 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限を求めよ．

10. 1 と異なる正の実数の定数 r に対し, $\alpha = r^{-\frac{1}{r-1}}$ とおく．数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a_1 \geqq 0$ と漸化式 $a_{n+1} = a_n^r + \alpha - \alpha^r$ を満たすとする．

(1) $a_1 > \alpha$ ならば $a_n > \alpha$ がすべての自然数 n に対して成り立ち, $a_1 < \alpha$ ならば $a_n < \alpha$ がすべての自然数 n に対して成り立つことを示せ．

(2) $r < 1$ かつ $a_1 > \alpha$ ならば $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列であり, $r > 1$ かつ $a_1 < \alpha$ ならば $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列であることを示せ．

(3) 「$r < 1$ かつ $a_1 > \alpha$」または「$r > 1$ かつ $a_1 < \alpha$」の場合に $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限を求めよ．

11. $0 \leqq q \leqq p^2$, $p > 0$ とするとき, 漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + q}{2p}$ を満たす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための a_1 の範囲を求め,

収束する場合には, その極限値を求めよ.

12. $0 < 4b \leqq a^2$, $a > 0$ とし, 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は漸化式 $x_{n+1} = a\sqrt{x_n - b}$ を満たすとする.

(1) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ のすべての項が実数であるための x_1 の条件を求めよ.

(2) が (1) の条件を満たすとき, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限値を求めよ.

13. a, b を正の実数 m を 2 以上の自然数とし, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_1 = b$, $a_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{m}\right) a_n + \dfrac{a}{m a_n^{m-1}}$ で定める.

(1) $b \neq \sqrt[m]{a}$ かつ $n \geqq 2$ ならば $a_n > \sqrt[m]{a}$ であることを示せ.

(2) $b \neq \sqrt[m]{a}$ かつ $n \geqq 2$ ならば $a_n > a_{n+1}$ であることを示せ.

(3) $b \neq \sqrt[m]{a}$ かつ $n \geqq 2$ ならば $a_{n+1} - \sqrt[m]{a} < \dfrac{m-1}{m}(a_n - \sqrt[m]{a})$ であることを示せ.

(4) $b \neq \sqrt[m]{a}$ かつ $n \geqq 2$ ならば $a_{n+1} - \sqrt[m]{a} < \dfrac{m-1}{2\sqrt[m]{a}}(a_n - \sqrt[m]{a})^2$ であることを示せ.

(5) $b \neq \sqrt[m]{a}$ かつ $n \geqq 3$ ならば $a_n - \sqrt[m]{a} < \left(\dfrac{m-1}{m}\right)^{n-2} \left(\left(1 - \dfrac{1}{m}\right) b + \dfrac{a}{m b^{m-1}} - \sqrt[m]{a}\right)$ が成り立つことを示せ.

14. 任意の $n = 2, 3, 4, \ldots$ に対し, 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の第 n 項目までの和と積が等しいとする.

(1) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ とおくとき, S_n を用いて S_{n+1} を表わせ. また, x_n を用いて x_{n+1} を表わせ.

(2) $0 \neq x_1 < 1$ ならば任意の $n \geqq 3$ に対して $1 > x_n > x_{n+1} > 0$ が成り立ち, $x_1 > 1$ ならば任意の $n \geqq 2$ に対して $x_n > x_{n+1} > 1$ が成り立つことを示せ.

(3) 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限を求めよ.

15. $a, b > 0$ とし, $x_1, x_2 > 0$ であり, 漸化式 $x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n$ を満たす数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える. このとき, $\left\{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示し, a, b を用いて $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ を表せ.

16. 以下の漸化式を満たす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束・発散について調べよ.

(1) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{a_n^2 + 1}$　　(2) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{a_n^2}{a_n^2 + 1}$

17. 次の級数の和を求めよ. ただし, k は自然数とする.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}$　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+k)}$　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+k)}\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+k}\right)}$　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n r^n$

18. (発展問題) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と, すべての項が正の実数である数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられていて, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c$ と $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \infty$ が成り立つとき, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = c$ であることを示せ.

19. (発展問題) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と任意の自然数 m に対して, 収束する数列 $\{b(m)_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c(m)_n\}_{n=1}^{\infty}$ で, 次の条件を満たすものが存在するとき, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = r$ であることを示せ.

(i) 数列 $\{\beta_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{\gamma_m\}_{m=1}^{\infty}$ を $\lim\limits_{n\to\infty} b(m)_n = \beta_m$, $\lim\limits_{n\to\infty} c(m)_n = \gamma_m$ で定めれば, $\lim\limits_{m\to\infty} \beta_m = \lim\limits_{m\to\infty} \gamma_m = r$.

(ii) 各自然数 m に対して, 自然数 $N(m)$ で, 条件「$n \geqq N(m)$ ならば $b(m)_n \leqq a_n \leqq c(m)_n$」を満たすものがある.

20. (発展問題) 各項が正である数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられていて, 極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ が存在するとき, その値を r とすれば, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ であることを示せ.

21. (発展問題) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を各項が正である数列とする. 正の実数 ρ に対して $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ が成り立つためには, 任意の $0 < r < \dfrac{1}{\rho}$ に対して $\lim\limits_{n\to\infty} r^n a_n = 0$ が成り立ち, かつ任意の $0 < r < \rho$ に対して $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r^n}{a_n} = 0$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

22. (発展問題) 2 次正則行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し, 写像 $f_A : \boldsymbol{R} \cup \{\infty\} \to \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ を

$$c \neq 0 \text{ の場合 } f_A(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{cx+d} & x \neq -\frac{d}{c}, \infty \\ \infty & x = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & x = \infty \end{cases} \qquad c = 0\,, d \neq 0 \text{ の場合 } f_A(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{d} & x \neq \infty \\ \infty & x = \infty \end{cases}$$

で定義する. また, 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は漸化式 $x_{n+1} = f_A(x_n)$ を満たすとする.

(1) 2 次正則行列 A, B に対して f_{AB} は合成写像 $f_A \circ f_B$ に一致することを示せ.

(2) $c \neq 0$ かつ $(a+d)^2 \neq 4(ad-bc)$ の場合, x_n を a, b, c, d と x_1 を用いて表せ.

(3) $c \neq 0$ かつ $(a+d)^2 = 4(ad-bc)$ の場合, x_n を a, b, c, d と x_1 を用いて表せ.

(4) $c \neq 0$ のとき, 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための条件を求め, 収束する場合に極限値を求めよ.

(5) 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $x_1 = 3,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n + 8}{x_n + 3}$ で定められているとき, この数列の極限値を求めよ.

23. (発展問題) (1) $a, b > 0$ に対して数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を帰納的に $a_1 = a,\ b_1 = b,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ で定める. このとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は同じ値に収束することを示せ.

(2) $a, b > 0$ に対して数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を帰納的に $a_1 = a,\ b_1 = b,\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n},\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ で定める. このとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は同じ値に収束することを示し, その極限値を求めよ.

24. (発展問題) $0 < a < b$ に対して数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ を帰納的に $a_0 = a,\ b_0 = b,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$ で定める. このとき, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ は同じ値に収束することを示し, $a = b\cos\theta\ (0 < \theta < \dfrac{\pi}{2})$ とおくとき, その極限値を求めよ. また, $a = \dfrac{1}{4},\ b = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ の場合, a_n は直径 1 の円に外接する正 2^{n+2} 角形の周囲の長さの逆数であり, b_n は直径 1 の円に内接する正 2^{n+2} 角形の周囲の長さの逆数であることを示せ.

25. (発展問題) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ によって数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めるとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列であることを示せ.

(2) すべての自然数 n に対して $a_n > e$ が成り立つことを示せ.

26. (発展問題) (1) すべての自然数 n に対して $\dfrac{1}{n}e^{n-1} \leqq \dfrac{n^n}{n!} \leqq e^n$ が成り立つことを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ を求めよ.

第 1 回の演習問題の解答

1. (1) $0<|c|<1$ ならば $n\to\infty$ のとき, $c^n\to 0$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c^n+c^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{(c^n)^2+1}=0$. $|c|>1$ ならば $n\to\infty$ のとき, $c^{-n}\to 0$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c^n+c^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{c^{-n}}{1+(c^{-n})^2}=0$. $c=1$ ならば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c^n+c^{-n}}=\frac{1}{2}$. $c=-1$ ならば $\displaystyle\frac{1}{c^n+c^{-n}}=\frac{(-1)^n}{2}$ だから, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c^n+c^{-n}}$ は存在しない.

(2) $|b|>1$ ならば $\left|\dfrac{1}{b}\right|<1$ であり, 仮定から $\left|\dfrac{a}{b}\right|<1$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{b^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{b}\right)^n}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n}{1+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b}\right)^n}=\frac{0}{1+0}=0$. $b=1$ ならば $|a|<1$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{b^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{2}=0$. $|b|<1$ ならば $|a|<|b|<1$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{b^n+1}=\frac{\lim_{n\to\infty}a^n}{\lim_{n\to\infty}b^n+1}=\frac{0}{0+1}=0$.

(3) $k>0$ の場合, $\displaystyle\frac{(kn+m+1)^n}{(kn+m)^n}=\left(1+\frac{1}{kn+m}\right)^n=\left(\left(1+\frac{1}{kn+m}\right)^{kn+m}\left(1+\frac{1}{kn+m}\right)^{-m}\right)^{\frac{1}{k}}=\left(\left(1+\frac{1}{kn+m}\right)^{kn+m}\right)^{\frac{1}{k}}\left(1+\frac{1}{kn+m}\right)^{-\frac{m}{k}}$ で, $n\to\infty$ のとき $kn+m\to\infty$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{kn+m}\right)^{kn+m}=e$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{kn+m}\right)^{-\frac{m}{k}}=1$ である. 従って上式から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(kn+m+1)^n}{(kn+m)^n}=e^{\frac{1}{k}}$ である.

$k<0$ の場合, $\displaystyle\frac{(kn+m+1)^n}{(kn+m)^n}=\frac{1}{\frac{((-k)n+(-m-1)+1)^n}{((-k)n+(-m-1))^n}}$ で, $-k>0$ だから, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{((-k)n+(-m-1)+1)^n}{((-k)n+(-m-1))^n}=\sqrt[-k]{e}$ である. 従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(kn+m+1)^n}{(kn+m)^n}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{((-k)n+(-m-1)+1)^n}{((-k)n+(-m-1))^n}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{-k}}}=e^{\frac{1}{k}}$ である.

(4) (3) の結果から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\log\left(1+\frac{1}{kn}\right)=\lim_{n\to\infty}\log\frac{(kn+1)^n}{(kn)^n}=\log\left(\lim_{n\to\infty}\frac{(kn+1)^n}{(kn)^n}\right)=\log e^{\frac{1}{k}}=\frac{1}{k}$

(5) $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ とおくと教科書の定理 1.3 の証明でみたようにすべての n に対して $1<a_n<3$ が成り立つ. $c_n=\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{-n}$ とおくと, すべての n に対して $\displaystyle\frac{1}{c_n}=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=(a_{n^2})^{\frac{1}{n}}<3^{\frac{1}{n}}$ である. また, すべての n に対して $c_n<1$ が成り立つため, $3^{-\frac{1}{n}}<c_n<1$ である. $n\to\infty$ のとき $3^{-\frac{1}{n}}\to 3^0=1$ だから $c_n\to 1$ である. 従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n}=1$.

2. $a\neq 1$ の場合, $\alpha=\dfrac{b}{1-a}$ とおくと $\alpha=a\alpha+b$ である. $x_{n+1}=ax_n+b$ の両辺からこの等式を辺々引けば, $x_{n+1}-\alpha=a(x_n-\alpha)$ となるため $\{x_n-\alpha\}_{n=1}^{\infty}$ は初項 $c-\alpha$, 公比 a の等比数列である. 従って一般項は $x_n=a^{n-1}(c-\alpha)+\alpha=a^{n-1}\left(c+\dfrac{b}{a-1}\right)-\dfrac{b}{a-1}$ である. この場合 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するのは $-1<a<1$ または $c+\dfrac{b}{a-1}=0$ が成り立つときである.

$a=1$ の場合, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は初項 c 公差 b の等差数列になるため, 一般項は $x_n=c+b(n-1)$ である. よって, この場合は $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するのは $b=0$ の場合である.

以上から, この数列が収束する条件は, $-1<a<1$ または $b=c(1-a)$ である.

3. $r=0$ の場合は, 主張は明らかだから, $0<|r|<1$ の場合を考える. また, 任意の自然数 k に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^k|r|^n=0$ が成り立つことが示されれば, 0 以上の実数 α に対して $k\geqq\alpha$ を満たす自然数を選ぶと, 任意の自然数 n に対して $0<n^\alpha\leqq n^k$ が成り立つため, 不等式 $0<|n^\alpha r^n|=n^\alpha|r|^n\leqq n^k|r|^n$ と仮定から, はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|n^\alpha r^n|=0$ が得られる. さらに $-|n^\alpha r^n|\leqq n^\alpha r^n\leqq|n^\alpha r^n|$ だから, 再度はさみうちの原理を用いれば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^\alpha r^n=0$ が示される.

$0<|r|<1$ より $\dfrac{1}{|r|}>1$ だから, $h=\dfrac{1}{|r|}-1$ とおくと $h>0$ である. $n>k+1$ のとき, $\dfrac{1}{|r|}=1+h$ の両辺を n 乗して二項定理を用いれば

$$\frac{1}{|r|^n}=(1+h)^n=\sum_{i=1}^{k}\binom{n}{i}h^i+\binom{n}{k+1}h^{k+1}+\sum_{i=k+2}^{n}\binom{n}{i}h^i>\binom{n}{k+1}h^{k+1}>0$$

であり, 上式の各辺に $\dfrac{1}{n^k}$ をかけて, 逆数を考えれば

$$0<n^k|r|^n<\frac{n^k}{\binom{n}{k+1}h^{k+1}}=\frac{n^k(k+1)!}{n(n-1)\cdots(n-k)h^{k+1}}=\frac{(k+1)!}{h^{k+1}}\frac{n}{n-1}\frac{n}{n-2}\cdots\frac{n}{n-k-1}\frac{1}{n-k}$$

が得られる. ここで, k は定数であり, $i=1,2,\dots,k-1$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-i}=1$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-k}=0$ が成り立つことに注意すれば

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)!}{h^{k+1}}\frac{n}{n-1}\frac{n}{n-2}\cdots\frac{n}{n-k-1}\frac{1}{n-k}=\frac{(k+1)!}{h^{k+1}}1\cdot1\cdots1\cdot0=0$$

だから, 上の不等式と, はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^k|r|^n=0$ が示される.

4. $X=\sqrt[r]{n^{m+1}f(n)+pn^m+g(n)}$, $Y=\sqrt[r]{n^{m+1}f(n)+qn^m+h(n)}$ を等式 $X^r-Y^r=(X-Y)\displaystyle\sum_{s=0}^{r-1}X^sY^{r-s-1}$ に代入して, 両辺を $\displaystyle\sum_{s=0}^{r-1}\Big(\sqrt[r]{n^{m+1}f(n)+pn^m+g(n)}\Big)^s\Big(\sqrt[r]{n^{m+1}f(n)+qn^m+h(n)}\Big)^{r-s-1}$ で割れば

$$\begin{aligned}
&\sqrt[r]{n^{m+1}f(n)+pn^m+g(n)}-\sqrt[r]{n^{m+1}f(n)+qn^m+h(n)}\\
&=\frac{(p-q)n^m+g(n)-h(n)}{\displaystyle\sum_{s=0}^{r-1}\Big(\sqrt[r]{n^{m+1}f(n)+pn^m+g(n)}\Big)^s\Big(\sqrt[r]{n^{m+1}f(n)+qn^m+h(n)}\Big)^{r-s-1}}\\
&=\frac{n^m\Big(p-q+\frac{g(n)-h(n)}{n^m}\Big)}{\displaystyle\sum_{s=0}^{r-1}\Big(\sqrt[r]{n^{m+k+1}}\sqrt[r]{\tfrac{f(n)}{n^k}+\tfrac{pn^m+g(n)}{n^{m+k+1}}}\Big)^s\Big(\sqrt[r]{n^{m+k+1}}\sqrt[r]{\tfrac{f(n)}{n^k}+\tfrac{qn^m+h(n)}{n^{m+k+1}}}\Big)^{r-s-1}}\\
&=\frac{n^{\frac{m-(k+1)(r-1)}{r}}\Big(p-q+\frac{g(n)-h(n)}{n^m}\Big)}{\displaystyle\sum_{s=0}^{r-1}\Big(\tfrac{f(n)}{n^k}+\tfrac{pn^m+g(n)}{n^{m+k+1}}\Big)^{\frac{s}{r}}\Big(\tfrac{f(n)}{n^k}+\tfrac{qn^m+h(n)}{n^{m+k+1}}\Big)^{1-\frac{s+1}{r}}}
\end{aligned}$$

が得られる. $g(n)-h(n)$ は $m-1$ 次以下の n の多項式だから, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)-h(n)}{n^m}=0$, $pn^m+g(n)$, $qn^m+h(n)$ は m 次以下の n の多項式だから, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{pn^m+g(n)}{n^{m+k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{qn^m+h(n)}{n^{m+k+1}}=0$ であり, $f(x)$ の x^k の係数は 1 だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^k}=1$ である. 従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{p-q+\frac{g(n)-h(n)}{n^m}}{\displaystyle\sum_{s=0}^{r-1}\Big(\tfrac{f(n)}{n^k}+\tfrac{pn^m+g(n)}{n^{m+k+1}}\Big)^{\frac{s}{r}}\Big(\tfrac{f(n)}{n^k}+\tfrac{qn^m+h(n)}{n^{m+k+1}}\Big)^{1-\frac{s+1}{r}}}=\frac{p-q}{r}$ であり, $p\neq q$ だから, この値は 0 ではない. 故に, 上式から求める α の値は $\dfrac{(k+1)(r-1)-m}{r}$ であり, このとき

$$\lim_{n\to\infty}n^\alpha\Big(\sqrt[r]{n^{m+1}f(n)+pn^m+g(n)}-\sqrt[r]{n^{m+1}f(n)+qn^m+h(n)}\Big)=\frac{p-q}{r}$$

である.

5. (1) $a>1$ の場合, $x_n=\sqrt[n]{a}-1$ によって数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めれば, 各項は正で, 二項定理により, すべての自然数 n に対して $a=(1+x_n)^n=1+nx_n+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}{}_nC_kx_n^k\geqq1+nx_n$ が成り立つ. 従って, すべての自然数 n に対して $0<x_n\leqq\dfrac{a-1}{n}$ であり, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a-1}{n}=0$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ である. 故に $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}(1+x_n)=1$ である. $0<a<1$ の

場合, $\frac{1}{a} > 1$ だから, 上で示したことから, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1$ である. 従って, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}}} = \frac{1}{1} = 1$ が得られる.

(2) 「$i = 2, 3, \ldots, m$ に対して $a_1 \geqq a_i \geqq 0$」の場合, $a_1^n \leqq a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n \leqq m a_1^n$ だから,

$$a_1 = (a_1^n)^{\frac{1}{n}} \leqq (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} \leqq (m a_1^n)^{\frac{1}{n}} = m^{\frac{1}{n}} a_1$$

が成り立つ. (1) の結果から $\lim_{n\to\infty} m^{\frac{1}{n}} a_1 = a_1$ だから, 上の不等式から $\lim_{n\to\infty} (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} = a_1$ が得られる.

「$i = 2, 3, \ldots, m$ に対して $a_1 > |a_i|$」の場合, $i = 2, 3 \ldots, m$ に対して $\left|\frac{a_i}{a_1}\right| < 1$ より, 自然数 N_i で条件「$n \geqq N_i$ ならば $-\frac{1}{2(m-1)} \leqq \left(\frac{a_i}{a_1}\right)^n \leqq \frac{1}{2(m-1)}$ を満たすものがするため, $N_2, N_3, \ldots, N_m$ のうちで最大のものを N とおくと, $n \geqq N$ ならば

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \leqq \left(1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n + \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^n + \cdots + \left(\frac{a_m}{a_1}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} \leqq \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

が成り立つ. (1) の結果から $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$ だから, 上の不等式によって

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n + \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^n + \cdots + \left(\frac{a_m}{a_1}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

が得られる. 従って $\lim_{n\to\infty} (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(a_1^n \left(1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n + \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^n + \cdots + \left(\frac{a_m}{a_1}\right)^n\right)\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} a_1 \left(1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n + \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^n + \cdots + \left(\frac{a_m}{a_1}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = a_1 \lim_{n\to\infty} \left(1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n + \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^n + \cdots + \left(\frac{a_m}{a_1}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = a_1$ である.

6. $r < \frac{1+r}{2}$ だから仮定より, 自然数 N で条件「$n \geqq N$ ならば $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \frac{1+r}{2}$」を満たすものがある. 従って $n \geqq N+1$ ならば $|a_n| < \frac{1+r}{2}|a_{n-1}| < \left(\frac{1+r}{2}\right)^2 |a_{n-2}| < \cdots < \left(\frac{1+r}{2}\right)^{n-N} |a_N|$ だから, 次の不等式が成り立つ.

$$0 \leqq |a_n| < \left(\frac{1+r}{2}\right)^{n-N} |a_N|$$

$0 \leqq r < \frac{1+r}{2} < 1$ だから $\lim_{n\to\infty} < \left(\frac{1+r}{2}\right)^{n-N} |a_N| = 0$ であるため, 上の不等式とはさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ である. 故に $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ.

7. (1) 仮定から $n \geqq s \geqq 1$ ならば $0 \leqq x_n \leqq k x_{n-1} \leqq k^2 x_{n-2} \leqq \cdots \leqq k^{n-s} x_s \leqq \cdots \leqq k^{n-1} x_1$ が成り立つ. 従って $0 \leqq x_n \leqq k^{n-1} x_1$ が任意の自然数 n に対して成り立ち, $n \to \infty$ のとき k^{n-1} は 0 に近づくため, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する.

(2) 仮定から $n \geqq s \geqq 1$ ならば $0 \leqq x_n \leqq k x_{n-1}^l \leqq k^{1+l} x_{n-2}^{l^2} \cdots \leqq k^{1+l+\cdots+l^{n-s-1}} x_s^{l^{n-s}} = k^{\frac{-1}{l-1}} \left(k^{\frac{1}{l-1}} x_s\right)^{l^{n-s}}$ が成り立つ. 従って $n \geqq m$ ならば $0 \leqq x_n \leqq k^{\frac{-1}{l-1}} \left(k^{\frac{1}{l-1}} x_m\right)^{l^{n-m}}$ が成り立ち, 仮定から $k^{\frac{1}{l-1}} x_m < 1$ だから $n \to \infty$ のとき $\left(k^{\frac{1}{l-1}} x_m\right)^{l^{n-m}}$ は 0 に近づく. 故に $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する.

8. 各 k に対して $0 \leqq a_k < 1$ だから $\frac{1}{1-a_k} \geqq 1 + a_k > 0$ である. 従って $\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-a_k} \geqq \prod_{k=1}^{n} (1+a_k) \geqq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$ であり, 逆数を考えれば $0 < \prod_{k=1}^{n} (1-a_k) \leqq \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} a_k}$ が得られる. 仮定から $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \infty$ だから $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} a_k} = 0$ となるため $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) = 0$ である.

9. (1) $x_{n+1}=\sqrt{ax_n+b}$ から $\alpha=\sqrt{a\alpha+b}$ を辺々引くと

$$x_{n+1}-\alpha=\sqrt{ax_n+b}-\sqrt{a\alpha+b}=\frac{a(x_n-\alpha)}{\sqrt{ax_n+b}+\sqrt{a\alpha+b}}$$

となるため, $\sqrt{ax_n+b}+\sqrt{a\alpha+b}>0$ だから $x_{n+1}-\alpha$ と $x_n-\alpha$ は同符号であることがわかる. 従って $x_n<\alpha$ ならば $x_{n+1}<\alpha$ であり, $x_n>\alpha$ ならば $x_{n+1}>\alpha$ である.

(2) α は 2 次方程式 $x^2-ax-b=0$ の正の解で, 負の解を β とすれば $x^2-x-a=(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解されることに注意する. 今度は $x_{n+1}=\sqrt{ax_n+b}$ の両辺から x_n を引くと

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{ax_n+b}-x_n=\frac{-x_n^2+ax_n+b}{\sqrt{ax_n+b}+x_n}=\frac{-(x_n-\alpha)(x_n-\beta)}{\sqrt{ax_n+b}+x_n}$$

であり, $x_n\geqq 0$ を満たす n (例えば $n\geqq 2$) に対して $x_{n+1}-x_n$ と $x_n-\alpha$ は異符号であることがわかる.

(1) の結果から n による数学的帰納法で $x_1<\alpha$ ならばすべての n に対して $x_n<\alpha$ が成り立つことが示されるため, 上のことから, $n\geqq 2$ に対して $x_{n+1}>x_n$ が成り立つことがわかる. また, $-a\leqq x_1<0$ ならば $x_2=\sqrt{ax_1+b}\geqq 0>x_1$ であり $x_1\geqq 0$ ならば上のことから $x_2>x_1$ となるため, $x_1<\alpha$ ならば数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列である.

同様に $x_1>\alpha$ ならばすべての n に対して $x_n>\alpha>0$ となるため, 上のことから, $n\geqq 1$ に対して $x_{n+1}>x_n$ が成り立つことがわかる.

(3) (1), (2) より数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $x_1<\alpha$ ならば上に有界な単調増加数列であり, $x_1>\alpha$ なら下に有界な単調減少数列だから, いずれにしても収束する. そこで, 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限を L とおき, $x_{n+1}=\sqrt{ax_n+b}$ の両辺の極限を考えると $L=\sqrt{aL+b}$ となるため, $L=\alpha=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ であることがわかる.

10. (1) $r>0$ だから x の関数 x^r は狭義単調増加関数であることから, $a_{n+1}-\alpha=a_n^r-\alpha^r$ より, $a_n>\alpha$ ならば $a_{n+1}>\alpha$ であり, $a_n<\alpha$ ならば $a_{n+1}<\alpha$ が成り立つ. 従って, 数学的帰納法により $a_1>\alpha$ ならば $a_n>\alpha$ がすべての自然数 n に対して成り立ち, $a_1<\alpha$ ならば $a_n<\alpha$ がすべての自然数 n に対して成り立つ.

(2) 関数 $f:(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=x-x^r$ で定義すれば, $f'(x)=1-rx^{r-1}$ である. 従って $r<1$ のとき f は $(0,\alpha]$ で単調に減少し, $[\alpha,\infty)$ で単調に増加するため, $a_1>\alpha$ の場合, (1) より $a_n>\alpha$ だから $a_n-a_{n+1}=(a_n-a_n^r)-(\alpha-\alpha^r)=f(a_n)-f(\alpha)>0$ である. また, $r>1$ のとき f は $(0,\alpha]$ で単調に増加し, $[\alpha,\infty)$ で単調に減少するため, $a_1<\alpha$ の場合, (1) より $a_n<\alpha$ だから $a_n-a_{n+1}=(a_n-a_n^r)-(\alpha-\alpha^r)=f(a_n)-f(\alpha)<0$ である.

(3) $r<1$ かつ $a_1>\alpha$ ならば (1) と (2) から $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界な単調減少数列であり, $r>1$ かつ $a_1<\alpha$ ならば (1) と (2) から $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調減少数列だから, いずれの場合も実数の連続性により $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する. すべての自然数 n に対して $a_n-a_{n+1}=f(a_n)-f(\alpha)$ が成り立つため, $\lim_{n\to\infty}a_n=\beta$ とおけば, $f(\beta)=f(\alpha)$ である. 一方, (2) でみた f の増減から, $r<1$ ならば f は α のみで最小値をとり, $r>1$ ならば f は α のみで最大値をとるため, $\beta=\alpha$ である. 故に $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha=r^{-\frac{1}{r-1}}$ である.

11. $x=\dfrac{x^2+q}{2p}$ の二つの解を $\alpha,\beta\ (\alpha\leqq\beta)$ とおくと $\alpha=p-\sqrt{p^2-q}$, $\beta=p+\sqrt{p^2-q}$ である. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとき, $\lim_{n\to\infty}a_n=\gamma$ とおけば, $\gamma=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2+q}{2p}=\dfrac{\gamma+q}{2p}$ だから $\gamma=\alpha$ または β である.

$a_{n+1}-a_n=\dfrac{a_n^2+q}{2p}-a_n=\dfrac{1}{2p}(a_n-\alpha)(a_n-\beta)$ だから $a_n<\alpha$ または $a_n>\beta$ ならば $a_{n+1}>a_n$ であり, $\alpha<a_n<\beta$ ならば $a_{n+1}<a_n$ である. また $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+q}{2p}$ の両辺から $\alpha=\dfrac{\alpha^2+q}{2p}$, $\beta=\dfrac{\alpha^2+q}{2p}$ を辺々引けば, $a_{n+1}-\alpha=\dfrac{a_n^2-\alpha^2}{2p}$, $a_{n+1}-\beta=\dfrac{a_n^2-\beta^2}{2p}$ だから $|a_n|<\alpha$ ならば $a_{n+1}<\alpha$, $\alpha<|a_n|<\beta$ ならば $\alpha<a_{n+1}<\beta$ であり, $|a_n|>\beta$ ならば $a_{n+1}>\beta$ である.

$|a_1|>\beta$ の場合, $a_2>\beta$ であり, $a_n>\beta$ と仮定すれば $a_{n+1}>a_n>\beta$ だから $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列である. もし $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界ならば $\lim_{n\to\infty}a_n$ が存在して, この値を γ とすれば, $\alpha<\beta<a_2<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots\leqq\gamma$

だから, $\alpha<\beta<\gamma$ であるが, $\gamma=\alpha$ または β であることと矛盾が生じる. 従って $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界ではないため, この数列は正の無限大に発散する.

$|a_1|=\beta$ の場合, $a_2=\beta$ であり, $a_n=\beta$ と仮定すれば $a_{n+1}=\beta$ だから, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の第 2 項目以降はつねに β であるため, この数列は β に収束する.

$\alpha<|a_1|<\beta$ の場合, $\alpha<a_2<\beta$ であり, $\alpha<a_n<\beta$ と仮定すれば, $\alpha<a_n<a_{n+1}<\beta$ が成り立つため, $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ は下に有界な単調減少数列だから収束する. すべての自然数 n に対して $\alpha<a_n\leqq a_1<\beta$ が成り立つため, $\alpha\leqq\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leqq a_1<\beta$ であり, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$ または β だから $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$ である.

$|a_1|=\alpha$ の場合, $a_2=\alpha$ であり, $a_n=\alpha$ と仮定すれば $a_{n+1}=\alpha$ だから, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の第 2 項目以降はつねに α であるため, この数列は α に収束する.

$|a_1|<\alpha$ の場合, $a_2<\alpha$ であり, $a_n<\alpha$ と仮定すれば, $a_n<a_{n+1}<\alpha$ が成り立つため, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加数列だから収束する. すべての自然数 n に対して $a_n<\alpha$ が成り立つため, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leqq\alpha<\beta$ であり, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$ または β だから $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$ である.

以上から, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $|a_1|<p+\sqrt{p^2-q}$ ならば $p-\sqrt{p^2-q}$ に収束し, $a_1=\pm\left(p+\sqrt{p^2-q}\right)$ ならば $p+\sqrt{p^2-q}$ に収束する. $|a_1|>p+\sqrt{p^2-q}$ ならば, 正の無限大に発散する.

12. (1) $c\geqq0$ に対し, $a\sqrt{x-b}\geqq c$ であるための条件は $x\geqq\dfrac{c^2}{a^2}+b$ だから, 2 次関数 f を $f(x)=\dfrac{x^2}{a^2}+b$ で定め, f を n 回合成した関数を f^n で表せば, $x_n\geqq b$ であるための条件は $x_{n-1}\geqq f(b)$, $x_{n-1}\geqq f(b)$ であるための条件は $x_{n-2}\geqq f(f((b))=f^2(b)$, …, $x_2\geqq f^{n-2}(b)$ であるための条件は $x_1\geqq f^{n-1}(b)$ となるため, すべての自然数 n に対して $x_n\geqq1$ であるための条件は $x_1\geqq f^{n-1}(b)$ がすべての自然数 n に対して成り立つことである. 前問で, $p=\dfrac{a^2}{2}$, $q=a^2b$, $a_1=b$ の場合を考えれば, $p-\sqrt{p^2-q}=\dfrac{a^2-a\sqrt{a^2-4b}}{2}$ であり, $p-\sqrt{p^2-q}-b=\dfrac{a^2-2b-a\sqrt{a^2-4b}}{2}=\dfrac{1}{4}\left(a-\sqrt{a^2-4b}\right)^2>0$ だから, 前問の解答から $\{f^{n-1}(b)\}_{n=1}^{\infty}$ は単調に増加して $\dfrac{a^2-a\sqrt{a^2-4b}}{2}$ に収束するため, $x_1\geqq f^{n-1}(b)$ がすべての自然数 n に対して成り立つためには $x_1\geqq\dfrac{a^2-a\sqrt{a^2-4b}}{2}$ であることが必要十分である. 故に $x_1\geqq\dfrac{a^2-a\sqrt{a^2-4b}}{2}$ が求める条件である.

(2) $x=a\sqrt{x-b}$ の二つの解を α, β $(\alpha<\beta)$ とおくと $\alpha=\dfrac{a^2-a\sqrt{a^2-4b}}{2}$, $\beta=\dfrac{a^2+a\sqrt{a^2-4b}}{2}$ である. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとき, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\gamma$ とおけば, $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}a\sqrt{x_n-b}=a\sqrt{\gamma-b}$ だから $\gamma=\alpha$ または β である.

$x_{n+1}=a\sqrt{x_n-b}$ の両辺から $\alpha=a\sqrt{\alpha-b}$, $\beta=a\sqrt{\beta-b}$ を辺々引けば, $x_{n+1}-\alpha=\dfrac{a(x_n-\alpha)}{\sqrt{x_n-b}+\sqrt{\alpha-b}}$, $x_{n+1}-\beta=\dfrac{a(x_n-\beta)}{\sqrt{x_n-b}+\sqrt{\beta-b}}$ だから $x_n<\alpha$ ならば $x_{n+1}<\alpha$, $\alpha<x_n<\beta$ ならば $\alpha<x_{n+1}<\beta$ であり, $x_n>\beta$ ならば $x_{n+1}>\beta$ である. また, $x_{n+1}-x_n=a\sqrt{x_n-b}-x_n=\dfrac{a^2(x_n-b)-x_n^2}{a\sqrt{x_n-b}+x_n}=\dfrac{(x_n-\alpha)(\beta-x_n)}{a\sqrt{x_n-b}+x_n}$ だから $x_n<\alpha$ または $x_n>\beta$ ならば $x_{n+1}<x_n$ であり, $\alpha<x_n<\beta$ ならば $x_{n+1}>x_n$ である.

$x_1=\alpha$ の場合, $x_n=\alpha$ と仮定すれば $x_{n+1}=\alpha$ だから, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ のすべての項は α であるため, この数列は α に収束する.

$\alpha<x_1<\beta$ の場合, $\alpha<x_n<\beta$ と仮定すれば $\alpha<x_n<x_{n+1}<\beta$ だから, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加数列だから収束する. すべての自然数 n に対して $\alpha<x_1\leqq x_n<\beta$ が成り立つため, $\alpha<x_1\leqq\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqq\beta$ であり, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$ または β だから $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\beta$ である.

$x_1=\beta$ の場合, $x_n=\beta$ と仮定すれば $x_{n+1}=\beta$ だから, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ のすべての項は β であるため, この数列は β に収束する.

$x_1>\beta$ の場合, $x_n>\beta$ と仮定すれば $x_n>x_{n+1}>\beta$ だから $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列だから収束する. すべての自然数 n に対して $x_n>\beta$ が成り立つため, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqq\beta$ であり, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$ または β だから $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\beta$ である.

以上から $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $x_1=\dfrac{a^2-a\sqrt{a^2-4b}}{2}$ ならば $\dfrac{a^2-a\sqrt{a^2-4b}}{2}$ に収束し, $x_1>\dfrac{a^2-a\sqrt{a^2-4b}}{2}$ ならば

$\dfrac{a^2-a\sqrt{a^2-4b}}{2}$ に収束する.

13. (1) 与えられた漸化式の両辺を $\sqrt[m]{a}$ で割り, $\alpha_n=\dfrac{a_n}{\sqrt[m]{a}}$ とおけば, 数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ に関する漸化式

$$\alpha_{n+1}=\left(1-\frac{1}{m}\right)\alpha_n+\frac{1}{m\alpha_n^{m-1}}\ \cdots(i)$$

が得られるため, $\dfrac{1}{m}<1$ より $\alpha_n>0$ ならば $\alpha_{n+1}>0$ であることがわかる. $\alpha_1=\dfrac{a_1}{\sqrt[m]{a}}=\dfrac{b}{\sqrt[m]{a}}>0$ だから, 帰納的に $\alpha_n>0$ がすべての n について成り立つ. (i) の両辺から 1 を引いて右辺を整理すれば

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1}-1&=\frac{1}{m\alpha_n^{m-1}}\big((m-1)\alpha_n^m-m\alpha_n^{m-1}+1\big)=\frac{1}{m\alpha_n^{m-1}}\big(m\alpha_n^{m-1}(\alpha_n-1)-(\alpha_n^m-1)\big)\\&=\frac{\alpha_n-1}{m\alpha_n^{m-1}}\left(m\alpha_n^{m-1}-\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_n^k\right)=\frac{\alpha_n-1}{m\alpha_n^{m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}\big(\alpha_n^{m-1}-\alpha_n^k\big)=\frac{\alpha_n-1}{m\alpha_n^{m-1}}\sum_{k=0}^{m-2}\alpha_n^k\big(\alpha_n^{m-k-1}-1\big)\\&=\frac{(\alpha_n-1)^2}{m\alpha_n^{m-1}}\sum_{k=0}^{m-2}\alpha_n^k\sum_{l=0}^{m-k-2}\alpha_n^l=\frac{(\alpha_n-1)^2}{m\alpha_n^{m-1}}\sum_{k=0}^{m-2}\sum_{l=0}^{m-k-2}\alpha_n^{k+l}=\frac{(\alpha_n-1)^2}{m\alpha_n^{m-1}}\sum_{p=0}^{m-2}(p+1)\alpha_n^p\ \cdots(ii)\end{aligned}$$

が成り立ち, $\dfrac{1}{m\alpha_n^{m-1}}\sum\limits_{p=0}^{m-2}(p+1)\alpha_n^p>0$ だから, $\alpha_n\neq1$ ならば $\alpha_{n+1}-1>0$ であることがわかる. 従って, 仮定から $\alpha_1=\dfrac{b}{\sqrt[m]{a}}\neq1$ だから, 帰納的に $\dfrac{a_n}{\sqrt[m]{a}}=\alpha_n>1$, すなわち $a_n>\sqrt[m]{a}$ が 2 以上の n について成り立つ.

(2) (i) の両辺から α_n を引けば $\alpha_{n+1}-\alpha_n=\dfrac{1-\alpha_n^m}{m\alpha_n^{m-1}}$ が得られる. 一方, (1) より $n\geqq2$ ならば $\alpha_n>1$ だから, $1-\alpha_n^m<0$ となり, 上式より $n\geqq2$ ならば $\alpha_n>\alpha_{n+1}$ であることがわかる. この両辺に $\sqrt[m]{a}$ をかければ $a_n>a_{n+1}$ が得られる.

(3) $n\geqq2$ ならば (1) より $\alpha_n>1$ だから, (i) の両辺から 1 を引いて右辺を変形すれば

$$\alpha_{n+1}-1=\frac{m-1}{m}(\alpha_n-1)-\frac{\alpha_n^{m-1}-1}{m\alpha_n^{m-1}}<\frac{m-1}{m}(\alpha_n-1)$$

が得られる. この両端の辺に $\sqrt[m]{a}$ をかければ $a_{n+1}-\sqrt[m]{a}<\dfrac{m-1}{m}(a_n-\sqrt[m]{a})$ が得られる.

(4) $n\geqq2$ ならば (1) より $\alpha_n>1$ だから, (ii) より次の等式が得られる.

$$\alpha_{n+1}-1=\frac{(\alpha_n-1)^2}{m}\sum_{p=0}^{m-2}\frac{p+1}{\alpha_n^{m-p-1}}<\frac{(\alpha_n-1)^2}{m}\sum_{p=0}^{m-2}(p+1)=\frac{(m-1)(\alpha_n-1)^2}{2}$$

この両端の辺に $\sqrt[m]{a}$ をかければ $a_{n+1}-\sqrt[m]{a}<\dfrac{m-1}{2\sqrt[m]{a}}(a_n-\sqrt[m]{a})^2$ が得られる.

(5) $a_2-\sqrt[m]{a}=\left(1-\dfrac{1}{m}\right)b+\dfrac{a}{mb^{m-1}}-\sqrt[m]{a}=\dfrac{1}{m}\left((m-1)b-m\sqrt[m]{a}+\dfrac{a}{b^{m-1}}\right)$ だから, (3) の結果から, $n\geqq3$ ならば

$$\begin{aligned}a_n-\alpha&<\left(\frac{m-1}{m}\right)\big(a_{n-1}-\sqrt[m]{a}\big)<\cdots<\left(\frac{m-1}{m}\right)^k\big(a_{n-k}-\sqrt[m]{a}\big)<\cdots<\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-2}\big(a_2-\sqrt[m]{a}\big)\\&=\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-2}\left(\left(1-\frac{1}{m}\right)b+\frac{a}{mb^{m-1}}-\sqrt[m]{a}\right)\end{aligned}$$

が得られる.

14. (1) 仮定から $S_{n+1}=x_{n+1}S_n=S_n+x_{n+1}$ だから $x_{n+1}(S_n-1)=S_n$. これより, もし $S_n=1$ とすれば $S_n=0$ となって矛盾が生じるため $x_{n+1}=\dfrac{S_n}{S_n-1}$ である. 従って $S_{n+1}=\dfrac{S_n^2}{S_n-1}$.

$S_{n+1}=x_{n+1}S_n=S_n+x_{n+1}$ から $S_n(x_{n+1}-1)=x_{n+1}$. 故に, もし $x_{n+1}=1$ とすれば $x_{n+1}=0$ となって矛盾が生じるため $S_n=\dfrac{x_{n+1}}{x_{n+1}-1}$ である. これを上で得た式に代入すれば, $\dfrac{x_{n+2}}{x_{n+2}-1}=\dfrac{x_{n+1}^2}{x_{n+1}-1}$ が得られ, これより

$x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1}^2}{x_{n+1}^2 - x_{n+1} + 1}$ $(n \geqq 1)$ を得る．従って $n \geqq 2$ の場合は $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{x_n^2 - x_n + 1}$ である．また $x_1 x_2 = x_1 + x_2$ より $x_2(x_1 - 1) = x_1$ だから $x_1 \neq 1$ である．よって $n = 1$ の場合は $x_2 = \dfrac{x_1}{x_1 - 1}$ である．

(2) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x + 1}$ によって関数 f を定めると (2) より $n \geqq 2$ ならば $x_{n+1} = f(x_n)$ であることに注意する．$0 \neq x < 1$ ならば $x^2 - x + 1 > x^2 > 0$ だから $0 < f(x) < 1$ であり，$x > 1$ ならば $x^2 > x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ だから $f(x) > 1$ である．

$0 \neq x_1 < 1$ の場合，$x_2 = \dfrac{x_1}{x_1 - 1}$ から $0 \neq x_2 < 1$ となるため，上の議論から $x_3 = f(x_2)$ は $0 < x_3 < 1$ を満たす．帰納的に $0 < x_n < 1$ が成り立つと仮定すれば，上の結果から $0 < x_{n+1} = f(x_n) < 1$ である．

$x_1 > 1$ の場合，$x_2 = \dfrac{x_1}{x_1 - 1}$ から $x_2 > 1$ となる．帰納的に $x_n > 1$ が成り立つと仮定すれば，上の結果から $x_{n+1} = f(x_n) > 1$ である．

また $x - f(x) = \dfrac{x(x-1)^2}{x^2 - x + 1}$ だから $0 < x < 1$, $x > 1$ ならば $f(x) < x$ が成り立つことに注意すれば，$x_1 < 1$ の場合は $n \geqq 3$ ならば $x_{n+1} < x_n$ が成り立ち，$x_1 > 1$ の場合は $n \geqq 2$ ならば $x_{n+1} < x_n$ が成り立つことがわかる．

(3) $x_1 = 0$ ならば，明らかにすべての n に対して $x_n = 0$ だから，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する．また，(2) の解答でみたように，$x_1 \neq 1$ である．$x_1 \neq 0$ の場合は (3) の結果により，実数列 $\{x_n\}_{n=3}^{\infty}$ は下に有界な単調減少数列になるため収束する．$\{x_n\}_{n=3}^{\infty}$ の極限を L とおく．(1) より，$x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{x_n^2 - x_n + 1}$ だから，この両辺の n を大きくすれば $L = \dfrac{L^2}{L^2 - L + 1}$ が得られる．従って $L(L-1)^2 = 0$ が成り立つため，$L = 0$ または $L = 1$ である．$0 \neq x_1 < 1$ ならば任意の $n \geqq 3$ に対して $1 > x_n > x_{n+1} > 0$ だから $0 \leqq L < 1$ となるため $L = 0$ である．$x_1 > 1$ ならば任意の $n \geqq 2$ に対して $x_n > 1$ だから $L \geq 1$ となるため $L = 1$ である．以上から $x_1 < 1$ ならば $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束し，$x_1 > 1$ ならば $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 1 に収束する．

15. $a, b > 0$ かつ $x_1, x_2 > 0$ だから，$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ より，帰納的に $x_n > 0$ がすべての自然数に対して成り立つことがわかる．$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ の両辺を x_{n+1} で割って，$y_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ とおけば $y_{n+1} = a + \dfrac{b}{y_n}$ が得られる．従って，2 以上の自然数 n に対して $y_n = a + \dfrac{b}{y_{n-1}} > a$ であり，$y_n y_{n+1} = ay_n + b > a^2 + b$ が成り立つ．$y_{n+2} = a + \dfrac{b}{y_{n+1}}$ から $y_{n+1} = a + \dfrac{b}{y_n}$ を辺々引けば $y_{n+2} - y_{n+1} = \dfrac{-b(y_{n+1} - y_n)}{y_n y_{n+1}}$ が得られる．故に $|y_{n+2} - y_{n+1}| = \dfrac{b|y_{n+1} - y_n|}{y_n y_{n+1}} \leqq \dfrac{b}{a^2 + b}|y_{n+1} - y_n|$ が任意の自然数 n に対して成り立つため，$n \geqq 3$ ならば

$$|y_n - y_{n-1}| \leqq \frac{b}{a^2+b}|y_{n-1} - y_{n-2}| \leqq \left(\frac{b}{a^2+b}\right)^2 |y_{n-2} - y_{n-3}| \leqq \cdots \leqq \left(\frac{b}{a^2+b}\right)^{n-3} |y_3 - y_2|$$

である．よって 2 以上の自然数 n と任意の自然数 i に対して $|y_{n+i} - y_{n+i-1}| \leqq \left(\dfrac{b}{a^2+b}\right)^{n+i-3} |y_3 - y_2|$ が成り立ち，$0 < 1 - \left(\dfrac{b}{a^2+b}\right)^k < 1$ であることに注意すれば

$$|y_{n+k} - y_n| = \left|\sum_{i=1}^{k}(y_{n+i} - y_{n+i-1})\right| \leqq \sum_{i=1}^{k}|y_{n+i} - y_{n+i-1}| \leqq \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{b}{a^2+b}\right)^{n+i-3}|y_3 - y_2|$$

$$\leqq \left(\frac{b}{a^2+b}\right)^{n-2} \frac{1 - \left(\frac{b}{a^2+b}\right)^k}{1 - \frac{b}{a^2+b}} |y_3 - y_2| < \frac{b}{a^2}\left(\frac{b}{a^2+b}\right)^{n-3}|y_3 - y_2|$$

が成り立つため，数列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列である．従って，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = L$ とおけば，n が 2 以上のとき，$y_n > a$ だから $L \geqq a > 0$ であり，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は漸化式 $y_{n+1} = a + \dfrac{b}{y_n}$ を満たすため，$L = a + \dfrac{b}{L}$ が成り立つ．故に L は 2 次方程式 $x^2 - ax - b = 0$ の正の解だから，$L = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$ である．

16. (1) 仮定から以下の等式が成り立つ.

$$a_{n+1}-1=\frac{a_n(a_n-1)^2}{2(a_n^2+1)}\ \cdots\ (i) \qquad a_{n+1}-a_n=\frac{-(a_n-1)\Big(\big(a_n+\frac{1}{2}\big)^2+\frac{7}{4}\Big)}{2(a_n^2+1)}\ \cdots\ (ii)$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束するならば (ii) より, α は $\dfrac{-(\alpha-1)\left(\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right)}{2(\alpha^2+1)}=0$ を満たす実数だから $\alpha=1$ である. もし 0 が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上界ならば (ii) より, $a_n<a_{n+1}<1$ だから, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 を上界とする単調増加数列になるため, 0 以下の値に収束する. このことは $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するならば, その極限値は 1 であることと矛盾するため, $a_{N_0}>0$ となる自然数 N_0 が存在する. (i) より $a_{N_0+1}\geqq 1$ であり, (i), (ii) より, $a_n\geqq 1$ ならば $a_n\geqq a_{n+1}\geqq 1$ だから, $\{a_n\}_{n=N_0+1}^{\infty}$ は 1 を下界とする単調減少数列となって収束する. 故に $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, a_1 がどのような値であってもつねに 1 に収束する.

(2) 仮定から以下の等式が成り立つ.

$$a_{n+1}=\frac{a_n(a_n+1)^2}{2(a_n^2+1)}\cdots(i) \quad a_{n+1}-1=\frac{(a_n-1)\Big(\big(a_n+\frac{1}{2}\big)^2+\frac{7}{4}\Big)}{2(a_n^2+1)}\cdots(ii) \quad a_{n+1}-a_n=\frac{-a_n(a_n-1)^2}{2(a_n^2+1)}\cdots(iii)$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束するならば (iii) より, α は $\dfrac{-\alpha(\alpha-1)^2}{2(\alpha^2+1)}=0$ を満たす実数だから $\alpha=0$ または 1 である.

(i), (iii) より, $a_n\leqq 0$ ならば $a_n\leqq a_{n+1}\leqq 0$ だから, $a_1\leqq 0$ ならば $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 を上界とする単調増加数列となって収束する. その極限値は 0 または 1 であるが, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 を上界とするため, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する. (i), (ii), (iii) より, $0<a_n<1$ ならば $0<a_{n+1}<a_n<1$ だから, $0<a_1\leqq 1$ ならば $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 を下界とする単調減少数列となって収束する. その極限値は 0 または 1 であるが, すべての自然数 n に対して $a_n\leqq a_1<1$ だから $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する. (ii), (iii) より, $a_n\geqq 1$ ならば $1\leqq a_{n+1}\leqq a_n$ だから, $a_1\geqq 1$ ならば $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 1 を下界とする単調減少数列となって収束する. その極限値は 0 または 1 であるが, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 1 を下界とするため, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 1 に収束する. 以上から $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, $a_1<1$ ならば 0 に収束し, $a_1\geqq 1$ ならば 0 に収束する.

17. (1) $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\right)$ だから

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}&=\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\right)\\&=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}\right)\end{aligned}$$

である. 従って $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}\right)=\frac{1}{kk!}$.

(2) $\dfrac{1}{n(n+k)}=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k}\right)$ だから $m\geqq k$ ならば

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)=\frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}-\sum_{n=k+1}^{m+k}\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}-\sum_{n=m+1}^{m+k}\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{m+n}\right)$$

である. 従って $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+k)}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{m+n}\right)=\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}$.

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+k)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+k}\right)}=\dfrac{\sqrt{n+k}-\sqrt{n}}{k\sqrt{n(n+k)}}=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$ だから $m\geqq k$ ならば

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{n(n+k)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+k}\right)}&=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)=\frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{n}}-\sum_{n=k+1}^{m+k}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\&=\frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{n}}-\sum_{n=m+1}^{m+k}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{n}}-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{m+n}}\right)\end{aligned}$$

である. 従って $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+k)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+k}\right)} = \lim_{m\to\infty} \dfrac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{k} \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{k} \dfrac{1}{\sqrt{m+n}}\right) = \dfrac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

(4) $S_n = \sum_{k=1}^{n} kr^k$ とおく. $(1-r)S_n = S_n - rS_n = \sum_{k=1}^{n} kr^k - \sum_{k=1}^{n} kr^{k+1} = r + \sum_{k=2}^{n} kr^k - \sum_{k=2}^{n}(k-1)r^k - nr^{n+1} = r + \sum_{k=2}^{n} r^k - nr^{n+1} = r + r^2\sum_{k=2}^{n} r^{k-2} - nr^{n+1} = r + r^2\sum_{k=0}^{n-2} r^k - nr^{n+1} = r + r^2\dfrac{1-r^{n-1}}{1-r} - nr^{n+1} = \dfrac{r - r^{n+1} - nr^{n+1}(1-r)}{1-r}$ より $S_n = \dfrac{r - r^{n+1} - nr^{n+1}(1-r)}{(1-r)^2}$ である. $|r| < 1$ ならば $n\to\infty$ のとき, r^{n+1}, nr^{n+1} はともに 0 に収束する (問題 4) ため, $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{r - r^{n+1} - nr^{n+1}(1-r)}{(1-r)^2} = \dfrac{r}{(1-r)^2}$.

18. 仮定から $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n - cb_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} - c = 0$ が成り立つため, $c_n = a_n - cb_n$ とおけば, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{b_n} = 0$ であり, $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} - c = \dfrac{\sum_{k=1}^{n}(a_k - cb_k)}{\sum_{k=1}^{n} b_k} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} c_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k}$ だから, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} c_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} = 0$ であることを示せばよい. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N_1 で条件「$n \geqq N_1$ ならば $\left|\dfrac{c_n}{b_n}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$」を満たすものが存在し, さらに自然数 N_2 で条件「$n \geqq N_2$ ならば $\sum_{k=1}^{n} b_k > \dfrac{2}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{N_1-1} |c_k|$」を満たすものが存在する. $n \geqq \max\{N_1, N_2\}$ ならば

$$\left|\sum_{k=1}^{n} c_k\right| \leqq \sum_{k=1}^{n} |c_k| = \sum_{k=1}^{N_1-1} |c_k| + \sum_{k=N_1}^{n} |c_k| < \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=N_1}^{n} \frac{\varepsilon b_k}{2} = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{N_1-1} b_k + \varepsilon\sum_{k=N_1}^{n} b_k < \varepsilon\sum_{k=1}^{n} b_k$$

だから $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} c_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} = 0$ が成り立つ.

19. ε を任意の正の実数とする. (i) より, 自然数 M で, $m \geqq M$ ならば $|\beta_m - r| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ かつ $|\gamma_m - r| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ を満たすものがある. また $\lim_{n\to\infty} b(M)_n = \beta_M$, $\lim_{n\to\infty} c(M)_n = \gamma_M$ だから, 自然数 K で, $n \geqq K$ ならば $|b(M)_n - \beta_M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ かつ $|c(M)_n - \gamma_M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ を満たすものがある. 故に $n \geqq K$ ならば

$$\begin{aligned}
|b(M)_n - r| &= |(b(M)_n - \beta_M) + (\beta_M - r)| \leqq |b(M)_n - \beta_M| + |\beta_M - r| < \varepsilon \\
|c(M)_n - r| &= |(c(M)_n - \gamma_M) + (\gamma_M - r)| \leqq |c(M)_n - \gamma_M| + |\gamma_M - r| < \varepsilon
\end{aligned}$$

従って, (ii) から $n \geqq \max\{K, N(M)\}$ ならば $-\varepsilon < b(M)_n - r \leqq a_n - r \leqq c(M)_n - r < \varepsilon$ となるため, $|a_n - r| < \varepsilon$ が成り立つ. 故に $\lim_{n\to\infty} a_n = r$ である.

20. 任意の自然数 m に対し, 仮定から自然数 $K(m)$ で, $k \geqq K(m)$ ならば $\max\left\{r - \dfrac{1}{m}, 0\right\} < \dfrac{a_{k+1}}{a_k} < r + \dfrac{1}{m}$ を満たすものがある. $n \geqq K(m)+1$ とし, $k = K(m), K(m)+1, \ldots, n-1$ をこの不等式の k に代入して, 辺々掛け合わせれば

$$\left(\max\left\{r - \frac{1}{m}, 0\right\}\right)^{n-K(m)} < \frac{a_n}{a_{K(m)}} < \left(r + \frac{1}{m}\right)^{n-K(m)}$$

が得られる. 従って $a_{K(m)}\left(\max\left\{r - \dfrac{1}{m}, 0\right\}\right)^{n-K(m)} < a_n < a_{K(m)}\left(r + \dfrac{1}{m}\right)^{n-K(m)}$ だから, 各辺の n 乗根を考えれば

$$\sqrt[n]{a_{K(m)}}\left(\max\left\{r - \frac{1}{m}, 0\right\}\right)^{1-\frac{K(m)}{n}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{a_{K(m)}}\left(r + \frac{1}{m}\right)^{1-\frac{K(m)}{n}}$$

が得られる. ここで $b(m)_n = \sqrt[n]{a_{K(m)}}\left(\max\left\{r - \dfrac{1}{m}, 0\right\}\right)^{1-\frac{K(m)}{n}}$, $c(m)_n = \sqrt[n]{a_{K(m)}}\left(r + \dfrac{1}{m}\right)^{1-\frac{K(m)}{n}}$ によって数列 $\{b(m)_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c(m)_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めれば, 上の不等式から $\{b(m)_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c(m)_n\}_{n=1}^{\infty}$ は数列 $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ に対して問

題 18 の条件 (ii) を満たす. また, 問題 5 の (1) の結果から

$$\lim_{n\to\infty} b(m)_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_{K(m)}} \frac{\max\{r-\frac{1}{m},0\}}{\left(\sqrt[n]{\max\{r-\frac{1}{m},0\}}\right)^{K(m)}} = \max\left\{r-\frac{1}{m},0\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty} c(m)_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_{K(m)}} \frac{r+\frac{1}{m}}{\left(\sqrt[n]{r+\frac{1}{m}}\right)^{K(m)}} = r+\frac{1}{m}$$

であり, $r \geqq 0$ より $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \max\left\{r-\frac{1}{m},0\right\} = \max\{r,0\} = r$, $\displaystyle\lim_{m\to\infty} r+\frac{1}{m} = r$ だから, 問題 18 の条件 (i) も満たされるため, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ である.

21. まず $\rho = 1$ の場合に, 主張が成り立つことを示す.

任意の $0<r<1$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{a_n} = 0$ が成り立つとする. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \neq 1$ と仮定すれば, 1 より小さい実数 r が存在して, $\sqrt[n]{a_n} \leqq r$ を満たす自然数 n が無数に存在するか, または 1 より大きい実数 s が存在して, $\sqrt[n]{a_n} \geqq s$ を満たす自然数 n が無数に存在する.

前者の場合は, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ で, すべての自然数 i に対して $\sqrt[n_i]{a_{n_i}} \leqq r$ を満たすものが存在するため, $\dfrac{r^{n_i}}{a_{n_i}} \geqq 1$ がすべての自然数 i に対して成り立つ. 一方, 仮定から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{a_n} = 0$ だから, 自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $\dfrac{r^n}{a_n} < 1$」を満たすものが存在するが, $n_k \geqq N$ を満たす自然数 k があるため, $\dfrac{r^{n_k}}{a_{n_k}} \geqq 1$ と $\dfrac{r^{n_k}}{a_{n_k}} < 1$ が同時に成り立って矛盾が生じる.

後者の場合は, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ で, すべての自然数 i に対して $\sqrt[n_i]{a_{n_i}} \geqq s$ を満たすものが存在するため, $r = \dfrac{1}{s}$ とおけば, $0<r<1$ であり, $r^{n_i} a_{n_i} \geqq 1$ がすべての自然数 i に対して成り立つ. 一方, 仮定から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n a_n = 0$ だから, 自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $r^n a_n < 1$」を満たすものが存在するが, $n_k \geqq N$ を満たす自然数 k があるため, $r^{n_k} a_{n_k} \geqq 1$ と $r^{n_k} a_{n_k} < 1$ が同時に成り立って矛盾が生じる.

故に, 任意の $0<r<1$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{a_n} = 0$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ である.

逆に $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ が成り立つと仮定する. 任意の $0<r<1$ に対し, $\varepsilon = \dfrac{1-r}{2}$ とおけば, $0 < \varepsilon = \dfrac{1-r}{2} < 1-r$ だから $\dfrac{r}{1-\varepsilon} < 1$ であり, さらに $\varepsilon = \dfrac{1-r}{2} < \dfrac{1-r}{2r} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}-1\right) < \dfrac{1}{r} - 1$ だから $r(1+\varepsilon) < 1$ が成り立つことに注意する. 仮定から自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $1-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < 1+\varepsilon$」を満たすものが存在するため, $n \geqq N$ ならば $\dfrac{1}{a_n} < \dfrac{1}{(1-\varepsilon)^n}$ かつ $a_n < (1+\varepsilon)^n$ が成り立つ. これらの不等式の両辺に r^n をかければ, 任意の $n \geqq N$ に対して $0 < \dfrac{r^n}{a_n} < \left(\dfrac{r}{1-\varepsilon}\right)^n$ かつ $0 < r^n a_n < (r(1+\varepsilon))^n$ が成り立ち, 上の注意から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{r}{1-\varepsilon}\right)^n = \lim_{n\to\infty} (r(1+\varepsilon))^n = 0$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{a_n} = 0$ が得られる.

正の実数 ρ に対して $b_n = \dfrac{a_n}{\rho^n}$ によって, 数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めれば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ が成り立つことと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = 1$ が成り立つことは同値である. また, 任意の $0 < r < \dfrac{1}{\rho}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n a_n = 0$ が成り立つことと, 任意の $0<r<1$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n b_n = 0$ が成り立つことは同値であり, 任意の $0<r<\rho$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{a_n} = 0$ が成り立つことと, 任意の $0<r<1$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{b_n} = 0$ が成り立つことは同値だから, 一般の場合の主張が成り立つことがわかる.

22. (1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とすれば $AB = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$ である. $x \neq -\dfrac{s}{r}, -\dfrac{cq+ds}{cp+dr}, \infty$ の場合, $(f_A \circ f_B)(x) = f_A(f_B(x)) = \dfrac{a\frac{px+q}{rx+s}+b}{c\frac{px+q}{rx+s}+d} = \dfrac{(ap+br)x+aq+bs}{(cp+dr)x+cq+ds} = f_{AB}(x)$ $x = -\dfrac{s}{r}$ の場合, $(f_A \circ f_B)(x) = f_A(f_B(x)) = f_A(\infty) = \dfrac{a}{c} = f_{AB}(x)$. $x = -\dfrac{cq+ds}{cp+dr}$ の場合, $f_B(x) = \dfrac{-p\frac{cq+ds}{cp+dr}+q}{-r\frac{cq+ds}{cp+dr}+s} = -\dfrac{d}{c}$ だから $(f_A \circ f_B)(x) =$

$f_A(f_B(x)) = \infty = f_{AB}(x)$ である．$c=0$ または $r=0$ の場合も同様にして $(f_A \circ f_B)(x) = f_{AB}(x)$ が成り立つことが確かめられる．

(2) $x_{n+1} = f_A(x_n)$ だから，(1) の結果より $x_n = (\overbrace{f_A \circ f_A \circ \cdots \circ f_A}^{n-1\text{ 回の合成}})(x_1) = f_{A^{n-1}}(x_1)$ が成り立つ．A の固有値を α, β とすれば，これらは 2 次方程式 $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$ の解だから $\alpha = \dfrac{a+d-\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2}$，$\beta = \dfrac{a+d+\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2}$ で与えられる．また，α, β に対する固有ベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix}\alpha-d\\ c\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\beta-d\\ c\end{pmatrix}$ で与えられるため，$P = \begin{pmatrix}\alpha-d & \beta-d\\ c & c\end{pmatrix}$ とおけば，仮定から $\alpha \neq \beta$ だから P は正則行列で $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ である．従って $A = P\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}P^{-1}$ だから，$(\alpha-d)(\beta-d) = -bc$ であることに注意すれば次の等式が得られる．

$$\begin{aligned}A^n &= P\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{c(\alpha-\beta)}\begin{pmatrix}\alpha-d & \beta-d\\ c & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & -\beta+d\\ -c & \alpha-d\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix}(\alpha-d)\alpha^n-(\beta-d)\beta^n & b(\alpha^n-\beta^n)\\ c(\alpha^n-\beta^n) & -(\beta-d)\alpha^n+(\alpha-d)\beta^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

故に $x_n = \dfrac{((\alpha-d)\alpha^{n-1}-(\beta-d)\beta^{n-1})x_1+b(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})}{c(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})x_1-(\beta-d)\alpha^{n-1}+(\alpha-d)\beta^{n-1}} = \dfrac{(x_1(\alpha-d)+b)\alpha^{n-1}-(x_1(\beta-d)+b)\beta^{n-1}}{(cx_1-\beta+d)\alpha^{n-1}-(cx_1-\alpha+d)\beta^{n-1}}$ である．

(3) A の固有値は $\alpha = \dfrac{a+d}{2}$ のみで，$\begin{pmatrix}\frac{a-d}{2}\\ c\end{pmatrix}$ は α に対する固有ベクトルである．$P = \begin{pmatrix}\frac{a-d}{2} & 1\\ c & 0\end{pmatrix}$ とおけば，P は正則で，仮定から $(a-d)^2+4bc=0$ だから $P^{-1}AP = -\dfrac{1}{c}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -c & \frac{a-d}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{a-d}{2} & 1\\ c & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ である．n による帰納法で $\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}\alpha^n & n\alpha^{n-1}\\ 0 & \alpha^n\end{pmatrix}$ であることが示されるため，次の等式が得られる．

$$\begin{aligned}A^n &= P\begin{pmatrix}\alpha^n & n\alpha^{n-1}\\ 0 & \alpha^n\end{pmatrix}P^{-1} = -\frac{1}{c}\begin{pmatrix}\frac{a-d}{2} & 1\\ c & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^n & n\alpha^{n-1}\\ 0 & \alpha^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -c & \frac{a-d}{2}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\alpha^n+\frac{1}{2}n\alpha^{n-1}(a-d) & bn\alpha^{n-1}\\ cn\alpha^{n-1} & \alpha^n-\frac{1}{2}n\alpha^{n-1}(a-d)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

故に $x_n = \dfrac{\left(\alpha^{n-1}+\frac{1}{2}(n-1)\alpha^{n-2}(a-d)\right)x_1+b(n-1)\alpha^{n-2}}{c(n-1)\alpha^{n-2}x_1+\alpha^{n-1}-\frac{1}{2}(n-1)\alpha^{n-2}(a-d)} = \dfrac{n((a-d)x_1+2b)+2dx_1-2b}{n(2cx_1-a+d)-2cx_1+2a}$ である．

(4) 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が γ に収束すれば，$\gamma = \displaystyle\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{ax_n+b}{cx_n+d} = \frac{a\gamma+b}{c\gamma+d}$ より，γ は方程式 $x = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ の実数解である．この方程式の解は $\dfrac{a-d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c} = \dfrac{\alpha-d}{c}$ と $\dfrac{a-d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c} = \dfrac{\beta-d}{c}$ で与えられ，$(a+d)^2-4(ad-bc) = (a-d)^2+4bc < 0$ ならば $x = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ は実数解をもたない．従って $(a+d)^2 < 4(ad-bc)$ ならば数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しない．

$x_n = \dfrac{\alpha-d}{c}$ または $\dfrac{\beta-d}{c}$ ならば $x_{n+1} = x_n$ である．従って $x_1 = \dfrac{\alpha-d}{c}$ または $\dfrac{\beta-d}{c}$ ならば，数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ はつねに一定の値をとるため収束する．以後，$x_1 \neq \dfrac{\alpha-d}{c}, \dfrac{\beta-d}{c}$ と仮定する．

$(a+d)^2 > 4(ad-bc)$ の場合，$a+d<0$ ならば $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ であり，$a+d>0$ ならば $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| < 1$ だから，(2) の結果より

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(x_1(\alpha-d)+b)-(x_1(\beta-d)+b)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}{(cx_1-\beta+d)-(cx_1-\alpha+d)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}} = \frac{(\alpha-d)x_1+b}{cx_1-\beta+d} \quad (a+d<0)$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(x_1(\alpha-d)+b)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}-(x_1(\beta-d)+b)}{(cx_1-\beta+d)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}-(cx_1-\alpha+d)} = \frac{(\beta-d)x_1+b}{cx_1-\alpha+d} \quad (a+d>0)$$

$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(a+d)x+ad-bc=(x-a)(x-d)-bc$ より $(a-\alpha)(a-\beta)=(d-\alpha)(d-\beta)=-bc$ であることに注意すれば, $(\alpha-d)(cx_1-\beta+d)=c((\alpha-d)x_1+b)$, $(\beta-d)(cx_1-\alpha+d)=c((\beta-d)x_1+b)$ である. 従って, 上式から $a+d<0$ ならば $\lim_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\alpha-d}{c}=\dfrac{a-d-\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2c}$ であり, $a+d>0$ ならば $\lim_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\beta-d}{c}=\dfrac{a-d+\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2c}$ である. $a+d=0$ ならば $\alpha=-\beta$ だから

$$x_n=\frac{((a-\beta)(-1)^{n-1}-a-\beta)x_1+b((-1)^{n-1}-1)}{c((-1)^{n-1}-1)x_1-(a+\beta)(-1)^{n-1}+a-\beta}=\begin{cases}x_1 & n\text{ は奇数}\\ \frac{ax_1+b}{cx_1+d} & n\text{ は偶数}\end{cases}$$

であり, 仮定から $x_1\neq\dfrac{\alpha-d}{c},\dfrac{\beta-d}{c}$ だから $x_1\neq\dfrac{ax_1+b}{cx_1+d}$ である. 故に $a+d=0$ ならば, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しない.

$(a+d)^2=4(ad-bc)$ の場合, $b=-\dfrac{(a-d)^2}{4c}$, $\alpha=\beta=\dfrac{a+d}{2}$ であり, 仮定より $x_1\neq\dfrac{a-d}{2c}$ である. このとき, (3) の結果から, 次の等式が得られる.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-d)x_1+2b+\frac{2dx_1-2b}{n}}{2cx_1-a+d-\frac{2cx_1-2a}{n}}=\frac{(a-d)x_1+2b}{2cx_1-a+d}=\frac{(a-d)x_1-\frac{(a-d)^2}{2c}}{2cx_1-a+d}=\frac{a-d}{2c}$$

以上から, $(a+d)^2<4(ad-bc)$ または $a+d=0$ ならば $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しない. $(a+d)^2\geqq 4(ad-bc)$ の場合, $a+d<0$ ならば $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\dfrac{a-d-\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2c}$ に収束し, $a+d>0$ ならば $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\dfrac{a-d+\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2c}$ に収束する.

(5) $a=c=1$, $b=8$, $d=3$ の場合, $(a+d)^2-4(ad-bc)=36>0$, $a+d=4>0$ だから, 上の結果から $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\dfrac{a-d+\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2c}=2$ に収束する.

23. (1) $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}\geqq\sqrt{a_nb_n}=b_{n+1}$ だから, $n\geqq 2$ ならば $b_n\leqq a_n$ が成り立つ. 従って, $n\geqq 2$ ならば $a_{n+1}-a_n=\dfrac{b_n-a_n}{2}\leqq 0$, $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\sqrt{\dfrac{a_n}{b_n}}\geqq 1$ だから, $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ は単調減少数列, $\{b_n\}_{n=2}^{\infty}$ は単調増加数列である. $n\geqq 2$ ならば $a_n\geqq b_n\geqq b_2$ だから $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ は下に有界であり, $b_n\leqq a_n\leqq a_2$ だから $\{b_n\}_{n=2}^{\infty}$ は上に有界である. 故に, 連続性の公理から $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する. $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ とおき, $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ の両辺の極限を考えると, $\alpha=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ がわかる. この等式からただちに $\alpha=\beta$ が得られる.

(2) $a_{n+1}b_{n+1}=\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}\dfrac{a_n+b_n}{2}=a_nb_n$ だから, すべての自然数 n に対して $a_nb_n=a_1b_1=ab$ が成り立つ. $n\geqq 2$ に対して $a_n\leqq\sqrt{ab}\leqq b_n$ が成り立つことを n による帰納法で示す. $a_2-\sqrt{ab}=\dfrac{2ab}{a+b}-\sqrt{ab}=-\dfrac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{a+b}\leqq 0$, $b_2-\sqrt{ab}=\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}\geqq 0$ だから, $n=2$ のとき主張が成り立つ. $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}\geqq\sqrt{a_nb_n}=\sqrt{ab}$ であり, この不等式から $\dfrac{2ab}{a_n+b_n}\leqq\sqrt{ab}$ だから $a_n\leqq\sqrt{ab}$ と仮定すると $\sqrt{ab}-a_{n+1}=\sqrt{ab}-\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}=\sqrt{ab}-\dfrac{2ab}{a_n+b_n}\geqq 0$ となるため, $a_{n+1}\leqq\sqrt{ab}$ である. また, $a_{n+1}-a_n=\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}-a_n=\dfrac{a_n(b_n-a_n)}{a_n+b_n}\geqq 0$, $b_n-b_{n+1}=b_n-\dfrac{a_n+b_n}{2}=\dfrac{b_n-a_n}{2}\geqq 0$ だから, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列であり, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列である. 故に $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束し, $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ とおけば, $a_n\leqq\sqrt{ab}\leqq b_n$ より, $\alpha\leqq\sqrt{ab}\leqq\beta$ である. 一方, $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ だから, $n\to\infty$ とすれば $\beta=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ が得られるため, $\alpha=\beta$ であることがわかる. 従って, $\alpha=\beta=\sqrt{ab}$ である

24. すべての自然数 n に対して $a_{n+1}<b_n$ が成り立つことを n による帰納法で示す. $a<b$ より $a_1=\dfrac{a+b}{2}<b=b_0$ だから, $n=0$ の場合は主張が成り立つ. $a_{n+1}<b_n$ が成り立つと仮定すれば,

$$b_{n+1}-a_{n+2}=\frac{b_{n+1}-a_{n+1}}{2}=\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2}\left(\sqrt{b_n}-\sqrt{a_{n+1}}\right)>0$$

だから $a_{n+2} < b_{n+1}$ が成り立ち, 主張が示された. 従って $a_{n+1} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} = b_n - a_{n+1} > 0$ だから $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列であり, $b_{n+1} - b_n = \sqrt{b_n}\left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_n}\right) < 0$ だから $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列である. さらに $a = a_1 \leqq a_n < a_{n+1} < b_n \leqq b_1 = b$ より $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界である. 故に, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はともに収束し, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ とおけば, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ だから, $n \to \infty$ とすれば $\alpha = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ が得られるため, $\alpha = \beta$ であることがわかる.

$0 < a_n < b_n$ だから $a_n = b_n \cos\theta_n$ を満たす $0 < \theta_n < \dfrac{\pi}{2}$ がただ一つ存在する. $b_{n+1}\cos\theta_{n+1} = a_{n+1} = \dfrac{b_n(\cos\theta_n + 1)}{2} = b_n \cos^2\dfrac{\theta_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n} = b_n \cos\dfrac{\theta_n}{2}$ より $b_n \cos\dfrac{\theta_n}{2}\cos\theta_{n+1} = b_n\cos^2\dfrac{\theta_n}{2}$ だから $\cos\theta_{n+1} = \cos\dfrac{\theta_n}{2}$ が得られる. θ_{n+1} と $\dfrac{\theta_n}{2}$ はともに開区間 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ に属し, この区間で $\cos$ は単射であるため, $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$ である. このことと, $\theta_0 = \theta$ より, $\theta_n = \dfrac{\theta}{2^n}$ である. 従って, $b_{n+1} = b_n \cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}}$ だから, $n \geqq 1$ に対し,

$$b_n = b_{n-1}\cos\frac{\theta}{2^n} = b_{n-2}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^n} = \cdots = b_1\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^n} = b\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^n}$$

が成り立つ. このとき, $b_n = \dfrac{b}{2^{n-1}}\sum\limits_{i=1}^{2^{n-1}}\cos\dfrac{2i-1}{2^n}\theta$ であることを n による帰納法で示す. $n=1$ の場合は, $b_1 = b_0\cos\dfrac{\theta}{2}$ だから, 主張は正しい. $b_n = \dfrac{b}{2^{n-1}}\sum\limits_{i=1}^{2^{n-1}}\cos\dfrac{2i-1}{2^n}\theta$ が成り立つと仮定すれば,

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= b_n\cos\frac{\theta}{2^{n+1}} = \frac{b}{2^{n-1}}\sum_{i=1}^{2^{n-1}}\cos\frac{2i-1}{2^n}\theta\cos\frac{\theta}{2^{n+1}} = \frac{b}{2^{n-1}}\sum_{i=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4i-3}{2^{n+1}}\theta + \cos\frac{4i-1}{2^{n+1}}\theta\right)\\
&= \frac{b}{2^n}\sum_{i=1}^{2^{n-1}}\left(\cos\frac{2(2i-1)-1}{2^{n+1}}\theta + \cos\frac{2(2i)-1}{2^{n+1}}\theta\right) = \frac{b}{2^n}\sum_{j=1}^{2^n}\cos\frac{2j-1}{2^{n+1}}\theta
\end{aligned}$$

となるため, 主張が示された. そこで, $f(x) = b\cos(\theta x)$ で与えられる関数 f を考え, 閉区間 $[0,1]$ を 2^{n-1} 等分して, 各小区間 $\left[\dfrac{i-1}{2^{n-1}}, \dfrac{i}{2^{n-1}}\right]$ の中点 $\dfrac{2i-1}{2^n}$ をその代表点に選んで f のリーマン和 $\sum\limits_{i=1}^{2^{n-1}} f\left(\dfrac{2i-1}{2^n}\right)\dfrac{1}{2^{n-1}}$ をつくれば, 上で示したことから, この値は b_n に他ならない. 故に次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{b}{2^{n-1}}\sum_{i=1}^{2^{n-1}}\cos\frac{2i-1}{2^n}\theta = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2^{n-1}} f\left(\frac{2i-1}{2^n}\right)\frac{1}{2^{n-1}}\\
&= \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 b\cos(\theta x)dx = \left[\frac{b}{\theta}\sin(\theta x)\right]_0^1 = \frac{b\sin\theta}{\theta}
\end{aligned}$$

半径 r の円に外接する正 n 角形の周囲の長さは $2nr\tan\dfrac{\pi}{n}$ であり, 半径 r の円に内接する正 n 角形の周囲の長さは $2nr\sin\dfrac{\pi}{n}$ だから $a_n = \dfrac{1}{2^{n+2}\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}$, $b_n = \dfrac{1}{2^{n+2}\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}$ が $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ と $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$ を満たすことを確かめればよい. $\dfrac{a_n+b_n}{2} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{2^{n+2}} + 1}{2^{n+3}\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \dfrac{\cos\frac{2\pi}{2^{n+3}} + 1}{2^{n+3}\sin\frac{2\pi}{2^{n+3}}} = \dfrac{2\cos^2\frac{\pi}{2^{n+3}}}{2^{n+4}\sin\frac{\pi}{2^{n+3}}\cos\frac{\pi}{2^{n+3}}} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{2^{n+3}}}{2^{n+3}\sin\frac{\pi}{2^{n+3}}} = a_{n+1}$, $a_{n+1}b_n = \dfrac{\cos\frac{\pi}{2^{n+3}}}{2^{n+3}\sin\frac{\pi}{2^{n+3}}}\dfrac{1}{2^{n+2}\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{2^{n+3}}}{2^{n+3}\sin\frac{\pi}{2^{n+3}}}\dfrac{1}{2^{n+2}\sin\frac{2\pi}{2^{n+3}}} = \dfrac{1}{2^{2n+6}\sin^2\frac{\pi}{2^{n+3}}} = b_{n+1}^2$ より, 確かに $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ と $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$ が成り立つ.

25. (1) $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{-n} = \dfrac{(n+1)^{n+1}(n-1)^n}{n^{n+1}n^n} = \dfrac{(n+1)(n^2-1)^n}{n^{2n+1}} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$ が成り立つ. 二項定理より $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n = 1 + n\dfrac{1}{n^2} + \sum\limits_{r=2}^{n} {}_nC_r\dfrac{1}{n^{2r}} \geqq 1 + \dfrac{1}{n}$ だから (上式) $\leqq \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n = \left(1-\dfrac{1}{n^4}\right)^n < 1$ が得られる. 従って $a_n < a_{n-1}$ となり, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少である.

(2) もし $a_N \leqq e$ となる自然数 N が存在すれば, (2) の結果から $n \geqq N+1$ ならば $a_n \leqq a_{N+1} < a_N \leqq e$ である.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$ だから, 教科書の定理 1.1 の (6) から $e \leqq a_{N+1} < e$ となって矛盾が生じる. 故に, すべての自然数 n に対して $a_n > e$ である.

26. (1) n による数学的帰納法で主張を示す. $e > 1$ だから, $n = 1$ のとき, 主張は成り立つ. $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$ とおけば $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!n^n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ より $a_{n+1} = a_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ が成り立つため, $\dfrac{1}{n}e^{n-1} \leqq a_n \leqq e^n$ が成り立つと仮定して, この各辺に $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ をかければ $\dfrac{1}{n}e^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqq a_{n+1} \leqq e^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ が得られる. 数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ は単調に増加して e に収束するため, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$ である. よって, $a_{n+1} \leqq e^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e^{n+1}$ を得る. また, 問題 24 の (2) の結果から $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \geqq e$ であり, この左辺は $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n+1}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ に等しいため, 両辺を $n+1$ で割ると $\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \geqq \dfrac{1}{n+1}e$ が得られる. 従って $a_{n+1} \geqq \dfrac{1}{n}e^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \geqq \dfrac{1}{n+1}e^n$ である. 以上から $\dfrac{1}{n+1}e^n \leqq a_{n+1} \leqq e^{n+1}$ が成り立つ.

(2) (1) で示した不等式の各辺の n 乗根を考えれば, $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}e^{1-\frac{1}{n}} \leqq \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} \leqq e$ が得られる. 教科書の問題 1.9 の (2) より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}e^{1-\frac{1}{n}} = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)\left(\lim_{n\to\infty}e^{1-\frac{1}{n}}\right) = e$ だから, はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ である.

微積分学 I 演習問題　第 2 回　逆三角関数

1. (1) $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{1}{3}$ とおくとき, 次の $\boxed{}$ にあてはまる自然数を求めよ.

$$\tan 2\alpha = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\quad \tan\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}},\quad \pi = 8\tan^{-1}\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}} + 4\tan^{-1}\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}.$$

(2) $\beta = \tan^{-1}\dfrac{1}{5}$ とおくとき, 次の $\boxed{}$ にあてはまる自然数を求めよ.

$$\tan 2\beta = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\quad \tan 4\beta = \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}},\quad \tan\left(4\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}},\quad \pi = 16\tan^{-1}\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}} - 4\tan^{-1}\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}.$$

2. 次の関係式が成り立つことを示せ.

(1) $\sin\left(\cos^{-1}x\right) = \cos\left(\sin^{-1}x\right) = \sqrt{1-x^2}$　(2) $\sin\left(2\cos^{-1}x\right) = 2x\sqrt{1-x^2}$　(3) $\tan\left(\cos^{-1}x\right) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

(4) $\tan\left(\sin^{-1}x\right) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$　(5) $\cos\left(\tan^{-1}x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　(6) $\sin\left(\tan^{-1}x\right) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

3. 次の等式を満たす x をそれぞれ求めよ.

(1) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{2}$　(2) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$　(3) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$

(4) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$　(5) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{2}{5} = \dfrac{\pi}{4}$　(6) $2\cos^{-1}x = \tan^{-1}\sqrt{15}$

4. 次の値を, 逆三角関数を用いずに表せ.

(1) $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}} - \sin^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}}$　(2) $\tan^{-1}\dfrac{2}{3} + \tan^{-1}\dfrac{1}{5}$　(3) $\sin^{-1}\dfrac{2}{3} + \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

(4) $\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{13}} + \sin^{-1}\dfrac{7}{2\sqrt{13}}$　(5) $\tan^{-1}\dfrac{4}{3} - \tan^{-1}\dfrac{1}{7}$　(6) $\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

(7) $2\tan^{-1}\dfrac{1}{2} - \tan^{-1}\dfrac{1}{7}$　(8) $3\tan^{-1}\dfrac{1}{4} + \tan^{-1}\dfrac{5}{99}$　(9) $\cos^{-1}\dfrac{7}{25} + 2\cos^{-1}\dfrac{3}{5}$

5. 次の関係式が成り立つことを示せ. ただし (1) では $x > 0$, (2) では $-1 \leqq x < 1$, (3) では $|x| < 1$, (4) では $x < -1$, (6) では $-1 < x \leqq 1$ とする.

(1) $2\tan^{-1}x - \tan^{-1}\dfrac{x^2-1}{2x} = \dfrac{\pi}{2}$　(2) $2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} - \dfrac{\pi}{2} = \sin^{-1}x$　(3) $\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2} = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$

(4) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{1-x}{1+x} = -\dfrac{3\pi}{4}$　(5) $\tan\left(2\tan^{-1}e^x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sinh x$　(6) $\tan\left(\dfrac{1}{2}\cos^{-1}x\right) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

6. (発展問題) 等式 $5\tan^{-1}\dfrac{1}{7} + 2\tan^{-1}\dfrac{3}{79} = \dfrac{\pi}{4}$ が成り立つことを示せ.

7. (発展問題) $\alpha, \beta, \gamma \in [-1, 1]$ に対し, $\cos^{-1}\alpha \leqq \cos^{-1}\beta + \cos^{-1}\gamma$ が成り立つためには $\alpha \geqq \beta\gamma - \sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}$ または $\beta + \gamma < 0$ が成り立つことが必要十分であることを示せ. また, 上の不等式の等号が成立するためには $\beta + \gamma \geqq 0$ かつ $\alpha = \beta\gamma - \sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

8. (発展問題) 次の不等式を満たす xy 平面上の点 (x, y) 全体からなる領域を図示せよ.

(1) $-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1}x + \tan^{-1}y < \dfrac{\pi}{2}$　(2) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1}x + \sin^{-1}y \leqq \dfrac{\pi}{2}$

9. (発展問題) $x, y \in \boldsymbol{R}$ に対し, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy} & xy < 1 \\ \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy} + \pi & xy > 1,\ x > 0 \\ \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy} - \pi & xy > 1,\ x < 0 \end{cases}$$

10. (発展問題) $x, y \in [-1, 1]$ に対し, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \begin{cases} \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) & xy \leqq 0 \text{ または } x^2+y^2 \leqq 1 \\ \cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy\right) & x, y \geqq 0 \text{ かつ } x^2+y^2 \geqq 1 \\ -\cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy\right) & x, y \leqq 0 \text{ かつ } x^2+y^2 \geqq 1 \end{cases}$$

11. (発展問題) (1) $(n+a)(n+b) > 1$ の場合, $\tan^{-1}\dfrac{1}{n} = \tan^{-1}\dfrac{1}{n+a} + \tan^{-1}\dfrac{1}{n+b}$ が成り立つためには, $ab = n^2+1$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

(2) 次の等式を示せ.

(i) $\tan^{-1}\dfrac{1}{3} = \tan^{-1}\dfrac{1}{5} + \tan^{-1}\dfrac{1}{8}$ (ii) $\tan^{-1}\dfrac{1}{70} = \tan^{-1}\dfrac{1}{99} + \tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ (iii) $\tan^{-1}\dfrac{5}{99} = \tan^{-1}\dfrac{1}{20} + \tan^{-1}\dfrac{1}{1985}$

(3) 以下の値はすべて $\dfrac{\pi}{4}$ に等しいことを示せ.

(i) $\tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{5} + \tan^{-1}\dfrac{1}{8}$ (ii) $4\tan^{-1}\dfrac{1}{5} - \tan^{-1}\dfrac{1}{70} + \tan^{-1}\dfrac{1}{99}$ (iii) $3\tan^{-1}\dfrac{1}{4} + \tan^{-1}\dfrac{1}{20} + \tan^{-1}\dfrac{1}{1985}$

12. (発展問題) (1) $|n| > 1$ かつ $(n+a)(n+b) > 1$ の場合, $2\tan^{-1}\dfrac{1}{n} = \tan^{-1}\dfrac{1}{n+a} + \tan^{-1}\dfrac{1}{n+b}$ が成り立つためには, $(a+b)(n^2+1) + 2abn = 0$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

(2) 次の等式を示せ.

$$(i)\ 2\tan^{-1}\frac{1}{10} = \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{515} \qquad (ii)\ 2\tan^{-1}\frac{1}{408} = \tan^{-1}\frac{1}{239} + \tan^{-1}\frac{1}{1393}$$

(3) 以下の値はいずれも $\dfrac{\pi}{4}$ に等しいことを示せ.

$$(i)\ 8\tan^{-1}\frac{1}{10} - \tan^{-1}\frac{1}{239} - 4\tan^{-1}\frac{1}{515} \qquad (ii)\ 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - 2\tan^{-1}\frac{1}{408} + \tan^{-1}\frac{1}{1393}$$

13. (発展問題) 等式 $\dfrac{\pi}{4} = 12\tan^{-1}\dfrac{1}{18} + 8\tan^{-1}\dfrac{1}{57} - 5\tan^{-1}\dfrac{1}{239} = 6\tan^{-1}\dfrac{1}{8} + 2\tan^{-1}\dfrac{1}{57} + \tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ が成り立つことを示せ.

14. (発展問題) x, y の有理式 $F(x, y)$ を $F(x, y) = \dfrac{x+y}{1-xy}$ によって定めるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $F(0, x) = F(x, 0) = x$, $F(y, x) = F(x, y)$, $F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z))$ が成り立つことを示せ.

(2) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を変数とする有理式 $F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を帰納的に $F_1(x_1) = x_1$,

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(F_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n)$$

によって定める. このとき, 実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して次の等式が成り立つことを示せ.

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\mathrm{Im}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_n)}{\mathrm{Re}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_n)}$$

(3) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を変数とする k 次基本対称式 $\displaystyle\sum_{1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqq n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$ を $s_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ で表すとき, 実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して次の等式が成り立つことを示せ.

$$\mathrm{Im}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_n) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^{k-1} s_{2k-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\mathrm{Re}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_n) = 1 + \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k s_{2k}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

とくに $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ の場合, 次の等式が成り立つ.

$$\mathrm{Im}(1+ix)^n = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^{k-1}\binom{n}{2k-1}x^{2k-1}, \qquad \mathrm{Re}(1+ix)^n = 1+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{2k}x^{2k}$$

(4) 実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が $m = 1, 2, \cdots, n$ に対して $\mathrm{Re}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_m) > 0$ を満たすことと, $m = 1, 2, \cdots, n$ に対して $\left|\tan^{-1}x_1 + \tan^{-1}x_2 + \cdots + \tan^{-1}x_m\right| < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすことは同値であることを示せ.

(5) 実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が, $m = 1, 2, \cdots, n$ に対して $\left|\tan^{-1}x_1 + \tan^{-1}x_2 + \cdots + \tan^{-1}x_m\right| < \dfrac{\pi}{2}$ を満たせば, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\tan^{-1}x_1 + \tan^{-1}x_2 + \cdots + \tan^{-1}x_n = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_n)}{\mathrm{Re}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_n)}$$

とくに 2 以上の整数 n に対し, $|x| < \tan\dfrac{\pi}{2n}$ ならば $n\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{\mathrm{Im}(1+ix)^n}{\mathrm{Re}(1+ix)^n}$ である.

15. (発展問題) 以下の等式を示せ.

(1) $\dfrac{\pi}{4} = 44\tan^{-1}\dfrac{1}{57} + 7\tan^{-1}\dfrac{1}{239} - 12\tan^{-1}\dfrac{1}{682} + 24\tan^{-1}\dfrac{1}{12943}$ (Störmer の公式)

(2) $\dfrac{\pi}{4} = 22\tan^{-1}\dfrac{1}{28} + 2\tan^{-1}\dfrac{1}{443} - 5\tan^{-1}\dfrac{1}{1393} - 10\tan^{-1}\dfrac{1}{11018}$ (Escott の公式)

(3) $\dfrac{\pi}{4} = 12\tan^{-1}\dfrac{1}{49} + 32\tan^{-1}\dfrac{1}{57} - 5\tan^{-1}\dfrac{1}{239} + 12\tan^{-1}\dfrac{1}{110443}$ (高野喜久雄の公式)

第 2 回の演習問題の解答

1. (1) $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$ だから $\tan$ の加法定理により

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{3}{4}, \qquad \tan\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = \frac{1-\tan 2\alpha}{1+\tan 2\alpha} = \frac{1}{7}.$$

一方 $0 < \alpha = \tan^{-1}\dfrac{1}{3} < \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$ より $-\dfrac{\pi}{12} < \dfrac{\pi}{4} - 2\alpha < \dfrac{\pi}{4}$ だから最後の等式から $\dfrac{\pi}{4} - 2\alpha = \tan^{-1}\dfrac{1}{7}$ が得られる．従って $\pi = 8\alpha + 4\tan^{-1}\dfrac{1}{7} = 8\tan^{-1}\dfrac{1}{3} + 4\tan^{-1}\dfrac{1}{7}$. 以上から ア 3, イ 4, ウ 1, エ 7, オ 1, カ 3, キ 1, ク 7. $\dfrac{\pi}{4} = 2\tan^{-1}\dfrac{1}{3} + \tan^{-1}\dfrac{1}{7}$ をハットンの公式という.

(2) $\tan\beta = \dfrac{1}{5}$ だから $\tan$ の加法定理により

$$\tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \frac{5}{12}, \quad \tan 4\beta = \frac{2\tan 2\beta}{1-\tan^2 2\beta} = \frac{120}{119}, \quad \tan\left(4\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\beta - \tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan 4\beta\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{239}.$$

一方 $0 < \beta = \tan^{-1}\dfrac{1}{5} < \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$ より $-\dfrac{\pi}{4} < 4\beta - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{5\pi}{12}$ だから最後の等式から $4\beta - \dfrac{\pi}{4} = \tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ が得られる．従って $\pi = 16\beta - 4\tan^{-1}\dfrac{1}{239} = 16\tan^{-1}\dfrac{1}{5} - 4\tan^{-1}\dfrac{1}{239}$. 以上から ア 5, イ 12, ウ 120, エ 119, オ 1, カ 239, キ 1, ク 5, ケ 1, コ 239. $\dfrac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\dfrac{1}{5} - \tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ をマチンの公式という.

2. (1) $y = \cos^{-1}x$ とおけば, $0 \leqq y \leqq \pi$ だから $\sin y \geqq 0$ である．従って $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ となるため, $\sin\left(\cos^{-1}x\right) = \sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-\left(\cos\left(\cos^{-1}x\right)\right)^2} = \sqrt{1-x^2}$ である．この結果と教科書の例題 1.6 の (1) から $\cos\left(\sin^{-1}x\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \cos^{-1}x\right) = \sin\left(\cos^{-1}x\right) = \sqrt{1-x^2}$.

(2) $\sin$ の 2 倍角公式と (1) から $\sin\left(2\cos^{-1}x\right) = 2\cos\left(\cos^{-1}x\right)\sin\left(\cos^{-1}x\right) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

(3) (1) から $\tan\left(\cos^{-1}x\right) = \dfrac{\sin\left(\cos^{-1}x\right)}{\cos\left(\cos^{-1}x\right)} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

(4) (1) から $\tan\left(\sin^{-1}x\right) = \dfrac{\sin\left(\sin^{-1}x\right)}{\cos\left(\sin^{-1}x\right)} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(5) $y = \tan^{-1}x$ とおけば, $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ だから $\cos y > 0$ である．従って $1 + \tan^2 y = \dfrac{1}{\cos^2 y}$ から $\cos y = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 y}}$ となるため, $\tan y = x$ より $\cos\left(\tan^{-1}x\right) = \cos y = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(6) (5) と $\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$ から $\sin\left(\tan^{-1}x\right) = \tan\left(\tan^{-1}x\right)\cos\left(\tan^{-1}x\right) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. (1) $0 \leqq \cos^{-1}\dfrac{1}{3} \leqq \pi$ だから $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2} - \cos^{-1}\dfrac{1}{3} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である．故に $\sin^{-1}x = \dfrac{\pi}{2} - \cos^{-1}\dfrac{1}{3}$ より $x = \sin(\sin^{-1}x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \cos^{-1}\dfrac{1}{3}\right) = \cos\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$.

(2) まず $0 < \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2}$ より $\dfrac{\pi}{3} < \cos^{-1}\dfrac{1}{3} < \dfrac{\pi}{2}$ となるため, $-\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{4} - \cos^{-1}\dfrac{1}{3} < \dfrac{\pi}{12}$ である．従って, 前問の (1) の結果と $\sin^{-1}x = \dfrac{\pi}{4} - \cos^{-1}\dfrac{1}{3}$ より $x = \sin(\sin^{-1}x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \cos^{-1}\dfrac{1}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4}\cos\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{3}\right) - \cos\dfrac{\pi}{4}\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{1-2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$

(3) まず $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ より $0 < \tan^{-1}\dfrac{1}{2} < \dfrac{\pi}{4}$ となるため, $\dfrac{\pi}{12} < \dfrac{\pi}{3} - \tan^{-1}\dfrac{1}{2} < \dfrac{\pi}{3}$ である．故に $\tan^{-1}x = \dfrac{\pi}{3} - \tan^{-1}\dfrac{1}{2}$ より $x = \tan(\tan^{-1}x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{3} - \tan^{-1}\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+2} = \left(2\sqrt{3}-1\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 5\sqrt{3}-8$.

(4) まず $0 < \dfrac{1}{3} < 1$ より $0 < \tan^{-1}\dfrac{1}{3} < \dfrac{\pi}{4}$ となるため, $0 < \dfrac{\pi}{4} - \tan^{-1}\dfrac{1}{3} < \dfrac{\pi}{4}$ である．故に $\tan^{-1}x = \dfrac{\pi}{4} - \tan^{-1}\dfrac{1}{3}$

より $x=\tan(\tan^{-1}x)=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\tan^{-1}\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)}=\dfrac{1}{2}$. 従って $\dfrac{\pi}{4}=\tan^{-1}\dfrac{1}{2}+\tan^{-1}\dfrac{1}{3}$ が示されたが, これはオイラーの公式と呼ばれるもののひとつである.

(5) まず $0<\dfrac{2}{5}<1$ より $0<\tan^{-1}\dfrac{2}{5}<\dfrac{\pi}{4}$ となるため, $0<\dfrac{\pi}{4}-\tan^{-1}\dfrac{2}{5}<\dfrac{\pi}{4}$ である. 故に $\tan^{-1}x=\dfrac{\pi}{4}-\tan^{-1}\dfrac{2}{5}$ より $x=\tan(\tan^{-1}x)=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\tan^{-1}\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\left(\tan^{-1}\frac{2}{5}\right)}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\left(\tan^{-1}\frac{2}{5}\right)}=\dfrac{3}{7}$.

(6) $0<\tan^{-1}\sqrt{15}<\dfrac{\pi}{2}$ だから, $2\cos^{-1}x=\tan^{-1}\sqrt{15}$ を満たす x は区間 $(0,1)$ に存在する. 前問の (5) より $\cos\left(2\cos^{-1}x\right)=\cos\left(\tan^{-1}\sqrt{15}\right)=\dfrac{1}{4}$ である. 一方 $\cos\left(2\cos^{-1}x\right)=2\cos\left(\cos^{-1}x\right)-1=2x^2-1$ だから $2x^2-1=\dfrac{1}{4}$ となるため, $x=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$ である.

4. (1) $\alpha=\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\beta=\sin^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ とおくと, $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\beta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ だから, 問題 2 の (1) より $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ である. また $0<\dfrac{1}{\sqrt{5}}<\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\dfrac{3}{\sqrt{10}}<1$ より $0<\alpha<\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{3}<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ である. 従って $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<-\dfrac{\pi}{6}$ だから $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}-\dfrac{6}{5\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\sin^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\alpha-\beta=-\dfrac{\pi}{4}$.

(2) $\alpha=\tan^{-1}\dfrac{2}{3}$, $\beta=\tan^{-1}\dfrac{1}{5}$ とおくと, $\tan\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\tan\beta=\dfrac{1}{5}$ である. また $0<\dfrac{2}{3}<1$, $0<\dfrac{1}{5}<1$ より $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{4}$ である. 従って $0<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$ だから $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}}=1$ より $\tan^{-1}\dfrac{2}{3}+\tan^{-1}\dfrac{1}{5}=\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

(3) $\alpha=\sin^{-1}\dfrac{2}{3}$, $\beta=\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ とおくと, $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ だから, 問題 2 の (1) より $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos\beta=\dfrac{2}{3}$ である. また $0<\dfrac{2}{3}<1$, $0<\dfrac{3}{\sqrt{10}}<1$ より $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ である. 従って $0<\alpha+\beta<\pi$ だから $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{9}-\dfrac{\sqrt{5}}{9}=0$ より $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\sin^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

(4) $\alpha=\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{13}}$, $\beta=\sin^{-1}\dfrac{7}{2\sqrt{13}}$ とおくと, $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$, $\sin\beta=\dfrac{7}{2\sqrt{13}}$ だから, 問題 2 の (1) より $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$, $\cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$ である. また $0<\dfrac{1}{\sqrt{13}}<1$, $0<\dfrac{7}{2\sqrt{13}}<1$ より $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ である. 従って $0<\alpha+\beta<\pi$ だから $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{26}-\dfrac{14\sqrt{3}}{26}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より $\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{13}}+\sin^{-1}\dfrac{7}{2\sqrt{13}}=\alpha+\beta=\dfrac{5\pi}{6}$.

(5) $\alpha=\tan^{-1}\dfrac{4}{3}$, $\beta=\tan^{-1}\dfrac{1}{7}$ とおくと, $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$, $\tan\beta=\dfrac{1}{7}$ である. また $\dfrac{4}{3}>1$, $0<\dfrac{1}{7}<1$ より $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{4}$ である. 従って $0<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$ だから $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{25}{21}}{\frac{25}{21}}=1$ より $\tan^{-1}\dfrac{4}{3}-\tan^{-1}\dfrac{1}{7}=\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

(6) $\alpha=\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\beta=\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ とおくと, $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ だから, 問題 2 の (1) より $\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\beta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ である. また $0<\dfrac{1}{\sqrt{5}}<1$, $0<\dfrac{1}{\sqrt{10}}<1$ より $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ である. 従って $0<\alpha+\beta<\pi$ だから $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}-\dfrac{6}{5\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より $\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$.

(7) $\alpha=\tan^{-1}\dfrac{1}{2}$, $\beta=\tan^{-1}\dfrac{1}{7}$ とおくと, $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\tan\beta=\dfrac{1}{7}$, $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{4}{3}$ である. また $0<\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $0<\dfrac{1}{7}<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より $0<\alpha<\dfrac{\pi}{6}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{6}$ である. 従って $-\dfrac{\pi}{6}<2\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{3}$ だから $\tan(2\alpha-\beta)=\dfrac{\tan 2\alpha-\tan\beta}{1+\tan 2\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{25}{21}}{\frac{25}{21}}=1$ より $2\tan^{-1}\dfrac{1}{2}-\tan^{-1}\dfrac{1}{7}=\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{4}$. この等式はベガの公式と呼ばれるが, ヘルマンまたはクラウゼンの発見であるという説もある.

(8) $\alpha=\tan^{-1}\dfrac{1}{4}$, $\beta=\tan^{-1}\dfrac{5}{99}$ とおくと, $\tan\alpha=\dfrac{1}{4}$, $\tan\beta=\dfrac{5}{99}$ だから $\tan$ の加法定理から $\tan 2\alpha=$

$\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{8}{15}$, $\tan 3\alpha = \dfrac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1-\tan 2\alpha\tan\alpha} = \dfrac{47}{52}$, $\tan(3\alpha+\beta) = \dfrac{\tan 3\alpha + \tan\beta}{1+\tan 3\alpha\tan\beta} = \dfrac{\frac{4913}{5148}}{\frac{4913}{5148}} = 1$. 一方 $0 < \alpha = \tan^{-1}\dfrac{1}{4} < \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$, $0 < \beta = \tan^{-1}\dfrac{5}{99} < \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$ より $0 < 3\alpha+\beta < \dfrac{2\pi}{3}$ だから $\tan(3\alpha+\beta) = 1$ から $3\tan^{-1}\dfrac{1}{4} + \tan^{-1}\dfrac{5}{99} = 3\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{4}$ が得られる．この等式はハットンの公式と呼ばれるもののひとつである．

(9) $\alpha = \cos^{-1}\dfrac{7}{25}$, $\beta = \cos^{-1}\dfrac{3}{5}$ とおくと, $\cos\alpha = \dfrac{7}{25}$, $\cos\beta = \dfrac{3}{5}$ だから, 問題 2 の (1) より $\sin\alpha = \dfrac{24}{25}$, $\sin\beta = \dfrac{4}{5}$ である．よって $\cos 2\beta = -\dfrac{7}{25}$, $\sin 2\beta = \dfrac{24}{25}$ である．また $0 < \dfrac{7}{25} < 1$, $0 < \dfrac{3}{5} < 1$ より $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ である．従って $0 < \alpha + 2\beta < \dfrac{3\pi}{2}$ だから $\cos(\alpha+2\beta) = \cos\alpha\cos 2\beta - \sin\alpha\sin 2\beta = -\dfrac{49}{625} - \dfrac{576}{625} = -1$ より $\cos^{-1}\dfrac{7}{25} + 2\cos^{-1}\dfrac{3}{5} = \alpha + 2\beta = \pi$.

5. (1) $\alpha = \tan^{-1}x$, $\beta = \tan^{-1}\dfrac{x^2-1}{2x}$ とおけば $x = \tan\alpha$, $\dfrac{x^2-1}{2x} = \tan\beta$. $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{2x}{1-x^2}$, $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \dfrac{1}{\tan 2\alpha} = \dfrac{1-x^2}{2x} = -\tan\beta = \tan(-\beta)$. $x > 0$ より $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ だから $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} < -\beta < \dfrac{\pi}{2}$ であることに注意すれば $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \tan(-\beta)$ より $\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha = -\beta$ を得る．従って $2\tan^{-1}x - \tan^{-1}\dfrac{x^2-1}{2x} = 2\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{2}$.

(2) $y = 2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} - \dfrac{\pi}{2}$ とおくと, $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \tan\left(\dfrac{y}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1+\tan\frac{y}{2}}{1-\tan\frac{y}{2}}$ だから

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{\left(1+\tan\frac{y}{2}\right)^2}{\left(1-\tan\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{1+\tan^2\frac{y}{2} + 2\tan\frac{y}{2}}{1+\tan^2\frac{y}{2} - 2\tan\frac{y}{2}} = \frac{\sin^2\frac{y}{2} + \cos^2\frac{y}{2} + 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}}{\sin^2\frac{y}{2} + \cos^2\frac{y}{2} - 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}} = \frac{1+\sin y}{1-\sin y}$$

である．よって $(1+x)(1-\sin y) = (1-x)(1+\sin y)$ だから $x = \sin y$ が得られる．また, $-1 \leqq x < 1$ ならば $-\dfrac{\pi}{2} \leqq y < \dfrac{\pi}{2}$ であるため, $\sin^{-1}x = y = 2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} - \dfrac{\pi}{2}$ である．

(3) $y = \sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}$ とおくと, $\sin y = \dfrac{2x}{1+x^2}$ だから $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - \dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2} = \left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2$ である．y は $\sin^{-1}$ の値域に属するため, $-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である．よって $\cos y \geqq 0$ であり, 仮定から $-1 < x < 1$ だから, 上式より $\cos y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ である．従って $\tan y = \dfrac{\sin y}{\cos y} = \dfrac{2x}{1-x^2}$ となるため, $\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2} = y = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$ を得る．

(4) $\alpha = \tan^{-1}x$, $\beta = \tan^{-1}\dfrac{1-x}{1+x}$ とおくと $\tan\alpha = x$, $\tan\beta = \dfrac{1-x}{1+x}$ だから tan の加法定理から $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{x + \frac{1-x}{1+x}}{1 - \frac{x-x^2}{1+x}} = 1$ である．ここで $x < -1$ より $\dfrac{1-x}{1+x} = -1 + \dfrac{2}{1+x} < -1$ だから $\alpha, \beta < -\dfrac{\pi}{4}$ であり, また $\alpha, \beta > -\dfrac{\pi}{2}$ だから $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha + \beta + \dfrac{\pi}{2} < 0$ である．この不等式と $\tan(\alpha+\beta) = 1$ より $\tan\left(\alpha + \beta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{\tan(\alpha+\beta)} = -1$ だから $\alpha + \beta + \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{4}$. 故に $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{1-x}{1+x} = \alpha + \beta = -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4}$ である．

(5) $y = 2\tan^{-1}e^x - \dfrac{\pi}{2}$ とおくと, $\tan^{-1}e^x = \dfrac{y}{2} + \dfrac{\pi}{4}$ だから, tan の加法定理から $e^x = \tan\left(\dfrac{y}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan\frac{y}{2} + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\frac{y}{2}\tan\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1+\tan\frac{y}{2}}{1-\tan\frac{y}{2}}$ である．故に $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1+\tan\frac{y}{2}}{1-\tan\frac{y}{2}} - \dfrac{1-\tan\frac{y}{2}}{1+\tan\frac{y}{2}}\right) = \dfrac{2\tan\frac{y}{2}}{1-\tan^2\frac{y}{2}} = \tan\left(\dfrac{y}{2} + \dfrac{y}{2}\right) = \tan y$.

(6) $y = 2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ とおくと, $-1 < x \leqq 1$ より $0 \leqq y < \pi$ である．cos の 2 倍角公式と問題 2 の (5) の結果を用いれば $\cos y = \cos\left(2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right) = 2\cos^2\left(\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right) - 1 = \dfrac{2}{1 + \frac{1-x}{1+x}} - 1 = x$ が得られるため, $\cos^{-1}x = y = 2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ である．従って $\tan\left(\dfrac{1}{2}\cos^{-1}x\right) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ が成り立つ．

6. $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{1}{7}$ とおくと, $\tan\alpha = \dfrac{1}{7}$ だから tan の加法定理から $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{7}{24}$, $\tan 4\alpha = \dfrac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} =$

$\dfrac{336}{527}$, $\tan 5\alpha = \dfrac{\tan 4\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan 4\alpha \tan\alpha} = \dfrac{2879}{3353}$. $\beta = \tan^{-1}\dfrac{3}{79}$ とおくと, $\tan\beta = \dfrac{3}{79}$ だから $\tan 2\beta = \dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \dfrac{474}{6232}$. よって, $\tan(5\alpha + 2\beta) = \dfrac{\tan 5\alpha + \tan 2\beta}{1 - \tan 5\alpha \tan 2\beta} = 1$. 一方 $0 < y < \dfrac{\pi}{2}$ ならば $0 < y < \tan y$ だから, $y = \tan^{-1} x$ を代入すれば, $x > 0$ ならば $0 < \tan^{-1} x < x$ が成り立つことがわかる. 従って $0 < 5\alpha + 2\beta < \dfrac{5}{7} + \dfrac{6}{79} = \dfrac{437}{553} < \dfrac{\pi}{2}$ となるため, $\tan(5\alpha + 2\beta) = 1 = \tan\dfrac{\pi}{4}$ から $5\tan^{-1}\dfrac{1}{7} + 2\tan^{-1}\dfrac{3}{79} = 5\alpha + 2\beta = \dfrac{\pi}{4}$ である. この等式はオイラーの公式と呼ばれるもののひとつである.

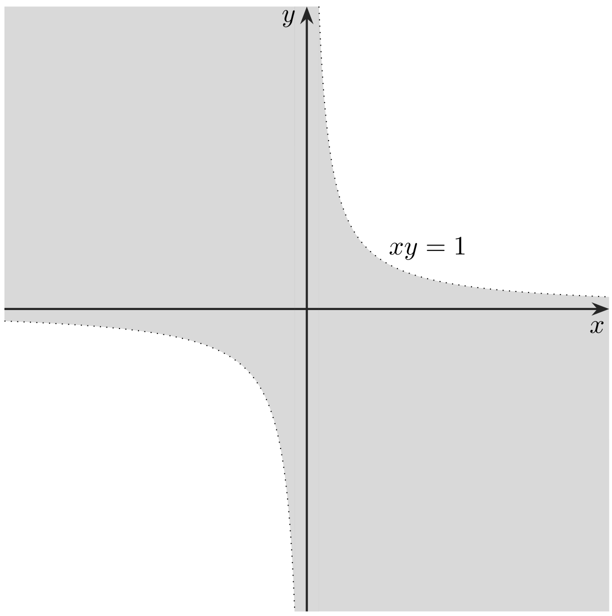
7. $\cos^{-1}\alpha \leqq \pi$ だから, $\cos^{-1}\beta + \cos^{-1}\gamma > \pi$ ならば与えられた不等式は成り立つ. 後者の不等式は $\cos^{-1}\beta > \pi - \cos^{-1}\gamma = \cos^{-1}(-\gamma)$ と同値で, $\cos^{-1}$ は狭義単調減少関数だから, これは $\beta < -\gamma$, すなわち $\beta + \gamma < 0$ と同値である. $\beta + \gamma \geqq 0$ の場合, $\cos^{-1}\beta + \cos^{-1}\gamma \leqq \pi$ だから, 与えられた不等式は $\cos(\cos^{-1}\alpha) \leqq \cos(\cos^{-1}\beta + \cos^{-1}\gamma)$ と同値であり, この左辺は α, 右辺は cos の加法定理と問題 2 の (1) から $\beta\gamma - \sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}$ に等しい. 従って, 与えられた不等式は $\beta + \gamma < 0$ または「$\beta + \gamma \geqq 0$ かつ $\alpha \geqq \beta\gamma - \sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}$」が成り立つことと同値である. このことは $\beta + \gamma < 0$ または $\alpha \geqq \beta\gamma - \sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}$ が成り立つことと同値である. また上の議論から $\cos^{-1}\alpha = \cos^{-1}\beta + \cos^{-1}\gamma$ が成り立つためには $\beta + \gamma \geqq 0$ かつ $\alpha = \beta\gamma - \sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}$ が成り立つことが必要十分である.

8. (1) $x \leqq 0$ ならば $\tan^{-1} x \leqq 0$ であり, $\tan^{-1} y < \dfrac{\pi}{2}$ は任意の実数 y に対して成り立つため, $x \leqq 0$ の場合は $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y < \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ. 同様に, $y \leqq 0$ ならば 任意の実数 x に対して, $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y < \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ. $x, y > 0$ の場合, $0 < \tan^{-1} y, \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ であり, tan は区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ で単調増加だから, 不等式 $\tan^{-1} y < \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$ は $y = \tan\left(\tan^{-1} y\right) < \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right) = \dfrac{1}{\tan\left(\tan^{-1} x\right)} = \dfrac{1}{x}$ と同値である. よって, $x, y > 0$ の場合は不等式 $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y < \dfrac{\pi}{2}$ は $xy < 1$ と同値である. 以上から, 不等式 $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y < \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つための条件は $x \leqq 0$ または $y \leqq 0$ または「$x, y > 0$ かつ $xy < 1$」である.

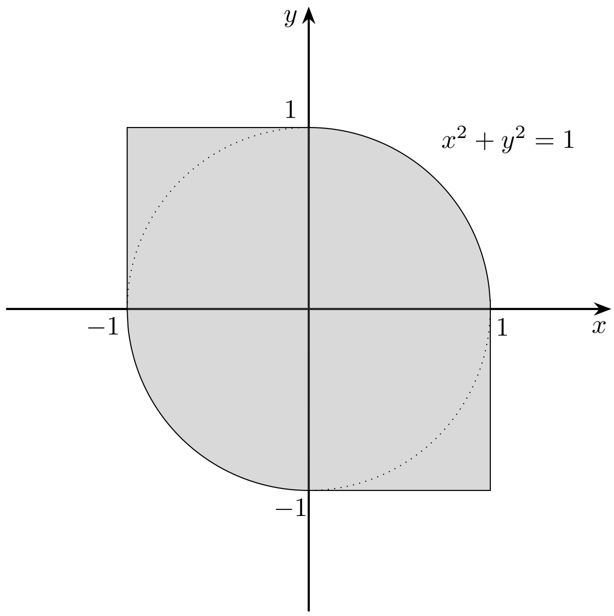
$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$ だから, 不等式 $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y > -\dfrac{\pi}{2}$ は $\tan^{-1}(-x) + \tan^{-1}(-y) < \dfrac{\pi}{2}$ と同値である. 上の結果から, この不等式が成り立つ条件は $-x \leqq 0$ または $-y \leqq 0$ または「$-x, -y > 0$ かつ $(-x)(-y) < 1$」である. よって 不等式 $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y > -\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ条件は $x \geqq 0$ または $y \geqq 0$ または「$x, y < 0$ かつ $xy < 1$」である. 従って, $-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x + \tan^{-1} y < \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ条件は $xy < 1$ であるため, この不等式を満たす (x, y) 全体からなる領域は下の図の灰色の部分の境界を除いた部分である.

(2) $y \leqq 0$ ならば $\sin^{-1} y \leqq 0 \leqq \dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$ だから, 任意の $x \in [-1, 1]$ に対して, 不等式 $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ. 同様に, $x \leqq 0$ ならば 任意の $y \in [-1, 1]$ に対して, 不等式 $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ. $x, y > 0$ の場合, $0 < \sin^{-1} y, \dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であり, sin は区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ で単調増加だから, 不等式 $\sin^{-1} y \leqq \dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$ は $y = \sin\left(\sin^{-1} y\right) \leqq \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1} x\right) = \cos\left(\sin^{-1} x\right) = \sqrt{1-x^2}$ と同値である. よって, $x, y > 0$ の場合は不等式 $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ は $y \leqq \sqrt{1-x^2}$, 従って $x^2 + y^2 \leqq 1$ と同値である. 以上から, 不等式 $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y < \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つための条件は $x \leqq 0$ または $y \leqq 0$ または「$x, y > 0$ かつ $x^2 + y^2 \leqq 1$」である.

$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$ だから, 不等式 $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y \geqq -\dfrac{\pi}{2}$ は $\sin^{-1}(-x) + \sin^{-1}(-y) \leqq \dfrac{\pi}{2}$ と同値である. 上の結果から, この不等式が成り立つ条件は $-x \leqq 0$ または $-y \leqq 0$ または「$-x, -y > 0$ かつ $(-x)^2 + (-y)^2 \leqq 1$」である. よって 不等式 $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y \geqq -\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ条件は $x \geqq 0$ または $y \geqq 0$ または「$x, y < 0$ かつ $x^2 + y^2 \leqq 1$」である. 従って, $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x + \sin^{-1} y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ条件は「$-1 \leqq x \leqq 0$ かつ $0 \leqq y \leqq 1$」または「$0 \leqq x \leqq 1$ かつ $-1 \leqq y \leqq 0$」または $x^2 + y^2 \leqq 1$ であるため, この不等式を満たす (x, y) 全体からなる領域は下の図の灰色の部分の境界を含んだ部分である.



(1) の領域



(2) の領域

9. (1) $\alpha = \tan^{-1} x$, $\beta = \tan^{-1} y$ とおくと $x = \tan\alpha$, $y = \tan\beta$ だから加法定理から $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{x+y}{1-xy}$ である．$xy < 1$ の場合, 問題 8 の (1) の結果から $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \dfrac{\pi}{2}$ だから, 上の等式により $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \dfrac{x+y}{1-xy}$ である． $xy > 1$ の場合, $\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{y} < 1$ だから, 上の結果から $\tan^{-1}\dfrac{1}{x} + \tan^{-1}\dfrac{1}{y} = \tan^{-1}\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{1-\frac{1}{xy}} = \tan^{-1}\dfrac{y+x}{xy-1} = -\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$ が成り立つ．一方, $x > 0$ ならば $\tan^{-1} x + \tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つため, $xy > 1$ かつ $x > 0$ ならば $y > 0$ でもあるので $\tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$ と $\tan^{-1}\dfrac{1}{y} = \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} y$ が成り立つ．これらを $\tan^{-1}\dfrac{1}{x} + \tan^{-1}\dfrac{1}{y} = -\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$ に代入すれば $\pi - \tan^{-1} x - \tan^{-1} y = -\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$ が得られるため, $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy} + \pi$ である．$xy > 1$ かつ $x < 0$ ならば $(-x)(-y) > 1$ かつ $-x > 0$ だから, 上で得た等式から $\tan^{-1}(-x) + \tan^{-1}(-y) = \tan^{-1}\dfrac{(-x)+(-y)}{1-(-x)(-y)} + \pi$ である．この左辺は $-\tan^{-1}(-x) - \tan^{-1}(-y)$ に等しく, 右辺は $-\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy} + \pi$ に等しいため, $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy} - \pi$ である．

10. $\alpha = \sin^{-1} x$, $\beta = \sin^{-1} y$ とおくと $x = \sin\alpha$, $y = \sin\beta$ だから問題 3 の (1) から $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$, $\cos\beta = \sqrt{1-y^2}$ である．従って sin の加法定理から $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$ である．$xy \leqq 0$ または $x^2+y^2 \leqq 1$ の場合, 問題 8 の (2) の結果から $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \alpha+\beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ だから $\sin(\alpha+\beta) = x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$ より $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$ を得る．$x, y \geqq 0$ かつ $x^2+y^2 \geqq 1$ の場合, $\alpha, \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であることと問題 8 の (2) の解答から $\dfrac{\pi}{2} \leqq \alpha+\beta \leqq \pi$ である．一方 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy$ だから $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \alpha + \beta = \cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy\right)$ が得られる．$x, y \leqq 0$ かつ $x^2 + y^2 \geqq 1$ の場合, 上で得た等式の x, y をそれぞれ $-x$, $-y$ で置き換えれば, 右辺は $-\sin^{-1} x - \sin^{-1} y$ であり, 左辺は変わらないため, $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = -\cos^{-1}\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$ が得られる．

11. (1) 問題 9 の結果から $\tan^{-1}\dfrac{1}{n+a} + \tan^{-1}\dfrac{1}{n+b} = \tan^{-1}\dfrac{\frac{1}{n+a} + \frac{1}{n+b}}{1 - \frac{1}{n+a}\frac{1}{n+b}} = \tan^{-1}\dfrac{2n+a+b}{n^2+n(a+b)+ab-1}$ だから, $\tan^{-1}\dfrac{1}{n} = \tan^{-1}\dfrac{1}{n+a} + \tan^{-1}\dfrac{1}{n+b}$ が成り立つためには, $\dfrac{1}{n} = \dfrac{2n+a+b}{n^2+n(a+b)+ab-1}$ が成り立つことが必要十分である．この等式の両辺に $n(n^2+n(a+b)+ab-1)$ をかけて整理すれば $ab = n^2+1$ が得られる．

(2) $n = 3$, $a = 2$, $b = 5$ のとき, $ab = n^2+1$ が成り立つため, (1) の結果より (i) の等式が得られる．$n = 70$, $a = 29$,

$b=169$ のとき, $ab=n^2+1$ が成り立つため, (1) の結果より (ii) の等式が得られる. $n=\dfrac{99}{5}$, $a=\dfrac{1}{5}$, $b=\dfrac{9826}{5}$ のとき, $ab=n^2+1$ が成り立つため, (1) の結果より (iii) の等式が得られる.

(3) 問題 3 の (4) の結果 $\tan^{-1}\dfrac{1}{2}+\tan^{-1}\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{4}$ に (2) の (i) の結果 $\tan^{-1}\dfrac{1}{3}=\tan^{-1}\dfrac{1}{5}+\tan^{-1}\dfrac{1}{8}$ を代入すれば (i) は $\dfrac{\pi}{4}$ に等しいことがわかる. 問題 1 の (2) の結果 $4\tan^{-1}\dfrac{1}{5}-\tan^{-1}\dfrac{1}{239}=\dfrac{\pi}{4}$ に (2) の (ii) の結果を移項して得られる等式 $\tan^{-1}\dfrac{1}{239}=\tan^{-1}\dfrac{1}{70}-\tan^{-1}\dfrac{1}{99}$ を代入すれば (ii) は $\dfrac{\pi}{4}$ に等しいことがわかる. 問題 4 の (8) の結果 $3\tan^{-1}\dfrac{1}{4}+\tan^{-1}\dfrac{5}{99}=\dfrac{\pi}{4}$ に (2) の (iii) の結果 $\tan^{-1}\dfrac{5}{99}=\tan^{-1}\dfrac{1}{20}+\tan^{-1}\dfrac{1}{1985}$ を代入すれば (iii) は $\dfrac{\pi}{4}$ に等しいことがわかる.

12. (1) 問題 9 の結果から $2\tan^{-1}\dfrac{1}{n}=\dfrac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}\frac{1}{n}}=\dfrac{2n}{n^2-1}$, $\tan^{-1}\dfrac{1}{n+a}+\tan^{-1}\dfrac{1}{n+b}=\tan^{-1}\dfrac{\frac{1}{n+a}+\frac{1}{n+b}}{1-\frac{1}{n+a}\frac{1}{n+b}}=\tan^{-1}\dfrac{2n+a+b}{n^2+n(a+b)+ab-1}$ だから, $\tan^{-1}\dfrac{1}{n}=\tan^{-1}\dfrac{1}{n+a}+\tan^{-1}\dfrac{1}{n+b}$ が成り立つためには,

$$\frac{2n}{n^2-1}=\frac{2n+a+b}{n^2+n(a+b)+ab-1}$$

が成り立つことが必要十分である. この等式の両辺に $(n^2-1)(n^2+n(a+b)+ab-1)$ をかけて整理すれば $(a+b)(n^2+1)+2abn=0$ が得られる.

(2) $n=10$, $a=-5$, $b=505$ のとき, $(a+b)(n^2+1)+2abn=0$ が成り立つため, (1) の結果より (i) の等式が得られる. $n=408$, $a=-169$, $b=985$ のとき, $(a+b)(n^2+1)+2abn=0$ が成り立つため, (1) の結果より (ii) の等式が得られる.

(3) 問題 1 の (2) の結果 $4\tan^{-1}\dfrac{1}{5}-\tan^{-1}\dfrac{1}{239}=\dfrac{\pi}{4}$ に (2) の (i) の結果の両辺を 4 倍して移項して得られる等式 $4\tan^{-1}\dfrac{1}{5}=8\tan^{-1}\dfrac{1}{10}-4\tan^{-1}\dfrac{1}{515}$ を代入すれば (i) は $\dfrac{\pi}{4}$ に等しいことがわかる. 問題 1 の (2) の結果 $4\tan^{-1}\dfrac{1}{5}-\tan^{-1}\dfrac{1}{239}=\dfrac{\pi}{4}$ に (2) の (ii) の結果を移項して得られる等式 $\tan^{-1}\dfrac{1}{239}=2\tan^{-1}\dfrac{1}{408}-\tan^{-1}\dfrac{1}{1393}$ を代入すれば (ii) は $\dfrac{\pi}{4}$ に等しいことがわかる.

13. 問題 9 と問題 1 の (1) の結果を用いると

$$\begin{aligned}
12\tan^{-1}\frac{1}{18}+8\tan^{-1}\frac{1}{57}-5\tan^{-1}\frac{1}{239}&=8\left(\tan^{-1}\frac{1}{18}+\tan^{-1}\frac{1}{57}\right)+5\left(\tan^{-1}\frac{1}{18}-\tan^{-1}\frac{1}{239}\right)-\tan^{-1}\frac{1}{18}\\
&=8\tan^{-1}\frac{3}{41}+5\tan^{-1}\frac{17}{331}-\tan^{-1}\frac{1}{18}\\
&=5\left(\tan^{-1}\frac{3}{41}+\tan^{-1}\frac{17}{331}\right)+2\tan^{-1}\frac{3}{41}+\tan^{-1}\frac{3}{41}-\tan^{-1}\frac{1}{18}\\
&=5\tan^{-1}\frac{1}{8}+2\tan^{-1}\frac{3}{41}+\tan^{-1}\frac{1}{57}\\
&=2\left(\tan^{-1}\frac{1}{8}+\tan^{-1}\frac{3}{41}\right)+2\tan^{-1}\frac{1}{8}+\tan^{-1}\frac{1}{8}+\tan^{-1}\frac{1}{57}\\
&=2\left(\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}\right)+\tan^{-1}\frac{1}{7}=2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\tan^{-1}\frac{1}{18}+\tan^{-1}\frac{1}{57}-\tan^{-1}\frac{1}{8}-\tan^{-1}\frac{1}{239}&=\left(\tan^{-1}\frac{1}{18}+\tan^{-1}\frac{1}{57}\right)+\left(\tan^{-1}\frac{1}{18}-\tan^{-1}\frac{1}{239}\right)-\tan^{-1}\frac{1}{8}\\
&=\tan^{-1}\frac{3}{41}+\tan^{-1}\frac{17}{331}-\tan^{-1}\frac{1}{8}=\tan^{-1}\frac{1}{8}-\tan^{-1}\frac{1}{8}=0
\end{aligned}$$

であり, $\left(12\tan^{-1}\dfrac{1}{18}+8\tan^{-1}\dfrac{1}{57}-5\tan^{-1}\dfrac{1}{239}\right)-\left(6\tan^{-1}\dfrac{1}{8}+2\tan^{-1}\dfrac{1}{57}+\tan^{-1}\dfrac{1}{239}\right)$ は

$$6\left(2\tan^{-1}\frac{1}{18}+\tan^{-1}\frac{1}{57}-\tan^{-1}\frac{1}{8}-\tan^{-1}\frac{1}{239}\right)$$

に等しいため, $12\tan^{-1}\dfrac{1}{18}+8\tan^{-1}\dfrac{1}{57}-5\tan^{-1}\dfrac{1}{239}=6\tan^{-1}\dfrac{1}{8}+2\tan^{-1}\dfrac{1}{57}+\tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ が得られる.

14. (1) $F(0,x)=F(x,0)=x$ は $F(x,y)$ の定義から明らか. $F(y,x)=\dfrac{y+x}{1-yx}=\dfrac{x+y}{1-xy}=F(x,y)$ であり,

$$F(F(x,y),z)=\frac{F(x,y)+z}{1-F(x,y)z}=\frac{\frac{x+y}{1-xy}+z}{1-\frac{x+y}{1-xy}z}=\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-xz}$$
$$F(x,F(y,z))=\frac{x+F(y,z)}{1-xF(y,z)}=\frac{x+\frac{y+z}{1-yz}}{1-x\frac{y+z}{1-yz}}=\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-xz}$$

だから $F(F(x,y),z)=F(x,F(y,z))$ が成り立つ.

(2) n による数学的帰納法で主張を示す. $n=1$ の場合, $F_1(x_1)=x_1=\dfrac{\mathrm{Im}(1+ix_1)}{\mathrm{Re}(1+ix_1)}$ だから, 主張が成り立つ. $n\geqq 2$ に対して $F_{n-1}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})=\dfrac{\mathrm{Im}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_{n-1})}{\mathrm{Re}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_{n-1})}$ が成り立つと仮定する.

$$\alpha=\mathrm{Re}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_{n-1}),\qquad \beta=\mathrm{Im}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_{n-1})$$

とおくと $(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_{n-1})=\alpha+\beta i$ だから

$$(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_{n-1})(1+ix_n)=(\alpha+\beta i)(1+ix_n)=\alpha-\beta x_n+i(\alpha x_n+\beta)$$

である. 従って $\mathrm{Im}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_n)=\alpha x_n+\beta$, $\mathrm{Re}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_n)=\alpha-\beta x_n$ である. $F_n(x_1,x_2,\dots,x_n)$ の定義と上の仮定から $F_n(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})=\dfrac{\beta}{\alpha}$ だから

$$F_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=F(F_{n-1}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),x_n)=\frac{F_{n-1}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})+x_n}{1-F_{n-1}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})x_n}=\frac{\frac{\beta}{\alpha}+x_n}{1-\frac{\beta}{\alpha}x_n}$$
$$=\frac{\alpha x_n+\beta}{\alpha-\beta x_n}=\frac{\mathrm{Im}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_n)}{\mathrm{Re}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_n)}$$

が得られる. 故に n のときも主張が成り立つ.

(3) $x_1,x_2,\dots,x_n$ の多項式として $(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)=1+\sum\limits_{k=1}^{n}s_k(x_1,x_2,\dots,x_n)$ が成り立つ. k 次基本対称式 $s_k(x_1,x_2,\dots,x_n)$ は k 次同次式だから $s_k(ix_1,ix_2,\dots,ix_n)=i^ks_k(x_1,x_2,\dots,x_n)$ が成り立つため,

$$\begin{aligned}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_n)&=1+\sum_{k=1}^{n}s_k(ix_1,ix_2,\dots,ix_n)=1+\sum_{k=1}^{n}i^ks_k(x_1,x_2,\dots,x_n)\\&=1+\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}i^{2k}s_{2k}(x_1,x_2,\dots,x_n)+\sum_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]}i^{2k-1}s_{2k-1}(x_1,x_2,\dots,x_n)\\&=1+\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^ks_{2k}(x_1,x_2,\dots,x_n)+i\sum_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]}(-1)^{k-1}s_{2k-1}(x_1,x_2,\dots,x_n)\end{aligned}$$

が得られる. 従って $\mathrm{Im}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_n)=\sum\limits_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]}(-1)^{k-1}s_{2k-1}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ と $\mathrm{Re}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_n)=1+\sum\limits_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^ks_{2k}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ が成り立つ. $s_k(x_1,x_2,\dots,x_n)$ は $1,2,\dots,n$ の中から k 個の異なる数字 $i_1<i_2<\cdots<i_k$ を選ぶ組み合わせに対して得られる単項式 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$ をすべて加えたものだから $\dbinom{n}{k}$ 個の項をもつ. 従って $x_1=x_2=\cdots=x_n=x$ の場合, $s_k(x_1,x_2,\dots,x_n)=\dbinom{n}{k}x^k$ だから, 上で示した結果から $\mathrm{Im}(1+ix)^n=\sum\limits_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]}(-1)^{k-1}\dbinom{n}{2k-1}x^{2k-1}$, $\mathrm{Re}(1+ix)^n=1+\sum\limits_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\dbinom{n}{2k}x^{2k}$ が得られる.

(4) $\theta_k = \tan^{-1} x_k$ とおくと $|\theta_k| < \dfrac{\pi}{2}$ であり,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_m) &= \mathrm{Re}\frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\cdots(\cos\theta_m + i\sin\theta_m)}{\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_m} \\ &= \mathrm{Re}\frac{\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m)}{\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_m} \\ &= \frac{\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m)}{\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_m}\end{aligned}$$

だから, $\mathrm{Re}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_m) > 0$ は $\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m) > 0$ と同値である. 従って $m = 1, 2, \cdots, n$ に対して $\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m) > 0$ であることと $m = 1, 2, \cdots, n$ に対して $|\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m| < \dfrac{\pi}{2}$ であることが同値であることを示せばよい. $m = 1, 2, \cdots, n$ に対して $\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m) > 0$ であることを仮定する. このとき $k = 1, 2, \cdots, n$ に対して $|\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k| < \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことを示す. $k = 1$ の場合, $|\theta_1| < \dfrac{\pi}{2}$ だから主張が成り立つ. $|\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{k-1}| < \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つと仮定すれば, $|\theta_k| < \dfrac{\pi}{2}$ だから $|\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{k-1}+\theta_k| < \pi$ である. はじめの仮定から $\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k) > 0$ だから, $|\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k| < \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つため k による数学的帰納法で上の主張が成り立つ. 逆に $m = 1, 2, \cdots, n$ に対して $|\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m| < \dfrac{\pi}{2}$ ならば $m = 1, 2, \cdots, n$ に対して $\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m) > 0$ であることは明らかである.

(5) n による数学的帰納法で主張を示す. $n = 1$ の場合, $\mathrm{Im}(1+ix_1) = x_1$, $\mathrm{Re}(1+ix_1) = 1$ だから, 主張が成り立つ. $\tan^{-1}x_1 + \tan^{-1}x_2 + \cdots + \tan^{-1}x_{n-1} = \tan^{-1}\dfrac{\mathrm{Im}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_{n-1})}{\mathrm{Re}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_{n-1})}$ が成り立つと仮定する. α, β を (2) の解答のように定めると, 仮定と (4) の結果より $\alpha = \mathrm{Re}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_{n-1}) > 0$ かつ $\alpha - \beta x_n = \mathrm{Re}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_n) > 0$ だから $\dfrac{\beta x_n}{\alpha} < 1$ である. 従って帰納法の仮定と問題 9 の結果から

$$\begin{aligned}\tan^{-1}x_1 + \tan^{-1}x_2 + \cdots + \cdots + \tan^{-1}x_{n-1} + \tan^{-1}x_n &= \tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha} + \tan^{-1}x_n = \tan^{-1}\frac{\frac{\beta}{\alpha} + x_n}{1 - \frac{\beta}{\alpha}x_n} \\ &= \tan^{-1}\frac{\alpha x_n + \beta}{\alpha - \beta x_n} = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_n)}{\mathrm{Re}(1+ix_1)(1+ix_2)\cdots(1+ix_n)}\end{aligned}$$

が得られる. $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ の場合, $m = 1, 2, \cdots, n$ に対して $\left|m\tan^{-1}x\right| < \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことは $|x| < \tan\dfrac{\pi}{2n}$ が成り立つことと同値だから, 上の結果から $n\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{\mathrm{Im}(1+ix)^n}{\mathrm{Re}(1+ix)^n}$ が得られる.

14. (1) 問題 9 の結果を用いる.

$$\begin{aligned}&44\tan^{-1}\frac{1}{57} + 7\tan^{-1}\frac{1}{239} - 12\tan^{-1}\frac{1}{682} + 24\tan^{-1}\frac{1}{12943} \\ &= 7\left(\tan^{-1}\frac{1}{57} + \tan^{-1}\frac{1}{239}\right) + 12\left(\tan^{-1}\frac{1}{57} - \tan^{-1}\frac{1}{682}\right) + 24\left(\tan^{-1}\frac{1}{57} + \tan^{-1}\frac{1}{12943}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{57} \\ &= 7\tan^{-1}\frac{148}{6811} + 12\tan^{-1}\frac{5}{311} + 24\tan^{-1}\frac{4}{227} + \tan^{-1}\frac{1}{57} \\ &= 7\tan^{-1}\frac{148}{6811} + 12\left(\tan^{-1}\frac{5}{311} + \tan^{-1}\frac{1816}{51513}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{57} = 7\tan^{-1}\frac{148}{6811} + 12\tan^{-1}\frac{17}{331} + \tan^{-1}\frac{1}{57} \\ &= 7\tan^{-1}\frac{148}{6811} + 6\tan^{-1}\frac{5627}{54636} + \tan^{-1}\frac{1}{57} = 6\left(\tan^{-1}\frac{148}{6811} + \tan^{-1}\frac{5627}{54636}\right) + \tan^{-1}\frac{148}{6811} + \tan^{-1}\frac{1}{57} \\ &= 6\tan^{-1}\frac{1}{8} + \tan^{-1}\frac{15247}{388079} \quad \cdots (*)\end{aligned}$$

ここで $\alpha = \tan\dfrac{\pi}{12}$ とおくと tan の加法定理から $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2}$ より $\alpha^2 + 2\sqrt{3}\alpha - 1 = 0$ が成り立つ. $\alpha > 0$ だから $\tan\dfrac{\pi}{12} = \alpha = 2 - \sqrt{3} > 0.2 > \dfrac{1}{8}$ となり, 問題 14 の (5) の結果を用いることができて, $6\tan^{-1}\dfrac{1}{8} = \tan^{-1}\dfrac{\mathrm{Im}(8+i)^6}{\mathrm{Re}(8+i)^6} = \tan^{-1}\dfrac{186416}{201663}$ が成り立つ. 従って $(*) = \tan^{-1}\dfrac{186416}{201663} + \tan^{-1}\dfrac{15247}{388079} = \tan^{-1}1 = \dfrac{\pi}{4}$ である.

(2) 問題 9 と問題 6 の結果を用いる．

$$
\begin{aligned}
&22\tan^{-1}\frac{1}{28}+2\tan^{-1}\frac{1}{443}-5\tan^{-1}\frac{1}{1393}-10\tan^{-1}\frac{1}{11018}\\
&\qquad=2\left(\tan^{-1}\frac{1}{28}+\tan^{-1}\frac{1}{443}\right)+5\left(2\tan^{-1}\frac{1}{28}-\tan^{-1}\frac{1}{1393}\right)+10\left(\tan^{-1}\frac{1}{28}-\tan^{-1}\frac{1}{11018}\right)\\
&\qquad=2\tan^{-1}\frac{3}{79}+5\left(\tan^{-1}\frac{56}{783}-\tan^{-1}\frac{1}{1393}\right)+10\tan^{-1}\frac{14}{393}\\
&\qquad=2\tan^{-1}\frac{3}{79}+5\left(\tan^{-1}\frac{3089}{43631}+2\tan^{-1}\frac{14}{393}\right)=2\tan^{-1}\frac{3}{79}+5\left(\tan^{-1}\frac{3089}{43631}+\tan^{-1}\frac{11004}{154253}\right)\\
&\qquad=2\tan^{-1}\frac{3}{79}+5\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

(3) $12\tan^{-1}\dfrac{1}{49}+32\tan^{-1}\dfrac{1}{57}-5\tan^{-1}\dfrac{1}{239}+12\tan^{-1}\dfrac{1}{110443}$ から (1) の等式の右辺

$$44\tan^{-1}\frac{1}{57}+7\tan^{-1}\frac{1}{239}-12\tan^{-1}\frac{1}{682}+24\tan^{-1}\frac{1}{12943}$$

を引いた式 $12\tan^{-1}\dfrac{1}{49}-12\tan^{-1}\dfrac{1}{57}-12\tan^{-1}\dfrac{1}{239}+12\tan^{-1}\dfrac{1}{682}-24\tan^{-1}\dfrac{1}{12943}+12\tan^{-1}\dfrac{1}{110443}$ が 0 であることを問題 9 の結果を用いて示す．

$$
\begin{aligned}
&12\tan^{-1}\frac{1}{49}-12\tan^{-1}\frac{1}{57}-12\tan^{-1}\frac{1}{239}+12\tan^{-1}\frac{1}{682}-24\tan^{-1}\frac{1}{12943}+12\tan^{-1}\frac{1}{110443}\\
&\qquad=12\left(\tan^{-1}\frac{1}{49}-\tan^{-1}\frac{1}{57}-\tan^{-1}\frac{1}{239}+\tan^{-1}\frac{1}{682}-2\tan^{-1}\frac{1}{12943}+\tan^{-1}\frac{1}{110443}\right)\\
&\qquad=12\left(\tan^{-1}\frac{4}{1397}-\tan^{-1}\frac{443}{162999}-\tan^{-1}\frac{12943}{83760624}+\tan^{-1}\frac{1}{110443}\right)\\
&\qquad=12\left(\tan^{-1}\frac{4}{1397}+\tan^{-1}\frac{1}{110443}-\tan^{-1}\frac{443}{162999}-\tan^{-1}\frac{12943}{83760624}\right)\\
&\qquad=12\left(\tan^{-1}\frac{369}{128467}-\tan^{-1}\frac{369}{128467}\right)=0
\end{aligned}
$$

微積分学 I 演習問題　第 3 回　関数の極限と無限小・無限大の位数

1. 必要ならば $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ であることを用いて, 次の極限値を求めよ. ただし (2) の a, b は正の実数, (17) の m, p は負でない整数, n, q は正の整数, (21) では $a\neq 0$ とする.

(1) $\lim_{x\to 0}(\log|\sin x|-\log|x|)$　(2) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$　(3) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$　(4) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x^2}$

(5) $\lim_{x\to 0}(\log(1-\cos x)-2\log|x|)$　(6) $\lim_{x\to +0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$　(7) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}+e^{bx}-2}{x}$　(8) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}$

(9) $\lim_{x\to 0}\frac{\log((1+x)(1+x^2))}{x}$　(10) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}$　(11) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}(\sin^{-1}x)}{x}$　(12) $\lim_{x\to -0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

(13) $\lim_{x\to +0}\frac{2\sin^{-1}(1-x)-\pi}{\sqrt{x}}$　(14) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{\sin^{-1}x}$　(15) $\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)$　(16) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\sin x}$

(17) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{m}{n}}-(1-x)^{\frac{p}{q}}}{x}$　(18) $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$　(19) $\lim_{x\to +0}\frac{\cos^{-1}(1-x^2)}{x}$　(20) $\lim_{x\to +0}\frac{x^x-1}{x\log x}$

(21) $\lim_{n\to\infty}\frac{(an+b)^n}{(an+c)^n}$

2. a を実数または $\pm\infty$, α を正の実数とし, f, g, F, G を a を含む開区間 (ただし $a=\infty$ のときは (c,∞), $a=-\infty$ のときは $(-\infty,c)$ の形の開区間) で定義された関数とする. $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ と $\lim_{x\to a}|F(x)|=\lim_{x\to a}|G(x)|=\infty$ が成り立つとき, 次の $\boxed{}$ にあてはまる文字を入れよ.

(1) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ ならば f は g より $\boxed{ア}$ 位の無限 $\boxed{イ}$ といい, g は f より $\boxed{ウ}$ 位の無限 $\boxed{エ}$ という. また, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ が存在して 0 でないとき, f と g は $\boxed{オ}$ 位の無限 $\boxed{カ}$ という.

(2) $\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=0$ ならば F は G より $\boxed{ア}$ 位の無限 $\boxed{イ}$ といい, G は F より $\boxed{ウ}$ 位の無限 $\boxed{エ}$ という. また, $\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}$ が存在して 0 でないとき, F と G は $\boxed{オ}$ 位の無限 $\boxed{カ}$ という.

(3) a が実数の場合, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{|x-a|^\alpha}$ が存在して 0 でないとき, f は $\boxed{ア}$ 位の無限 $\boxed{イ}$ といい, $a=\pm\infty$ の場合, $\lim_{x\to a}|x|^\alpha f(x)$ が存在して 0 でないとき, f は $\boxed{ウ}$ 位の無限 $\boxed{エ}$ という.

(4) a が実数の場合, $\lim_{x\to a}|x-a|^\alpha F(x)$ が存在して 0 でないとき, F は $\boxed{ア}$ 位の無限 $\boxed{イ}$ といい, $a=\pm\infty$ の場合, $\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{|x|^\alpha}$ が存在して 0 でないとき, F は $\boxed{ウ}$ 位の無限 $\boxed{エ}$ という.

3. 以下の関数について, 無限小または無限大の位数を求めよ.

(1) $1-\cos x$ $(x\to 0)$　(2) $\frac{x-1}{x^3+1}$ $(x\to\infty)$　(3) $\frac{x^3+1}{x-1}$ $(x\to\infty)$　(4) $\frac{1}{e^x-1}$ $(x\to 0)$

(5) $\sqrt{x^6+1}$ $(x\to\infty)$　(6) $\frac{1}{\tan x}$ $(x\to\frac{\pi}{2})$　(7) $\frac{1}{\log(1+x^2)}$ $(x\to 0)$　(8) $\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x$ $(x\to\infty)$

(9) $\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}$ $(x\to\infty)$　(10) $\sqrt{x^4+1}-x^2$ $(x\to\infty)$

4. 任意の正の実数 α に対して $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{|x|^\alpha}=0$ であることを示せ.

5. $(0,\varepsilon)$ 上の関数 f がつねに正の値をとり, 実数 α に対し, $\lim_{x\to +0}\frac{f(x)}{x^\alpha}$ が 0 でない値に収束するとき, $\lim_{x\to +0}f(x)^{\frac{1}{\log x}}=e^\alpha$ であることを示せ.

6. (発展問題) f, g を区間 (a,∞) 上の関数とし, $\alpha,\beta\neq 0$ に対し, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha}$ と $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^\beta}$ がともに正の値に収束するとする. このとき $\lim_{x\to\infty}\frac{\log f(x)}{\log g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ であることを示せ.

第 3 回の演習問題の解答

1. (1) $\lim_{x\to 0}(\log|\sin x| - \log|x|) = \lim_{x\to 0}\log\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| = \log\left|\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\right| = \log 1 = 0$

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x\log a} - 1 - e^{x\log b} + 1}{x} = \log a\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x\log a}-1}{x\log a} - \log b\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x\log b}-1}{x\log b} = \log a - \log b$

(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$

(4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\lim_{x\to 0}(1+\cos x+\cos^2 x) = \dfrac{3}{2}$

(5) log の連続性と (3) の結果から $\lim_{x\to 0}(\log(1-\cos x) - 2\log|x|) = \lim_{x\to 0}\log\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right) = \log\left(\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)$ $= \log\dfrac{1}{2} = -\log 2.$

(6) $x \to +0$ のとき, $\dfrac{1}{x} \to \infty$ だから $e^{\frac{1}{x}} \to \infty$ である. 従って $\lim_{x\to +0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0.$

(7) $ab \neq 0$ のとき, $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}+e^{bx}-2}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{ax}-1}{x} + \dfrac{e^{bx}-1}{x}\right) = a\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{ax} + b\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{bx}-1}{bx} = a+b.$ $a \neq 0,\ b = 0$ のときは $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}+e^{bx}-2}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{x} = a\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{ax} = a = a+b$, $a = 0,\ b \neq 0$ のときは $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}+e^{bx}-2}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{e^{bx}-1}{x} = b\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{bx}-1}{bx} = b = a+b$ であり, $a = b = 0$ のときは $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}+e^{bx}-2}{x} = 0 = a+b$ である. 従って, $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}+e^{bx}-2}{x} = a+b$ である.

(8) $y = \dfrac{\pi}{2} - x$ とおくと $x = \dfrac{\pi}{2} - y$ であり $x \to \dfrac{\pi}{2}$ のとき $y \to 0$ だから $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi - 2x} = \lim_{y\to 0}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{2y} = \lim_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{2y} = \dfrac{1}{2}.$

(9) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log((1+x)(1+x^2))}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\log(1+x)}{x} + \dfrac{\log(1+x^2)}{x^2}x\right) = \lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x} + \lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x^2)}{x^2}\lim_{x\to 0}x = 1 + 0 = 1$

(10) $y = \tan^{-1}x$ とおくと $x \to 0$ のとき, $y \to 0$ であり, $x = \tan y$ だから $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan^{-1}x}{x} = \lim_{y\to 0}\dfrac{y}{\tan y} = \lim_{y\to 0}\dfrac{\cos y}{\frac{\sin y}{y}} = \dfrac{\lim_{y\to 0}\cos y}{\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}} = 1.$

(11) $x \to 0$ のとき $\sin^{-1}x \to 0$ だから, 教科書の定理 1.8 と (10) の結果から $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan^{-1}(\sin^{-1}x)}{\sin^{-1}x} = \lim_{y\to 0}\dfrac{\tan^{-1}y}{y} = 1$. 故に, 教科書の問題 1.6 の (4) の結果から $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan^{-1}(\sin^{-1}x)}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{\tan^{-1}(\sin^{-1}x)}{\sin^{-1}x}}{\frac{\sin^{-1}x}{x}} = \dfrac{\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}(\sin^{-1}x)}{\sin^{-1}x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}} = \dfrac{1}{1} = 1.$

(12) $x \to -0$ のとき, $\dfrac{1}{x} \to -\infty$ だから $e^{\frac{1}{x}} \to 0$ である. 従って $\lim_{x\to -0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1.$

(13) $y = \dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1}(1-x)$ とおくと, $x \to +0$ のとき, $y \to +0$ であり, $\sin^{-1}(1-x) = \dfrac{\pi}{2} - y$ だから $1 - x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) = \cos y$ となるため $\sqrt{x} = \sqrt{1-\cos y}$ である. 従って (2) の結果を用いれば $\lim_{x\to +0}\dfrac{2\sin^{-1}(1-x) - \pi}{\sqrt{x}} = \lim_{y\to +0}\dfrac{-2y}{\sqrt{1-\cos y}} = \lim_{y\to +0}\dfrac{-2}{\sqrt{\frac{1-\cos y}{y^2}}} = \dfrac{-2}{\sqrt{\lim_{y\to +0}\frac{1-\cos y}{y^2}}} = -2\sqrt{2}$

(14) (10) と教科書の問題 1.6 の (4) の結果から $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan^{-1}x}{\sin^{-1}x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{\tan^{-1}x}{x}}{\frac{\sin^{-1}x}{x}} = \dfrac{\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}} = \dfrac{1}{1} = 1$

(15) $y = \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}x$ とおくと $x \to \infty$ のとき $y \to +0$ であり, $x = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) = \dfrac{1}{\tan y}$ だから $\lim_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}x\right) = \lim_{y\to +0}\dfrac{y}{\tan y} = \lim_{y\to +0}\dfrac{\cos y}{\frac{\sin y}{y}} = 1$

(16) (3) の結果を用いれば $\lim_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x\sin x}=-\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2\frac{\sin x}{x}}=-\dfrac{1}{2}$.

(17) $\dfrac{(1+x)^{\frac{m}{n}}-(1-x)^{\frac{p}{q}}}{x}=\dfrac{(1+x)^{\frac{m}{n}}-1}{x}-\dfrac{(1-x)^{\frac{p}{q}}-1}{x}$ であり, $y=(1+x)^{\frac{1}{n}}$, $z=(1-x)^{\frac{1}{q}}$ とおけば $x=y^n-1=1-z^q$ かつ $x\to0$ のとき $y,z\to1$ だから

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{m}{n}}-1}{x}=\lim_{y\to1}\frac{y^m-1}{y^n-1}=\lim_{y\to1}\frac{(y-1)(y^{m-1}+y^{m-2}+\cdots+1)}{(y-1)(y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+1)}=\lim_{y\to1}\frac{y^{m-1}+y^{m-2}+\cdots+1}{y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+1}=\frac{m}{n},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-x)^{\frac{p}{q}}-1}{x}=\lim_{z\to1}\frac{z^p-1}{1-z^q}=\lim_{z\to1}\frac{(z-1)(z^{p-1}+z^{p-2}+\cdots+1)}{(1-z)(z^{q-1}+z^{q-2}+\cdots+1)}=-\lim_{z\to1}\frac{z^{p-1}+z^{p-2}+\cdots+1}{z^{q-1}+z^{q-2}+\cdots+1}=-\frac{p}{q}$$

従って $\lim_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{m}{n}}-(1-x)^{\frac{p}{q}}}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{m}{n}}-1}{x}-\lim_{x\to0}\dfrac{(1-x)^{\frac{p}{q}}-1}{x}=\dfrac{m}{n}+\dfrac{p}{q}$.

(18) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ より $\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$ だから $\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left((1+ax)^{\frac{1}{ax}}\right)^a=e^a$.

(19) $y=\cos^{-1}(1-x^2)$ とおけば任意の $x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ に対して $0\leqq y\leqq\pi$ だから $\cos y\geqq0$ である. 従って $x>0$ ならば $x=\sqrt{1-\cos y}$ であり, $x\to+0$ のとき, $y\to+0$ だから, (3) の結果を用いると
$\lim_{x\to+0}\dfrac{\cos^{-1}(1-x^2)}{x}=\lim_{y\to+0}\dfrac{y}{\sqrt{1-\cos y}}=\lim_{y\to+0}\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1-\cos y}{y^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{\lim_{y\to+0}\frac{1-\cos y}{y^2}}}=\sqrt{2}$.

(20) $y=x\log x$ とおくと, $x^x=e^{x\log x}=e^y$ であり, 教科書の問 1.18 から $x\to+0$ のとき $y\to0$ となるため $\lim_{x\to+0}\dfrac{x^x-1}{x\log x}=\lim_{y\to0}\dfrac{e^y-1}{y}=1$

(21) $b=c$ ならば, 任意の自然数 n に対して $\dfrac{(an+b)^n}{(an+c)^n}=1$ だから $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(an+b)^n}{(an+c)^n}=1$ である. $b\neq c$ の場合,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{(an+b)^n}{(an+c)^n}&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b-c}{an+c}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{a}{b-c}n+\frac{c}{b-c}}\right)^n\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{a}{b-c}n+\frac{c}{b-c}}\right)^{\frac{a}{b-c}n+\frac{c}{b-c}}\left(1+\frac{1}{\frac{a}{b-c}n+\frac{c}{b-c}}\right)^{-\frac{c}{b-c}}\right)^{\frac{b-c}{a}}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{a}{b-c}n+\frac{c}{b-c}}\right)^{\frac{a}{b-c}n+\frac{c}{b-c}}\right)^{\frac{b-c}{a}}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{a}{b-c}n+\frac{c}{b-c}}\right)^{-\frac{c}{a}}=e^{\frac{b-c}{a}}\end{aligned}$$

2. (1) ア 高, イ 小, ウ 低, エ 小, オ 同, カ 小　(2) ア 低, イ 大, ウ 高, エ 大, オ 同, カ 大
(3) ア α, イ 小, ウ α, エ 小　(4) ア α, イ 大, ウ α, エ 大

3. (1) 演習問題 1 の (3) から $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}\neq0$ より $x\to0$ のとき, $1-\cos x$ は無限小の位数 2 である.

(2) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x-1}{x^3+1}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^3}}=1$ より $x\to\infty$ のとき, $\dfrac{x-1}{x^3+1}$ は無限小の位数 2 である.

(3) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^3+1}{x-1}}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x^3-x^2}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x}}=1$ より $x\to\infty$ のとき, $\dfrac{x^3+1}{x-1}$ は無限大の位数 2 である.

(4) $\lim_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{e^x-1}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\dfrac{1}{\frac{e^x-1}{x}}=\dfrac{1}{\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}}=1$ より $x\to0$ のとき, $\dfrac{1}{e^x-1}$ は無限大の位数 1 である.

(5) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+1}}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^3}}=1$ より $x\to\infty$ のとき $\sqrt{x^6+1}$ は無限大の位数 3 である.

(6) $y=\dfrac{\pi}{2}-x$ とおくと $x=\dfrac{\pi}{2}-y$ であり $x\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $y\to0$ だから $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{1}{\tan x}}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{y\to0}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{y\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}=\lim_{y\to0}\dfrac{\sin y}{y\cos y}=\lim_{y\to0}\dfrac{\sin y}{y}\lim_{y\to0}\dfrac{1}{\cos y}=1$. 従って, $x\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき, $\dfrac{1}{\tan x}$ は無限小の位数 1 である.

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\log(1+x^2)}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{\log(1+x^2)}{x^2}}=\frac{1}{\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+x^2)}{x^2}}=\frac{1}{1}=1$ より $x\to 0$ のとき $\dfrac{1}{\log(1+x^2)}$ は無限大の位数 2 である.

(8) $y=\tan^{-1}x$ とおくと $x\to\infty$ のとき $y\to\dfrac{\pi}{2}-0$ であり, $x=\tan y$ だから $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)=\lim_{y\to\frac{\pi}{2}-0}\tan y\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$ である. さらに $z=\dfrac{\pi}{2}-y$ とおけば $y\to\dfrac{\pi}{2}-0$ のとき $z\to+0$ だから $\displaystyle\lim_{y\to\frac{\pi}{2}-0}\tan y\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\lim_{z\to+0}z\tan\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\lim_{z\to+0}\frac{z}{\sin z}\cos z=1\neq 0$ となるため, $x\to\infty$ のとき, $\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}x$ は無限小の位数 1 である.

(9) $y=\dfrac{1}{x}$ とおくと $x\to\infty$ のとき $y\to+0$ だから $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\sin\frac{1}{x}}=\lim_{y\to+0}\frac{y}{\sin y}=1\neq 0$ となるため, $x\to\infty$ のとき, $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{x}}$ は無限大の位数 1 である.

(10) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt{x^4+1}-x^2\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}+1}=\frac{1}{2}$ より $x\to\infty$ のとき $\sqrt{x^4+1}-x^2$ は無限小の位数 2 である.

4. $y=\dfrac{1}{x^2}$ とおくと $|x|=y^{-\frac{1}{2}}$ であり, $x\to 0$ のとき $y\to\infty$ である. 教科書の問 1.17 より, 任意の正の実数 α に対して $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{|x|^\alpha}=\lim_{y\to\infty}y^{\frac{\alpha}{2}}e^{-y}=0$ である.

5. $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{x^\alpha}=a$ とおき, $(0,\varepsilon)$ 上の関数 g, φ を $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^\alpha}$, $\varphi(x)=f(x)^{\frac{1}{\log x}}$ で定めると $\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=a>0$, $f(x)=x^\alpha g(x)$ だから

$$\lim_{x\to+0}\log\varphi(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log f(x)}{\log x}=\lim_{x\to+0}\frac{\alpha\log x+\log g(x)}{\log x}=\lim_{x\to+0}\left(\alpha+\frac{\log g(x)}{\log x}\right)=\alpha$$

である. 従って $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)^{\frac{1}{\log x}}=\lim_{x\to+0}e^{\log\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\log\varphi(x)}=e^\alpha$ である.

6. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha}=p$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^\beta}=q$ とおくと, $\rho_1>a$ で, 条件「$x\geqq\rho_1$ ならば $\left|\dfrac{f(x)}{x^\alpha}-p\right|<\dfrac{p}{2}$ かつ $\left|\dfrac{g(x)}{x^\beta}-q\right|<\dfrac{q}{2}$」を満たすものがある. 従って $x\geqq\rho_1$ ならば $\dfrac{px^\alpha}{2}<f(x)<\dfrac{3px^\alpha}{2}$, $\dfrac{qx^\beta}{2}<g(x)<\dfrac{3x^\beta q}{2}$ であり, 各辺の対数をとれば

$$\alpha\log x+\log\frac{p}{2}<\log f(x)<\alpha\log x+\log\frac{3p}{2},\quad \beta\log x+\log\frac{q}{2}<\log g(x)<\beta\log x+\log\frac{3q}{2}\quad\cdots(*)$$

が得られる. ここで $\rho=\max\left\{\rho_1,\left(\dfrac{2}{p}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\left(\dfrac{2}{3p}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\left(\dfrac{2}{q}\right)^{\frac{1}{\beta}},\left(\dfrac{2}{3q}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right\}$ とおき, 以後 $x>\rho$ とする.

$\alpha,\beta>0$ の場合, $\alpha\log x+\log\dfrac{p}{2}>0$ かつ $\beta\log x+\log\dfrac{q}{2}>0$ だから $(*)$ より次の不等式が成り立つ.

$$\frac{\alpha\log x+\log\frac{p}{2}}{\beta\log x+\log\frac{3q}{2}}<\frac{\log f(x)}{\log g(x)}<\frac{\alpha\log x+\log\frac{3p}{2}}{\beta\log x+\log\frac{q}{2}}$$

$\alpha<0$, $\beta>0$ の場合, $\alpha\log x+\log\dfrac{3p}{2}<0$ かつ $\beta\log x+\log\dfrac{q}{2}>0$ だから $(*)$ より次の不等式が成り立つ.

$$\frac{\alpha\log x+\log\frac{p}{2}}{\beta\log x+\log\frac{q}{2}}<\frac{\log f(x)}{\log g(x)}<\frac{\alpha\log x+\log\frac{3p}{2}}{\beta\log x+\log\frac{3q}{2}}$$

$\alpha>0$, $\beta<0$ の場合, $\alpha\log x+\log\dfrac{p}{2}>0$ かつ $\beta\log x+\log\dfrac{3q}{2}<0$ だから $(*)$ より次の不等式が成り立つ.

$$\frac{\alpha\log x+\log\frac{3p}{2}}{\beta\log x+\log\frac{3q}{2}}<\frac{\log f(x)}{\log g(x)}<\frac{\alpha\log x+\log\frac{p}{2}}{\beta\log x+\log\frac{q}{2}}$$

$\alpha, \beta < 0$ の場合, $\alpha \log x + \log \dfrac{3p}{2} < 0$ かつ $\beta \log x + \log \dfrac{3q}{2} < 0$ だから $(*)$ より次の不等式が成り立つ.

$$\frac{\alpha \log x + \log \frac{3p}{2}}{\beta \log x + \log \frac{q}{2}} < \frac{\log f(x)}{\log g(x)} < \frac{\alpha \log x + \log \frac{p}{2}}{\beta \log x + \log \frac{3q}{2}}$$

一方, $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \log x = \infty$ だから

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\alpha \log x + \log \frac{p}{2}}{\beta \log x + \log \frac{3q}{2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\alpha \log x + \log \frac{3p}{2}}{\beta \log x + \log \frac{q}{2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\alpha \log x + \log \frac{p}{2}}{\beta \log x + \log \frac{q}{2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\alpha \log x + \log \frac{3p}{2}}{\beta \log x + \log \frac{3q}{2}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

が成り立つため, いずれの場合でも $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\log f(x)}{\log g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ が成り立つ.

微積分学 I 演習問題　第 4 回　導関数

1. 次の関数の導関数を求めよ.

(1) $(x+2)^3(x^3-4)^5$　(2) $\dfrac{x^4-1}{x^3+2}$　(3) $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)^2}$　(4) $\dfrac{cx+d}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

(5) $(x-3)\sqrt{x^2+2x+3}$　(6) $\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)^7$　(7) $\sqrt{\dfrac{1-x^n}{1+x^n}}$　(8) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

(9) $\cos^3(2x^3)$　(10) $(9x^2-6x-7)e^{x^3}$　(11) $\sqrt{1+e^x}$　(12) $x^2e^{\frac{1}{x}}$

(13) $e^{-3x}(\sin 3x+\cos 3x)$　(14) $e^{-x}\sin^2 x$　(15) $\log(\log x)$　(16) $\log|\cos x|$

(17) $\log\left(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}\right)$　(18) $(\log(e^x+1))^2$　(19) $\dfrac{(\log|x|)^2}{x}$　(20) $\log\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+3}}$

(21) $\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$　(22) $\log(\sin(e^x))$　(23) $\sin^{-1}(2x^2-1)$　(24) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$

(25) $\cos^{-1}\dfrac{1}{x}$　(26) $\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$　(27) $\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$　(28) $\tan^{-1}\dfrac{x^2-1}{2x}$

(29) $\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x+1}$　(30) $\cos^{-1}\dfrac{1-x}{1+x}$　(31) $\cos^{-1}\dfrac{1}{x^2+1}$　(32) $\sin^{-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

(33) $\tan^{-1}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1}$　(34) $\cos^{-1}\dfrac{2x}{x^2+1}$　(35) $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$　(36) $\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$

(37) $\tan^{-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$　(38) $\tan^{-1}\sqrt{x^2-1}$　(39) $\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　(40) $\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(41) $\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\tan\dfrac{x}{2}\right)$　(42) $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$　(43) $\cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$　(44) $\sin^{-1}\sqrt{1-e^{2x}}$

(45) $\sqrt{1+x^2}\sin(\tan^{-1}x)$　(46) $\log(\sin^{-1}(e^x))$　(47) $\sin^{-1}\dfrac{e^x}{e^x+e^{-x}}$　(48) $\tan^{-1}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(49) $\sin^{-1}(\tan^{-1}x)$　(50) $\sin^{-1}\sqrt{1-\sin x}$　(51) x^{3x^2}　(52) $(a+x)^{\frac{1}{x}}$

(53) x^{x^a}　(54) $(\cos x)^{\cos x}$　(55) $(\tan x)^{\sin x}$　(56) $x^{(\log x)^a}$

(57) $\tan\left(x^{\sin x}\right)$　(58) $(\log x)^{\frac{1}{x}}$　(59) $e^{\sin^{-1}x}$　(60) $(\cos^{-1}x)^{\log x}$

(61) $\log(\sin^{-1}x)$　(62) $\sin^{-1}(\log x)$　(63) $\tan^{-1}\sqrt{1+x^2}$　(64) $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

(65) $\log(\sin^{-1}(\tan^{-1}x))$　(66) $\log\left(\tan^{-1}(e^x)\right)$　(67) $\tan^{-1}(\sin^{-1}x)$　(68) $\tan^{-1}(\sin^{-1}x^2)$

(69) $\log(\tan^{-1}(\sin^{-1}x))$　(70) $\sqrt{\log x}$　(71) $\sin^{-1}\left(\sqrt{\log x}\right)$　(72) $\sqrt{e^x\log x}$

(73) $\sin^{-1}(\log(\tan^{-1}x))$　(74) $\sin^{-1}\left(\sqrt{e^x\log x}\right)$　(75) $\sin^{-1}(e^x)$　(76) $\tan^{-1}(e^x)$

(77) $\tan^{-1}(\log(\sin^{-1}x))$　(78) $\sin^{-1}\sqrt{1-e^{2x}}$

2. $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=\begin{cases} x^2\log|x| & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ で定めるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) f の 0 における微分係数 $f'(0)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}f'(x)$ を求めよ.

(3) f' は 0 で連続か? 理由を付けて答えよ.

(4) f' は 0 で微分可能か? 理由を付けて答えよ.

3. 関数 $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ を $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}$ で定義する.

(1) f は狭義単調減少関数であることを示し, さらに f は全射であることを示せ.

(2) f の逆関数 $f^{-1}:(0,\infty)\to(0,\infty)$ の $\dfrac{1}{e}$ における微分係数 $(f^{-1})'\left(\dfrac{1}{e}\right)$ を求めよ.

4. (1) $f:[-1,\infty)\to\left[-\frac{1}{e},\infty\right)$ を $f(x)=xe^x$ で定めれば, f は全単射であるが (証明不要), f の逆関数 $f^{-1}:\left[-\frac{1}{e},\infty\right)\to[-1,\infty)$ の 0 と e における微分係数を求めよ.

(2) $f:\left(e^{-1},\infty\right)\to\left(e^{-e^{-1}},\infty\right)$ を $f(x)=x^x$ で定めれば, f は全単射であるが (証明不要), $f(e)=e^e$ であること

に注意して, f の逆関数 $f^{-1}:\left(e^{-e^{-1}},\infty\right)\to\left(e^{-1},\infty\right)$ の e^e における微分係数を求めよ.

(3) $f:(0,e)\to\left(0,e^{\frac{1}{e}}\right)$ を $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ で定めれば, f は全単射であるが (証明不要), $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e^e}$ であることに注意して, f の逆関数 $f^{-1}:\left(0,e^{\frac{1}{e}}\right)\to(0,e)$ の $\dfrac{1}{e^e}$ における微分係数を求めよ.

(4) $f:(-1,1)\to\left(-\tan^{-1}3,\tan^{-1}3\right)$ を $f(x)=\tan^{-1}\left(\dfrac{6}{\pi}\sin^{-1}x\right)$ で定義される関数とするとき, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ であることに注意して, f の逆関数 $f^{-1}:\left(-\tan^{-1}3,\tan^{-1}3\right)\to(-1,1)$ の $\dfrac{\pi}{4}$ における微分係数を求めよ.

(5) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=x-1+\sin^{-1}\left(\dfrac{2}{\pi}\tan^{-1}x\right)$ で定義される関数とする．$f(1)$ の値を求め，この値における f の逆関数 $f^{-1}:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ の微分係数を求めよ.

5. 関数 $f,g:\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\to\boldsymbol{R}$ をそれぞれ $f(x)=x^2\cos^{-1}(1-x^2)$, $g(x)=x\cos^{-1}(1-x^2)$ によって定めるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) f, g の 0 における微分係数を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}f'(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to0}g'(x)$ を求めよ.

(3) f, g の導関数は 0 で微分可能か? 理由を付けて答えよ.

(4) f, g の定義域を $(0,1)$ に制限して得られる関数も $f,g:(0,1)\to\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ で表すとき, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$, $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\pi}{3\sqrt{2}}$ であることに注意して, f, g の逆関数の, それぞれ $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{3\sqrt{2}}$ における微分係数を求めよ.

6. (発展問題) I を開区間, $f:I\to\boldsymbol{R}$ は I の各点で微分可能であるとする．$a,b\in I$, $a<b$ に対し，$f(a)<f(b)$ かつ $f'(a)=f'(b)=0$ ならば $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(c)$ を満たす $a<c<b$ が存在することを示せ.

7. (発展問題) l, n を 0 でない実数, m を自然数とする．x の多項式 $f(x)$ で $\left(\dfrac{f(x)}{x^n(1+x^m)^l}\right)'=\dfrac{1}{x^{n+1}(1+x^m)^{l+1}}$ 満たすものが存在するための, l, m, n の条件を求めよ．さらに, このような多項式 $f(x)$ が存在するとき, $f(x)$ を求めよ.

第 4 回の演習問題の解答

1. (1) $((x+2)^3(x^3-4)^5)' = ((x+2)^3)'(x^3-4)^5 + (x+2)^3((x^3-4)^5)' =$
$3(x+2)^2(x^3-4)^5 + 15x^2(x+2)^3(x^3-4)^4 = (x+2)^2(x^3-4)^4(18x^3+30x^2-12)$

(2) $\left(\dfrac{x^4-1}{x^3+2}\right)' = \dfrac{(x^4-1)'(x^3+2)-(x^4-1)(x^3+2)'}{(x^3+2)^2} = \dfrac{4x^3(x^3+2)-3x^2(x^4-1)}{(x^3+2)^2} = \dfrac{x^6+8x^3+3x^2}{(x^3+2)^2}$

(3) $\left(\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)^2}\right)' = \dfrac{((x-1)(x-2))'(x+1)^2-(x-1)(x-2)((x+1)^2)'}{(x+1)^4} =$
$\dfrac{(2x-3)(x+1)-2(x-1)(x-2)}{(x+1)^3} = \dfrac{5x-7}{(x+1)^3}$

(4) $\left(\dfrac{cx+d}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\right)' = (cx+d)'(ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}} + (cx+d)\left((ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}}\right)' =$
$c(ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}} - (cx+d)\left(ax+\dfrac{b}{2}\right)(ax^2+bx+c)^{-\frac{3}{2}} = (ax^2+bx+c)^{-\frac{3}{2}}\left(c\big(ax^2+bx+c\big)-(cx+d)\left(ax+\dfrac{b}{2}\right)\right) =$
$\dfrac{1}{2}(ax^2+bx+c)^{-\frac{3}{2}}((bc-2ad)x+2c^2-bd)$

(5) $\left((x-3)\sqrt{x^2+2x+3}\right)' = (x-3)'\sqrt{x^2+2x+3} + (x-3)\left(\sqrt{x^2+2x+3}\right)' =$
$\sqrt{x^2+2x+3} + \dfrac{(x-3)(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \dfrac{x^2+2x+3+(x-3)(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

(6) $\left(\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)^7\right)' = 7\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)^6\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)' = 7\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)^6\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)$

(7) $\left(\sqrt{\dfrac{1-x^n}{1+x^n}}\right)' = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+x^n}{1-x^n}}\left(\dfrac{1-x^n}{1+x^n}\right)' = \sqrt{\dfrac{1+x^n}{1-x^n}}\dfrac{-nx^{n-1}(1+x^n)-nx^{n-1}(1-x^n)}{2(1+x^n)^2} =$
$\dfrac{-nx^{n-1}}{\sqrt{1-x^n}\sqrt{(1+x^n)^3}}$

(8) $\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)'(1+\cos x)-\sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2} = \dfrac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \dfrac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} = \dfrac{1}{1+\cos x}$

(9) $\left(\cos^3(2x^3)\right)' = -3\sin(2x^3)\cos^2(2x^3)(2x^3)' = -18x^2\sin(2x^3)\cos^2(2x^3)$

(10) $\left((9x^2-6x-7)e^{x^3}\right)' = ((9x^2-6x-7))'e^{x^3} + (9x^2-6x-7)\left(e^{x^3}\right)' =$
$(18x-6)e^{x^3} + 3x^2(9x^2-6x-7)e^{x^3} = 3(9x^4-6x^3-7x^2+6x-2)e^{x^3} = 3(x-1)(x+1)(9x^2-6x+2)e^{x^3}$

(11) $\left(\sqrt{1+e^x}\right)' = \dfrac{(1+e^x)'}{2\sqrt{1+e^x}} = \dfrac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$

(12) $\left(x^2e^{\frac{1}{x}}\right)' = (x^2)'e^{\frac{1}{x}} + x^2\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = 2xe^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$

(13) $\left(e^{3x}(\sin 3x+\cos 3x)\right)' = \left(e^{3x}\right)'(\sin 3x+\cos 3x) + e^{3x}(\sin 3x+\cos 3x)' =$
$3e^{3x}(\sin 3x+\cos 3x) + e^{3x}(3\cos 3x-3\sin 3x)' = 6e^{3x}\cos 3x$

(14) $\left(e^{-x}\sin^2 x\right)' = (e^{-x})'\sin^2 x + e^{-x}(\sin^2 x)' = e^{-x}\sin x(2\cos x-\sin x)$

(15) $(\log(\log x))' = \dfrac{(\log x)'}{\log x} = \dfrac{1}{x\log x}$

(16) $(\log|\cos x|)' = \dfrac{(\cos x)'}{\cos x} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

(17) $\left(\log\big(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}\big)\right)' = \dfrac{\left(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}\right)'}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}} = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x-a}}+\frac{1}{2\sqrt{x-b}}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}} = \dfrac{1}{2\sqrt{(x-a)(x-b)}}$

(18) $\left((\log(e^x+1))^2\right)' = 2(\log(e^x+1))'\log(e^x+1) = 2\dfrac{e^x}{e^x+1}\log(e^x+1) = \dfrac{2e^x\log(e^x+1)}{e^x+1}$

(19) $\left(\dfrac{(\log|x|)^2}{x}\right)' = \dfrac{((\log|x|)^2)'}{x} + (\log|x|)^2\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{2\log|x|}{x^2} - \dfrac{(\log|x|)^2}{x^2} = \dfrac{\log|x|(2-\log|x|)}{x^2}$

(20) $\left(\log\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+3}}\right)' = \left(\dfrac{1}{2}\log(x-1) - \dfrac{1}{2}\log(x^2+3)\right)' = \dfrac{1}{2(x-1)} - \dfrac{x}{x^2+3}$

(21) $\left(\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)' = \dfrac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)'}{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(22) $(\log(\sin(e^x)))' = \dfrac{(\sin(e^x))'}{\sin(e^x)} = \dfrac{e^x\cos(e^x)}{\sin(e^x)}$

(23) $\left(\sin^{-1}(2x^2-1)\right)' = \dfrac{(2x^2-1)'}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} = \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2-4x^4}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & 0<x<1 \\ -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & -1<x<0 \end{cases}$ であるが,

$$\sin^{-1}(2x^2-1) = \begin{cases} 2\sin^{-1}x - \frac{\pi}{2} & 0 \leqq x \leqq 1 \\ -2\sin^{-1}x - \frac{\pi}{2} & -1 \leqq x \leqq 0 \end{cases} \quad \cdots (*)$$

が成り立つため, $\left(\sin^{-1}x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ から $\left(\sin^{-1}(2x^2-1)\right)' = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & 0<x<1 \\ -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & -1<x<0 \end{cases}$ は明らかである. また, $\sin^{-1}(2x^2-1)$ は 0 で微分不可能である. 実際, $(*)$ と教科書の問題 1.6 の (4) から $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin^{-1}(2x^2-1)-\sin^{-1}(-1)}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{2\sin^{-1}x}{x} = 2$, $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{\sin^{-1}(2x^2-1)-\sin^{-1}(-1)}{x} = \lim_{x\to-0}\frac{-2\sin^{-1}x}{x} = -2$ となるため $\sin^{-1}(2x^2-1)$ の 0 における左右の微分係数は一致しない.

[$(*)$ の証明] $x = \cos\dfrac{\theta}{2}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ とおくと教科書の例題 1.6 の (1) から $\theta = 2\cos^{-1}x = \pi - 2\sin^{-1}x$ であり, $2x^2-1 = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1 = \cos\theta$ が成り立つため, $\cos^{-1}(2x^2-1) = \cos^{-1}(\cos\theta)$ が得られる. ここで, $0 \leqq x \leqq 1$ のときは $0 \leqq \theta \leqq \pi$ だから $\cos^{-1}(\cos\theta) = \theta = \pi - 2\sin^{-1}x$, $-1 \leqq x \leqq 0$ のときは $0 \leqq \theta - \pi \leqq \pi$ だから, 教科書の問 1.11 の (2) から $\cos^{-1}(\cos\theta) = \cos^{-1}(-\cos(\theta-\pi)) = \pi - \cos^{-1}(\cos(\theta-\pi)) = \pi - (\theta-\pi) = 2\pi - \theta = \pi + 2\sin^{-1}x$ である. 従って

$$\sin^{-1}(2x^2-1) = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(2x^2-1) = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(\cos\theta) = \begin{cases} 2\sin^{-1}x - \frac{\pi}{2} & 0 \leqq x \leqq 1 \\ -2\sin^{-1}x - \frac{\pi}{2} & -1 \leqq x \leqq 0 \end{cases}$$

(24) $\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)' = \dfrac{4}{\sqrt{3}\left(1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)}\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{x^2+x+1}$

(25) $\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(26) $\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{x}\right)' = (\tan^{-1})'\left(\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{1+x^2}$

[別解] $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x>0 \\ -\frac{\pi}{2} & x<0 \end{cases}$ が成り立つ. 実際 $x>0$ の場合は教科書の問 1.11 の (4) の結果であり, $x<0$ ならば $-x>0$ だから $\tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \tan^{-1}\left(-\dfrac{1}{-x}\right) = -\tan^{-1}\dfrac{1}{-x} = -\dfrac{\pi}{2} + \tan^{-1}(-x) = -\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}x$ が成り立つ. 上の等式の両辺の導関数を考えれば $\left(\tan^{-1}x\right)' + \left(\tan^{-1}\dfrac{1}{x}\right)' = 0$ で, $\left(\tan^{-1}x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ だから $\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ である.

(27) $\left(\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}\right)' = \dfrac{\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)'}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} = \dfrac{\frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2}}{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} = \dfrac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2}{1+x^2}$ であるが,

$$\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \begin{cases} 2\tan^{-1}x + \pi & x<-1 \\ 2\tan^{-1}x & |x|<1 \\ 2\tan^{-1}x - \pi & x>1 \end{cases} \quad \cdots (*)$$

が成り立つため, $\left(\tan^{-1}x\right)' = \dfrac{1}{x^2+1}$ から $\left(\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}\right)' = \dfrac{2}{1+x^2}$ は明らかである.

[$(*)$ の証明] $x = \tan\dfrac{\theta}{2}$ $(|\theta| < \pi)$ とおくと $\theta = 2\tan^{-1}x$ であり, $\dfrac{2x}{1-x^2} = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} = \tan\theta$ が成り立つため, $\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2} = \tan^{-1}(\tan\theta)$ が得られる. ここで, $x<-1$ のときは $0 < \theta+\pi < \dfrac{\pi}{2}$ だから $\tan^{-1}(\tan\theta) =$

$\tan^{-1}(\tan(\theta+\pi))=\theta+\pi=2\tan^{-1}x+\pi$, $-1<x<1$ のときは $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ だから $\tan^{-1}(\tan\theta)=\theta=2\tan^{-1}x$, $x>1$ のときは $-\dfrac{\pi}{2}<\theta-\pi<0$ だから $\tan^{-1}(\tan\theta)=\tan^{-1}(\tan(\theta-\pi))=\theta-\pi=2\tan^{-1}x-\pi$ である.

(28) $\left(\tan^{-1}\dfrac{x^2-1}{2x}\right)'=\dfrac{\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)'}{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2}=\dfrac{\frac{4x^2-2(x^2-1)}{4x^2}}{1+\frac{(x^2-1)^2}{4x^2}}=\dfrac{2(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2}{1+x^2}$ であるが,

$$\tan^{-1}\frac{x^2-1}{2x}=\begin{cases}2\tan^{-1}x-\frac{\pi}{2} & x>0\\ 2\tan^{-1}x+\frac{\pi}{2} & x<0\end{cases}\qquad\cdots(*)$$

が成り立つため, $\left(\tan^{-1}x\right)'=\dfrac{1}{x^2+1}$ から $\left(\tan^{-1}\dfrac{x^2-1}{2x}\right)'=\dfrac{2}{1+x^2}$ は明らかである.

[(∗) の証明] 第 3 回の演習問題の 5 の (3) より $x>0$ の場合は $\tan^{-1}\dfrac{x^2-1}{2x}=2\tan^{-1}x-\dfrac{\pi}{2}$ であり, $x<0$ の場合は, この式の x に $-x$ を代入すれば $-\tan^{-1}\dfrac{x^2-1}{2x}=-2\tan^{-1}x-\dfrac{\pi}{2}$ が得られるため, $\tan^{-1}\dfrac{x^2-1}{2x}=2\tan^{-1}x+\dfrac{\pi}{2}$ である.

(29) $\left(\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x+1}\right)'=\dfrac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}=\dfrac{\frac{2}{(x+1)^2}}{1+\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}}=\dfrac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2}=\dfrac{1}{x^2+1}$ であるが,

$$\tan^{-1}\frac{x-1}{x+1}=\begin{cases}\tan^{-1}x-\frac{\pi}{4} & x>-1\\ \tan^{-1}x+\frac{3\pi}{4} & x<-1\end{cases}\qquad\cdots(*)$$

が成り立つため, $\left(\tan^{-1}x\right)'=\dfrac{1}{x^2+1}$ から $\left(\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x+1}\right)'=\dfrac{1}{x^2+1}$ は明らかである.

[(∗) の証明] $x<-1$ ならば第 3 回の演習問題の 5 の (6) から $\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x+1}=-\tan^{-1}\dfrac{1-x}{1+x}=\tan^{-1}x+\dfrac{3\pi}{4}$ である. $x>-1$ の場合, $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ とおくと $xy=x\dfrac{1-x}{1+x}=3-\left(1+x+\dfrac{2}{1+x}\right)=3-2\sqrt{2}-\left(\sqrt{1+x}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}}\right)^2\leqq 3-2\sqrt{2}<1$ となるため, (x,y) は第 3 回の演習問題の 9 の (1) の不等式を満たす. このとき, $\dfrac{x+y}{1-xy}=\dfrac{x+\frac{1-x}{1+x}}{1-x\frac{1-x}{1+x}}=1$ であることに注意すれば, 第 3 回の演習問題の 5 の (1) から, $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\dfrac{1-x}{1+x}=\tan^{-1}1=\dfrac{\pi}{4}$ が得られる. 従って $x>-1$ ならば $\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x+1}=-\tan^{-1}\dfrac{1-x}{1+x}=\tan^{-1}x-\dfrac{\pi}{4}$ である.

(30) $-1\leqq\dfrac{1-x}{1+x}\leqq 1$ であるためには $x\geqq 0$ でなければならないことに注意する.

$$\left(\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x}\right)'=-\frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$$

(31) $\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{x^2+1}\right)'=-\dfrac{\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2}}=\dfrac{2x}{|x|(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\begin{cases}\frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} & x>0\\ -\frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} & x<0\end{cases}$ であり, $\cos^{-1}\dfrac{1}{x^2+1}$ は 0 で微分不可能である. 実際 $y=\cos^{-1}\dfrac{1}{x^2+1}$ とおくと $x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{\cos y}-1}$ であり, $x\to 0$ のとき, $y\to+0$ だから, 第 3 回の演習問題の 1 の (3) から

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\cos^{-1}\frac{1}{x^2+1}-\cos^{-1}1}{x}=\lim_{y\to+0}\frac{y}{\sqrt{\frac{1}{\cos y}-1}}=\lim_{y\to+0}\frac{\sqrt{\cos y}}{\sqrt{\frac{1-\cos y}{y^2}}}=\sqrt{2}$, $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{\cos^{-1}\frac{1}{x^2+1}-\cos^{-1}1}{x}=$ $\displaystyle\lim_{y\to+0}\frac{y}{-\sqrt{\frac{1}{\cos y}-1}}=-\lim_{y\to+0}\frac{\sqrt{\cos y}}{\sqrt{\frac{1-\cos y}{y^2}}}=-\sqrt{2}$ となって $\cos^{-1}\dfrac{1}{x^2+1}$ の 0 における左右の微分係数は一致しない.

(32) $\left(\sin^{-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \dfrac{\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}} = \dfrac{2x}{|x|(x^2+1)} = \begin{cases} \frac{2}{x^2+1} & x>0 \\ -\frac{2}{x^2+1} & x<0 \end{cases}$ であるが,

$$\sin^{-1}\frac{x^2-1}{x^2+1} = \begin{cases} 2\tan^{-1}x - \frac{\pi}{2} & x \geqq 0 \\ -2\tan^{-1}x - \frac{\pi}{2} & x \leqq 0 \end{cases} \quad \cdots (*)$$

が成り立つため, $\left(\tan^{-1}x\right)' = \dfrac{1}{x^2+1}$ から $\left(\sin^{-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \begin{cases} \frac{2}{x^2+1} & x>0 \\ -\frac{2}{x^2+1} & x<0 \end{cases}$ は明らかである. また, $\sin^{-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ は 0 で微分不可能である. 実際, $(*)$ と第 3 回の演習問題 1 の (10) から $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin^{-1}\frac{x^2-1}{x^2+1}-\sin^{-1}(-1)}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{2\tan^{-1}x}{x}$ $= 2$, $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{\sin^{-1}\frac{x^2-1}{x^2+1}-\sin^{-1}(-1)}{x} = \lim_{x\to-0}\frac{-2\tan^{-1}x}{x} = -2$ となるため $\sin^{-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ の 0 における左右の微分係数は一致しない.

[$(*)$ の証明] $x = \tan\theta$ $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ とおくと, $\theta = \tan^{-1}x$ であり, 教科書の問 1.11 の (1) と例題 1.6 の (1) から $\sin^{-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1} = \sin^{-1}\dfrac{\tan^2\theta-1}{\tan^2\theta+1} = \sin^{-1}(\sin^2\theta-\cos^2\theta) = -\sin^{-1}(\cos 2\theta) = \cos^{-1}(\cos 2\theta) - \dfrac{\pi}{2}$ である. $x \geqq 0$ ならば $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ だから $0 \leqq 2\theta < \pi$ となるため, $\cos^{-1}(\cos 2\theta) = 2\theta = 2\tan^{-1}x$ である. $x \leqq 0$ ならば $-\dfrac{\pi}{2} < \theta \leqq 0$ だから $0 \leqq 2\theta+\pi < \pi$ となるため, 教科書の問 1.11 の (2) より $\cos^{-1}(\cos 2\theta) = \cos^{-1}(-\cos(2\theta+\pi)) = \pi - \cos^{-1}(\cos(2\theta+\pi)) = -2\theta = -2\tan x$ である.

(33) $\left(\tan^{-1}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1}\right)' = \dfrac{\left(\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1}\right)'}{1+\left(\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1}\right)^2} = \dfrac{(2x+2)(x^2-2x-1)-(x^2+2x-1)(2x-2)}{(x^2-2x-1)^2+(x^2+2x-1)^2} = \dfrac{-2x^2-2}{(x^2+1)^2} = -\dfrac{2}{x^2+1}$ であるが

$$\tan^{-1}\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1} = \begin{cases} -2\tan^{-1}x - \frac{3\pi}{4} & x < -\tan\frac{\pi}{8} \\ -2\tan^{-1}x + \frac{\pi}{4} & -\tan\frac{\pi}{8} < x < \tan\frac{3\pi}{8} \\ -2\tan^{-1}x + \frac{5\pi}{4} & x > \tan\frac{3\pi}{8} \end{cases} \quad \cdots (*)$$

が成り立つため, $\left(\tan^{-1}x\right)' = \dfrac{1}{x^2+1}$ から $\left(\tan^{-1}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1}\right)' = -\dfrac{2}{x^2+1}$ は明らかである.

[$(*)$ の証明] $x = \tan\dfrac{\theta}{2}$ $(|\theta| < \pi)$ とおくと $\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1} = \dfrac{\tan^2\frac{\theta}{2}+2\tan\frac{\theta}{2}-1}{\tan^2\frac{\theta}{2}-2\tan\frac{\theta}{2}-1} = \dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}} = \dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{-\sin\theta-\cos\theta} = -\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)} = -\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ である. $\theta = 2\tan^{-1}x$ より $x < -\tan\dfrac{\pi}{8}$ ならば $-\dfrac{\pi}{4} < \theta+\dfrac{3\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2}$ となるため $\tan^{-1}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1} = \tan^{-1}\left(-\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = -\tan^{-1}\left(\tan\left(\theta+\dfrac{3\pi}{4}\right)\right) = -\theta-\dfrac{3\pi}{4} = -2\tan^{-1}x-\dfrac{3\pi}{4}$ が得られる. $-\tan\dfrac{\pi}{8} < x < \tan\dfrac{3\pi}{8}$ ならば $-\dfrac{\pi}{2} < \theta-\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2}$ となるため $\tan^{-1}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1} = \tan^{-1}\left(-\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = -\tan^{-1}\left(\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = -\theta+\dfrac{\pi}{4} = -2\tan^{-1}x+\dfrac{\pi}{4}$ が得られる. $x > \tan\dfrac{3\pi}{8}$ ならば $-\dfrac{\pi}{2} < \theta-\dfrac{5\pi}{4} < -\dfrac{\pi}{4}$ となるため $\tan^{-1}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1} = \tan^{-1}\left(-\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = -\tan^{-1}\left(\tan\left(\theta-\dfrac{5\pi}{4}\right)\right) = -\theta+\dfrac{5\pi}{4} = -2\tan^{-1}x+\dfrac{5\pi}{4}$ が得られる.

(34) $\left(\cos^{-1}\dfrac{2x}{x^2+1}\right)' = -\dfrac{\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}} = \dfrac{2(x^2-1)}{|x^2-1|(x^2+1)} = \begin{cases} \frac{2}{x^2+1} & |x|>1 \\ -\frac{2}{x^2+1} & |x|<1 \end{cases}$ であるが

$$\cos^{-1}\frac{2x}{x^2+1} = \begin{cases} 2\tan^{-1}x + \frac{3\pi}{2} & x \leqq -1 \\ -2\tan^{-1}x + \frac{\pi}{2} & -1 \leqq x \leqq 1 \\ 2\tan^{-1}x - \frac{\pi}{2} & x \geqq 1 \end{cases} \quad \cdots(*)$$

であるため, $\left(\tan^{-1}x\right)' = \dfrac{1}{x^2+1}$ から $\left(\cos^{-1}\dfrac{2x}{x^2+1}\right)' = \begin{cases} \frac{2}{x^2+1} & |x|>1 \\ -\frac{2}{x^2+1} & |x|<1 \end{cases}$ は明らかである. また, $\cos^{-1}\dfrac{2x}{x^2+1}$ は ± 1 において微分不可能である. 実際, $y = \tan^{-1}x + \dfrac{\pi}{4}$ とおけば $x = \tan\left(y - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan y - 1}{\tan y + 1}$ であり, $x \to -1+0$ のとき $y \to +0$, $x \to -1-0$ のとき $y \to -0$ だから $(*)$ から $\displaystyle\lim_{x\to -1+0}\frac{\cos^{-1}\frac{2x}{x^2+1} - \cos^{-1}(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1+0}\frac{-2\tan^{-1}x - \frac{\pi}{2}}{x+1} = \lim_{y\to +0}\frac{-2y}{\frac{\tan y - 1}{\tan y + 1}+1} = -\lim_{y\to +0}\frac{y}{\sin y}(\sin y + \cos y) = -1$, $\displaystyle\lim_{x\to -1-0}\frac{\cos^{-1}\frac{2x}{x^2+1} - \cos^{-1}(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1-0}\frac{2\tan^{-1}x + \frac{\pi}{2}}{x+1} =$
$\displaystyle\lim_{y\to -0}\frac{2y}{\frac{\tan y - 1}{\tan y + 1}+1} = \lim_{y\to -0}\frac{y}{\sin y}(\sin y + \cos y) = 1$ となって, $\cos^{-1}\dfrac{2x}{x^2+1}$ の -1 における左右の微分係数は一致しない. 同様に $y = \tan^{-1}x - \dfrac{\pi}{4}$ とおけば $x = \tan\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1+\tan y}{1-\tan y}$ であり, $x \to 1+0$ のとき $y \to +0$, $x \to 1-0$ のとき $y \to -0$ だから $(*)$ から $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{\cos^{-1}\frac{2x}{x^2+1} - \cos^{-1}1}{x-1} = \lim_{x\to 1+0}\frac{2\tan^{-1}x - \frac{\pi}{2}}{x-1} = \lim_{y\to +0}\frac{2y}{\frac{1+\tan y}{1-\tan y}-1} = \lim_{y\to +0}\frac{y}{\sin y}(\cos y - \sin y) = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{\cos^{-1}\frac{2x}{x^2+1} - \cos^{-1}1}{x-1} = \lim_{x\to 1-0}\frac{-2\tan^{-1}x + \frac{\pi}{2}}{x-1} = \lim_{y\to -0}\frac{-2y}{\frac{1+\tan y}{1-\tan y}-1} =$
$\displaystyle -\lim_{y\to -0}\frac{y}{\sin y}(\cos y - \sin y) = -1$ となって, $\cos^{-1}\dfrac{2x}{x^2+1}$ の 1 における左右の微分係数は一致しない.
[$(*)$ の証明] $x = \tan\dfrac{\theta}{2}$ $(-\pi < \theta < \pi)$ とおけば $\theta = 2\tan^{-1}x$ であり, 教科書の例題 1.6 の (1) から $\cos^{-1}\dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1}\dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1}\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{\tan^2\frac{\theta}{2}+1} = \dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1}(\sin\theta)$ が得られる. $x \leqq -1$ ならば $-\pi < \theta \leqq -\dfrac{\pi}{2}$ だから $0 < \theta + \pi \leqq \dfrac{\pi}{2}$ となるため $\sin^{-1}(\sin\theta) = \sin^{-1}(-\sin(\theta+\pi)) = -\sin^{-1}(\sin(\theta+\pi)) = -\theta - \pi = -2\tan^{-1}x - \pi$ である. $-1 \leqq x \leqq 1$ ならば $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ だから $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta = 2\tan^{-1}x$ である. $x \geqq 1$ ならば $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta < \pi$ だから $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta - \pi < 0$ となるため $\sin^{-1}(\sin\theta) = \sin^{-1}(-\sin(\theta-\pi)) = -\sin^{-1}(\sin(\theta-\pi)) = -\theta + \pi = -2\tan^{-1}x + \pi$ である.

(35) $\left(\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}\right)' = \dfrac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}} = \dfrac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & -1<x<0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & 0<x<1 \end{cases}$ であるが,

$$\sin^{-1}\sqrt{1-x^2} = \begin{cases} -\cos^{-1}x + \pi & -1 \leqq x \leqq 0 \\ \cos^{-1}x & 0 \leqq x \leqq 1 \end{cases} \quad \cdots(*)$$

が成り立つため, $\left(\cos^{-1}x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ から $\left(\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}\right)' = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & -1<x<0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & 0<x<1 \end{cases}$ は明らかである. また, $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ は 0 で微分不可能である. 実際, $(*)$ から $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\sin^{-1}\sqrt{1-x^2} - \sin^{-1}1}{x} = \lim_{x\to +0}\frac{\cos^{-1}x - \frac{\pi}{2}}{x} = \lim_{x\to +0}\frac{\cos^{-1}x - \cos^{-1}0}{x}$ となるため, $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\sin^{-1}\sqrt{1-x^2} - \sin^{-1}1}{x}$ は $\cos^{-1}x$ の 0 における微分係数 -1 に等しい. 一方 $\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{\sin^{-1}\sqrt{1-x^2} - \sin^{-1}1}{x} = \lim_{x\to -0}\frac{-\cos^{-1}x + \frac{\pi}{2}}{x} = \lim_{x\to -0}\frac{(-\cos^{-1}x) - (-\cos^{-1}0)}{x}$ となるため,

$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}-\sin^{-1}1}{x}$ は $-\cos^{-1}x$ の 0 における微分係数 1 に等しいため, $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ の 0 における左右の微分係数は一致しない.

[(∗) の証明] $-1\leqq x\leqq 0$ ならば $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\cos^{-1}x-\pi\leqq 0$ であり, 第 3 回の演習問題 2 の (1) から, $\sin(\cos^{-1}x-\pi)=\sin(-\cos^{-1}x)=-\sin(\cos^{-1}x)=-\sqrt{1-x^2}$ となるため, $\cos^{-1}x-\pi=\sin^{-1}\left(-\sqrt{1-x^2}\right)=-\sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ を得る. 従って $-1\leqq x\leqq 0$ ならば $\sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)=-\cos^{-1}x+\pi$ である. $0\leqq x\leqq 1$ ならば $0\leqq\cos^{-1}x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であり, 第 3 回の演習問題 2 の (1) から, $\sin(\cos^{-1}x)=\sqrt{1-x^2}$ となるため, $\cos^{-1}x=\sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ を得る. 従って $0\leqq x\leqq 1$ ならば $\sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)=\cos^{-1}x$ である.

(36) $\displaystyle\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)'=\frac{\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)'}{\sqrt{1-\frac{x+1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ であるが, $-1\leqq x\leqq 1$ ならば

$$2\sin^{-1}\sqrt{\frac{x+1}{2}}=\sin^{-1}x+\frac{\pi}{2}\qquad\cdots(*)$$

が成り立つため, $\left(\sin^{-1}x\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ から, $\displaystyle\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ は明らかである.

[(∗) の証明] $-1\leqq x\leqq 1$ ならば $0\leqq\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}\leqq 1$ だから $2\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$ と $\sin^{-1}x+\dfrac{\pi}{2}$ はともに閉区間 $[0,\pi]$ に属する. cos はこの区間で狭義単調減少関数だから, (∗) が成り立つことは, $\displaystyle\cos\left(2\sin^{-1}\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)=\cos\left(\sin^{-1}x+\frac{\pi}{2}\right)$ が成り立つことと同値である. ここで

$$\begin{aligned}\cos\left(2\sin^{-1}\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)&=1-2\sin^2\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)=1-2\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)^2=-x\\ \cos\left(\sin^{-1}x+\frac{\pi}{2}\right)&=-\sin(\sin^{-1}x)=-x\end{aligned}$$

となって, 上式は成り立つため (∗) が示される.

(37) $\displaystyle\left(\tan^{-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)'=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)'}{1+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{2x^2+2x\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{2x\sqrt{x^2-1}}$

(38) $\displaystyle\left(\tan^{-1}\sqrt{x^2-1}\right)'=\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)'}{1+\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(39) $\displaystyle\left(\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\frac{-\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}}=\frac{x}{|x|(x^2+1)}=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2} & x>0\\ -\frac{1}{1+x^2} & x<0\end{cases}$ であるが,

$$\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\begin{cases}\tan^{-1}x & x\geqq 0\\ -\tan^{-1}x & x\leqq 0\end{cases}\qquad\cdots(*)$$

となるため, $\left(\tan^{-1}x\right)'=\dfrac{1}{x^2+1}$ から $\displaystyle\left(\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2} & x>0\\ -\frac{1}{1+x^2} & x<0\end{cases}$ は明らかである. また $\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ は 0 で微分不可能である. 実際, (∗) と第 3 回の演習問題 1 の (10) から $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\cos^{-1}1}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=1$, $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\cos^{-1}1}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{-\tan^{-1}x}{x}=-1$ となるため $\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ の 0 における左右の微分係数は一致しない.

[(∗) の証明] $x\geqq 0$ ならば $0\leqq\tan^{-1}x<\dfrac{\pi}{2}$ であり, 第 3 回の演習問題 2 の (5) から, $\cos\left(\tan^{-1}x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ だから, $\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\tan^{-1}x$ が得られる. $x\leqq 0$ ならば, $-x\geqq 0$ だから, いま示した等式の x に $-x$ を代入すれば $\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}x$ が得られる.

(40) $\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \dfrac{\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2} = \dfrac{-x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}$

(41) $\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\tan\dfrac{x}{2}\right)\right)' = \dfrac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)^2}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\tan\dfrac{x}{2}\right)' = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\dfrac{1}{1+\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$
$= \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{(a-b)(a+b)}}{(a+b)\cos^2\frac{x}{2}+(a-b)\sin^2\frac{x}{2}} = \dfrac{\sqrt{(a-b)(a+b)}}{2(a+b\cos x)}$

(42) $\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \dfrac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}} = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}} = \dfrac{1}{x^2+1}$ であるが, 教科書の問題 1.5 の (3) から $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \tan^{-1}x$ だから, $\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ はただちに得られる.

(43) $\left(\cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)\right)' = \dfrac{\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)'}{\sqrt{1-\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)^2}} = \dfrac{\frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{|1-2x^2|} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & |x|<\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}<|x|<1 \end{cases}$ であるが, 次の等式 $(*)$ と $\left(\cos^{-1}x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ から上の結果は明らかである.

$$\cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \begin{cases} -2\cos^{-1}x+\frac{5\pi}{2} & -1\leqq x\leqq -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2\cos^{-1}x-\frac{\pi}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -2\cos^{-1}x+\frac{\pi}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq 1 \end{cases} \qquad \cdots(*)$$

[$(*)$ の証明] $-1\leqq x\leqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ならば $-\dfrac{\pi}{2}\leqq 2\cos^{-1}x-2\pi\leqq 0$ であることに注意すると, 第 3 回の演習問題の 2 の (2) から $\sin\left(2\cos^{-1}x-2\pi\right) = \sin\left(2\cos^{-1}x\right) = 2x\sqrt{1-x^2}$ だから, 教科書の問 1.11 の (1) を用いれば $2\cos^{-1}x-2\pi = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = -\cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)+\dfrac{\pi}{2}$ である. 従って, $\cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = -2\cos^{-1}x+\dfrac{5\pi}{2}$ である. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ならば $-\dfrac{\pi}{2}\leqq 2\cos^{-1}x-\pi\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であることに注意すると, 第 3 回の演習問題の 2 の (2) から $\sin\left(2\cos^{-1}x-\pi\right) = -\sin\left(2\cos^{-1}x\right) = -2x\sqrt{1-x^2}$ だから, 教科書の例題 1.6 の (1) と問 1.11 の (1) を用いれば $2\cos^{-1}x-\pi = \sin^{-1}\left(-2x\sqrt{1-x^2}\right) = -\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)-\dfrac{\pi}{2}$ である. 従って, $\cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1}x-\dfrac{\pi}{2}$ である. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq 1$ ならば $0\leqq 2\cos^{-1}x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であることに注意すると, 第 3 回の演習問題の 2 の (2) から $\sin\left(2\cos^{-1}x\right) = 2x\sqrt{1-x^2}$ だから, 教科書の問 1.11 の (1) を用いれば $2\cos^{-1}x = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = -\cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)+\dfrac{\pi}{2}$ である. 従って, $\cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = -2\cos^{-1}x+\dfrac{\pi}{2}$ である.

(44) $\left(\sin^{-1}\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-e^{2x}})^2}}\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}}\dfrac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}(1-e^{2x})' = \dfrac{-2e^{2x}}{2e^x\sqrt{1-e^{2x}}}$
$= \dfrac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(45) $\left(\sqrt{1+x^2}\sin(\tan^{-1}x)\right)' = \left(\sqrt{1+x^2}\right)'\sin(\tan^{-1}x)+\sqrt{1+x^2}\left(\sin(\tan^{-1}x)\right)' = \dfrac{x\sin(\tan^{-1}x)}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{\cos(\tan^{-1}x)}{\sqrt{1+x^2}}$ であるが, 第 3 回の演習問題の 2 の (6) から $\sqrt{1+x^2}\sin(\tan^{-1}x) = x$ となるため $\left(\sqrt{1+x^2}\sin(\tan^{-1}x)\right)' = 1$ である.

(46) $\left(\log(\sin^{-1}(e^x))\right)' = \dfrac{(\sin^{-1}(e^x))'}{\sin^{-1}(e^x)} = \dfrac{(e^x)'}{\sin^{-1}(e^x)\sqrt{1-(e^x)^2}} = \dfrac{e^x}{\sin^{-1}(e^x)\sqrt{1-(e^x)^2}}$

(47) $\left(\sin^{-1}\dfrac{e^x}{e^x+e^{-x}}\right)' = \dfrac{\left(\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}\right)^2}} = \dfrac{\frac{2}{(e^x+e^{-x})^2}}{\frac{1}{e^x+e^{-x}}\sqrt{2+e^{-2x}}} = \dfrac{2}{(e^x+e^{-x})\sqrt{2+e^{-2x}}}$

(48) $\left(\tan^{-1}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)'=\dfrac{\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)'}{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2}=\dfrac{\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}}{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2}=\dfrac{2}{e^{2x}+e^{-2x}}=\dfrac{1}{\cosh 2x}$

(49) $\left(\sin^{-1}(\tan^{-1}x)\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}}(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}}$

(50) $(\sin^{-1}(\sqrt{1-\sin x}))'=\dfrac{(\sqrt{1-\sin x})'}{\sqrt{1-(1-\sin x)}}=\dfrac{-\cos x}{2\sqrt{\sin x}\sqrt{1-\sin x}}$

(51) $y=x^{3x^2}$ とおいて両辺の対数をとれば, $\log y=3x^2\log x$. この両辺を x で微分すれば, $\dfrac{y'}{y}=6x\log x+3x$. 従って $\left(x^{3x^2}\right)'=y(6x\log x+3x)=3x^{3x^2+1}(2\log x+1)$.

(52) $y=(a+x)^{\frac{1}{x}}$ とおいて両辺の対数をとれば, $\log y=\dfrac{\log(a+x)}{x}$. この両辺を x で微分すれば, $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{x(a+x)}-\dfrac{\log(a+x)}{x^2}$. 従って $\left((a+x)^{\frac{1}{x}}\right)'=y\left(\dfrac{1}{x(a+x)}-\dfrac{\log(a+x)}{x^2}\right)=\dfrac{(a+x)^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(\dfrac{x}{a+x}-\log(a+x)\right)$.

(53) $y=x^{x^a}$ とおいて両辺の対数をとれば, $\log y=x^a\log x$. この両辺を x で微分すれば, $\dfrac{y'}{y}=ax^{a-1}\log x+x^{a-1}$. 従って $\left(x^{x^a}\right)'=y\left(ax^{a-1}\log x+x^{a-1}\right)=x^{x^a+a-1}(a\log x+1)$.

(54) $y=(\cos x)^{\cos x}$ とおいて両辺の対数をとれば, $\log y=\cos x\log(\cos x)$. この両辺を x で微分すれば, $\dfrac{y'}{y}=-\sin x\log(\cos x)-\dfrac{\cos x\sin x}{\cos x}=-\sin x(\log(\cos x)+1)$. 従って $((\cos x)^{\cos x})'=-y\sin x(\log(\cos x)+1)=-(\cos x)^{\cos x}\sin x(\log(\cos x)+1)$.

(55) $y=(\tan x)^{\sin x}$ とおいて両辺の対数をとれば, $\log y=\sin x\log(\tan x)$. この両辺を x で微分すれば, $\dfrac{y'}{y}=\cos x\log(\tan x)-\dfrac{\sin x}{\tan x\cos^2 x}=\cos x\log(\tan x)-\dfrac{1}{\cos x}$. 従って $\left((\tan x)^{\sin x}\right)'=y\left(\cos x\log(\tan x)-\dfrac{1}{\cos x}\right)=(\tan x)^{\sin x}\left(\cos x\log(\tan x)-\dfrac{1}{\cos x}\right)$.

(56) $y=x^{(\log x)^a}$ とおいて両辺の対数をとれば, $\log y=(\log x)^{a+1}$. この両辺を x で微分すれば, $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{(a+1)(\log x)^a}{x}$. 従って $\left(x^{(\log x)^a}\right)'=\dfrac{y(a+1)(\log x)^a}{x}=\dfrac{(a+1)x^{(\log x)^a}(\log x)^a}{x}$.

(57) $y=x^{\sin x}$ とおいて両辺の対数をとれば, $\log y=\sin x\log x$. この両辺を x で微分すれば, $\dfrac{y'}{y}=\cos x\log x+\dfrac{\sin x}{x}$ となるため, $(x^{\sin x})'=x^{\sin x}\left(\cos x\log x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$ である. 従って $\left(\tan\left(x^{\sin x}\right)\right)'=\dfrac{\left(x^{\sin x}\right)'}{\cos^2\left(x^{\sin x}\right)}=\dfrac{x^{\sin x}\left(\cos x\log x+\frac{\sin x}{x}\right)}{\cos^2\left(x^{\sin x}\right)}=\dfrac{x^{\sin x}(x\cos x\log x+\sin x)}{x\cos^2\left(x^{\sin x}\right)}$.

(58) $y=(\log x)^{\frac{1}{x}}$ とおいて両辺の対数をとれば, $\log y=\dfrac{\log(\log x)}{x}$. この両辺を x で微分すれば, (15) の結果から $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{(\log(\log x))'}{x}+\log(\log x)\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{x^2\log x}-\dfrac{\log(\log x)}{x^2}$ である. 従って $\left((\log x)^{\frac{1}{x}}\right)'=y\left(\dfrac{1}{x^2\log x}-\dfrac{\log(\log x)}{x^2}\right)$ $=\dfrac{(\log x)^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(\dfrac{1}{\log x}-\log(\log x)\right)$.

(59) $\left(e^{\sin^{-1}x}\right)'=e^{\sin^{-1}x}(\sin^{-1}x)'=\dfrac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$

(60) $y=(\cos^{-1}x)^{\log x}$ とおいて両辺の対数をとれば, $\log y=\log x\log(\cos^{-1}x)$. この両辺を x で微分すれば, $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{x}\log(\cos^{-1}x)+\dfrac{-\log x}{\cos^{-1}x\sqrt{1-x^2}}$. 従って $\left((\cos^{-1}x)^{\log x}\right)'=$
$y\left(\dfrac{1}{x}\log(\cos^{-1}x)+\dfrac{-\log x}{\cos^{-1}x\sqrt{1-x^2}}\right)=(\cos^{-1}x)^{\log x}\left(\dfrac{1}{x}\log(\cos^{-1}x)-\dfrac{\log x}{\cos^{-1}x\sqrt{1-x^2}}\right)$.

(61) $\left(\log\left(\sin^{-1}x\right)\right)'=\log'\left(\sin^{-1}x\right)\left(\sin^{-1}x\right)'=\dfrac{1}{\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}}$

(62) $\left(\sin^{-1}(\log x)\right)'=(\sin^{-1})'(\log x)(\log x)'=\dfrac{1}{x\sqrt{1-(\log x)^2}}$

(63) $\left(\tan^{-1}\sqrt{1+x^2}\right)'=(\tan^{-1})'\left(\sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x^2}\right)'=\dfrac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

(64) $\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' = (\tan^{-1})'\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' = \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}}\frac{-1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$

$\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{\pi}{2}$ と第 3 回の演習問題 5 の (4) から $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin^{-1}x$ が成り立つ.

(65) $\left(\log(\sin^{-1}(\tan^{-1}x))\right)' = (\log)'(\sin^{-1}(\tan^{-1}x))(\sin^{-1}(\tan^{-1}x))' = \frac{1}{(1+x^2)\sin^{-1}(\tan^{-1}x)\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}}$
((49) の結果を用いた)

(66) $\left(\log\left(\tan^{-1}(e^x)\right)\right)' = (\log)'\left(\tan^{-1}(e^x)\right)((\tan^{-1})'(e^x)(e^x)' = \frac{e^x}{\tan^{-1}(e^x)(1+e^{2x})}$

(67) $\left(\tan^{-1}(\sin^{-1}x)\right)' = (\tan^{-1})'(\sin^{-1}x)(\sin^{-1}x)' = \frac{1}{(1+(\sin^{-1}x)^2)\sqrt{1-x^2}}$

(68) $\left(\tan^{-1}(\sin^{-1}x^2)\right)' = (\tan^{-1})'(\sin^{-1}x^2)(\sin^{-1})'(x^2)(x^2)' = \frac{2x}{(1+(\sin^{-1}x^2)^2)\sqrt{1-x^4}}$

(69) $\left(\log(\tan^{-1}(\sin^{-1}x))\right)' = (\log)'(\tan^{-1}(\sin^{-1}x))(\tan^{-1}(\sin^{-1}x))' = \frac{1}{\tan^{-1}(\sin^{-1}x)(1+(\sin^{-1}x)^2)\sqrt{1-x^2}}$
((67) の結果を用いた)

(70) $\left(\sqrt{\log x}\right)' = \frac{1}{2x\sqrt{\log x}}$

(71) $\left(\sin^{-1}\left(\sqrt{\log x}\right)\right)' = (\sin^{-1}),\left(\sqrt{\log x}\right)\left(\sqrt{\log x}\right)' = \frac{1}{2x\sqrt{\log x}\sqrt{1-\log x}}$ ((70) の結果を用いた)

(72) $\left(\sqrt{e^x\log x}\right)' = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)'\sqrt{\log x} + e^{\frac{x}{2}}\left(\sqrt{\log x}\right)' = \frac{e^{\frac{x}{2}}(x\log x+1)}{2x\sqrt{\log x}}$ ((70) の結果を用いた)

(73) $\left(\sin^{-1}(\log(\tan^{-1}x))\right)' = (\sin^{-1}\circ\log)'(\tan^{-1}x)(\tan^{-1}x)' = \frac{1}{\tan^{-1}x\sqrt{1-(\log(\tan^{-1}x))^2}(1+x^2)}$ ((62) の結果を用いた)

(74) $\left(\sin^{-1}\left(\sqrt{e^x\log x}\right)\right)' = (\sin^{-1})'\left(\sqrt{e^x\log x}\right)\left(\sqrt{e^x\log x}\right)' = \frac{e^{\frac{x}{2}}(x\log x+1)}{2x\sqrt{\log x(1-e^x\log x)}}$ ((72) の結果を用いた)

(75) $\left(\sin^{-1}(e^x)\right)' = (\sin^{-1})'(e^x)(e^x)' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(76) $\left(\tan^{-1}(e^x)\right)' = (\tan^{-1})'(e^x)(e^x)' = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$

(77) $\left(\tan^{-1}(\log(\sin^{-1}x))\right)' = (\tan^{-1})'(\log(\sin^{-1}x))(\log(\sin^{-1}x))' = \frac{1}{\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}(1+(\log(\sin^{-1}x))^2)}$ ((61) の結果を用いた)

(78) $\left(\sin^{-1}\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = (\sin^{-1})'\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = \frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

2. (1) $f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}x\log|x| = 0$.

(2) $x \neq 0$ ならば $f(x) = x^2\log|x|$ だから, このとき $f'(x) = 2x\log|x| + x$ である. 従って $\lim_{x\to 0}f'(x) = \lim_{x\to 0}(2x\log|x|+x) = 0$.

(3) (1), (2) の結果から $\lim_{x\to 0}f'(x) = 0 = f'(0)$ だから f' は 0 で連続である.

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}(2\log|x|+1) = -\infty$ だから f' は 0 で微分不可能である.

3. (1) $0 < x < y$ ならば $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ と $0 < e^{-y} < e^{-x}$ が成り立ち, $f(y) = \frac{e^{-x}}{y} < \frac{e^{-x}}{x}$ が得られるため, f は狭義単調減少関数である. f は $(0,\infty)$ 上の連続関数 $\frac{1}{x}$ と e^{-x} の積だから連続関数である. $y > 0$ に対し, $0 < z < \frac{1}{2y}$ かつ $z < \log 2$ をみたす z を選べば $ze^z < \frac{e^{\log 2}}{2y} = \frac{1}{y}$ だから $y < \frac{e^{-z}}{z} = f(z)$ であり, $f\left(\frac{1}{y}\right) = ye^{-\frac{1}{y}} < y$ が成り立つため, 中間値の定理によって $y = f(x)$ をみたす x が z と $\frac{1}{y}$ の間に存在するため, f は全射でもある.

(2) $f'(x) = -\frac{(x+1)e^{-x}}{x^2}$, $f(1) = \frac{1}{e}$ より 逆関数の微分の公式から, $(f^{-1})'\left(\frac{1}{e}\right) = (f^{-1})'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{2e^{-1}} = -\frac{e}{2}$.

4. (1) $f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$ で, $f(0)=0$ だから $\left(f^{-1}\right)'(0)=\left(f^{-1}\right)'(f(0))=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{e}$, $\left(f^{-1}\right)'(e)=\left(f^{-1}\right)'(f(1))=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{2e}$.

(2) $f(x)=e^{x\log x}$ だから $f'(x)=e^{x\log x}(\log x+1)=x^x(\log x+1)$ である. 従って $f'(e)=e^e(\log e+1)=2e^e$ だから $\left(f^{-1}\right)'(e^e)=\left(f^{-1}\right)'(f(e))=\dfrac{1}{f'(e)}=\dfrac{1}{2e^e}$.

(3) $f(x)=e^{\frac{\log x}{x}}$ だから $f'(x)=e^{\frac{\log x}{x}}\dfrac{1-\log x}{x^2}=\dfrac{x^{\frac{1}{x}}(1-\log x)}{x^2}$ である. 従って $f'\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{e^2(1+\log e)}{e^e}=\dfrac{2}{e^{e-2}}$ だから $\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{1}{e^e}\right)=\left(f^{-1}\right)'\left(f\left(\dfrac{1}{e}\right)\right)=\dfrac{1}{f'\left(\frac{1}{e}\right)}=\dfrac{e^{e-2}}{2}$.

(4) $f'(x)=\dfrac{\left(\frac{6}{\pi}\sin^{-1}x\right)'}{1+\left(\frac{6}{\pi}\sin^{-1}x\right)^2}=\dfrac{6}{\pi\sqrt{1-x^2}\left(1+\left(\frac{6}{\pi}\sin^{-1}x\right)^2\right)}$ より, $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{6}{\sqrt{3}\pi}$ だから, 逆関数の微分法により $(f^{-1})'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=(f^{-1})'\left(f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=\dfrac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}$.

(5) $f(1)=\sin^{-1}\left(\dfrac{2}{\pi}\tan^{-1}1\right)=\sin^{-1}\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$ であり, $f'(x)=1+\dfrac{2}{\pi(1+x^2)\sqrt{1-\left(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}x\right)^2}}$ より

$f'(1)=1+\dfrac{2}{\sqrt{3}\pi}=\dfrac{\sqrt{3}\pi+2}{\sqrt{3}\pi}$ である. 従って, $(f^{-1})'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=(f^{-1})'(f(1))=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt{3}\pi+2}$.

5. (1) $f'(0)=\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}x\cos^{-1}(1-x^2)=0$, $g'(0)=\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\cos^{-1}(1-x^2)=0$.

(2) $x\neq0$ ならば $f'(x)=2x\cos^{-1}(1-x^2)+\dfrac{2x^3}{|x|\sqrt{2-x^2}}=\begin{cases}2x\cos^{-1}(1-x^2)+\dfrac{2x^2}{\sqrt{2-x^2}} & x>0\\ 2x\cos^{-1}(1-x^2)-\dfrac{2x^2}{\sqrt{2-x^2}} & x<0\end{cases}$ だから

$\displaystyle\lim_{x\to+0}f'(x)=\lim_{x\to+0}\left(2x\cos^{-1}(1-x^2)+\frac{2x^2}{\sqrt{2-x^2}}\right)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to-0}f'(x)=\lim_{x\to-0}\left(2x\cos^{-1}(1-x^2)-\frac{2x^2}{\sqrt{2-x^2}}\right)=0$ となるため $\displaystyle\lim_{x\to0}f'(x)=0$ である.

$x\neq0$ ならば $g'(x)=\cos^{-1}(1-x^2)+\dfrac{2x^2}{|x|\sqrt{2-x^2}}=\begin{cases}\cos^{-1}(1-x^2)+\dfrac{2x}{\sqrt{2-x^2}} & x>0\\ \cos^{-1}(1-x^2)-\dfrac{2x}{\sqrt{2-x^2}} & x<0\end{cases}$ だから

$\displaystyle\lim_{x\to+0}g'(x)=\lim_{x\to+0}\left(\cos^{-1}(1-x^2)+\frac{2x}{\sqrt{2-x^2}}\right)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to-0}g'(x)=\lim_{x\to-0}\left(\cos^{-1}(1-x^2)-\frac{2x}{\sqrt{2-x^2}}\right)=0$ となるため $\displaystyle\lim_{x\to0}g'(x)=0$ である.

(3) (1) の結果と (2) より $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\left(2\cos^{-1}(1-x^2)+\frac{2x}{\sqrt{2-x^2}}\right)=0$,
$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to-0}\left(2\cos^{-1}(1-x^2)-\frac{2x}{\sqrt{2-x^2}}\right)=0$ となるため $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=0$ である. 故に f' は 0 で微分可能である.

(1) と (2), および第 3 回の演習問題 1 の (19) の結果を用いれば
$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\left(\frac{\cos^{-1}(1-x^2)}{x}+\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}\right)=2\sqrt{2}$,
$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\lim_{x\to-0}\left(\frac{\cos^{-1}(1-x^2)}{x}-\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}\right)=-2\sqrt{2}$ となるため, g' は 0 で微分不可能である.

(4) $(f^{-1})'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=(f^{-1})'\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=\dfrac{1}{f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}\pi}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}\pi+\sqrt{6}}$

$(g^{-1})'\left(\dfrac{\pi}{3\sqrt{2}}\right)=(g^{-1})'\left(g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=\dfrac{1}{g'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\dfrac{1}{\frac{\pi}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}}=\dfrac{3}{\pi+2\sqrt{3}}$

6. $F:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ を $F(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} & x\neq a\\ 0 & x=a\end{cases}$ により定義すれば,

$$\lim_{x\to a+0}F(x)=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=0=F(a)$$

だから F は a で連続である. f は微分可能だから, F は a 以外の点でも連続であるため, F は連続関数である. 従って, 最大値・最小値の定理より F の最大値が存在する. $F(c)$ $(c\in[a,b])$ を F の最大値とすれば $f(b)>f(a)$ より $F(b)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>0=F(a)$ だから $c>a$ である. $c=b$ と仮定すれば, $x\in(a,b)$ に対し,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=F(x)\leqq F(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

が成り立つため, $f(x)\leqq\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)+f(b)$ より $\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}\geqq\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ が得られる. 従って $f'(b)=\displaystyle\lim_{x\to b-0}\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\geqq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$ であるが, これは $f'(b)=0$ であるという仮定と矛盾するため, $c\neq b$ である. 故に $a<c<b$ であり, F は (a,b) で微分可能だから $F'(c)=0$ である. $x\in(a,b)$ ならば $F'(x)=\dfrac{(x-a)f'(x)-f(x)}{(x-a)^2}$ だから $\dfrac{(c-a)f'(c)-f(c)}{(c-a)^2}=0$ となり, $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(c)$ が得られる.

7. $\left(\dfrac{f(x)}{x^n(1+x^m)^l}\right)'=\dfrac{x(1+x^m)f'(x)-((lm+n)x^m+n)f(x)}{x^{n+1}(1+x^m)^{l+1}}$ だから, $\left(\dfrac{f(x)}{x^n(1+x^m)^l}\right)'=\dfrac{1}{x^{n+1}(1+x^m)^{l+1}}$ が成り立つためには, 次の等式が成り立つことが必要十分である.

$$x(1+x^m)f'(x)-((lm+n)x^m+n)f(x)=1\ \cdots(i)$$

$f(x)$ を N 次の多項式と仮定して $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{N}a_kx^k$ $(a_N\neq0)$ とおけば,

$$\begin{aligned}x(1+x^m)f'(x)-((lm+n)x^m+n)f(x)&=\sum_{k=0}^{N}ka_k(1+x^m)x^k-\sum_{k=0}^{N}a_k((lm+n)x^m+n)x^k\\&=\sum_{k=0}^{N}a_k(k-n)x^k+\sum_{k=0}^{N}a_k(k-lm-n)x^{k+m}\\&=\sum_{k=0}^{N}a_k(k-n)x^k+\sum_{k=m}^{m+N}a_{k-m}(k-lm-m-n)x^k\end{aligned}$$

だから, (i) より定数項と最高次の係数を比較すれば $-na_0=1$ かつ $a_N(N-lm-n)=0$ である. 従って $lm+n$ が 0 以上の整数の場合, $a_0=-\dfrac{1}{n}$, $N=lm+n$ である. $lm+n$ が 0 以上の整数ではない場合は (i) を満たす多項式関数 f は存在しない. $lm+n=0$ の場合は f は定数値関数 $f(x)=-\dfrac{1}{n}$ である. $lm+n$ が自然数の場合, (i) は次の等式と同値である.

$$\sum_{k=1}^{lm+n}a_k(k-n)x^k+\frac{lm+n}{n}x^m+\sum_{k=m+1}^{lm+m+n-1}a_{k-m}(k-lm-m-n)x^k=0\ \cdots(ii)$$

故に $lm+n<m$ ならば (ii) を満たす多項式関数 f は存在しないため, $m\leqq lm+n$ の場合を考える. このとき, (ii) は

$$\sum_{k=1}^{m-1}a_k(k-n)x^k+\left(a_m(m-n)+\frac{lm+n}{n}\right)x^m+\sum_{k=m+1}^{lm+n}a_k(k-n)x^k+\sum_{k=m+1}^{lm+m+n-1}a_{k-m}(k-lm-m-n)x^k=0$$

となるため, $n=m$ ならば (ii) を満たす多項式関数 f は存在しない. $n\neq m$ の場合, $a_1=a_2=\cdots=a_{m-1}=0$, $a_m=\dfrac{lm+n}{n(n-m)}$ であり, 次の等式が成り立つ.

$$\sum_{k=m+1}^{lm+n}(a_k(k-n)+a_{k-m}(k-lm-m-n))x^k+\sum_{k=lm+n+1}^{lm+m+n-1}a_{k-m}(k-lm-m-n)x^k=0$$

故に $k=1,2,\dots,lm+n-m$ ならば $a_{k+m}(k+m-n)=a_k(lm+n-k)$ であり, $s=1,2,\dots,m-1$ ならば $a_{lm+n-s}=0$ である. $lm+n$ を m で割った商を q, 余りを r とすれば「$i=0,1,\dots,q-1$ かつ $s=1,2,\dots,m-1$」または「$i=q$ かつ $s=1,2,\dots,r-1$」に対して $a_{lm+n-(im+s)}=0$ である. 実際, $i=0$ の場合は $s=1,2,\dots,m-1$ に対して $a_{lm+n-(im+s)}=0$ であり, $i=j<q$ のときに $s=1,2,\dots,m-1$ に対して $a_{lm+n-(im+s)}=0$ であると仮定すれば, $jm+s\leqq lm+n-m-1=(q-1)m+r-1$, すなわち「$j<q-1$ かつ $s=1,2,\dots,m-1$」または「$j=q-1$ かつ $s=1,2,\dots,r-1$」ならば $a_{lm+n-((j+1)m+s)}=\dfrac{lm-jm-s}{(j+1)m+s}a_{lm+n-(jm+s)}=0$ である. 従って, $lm+n$ が m の倍数でないならば $r\neq 0$ だから $a_m=a_{lm+n-((q-1)m+r)}=0$ となって, $a_m=\dfrac{lm+n}{n(n-m)}\neq 0$ と矛盾が生じるため, (i) を満たす多項式関数 f は存在しない. $lm+n$ は m の倍数として, $b_i=a_{lm+n-im}$ によって数列 $b_0,b_1,\dots,b_q$ を定めれば, $b_q=a_0=-\dfrac{1}{n}$, $b_{q-1}=a_m=\dfrac{lm+n}{n(n-m)}$ であり, $i=0,1,\dots,q-2$ に対して $b_{i+1}=\dfrac{l-i}{i+1}b_i$ が成り立つ. 故に

$$b_i=\frac{l-(i-1)}{i}b_{i-1}=\frac{(l-(i-1))(l-(i-2))}{i(i-1)}b_{i-2}=\cdots=\frac{(l-(i-1))(l-(i-2))\cdots l}{i!}b_0=\binom{l}{i}b_0$$

が得られ, $\dbinom{l}{q-1}b_0=b_{q-1}=\dfrac{qm}{n(n-m)}\neq 0$ より, l は $q-2$ 以下の自然数ではなく, $b_0=\dfrac{1}{\binom{l}{q-1}\frac{n(n-m)}{lm+n}}=\dfrac{1}{\binom{l}{q-1}\frac{(l-q+1)(-n)}{q}}=-\dfrac{1}{n\binom{l}{q}}$ だから $b_i=-\dfrac{\binom{l}{i}}{n\binom{l}{q}}$ が成り立ち, $a_{im}=-\dfrac{\binom{l}{q-i}}{n\binom{l}{q}}$ が得られる. $l-q+1=1-\dfrac{n}{m}$ であることに注意すれば, 「$lm+n=qm$ となる 0 以上の整数 q が存在し, かつ l は $q-1$ 以下の自然数ではない.」ことが, $\left(\dfrac{f(x)}{x^n(1+x^m)^l}\right)'=\dfrac{1}{x^{n+1}(1+x^m)^{l+1}}$ を満たす x の多項式 $f(x)$ が存在するための条件である. このとき, $f(x)$ は $f(x)=-\sum_{i=0}^{q}\dfrac{1}{n}\dbinom{l}{q}^{-1}\dbinom{l}{q-i}x^{im}$ によって与えられる.

微積分学 I 演習問題　第 5 回　高次導関数

1. 次の関数の n 次導関数を求めよ．ただし, m は自然数, a, b, c, p, q, α, β は実数で, (5) では $ap \neq 0$, (7), (8) では $\alpha \neq 1$, $\alpha > 0$ とする．

(1) $\log|x^3-3x+2|$　(2) $\dfrac{x+1}{x-1}$　(3) $(e^{2x}-e^{-x})^3$　(4) $\dfrac{x^3}{1-x^2}$

(5) $\dfrac{1}{apx^2+(aq+bp)x+bq}$　(6) $\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$　(7) α^x　(8) $\log_\alpha x$

(9) $(ax^2+bx+c)\sin(px+q)$　(10) $e^{ax}\sin(bx+c)$　(11) $e^{ax}\cos(bx+c)$　(12) $\sin^3 x$

(13) $(ax^2+bx+c)\cos(px+q)$　(14) $(ax^2+bx+c)e^{px}$　(15) $\sin ax\cos bx$　(16) $x^2\sin^2 x$

(17) $(ax^2+bx+c)\log(px+q)$　(18) x^3e^{ax}　(19) x^4e^{ax}　(20) $e^x\log(1+x)$

(21) $(ax^2+bx+c)\log\big(|x-p|^\alpha|x-q|^\beta\big)$　(22) $x^3\sin 3x$　(23) $x^4\cos 2x$　(24) $(x^2-1)^m$

2. $f:(-1,1)\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=\sin^{-1}x$ で定める．

(1) $\sqrt{1-x^2}f'(x)=1$ の両辺を x で微分することによって $(1-x^2)f''(x)-xf'(x)=0$ を示せ．

(2) n を 2 以上の整数とするとき, (1) で得た等式の両辺を x で $n-2$ 回微分することによって次の等式を示せ．

$$(1-x^2)f^{(n)}(x)-(2n-3)xf^{(n-1)}(x)-(n-2)^2f^{(n-2)}(x)=0$$

(3) $f^{(n)}(0)$ を求めよ．(n が偶数の場合と奇数の場合に分けよ.)

3. 次で与えられる関数 f の n 次導関数 $f^{(n)}$ について, 前問に倣って $f^{(n)}(x)$ の漸化式を導き, $f^{(n)}(0)$ を求めよ．ただし, (3), (4) の c は正の実数とする．

(1) $f(x)=e^{x^2}$　(2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$　(3) $f(x)=\sqrt{c^2+x^2}$　(4) $f(x)=\sqrt{c^2-x^2}$

(5) $f(x)=e^{x^3}$　(6) $f(x)=x^2e^{x^2}$　(7) $f(x)=\log\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)$　(8) $f(x)=\log(x^2+1)$

(9) $f(x)=\tan^{-1}x$　(10) $f(x)=e^{c\sin^{-1}x}$　(11) $f(x)=\log(x^3+1)$　(12) $f(x)=e^x\log(1+x)$

(13) $f(x)=(\sin^{-1}x)^2$　(14) $f(x)=(\log(1+x))^2$

4. n を 0 以上の整数とする．$\dfrac{x^n}{n!}(\log x-a_n)$ の n 次導関数が $\log x$ になるような, 実数の定数 a_n を求めよ．

5. 0 以外の実数全体を定義域とする関数 f, g を $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ で定義する．

(1) 0 以上の整数 n に対し, 等式 $f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}f(x)-\dfrac{Q_n(x)}{x^{2n}}g(x)$, $g^{(n)}(x)=\dfrac{Q_n(x)}{x^{2n}}f(x)+\dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}g(x)$ を満たす x の多項式 $P_n(x)$, $Q_n(x)$ が存在することを示し, $P_n(x)$, $Q_n(x)$ を用いて $P_{n+1}(x)$ と $Q_{n+1}(x)$ を表せ．

(2) $n\geqq 2$ に対し $P_n(x)$, $Q_n(x)$ の次数と最高次の係数を求めよ．

(3) $n\geqq 1$ に対し $P_{2n}(x)$ と $Q_{2n+1}(x)$ は x の奇数次の項を含まず, $P_{2n+1}(x)$ と $Q_{2n}(x)$ は x の偶数次の項を含まないことを示せ．

6. (1) 0 を含む開区間 I で定義された連続関数 f と自然数 n に対して関数 $g_n:I\to\boldsymbol{R}$ を $g_n(x)=x^nf(x)$ で定義する．f の定義域を $I-\{0\}$ に制限した関数は n 回微分可能であり, 自然数 l と $k=0,1,\ldots,n-1$ に対して $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^{kl}f^{(k)}(x)=0$ が成り立つならば g_{ln} は n 回微分可能であることを示せ．さらに $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^{ln}f^{(n)}(x)=0$ ならば g_{ln} の n 次導関数は 0 で連続であることを示せ．

(2) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ が次の (i), (ii) で与えられる関数の場合, 任意の自然数 n に対して $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^nf^{(n)}(x)=0$ が成り立ち, (iii) で与えられる関数の場合, 任意の自然数 n に対して $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^{2n}f^{(n)}(x)=0$ が成り立つことを示せ．

$$(i)\ f(x)=|x| \qquad (ii)\ f(x)=\begin{cases}x\log|x| & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases} \qquad (iii)\ f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

7. (発展問題) (1) $f(x)=\tan^{-1}x$ に対して $f^{(n)}(x)=(n-1)!\cos^n f(x)\sin\left(n\left(f(x)+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ が成り立つことを示し,

この結果を用いて $\dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{1}{1+x^2}=n!(1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}\sin\left((n+1)\left(\tan^{-1}x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ が成り立つことを示せ.

(2) $g(x)=\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$ に対して $g^{(n)}(x)=(-1)^n(n-1)!\sin^n g(x)\sin(ng(x))$ が成り立つことを示せ.

8. (発展問題) f が n 回微分可能ならば $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ が成り立つこと示せ.

9. (発展問題) $x^{n-1}\log x,\ x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$ の n 次導関数を求めよ.

10. (発展問題) $f,g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}} & x>0\\ 0 & x\leqq 0\end{cases}$ で定める. また, $x\neq 0$ に対し, $F_n(x)=x^{3n}e^{\frac{1}{x^2}}f^{(n)}(x)$ とおき, $x>0$ に対し, $G_n(x)=x^{2n}e^{\frac{1}{x}}g^{(n)}(x)$ とおく.

(1) $F_1(x)$, $G_1(x)$ を求めよ.

(2) $F_n'(x)=\dfrac{1}{x^3}(F_{n+1}(x)+(3nx^2-2)F_n(x))$, $G_n'(x)=\dfrac{1}{x^2}(G_{n+1}(x)+(2nx-1)G_n(x))$ を示せ.

(3) $F_n(x)$ は x の $2(n-1)$ 次の多項式であり, $G_n(x)$ は x の $n-1$ 次の多項式であることを示せ.

(4) n による数学的帰納法で $f^{(n)}(0)=g^{(n)}(0)=0$ であることを示せ. 従って f, g は無限回微分可能である.

第 5 回の演習問題の解答

1. (1) $\log|x^3-3x+2| = \log|(x-1)^2(x+2)| = 2\log|x-1|+\log|x+2|$ だから, $n \geqq 1$ ならば $(\log|x^3-3x+2|)^{(n)} = 2(\log|x-1|)^{(n)} + (\log|x+2|)^{(n)} = \dfrac{2(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n} + \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+2)^n}$

(2) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{(n)} = \left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{(n)} = \dfrac{2(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$

(3) $\left((e^{2x}-e^{-x})^3\right)^{(n)} = \left(e^{6x}-3e^{3x}+3-e^{-3x}\right)^{(n)} = 6^n e^{6x} - 3^{n+1}e^{3x} - (-3)^n e^{-3x}$

(4) $\left(\dfrac{x^3}{1-x^2}\right)^{(n)} = \left(-x+\dfrac{x}{1-x^2}\right)^{(n)} = \left(-x-\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{1}{2(x+1)}\right)^{(n)} = (-x)^{(n)} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{(n)} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{(n)}$ より $\left(\dfrac{x^3}{1-x^2}\right)' = -1+\dfrac{1}{2(x-1)^2}+\dfrac{1}{2(x+1)^2}$. $n \geqq 2$ ならば $\left(\dfrac{x^3}{1-x^2}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n+1}n!}{2}\left(\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}+\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$.

(5) $aq-bp \neq 0$ の場合, $\left(\dfrac{1}{apx^2+(aq+bp)x+bq}\right)^{(n)} = \left(\dfrac{1}{(ax+b)(px+q)}\right)^{(n)} = \dfrac{1}{aq-bp}\left(\dfrac{a}{ax+b}-\dfrac{p}{px+q}\right)^{(n)} = \dfrac{a}{aq-bp}\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)} - \dfrac{p}{aq-bp}\left(\dfrac{1}{px+q}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{aq-bp}\left(\dfrac{a^{n+1}}{(ax+b)^{n+1}}-\dfrac{p^{n+1}}{(px+q)^{n+1}}\right)$.
$aq-bp=0$ の場合, $q=\dfrac{bp}{a}$ だから $\left(\dfrac{1}{apx^2+(aq+bp)x+bq}\right)^{(n)} = \left(\dfrac{a}{p(ax+b)^2}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n a^{n+1}(n+1)!}{p(ax+b)^{n+2}}$.

(6) $\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ だから $\left(\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$ であり, $n \geqq 2$ ならば $\left(\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n}\left((x+1)^{\frac{1}{2}-n}-(x-1)^{\frac{1}{2}-n}\right)$.

(7) $(\alpha^x)^{(n)} = \left(e^{x\log\alpha}\right)^{(n)} = (\log\alpha)^n e^{x\log\alpha} = (\log\alpha)^n \alpha^x$

(8) $(\log_\alpha x)^{(n)} = \left(\dfrac{\log x}{\log\alpha}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n\log\alpha}$

(9) $\left((ax^2+bx+c)\sin(px+q)\right)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\dbinom{n}{k}(ax^2+bx+c)^{(k)}(\sin(px+q))^{(n-k)} =$
$p^n(ax^2+bx+c)\sin\left(px+q+\dfrac{\pi n}{2}\right)+np^{n-1}(2ax+b)\sin\left(px+q+\dfrac{\pi(n-1)}{2}\right)+ap^{n-2}n(n-1)\sin\left(px+q+\dfrac{\pi(n-2)}{2}\right)$
$= p^{n-2}(p^2(ax^2+bx+c)-an(n-1))\sin\left(px+q+\dfrac{\pi n}{2}\right) - np^{n-1}(2ax+b)\cos\left(px+q+\dfrac{\pi n}{2}\right)$

(10) $(e^{ax}\sin(bx+c))' = e^{ax}(a\sin(bx+c)+b\cos(bx+c))$ だから, $\cos\gamma = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\gamma = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす $0 \leqq \gamma < 2\pi$ をとれば, $(e^{ax}\sin(bx+c))' = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\gamma\sin(bx+c)+\sin\gamma\cos(bx+c)) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+c+\gamma)$ である. そこで $(e^{ax}\sin(bx+c))^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+c+n\gamma)$ となることを n による帰納法で示す. $n=1$ の場合に主張が成り立つことは上でみた. n のとき主張が成り立つと仮定して, $(e^{ax}\sin(bx+c))^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+c+n\gamma)$ の両辺を微分すれば, $a=\sqrt{a^2+b^2}\cos\gamma$, $b=\sqrt{a^2+b^2}\sin\gamma$ より $(e^{ax}\sin(bx+c))^{(n+1)} =$
$(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}(a\sin(bx+c+n\gamma)+b\cos(bx+c+n\gamma)) = (a^2+b^2)^{\frac{n+1}{2}}e^{ax}(\cos\gamma\sin(bx+c+n\gamma)+\sin\gamma\cos(bx+c+n\gamma)) =$
$(a^2+b^2)^{\frac{n+1}{2}}e^{ax}\sin(bx+c+(n+1)\gamma)$ となり, $n+1$ のときも主張が成り立つ.
[注意] ライプニッツの公式を用いれば $(e^{ax}\sin(bx+c))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}a^k b^{n-k}e^{ax}\sin\left(bx+c+\dfrac{\pi n}{2}\right)$ が得られるため, 上の結果から等式 $\sum_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}a^k b^{n-k}\sin\left(bx+c+\dfrac{\pi n}{2}\right) = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+c+n\gamma)$ が得られる.

(11) $(e^{ax}\cos(bx+c))' = e^{ax}(a\cos(bx+c)-b\sin(bx+c))$ だから, $\cos\gamma = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\gamma = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす $0 \leqq \gamma < 2\pi$ をとれば, $(e^{ax}\cos(bx+c))' = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\gamma\cos(bx+c)-\sin\gamma\sin(bx+c)) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(bx+c+\gamma)$ である. そこで $(e^{ax}\cos(bx+c))^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\cos(bx+c+n\gamma)$ となることを n による帰納法で示す. $n=1$ の場合に主張が成り立つことは上でみた. n のとき主張が成り立つと仮定して, $(e^{ax}\cos(bx+c))^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\cos(bx+c+n\gamma)$ の両辺を微分すれば, $a=\sqrt{a^2+b^2}\cos\gamma$, $b=\sqrt{a^2+b^2}\sin\gamma$ より $(e^{ax}\cos(bx+c))^{(n+1)} =$
$(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}(a\cos(bx+c+n\gamma)-b\sin(bx+c+n\gamma)) = (a^2+b^2)^{\frac{n+1}{2}}e^{ax}(\cos\gamma\cos(bx+c+n\gamma)-\sin\gamma\sin(bx+c+n\gamma)) =$
$(a^2+b^2)^{\frac{n+1}{2}}e^{ax}\cos(bx+c+(n+1)\gamma)$ となり, $n+1$ のときも主張が成り立つ.

[注意] ライプニッツの公式を用いれば $(e^{ax}\cos(bx+c))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}e^{ax}\cos\Big(bx+c+\dfrac{\pi n}{2}\Big)$ が得られるため, 上の結果から等式 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\cos\Big(bx+c+\dfrac{\pi n}{2}\Big) = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos(bx+c+n\gamma)$ が得られる.

(12) $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$ より $\sin^3 x = \dfrac{1}{2}(\sin x - \sin x\cos 2x) = \dfrac{1}{2}\Big(\sin x - \dfrac{1}{2}\sin 3x + \dfrac{1}{2}\sin x\Big) = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{1}{4}\sin 3x$. 故に $(\sin^3 x)^{(n)} = \Big(\dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{1}{4}\sin 3x\Big)^{(n)} = \dfrac{3}{4}\sin\Big(x+\dfrac{n\pi}{2}\Big) - \dfrac{3^n}{4}\sin\Big(3x+\dfrac{n\pi}{2}\Big)$

(13) $\big((ax^2+bx+c)\cos(px+q)\big)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{k}(ax^2+bx+c)^{(k)}(\cos(px+q))^{(n-k)} =$
$p^n(ax^2+bx+c)\cos\Big(px+q+\dfrac{\pi n}{2}\Big)+np^{n-1}(2ax+b)\cos\Big(px+q+\dfrac{\pi(n-1)}{2}\Big)+ap^{n-2}n(n-1)\cos\Big(px+q+\dfrac{\pi(n-2)}{2}\Big)$
$= p^{n-2}(p^2(ax^2+bx+c)-an(n-1))\cos\Big(px+q+\dfrac{\pi n}{2}\Big) + np^{n-1}(2ax+b)\sin\Big(px+q+\dfrac{\pi n}{2}\Big)$

(14) $\big((ax^2+bx+c)e^{px}\big)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{k}(ax^2+bx+c)^{(k)}(e^{px})^{(n-k)} = p^n(ax^2+bx+c)e^{px}+np^{n-1}(2ax+b)e^{px}+ ap^{n-2}n(n-1)e^{px} = p^{n-2}e^{px}(ap^2x^2+p(bp+2an)x+an(n-1)+nbp+cp^2)$

(15) $(\sin ax\cos bx)^{(n)} = \Big(\dfrac{1}{2}(\sin((a+b)x)+\sin((a-b)x))\Big)^{(n)} =$
$\dfrac{1}{2}\Big((a+b)^n\sin\Big((a+b)x+\dfrac{n\pi}{2}\Big)+(a-b)^n\sin\Big((a-b)x+\dfrac{n\pi}{2}\Big)\Big)$

(16) $(x^2\sin^2 x)^{(n)} = \Big(\dfrac{x^2-x^2\cos 2x}{2}\Big)^{(n)} = \dfrac{1}{2}(x^2)^{(n)} - \dfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(x^2)^{(i)}(\cos 2x)^{(n-i)} =$
$\dfrac{1}{2}(x^2)^{(n)} - 2^{n-1}x^2\cos\Big(2x+\dfrac{\pi n}{2}\Big) - 2^{n-1}nx\cos\Big(2x+\dfrac{\pi(n-1)}{2}\Big) - 2^{n-3}n(n-1)\cos\Big(2x+\dfrac{\pi(n-2)}{2}\Big) =$
$\dfrac{1}{2}(x^2)^{(n)} - 2^{n-3}(4x^2-n(n-1))\cos\Big(2x+\dfrac{\pi n}{2}\Big) - 2^{n-1}nx\sin\Big(2x+\dfrac{\pi n}{2}\Big)$ より
$(x^2\sin^2 x)' = x + x^2\sin 2x - x\cos 2x$, $(x^2\sin^2 x)'' = 1+(2x^2-1)\cos 2x + 4x\sin 2x$ であり,
$n \geqq 3$ ならば $(x^2\sin^2 x)^{(n)} = -2^{n-3}(4x^2-n(n-1))\cos\Big(2x+\dfrac{\pi n}{2}\Big) - 2^{n-1}nx\sin\Big(2x+\dfrac{\pi n}{2}\Big)$.

(17) 与えられた関数を微分してゆく. $((ax^2+bx+c)\log(px+q))' = \dfrac{p(ax^2+bx+c)}{px+q} + (2ax+b)\log(px+q) = ax+b-\dfrac{aq}{p}+\dfrac{cp-bq+\frac{aq^2}{p}}{px+q}+(2ax+b)\log(px+q)$, $((ax^2+bx+c)\log(px+q))'' = a-\dfrac{cp^2-bpq+aq^2}{(px+q)^2}+\dfrac{p(2ax+b)}{px+q}+ 2a\log(px+q) = 3a-\dfrac{cp^2-bpq+aq^2}{(px+q)^2}+\dfrac{bp-2aq}{px+q}+2a\log(px+q)$, $n \geqq 3$ ならば $((ax^2+bx+c)\log(px+q))^{(n)} =$
$\Big(3a-\dfrac{cp^2-bpq+aq^2}{(px+q)^2}+\dfrac{bp-2aq}{px+q}+2a\log(px+q)\Big)^{(n-2)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!p^{n-2}(cp^2-bpq+aq^2)}{(px+q)^n}+$
$\dfrac{(-1)^np^{n-2}(n-2)!(bp-2aq)}{(px+q)^{n-1}}+\dfrac{(-1)^{n-1}2ap^{n-2}(n-3)!}{(px+q)^{n-2}} =$
$\dfrac{(-1)^{n-1}p^{n-2}(n-3)!((n-1)(n-2)(cp^2-bpq+aq^2)-(n-2)(bp-2aq)(px+q)+2a(px+q)^2)}{(px+q)^n} =$
$\dfrac{(-1)^{n-1}p^{n-2}(n-3)!(2ap^2x^2+(2apqn-bp^2(n-2))x+aq^2n(n-1)-bpqn(n-2)+cp^2(n-1)(n-2))}{(px+q)^n}$
(ライプニッツの公式から, $(x^m\log x)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(x^m)^{(i)}(\log x)^{(n-i)} =$
$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i-1}\binom{n}{i}m(m-1)\cdots(m-i+1)(n-i-1)!x^{m-n} + m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}\log x$).

(18) $(x^3e^{ax})^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(x^3)^{(i)}(e^{ax})^{(n-i)} = a^nx^3e^{ax}+3na^{n-1}x^2e^{ax}+3n(n-1)a^{n-2}xe^{ax}+ n(n-1)(n-2)a^{n-3}e^{ax} = a^{n-3}(a^3x^3+3a^2nx^2+3an(n-1)x+n(n-1)(n-2))e^{ax}$

(19) $(x^4e^{ax})^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(x^4)^{(i)}(e^{ax})^{(n-i)} =$
$a^nx^4e^{ax}+4na^{n-1}x^3e^{ax}+6n(n-1)a^{n-2}x^2e^{ax}+4n(n-1)(n-2)a^{n-3}xe^{ax}+n(n-1)(n-2)(n-3)a^{n-4}e^{ax} =$
$a^{n-4}(a^4x^4+4a^3nx^3+6a^2n(n-1)x^2+4an(n-1)(n-2)x+n(n-1)(n-2)(n-3))e^{ax}$
一般には $(x^me^{ax})^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(x^m)^{(i)}(e^{ax})^{(n-i)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}m(m-1)\cdots(m-i+1)a^{n-i}x^{m-i}e^{ax}$

(20) $(e^x\log(1+x))^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(e^x)^{n-i}(\log(1+x))^{(i)}=e^x\left(\log(1+x)-\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i n!}{i(n-i)!(1+x)^i}\right)$

(21) (17) の結果を用いれば, $\big((ax^2+bx+c)\log\big(|x-p|^{\alpha}|x-q|^{\beta}\big)\big)^{(n)}=$
$\big(\alpha(ax^2+bx+c)\log|x-p|\big)^{(n)}+\big(\beta(ax^2+bx+c)\log|x-q|\big)^{(n)}=$
$\dfrac{(-1)^{n-1}\alpha(n-3)!(2ax^2-(2apn+b(n-2))x+ap^2n(n-1)+bpn(n-2)+c(n-1)(n-2))}{(x-p)^n}+$
$\dfrac{(-1)^{n-1}\beta(n-3)!(2ax^2-(2aqn+b(n-2))x+aq^2n(n-1)+bqn(n-2)+c(n-1)(n-2))}{(x-q)^n}$

(22) $(x^3\sin 3x)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(x^3)^{(i)}(\sin 3x)^{(n-i)}=3^nx^3\sin\left(3x+\frac{\pi n}{2}\right)+3^nnx^2\sin\left(3x+\frac{\pi(n-1)}{2}\right)+$
$3^{n-1}n(n-1)x\sin\left(3x+\frac{\pi(n-2)}{2}\right)+3^{n-3}n(n-1)(n-2)\sin\left(3x+\frac{\pi(n-3)}{2}\right)=$
$(3^nx^3-3^{n-1}n(n-1)x)\sin\left(3x+\frac{\pi n}{2}\right)-(3^nnx^2-3^{n-3}n(n-1)(n-2)\cos\left(3x+\frac{\pi n}{2}\right)$

(23) $(x^4\cos 2x)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(x^4)^{(i)}(\cos 2x)^{(n-i)}=2^nx^4\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)+2^{n+1}nx^3\cos\left(2x+\frac{\pi(n-1)}{2}\right)+$
$3{\cdot}2^{n-1}n(n-1)x^2\cos\left(2x+\frac{\pi(n-2)}{2}\right)+2^{n-1}n(n-1)(n-2)x\cos\left(2x+\frac{\pi(n-3)}{2}\right)+2^{n-4}n(n-1)(n-2)(n-3)$
$\cos\left(2x+\frac{\pi(n-4)}{2}\right)=(2^nx^4-3{\cdot}2^{n-1}n(n-1)x^2+2^{n-4}n(n-1)(n-2)(n-3))\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)+$
$(2^{n+1}nx^3-2^{n-1}n(n-1)(n-2)x)\sin\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)$

(24) $((x^2-1)^m)^{(n)}=((x-1)^m(x+1)^m)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}((x-1)^m)^{(i)}((x+1)^m)^{(n-i)}=$
$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}m(m-1)\cdots(m-i+1)m(m-1)\cdots(m-n+i+1)(x-1)^{m-i}(x+1)^{m-n+i}$

2. (1) $\sqrt{1-x^2}f'(x)=1$ の左辺の微分は

$$\left(\sqrt{1-x^2}f'(x)\right)'=\sqrt{1-x^2}f''(x)-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f'(x)=\frac{(1-x^2)f''(x)-xf'(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

であり, 右辺の微分は 0 だから $(1-x^2)f''(x)-xf'(x)=0$ である.

(2) ライプニッツの公式より,

$$\begin{aligned}((1-x^2)f''(x))^{(n-2)}&=\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(1-x^2)^{(k)}(f'')^{(n-2-k)}(x)\\&=(1-x^2)f^{(n)}(x)-2(n-2)xf^{(n-1)}(x)-(n-2)(n-3)f^{(n-2)}(x),\\(xf'(x))^{(n-2)}&=\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(x)^{(k)}(f')^{(n-2-k)}(x)=xf^{(n-1)}(x)+(n-2)f^{(n-2)}(x)\end{aligned}$$

だから (1) で得た等式の両辺を x で $n-2$ 回微分すると左辺は
$((1-x^2)f^{(n)}(x)-2(n-2)xf^{(n-1)}(x)-(n-2)(n-3)f^{(n-2)}(x))-(xf^{(n-1)}(x)+(n-2)xf^{(n-2)}(x))=$
$(1-x^2)f^{(n)}(x)-(2n-3)xf^{(n-1)}(x)-(n-2)^2f^{(n-2)}(x)$ となるため, 示すべき等式が得られる.

(3) (2) で得た式に $x=0$ を代入すれば $f^{(n)}(0)-(n-2)^2f^{(n-2)}(0)=0$ を得る. $a_m=f^{(2m)}(0)$, $b_m=f^{(2m+1)}(0)$ によって数列 $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$ を定めると上式より, $a_m=4(m-1)^2a_{m-1}$, $b_m=(2m-1)^2b_{m-1}$ が得られる. $a_0=f(0)=0$ だから $a_m=4(m-1)^2a_{m-1}$ より帰納的に任意の m に対して $a_m=0$ であることがわかる. また, $b_0=f'(0)=1$ だから $b_m=(2m-1)^2b_{m-1}$ より帰納的に $b_m=((2m-1)!!)^2$ であることがわかる. 以上から $f^{(2m)}(0)=0$, $f^{(2m+1)}(0)=((2m-1)!!)^2$ である.

3. (1) $f'(x)=2xe^{x^2}$ だから $f'(x)=2xf(x)$ である. この両辺を $n-1$ 回微分すれば $f^{(n)}(x)=2xf^{(n-1)}(x)+2(n-1)f^{(n-2)}(x)$ が得られる. とくに $x=0$ のときは $f^{(n)}(0)=2(n-1)f^{(n-2)}(0)$ だから $a_m=f^{(2m)}(0)$, $b_m=f^{(2m+1)}(0)$ によって数列 $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$ を定めると上式より, $a_m=2(2m-1)a_{m-1}$, $b_m=4mb_{m-1}$ が得られる. $a_0=f(0)=1$ だから $a_m=2(2m-1)a_{m-1}$ より, $a_m=2(2m-1)a_{m-1}=2^2(2m-1)(2m-3)a_{m-2}=$

$\cdots = 2^m(2m-1)(2m-3)\cdots 1a_0 = 2^m(2m-1)!!$ となる．また, $b_0 = f'(0) = 0$ だから $b_m = 4mb_{m-1}$ より帰納的に任意の m に対して $b_m = 0$ であることがわかる．以上から $f^{(2m)}(0) = 2^m(2m-1)!! = \dfrac{(2m)!}{m!}$, $f^{(2m+1)}(0) = 0$ である．

(2) $(x^2+1)f(x) = x$ だから，この両辺を n 回微分すれば，$n=1$ のとき $(x^2+1)f'(x) + 2xf(x) = 1$, $n \geqq 2$ のとき $(x^2+1)f^{(n)}(x) + 2nxf^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0$ が得られる．とくに $x=0$ のときは $f^{(n)}(0) = -n(n-1)f^{(n-2)}(0)$ だから $a_m = f^{(2m)}(0)$, $b_m = f^{(2m+1)}(0)$ によって数列 $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$ を定めると上式より，$a_m = -2m(2m-1)a_{m-1}$, $b_m = -2m(2m+1)b_{m-1}$ が得られる．$a_0 = f(0) = 0$ だから $a_m = -2m(2m-1)a_{m-1}$ より帰納的に任意の m に対して $a_m = 0$ であることがわかる．また, $b_0 = f'(0) = 1$ だから $b_m = -(2m+1)(2m)b_{m-1}$ より, $b_m = -(2m+1)(2m)b_{m-1} = (-1)^2(2m+1)(2m)(2m-1)(2m-2)b_{m-2} = \cdots = (-1)^m(2m+1)(2m)\cdots 3\cdot 2b_0 = (-1)^m(2m+1)!$ となる．以上から $f^{(2m)}(0) = 0$, $f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m(2m+1)!$ である．

(3) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{c^2+x^2}}$ だから $(c^2+x^2)f'(x) = x\sqrt{c^2+x^2}$ となるため, $(c^2+x^2)f'(x) = xf(x)$ である．この両辺を $n-1$ 回微分すれば $(c^2+x^2)f^{(n)}(x) + 2(n-1)xf^{(n-1)}(x) + (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x) = xf^{(n-1)}(x) + (n-1)f^{(n-2)}(x)$ が得られる．従って $(c^2+x^2)f^{(n)}(x) + (2n-3)xf^{(n-1)}(x) + (n-1)(n-3)f^{(n-2)}(x) = 0$ が成り立つ．とくに $x=0$ のときは $f^{(n)}(0) = -\dfrac{1}{c^2}(n-1)(n-3)f^{(n-2)}(0)$ だから $a_m = f^{(2m)}(0)$, $b_m = f^{(2m+1)}(0)$ によって数列 $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$ を定めると上式より，$a_m = -\dfrac{(2m-1)(2m-3)}{c^2}a_{m-1}$, $b_m = -\dfrac{2m(2m-2)}{c^2}b_{m-1}$ が得られる．$a_0 = f(0) = c$ だから $a_m = -\dfrac{(2m-1)(2m-3)}{c^2}a_{m-1} = \left(-\dfrac{1}{c^2}\right)^2(2m-1)(2m-3)^2(2m-5)a_{m-2} = \cdots = \left(-\dfrac{1}{c^2}\right)^m(2m-1)(2m-3)^2\cdots 3^2\cdot 1^2(-1)a_0 = \dfrac{(-1)^{m-1}}{c^{2m-1}}(2m-1)((2m-3)!!)^2$ となる．また, $b_0 = f'(0) = 0$ だから $b_m = -\dfrac{2m(2m-2)}{c^2}b_{m-1}$ より，帰納的に任意の m に対して $b_m = 0$ であることがわかる．以上から $f^{(2m)}(0) = \dfrac{(-1)^{m-1}}{c^{2m-1}}(2m-1)((2m-3)!!)^2$, $f^{(2m+1)}(0) = 0$ である．

(4) $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{c^2-x^2}}$ だから $(c^2-x^2)f'(x) = -x\sqrt{c^2-x^2}$ となるため, $(c^2-x^2)f'(x) = -xf(x)$ である．この両辺を $n-1$ 回微分すれば $(c^2-x^2)f^{(n)}(x) - 2(n-1)xf^{(n-1)}(x) - (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x) = -xf^{(n-1)}(x) - (n-1)f^{(n-2)}(x)$ が得られる．従って $(c^2-x^2)f^{(n)}(x) - (2n-3)xf^{(n-1)}(x) - (n-1)(n-3)f^{(n-2)}(x) = 0$ が成り立つ．とくに $x=0$ のときは $f^{(n)}(0) = \dfrac{1}{c^2}(n-1)(n-3)f^{(n-2)}(0)$ だから $a_m = f^{(2m)}(0)$, $b_m = f^{(2m+1)}(0)$ によって数列 $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$ を定めると上式より, $a_m = \dfrac{(2m-1)(2m-3)}{c^2}a_{m-1}$, $b_m = \dfrac{2m(2m-2)}{c^2}b_{m-1}$ が得られる．$a_0 = f(0) = c$ だから $a_m = \dfrac{(2m-1)(2m-3)}{c^2}a_{m-1} = \left(\dfrac{1}{c^2}\right)^2(2m-1)(2m-3)^2(2m-5)a_{m-2} = \cdots =$ $\left(\dfrac{1}{c^2}\right)^m(2m-1)(2m-3)^2\cdots 3^2\cdot 1^2(-1)a_0 = -\dfrac{1}{c^{2m-1}}(2m-1)((2m-3)!!)^2$ となる．また, $b_0 = f'(0) = 0$ だから $b_m = \dfrac{2m(2m-2)}{c^2}b_{m-1}$ より，帰納的に任意の m に対して $b_m = 0$ であることがわかる．以上から $f^{(2m)}(0) = -\dfrac{1}{c^{2m-1}}(2m-1)((2m-3)!!)^2$, $f^{(2m+1)}(0) = 0$ である．

(5) $f'(x) = 3x^2e^{x^3}$ だから $f'(x) = 3x^2f(x)$ である．この両辺を $n-1$ 回微分すれば $f^{(n)}(x) = 3x^2f^{(n-1)}(x) + 6(n-1)xf^{(n-2)}(x) + 3(n-1)(n-2)f^{(n-3)}(x)$ が得られる．とくに $x=0$ のときは $f^{(n)}(0) = 3(n-1)(n-2)f^{(n-3)}(0)$ だから $a_m = f^{(3m)}(0)$, $b_m = f^{(3m+1)}(0)$, $c_m = f^{(3m+2)}(0)$ によって数列 $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$, $\{c_m\}_{m=0}^{\infty}$ を定めると上式より, $a_m = 3(3m-1)(3m-2)a_{m-1}$, $b_m = 3(3m)(3m-1)b_{m-1}$, $c_m = 3(3m+1)(3m)c_{m-1}$ が得られる．$a_0 = f(0) = 1$ だから $a_m = \dfrac{(3m)(3m-1)(3m-2)}{m}a_{m-1}$ より, $a_m = \dfrac{(3m)(3m-1)(3m-2)}{m}a_{m-1} = \dfrac{(3m)(3m-1)(3m-2)(3m-3)(3m-4)(3m-5)}{m(m-1)}a_{m-2} = \cdots = \dfrac{(3m)(3m-1)(3m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{m(m-1)\cdots 1}a_0 = \dfrac{(3m)!}{m!}$ となる．また, $b_0 = f'(0) = 0$, $c = f''(0) = 0$ だから $b_m = 3(3m)(3m-1)b_{m-1}$, $c_m = 3(3m+1)(3m)c_{m-1}$ より帰納的に任意の m に対して $b_m = c_m = 0$ であることがわかる．以上から $f^{(3m)}(0) = \dfrac{(3m)!}{m!}$, $f^{(3m+1)}(0) = f^{(3m+2)}(0) = 0$ である．

(6) $f'(x) = 2x^3e^{x^2} + 2xe^{x^2}$ の両辺を x 倍すれば $xf'(x) = 2x^4e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}$ だから $xf'(x) = 2(x^2+1)f(x)$ である．この両辺を $n-1$ 回微分すれば $xf^{(n)}(x) + (n-1)f^{(n-1)}(x) = 2(x^2+1)f^{(n-1)}(x) + 4(n-1)xf^{(n-2)}(x) + 2(n-1)(n-2)$

$f^{(n-3)}(x)$ が得られる．従って $xf^{(n)}(x)=(2x^2-n+3)f^{(n-1)}(x)+4(n-1)xf^{(n-2)}(x)+2(n-1)(n-2)f^{(n-3)}(x)$ である．とくに $x=0$ のときは $(n-3)f^{(n-1)}(0)=2(n-1)(n-2)f^{(n-3)}(0)$ だから $f^{(n)}(0)=\dfrac{2n(n-1)}{n-2}f^{(n-2)}(0)$ が 3 以上の n に対して成り立つ．$a_m=f^{(2m)}(0)$, $b_m=f^{(2m-1)}(0)$ によって数列 $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ を定めると上式より，2 以上の m に対して $a_m=\dfrac{(2m)(2m-1)}{m-1}a_{m-1}$, $b_m=\dfrac{2(2m-1)(2m-2)}{2m-3}b_{m-1}$ が得られる．$a_1=f''(0)=2$ だから $a_m=\dfrac{(2m)(2m-1)}{m-1}a_{m-1}=\dfrac{(2m)(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{(m-1)(m-2)}a_{m-2}=\cdots=\dfrac{(2m)(2m-1)\cdots4{\cdot}3}{(m-1)(m-2)\cdots1}a_1=\dfrac{(2m)!}{(m-1)!}$. また, $b_1=f'(0)=0$ だから $b_m=\dfrac{2(2m-1)(2m-2)}{2m-3}b_{m-1}$ より, 帰納的に任意の m に対して $b_m=0$ であることがわかる．以上から $m\geqq 1$ ならば $f^{(2m)}(0)=\dfrac{(2m)!}{(m-1)!}$, $f^{(2m-1)}(0)=0$ である．

(7) $f'(x)=\dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ より $(x^2+1)f'(x)=\sqrt{x^2+1}$. さらにこの両辺を微分すれば $(x^2+1)f''(x)+2xf'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ となるため, $(x^2+1)f''(x)+2xf'(x)=xf'(x)$, 従って $(x^2+1)f''(x)+xf'(x)=0$ が成り立つ．両辺を $n-2$ 回微分すれば $(x^2+1)f^{(n)}(x)+(2n-3)xf^{(n-1)}(x)+(n-2)^2f^{(n-2)}(x)=0$ が得られる．とくに $x=0$ のときは $f^{(n)}(0)=-(n-2)^2f^{(n-2)}(0)$ だから $a_m=f^{(2m)}(0)$, $b_m=f^{(2m+1)}(0)$ によって数列 $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$ を定めると上式より, $a_m=-4(m-1)^2a_{m-1}$, $b_m=-(2m-1)^2b_{m-1}$ が得られる．$a_0=f(0)=0$ だから $a_m=-4(m-1)^2a_{m-1}$ より, 帰納的に任意の m に対して $a_m=0$ であることがわかる．また, $b_0=f'(0)=1$ だから $b_m=-(2m-1)^2b_{m-1}$ より, $b_m=-(2m-1)^2b_{m-1}=(-1)^2(2m-1)^2(2m-3)^2b_{m-2}=\cdots=(-1)^m(2m-1)^2\cdots1^2b_0=(-1)^{m-1}((2m-1)!!)^2$ となる．以上から $f^{(2m)}(0)=0$, $f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m((2m-1)!!)^2$ である．

(8) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ より $(x^2+1)f'(x)=2x$. この両辺を $n-1$ 回微分すると, $n=2$ ならば $(x^2+1)f''(x)+2xf'(x)=2$, $n\geqq 3$ ならば $(x^2+1)f^{(n)}(x)+2(n-1)xf^{(n-1)}(x)+(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x)=0$. $x=0$ のとき $f''(0)=2$ であり, $f^{(n)}(0)+(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)=0$ が 3 以上の n に対して成り立つ．$a_m=f^{(2m)}(0)$, $b_m=f^{(2m-1)}(0)$ によって数列 $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ を定めると上式より, 2 以上の m に対して $a_m=-(2m-1)(2m-2)a_{m-1}$, $b_m=-(2m-2)(2m-3)b_{m-1}$ を得る．$a_1=f''(0)=2$ だから $a_m=-(2m-1)(2m-2)a_{m-1}=(-1)^2(2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)a_{m-2}=\cdots=(-1)^{m-1}(2m-1)(2m-2)\cdots3{\cdot}2a_1=2(-1)^{m-1}(2m-1)!$. また, $b_1=f'(0)=0$ だから $b_m=(2m-2)(2m-3)b_{m-1}$ より, 帰納的に任意の m に対して $b_m=0$ であることがわかる．以上から $m\geqq 1$ ならば $f^{(2m)}(0)=2(-1)^{m-1}(2m-1)!$, $f^{(2m-1)}(0)=0$ である．

(9) $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ より $(x^2+1)f'(x)=1$. この両辺を $n-1$ 回微分すると, $n\geqq 2$ ならば $(x^2+1)f^{(n)}(x)+2(n-1)xf^{(n-1)}(x)+(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x)=0$. 従って $f^{(n)}(0)+(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)=0$ が 2 以上の n に対して成り立つ．$a_m=f^{(2m)}(0)$, $b_m=f^{(2m-1)}(0)$ によって数列 $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ を定めると上式より, 2 以上の m に対して $a_m=-(2m-1)(2m-2)a_{m-1}$, $b_m=-(2m-2)(2m-3)b_{m-1}$ を得る．$a_1=f''(0)=0$ だから $a_m=-(2m-1)(2m-2)a_{m-1}$ より, 帰納的に任意の m に対して $a_m=0$ であることがわかる．また, $b_1=f'(0)=1$ だから $b_m=-(2m-2)(2m-3)b_{m-1}=(-1)^2(2m-2)(2m-3)(2m-4)(2m-5)b_{m-2}=\cdots=(-1)^{m-1}(2m-2)(2m-3)\cdots3{\cdot}2b_1=(-1)^{m-1}(2m-2)!$. 以上から $m\geqq 1$ ならば $f^{(2m)}(0)=0$, $f^{(2m-1)}(0)=(-1)^{m-1}(2m-2)!$ である．

(10) $f'(x)=\dfrac{c}{\sqrt{1-x^2}}e^{c\sin^{-1}x}=\dfrac{c}{\sqrt{1-x^2}}f(x)$ より $\sqrt{1-x^2}f'(x)=cf(x)$. この両辺を x で微分すれば $\sqrt{1-x^2}f''(x)-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}f'(x)=\dfrac{c^2}{\sqrt{1-x^2}}f(x)$ が得られる．この両辺に $\sqrt{1-x^2}$ をかけて右辺を左辺に移項して $(1-x^2)f''(x)-xf'(x)-c^2f(x)=0$ を得る．この等式の左辺を x で n 回微分すれば, ライプニッツの公式より $(1-x^2)f^{(n+2)}(x)+\dbinom{n}{1}(1-x^2)'f^{(n+1)}(x)+\dbinom{n}{2}(1-x^2)''f^{(n)}(x)-(xf^{(n+1)}(x)+\dbinom{n}{1}(x)'f^{(n)}(x))-c^2f^{(n)}(x)=(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-x(2n+1)f^{(n+1)}(x)-(c^2+n^2)f^{(n)}(x)$. 従って $x=0$ の場合, $f^{(n+2)}(0)-(c^2+n^2)f^{(n)}(0)=0$, すなわち $f^{(n+2)}(0)=(c^2+n^2)f^{(n)}(0)$ である．$a_m=f^{(2m)}(0)$, $b_m=f^{(2m+1)}(0)$ によって数列 $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$ を定めると上式より, 2 以上の m に対して $a_m=(c^2+(2m-2)^2)a_{m-2}$, $b_m=(c^2+(2m-1)^2)b_{m-2}$ を得る．$a_0=f(0)=1$ だから $f^{(2m)}(0)=a_m=(c^2+(2m-2)^2)a_{m-1}=(c^2+(2m-2)^2)(c^2+(2m-4)^2)a_{m-2}=\cdots$
$=(c^2+(2m-2)^2)(c^2+(2m-4)^2)\cdots(c^2+2^2)c^2a_0=c^2(c^2+2^2)(c^2+4^2)\cdots(c^2+(2m-4)^2)(c^2+(2m-2)^2)$.

また $f'(x)=\dfrac{c}{\sqrt{1-x^2}}e^{c\sin^{-1}x}$ より $b_0=f'(0)=c$ だから
$f^{(2m+1)}(0)=b_m=((2m-1)^2+c^2)b_{m-1}=(c^2+(2m-1)^2)(c^2+(2m-3)^2)b_{m-1}=\cdots$
$=(c^2+(2m-1)^2)(c^2+(2m-3)^2)\cdots(c^2+3^2)(c^2+1^2)b_0=c(c^2+1^2)(c^2+3^2)\cdots(c^2+(2m-3)^2)(c^2+(2m-1)^2)$.

(11) $f'(x)=\dfrac{3x^2}{x^3+1}$ より $(x^3+1)f'(x)=3x^2$. この両辺を $n-1$ 回微分すると, $n=2$ ならば $(x^3+1)f''(x)+3x^2f'(x)=6x$, $n=3$ ならば $(x^3+1)f'''(x)+6x^2f''(x)+6xf'(x)=6$, $n\geqq 4$ ならば $(x^3+1)f^{(n)}(x)+3(n-1)x^2f^{(n-1)}(x)+3(n-1)(n-2)xf^{(n-2)}(x)+(n-1)(n-2)(n-3)f^{(n-3)}(x)=0$ である. $x=0$ のとき $f''(0)=2$, $f'''(0)=6$ であり, $f^{(n)}(0)+(n-1)(n-2)(n-3)f^{(n-3)}(0)=0$ が 4 以上の n に対して成り立つ. $a_m=f^{(3m)}(0)$, $b_m=f^{(3m-1)}(0)$, $c_m=f^{(3m-2)}(0)$ によって数列 $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ を定めると上式より, 2 以上の m に対して $a_m=-(3m-1)(3m-2)\ (3m-3)a_{m-1}$, $b_m=-(3m-2)(3m-3)(3m-4)b_{m-1}$, $c_m=-(3m-3)(3m-4)(3m-5)c_{m-1}$ を得る. $a_1=f'''(0)=6$ だから $a_m=-(3m-1)(3m-2)(3m-3)a_{m-1}=(-1)^2(3m-1)(3m-2)\ (3m-3)(3m-4)(3m-5)(3m-6)a_{m-2}=\cdots=(-1)^{m-1}(3m-1)(3m-2)(3m-3)\cdots5\cdot4\cdot3a_1=3(-1)^{m-1}(3m-1)!$. また, $b_1=f''(0)=0$, $c_1=f'(0)=0$ だから $b_m=-(3m-2)(3m-3)\ (3m-4)b_{m-1}$, $c_m=-(3m-3)(3m-4)(3m-5)c_{m-1}$ より, 帰納的に任意の m に対して $b_m=c_m=0$ であることがわかる. 以上から $m\geqq 1$ ならば $f^{(3m)}(0)=3(-1)^{m-1}(3m-1)!$, $f^{(3m-1)}(0)=f^{(3m-2)}(0)=0$ である.

(12) $f'(x)=e^x\log(1+x)+\dfrac{e^x}{1+x}=f(x)+\dfrac{e^x}{1+x}$ より $(1+x)f'(x)-(1+x)f(x)=e^x$. この両辺を $n-1$ 回微分すると, $(1+x)f^{(n)}(x)-(x-n+2)f^{(n-1)}(x)-(n-1)f^{(n-2)}(x)=e^x$ が得られるため, $x=0$ のとき, $f^{(n)}(0)+(n-2)f^{(n-1)}(0)-(n-1)f^{(n-2)}(0)=1$ が成り立つ. $f(0)=0$, $f'(0)=1$ であり, $a_n=f^{(n)}(0)-f^{(n-1)}(0)$ とおけば $a_1=1$ で, 上式から $a_n+(n-1)a_{n-1}=1$ である. さらに $b_n=\dfrac{(-1)^{n-1}a_n}{(n-1)!}$ とおけば $b_n=1$ で, $b_n-b_{n-1}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$ が成り立つため, $b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}$ である. 故に $f^{(n)}(0)-f^{(n-1)}(0)=a_n=(-1)^{n-1}(n-1)!b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n+k}(n-1)!}{(k-1)!}$ だから $f^{(n)}(0)=f'(1)+\displaystyle\sum_{l=2}^{n}\sum_{k=1}^{l}\frac{(-1)^{k+l}(l-1)!}{(k-1)!}=\sum_{1\leqq k\leqq l\leqq n}\frac{(-1)^{k+l}(l-1)!}{(k-1)!}$ が得られる.
(問題 1 の (20) より $f^{(n)}(0)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}n!}{i(n-i)!}$ だから, 上の結果から等式 $\displaystyle\sum_{1\leqq k\leqq l\leqq n}\frac{(-1)^{k+l}(l-1)!}{(k-1)!}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}n!}{i(n-i)!}$ が得られた.)

(13) $f'(x)=\dfrac{2\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ より $\sqrt{1-x^2}f'(x)=2\sin^{-1}x$ であり, この両辺を x で微分すれば $\sqrt{1-x^2}f''(x)-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ が得られるため, $(1-x^2)f''(x)-xf'(x)=2$ が成り立つ. この両辺を x で n 回 ($n\geqq 1$) 微分すれば, $(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+1)xf^{(n+1)}(x)-n^2f^{(n)}(x)=0$ が得られる. $a_n=f^{(n)}(0)$ とおけば, $a_0=a_1=0$, $a_2=2$ であり, 上式から $n\geqq 1$ ならば $a_{n+2}=n^2a_n$ が成り立つため, n が奇数ならば $a_n=0$, $a_{2n}=(2n-2)^2a_{2n-2}=(2n-2)^2(2n-4)^2a_{2n-4}=\cdots=(2n-2)^2(2n-4)^2\cdots2^2a_2=2^{2n-1}((n-1)!)^2$ である. 従って $f^{(2n)}(0)=2^{2n-1}((n-1)!)^2$, $f^{(2n+1)}(0)=0$ である.

(14) $f'(x)=\dfrac{2\log(1+x)}{1+x}$ より $(1+x)f'(x)=2\log(1+x)$ であり, この両辺を x で n 回 ($n\geqq 1$) 微分すれば, $(1+x)f^{(n+1)}(x)+nf^{(n)}(x)=\dfrac{2(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ が得られる. $a_n=f^{(n)}(0)$ とおけば, $a_0=a_1=0$ であり, 上式から $n\geqq 1$ ならば $a_{n+1}+na_n=2(-1)^{n-1}(n-1)!$ が成り立つため, この両辺に $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}$ をかければ, $\dfrac{(-1)^{n+1}a_{n+1}}{n!}-\dfrac{(-1)^na_n}{(n-1)!}=\dfrac{2}{n}$ が得られる. そこで, $b_n=\dfrac{(-1)^na_n}{(n-1)!}$ とおけば, $b_1=0$ であり, $b_{n+1}-b_n=\dfrac{2}{n}$ だから $b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{k}$ が成り立つ. 従って $n\geqq 2$ ならば $f^{(n)}(0)=a_n=(-1)^n(n-1)!b_n=2(-1)^n(n-1)!\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=2(-1)^n(n-1)!\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)$ である.

4. $\dfrac{x^n}{n!}(\log x-a_n)$ の導関数は $\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}(\log x-a_n)+\dfrac{x^{n-1}}{n!}=\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left(\log x-a_n+\dfrac{1}{n}\right)$ であり, この関数の $n-1$ 次導関数が $\log x$ になるため, $a_{n-1}=a_n-\dfrac{1}{n}$ が成り立つように, 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を定めればよい. $a_0=0$ であり, 1 以

上の任意の整数 n に対して $a_n - a_{n-1} = \dfrac{1}{n}$ が成り立つため, $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ である.

(別解) ライプニッツの公式から $\left(\dfrac{x^n}{n!}(\log x - a_n)\right)^{(n)} = \log x - a_n + \sum_{i=1}^{n} \dbinom{n}{i} \left(\dfrac{x^n}{n!}\right)^{(n-i)} (\log x - a_n)^{(i)}$ であり, これに $\left(\dfrac{x^n}{n!}\right)^{(n-i)} = \dfrac{x^i}{i!}$, $(\log x - a_n)^{(i)} = \dfrac{(-1)^{i-1}(i-1)!}{x^i}$ を代入すれば, $\left(\dfrac{x^n}{n!}(\log x - a_n)\right)^{(n)}$ は $\log x - a_n + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(-1)^{i-1}}{i}\dbinom{n}{i}$ に等しいことがわかる. 仮定により, $\left(\dfrac{x^n}{n!}(\log x - a_n)\right)^{(n)} = \log x$ だから $a_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(-1)^{i-1}}{i}\dbinom{n}{i}$ である.

5. (1) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $g(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ だから $P_0(x) = 1$, $Q_0(x) = 0$ である.

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}}f(x) - \frac{Q_n(x)}{x^{2n}}g(x), \qquad g^{(n)}(x) = \frac{Q_n(x)}{x^{2n}}f(x) + \frac{P_n(x)}{x^{2n}}g(x)$$

が成り立つ仮定すれば $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}g(x)$, $g'(x) = \dfrac{1}{x^2}f(x)$ より, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{x^2P_n'(x) - 2nxP_n(x) - Q_n(x)}{x^{2(n+1)}}f(x) + \frac{-P_n(x) - x^2Q_n'(x) + 2nxQ_n(x)}{x^{2(n+1)}}g(x) \\ g^{(n+1)}(x) &= \frac{P_n(x) + x^2Q_n'(x) - 2nxQ_n(x)}{x^{2(n+1)}}f(x) + \frac{x^2P_n'(x) - 2nxP_n(x) - Q_n(x)}{x^{2(n+1)}}g(x) \end{aligned}$$

従って $P_{n+1}(x) = x^2P_n'(x) - 2nxP_n(x) - Q_n(x)$, $Q_{n+1}(x) = P_n(x) + x^2Q_n'(x) - 2nxQ_n(x)$ で $P_{n+1}(x)$ と $Q_{n+1}(x)$ を定めれば $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}}f(x) - \dfrac{Q_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}}g(x)$ と $g^{(n+1)}(x) = \dfrac{Q_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}}f(x) + \dfrac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}}g(x)$ が成り立つ. 故に $P_n(x)$, $Q_n(x)$ が x の多項式ならば $P_{n+1}(x)$, $Q_{n+1}(x)$ も x の多項式になるため, 0 以上の任意の整数 n に対して $P_n(x)$, $Q_n(x)$ は x の多項式である.

(2) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}g(x)$, $g'(x) = \dfrac{1}{x^2}f(x)$ より $P_1(x) = 0$, $Q_1(x) = 1$ だから (1) の結果から $P_2(x) = -1$, $Q_2(x) = -2x$ が成り立つ. そこで, $n \geqq 2$ に対し $P_n(x)$ の次数が $n-2$, $Q_n(x)$ の次数が $n-1$ であると仮定し, $P_n(x)$ の x^{n-2} の係数を a_n, $Q_n(x)$ の x^{n-1} の係数を b_n とおくと, $x^2P_n'(x) - 2nxP_n(x) - Q_n(x)$ の x^{n-1} の係数は $-(n+2)a_n - b_n$ であり, $P_n(x) + x^2Q_n'(x) - 2nxQ_n(x)$ の x^n の係数は $-(n+1)b_n$ だから, (1) の結果から $a_{n+1} = -(n+2)a_n - b_n$, $b_{n+1} = -(n+1)b_n$ が成り立つ. 後者の等式と $b_2 = -2$ より $b_n = (-n)(-n+1)\cdots(-3)b_2 = (-1)^{n-1}n!$ が得られる. これを前者の等式に代入して, 両辺を $(-1)^{n+1}(n+2)!$ で割れば $\dfrac{(-1)^{n+1}a_{n+1}}{(n+2)!} = \dfrac{(-1)^n a_n}{(n+1)!} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ より, $a_2 = -1$ であることを用いれば

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n a_n}{(n+1)!} &= \frac{a_2}{3!} + \sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{(-1)^{k+1}a_{k+1}}{(k+2)!} - \frac{(-1)^k a_k}{(k+1)!}\right) = -\frac{1}{6} - \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= -\frac{1}{6} - \sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = -\frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{n-1}{2(n+1)} \end{aligned}$$

が成り立つ. 故に $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}n!(n-1)}{2}$, $b_n = (-1)^{n-1}n!$ である.

(3) $P_2(x) = -1$, $Q_2(x) = -2x$ だから (1) の結果から $P_3(x) = 6x$, $Q_3(x) = 6x^2 - 1$ となるため, $P_2(x)$ と $Q_3(x)$ は x の奇数次の項を含まず, $P_3(x)$ と $Q_2(x)$ は x の偶数次の項を含まない. $n \geqq 1$ に対し $P_{2n}(x)$ と $Q_{2n+1}(x)$ は x の奇数次の項を含まず, $P_{2n+1}(x)$ と $Q_{2n}(x)$ は x の偶数次の項を含まないと仮定する. このとき $P_{2n+1}'(x)$ は x の奇数次の項を含まず, $Q_{2n+1}'(x)$ は x の偶数次の項を含まないため, $P_{2n+2}(x) = x^2P_{2n+1}'(x) - (4n+2)xP_{2n+1}(x) - Q_{2n+1}(x)$ は x の奇数次の項を含まず, $Q_{2n+2}(x) = P_{2n+1}(x) + x^2Q_{2n+1}'(x) - (4n+2)xQ_{2n+1}(x)$ は x の偶数次の項を含まない. 従って $P_{2n+2}'(x)$ は x の偶数次の項を含まず, $Q_{2n+2}'(x)$ は x の奇数次の項を含まないため, $P_{2n+3}(x) = x^2P_{2n+2}'(x) - 4(n+1)xP_{2n+2}(x) - Q_{2n+2}(x)$ は x の偶数次の項を含まず, $Q_{2n+3}(x) = P_{2n+2}(x) + x^2Q_{2n+2}'(x) - 4(n+1)xQ_{2n+2}(x)$ は x の奇数次の項を含まない. 故に n による数学的帰納法によって主張が示された.

6. (1) f の連続性と仮定 $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ から $f(0) = 0$ である. また, 仮定から $x \neq 0$ ならば $1 \leqq m \leqq n$ に対して

$g_n^{(m)}(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}k!\binom{m}{k}\binom{n}{k}x^{n-k}f^{(m-k)}(x)$ が成り立つ．m による数学的帰納法で $g_{ln}^{(m)}(0)=0$ が $m=0,1,\dots,n$ に対して成り立つことを示す．$g_{ln}(0)=0$ であり $g_{ln}^{(k)}(0)=0$ が $k=m-1$ に対して成り立つと仮定すれば

$$\begin{aligned}g_{ln}^{(m)}(0)&=\lim_{x\to0}\frac{g_{ln}^{(m-1)}(x)-g_{ln}^{(m-1)}(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\sum_{k=0}^{m-1}k!\binom{m-1}{k}\binom{ln}{k}x^{ln-k-1}f^{(m-k-1)}(x)\\&=\sum_{k=0}^{m-1}k!\binom{m-1}{k}\binom{ln}{k}\left(\lim_{x\to0}x^{l(n-m)+(l-1)(k+1)}\right)\left(\lim_{x\to0}x^{l(m-k-1)}f^{(m-k-1)}(x)\right)=0\end{aligned}$$

より，$g_{ln}^{(m)}(0)=0$ が成り立つ．故に g_{ln} は n 回微分可能である．さらに $\lim\limits_{x\to0}x^{ln}f^{(n)}(x)=0$ ならば

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}g_{ln}^{(n)}(x)&=\lim_{x\to0}\sum_{k=0}^{n}k!\binom{n}{k}\binom{ln}{k}x^{ln-k}f^{(n-k)}(x)\\&=\sum_{k=0}^{n}k!\binom{n}{k}\binom{ln}{k}\left(\lim_{x\to0}x^{k(l-1)}\right)\left(\lim_{x\to0}x^{l(n-k)}f^{(n-k)}(x)\right)=0=g_{ln}^{(n)}(0)\end{aligned}$$

だからである．

(2) (i) $f(x)=|x|$ より $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ は明らか．$f'(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$ だから，$x\neq0$ ならば $xf'(x)=|x|$ となるため $\lim\limits_{x\to0}xf'(x)=0$ が成り立つ．$n\geqq2$ かつ $x\neq0$ ならば $f^{(n)}(x)=0$ だから $\lim\limits_{x\to0}x^nf^{(n)}(x)=0$ である．

(ii) $\lim\limits_{x\to+0}x\log x=0$ が成り立つことから $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ である．$x\neq0$ ならば $f'(x)=1+\log|x|$ だから $\lim\limits_{x\to+0}xf'(x)=0$ である．$x\neq0$ かつ $n\geqq2$ ならば $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n-1}}+\dfrac{(-1)^{n-2}n(n-2)!}{x^{n-2}}=\dfrac{(-1)^{n-2}(n-2)!(nx-n+1)}{x^{n-1}}$ だから $\lim\limits_{x\to0}x^nf^{(n)}(x)=\lim\limits_{x\to0}x((-1)^{n-2}(n-2)!(nx-n+1))=0$ である．

(iii) $x\neq0$ ならば $|f(x)|=\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqq|x|$ だから $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ である．問題 5 の結果から，x の多項式 $P_n(x)$ と $Q_n(x)$ で $\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)^{(n)}=\dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{Q_n(x)}{x^{2n}}\cos\dfrac{1}{x}$ を満たすものがある．従って次の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)&=x\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{(n)}+n\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}=\frac{xP_n(x)}{x^{2n}}\sin\frac{1}{x}+\frac{xQ_n(x)}{x^{2n}}\cos\frac{1}{x}+\frac{nP_{n-1}(x)}{x^{2n-2}}\sin\frac{1}{x}+\frac{nQ_{n-1}(x)}{x^{2n-2}}\cos\frac{1}{x}\\&=\frac{P_n(x)+nxP_{n-1}(x)}{x^{2n-1}}\sin\frac{1}{x}+\frac{Q_n(x)+nxQ_{n-1}(x)}{x^{2n-1}}\cos\frac{1}{x}\end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned}\left|x^{2n}f^{(n)}(x)\right|&=\left|x(P_n(x)+nxP_{n-1}(x))\sin\frac{1}{x}+x(Q_n(x)+nxQ_{n-1}(x))\cos\frac{1}{x}\right|\\&\leqq\left|x(P_n(x)+nxP_{n-1}(x))\sin\frac{1}{x}\right|+\left|x(Q_n(x)+nxQ_{n-1}(x))\cos\frac{1}{x}\right|\\&\leqq|x|\,|P_n(x)+nxP_{n-1}(x)|+|x|\,|Q_n(x)+nxQ_{n-1}(x)|\end{aligned}$$

であり，$\lim\limits_{x\to0}|x|\,|P_n(x)+nxP_{n-1}(x)|=\lim\limits_{x\to0}|x|\,|Q_n(x)+nxQ_{n-1}(x)|=0$ だから $\lim\limits_{x\to0}x^{2n}f^{(n)}(x)=0$ が成り立つ．

7. (1) $x=\tan y$ だから $\cos y\sin\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos^2y=\dfrac{1}{1+\tan^2y}=\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{dy}{dx}$ より $n=1$ のとき主張は正しい．$n=k$ のとき主張が正しいとし，$\dfrac{d^ky}{dx^k}=(k-1)!\cos^ky\sin k\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)$ の両辺を x で微分すれば，$\dfrac{dy}{dx}=\cos^2y$ より $\dfrac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}=k!\cos^{k-1}y\left(-\sin y\sin k\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos y\cos k\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)\dfrac{dy}{dx}=k!\cos^{k+1}y\cos\left((k+1)y+\dfrac{\pi k}{2}\right)=k!\cos^{k+1}y\sin\left((k+1)\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ だから $n=k+1$ のときも主張は正しい．次に，$\cos^2y=\dfrac{1}{1+\tan^2y}=\dfrac{1}{1+x^2}$ であ

り, $y=\tan^{-1}x$ は $|y|<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすため $\cos y>0$. 従って $\cos y=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ である. 一方 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}$ だから, 上の結果から $\dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=n!\cos^{n+1}y\sin\left((n+1)\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=n!(1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}\sin\left((n+1)\left(\tan^{-1}x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

(2) $\tan y=\dfrac{1}{x}$ だから $-\sin^2 y=\cos^2 y-1=\dfrac{1}{1+\tan^2 y}-1=\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}-1=-\dfrac{1}{1+x^2}$. 一方 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=-\dfrac{1}{1+x^2}$ より $n=1$ のとき, 主張は成り立つ. $n=k$ のときに主張が成り立つとし, $\dfrac{d^ky}{dx^k}=(-1)^k(k-1)!\sin^k y\sin ky$ の両辺を x で微分すれば, $\dfrac{dy}{dx}=-\sin^2 y$ より $\dfrac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}=(-1)^kk!\sin^{k-1}y(\cos y\sin ky+\sin y\cos ky)\dfrac{dy}{dx}=(-1)^{k+1}k!\sin^{k+1}y\sin(k+1)y$ だから $n=k+1$ のときも主張が成り立つ.

8. f が 1 回微分可能ならば合成関数の微分法から $\dfrac{d}{dx}\left(f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=\dfrac{-1}{x^2}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$ が成り立つ. f が n 回微分可能ならば $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ が成り立つと仮定する. f が $n+1$ 回微分可能ならば, $x^nf\left(\dfrac{1}{x}\right)=xx^{n-1}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ にライプニッツの公式を用いると, 帰納法の仮定から $\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^nf\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=x\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^n}{dx^n}x^{n-1}f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)+(n+1)\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=x\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)+\dfrac{(-1)^n(n+1)}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)=$
$x\left(\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{x^{n+2}}f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{(-1)^{n+1}}{x^{n+3}}f^{(n+1)}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)+\dfrac{(-1)^n(n+1)}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}f^{(n+1)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ となって帰納法が進む.

9. $f(x)=-\log x$ で f を定めれば, $x^{n-1}\log x=x^{n-1}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ であり, $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n(n-1)!}{x^n}$ だから $f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)=(-1)^n(n-1)!x^n$ が成り立つ. そこで 5 の結果を用いると $(x^{n-1}\log x)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{(n-1)!}{x}$ である.

$g(x)=e^x$ で g を定めれば, $x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}=x^{n-1}g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ であり, $g^{(n)}(x)=e^x$ だから $g^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)=e^{\frac{1}{x}}$ が成り立つ. そこで 5 の結果を用いると $\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}g^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{(-1)^ne^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$ である.

(別解) ライプニッツの公式から $(x^{n-1}\log x)^{(n)}=\sum_{r=0}^{n}\dbinom{n}{r}(x^{n-1})^{(r)}(\log x)^{(n-r)}$ であり, これに $(x^{n-1})^{(r)}=(n-1)(n-2)\cdots(n-r)x^{n-r-1}$, $(\log x)^{(n-r)}=\dfrac{(-1)^{n-r-1}(n-r-1)!}{x^{n-r}}$ $(r<n)$ を代入し, $r=n$ の場合の項 $\dbinom{n}{n}(x^{n-1})^{(n)}\log x$ は 0 になることに注意すれば,

$$\begin{aligned}(x^{n-1}\log x)^{(n)}&=\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n}{r}(n-1)(n-2)\cdots(n-r)x^{n-r-1}\frac{(-1)^{n-r-1}(n-r-1)!}{x^{n-r}}\\&=\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n}{r}(n-1)!\frac{(-1)^{n-r-1}}{x}=\frac{(n-1)!}{x}\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n}{r}(-1)^{n-r-1}\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

二項定理 $(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\dbinom{n}{r}a^rb^{n-r}$ において $a=1,\ b=-1$ とおくと (左辺 $)=(1+(-1))^n=0$, (右辺) $=\sum_{r=0}^{n}\dbinom{n}{r}(-1)^{n-r}=\sum_{r=0}^{n-1}\dbinom{n}{r}(-1)^{n-r}+\dbinom{n}{n}(-1)^0=-\sum_{r=0}^{n-1}\dbinom{n}{r}(-1)^{n-r-1}+1$ となるため $\sum_{r=0}^{n-1}\dbinom{n}{r}(-1)^{n-r-1}=1$ である. 従って $(*)$ から $(x^{n-1}\log x)^{(n)}=\dfrac{(n-1)!}{x}$ である.

10. (1) $f'(x)=\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$, $g'(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ より $F_1(x)=x^3e^{\frac{1}{x^2}}\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}=2$, $G_1(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=1$.

(2) $f^{(n)}(x)=x^{-3n}e^{-\frac{1}{x^2}}F_n(x)$ だから $F_n(x)=x^{3n}e^{\frac{1}{x^2}}f^{(n)}(x)$ の両辺を x で微分すれば
$F_n'(x)=3nx^{3n-1}e^{\frac{1}{x^2}}f^{(n)}(x)-2x^{3n-3}e^{\frac{1}{x^2}}f^{(n)}(x)+x^{3n}e^{\frac{1}{x^2}}f^{(n+1)}(x)=3nx^{-1}F_n(x)-2x^{-3}F_n(x)+x^{-3}F_{n+1}(x)=\dfrac{1}{x^3}(F_{n+1}(x)+(3nx^2-2)F_n(x))$. $g^{(n)}(x)=x^{-2n}e^{-\frac{1}{x}}G_n(x)$ だから $G_n(x)=x^{2n}e^{\frac{1}{x}}g^{(n)}(x)$ の両辺を x で微分すれ

ば $G_n'(x) = 2nx^{2n-1}e^{\frac{1}{x}}g^{(n)}(x) - x^{2n-2}e^{\frac{1}{x}}g^{(n)}(x) + x^{2n}e^{\frac{1}{x}}g^{(n+1)}(x) = 2nx^{-1}G_n(x) - x^{-2}G_n(x) + x^{-2}G_{n+1}(x) = \dfrac{1}{x^2}(G_{n+1}(x) + (2nx-1)G_n(x))$.

(3) n による数学的帰納法で主張を示す．(1) の結果から $n=1$ のときは主張が成り立つ．$F_n(x)$, $G_n(x)$ がそれぞれ x の $2(n-1)$ 次, $n-1$ 次の多項式であることを仮定して, $x^{2(n-1)}$, x^{n-1} の係数をそれぞれ a_n, b_n とおくと, $F_n'(x)$ は $2n-3$ 次の多項式で x^{2n-3} の係数は $2(n-1)a_n$ であり, $G_n'(x)$ は $n-2$ 次の多項式で x^{n-2} の係数は $(n-1)b_n$ である．$F_{n+1}(x) = x^3F_n'(x) - (3nx^2-2)F_n(x)$ で, $x^3F_n'(x)$ と $(3nx^2-2)F_n(x)$ はともに $2n$ 次の多項式だから $F_{n+1}(x)$ は $2n$ 次以下の多項式である．右辺 $x^3F_n'(x) - (3nx^2-2)F_n(x)$ の x^{2n} の係数は $2(n-1)a_n - 3na_n = (-n-2)a_n$ だから $a_{n+1} = -(n+2)a_n$ が得られる．また (1) から $a_1 = 2$ であるため $a_n = -(n+1)a_{n-1} = (-1)^2(n+1)na_{n-2} = \cdots = (-1)^{n-1}(n+1)n\cdots 3a_1 = (-1)^{n-1}(n+1)!$. 従って $a_{n+1} = (-1)^n(n+2)! \neq 0$ だから $F_{n+1}(x)$ は $2n$ 次の多項式である．上の証明から $F_n(x)$ の $2(n-1)$ 次の係数は $(-1)^{n-1}(n+1)!$ である．$G_{n+1}(x) = x^2G_n'(x) - (2nx-1)G_n(x)$ で, $x^2G_n'(x)$ と $(2nx-1)G_n(x)$ はともに n 次の多項式だから $G_{n+1}(x)$ は n 次以下の多項式である．右辺 $x^2G_n'(x) - (2nx-1)G_n(x)$ の x^n の係数は $(n-1)b_n - 2nb_n = (-n-1)b_n$ だから $b_{n+1} = -(n+1)b_n$ が得られる．また (1) から $b_1 = 1$ であるため $b_n = -nb_{n-1} = (-1)^2n(n-1)b_{n-2} = \cdots = (-1)^{n-1}n(n-1)\cdots 2b_1 = (-1)^{n-1}n!$. 従って $b_{n+1} = (-1)^n(n+1)! \neq 0$ だから $G_{n+1}(x)$ は n 次の多項式である．上の証明から $G_n(x)$ の $n-1$ 次の係数は $(-1)^{n-1}n!$ である．

(4) f, g が n 回微分可能で $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0$ であることを n による帰納法で示す．$n=0$ のときは, $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$, $g^{(0)}(0) = g(0) = 0$ より主張は成立する．$n=k$ のとき, 帰納法の仮定が成り立つとする．まず, f は $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ においては, 無限回微分可能であるため $f^{(k)}$ は 0 以外で微分可能である．$y = \dfrac{1}{x^2}$ とおくと, $x = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ で, $x \to 0$ のとき, $y \to \infty$ だから $f^{(k)}$ の 0 における微分係数は, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{-3k}e^{-\frac{1}{x^2}}F_k(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}F_k(x)}{x^{3k+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3k+1}}\lim_{x\to 0}F_k(x) = \lim_{y\to\infty}y^{\frac{3k+1}{2}}e^{-y}F_k(0) = 0$. 従って $f^{(k)}$ は 0 においても微分可能で, $f^{(k+1)}(0) = 0$ が成り立つ．g は $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ においては, 無限回微分可能であるため $g^{(k)}$ は 0 以外で微分可能である．$y = \dfrac{1}{x}$ とおくと, $x = \dfrac{1}{y}$ で, $x \to +0$ のとき, $y \to \infty$ だから $g^{(k)}$ の 0 における右微分係数は, $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{g^{(k)}(x) - g^{(k)}(0)}{x-0} = \lim_{x\to +0}\frac{x^{-2k}e^{-\frac{1}{x}}G_k(x)}{x} = \lim_{x\to +0}\frac{e^{-\frac{1}{x}}G_k(x)}{x^{2k+1}} = \lim_{x\to +0}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2k+1}}\lim_{x\to 0}G_k(x) = \lim_{y\to\infty}y^{2k+1}e^{-y}G_k(0) = 0$. また, $x \leqq 0$ ならば $g(x) \leqq 0$ だから $x < 0$ ならば $g^{(k)}(x) = 0$ である．故に $g^{(k)}$ の 0 における左微分係数は, $\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{g^{(k)}(x) - g^{(k)}(0)}{x-0} = 0$ となって, $g^{(k)}$ の 0 における右微分係数に一致するため, $g^{(k)}$ は 0 においても微分可能で, $g^{(k+1)}(0) = 0$ が成り立つ．

微積分学 I 演習問題　第 6 回　平均値の定理とテイラーの定理

1. 以下の等式の両辺の関数の微分を考えることによって, 等式が成り立つことを示せ.

(1) $2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1}x\ (-1 < x \leqq 1)$

(2) $\tan^{-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{x^2-1} - \frac{\pi}{4} & x \leqq -1 \\ \frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{x^2-1} + \frac{\pi}{4} & x \geqq 1 \end{cases}$

(3) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \begin{cases} -2\sin^{-1}x - \pi & -1 \leqq x \leqq -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2\sin^{-1}x & -\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -2\sin^{-1}x + \pi & \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1 \end{cases}$

(4) $\tan^{-1}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1} = \begin{cases} -2\tan^{-1}x - \frac{3\pi}{4} & x < -1-\sqrt{2} \\ -2\tan^{-1}x + \frac{\pi}{4} & -1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2} \\ -2\tan^{-1}x + \frac{5\pi}{4} & x > -1+\sqrt{2} \end{cases}$

2. マクローリンの定理を用いて, 以下の関数を 0 の近くで近似する $n-1$ 次の多項式と剰余項を求めよ.

(1) $(e^x+e^{-x})^2$　　(2) $\sin^2 x$　　(3) $\sin x\cos x$　　(4) $\log\dfrac{1+x}{1-x}$　　(5) $\sqrt{1+2x}$

3. 正の実数 m, A, B に対し, $x = \dfrac{A}{B^m} - 1$ とおく. $n > \dfrac{1}{m}$ である自然数 n に対し, $A^{\frac{1}{m}}$ を多項式

$$B\left(1 + \binom{\frac{1}{m}}{1}x + \cdots + \binom{\frac{1}{m}}{k}x^k + \cdots + \binom{\frac{1}{m}}{n}x^n\right)$$

で近似すれば, 誤差は $B\left|\binom{\frac{1}{m}}{n}\right|\left|\dfrac{1}{(1+x)^n} - 1\right||x|^n$ 以下であることを示せ.

4. 次の数の近似値を小数第 5 位まで求めよ.　(1) $\sqrt{3}$　(2) $\sqrt[3]{2}$　(3) e　(4) $\log 2$

5. 次の極限 が 0 でない値になるように α, β を定めて, そのときの極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^\alpha}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x + 2\cos x - 2}{x^\alpha}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^x + x}{x^\alpha}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \frac{1+\alpha x}{1+\beta x}}{x^3}$

6. 関数 $f : [0,1] \to [0,1]$ は連続で, $(0,1)$ の各点で微分可能であるとする. すべての $x \in (0,1)$ に対して $f'(x) \neq 1$ ならば, $f(c) = c$ を満たす $c \in [0,1]$ がただ 1 つ存在することを示せ.

7. n を 0 以上の整数とし, $f_n : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を以下で定める.

$$f_n(x) = \tan^{-1}x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right) = \tan^{-1}x - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{x^{2i+1}}{2i+1}$$

(1) f_n の増減を調べよ.

(2) $x > 0$ ならば $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{2k-1}\dfrac{x^{4k-1}}{4k-1} < \tan^{-1}x < x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{2k}\dfrac{x^{4k+1}}{4k+1}$ が成り立つことを示せ.

8. e^{e-2} と 2 ではどちらが大きいか答えて, その理由を述べよ.

9. 関数 $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ は微分可能であり, 定数 $M > 0$ が存在して, 任意の $x \in (a,b)$ に対して $|f'(x)| \leqq M$ が成り立つとする. さらに, $f(\alpha) = \alpha$ を満たす $\alpha \in (a,b)$ が存在すると仮定する. 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が, 任意の自然数 n に対して $x_n \in (a,b)$ かつ $x_{n+1} = f(x_n)$ を満たすならば, $|x_n - \alpha| \leqq M^{n-1}|x_1 - \alpha|$ がすべての自然数 n に対して成り立つことを示せ.

10. $\dfrac{1}{\cos x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^3)$ $(x \to 0)$ を満たす a_0, a_1, a_2 を求め, $|x| < \sqrt{2}$ ならば次の不等式が成り立つことを示せ.

$$0 \leqq \frac{1}{\cos x} - (a_0 + a_1x + a_2x^2) \leqq \frac{x^4}{2(2-x^2)}$$

11. (発展問題) 関数 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ は連続で $f(a)f(b) < 0$ を満たし, (a,b) の各点で 2 回微分可能であり, さらに任意の $x \in (a,b)$ に対して $f''(x) > 0$ であるとする. また, $p \in [a,b]$ は $f(p) > 0$ を満たす点とする.

(1) $f(\alpha) = 0$ を満たす $\alpha \in (a,b)$ がただ 1 つだけ存在することを示せ.

(2) $\alpha < p$ かつ $x \in [\alpha, p)$ ならば $f'(x) > 0$ であり, $\alpha > p$ かつ $x \in (p, \alpha]$ ならば $f'(x) < 0$ であることを示せ.

(3) 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を帰納的に $x_0 = p$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ で定義する. $\alpha > p$ ならばすべての自然数 n に対して $x_{n-1} < x_n < \alpha$ が成り立ち, $\alpha < p$ ならばすべての自然数 n に対して $x_{n-1} > x_n > \alpha$ が成り立つことを示せ.

12. (発展問題) 関数 $f : [0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ は連続で $f(0) = 0$ を満たし, $(0,\infty)$ の各点で微分可能とする. $f' : (0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ が単調増加関数ならば $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ で定義される関数 $g : (0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ も単調増加関数であることを示せ.

13. (発展問題) I は 0, 1 を含む開区間で $f : I \to \boldsymbol{R}$ は 2 回微分可能であり, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = f'(1) = 0$ を満たすとする. このとき $|f''(c)| \geqq 4$ を満たす $c \in [0,1]$ が存在することを示せ.

14. (発展問題) $f : (0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ は 2 回微分可能であるとし, すべての $x \in (0,\infty)$ に対して $|f(x)| \leqq A$, $|f''(x)| \leqq B$ を満たす定数 A, B が存在すれば, すべての $x \in (0,\infty)$ に対して $|f'(x)| \leqq 2\sqrt{AB}$ が成り立つことを示せ.

15. (1) 区間 $[a,\infty)$ 上の連続関数 f が (a,∞) の各点で微分可能であり, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f(a)$ を満たすならば $f'(\xi) = 0$ を満たす $\xi > a$ が存在することを示せ.

(2) 実数全体で定義された微分可能な関数 f が $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ (l は実数または $\pm\infty$) を満たすならば $f'(\xi) = 0$ を満たす実数 ξ が存在することを示せ.

16. (発展問題) (1) 閉区間 $[a,b]$ を含む開区間で定義された n 回微分可能な関数 f が $k = 0,1,2,\ldots,n-1$ に対して $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$ を満たすとき, 方程式 $f^{(n)}(x) = 0$ は (a,b) に相異なる n 個の解をもつことを示せ.

(2) 区間 $[a,\infty)$ を含む開区間で定義された n 回微分可能な関数 f が $k = 0,1,2,\ldots,n-1$ に対して $f^{(k)}(a) = \lim\limits_{x\to\infty} f^{(k)}(x) = 0$ を満たすとき, 方程式 $f^{(n)}(x) = 0$ は (a,∞) に相異なる n 個の解をもつことを示せ.

(3) 実数全体で定義された n 回微分可能な関数 f が $k = 0,1,2,\ldots,n-1$ に対して $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f^{(k)}(x) = 0$ を満たすとき, 方程式 $f^{(n)}(x) = 0$ は相異なる n 個の実数解をもつことを示せ.

17. (発展問題) x の多項式 $P_n(x)$ を $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ で定める.

(1) $(x^2-1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0$ と $P_{n+1}'(x) = (n+1)P_n(x) + xP_n'(x)$ が成り立つことを示せ.

(2) $P_{n+1}(x) = xP_n(x) + \dfrac{x^2-1}{n+1}P_n'(x)$ が成り立つことを示せ.

(3) $P_n(x) = 0$ は開区間 $(-1,1)$ の中に n 個の相異なる解をもつことを示せ.

18. (発展問題) x の多項式 $L_n(x)$ を $L_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^x}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$ で定める.

(1) $L_{n+1}(x) = \dfrac{x-n-1}{n+1}L_n(x) - \dfrac{x}{n+1}L_n'(x)$ と $xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$ が成り立つことを示せ.

(2) $L_n(x) = 0$ は n 個の相異なる正の実数解をもつことを示せ.

19. (発展問題) x の多項式 $H_n(x)$ を $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$ で定める.

(1) $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$ と $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$ が成り立つことを示せ.

(2) $H_n(x) = 0$ は n 個の相異なる実数解をもち, $H_n(x) = 0$ の隣り合う 2 つの解の間に $H_{n-1}(x) = 0$ の解が 1 つ存在することを示せ.

第 6 回の演習問題の解答

1. 一般に $X \subset \boldsymbol{R}$ とし, 関数 $f, g : X \to \boldsymbol{R}$ が X に含まれる閉区間 $[a,b]$ の任意の点で連続で, しかも (a,b) の任意の点 x で微分可能であり, $f'(x) = g'(x)$ が成り立つならば, 任意の $x, c \in [a,b]$ に対して $f(x) = g(x) + f(c) - g(c)$ が成り立つ. 実際, $F : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ を $F(x) = f(x) - g(x)$ で定めれば, F は連続で, (a,b) の任意の点 x で微分可能であり, $F'(x) = 0$ が成り立つため, 教科書の定理 2.6 から F は $[a,b]$ において定数値関数となる. 従って, 任意の $x \in [a,b]$ に対して $f(x) - g(x) = F(x) = F(c) = f(c) - g(c)$ が成り立つため, $f(x) = g(x) + f(c) - g(c)$ である.

(1) 関数 $f, g : [-1,1] \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \begin{cases} 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} & x \neq -1 \\ \pi & x = -1 \end{cases}$, $g(x) = -\sin^{-1}x$ で定めると, $x \in (-1,1)$ に対し, $f'(x) = \left(2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)' = \dfrac{2\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)'}{1+\frac{1-x}{1+x}} = \dfrac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'}{\frac{2}{1+x}} = -\dfrac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{2}{(1+x)^2}}{\frac{2}{1+x}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $g'(x) = \left(-\sin^{-1}x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ が成り立つため, f, g は $(-1,1)$ の各点 x で微分可能で, $f'(x) = g'(x)$ である. 一方, 明らかに g は連続であり, f も $(-1,1]$ では連続で, $\displaystyle\lim_{x\to-1+0} f(x) = 2\lim_{x\to-1+0}\tan^{-1}\sqrt{\tfrac{1-x}{1+x}} = 2\lim_{y\to\infty}\tan^{-1}y = \pi = f(-1)$ だから f も $[-1,1]$ で連続である. よってはじめに述べたことから, $x \in [-1,1]$ に対して $f(x) = g(x) + f(-1) - g(-1) = -\sin^{-1}x + \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ. 故に $-1 < x \leqq 1$ ならば $\sin^{-1}x + 2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{\pi}{2}$ である.

(2) 関数 $f, g : (-\infty,-1] \cup [1,\infty) \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \tan^{-1}\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, $g(x) = \tan^{-1}\sqrt{x^2-1}$ で定めると, 第 5 回の演習問題の 1 の (37), (35) から $f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{x^2-1}}$, $g'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ が成り立つため, f, g は $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ の各点 x で微分可能で, $(2f(x))' = g(x)$ である. f, g は連続だから, 任意の $x \in (-\infty,-1]$ に対して, 区間 $[x-1,-1]$ ではじめに述べた結果を用いると $2f(x) = g(x) + 2f(-1) - g(-1) = \tan^{-1}\sqrt{x^2-1} - \dfrac{\pi}{2}$ が得られる. 同様に, 任意の $x \in [1,\infty)$ に対して, 区間 $[1,x+1]$ ではじめに述べた結果を用いると $2f(x) = g(x) + 2f(1) - g(1) = \tan^{-1}\sqrt{x^2-1} + \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ. 故に $\tan^{-1}\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{x^2-1} - \frac{\pi}{4} & x \leqq -1 \\ \frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{x^2-1} + \frac{\pi}{4} & x \geqq 1 \end{cases}$ である.

(3) 関数 $f, g : [-1,1] \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$, $g(x) = 2\sin^{-1}x$ で定めると, $|x| < 1$, $x \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ならば, $f'(x) = \left(\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)\right)' = \dfrac{\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)'}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}} = \dfrac{2\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{|1-2x^2|} = \dfrac{2(1-2x^2)}{|1-2x^2|\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & |x| < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} < |x| < 1 \end{cases}$, $g'(x) = \left(2\sin^{-1}x\right)' = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ が成り立つため, f, g は $\left(-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$ の各点 x で微分可能で, $|x| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ならば $f'(x) = g'(x)$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < |x| < 1$ ならば $f'(x) = (-g(x))'$ である. f, g は連続だから, はじめに述べたことから, $x \in \left[-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ に対して $f(x) = -g(x) + f(-1) - (-g(-1)) = -2\sin^{-1}x - \pi$, $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ に対して $f(x) = g(x) + f(0) - g(0) = -2\sin^{-1}x$, $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$ に対して $f(x) = -g(x) + f(1) - (-g(1)) = -2\sin^{-1}x + \pi$ が成り立つ. 故に $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \begin{cases} -2\sin^{-1}x - \pi & -1 \leqq x \leqq -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2\sin^{-1}x & -\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -2\sin^{-1}x + \pi & \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1 \end{cases}$ である.

(4) 関数 $f, g : \left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right) \cup \left(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}\right) \cup \left(1-\sqrt{2},\infty\right) \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \tan^{-1}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1}$, $g(x) = -2\tan^{-1}x$ で定めると, 第 5 回の演習問題の 1 の (33) から $f'(x) = -\dfrac{2}{x^2+1}$, $g'(x) = -\dfrac{2}{1+x^2}$ が成り立つため, f, g は定義域の各点 x で微分可能で, $f'(x) = g(x)$ である. f, g は連続だから, 任意の $x \in \left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right)$ に対して $a < x < b < -1-\sqrt{2}$ を満たす a, b を選んで, 区間 $[a,b]$ ではじめに述べた結果を用いると, $f(x) = g(x) + f(a) - g(a) = -2\tan^{-1}x - \tan^{-1}\dfrac{a^2+2a-1}{a^2-2a-1} + 2\tan^{-1}a$ が成り立つ. この等式において $a \to -\infty$ とすれば

等式 $f(x)=-2\tan^{-1}x+\dfrac{3\pi}{4}$ が得られる．同様に, $x\in\left(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}\right)$ ならば $-1-\sqrt{2}<a<x<b<-1+\sqrt{2}$ かつ $a<0<b$ を満たす a, b を選んで, 区間 $[a,b]$ ではじめに述べた結果を用いると, $f(x)=g(x)+f(0)-g(0)=-2\tan^{-1}x+\dfrac{\pi}{4}$ が得られ, $x\in\left(-1+\sqrt{2},\infty\right)$ ならば $-1+\sqrt{2}<a<x<b$ を満たす a, b を選んで, 区間 $[a,b]$ ではじめに述べた結果を用いると, $f(x)=g(x)+f(b)-g(b)=-2\tan^{-1}x-\tan^{-1}\dfrac{b^2+2b-1}{b^2-2b-1}+2\tan^{-1}b$ を得るが, この等式において $b\to\infty$ とすれば等式 $f(x)=-2\tan^{-1}x+\dfrac{5\pi}{4}$ が得られる．

故に $\tan^{-1}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1}=\begin{cases}-2\tan^{-1}x-\frac{3\pi}{4} & x<-1-\sqrt{2}\\ -2\tan^{-1}x+\frac{\pi}{4} & -1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2}\\ -2\tan^{-1}x+\frac{5\pi}{4} & x>-1+\sqrt{2}\end{cases}$ である．

2. (1) $f(x)=(e^x+e^{-x})^2$ とおけば $f(x)=e^{2x}+e^{-2x}+2$ だから, $k\geqq 1$ ならば $f^{(k)}(x)=2^ke^{2x}+(-2)^ke^{-2x}$ となるため $f^{(k)}(0)=2^k+(-2)^k=\begin{cases}2^{k+1} & k\text{ は偶数}\\ 0 & k\text{ は奇数}\end{cases}$ である．従って $(e^x+e^{-x})^2$ を 0 の近くで近似する $n-1$ 次の多項式は, n が偶数ならば $4+\dfrac{2^3}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{2^{2k+1}}{(2k)!}x^{2k}+\cdots+\dfrac{2^{n-1}}{(n-2)!}x^{n-2}$ であり, n が奇数ならば $4+\dfrac{2^3}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{2^{2k+1}}{(2k)!}x^{2k}+\cdots+\dfrac{2^n}{(n-1)!}x^{n-1}$ である．剰余項は n が偶数の場合も奇数の場合も $\dfrac{2^ne^{2c}+(-2)^ne^{-2c}}{n!}x^n$ (c は 0 と x の間の数) である．

(2) $f(x)=\sin^2x$ とおけば $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ より, $k\geqq 1$ ならば $f^{(k)}(x)=-2^{k-1}\cos\left(2x+\dfrac{\pi k}{2}\right)$ となるため $f^{(k)}(0)=-2^{k-1}\cos\dfrac{\pi k}{2}=\begin{cases}(-1)^{\frac{k}{2}+1}2^{k-1} & k\text{ は偶数}\\ 0 & k\text{ は奇数}\end{cases}$ である．従って $\sin^2x$ を 0 の近くで近似する $n-1$ 次の多項式は, n が偶数ならば $x^2+\cdots+\dfrac{(-1)^{k+1}2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}+\cdots+\dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}2^{n-3}}{(n-2)!}x^{n-2}$ であり, n が奇数ならば $x^2+\cdots+\dfrac{(-1)^{k+1}2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}+\cdots+\dfrac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}2^{n-2}}{(n-1)!}x^{n-1}$ である．剰余項は n が偶数の場合も奇数の場合も $-\dfrac{2^{n-1}\cos\left(2c+\frac{\pi n}{2}\right)}{n!}x^n$ (c は 0 と x の間の数) である．

(3) $f(x)=\sin x\cos x$ とおけば $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x$ だから, $f^{(k)}(x)=2^{k-1}\sin\left(2x+\dfrac{\pi k}{2}\right)$ となるため $f^{(k)}(0)=2^{k-1}\sin\dfrac{\pi k}{2}=\begin{cases}(-1)^{\frac{k-1}{2}}2^{k-1} & k\text{ は奇数}\\ 0 & k\text{ は偶数}\end{cases}$ である．従って $\sin x\cos x$ を 0 の近くで近似する $n-1$ 次の多項式は, n が偶数ならば $x+\cdots+\dfrac{(-1)^k2^{2k}}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\cdots+\dfrac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}2^{n-2}}{(n-1)!}x^{n-1}$ であり, n が奇数ならば $x+\cdots+\dfrac{(-1)^k2^{2k}}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\cdots+\dfrac{(-1)^{\frac{n-3}{2}}2^{n-3}}{(n-2)!}x^{n-2}$ である．剰余項は n が偶数の場合も奇数の場合も $\dfrac{2^{n-1}\sin\left(2c+\frac{\pi n}{2}\right)}{n!}x^n$ (c は 0 と x の間の数) である．

(4) $f(x)=\log\dfrac{1+x}{1-x}$ とおけば $f(x)=\log(1+x)-\log(1-x)$ だから, $k\geqq 1$ ならば $f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}+\dfrac{(k-1)!}{(1-x)^k}$ となるため $f^{(k)}(0)=(k-1)!((-1)^{k-1}+1)=\begin{cases}2(k-1)! & k\text{ は奇数}\\ 0 & k\text{ は偶数}\end{cases}$ である．従って $\log\dfrac{1+x}{1-x}$ を 0 の近くで近似する $n-1$ 次の多項式は, n が偶数ならば $2x+\cdots+\dfrac{2}{2k+1}x^{2k+1}+\cdots+\dfrac{2}{n-1}x^{n-1}$ であり, n が奇数ならば $2x+\cdots+\dfrac{2}{2k+1}x^{2k+1}+\cdots+\dfrac{2}{n-2}x^{n-2}$ である．剰余項は n が偶数の場合も奇数の場合も $\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(1+c)^n}+\dfrac{1}{n(1-c)^n}\right)x^n$ (c は 0 と x の間の数) である．

(5) $f(x)=\sqrt{1+2x}$ とおけば $f^{(k)}(x)=2^k\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\dfrac{1}{2}-k+1\right)(1+2x)^{\frac{1}{2}-k}$ となるため, $f'(x)=(1+2x)^{\frac{1}{2}}$ であり, $k\geqq 2$ ならば $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(2k-3)!!(1+2x)^{\frac{1}{2}-k}$ である．従って $f(0)=f'(0)=1$, $k\geqq 2$ な

らば $f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(2k-3)!!$ である．故に $\sqrt{1+2x}$ を 0 の近くで近似する $n-1$ 次の多項式は, $1+x+\cdots+\dfrac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{k!}x^k+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-2}(2n-5)!!}{(n-1)!}x^{n-1}$ であり, 剰余項は $n\geqq 2$ ならば $\dfrac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!(1+2c)^{\frac{1}{2}-n}}{n!}x^n$ である．

3. テイラーの定理から $0<\theta<1$ で等式

$$(1+x)^{\frac{1}{m}}=1+\binom{\frac{1}{m}}{1}x+\cdots+\binom{\frac{1}{m}}{k}x^k+\cdots+\binom{\frac{1}{m}}{n-1}x^{n-1}+\binom{\frac{1}{m}}{n}(1+\theta x)^{\frac{1}{m}-n}x^n$$

を満たすものが存在するため, $(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を多項式 $F_n(x)=1+\binom{\frac{1}{m}}{1}x+\cdots+\binom{\frac{1}{m}}{k}x^k+\cdots+\binom{\frac{1}{m}}{n}x^n$ で近似した場合の誤差は $\binom{\frac{1}{m}}{n}\Big((1+\theta x)^{\frac{1}{m}-n}-1\Big)x^n$ である．ここで, θ の関数 $\Big|(1+\theta x)^{\frac{1}{m}-n}-1\Big|$ は単調増加関数だから $(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を多項式 $F_n(x)$ で近似した場合の誤差は $\left|\binom{\frac{1}{m}}{n}\right|\Big|(1+x)^{\frac{1}{m}-n}-1\Big||x|^n$ 以下である．$B^m<A$ の場合, $x>0$ だから $(1+x)^{-n}<(1+x)^{\frac{1}{m}-n}<1$ が成り立つため, $0<1-(1+x)^{\frac{1}{m}-n}<1-(1+x)^{-n}$ である．$B^m>A$ の場合, $-1<x<0$ だから $1<(1+x)^{\frac{1}{m}-n}<(1+x)^{-n}$ が成り立つため, $0<(1+x)^{\frac{1}{m}-n}-1<(1+x)^{-n}-1$ である．従っていずれの場合も $\Big|(1+x)^{\frac{1}{m}-n}-1\Big|\leqq|(1+x)^{-n}-1|$ が成り立つため, $(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を多項式 $F_n(x)$ で近似した場合の誤差は $\left|\binom{\frac{1}{m}}{n}\right||(1+x)^{-n}-1||x|^n$ 以下である．故に $A^{\frac{1}{m}}=B(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を多項式 $F_n(x)$ で近似した場合の誤差は $B\left|\binom{\frac{1}{m}}{n}\right||(1+x)^{-n}-1||x|^n$ 以下である．

4. (1) $m=2$, $A=3$, $B=1.7$ として問題 3 の結果を用いると, $x=\dfrac{11}{289}$ だから $\sqrt{3}$ を $\dfrac{17}{10}\sum_{k=0}^{n}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k$ で近似した誤差は $\dfrac{17}{10}\left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right|\left|\dfrac{289^n}{300^n}-1\right|\dfrac{11^n}{289^n}$ 以下である．よって, $n=2,3$ のとき, この誤差はそれぞれ $\dfrac{13327303}{601351200000}=0.000022\cdots$, $\dfrac{64768226237}{104274298080000000}=0.00000062\cdots$ 以下であり, $\dfrac{17}{10}\left(1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{11}{289}\right)-\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{11}{289}\right)^2+\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{11}{289}\right)^3\right)=1.73205094\cdots$ だから, $\sqrt{3}$ はこの値のプラスマイナス 0.00000063 の範囲 $1.73205031<\sqrt{3}<1.73205157$ にあることがわかる．よって, $\sqrt{3}$ の小数第 5 位までは 1.73205 と確定できる．($B=1.7$ のかわりに $B=2$ とすれば $n=10$ で誤差が 3.0×10^{-7} となり, $B=1.5$ とすれば $n=9$ で誤差が 7.7×10^{-7} となって, $\sqrt{3}$ の小数第 5 位まで求まる.)

(2) $m=3$, $A=2$, $B=\dfrac{5}{4}$ として問題 3 の結果を用いると, $x=\dfrac{3}{125}$ だから $\sqrt[3]{2}$ を $\dfrac{5}{4}\sum_{k=0}^{n}\binom{\frac{1}{3}}{k}x^k$ で近似した誤差は $\dfrac{5}{4}\left|\binom{\frac{1}{3}}{n}\right|\left|\dfrac{125^n}{128^n}-1\right|\dfrac{3^n}{125^n}$ 以下となり, $n=3$ のとき, この誤差は $\dfrac{48009}{655360000000}=0.000000073\cdots$ 以下である．一方 $\dfrac{5}{4}\left(1+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{125}\right)-\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{3}{125}\right)^2+\dfrac{5}{81}\left(\dfrac{3}{125}\right)^3\right)=1.259921066\cdots$ だから, $\sqrt[3]{2}$ はこの値のプラスマイナス 0.000000074 の範囲 $1.259920992<\sqrt[3]{2}<1.25992114$ にあることがわかる．よって, $\sqrt[3]{2}$ の小数第 5 位までは 1.25992 と確定できる．($B=1.2$ とすれば $n=6$ で誤差が 2.5×10^{-7} となって, $\sqrt[3]{2}$ の小数第 5 位まで求まる.)

(3) 0 と 1 の間に $e=\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{k!}+\dfrac{e^c}{n!}$ を満たす c が存在するため, e を $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$ で近似した誤差は $\dfrac{e^c-1}{n!}$ であり, この値は $\dfrac{2}{n!}$ より小さい正の数である．$n=10$ のとき, $\dfrac{2}{10!}=0.00000055\cdots$ であり, $\sum_{k=0}^{10}\dfrac{1}{k!}=2.71828180\cdots$ だから e はこの値のプラスマイナス 0.00000056 の範囲 $2.71828125<e<2.71828235$ にあることがわかる．よって e 小数第 5 位までは 2.71828 と確定できる．

(4) テイラーの定理から $\log(1+x)=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}+\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+c)^n}$ を満たす c が 0 と x の間にある．従って $\log(1+x)$ を $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$ で近似した誤差は $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\dfrac{1}{(1+c)^n}-1\right)x^n$ である．ここで, $\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\dfrac{1}{(1+c)^n}-1\right)x^n\right|\leqq\dfrac{1}{n}\left|\dfrac{1}{(1+x)^n}-1\right||x|^n$ だから, $\log(1+x)$ を $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$ で近似した誤差は $\dfrac{1}{n}\left|\dfrac{1}{(1+x)^n}-1\right||x|^n$ 以下である．

上のことから, $\log(1+x)$ の近似式 $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ に $x=1$ を代入して, 誤差が 10^{-6} 以下になるためには $n=10^6$ として計算する必要があるため, 非効率的である. そこで正の実数 a と $ps-qr\neq 0$ を満たす整数 p, q, r, s を $\frac{a^r}{2^p}$, $\frac{a^s}{2^q}$ ができるだけ 1 に近くなるように選んで $A=\log\frac{a^r}{2^p}$, $B=\log\frac{a^s}{2^q}$ とおく. $\begin{cases} r\log a - p\log 2 = A \\ s\log a - q\log 2 = B \end{cases}$ だから, $\log 2 = \frac{As-Br}{qr-ps}$ であり, この等式に A と B の近似値を代入することによって, $\log 2$ の近似値を得る.

$a=3$, $p=3$, $q=8$, $r=2$, $s=5$ と選べば, $\log 2 = 5A-2B$ であり, $A=\log\frac{9}{8}=\log\left(1+\frac{1}{8}\right)$, $B=\log\frac{243}{256}=\log\left(1-\frac{13}{256}\right)$ である. $5A$ を $5\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k8^k}$ で近似した誤差は $\frac{5}{n}\left(\frac{1}{8^n}-\frac{1}{9^n}\right)$ 以下で, この値は $n=7$ のとき 2.0×10^{-7} より小さい. $5\sum_{k=1}^{7}\frac{(-1)^{k-1}}{k8^k}=0.58891521\cdots$ だから $5A$ は $0.58891501<5A<0.58891541$ の範囲にある. $-2B$ を $2\sum_{k=1}^{n}\frac{13^k}{k256^k}$ で近似した誤差は $\frac{2}{n}\left(\frac{13^n}{243^n}-\frac{13^n}{256^n}\right)$ 以下で, この値は $n=4$ のとき, 7.8×10^{-7} より小さい. $2\sum_{k=1}^{4}\frac{13^k}{k256^k}=0.10423186\cdots$ だから $-2B$ は $0.10423104<-2B<0.10423264$ の範囲にある. 故に $\log 2 = 5A-2B$ は $0.69314605<\log 2<0.69314805$ の範囲にあるため, $\log 2$ の小数第 5 位までは 0.69314 と確定できる. (ついでに, $\log 3 = 8A-3B$ より, $\log 3$ の近似値 1.09861 が得られる.)

5. (1) $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$ だから $\sin x - x\cos x = \frac{x^3}{3}+o(x^3)$ である. 従って $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=\frac{1}{3}$ となるため, $\alpha=3$ であり, このときの極限値は $\frac{1}{3}$ である. $\alpha<3$ ならば $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}x^{3-\alpha}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\right)\left(\lim_{x\to 0}x^{3-\alpha}\right)=\frac{1}{3}\cdot 0=0$ であり, $\alpha>4$ ならば $\lim_{x\to +0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^\alpha}=\lim_{x\to +0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\frac{1}{x^{\alpha-3}}=\left(\lim_{x\to +0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\right)\left(\lim_{x\to +0}\frac{1}{x^{\alpha-3}}\right)=\infty$ となるため, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^\alpha}$ が 0 でない値に収束するような α は 3 だけである.

(2) $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$ だから $x\sin x+2\cos x-2=-\frac{x^4}{12}+o(x^4)$ である. 従って $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+2\cos x-2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{12}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right)=-\frac{1}{12}$ となるため, $\alpha=4$ のとき $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+2\cos x-2}{x^\alpha}$ は 0 でない値 $-\frac{1}{12}$ に収束する. $\alpha<4$ ならば $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+2\cos x-2}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+2\cos x-2}{x^4}x^{4-\alpha}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+2\cos x-2}{x^4}\right)\left(\lim_{x\to 0}x^{4-\alpha}\right)=-\frac{1}{12}\cdot 0=0$ であり, $\alpha>4$ ならば $\lim_{x\to +0}\frac{x\sin x+2\cos x-2}{x^\alpha}=\lim_{x\to +0}\frac{x\sin x+2\cos x-2}{x^4}\frac{1}{x^{\alpha-4}}=\left(\lim_{x\to +0}\frac{x\sin x+2\cos x-2}{x^4}\right)\left(\lim_{x\to +0}\frac{1}{x^{\alpha-4}}\right)=-\infty$ となるため, $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+2\cos x-2}{x^\alpha}$ が 0 でない値に収束するような α は 4 だけである.

(3) $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$, $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ だから $\cos x - e^x + x = -x^2+o(x^3)$ である. 従って $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^x + x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+o(x^3)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(-1+\frac{xo(x^3)}{x^3}\right)=-1$ となるため, $\alpha=2$ のとき $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^x + x}{x^\alpha}$ は 0 でない値 -1 に収束する. $\alpha<2$ ならば $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^x + x}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^x + x}{x^2}x^{2-\alpha}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^x + x}{x^2}\right)\left(\lim_{x\to 0}x^{2-\alpha}\right)=-1\cdot 0=0$ であり, $\alpha>2$ ならば $\lim_{x\to +0}\frac{\cos x - e^x + x}{x^\alpha}=\lim_{x\to +0}\frac{\cos x - e^x + x}{x^2}\frac{1}{x^{\alpha-2}}=\left(\lim_{x\to +0}\frac{\cos x - e^x + x}{x^2}\right)\left(\lim_{x\to +0}\frac{1}{x^{\alpha-2}}\right)=-\infty$ となるため, $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^x + x}{x^\alpha}$ が 0 でない値に収束するような α は 2 だけである.

(4) $\frac{e^x-\frac{1+\alpha x}{1+\beta x}}{x^3}=\frac{(1+\beta x)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-1-\alpha x}{x^3(1+\beta x)}=\frac{1-\alpha+\beta+\left(\beta+\frac{1}{2}\right)x}{x^2(1+\beta x)}+\frac{3\beta+1}{6(1+\beta x)}+\frac{o(x^3)}{x^3(1+\beta x)}$ だから $\frac{1-\alpha+\beta+\left(\beta+\frac{1}{2}\right)x}{x^2(1+\beta x)}=\frac{e^x-\frac{1+\alpha x}{1+\beta x}}{x^3}-\frac{3\beta+1}{6(1+\beta x)}-\frac{o(x^3)}{x^3(1+\beta x)}$ であり, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\beta+1}{6(1+\beta x)}+\frac{o(x^3)}{x^3(1+\beta x)}\right)=$

$\dfrac{3\beta+1}{6}$ が成り立つため, 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{1+\alpha x}{1+\beta x}}{x^3}$ が存在すれば極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\alpha+\beta+\left(\beta+\frac{1}{2}\right)x}{x^2(1+\beta x)}$ も存在する. $x\to 0$ のとき, $x^2(1+\beta x)\to 0$ だから, この極限値が存在するためには $1-\alpha+\beta=\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1-\alpha+\beta+\left(\beta+\tfrac{1}{2}\right)x\right)=0$ であることが必要である. 従って $\alpha=\beta+1$ であり, このとき $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\alpha+\beta+\left(\beta+\frac{1}{2}\right)x}{x^2(1+\beta x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\beta+\frac{1}{2}}{x(1+\beta x)}$ であり, この極限値が存在するのは $\beta=-\dfrac{1}{2}$ の場合に限る. 故に $\alpha=\dfrac{1}{2}$ であり, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{1+\alpha x}{1+\beta x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\beta+1}{6(1+\beta x)}+\frac{o(x^3)}{x^3(1+\beta x)}\right)=\frac{3\beta+1}{6}=\frac{1}{18}$ である.

6. $f(0)=0$ または $f(1)=1$ ならば $f(c)=c$ を満たす $c\in[0,1]$ は存在する. $f(0)\neq 0$ かつ $f(1)\neq 1$ の場合, 関数 $F:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ を $F(x)=f(x)-x$ で定めれば, F は連続で, $F(0)=f(0)>0$ かつ $F(1)=f(1)-1<0$ だから, 中間値の定理から $F(c)=0$ を満たす $c\in(0,1)$ が存在する. このとき c は $f(c)=c$ を満たす. $c,d\in[0,1]$ $(c<d)$ で $f(c)=c$, $f(d)=d$ を満たすものが存在すると仮定すれば, $F(c)=F(d)=0$ であり, F は連続関数で, $(0,1)$ の各点で微分可能だから, ロルの定理から $F'(p)=0$ を満たす $p\in(c,d)$ が存在する. $F'(x)=f'(x)-1$ だから $f'(p)-1=F'(p)=0$ となって, すべての $x\in(0,1)$ に対して $f'(x)\neq 1$ であるという仮定と矛盾する. 従って $f(c)=c$ を満たす $c\in[0,1]$ はただ 1 つしか存在しない.

7. (1) $f_n'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-x^2)^i=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}=\frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$ より, 0 でない x に対し, n が偶数ならば $f_n'(x)<0$, n が奇数ならば $f_n'(x)>0$ である. 従って n が偶数ならば f_n は狭義単調減少関数であり, n が奇数ならば f_n は狭義単調増加関数である.

(2) 上の結果から, $x>0$ ならば $f_{2k}(x)<f_{2k}(0)=0$, $f_{2k-1}(x)>f_{2k-1}(0)=0$ が成り立つ. 一方 $f_{2k}(x)=\tan^{-1}x-\displaystyle\sum_{i=0}^{2k}(-1)^i\frac{x^{2i+1}}{2i+1}$, $f_{2k-1}(x)=\tan^{-1}x-\displaystyle\sum_{i=0}^{2k-1}(-1)^i\frac{x^{2i+1}}{2i+1}$ だから, 上の不等式から $\displaystyle\sum_{i=0}^{2k-1}(-1)^i\frac{x^{2i+1}}{2i+1}<\tan^{-1}x<\sum_{i=0}^{2k}(-1)^i\frac{x^{2i+1}}{2i+1}$ が得られる.

8. e^x に関するマクローリンの定理から $x>0$ ならば $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}$ だから $x=1$ を代入すれば $e-2>\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{24}=\dfrac{17}{24}>0.7$ であることがわかる. また, $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ でもあるため, $x=e-2$ を代入し, $1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ が x の単調増加関数であることに注意すれば, $e-2>0.7$ より $e^{e-2}>1+e-2+\dfrac{(e-2)^2}{2}+\dfrac{(e-2)^3}{6}>1.7+\dfrac{(0.7)^2}{2}+\dfrac{(0.7)^3}{6}=2.0021666666\cdots>2$ が成り立つ. 従って $e^{e-2}>2$ である.

9. 平均値の定理から $x_{n+1}-\alpha=f(x_n)-f(\alpha)=f'(c_n)(x_n-\alpha)$ をみたす c_n が x_n と α の間にある. 従って $|x_{n+1}-\alpha|=|f'(c_n)||x_n-\alpha|\leqq M|x_n-\alpha|$ が任意の n に対して成り立つため,

$$|x_n-\alpha|\leqq M|x_{n-1}-\alpha|\leqq M^2|x_{n-2}-\alpha|\leqq\cdots\leqq M^{n-1}|x_1-\alpha|$$

となり, $|x_n-\alpha|\leqq M^{n-1}|x_1-\alpha|$ がすべての n に対して成り立つ.

10. $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$ とおけば $f'(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$, $f''(x)=\dfrac{2}{\cos^3 x}-\dfrac{1}{\cos x}$, $f^{(3)}(x)=\dfrac{6\sin x}{\cos^4 x}-\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ だから $f(0)=1$, $f'(0)=f^{(3)}(0)=0$, $f''(0)=1$ である. 従ってテイラーの定理から

$$\frac{1}{\cos x}=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+o(x^3)=1+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\quad(x\to 0)$$

となるため $a_0=1$, $a_1=0$, $a_2=\dfrac{1}{2}$ である. テイラーの定理から $x\neq 0$ に対し, 0 と x の間の数 c で, 次の等式を満たすものがある.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{\cos c}{24}x^4\ \cdots(i)$$

$0<|x|<\sqrt{2}$ ならば $|x|<\dfrac{\pi}{2}$ だから $0<c<x$ と $x<c<0$ のいずれの場合でも $0<\cos x<\cos c<1$ である．従って (i) から次の不等式が得られる．

$$1-\frac{x^2}{2} \leqq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{\cos x}{24}x^4 \leqq \cos x \leqq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

$|x|<\sqrt{2}$ だから $1-\dfrac{x^2}{2}>0$ であることに注意して, 上式の各辺の逆数をとり, $1+\dfrac{x^2}{2}$ を各辺から引いて, 不等式

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}}-\left(1+\frac{x^2}{2}\right) \leqq \frac{1}{\cos x}-\left(1+\frac{x^2}{2}\right) \leqq \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}}-\left(1+\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^4}{2(2-x^2)} \quad \cdots(ii)$$

を得る．ここで, $|x|<\sqrt{2}$ ならば $0\leqq x^2<2$ だから $\dfrac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}}-\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)=\dfrac{x^4(10-x^2)}{2((x^2-6)^2-12)}\geqq 0$ となるため (ii) より $0\leqq \dfrac{1}{\cos x}-\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)\leqq \dfrac{x^4}{2(2-x^2)}$ が得られる．

11. (1) まず f は連続で $f(a)f(b)<0$ だから中間値の定理により, $f(\alpha)=0$ を満たす $\alpha\in(a,b)$ は存在する．もし, f' が (a,b) において一定符号ならば f は単調増加または単調減少だから $f(\alpha)=0$ を満たす α はただ 1 つである．f' が (a,b) において符号を変える場合を考えると, f' の連続性により, 中間値の定理から $f'(\beta)=0$ を満たす $\beta\in(a,b)$ が存在する．$x\in(a,b)$ に対して $f''(x)>0$ だから f' は単調増加関数である．従って, (a,β) において f' は負の値をとり, (β,b) において f' は正の値をとるため, f は $[a,\beta]$ において単調に減少し, $[\beta,b]$ において単調に増加する．このとき $f(\beta)$ は f の最小値で, f は (a,b) において負の値もとるため $f(\beta)<0$ である．$f(a)<0$ の場合, $x\in[a,\beta]$ ならば $f(x)\leqq f(a)<0$ だから, 区間 $[a,\beta]$ では $f(x)\neq 0$ である．故にこの場合は, $f(x)=0$ を満たす x は f が単調増加である区間 $[\beta,b]$ に存在するため, そのような x はただ 1 つしかない．$f(b)<0$ の場合, $x\in[\beta,b]$ ならば $f(x)\leqq f(b)<0$ だから, 区間 $[\beta,b]$ では $f(x)\neq 0$ である．この場合は, $f(x)=0$ を満たす x は f が単調減少である区間 $[a,\beta]$ に存在するため, そのような x はただ 1 つしかない．

(2) $\alpha<p$ のとき, $f(\alpha)=0<f(p)$ だから区間 $[\alpha,p]$ は f が増加する区間を含むため (1) の議論から $[a,b]$ において f' がつねに正の値をとるか, または $f'(\beta)=0$ となる $\beta<p$ がある．$f(\beta)<0<f(p)$ だから区間 (β,p) に $f(x)=0$ を満たす x が存在して, そのような x は α に限るため $\beta<\alpha<p$ である．従って (1) で示したことにより区間 $[\alpha,b)$ において f' は正の値をとる．

$\alpha>p$ のとき, $f(\alpha)=0<f(p)$ だから区間 $[p,\alpha]$ は f が減少する区間を含むため (1) の議論から $[a,b]$ において f' がつねに負の値をとるか, または $f'(\beta)=0$ となる $\beta>p$ がある．$f(\beta)<0<f(p)$ だから区間 (p,β) に $f(x)=0$ を満たす x が存在して, そのような x は α に限るため $p<\alpha<\beta$ である．従って (1) で示したことにより区間 (a,α) において f' は負の値をとる．

(3) $\alpha<p$ のとき, $x\in(\alpha,p]$ が $f(x)>0$ を満たすとすれば (2) より $f'(x)>0$ だから $x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}<x$ である．また, 平均値の定理から $f(x)=f(x)-f(\alpha)=f'(c_x)(x-\alpha)$ を満たす $c_x\in(\alpha,x)$ がある．f' は単調増加関数だから $f'(c_x)<f'(x)$ であることに注意すれば $x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}-\alpha=x-\alpha-\dfrac{f'(c_x)(x-\alpha)}{f'(x)}=\dfrac{(f'(x)-f'(c_x))(x-\alpha)}{f'(x)}>0$ である．従って $x_{n-1}\in(\alpha,p]$, $f(x_{n-1})>0$ ならば $\alpha<x_n<x_{n-1}$ となるため, n による帰納法で主張が示される．

$\alpha>p$ のとき, $x\in[p,\alpha)$ が $f(x)>0$ を満たすとすれば (2) より $f'(x)<0$ だから $x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}>x$ である．また, 平均値の定理から $f(x)=f(x)-f(\alpha)=f'(c_x)(x-\alpha)$ を満たす $c_x\in(x,\alpha)$ がある．f' は単調増加関数だから $f'(c_x)>f'(x)$ であることに注意すれば $x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}-\alpha=x-\alpha-\dfrac{f'(c_x)(x-\alpha)}{f'(x)}=\dfrac{(f'(c_x)-f'(x))(\alpha-x)}{f'(x)}<0$ である．従って $x_{n-1}\in(\alpha,p]$, $f(x_{n-1})>0$ ならば $\alpha>x_n>x_{n-1}$ となるため, n による帰納法で主張が示される．

12. $b>0$ に対し, 関数 $F:[0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ を $F(x)=bf(x)-xf(b)$ によって定めれば F は連続で, $F(0)=F(b)=0$ である．$F(c)>0$ となる $c\in(0,b)$ が存在すると仮定すれば, 平均値の定理によって $F(c)=F(c)-F(0)=F'(p)c$ を満たす $p\in(0,c)$ と $-F(c)=F(b)-F(c)=F'(q)(b-c)$ を満たす $q\in(c,b)$ が存在する．$x>0$ ならば $F'(x)=bf'(x)-f(b)$ であり, $F(c)>0$ だから $bf'(p)-f(b)=F'(p)>0>F'(q)=bf'(q)-f(b)$ が得られる．従っ

て $f'(p) > f'(q)$ となり, これは f' が単調増加関数であるという仮定と矛盾する. 故に, 任意の $a \in (0, b)$ に対して $bf(a) - af(b) = F(a) \leqq 0$ だから $g(a) = \dfrac{f(a)}{a} \leqq \dfrac{f(b)}{b} = g(b)$ となるため, g は単調増加関数である.

13. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = f'(1) = 0$ より, テイラーの定理から $x \in (0, 1)$ に対し, $f(x) = \dfrac{f''(p_x)}{2}x^2$ を満たす $0 < p_x < x$ と $f(x) = 1 + \dfrac{f''(q_x)}{2}(x-1)^2$ を満たす $x < q_x < 1$ が存在する. とくに $x = \dfrac{1}{2}$ ならば $\dfrac{f''\bigl(p_{\frac{1}{2}}\bigr)}{8} = f\bigl(\frac{1}{2}\bigr) = 1 + \dfrac{f''\bigl(q_{\frac{1}{2}}\bigr)}{8}$ だから $\dfrac{f''\bigl(p_{\frac{1}{2}}\bigr)}{8} - \dfrac{f''\bigl(q_{\frac{1}{2}}\bigr)}{8} = 1$, 従って $f''\bigl(p_{\frac{1}{2}}\bigr) - f''\bigl(q_{\frac{1}{2}}\bigr) = 8$ が成り立つ. もし, すべての $x \in [0, 1]$ に対して $|f''(x)| < 4$ ならば, $\bigl|f''\bigl(p_{\frac{1}{2}}\bigr) - f''\bigl(q_{\frac{1}{2}}\bigr)\bigr| \leqq \bigl|f''\bigl(p_{\frac{1}{2}}\bigr)\bigr| + \bigl|f''\bigl(q_{\frac{1}{2}}\bigr)\bigr| < 8$ となるため, 上式と矛盾する. 故に $|f''(c)| \geqq 4$ となる $c \in [0, 1]$ が存在する.

14. $A = 0$ ならば主張は明らかだから, $A > 0$ とする. また, $B = 0$ ならば f' は定数値関数だから f は 1 次関数であるが, f は有界であるため, f は定数値関数に限られる. 従って f' はつねに値が 0 である定数値関数になるため, 主張が成り立つ. 以下では $B > 0$ の場合を考える.

$g(x) = \dfrac{f(x)}{A}$ によって $g : (0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ を定め, $C = \dfrac{B}{A}$ とおけば, g は 2 回微分可能であり, すべての $x \in (0, \infty)$ に対して $|g(x)| \leqq 1$, $|g''(x)| \leqq C$ が成り立つ. $g'(a) > 2\sqrt{C}$ を満たす $a > 0$ が存在すると仮定する. テイラーの定理から

$$g\left(a + \frac{2}{\sqrt{C}}\right) = g(a) + \frac{2g'(a)}{\sqrt{C}} + \frac{2g''(c)}{C}$$

を満たす $a < c < a + \dfrac{2}{\sqrt{C}}$ が存在する. 仮定から $g(a) \geqq -1$, $g''(c) \geqq -C$, $g'(a) > 2\sqrt{C}$ だから, 上式の右辺は 1 より大きくなり, $g\left(a + \dfrac{2}{\sqrt{C}}\right) \leqq 1$ であることと矛盾する. 故に, すべての $x \in (0, \infty)$ に対して $g'(x) \leqq 2\sqrt{C}$ である. $-g$ は 2 回微分可能であり, すべての $x \in (0, \infty)$ に対して $|(-g)(x)| \leqq 1$, $|(-g)''(x)| \leqq C$ が成り立つため, 上で示したことから, すべての $x \in (0, \infty)$ に対して $-g'(x) = (-g)'(x) \leqq 2\sqrt{C}$ である. 従って すべての $x \in (0, \infty)$ に対して $|g'(x)| \leqq 2\sqrt{C} = 2\sqrt{\dfrac{B}{A}}$ が成り立つため, $g(x) = \dfrac{f(x)}{A}$ を代入すれば $|f'(x)| \leqq 2\sqrt{AB}$ が得られる.

15. (1) $f(b) = f(a)$ を満たす $b > a$ が存在する場合は, 閉区間 $[a, b]$ におけるロルの定理から $f'(\xi) = 0$ を満たす $a < \xi < b$ が存在する. 任意の $x > a$ に対して $f(x) \neq f(a)$ であると仮定すれば, f の連続性から中間値の定理により, $f(x) > f(a)$ がすべての $x > a$ に対して成り立つか, または $f(x) < f(a)$ がすべての $x > a$ に対して成り立つ.

前者の場合, a より大きい実数 b を 1 つ選べば $f(b) > f(a)$ であり, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$ だから $K > b$ で条件「$x > K$ ならば $f(x) - f(a) < f(b) - f(a)$」を満たすものが存在する. 従って $q > K$ を満たす q を選べば $f(a) < f(q) < f(b)$ だから, 閉区間 $[a, b]$ における中間値の定理により $f(p) = f(q)$ を満たす $a < p < b$ が存在する. $p < b < K < q$ に注意して閉区間 $[p, q]$ におけるロルの定理を用いると $f'(\xi) = 0$ を満たす $p < \xi < q$ が存在する.

後者の場合 $g(x) = -f(x)$ によって関数 g を定めれば前者の場合に帰着する.

［補足］区間 $(-\infty, a]$ 上の連続関数 f が (∞, a) の各点で微分可能であり, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = f(a)$ を満たすとき, $g(x) = f(-x)$ によって区間 $[-a, \infty)$ 上の関数 g を定めれば g は $(-a, \infty)$ の各点で微分可能であり, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = g(-a)$ が成り立つため, 上の結果から $g'(\zeta) = 0$ を満たす $\zeta > -a$ が存在する. そこで, $\xi = -\zeta$ とおけば $\xi < a$ であり, $f'(\xi) = g'(\zeta) = 0$ が成り立つ.

(2) l が実数の場合, $f(\alpha) < l < f(\beta)$ を満たす実数 α, β が存在すれば中間値の定理によって $f(a) = l$ を満たす実数 a が存在するため, (1) の結果によって $f'(\xi) = 0$ を満たす実数 ξ が存在する. $f(x) > l$ がすべての実数 x に対して成り立つと仮定する. $a < b$ に対し, $f(a) = f(b)$ が成り立てば, 閉区間 $[a, b]$ におけるロルの定理から $f'(\xi) = 0$ を満たす $a < \xi < b$ が存在する. $f(a) < f(b)$ が成り立つとき, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ より $K > b$ で条件「$x > K$ ならば $f(x) - l < f(a) - l$」を満たすものが存在する. 従って $q > K$ を満たす q を選べば $f(q) < f(a) < f(b)$ だから, 閉区間 $[b, q]$ における中間値の定理により $f(p) = f(a)$ を満たす $b < p < q$ が存在する. そこで閉区間 $[a, p]$ におけるロルの定理を用いると $f'(\xi) = 0$ を満たす $a < \xi < p$ が存在する. $f(a) > f(b)$ が成り立つとき, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ だから $K < a$ で条件「$x < K$ ならば $f(x) - l < f(b) - l$」を満たすものが存在する. 従って $p < K$ を満たす p を選べ

ば $f(p) < f(b) < f(a)$ だから, 閉区間 $[p, a]$ における中間値の定理により $f(q) = f(b)$ を満たす $p < q < a$ が存在する．そこで閉区間 $[b, q]$ におけるロルの定理を用いると $f'(\xi) = 0$ を満たす $b < \xi < q$ が存在する．$f(x) < l$ がすべての実数 x に対して成り立つとき, $g(x) = -f(x)$ によって関数 g を定めれば $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = -l$ であり, $g(x) > -l$ がすべての実数 x に対して成り立つため, 上で示したことから, $g'(\xi) = 0$ を満たす実数 ξ が存在する．このとき, $f'(\xi) = -g'(\xi) = 0$ が成り立つ.

$l = \infty$ の場合, 仮定から, 実数 K, L $(K < L)$ で条件「$x < K$ または $x > L$ ならば $f(x) > f(0)$」を満たすものが存在する．このとき, $0 \in [K, L]$ であることに注意する．f の連続性から, 最大値・最小値の定理によって, 閉区間 $[K, L]$ における f の最小値が存在する．$\xi \in [K, L]$ において f が $[K, L]$ における最小値をとるとする．このとき, $f(\xi) \leqq f(0)$ であり, 任意の実数 x に対し,「$x < K$ または $x > L$ ならば $f(x) > f(0) \leqq f(\xi)$」かつ「$x \in [K, L]$ ならば $f(x) \geqq f(\xi)$」が成り立つため, f は ξ で最小値をとる．f は微分可能だから $f'(\xi) = 0$ が成り立つ．$l = -\infty$ の場合, $g(x) = -f(x)$ によって関数 g を定めれば $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty$ だから, 上で示したことから, $g'(\xi) = 0$ を満たす実数 ξ が存在する．このとき, $f'(\xi) = -g'(\xi) = 0$ が成り立つ.

16. (1) k による数学的帰納法で, $k = 1, 2, \ldots, n$ に対し, 方程式 $f^{(k)}(x) = 0$ は (a, b) に相異なる k 個の解をもつことを示す．まず, $f(a) = f(b) = 0$ だから, ロルの定理により $f'(\xi) = 0$ を満たす $\xi \in (a, b)$ があるため, $k = 1$ のときは主張は正しい．$2 \leqq k \leqq n$ として, 方程式 $f^{(k-1)}(x) = 0$ は (a, b) に相異なる $k - 1$ 個の解をもつと仮定し, $a < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{k-1} < b$ を $f^{(k-1)}(x) = 0$ の解とする．$\xi_0 = a$, $\xi_k = b$ とおけば, $f^{(k-1)}(\xi_{i-1}) = f^{(k-1)}(\xi_i) = 0$ が $i = 1, 2, \ldots, k$ に対して成り立つため, 区間 $[\xi_{i-1}, \xi_i]$ においてロルの定理を用いると, $f^{(k)}(\zeta_i) = 0$ を満たす $\xi_{i-1} < \zeta_i < \xi_i$ が存在する．このとき $a < \zeta_1 < \xi_1 < \zeta_2 < \xi_2 < \cdots < \xi_{k-1} < \zeta_k < b$ だから $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ は (a, b) における $f^{(k)}(x) = 0$ の相異なる k 個の解である．故に $k = n$ のとき, $f^{(k)}(x) = 0$ は (a, b) において相異なる n 個の解をもつ.

(2) k による数学的帰納法で, $k = 1, 2, \ldots, n$ に対し, 方程式 $f^{(k)}(x) = 0$ は (a, ∞) に相異なる k 個の解をもつことを示す．まず, $f(a) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ だから, 問題 15 の (1) の結果により $f'(\xi) = 0$ を満たす $\xi \in (a, \infty)$ があるため, $k = 1$ のときは主張は正しい．$2 \leqq k \leqq n$ として, 方程式 $f^{(k-1)}(x) = 0$ は (a, ∞) に相異なる $k - 1$ 個の解 $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{k-1}$ をもつと仮定し, $\xi_0 = a$ とおく．$i = 1, 2, \ldots, k - 1$ に対して $f^{(k-1)}(\xi_{i-1}) = f^{(k-1)}(\xi_i) = 0$ が成り立つため, 区間 $[\xi_{i-1}, \xi_i]$ においてロルの定理を用いると, $f^{(k)}(\zeta_i) = 0$ を満たす $\xi_{i-1} < \zeta_i < \xi_i$ が存在する．また, $f^{(k-1)}(\xi_{k-1}) = \lim_{x\to\infty} f^{(k-1)}(x) = 0$ が成り立つため, 問題 15 の (1) の結果により $f^{(k)}(\zeta_k) = 0$ を満たす $\zeta_k \in (\xi_{k-1}, \infty)$ がある．このとき $a < \zeta_1 < \xi_1 < \zeta_2 < \xi_2 < \cdots < \xi_{k-1} < \zeta_k$ だから $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ は (a, ∞) における $f^{(k)}(x) = 0$ の相異なる k 個の解である．故に $k = n$ のとき, $f^{(k)}(x) = 0$ は (a, ∞) において相異なる n 個の解をもつ.

(3) k による数学的帰納法で, $k = 1, 2, \ldots, n$ に対し, 方程式 $f^{(k)}(x) = 0$ は相異なる k 個の解をもつことを示す. まず, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ だから, 問題 15 の (2) の結果により $f'(\xi) = 0$ を満たす実数 ξ があるため, $k = 1$ のときは主張は正しい．$2 \leqq k \leqq n$ として, 方程式 $f^{(k-1)}(x) = 0$ は $k - 1$ 個の解 $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{k-1}$ をもつと仮定する．$i = 2, 3, \ldots, k - 1$ に対して $f^{(k-1)}(\xi_{i-1}) = f^{(k-1)}(\xi_i) = 0$ が成り立つため, 区間 $[\xi_{i-1}, \xi_i]$ においてロルの定理を用いると, $f^{(k)}(\zeta_i) = 0$ を満たす $\xi_{i-1} < \zeta_i < \xi_i$ が存在する．また, $f^{(k-1)}(\xi_1) = \lim_{x\to-\infty} f^{(k-1)}(x) = 0$ と $f^{(k-1)}(\xi_{k-1}) = \lim_{x\to\infty} f^{(k-1)}(x) = 0$ が成り立つため, 問題 15 の (1) の結果により $f^{(k)}(\zeta_1) = 0$ を満たす $\zeta_1 \in (-\infty, \xi_1)$ と $f^{(k)}(\zeta_k) = 0$ を満たす $\zeta_k \in (\xi_{k-1}, \infty)$ がある．このとき $\zeta_1 < \xi_1 < \zeta_2 < \xi_2 < \cdots < \xi_{k-1} < \zeta_k$ だから $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ は (a, ∞) における $f^{(k)}(x) = 0$ の相異なる k 個の解である．故に $k = n$ のとき, $f^{(k)}(x) = 0$ は (a, ∞) において相異なる n 個の解をもつ.

［注意］上の証明から, $f^{(n)}(x) = 0$ の n 個の相異なる解 $\zeta_1 < \zeta_2 < \cdots < \zeta_n$ と $f^{(n-1)}(x) = 0$ の $n - 1$ 個の相異なる解 $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{n-1}$ で $k = 2, 3, \ldots, n$ $\zeta_{k-1} < \xi_{k-1} < \zeta_k$ を満たすものが存在する.

17. (1) $f(x) = (x^2 - 1)^n$ で関数 f を定めれば, $(x^2 - 1)f'(x) = 2nx(x^2 - 1)^n = 2nxf(x)$ だから, この等式の両辺を x で $k + 1$ 回微分すると, ライプニッツの公式から, 左辺は

$$(x^2 - 1)f^{(k+2)}(x) + 2(k + 1)xf^{(k+1)}(x) + k(k + 1)f^{(k)}(x)$$

であり, 右辺は $2nxf^{(k+1)}(x)+2n(k+1)f^{(k)}(x)$ だから

$$(x^2-1)f^{(k+2)}(x)+2(k-n+1)xf^{(k+1)}(x)+(k-2n)(k+1)f^{(k)}(x)=0 \cdots (*)$$

が得られる. とくに $k=n$ の場合, $f^{(n)}(x)=2^n n! P_n(x)$ だから $f^{(n+1)}(x)=2^n n! P_n'(x)$, $f^{(n+2)}(x)=2^n n! P_n''(x)$ となるため, これらを $(*)$ に代入して, 両辺を $2^n n!$ で割って $(x^2-1)P_n''(x)+2xP_n'(x)-n(n+1)P_n(x)=0$ を得る.

$$\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}(x^2-1)^{n+1}=\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}((x^2-1)f(x))=(x^2-1)f^{(n+2)}(x)+2(n+2)xf^{(n+1)}(x)+(n+2)(n+1)f^{(n)}(x)$$

であり, この両辺を $2^{n+1}(n+1)!$ で割れば次の等式が得られる.

$$P_{n+1}'(x)=\frac{x^2-1}{2(n+1)}P_n''(x)+\frac{(n+2)x}{n+1}P_n'(x)+\frac{n+2}{2}P_n(x)$$

上で得た $(x^2-1)P_n''(x)=-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)$ を上式に代入すれば

$$P_{n+1}'(x)=\frac{1}{2(n+1)}(-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x))+\frac{(n+2)x}{n+1}P_n'(x)+\frac{n+2}{2}P_n(x)=(n+1)P_n(x)+xP_n'(x).$$

(2) $(x^2-1)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{2n-2k}$ であり, $\left(x^{2n-2k}\right)^{(n)}=\dfrac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}x^{n-2k}$ だから次の等式が成り立つ.

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k}{2^n n!}\binom{n}{k}\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}x^{n-2k}=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k-1)!!}{(2k)!!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

$c_{n,k}=\dfrac{(-1)^k(2n-2k-1)!!}{(2k)!!(n-2k)!}$ とおけば上式から次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}P_{n+1}(x)-xP_n(x)-\frac{x^2-1}{n+1}P_n'(x)&=\sum_{k=0}^{[\frac{n+1}{2}]}c_{n+1,k}x^{n-2k+1}-\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}c_{n,k}x^{n-2k+1}-\frac{x^2-1}{n+1}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(n-2k)c_{n,k}x^{n-2k-1}\\&=\sum_{k=0}^{[\frac{n+1}{2}]}c_{n+1,k}x^{n-2k+1}-\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{2n-2k+1}{n+1}c_{n,k}x^{n-2k+1}+\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{n-2k}{n+1}c_{n,k}x^{n-2k-1}\\&=\left(c_{n+1,0}-c_{n,0}-\frac{nc_{n,0}}{n+1}\right)x^{n+1}+\sum_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]}c_{n+1,k}x^{n-2k+1}\\&\quad-\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}\frac{2n-2k+1}{n+1}c_{n,k}x^{n-2k+1}+\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]+1}\frac{n-2k+2}{n+1}c_{n,k-1}x^{n-2k+1}\end{aligned}$$

故に $P_{n+1}(x)-xP_n(x)-\dfrac{x^2-1}{n+1}P_n'(x)$ の x^i の係数を α_i とおけば,

$$\alpha_{n+1}=c_{n+1,0}-c_{n,0}-\frac{nc_{n,0}}{n+1}=\frac{(2n+1)!!}{(n+1)!}-\frac{(2n-1)!!}{n!}-\frac{n(2n-1)!!}{(n+1)!}=0.$$

n が奇数の場合は $\alpha_0=c_{n+1,\frac{n+1}{2}}+\dfrac{c_{n,\frac{n-1}{2}}}{n+1}=\dfrac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}(2n-(n+1)-1)!!}{(n+1)!!(n-(n+1))!}-\dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2n-(n-1)-1)!!}{(n-1)!!(n-(n-1))!}=0.$

$k=1,2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]$ に対し

$$\begin{aligned}\alpha_{n-2k+1}&=c_{n+1,k}-\frac{2n-2k+1}{n+1}c_{n,k}+\frac{n-2k+2}{n+1}c_{n,k-1}\\&=\frac{(-1)^k(2n-2k+1)!!}{(2k)!!(n-2k+1)!}-\frac{2n-2k+1}{n+1}\frac{(-1)^k(2n-2k-1)!!}{(2k)!!(n-2k)!}+\frac{n-2k+2}{n+1}\frac{(-1)^{k-1}(2n-2k+1)!!}{(2k-2)!!(n-2k+2)!}\\&=\frac{(-1)^k(2n-2k+1)!!}{(n+1)(2k)!!}\left(\frac{n+1}{(n-2k+1)!}-\frac{n-2k+1}{(n-2k+1)!}-\frac{2k}{(n-2k+1)!}\right)=0.\end{aligned}$$

以上から, $P_{n+1}(x) - xP_n(x) - \dfrac{x^2-1}{n+1}P_n'(x) = 0$ である.

(3) (1) の解答の $(*)$ において $x = \pm 1$ の場合を考えると $k = 0, 1, \ldots, n-2$ に対して次の等式が成り立つ.

$$f^{(k+1)}(1) = \frac{(k-2n)(k+1)}{2(n-k-1)}f^{(k)}(1), \qquad f^{(k+1)}(-1) = -\frac{(k-2n)(k+1)}{2(n-k-1)}f^{(k)}(-1)$$

$f(1) = f(-1) = 0$ だから k による数学的帰納法で, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ に対して $f^{(k)}(1) = f^{(k)}(-1) = 0$ が示される. 従って問題 16 の (1) により, $f^{(n)}(x) = 0$ は $(-1, 1)$ に相異なる n 個の解をもつ. $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}f^{(n)}(x)$ だから, 方程式 $P_n(x) = 0$ は $f^{(n)}(x) = 0$ と同値であり, $P_n(x) = 0$ は $(-1, 1)$ に相異なる n 個の解をもつ.

18. (1) $f(x) = e^{-x}x^n$ とおけば $L_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^x}{n!}f^{(n)}(x)$ だから $L_n'(x) = \dfrac{(-1)^n e^x}{n!}f^{(n)}(x) + \dfrac{(-1)^n e^x}{n!}f^{(n+1)}(x)$ である. 従って次の等式が得られる.

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! e^{-x}L_n(x) \cdots (i), \qquad f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! e^{-x}(L_n'(x) - L_n(x)) \cdots (ii)$$

ライプニッツの公式と上の等式から

$$\begin{aligned}
L_{n+1}(x) &= \frac{(-1)^{n+1}e^x}{(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}x(e^{-x}x^n) = \frac{(-1)^{n+1}e^x}{(n+1)!}\Big(xf^{(n+1)}(x) + (n+1)f^{(n)}(x)\Big) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}e^x}{(n+1)!}\big((-1)^n n! xe^{-x}(L_n'(x) - L_n(x)) + (-1)^n(n+1)!e^{-x}L_n(x)\big) \\
&= \frac{x-n-1}{n+1}L_n(x) - \frac{x}{n+1}L_n'(x)
\end{aligned}$$

$f'(x) = -e^{-x}x^n + ne^{-x}x^{n-1}$ だから $xf'(x) = -xe^{-x}x^n + ne^{-x}x^n = -(x-n)f(x)$ である. 従ってこの両辺の $n+1$ 次導関数を考えれば $xf^{(n+2)}(x) + (n+1)f^{(n+1)}(x) = -(x-n)f^{(n+1)}(x) - (n+1)f^{(n)}(x)$ が得られるため,

$$xf^{(n+2)}(x) + (x+1)f^{(n+1)}(x) + (n+1)f^{(n)}(x) = 0 \cdots (iii)$$

が成り立つ. 一方 (i), (ii) から

$$L_n''(x) = \frac{(-1)^n e^x}{n!}f^{(n)}(x) + 2\frac{(-1)^n e^x}{n!}f^{(n+1)}(x) + \frac{(-1)^n e^x}{n!}f^{(n+2)}(x) = 2L_n'(x) - L_n(x) + \frac{(-1)^n e^x}{n!}f^{(n+2)}(x)$$

だから $f^{(n+2)}(x) = (-1)^n n!(L_n''(x) - 2L_n'(x) + L_n(x))$ が成り立つ. この等式と (i), (ii) を (iii) に代入すれば

$$\begin{aligned}
((iii)\text{ の左辺}) &= (-1)^n n! e^{-x}(x(L_n''(x) - 2L_n'(x) + L_n(x)) + (x+1)(L_n'(x) - L_n(x)) + (n+1)L_n(x)) \\
&= (-1)^n n! e^{-x}(xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x))
\end{aligned}$$

だから, $xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$ が得られる.

(2) ライプニッツの公式から

$$f^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}n(n-1)\cdots(k-n+1)e^{-x}x^{n-i} = e^{-x}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{(-1)^{k-i}n!}{(k-n)!}x^{n-i}$$

だから $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f^{(k)}(x) = 0$ であり, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ に対して $f^{(k)}(0) = 0$ が成り立つ. 従って問題 16 の (2) により, $f^{(n)}(x) = 0$ は $(0, \infty)$ に相異なる n 個の解をもつ. $L_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^x}{n!}f^{(n)}(x)$ だから, 方程式 $L_n(x) = 0$ は $f^{(n)}(x) = 0$ と同値であり, $L_n(x) = 0$ は $(0, \infty)$ に相異なる n 個の解をもつ.

19. (1) $f(x) = e^{-x^2}$ とおけば $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}f^{(n)}(x)$ だから, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
H_n'(x) &= 2(-1)^n xe^{x^2}f^{(n)}(x) + (-1)^n e^{x^2}f^{(n+1)}(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x) \cdots (i) \\
H_n''(x) &= 2(-1)^n(1+2x^2)e^{x^2}f^{(n)}(x) + 4(-1)^n xe^{x^2}f^{(n+1)}(x) + (-1)^n e^{x^2}f^{(n+2)}(x) \cdots (ii)
\end{aligned}$$

(i) より $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$ が得られる．一方，$f'(x) = -2xe^{-x^2} = -2xf(x)$ だから，この両辺の $n+1$ 次導関数を考えれば，$f^{(n+2)}(x) = -2xf^{(n+1)}(x) - 2(n+1)f^{(n)}(x)$ が得られる．この等式と (i), (ii) より

$$\begin{aligned} H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) &= (-1)^n e^{x^2}((2+4x^2)f^{(n)}(x) + 4xf^{(n+1)}(x) + f^{(n+2)}(x)) \\ &\quad - 2x(-1)^n e^{x^2}(2xf^{(n)}(x) + f^{(n+1)}(x)) + 2n(-1)^n e^{x^2} f^{(n)}(x) \\ &= (-1)^n e^{x^2}(2(n+1)f^{(n)}(x) + 2xf^{(n+1)}(x) + f^{(n+2)}(x)) = 0. \end{aligned}$$

(2) $f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x^2} H_k(x)$ で，$H_k(x)$ は x の n 次多項式だから，0 以上の任意の整数 k に対して $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f^{(k)}(x) = 0$ が成り立つ．従って問題 16 の (3) により，$f^{(n)}(x) = 0$ は相異なる n 個の実数解をもつ．$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} f^{(n)}(x)$ だから，方程式 $H_n(x) = 0$ は $f^{(n)}(x) = 0$ と同値であり，$H_n(x) = 0$ は相異なる n 個の実数解をもつ．また，方程式 $H_{n-1}(x) = 0$ は $f^{(n-1)}(x) = 0$ と同値だから，問題 16 の注意により，$H_n(x) = 0$ の隣り合う 2 つの解の間に $H_{n-1}(x) = 0$ の解が存在する．$H_{n-1}(x) = 0$ は相異なる $n-1$ 個の実数解をもつため，$H_n(x) = 0$ の隣り合う 2 つの解の間にある $H_{n-1}(x) = 0$ の解は 1 つだけである．

微積分学 I 演習問題　第 7 回　不定形の極限

1. 次の極限を求めよ. ただし (51) の α は正の定数, (91), (92) の α は 0 でない定数とする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x+1)-xe^x}{x^2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x+1)-x}{e^x-x-1}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\cos x-x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2\log(x+1)-2x+x^2}{x^3}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{(e^x-1)^3}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x-x}{\tan^{-1}x-x}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x^2+1)-x^2}{\cos(x^2)-1}$　(8) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan^{-1}x}{x^3}$　(9) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x+1)}{\sin^{-1}x}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{1}{x-p}\left(\log\left(\frac{e^x-e^p}{x-p}\right)-p\right)$　(11) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{\tan^{-1}x-x}$　(12) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\cos^2x-e^x\sin x+x^2}{x(e^x-1)-\sin^2x}$　(14) $\displaystyle\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$　(15) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x-x}{x^3}$

(16) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-(x+1)\sin x-\cos x}{x^3}$　(17) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x+1)\tan^{-1}\frac{1}{x}$　(18) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-e^{-x^2}}{1-\cos3x}$

(19) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan^{-1}x-x}{e^{2x}-1-2x-2x^2}$　(20) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+2)}{\log(x^4+x^3)}$　(21) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin^{-1}\frac{2}{x}$

(22) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2\sqrt{1-x^2}-2+x^2}{x^4}$　(23) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)$　(24) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$

(25) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt[3]{1-x^3}}{x^3}$　(26) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{e^x-e^{-x}}$　(27) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{\sin x-x}$

(28) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^3}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$　(29) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x+\log(1-x)}{x^2}$　(30) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}$

(31) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}-\frac{2}{x^2}\right)$　(32) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{1-\cos x}$　(33) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x^2)}{\sin^2x}$

(34) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-x}{x\log(1+x)-x^2}$　(35) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin2x-2x}$　(36) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2+2)}{2\sqrt{x}}$

(37) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{1-\cos2x}$　(38) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$　(39) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^3}{\sqrt{x}}$

(40) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$　(41) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4}$　(42) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x-x^2}{x^4}$

(43) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\sqrt[3]{x}\log\left(\frac{1}{x}-1\right)$　(44) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-2e^x+1}{x\sin x}$　(45) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}$

(46) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2\cos x-2+x^2}{x^4}$　(47) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$　(48) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\log\frac{x+5}{x+1}$

(49) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x\sin^{-1}x}-\frac{1}{x^2}\right)$　(50) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\sin x(\log x)^2$　(51) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^\alpha}$

(52) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2\sin x-\cos x(x+\sin x)}{\sin^3x}$　(53) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$　(54) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$

(55) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2}e^x$　(56) $\displaystyle\lim_{x\to+0}(\sin x)^{\tan x}$　(57) $\displaystyle\lim_{x\to0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$

(58) $\displaystyle\lim_{x\to+0}(e^x-1-x)^{\frac{1}{\log x}}$　(59) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$　(60) $\displaystyle\lim_{x\to+0}(e^x-1)^{\frac{1}{\log x}}$

(61) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos^2x+x^2-1}{x^4}$　(62) $\displaystyle\lim_{x\to+0}(\tan^{-1}x)^{\frac{1}{\log x}}$　(63) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)^{\frac{1}{\log x}}$

(64) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\log(1+x)}{x^2}\right)$　(65) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x\log x-x+1}{(x-1)\log x}$　(66) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\tan x)^{\cos x}$

(67) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$　(68) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$　(69) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\tan^{-1}x}{\tan^{-1}(x+1)}\right)^x$

(70) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}-\frac{2}{x}\right)$　(71) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{e^x-1}-\sqrt{1-x}\right)$　(72) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}\left(x\sin x-\frac{\pi}{2}\right)$

(73) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-e^x-\cos x+2}{x^3}$　(74) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-e^x-\cos x+2}{6x-6\sin x}$　(75) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

(76) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\log(1+x)+\cos x-1}{x^3}$　(77) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2\cos x-2+x^2}{e^{x^2}-1-x^2}$　(78) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{6\sin x-6x+x^3}{xe^{x^2}-x-x^3}$

(79) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x-\sin^{-1}x}{x^3}$ (80) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$ (81) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x-x}{x^2}$

(82) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-e^x+1}{x^2}$ (83) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x-x}{x^3}$ (84) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

(85) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\log(1-x)-1}{x^3}$ (86) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-xe^x}{x\sin x}$ (87) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{4x^2-\sqrt{2-x^4}\left(\cos^{-1}(1-x^4)+\sqrt{2}x^2\right)}{x^6}$

(88) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}x\right)^x$ (89) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (90) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x+x^2)+\log(1-x+x^2)}{x\sin x}$

(91) $\displaystyle\lim_{x\to \alpha}\frac{(p-1)x^p-p\alpha x^{p-1}+\alpha^p}{x^{p-1}(x-\alpha)^2}$ (92) $\displaystyle\lim_{x\to \alpha}\frac{x^p((p-1)x-(p+1)\alpha)+\alpha^p((p+1)x-(p-1)\alpha)}{x^p(x-\alpha)^3}$

2. 関数 $f:\left(-\sqrt[4]{2},\sqrt[4]{2}\right)\to \boldsymbol{R}$, $g:[-2,2]\to\boldsymbol{R}$ をそれぞれ次のように定めるとき, 以下の問いに答えよ.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos^{-1}(1-x^4)}{x} & 0<|x|<\sqrt[4]{2}\\ 0 & x=0\end{cases},\qquad g(x)=\cos^{-1}(1-|x|)-\sqrt{2|x|-x^2}$$

(1) f, g の 0 における微分係数を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}f'(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}g'(x)$ を求めよ.

(3) f, g の導関数は 0 で微分可能か? 理由を付けて答えよ.

3. α を正の実数, p を実数とするとき, 関数 $f:(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(p-1)x^p-\alpha px^{p-1}+\alpha^p}{x^{p-1}(x-\alpha)^2} & x\neq\alpha\\ \dfrac{p(p-1)}{2\alpha} & x=\alpha\end{cases}$ によって定めるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) f の α における微分係数を求めよ.

(2) f の導関数は 0 で微分可能か? 理由を付けて答えよ.

4. 0 を含む開区間で定義されている C^1 級関数 f がつねに正の値をとるとき, $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{f'(0)}{f(0)}}$ であることを示せ.

5. (発展問題) 関数 $f:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ は 2 回微分可能で 2 次導関数は連続であるとする. 平均値の定理により, $p,x\in(a,b)$ $(x\neq p)$ に対し $f(x)-f(p)=f'(\gamma)(x-p)$ を満たす γ が x と p の間に存在するが, このとき以下の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{f'(\gamma)-f'(p)}{x-p}=\frac{f''(p)}{2}$ が成り立つことを示せ.

(2) $p\in(a,b)$ に対し $f''(p)\neq 0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{\gamma-p}{x-p}$, $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{f'(x)-f'(\gamma)}{x-p}$ を求めよ.

(3) $f''(p)\neq 0$ の場合 f' は p を含む開区間で単射だから γ は x の関数とみなせる. このとき $\displaystyle\lim_{x\to p}\gamma'$ を求めよ.

(4) $f''(p)\neq 0$ かつ f が 3 回微分可能であるとき $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{f''(x)-f''(\gamma)}{x-p}$ を求めよ.

(5) $f''(p)\neq 0$ かつ f が 3 回微分可能で 3 次導関数が連続であるとき $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{2\gamma'-1}{x-p}$, $\displaystyle\lim_{x\to p}\gamma''$ を求めよ.

(6) $f''(p)\neq 0$ かつ f が 4 回微分可能で 4 次導関数が連続であるとき $\displaystyle\lim_{x\to p}\gamma^{(3)}$ を求めよ.

(7) $f''(p)\neq 0$ かつ f が 5 回微分可能で 5 次導関数が連続であるとき $\displaystyle\lim_{x\to p}\gamma^{(4)}$ を求めよ.

第 7 回の演習問題の解答

1. (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x+1)-xe^x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x+1}-e^x-xe^x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{(x+1)^2}-2e^x-xe^x}{2}=-\frac{3}{2}$

(別解) $\log(x+1)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$, $e^x=1+x+o(x)$ より

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x+1)-xe^x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{3x^2}{2}+o(x^2)-xo(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(-\frac{3}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}-\frac{o(x)}{x}\right)=-\frac{3}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x+1)-x}{e^x-x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{(x+1)^2}}{e^x}=-1$

(別解) $\log(x+1)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$, $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ より $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x+1)-x}{e^x-x-1}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}=-1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\cos x-x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\cos x-x\sin x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{2\frac{\sin x}{x}+\cos x}=\frac{1}{3}$

(別解) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ より $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\cos x-x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{-\frac{x^3}{2}+xo(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}=\frac{1}{3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2\log(x+1)-2x+x^2}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{x+1}-2+2x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{3x^2(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{2}{3(x+1)}=\frac{2}{3}$

(別解) $\log(x+1)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$ より $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2\log(x+1)-2x+x^2}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2x^3}{3}+2o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{3}+2\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=\frac{2}{3}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{(e^x-1)^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3e^x(e^x-1)^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3e^{3x}-6e^{2x}+3e^x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{9e^{3x}-12e^{2x}+3e^x}=$
$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{27e^{3x}-24e^{2x}+3e^x}=\frac{1}{6}$

(別解) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$, $e^x=1+x+o(x)$ より $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{(e^x-1)^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{(x+o(x))^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{\left(1+\frac{o(x)}{x}\right)^3}=\frac{1}{6}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x-x}{\tan^{-1}x-x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{\frac{1}{1+x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x^2)\big(1-\sqrt{1-x^2}\big)}{-x^2\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x^2)\big(1-\sqrt{1-x^2}\big)\big(1+\sqrt{1-x^2}\big)}{-x^2\sqrt{1-x^2}\big(1+\sqrt{1-x^2}\big)}=$
$\displaystyle-\lim_{x\to0}\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}\big(1+\sqrt{1-x^2}\big)}=-\frac{1}{2}$

(別解) $(\sin^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\sin^{-1}x)''=\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)'=\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $(\sin^{-1}x)'''=\left(\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)'=\dfrac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$ より $\sin^{-1}x=x+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$. $(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{x^2+1}$, $(\tan^{-1}x)''=\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)'=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$, $(\tan^{-1}x)'''=\left(\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}\right)'=\dfrac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$ より $\tan^{-1}x=x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$. よって $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x-x}{\tan^{-1}x-x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}=$
$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{-\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}}=-\frac{1}{2}$

(7) $x^2=t$ とおくと, $x\to0$ のとき, $t\to+0$ だから $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x^2+1)-x^2}{\cos(x^2)-1}=\lim_{t\to+0}\frac{\log(t+1)-t}{\cos t-1}=\lim_{t\to+0}\frac{\frac{1}{t+1}-1}{-\sin t}=$
$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{-t}{-\sin t(t+1)}=\lim_{t\to+0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}\frac{1}{t+1}=\lim_{t\to+0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}\lim_{t\to+0}\frac{1}{t+1}=1$

(別解) $\log(x+1)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ より $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x^2+1)-x^2}{\cos(x^2)-1}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}=$
$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^4)}{x^4}}=1$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan^{-1}x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x+\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{6x}=\lim_{x\to0}\left(-\frac{\sin x}{6x}+\frac{1}{3(1+x^2)^2}\right)=\frac{1}{6}$

(別解) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\tan^{-1} x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \tan^{-1} x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right) = \frac{1}{6}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{\sin^{-1} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1} = 1$

(別解) 教科書の問題 1.6 の (4) から $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{\sin^{-1} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\log(x+1)}{x}}{\frac{\sin^{-1} x}{x}} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1} x}{x}} = 1$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{e^x - e^p}{x-p}$ は e^x の p における微分係数は e^p だから, log の連続性より $\displaystyle\lim_{x\to p}\log\left(\frac{e^x - e^p}{x-p}\right) = \log\left(\lim_{x\to p}\frac{e^x - e^p}{x-p}\right)$ $= \log e^p = p$ である. 従って $\displaystyle\lim_{x\to p}\left(\log\left(\frac{e^x - e^p}{x-p}\right) - p\right) = 0$ となるため, ロピタルの定理が使えて,

$\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{1}{x-p}\left(\log\left(\frac{e^x - e^p}{x-p}\right) - p\right) = \lim_{x\to p}\frac{1}{(x-p)'}\left(\log\left(\frac{e^x - e^p}{x-p}\right) - p\right)' = \lim_{x\to p}\frac{e^x(x-p) - (e^x - e^p)}{(e^x - e^p)(x-p)} =$

$\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{(e^x(x-p) - (e^x - e^p))'}{((e^x - e^p)(x-p))'} = \lim_{x\to p}\frac{e^x(x-p)}{e^x(x-p) + (e^x - e^p)} = \lim_{x\to p}\frac{e^x}{e^x + \frac{e^x - e^p}{x-p}} = \frac{\lim_{x\to p} e^x}{\lim_{x\to p} e^x + \lim_{x\to p}\frac{e^x - e^p}{x-p}} = \frac{e^p}{e^p + e^p} = \frac{1}{2}$

(別解) $e^x = e^p + e^p(x-p) + \dfrac{e^p}{2}(x-p)^2 + o((x-p)^2)$ より $\dfrac{e^x - e^p}{x-p} = e^p + \dfrac{e^p(x-p)}{2} + o(x-p)$ であることと $\log(1+y) = y + o(y)$ を用いると, $\log(e^x - e^p) - \log(x-p) - p = \log\left(\dfrac{e^x - e^p}{x-p}\right) - \log(e^p) = \log\left(e^p + \dfrac{e^p(x-p)}{2} + o(x-p)\right) - \log e^p = \log\left(1 + \dfrac{x-p}{2} + e^{-p}o(x-p)\right) = \dfrac{x-p}{2} + e^{-p}o(x-p) + o\left(\dfrac{x-p}{2} + e^{-p}o(x-p)\right)$ である. $y = \varepsilon(x) = \dfrac{x-p}{2} + e^{-p}o(x-p)$ とおけば, $x \to p$ のとき $y \to 0$ であり, $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{\varepsilon(x)}{x-p} = \frac{1}{2}$ だから, $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{\log(e^x - e^p) - \log(x-p) - p}{x-p}$

$\displaystyle = \lim_{x\to p}\left(\frac{\varepsilon(x)}{x-p} + \frac{o(\varepsilon(x))}{x-p}\right) = \lim_{x\to p}\frac{\varepsilon(x)}{x-p} + \lim_{x\to p}\frac{\varepsilon(x)}{x-p}\frac{o(\varepsilon(x))}{\varepsilon(x)} = \lim_{x\to p}\frac{\varepsilon(x)}{x-p} + \lim_{x\to p}\frac{\varepsilon(x)}{x-p}\lim_{y\to 0}\frac{o(y)}{y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\tan^{-1} x - x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\frac{1}{1+x^2} - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)(1+x^2)}{1 - (1+x^2)} = \lim_{x\to 0} -\frac{(\cos x - 1)(1+x^2)}{x^2} =$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{x^2}\lim_{x\to 0}(1+x^2) = \frac{1}{2}$ (第 3 回の演習問題 1 の (3) の結果を用いた)

(別解) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\tan^{-1} x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\tan^{-1} x - x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)} =$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{-\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}} = \frac{1}{2}$

(12) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x\cos x} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{2\cos x} = -\frac{1}{2}.$

(別解) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{-2\sin^2\frac{x}{2}}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{-2\sin^2\frac{x}{2}}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = -\frac{1}{2}$

(13) $x\cos^2 x - e^x \sin x + x^2 = x\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)\right) + x^2 =$

$x(1 - x^2 + o(x^3)) - \left(x + x^2 + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + x^2 = -\dfrac{4x^3}{3} + o(x^3)$,

$x(e^x - 1) - \sin^2 x = x\left(x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - (x + o(x^2))^2 = x^2 + \dfrac{x^3}{2} + o(x^3) - (x^2 + o(x^3)) = \dfrac{x^3}{2} + o(x^3)$ より

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\cos^2 x - e^x \sin x + x^2}{x(e^x - 1) - \sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{4x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{4}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{2} + \frac{o(x^3)}{x^3}} = -\frac{8}{3}$

(14) $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ とおいて両辺の対数をとると $\log f(x) = \dfrac{\log(\cos x)}{x^2}$ だから $f(x) = e^{\frac{\log(\cos x)}{x^2}}$ である. 指数関数の連続性と (9) から $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log(\cos x)}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$

(15) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{3x^2\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3\sqrt{1-x^2}\left(1 + \sqrt{1-x^2}\right)} = \frac{1}{6}$

(16) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$ より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - (x+1)\sin x - \cos x}{x^3} =$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{6}+o(x^3)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{x}{6}+\dfrac{o(x^3)}{x^3}\right)=\dfrac{1}{3}$

(17) $y=\dfrac{1}{x}$ とおくと $x\to\infty$ のとき $y\to+0$ だから, 第 3 回の演習問題 1 の (10) の結果から $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\tan^{-1}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{y\to+0}\left(\dfrac{1}{y}+1\right)\tan^{-1}y=\lim\limits_{y\to+0}\dfrac{\tan^{-1}y}{y}+\lim\limits_{y\to+0}\tan^{-1}y=1+\dfrac{\pi}{2}$

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x^2}}{1-\cos 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^{-x^2}}{3\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{-x^2}}{9\frac{\sin 3x}{3x}}=\dfrac{2\lim\limits_{x\to 0}e^{-x^2}}{9\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\dfrac{2}{9}$

(19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^{-1}x-x}{e^{2x}-1-2x-2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x^2+1}-1}{2e^{2x}-2-4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2}{2e^{2x}-2-4x}\dfrac{1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2}{2e^{2x}-2-4x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x}{4e^{2x}-4}=-\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\frac{e^{2x}-1}{2x}}=-\dfrac{1}{4}$

(別解) $\tan^{-1}x=x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$, $e^{2x}=1+2x+2x^2+\dfrac{4x^3}{3}+o(x^3)$ より $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^{-1}x-x}{e^{2x}-1-2x-2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{\frac{4x^3}{3}+o(x^3)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{4}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}}=-\dfrac{1}{4}$

(20) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log(x+2)}{\log(x^4+x^3)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log(x+2)}{3\log x+\log(x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x+2}}{\frac{3}{x}+\frac{1}{x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x+1)}{3(x+1)(x+2)+x(x+2)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{4x^2+11x+6}=\dfrac{1}{4}$

(21) $y=\dfrac{2}{x}$ とおくと $x\to\infty$ のとき $y\to+0$ だから, 教科書の問題 1.6 の (4) より $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin^{-1}\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{y\to+0}\dfrac{2\sin^{-1}y}{y}=2$

(22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1-x^2}-2+x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4(1-x^2)-(2-x^2)^2}{x^4\left(2\sqrt{1-x^2}+2-x^2\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x^2}+2-x^2}=-\dfrac{1}{4}$

(23) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{2\sin x}{x}+\cos x}=\dfrac{1}{3}$

(24) $y=\dfrac{1}{x}$ とおくと $x\to\infty$ のとき $y\to+0$ だから, 教科書の例 2.8 より $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to+0}\dfrac{1}{y^y}=1$

(25) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt[3]{1-x^3}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3}{x^3\left((1+x^3)^{\frac{2}{3}}+(1-x^6)^{\frac{1}{3}}+(1-x^3)^{\frac{2}{3}}\right)}=\dfrac{2}{3}$

(26) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{e^x-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{1}{2}$

(27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{\sin x-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(\cos x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1-\cos x}{\cos^2 x}=-2$

(28) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^3}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}}=1$

(29) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\log(1-x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{1-x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{2(1-x)}=-\dfrac{1}{2}$

(30) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{3x^2\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{3\cos^2 x}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

(31) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}-\dfrac{2}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\dfrac{1}{2}$

(32) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ より $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}-o(x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{\frac{1}{2}-\frac{o(x^2)}{x^2}}=1$

(33) $\log(1+x^2)=x^2+o(x^2)$ だから $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x^2)}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+o(x^2)}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{o(x^2)}{x^2}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}=1$

(34) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-x}{x\log(1+x)-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-1}{\log(1+x)+\frac{x}{1+x}-2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}-2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x(1+x)^2(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}}{-3x-2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^2}{(3+2x)(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{3}$

(35) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin 2x-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{2\cos 2x-2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{-4\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{-8\cos 2x}=-\frac{1}{4}$

(36) $y=\sqrt{x^2+2}$ とおくと $x\to\infty$ のとき $x\to\infty$ だから, 教科書の問 1.18 から

$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2+2)}{2\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2+2)}{(x^2+2)^{\frac{1}{4}}}\frac{(x^2+2)^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{x}}=\lim_{y\to\infty}\frac{\log y}{y^{\frac{1}{4}}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{\frac{1}{4}}=0\cdot\frac{1}{2}=0$

(37) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2e^{-2x}}{2\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}+4e^{-2x}}{4\cos 2x}=2$

(38) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{-1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\cos x}=-\frac{1}{2}$

(39) 教科書の問 1.18 から $\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^3}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log x}{x^{\frac{1}{6}}}\right)^3=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^{\frac{1}{6}}}\right)^3=0^3=0$

(40) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{x\log(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\log(1+x)+\frac{x}{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{\log(1+x)}{x}+\frac{1}{1+x}}=\frac{1}{2}$

(41) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ より $e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$ である.

従って $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{2}+o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right)=\frac{1}{2}$

(42) $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ より $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)(\sin x+x)}{x^4}=$

$\lim_{x\to 0}\frac{\left(-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(2x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)\lim_{x\to 0}\left(2-\frac{x^2}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}x^2\right)=-\frac{1}{3}$

(43) 教科書の問 1.18 から $\lim_{x\to +0}\sqrt[3]{x}\log\left(\frac{1}{x}-1\right)=\lim_{x\to +0}(\sqrt[3]{x}\log(1-x)-\sqrt[3]{x}\log x)=\lim_{x\to +0}\sqrt[3]{x}\log(1-x)-\lim_{x\to +0}\sqrt[3]{x}\log x=0-0=0$

(44) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2e^x+1}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2e^x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-2e^x}{2\cos x-x\sin x}=1$

(45) $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ より $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}-o(x^3)}{x^2(x+o(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}-\frac{o(x^3)}{x^3}}{1+\frac{o(x)}{x}}=\frac{1}{6}$

(46) $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$ より $\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2+x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{12}+\frac{2o(x^4)}{x^4}\right)=\frac{1}{12}$

(47) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ より $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x(x+o(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{1+\frac{o(x))}{x}}=\frac{1}{2}$

(48) $y=\frac{1}{x}$ とおくと $x\to\infty$ のとき $y\to +0$ だから, $\lim_{x\to\infty}x\log\frac{x+5}{x+1}=\lim_{y\to +0}\frac{1}{y}\log\frac{\frac{1}{y}+5}{\frac{1}{y}+1}=$

$\lim_{y\to +0}\frac{\log(1+5y)-\log(1+y)}{y}=\lim_{y\to +0}\left(\frac{5}{1+5y}-\frac{1}{1+y}\right)=4$

(49) $y=\sin^{-1}x$ とおくと $x=\sin y$, $x\to 0$ のとき $y\to 0$ だから $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\sin^{-1}x}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 y}-\frac{1}{y\sin y}\right)=$

$\lim_{y\to 0}\frac{y-\sin y}{y^3}\frac{1}{\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2}=\lim_{y\to 0}\frac{y-\left(y-\frac{y^3}{6}+o(y^3)\right)}{y^3}\lim_{y\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y^3}{6}+o(y^3)}{y^3}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{6}+\frac{o(y^3)}{y^3}\right)=\frac{1}{6}$

(50) 教科書の問 1.18 から $\lim_{x\to +0}\sin x(\log x)^2=\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}\left(x^{\frac{1}{2}}\log x\right)^2=\left(\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to +0}x^{\frac{1}{2}}\log x\right)^2=1\cdot 0=0$

(51) $y=\frac{1}{x}$ とおくと $x\to +0$ のとき $y\to\infty$ だから, 教科書の問 1.17 から $\lim_{x\to +0}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^\alpha}=\lim_{y\to\infty}y^\alpha e^{-y}=0$

(52) $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ より $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\cos x(x+\sin x)}{\sin^3 x}=$

$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(2x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{(x+o(x))^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{6}x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{1+\frac{o(x^3)}{x^3}}=\frac{5}{6}$

(53) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ だから $x\to 0$ のとき, $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$ の分母と分子はともに 0 に近づく. 第 5 回の演習問題 1 の (47) から $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{x-(1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)}=$

$e\lim_{x\to0}\dfrac{-\log(1+x)}{x(2+3x)} = e\lim_{x\to0}\dfrac{\log(1+x)}{x}\dfrac{-1}{2+3x} = -\dfrac{e}{2}$

(54) $y=-x$ とおくと $x\to0$ のとき $y\to0$ だから $\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to0}(1+y)^{-\frac{1}{y}} = \dfrac{1}{\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}} = \dfrac{1}{e}$

(55) $f(x)=\log\left(\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x^2}e^x\right)$ とおけば $\lim_{x\to\infty}f(x) = \lim_{x\to\infty}(x+x^2\log x - x^2\log(1+x)) = \lim_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}+\log x-\log(1+x)}{\frac{1}{x^2}}$ $= \lim_{x\to\infty}\dfrac{-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(x-x^2+\dfrac{x^3}{1+x}\right) = \lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{2(1+x)} = \dfrac{1}{2}$ となるため, $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x^2}e^x = \lim_{x\to\infty}e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to\infty}f(x)} = \sqrt{e}$.

(56) $f(x)=\log(\sin x)^{\tan x}$ とおき, $y=\sin x$ とおけば, $x\to+0$ のとき $y\to+0$ だから 教科書の問 1.18 から $\lim_{x\to+0}f(x) = \lim_{x\to+0}\tan x\log(\sin x) = \lim_{x\to+0}\dfrac{\sin x\log(\sin x)}{\cos x} = \dfrac{\lim_{y\to+0}y\log y}{\lim_{x\to+0}\cos x} = 0$ となるため $\lim_{x\to+0}(\sin x)^{\tan x} = \lim_{x\to+0}e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to+0}f(x)} = e^0 = 1$.

(57) $f(x)=\log(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$ とおけば $\lim_{x\to0}f(x) = \lim_{x\to0}\dfrac{\log(e^x+x)}{x} = \lim_{x\to0}\dfrac{e^x+1}{e^x+x} = 2$ となるため $\lim_{x\to0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0}e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to0}f(x)} = e^2$.

(58) $f(x)=\log(e^x-1-x)^{\frac{1}{\log x}}$ とおけば $\lim_{x\to+0}f(x) = \lim_{x\to+0}\dfrac{\log(e^x-1-x)}{\log x} = \lim_{x\to+0}\dfrac{\frac{e^x-1}{e^x-1-x}}{\frac{1}{x}} =$

$\lim_{x\to+0}\dfrac{e^x-1}{x}\dfrac{x^2}{e^x-1-x} = \lim_{x\to+0}\dfrac{e^x-1}{x}\lim_{x\to+0}\dfrac{x^2}{e^x-1-x} = \lim_{x\to+0}\dfrac{2x}{e^x-1} = \dfrac{2}{\lim_{x\to+0}\frac{e^x-1}{x}} = 2$ となるため

$\lim_{x\to+0}(e^x-1-x)^{\frac{1}{\log x}} = \lim_{x\to+0}e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to+0}f(x)} = e^2$.

(59) $f(x)=\log\left(\dfrac{\log(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ とおけば $\lim_{x\to0}f(x) = \lim_{x\to0}\dfrac{\log(\log(1+x))-\log x}{x} = \lim_{x\to0}\left(\dfrac{\frac{1}{1+x}}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right) =$ $\lim_{x\to0}\dfrac{x-(1+x)\log(1+x)}{x(1+x)\log(1+x)} = \lim_{x\to0}\dfrac{-\log(1+x)}{(1+2x)\log(1+x)+x} = \lim_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{1+x}}{2\log(1+x)+\frac{1+2x}{1+x}+1} = -\dfrac{1}{2}$ となるため

$\lim_{x\to0}\left(\dfrac{\log(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0}e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to+0}f(x)} = e^{-\frac{1}{2}}$.

(60) $f(x)=\log(e^x-1)^{\frac{1}{\log x}}$ とおけば $\lim_{x\to+0}f(x) = \lim_{x\to+0}\dfrac{\log(e^x-1)}{\log x} = \lim_{x\to+0}\dfrac{\frac{e^x}{e^x-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0}\dfrac{e^x}{\frac{e^x-1}{x}} = 1$ となるため $\lim_{x\to+0}(e^x-1)^{\frac{1}{\log x}} = \lim_{x\to+0}e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to+0}f(x)} = e$.

(61) ロピタルの定理より $\lim_{x\to0}\dfrac{\cos^2x+x^2-1}{x^4} = \lim_{x\to0}\dfrac{-2\sin x\cos x+2x}{4x^3} = \lim_{x\to0}\dfrac{2x-\sin2x}{4x^3} = \lim_{x\to0}\dfrac{2-2\cos2x}{12x^2} = \lim_{x\to0}\dfrac{4\sin^2x}{12x^2} = \lim_{x\to0}\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{3}$

(別解) $\cos^2x = \dfrac{1}{2}(1+\cos2x) = \dfrac{1}{2}\left(2-\dfrac{(2x)^2}{2!}+\dfrac{(2x)^4}{4!}+o(x^4)\right) = 1-x^2+\dfrac{x^4}{3}+o(x^4)$ だから $\cos^2x+x^2-1 = \dfrac{x^4}{3}+o(x^4)$ である. 従って $\lim_{x\to0}\dfrac{\cos^2x+x^2-1}{x^4} = \lim_{x\to0}\dfrac{\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to0}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{o(x^4)}{x^4}\right) = \dfrac{1}{3}$.

(62) $f(x)=\log(\tan^{-1}x)^{\frac{1}{\log x}}$ とおけば $\lim_{x\to+0}f(x) = \lim_{x\to+0}\dfrac{\log(\tan^{-1}x)}{\log x} = \lim_{x\to+0}\dfrac{1}{\frac{\tan^{-1}x}{x}(1+x^2)} = 1$ だから $\lim_{x\to+0}(\tan^{-1}x)^{\frac{1}{\log x}} = \lim_{x\to+0}e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to+0}f(x)} = e^1 = e$.

(63) $f(x)=\log\left(\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)^{\frac{1}{\log x}}$ とおくと, 第 3 回の演習問題 1 の (15) の結果から

$\lim_{x\to\infty}f(x) = \lim_{x\to\infty}\dfrac{\log\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)}{\log x} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{-x}{(x^2+1)\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{-x^2}{x^2+1}\dfrac{1}{\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)} = -1$ となるため, $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)^{\frac{1}{\log x}} = \lim_{x\to\infty}e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to\infty}f(x)} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

(64) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\log(1+x)}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-(x+1)\log(1+x)}{x^2(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(x+1)\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2(x+1)}=$
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}\left(-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}$
(65) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x\log x-x+1}{(x-1)\log x}=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)\log(1+y)-y}{y\log(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)\left(y-\frac{y^2}{2}+o(y^2)\right)-y}{y\left(y-\frac{y^2}{2}+o(y^2)\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y^2}{2}+o(y^2)}{y^2+o(y^2)}=$
$\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{2}+\frac{o(y^2)}{y^2}}{1+\frac{o(y^2)}{y^2}}=\frac{1}{2}$
(66) $y=\tan x$ とおけば, $x\to\frac{\pi}{2}-0$ のとき $y\to\infty$ である. また $x=\tan^{-1}y$ だから, 第 3 回の演習問題 2 の (5) から $\cos x=\cos(\tan^{-1}y)=\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ であるため $(\tan x)^{\cos x}=e^{\cos x\log(\tan x)}=e^{\frac{\log y}{\sqrt{1+y^2}}}$ である. $y\geqq 1$ ならば $0\leqq\dfrac{\log y}{\sqrt{1+y^2}}\leqq\dfrac{\log y}{y}$ であり, $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\frac{\log y}{y}=0$ だから $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\frac{\log y}{\sqrt{1+y^2}}=0$ が成り立つ. 従って $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\tan x)^{\cos x}=\lim_{y\to\infty}e^{\frac{\log y}{\sqrt{1+y^2}}}=e^0=1$ である.
(67) α を $a_1,a_2,\dots,a_n$ のうちで最大のものとすれば, $x>0$ ならば $\alpha^x\leqq a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x\leqq n\alpha^x$ だから $\dfrac{\alpha}{n^{\frac{1}{x}}}\leqq\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\leqq\alpha$ が成り立つ. ここで, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}n^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{\log n}{x}}=e^0=1$ だから, 上の不等式から $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\alpha$ である.
(68) $\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\log\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)}$ であり, ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)=$
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x\log a_1+a_2^x\log a_2+\cdots+a_n^x\log a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}=\frac{\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_n}{n}=\log\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ だから
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\log\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ である.
(69) $f(x)=\log\left(\dfrac{\tan^{-1}x}{\tan^{-1}(x+1)}\right)^x$ とおけば $f(x)=x(\log(\tan^{-1}x)-\log(\tan^{-1}(x+1)))$, $\left(\dfrac{\tan^{-1}x}{\tan^{-1}(x+1)}\right)^x=e^{f(x)}$ であり,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(\tan^{-1}x)-\log(\tan^{-1}(x+1))}{\frac{1}{x}}&=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(1+x^2)\tan^{-1}x}-\frac{1}{(1+(1+x)^2)\tan^{-1}(x+1)}}{-\frac{1}{x^2}}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x^2}{(1+x^2)\tan^{-1}x}+\frac{x^2}{(1+(1+x)^2)\tan^{-1}(x+1)}\right)=0\end{aligned}$$

だから $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\tan^{-1}x}{\tan^{-1}(x+1)}\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{f(x)}=1$ である.
(70) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}-\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^2(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(2+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-2\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{x^2(x+o(x))}=$
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{1+\frac{o(x^3)}{x^3}}=\frac{1}{6}$
(71) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{e^x-1}-\sqrt{1-x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sqrt{1-x}(e^x-1)}{x^2(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right)\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{x^2(x+o(x))}$
$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{24}+o(x^3)}{x^2(x+o(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{24}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{1+\frac{o(x^3)}{x^3}}=-\frac{1}{24}$
(72) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}\left(x\sin x-\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x-x\cos x}{\sin x}=-1$
(73) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$, $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$ だから $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-e^x-\cos x+2}{x^3}=$
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=-\frac{1}{3}.$

(74) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$ だから $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - e^x - \cos x + 2}{6x - 6\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{1 + \frac{o(x^3)}{x^3}} = -\frac{1}{3}$.

(75) $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ だから $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \log(1+x)}{x\log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} - o(x^2)}{x^2 - \frac{x^3}{2} + xo(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} - \frac{o(x^2)}{x^2}}{1 - \frac{x}{2} + x\frac{o(x^2)}{x^2}} = \frac{1}{2}$

(76) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$ だから
$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \log(1+x) + \cos x - 1}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right) = -\frac{1}{2}$

(77) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$ だから $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{e^{x^2} - 1 - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{12} + \frac{o(x^4)}{x^4}}{\frac{1}{2} + \frac{o(x^4)}{x^4}} = \frac{1}{6}$

(78) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5)$, $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ だから $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{6\sin x - 6x + x^3}{xe^{x^2} - x - x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^5}{20} + o(x^5)}{\frac{x^5}{2} + xo(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{20} + \frac{o(x^5)}{x^5}}{\frac{1}{2} + \frac{o(x^4)}{x^4}} = \frac{1}{10}$

(79) $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \dfrac{x}{2} + o(x)$ より $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x - \sin^{-1} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{3x^2}{2} + o(x^2)}{3x^2} = -\frac{1}{2}$

(80) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$ だから $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right) = \frac{1}{3}$

(81) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ だから $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{o(x^2)}{x^2}\right) = 1$

(82) $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ だから $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - e^x + 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(-1 + \frac{o(x^2)}{x^2}\right) = -1$

(83) $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$ だから $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3} + \frac{o(x^2)}{x^2}\right) = -\frac{1}{3}$

(84) $f(x) = \log\left((\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\right)$ とおけば (12) の結果から $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$ だから, 指数関数の連続性から $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to 0} f(x)} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

(85) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ だから $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \log(1-x) - 1}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right) = -\frac{1}{6}$

(86) $\sin x = x + o(x^2)$, $e^x = 1 + x + o(x)$ だから $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - xe^x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2 + xo(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1 + \frac{o(x^2)}{x^2}}{1 + x\frac{o(x^2)}{x^2}} = -1$

(87) $\theta = \dfrac{1}{2}\cos^{-1}(1 - x^4)$ とおけば $x^2 = \sqrt{1 - \cos 2\theta} = \sqrt{2\sin^2\theta} = \left|\sqrt{2}\sin\theta\right|$ であり, $x \to 0$ のとき, $\theta \to +0$ だから $\sin\theta > 0$ である. 従って $x^2 = \sqrt{2}\sin\theta$ である. また, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ ならば $\cos\theta > 0$ だから $\sqrt{2 - x^4} = \sqrt{2 - 2\sin^2\theta} = \sqrt{2\cos^2\theta} = \sqrt{2}\cos\theta$ であることに注意すれば (52) の結果から
$$\lim_{x\to 0} \frac{4x^2 - \sqrt{2 - x^4}\left(\cos^{-1}(1 - x^4) + \sqrt{2}x^2\right)}{x^6} = \lim_{\theta\to +0} \frac{2\sin\theta - \cos\theta\,(\theta + \sin\theta)}{\sin^3\theta} = \frac{5}{6}$$

(88) $f(x)=\log\left(\dfrac{2}{\pi}\tan^{-1}x\right)^x$ とおくと, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}x\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{\tan^{-1}x}{x^2}}=-\frac{2}{\pi}$ となるため, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}x\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}f(x)}=e^{-\frac{2}{\pi}}$.

(89) $f(x)=\log\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ とおけば $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\log(\tan x)-\log x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{\sin 2x}-\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin 2x}{2x^2\sin 2x}=$ $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\frac{(2x)^3}{3!}+o(x^3)}{2x^2(2x+o(x))}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{4}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{4+\frac{o(x)}{x}}=\frac{1}{3}$ となるため $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}e^{f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}f(x)}=e^{\frac{1}{3}}$.

(90) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x+x^2)+\log(1-x+x^2)}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\log(1-x^3)-\log(1-x)+\log(1+x^3)-\log(1+x)}{x\sin x}=$ $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1-x^3)-\log(1-x^2)+\log(1+x^3)}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+o(x^2)}{x(x+o(x))}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{o(x^2)}{x^2}}{1+\frac{o(x)}{x}}=1$

(91) $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{(p-1)x^p-p\alpha x^{p-1}+\alpha^p}{x^{p-1}(x-\alpha)^2}=\lim_{x\to\alpha}\frac{p(p-1)x^{p-1}-p(p-1)\alpha x^{p-2}}{(p-1)x^{p-2}(x-\alpha)^2+2x^{p-1}(x-\alpha)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{p(p-1)}{(p-1)(x-\alpha)+2x}=$ $\dfrac{p(p-1)}{2\alpha}$

(92) $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{x^p((p-1)x-(p+1)\alpha)+\alpha^p((p+1)x-(p-1)\alpha)}{x^p(x-\alpha)^3}=\lim_{x\to\alpha}\frac{(p^2-1)x^p-\alpha(p+1)(px^{p-1}-\alpha^{p-1})}{(x-\alpha)^2((p+3)x^p-\alpha px^{p-1})}=$ $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{p(p^2-1)}{(x-\alpha)(p(p+3)x-\alpha p(p-1))+2((p+3)x^2-\alpha px)}=\frac{p(p^2-1)}{6\alpha^2}$

2. (1) $y=x^2$ とおけば $x\to0$ のとき, $y\to+0$ だから, 第 3 回の演習問題 1 の (19) の結果を用いると
$\displaystyle f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos^{-1}(1-x^4)}{x^2}=\lim_{y\to+0}\frac{\cos^{-1}(1-y^2)}{y}=\sqrt{2}$.

$t=\cos^{-1}(1-|x|)$ とおけば, $x\to0$ のとき, $t\to+0$ で, $|x|=1-\cos t$ だから $\sqrt{2|x|-x^2}=\sin t$ であることに注意すれば

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\cos^{-1}(1-|x|)-\sqrt{2|x|-x^2}}{x}=\lim_{t\to+0}\frac{t-\sin t}{1-\cos t}=\lim_{t\to+0}\frac{\frac{t^3}{6}+o(t^3)}{\frac{t^2}{2}+o(t^3)}=\lim_{t\to+0}\frac{\frac{t}{6}+o(t)}{\frac{1}{2}+o(t)}=0$$

だから $g'(0)=0$ である.

(2) $x\neq0$ ならば $f'(x)=\left(\dfrac{\cos^{-1}(1-x^4)}{x}\right)'=\left(\cos^{-1}(1-x^4)\right)'\dfrac{1}{x}+\cos^{-1}(1-x^4)\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{-(1-x^4)'}{x\sqrt{1-(1-x^4)^2}}-$ $\dfrac{\cos^{-1}(1-x^4)}{x^2}=\dfrac{4x^2}{\sqrt{2x^4-x^8}}-\dfrac{\cos^{-1}(1-x^4)}{x^2}=\dfrac{4}{\sqrt{2-x^4}}-\dfrac{\cos^{-1}(1-x^4)}{x^2}$ だから
$\displaystyle\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{4}{\sqrt{2-x^4}}-\frac{\cos^{-1}(1-x^4)}{x^2}\right)=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

$x>0$ の場合, $g'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2x-x^2}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}}$ だから $\displaystyle\lim_{x\to+0}g'(x)=0$ であり, $x<0$ の場合, $g'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{-2x-x^2}}=$ $\dfrac{-\sqrt{-x}}{\sqrt{2+x}}$ だから $\displaystyle\lim_{x\to-0}g'(x)=0$ である. 故に $\displaystyle\lim_{x\to0}g'(x)=0$ である.

(3) (1), (2) と問題 1(87) の結果から $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{4}{\sqrt{2-x^4}}-\frac{\cos^{-1}(1-x^4)}{x^2}-\sqrt{2}}{x}=$ $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{4x^2-\sqrt{2-x^4}\left(\cos^{-1}(1-x^4)+\sqrt{2}x^2\right)}{x^3\sqrt{2-x^4}}=\lim_{x\to0}\frac{4x^2-\sqrt{2-x^4}\left(\cos^{-1}(1-x^4)+\sqrt{2}x^2\right)}{x^6}\frac{x^3}{\sqrt{2-x^4}}=$ $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{4x^2-\sqrt{2-x^4}\left(\cos^{-1}(1-x^4)+\sqrt{2}x^2\right)}{x^6}\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\sqrt{2-x^4}}=\frac{5}{6}\cdot0=0$ が得られるため, f' は 0 で微分可能である.

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}}}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}=\infty$ だから g' は 0 で微分不可能である.

3. (1) ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{2\alpha(p-1)x^p-2\alpha^2px^{p-1}+2\alpha^{p+1}-p(p-1)x^{p-1}(x-\alpha)^2}{2\alpha x^{p-1}(x-\alpha)^3}=$ $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{2\alpha p(p-1)x^{p-1}-2\alpha^2p(p-1)x^{p-2}-p(p-1)^2x^{p-2}(x-\alpha)^2-2p(p-1)x^{p-1}(x-\alpha)}{2\alpha((p-1)x^{p-2}(x-\alpha)^3+3x^{p-1}(x-\alpha)^2)}=$

$\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{-p(p^2-1)}{2\alpha((p-1)(x-\alpha)+3x)}=-\frac{p(p^2-1)}{6\alpha^2}$ である. 従って $f'(\alpha)=-\dfrac{p(p^2-1)}{6\alpha^2}$ である.

(2) $x\neq 0$ ならば $f'(x)=-\dfrac{x^p((p-1)x-(p+1)\alpha)+\alpha^p((p+1)x-(p-1)\alpha)}{x^p(x-\alpha)^3}$ だから, (1) の結果から
$\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)-f'(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{-6\alpha^2x^p((p-1)x-(p+1)\alpha)-6\alpha^{p+2}((p+1)x-(p-1)\alpha)+p(p^2-1)x^p(x-\alpha)^3}{6\alpha^2x^p(x-\alpha)^4}=$
$\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{-6\alpha^2(p^2-1)x^p+6\alpha^3p(p+1)x^{p-1}-6\alpha^{p+2}(p+1)+p^2(p^2-1)x^{p-1}(x-\alpha)^3+3p(p^2-1)x^p(x-\alpha)^2}{6\alpha^2px^{p-1}(x-\alpha)^4+24\alpha^2x^p(x-\alpha)^3}=$
$\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{6p(p^2-1)x^{p-2}(x+\alpha)(x-\alpha)^2+p^2(p-1)(p^2-1)x^{p-2}(x-\alpha)^3+6p^2(p^2-1)x^{p-1}(x-\alpha)^2}{6\alpha^2p(p-1)x^{p-2}(x-\alpha)^4+48\alpha^2px^{p-1}(x-\alpha)^3+72\alpha^2x^p(x-\alpha)^2}=$
$\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{6p(p^2-1)(x+\alpha)+p^2(p-1)(p^2-1)(x-\alpha)+6p^2(p^2-1)x}{6\alpha^2p(p-1)(x-\alpha)^2+48\alpha^2px(x-\alpha)+72\alpha^2x^2}=\frac{p(p+2)(p^2-1)}{12\alpha^3}$ となるため, f の導関数は 0 で微分可能である.

4. φ を $\varphi(x)=f(x)^{\frac{1}{x}}$ で定めると, ロピタルの定理から $\displaystyle\lim_{x\to0}\log\varphi(x)=\lim_{x\to0}\frac{\log f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{f'(0)}{f(0)}$ だから $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\log\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\log\varphi(x)}=e^{\frac{f'(0)}{f(0)}}$ である.

5. (1) テイラーの定理より $f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\dfrac{f''(p+\theta(x-p))}{2}(x-p)^2$ を満たす $0<\theta<1$ が存在する. 従って $f'(\gamma)(x-p)=f(x)-f(p)=f'(p)(x-p)+\dfrac{f''(p+\theta(x-p))}{2}(x-p)^2$ だから $\dfrac{f'(\gamma)-f'(p)}{x-p}=\dfrac{f''(p+\theta(x-p))}{2}$ が得られるため, f'' の連続性から $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{f'(\gamma)-f'(p)}{x-p}=\lim_{x\to p}\frac{f''(p+\theta(x-p))}{2}=\frac{f''(p)}{2}$ が成り立つ.

(2) (1) より $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{\gamma-p}{x-p}=\lim_{x\to p}\frac{f'(\gamma)-f'(p)}{x-p}\frac{1}{\frac{f'(\gamma)-f'(p)}{\gamma-p}}=\lim_{x\to p}\frac{f'(\gamma)-f'(p)}{x-p}\frac{1}{\lim\limits_{x\to p}\frac{f'(\gamma)-f'(p)}{\gamma-p}}=\frac{f''(p)}{2}\frac{1}{\frac{f''(p)}{2}}=\frac{1}{2}$,
$\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{f'(x)-f'(\gamma)}{x-p}=\lim_{x\to p}\left(\frac{f'(x)-f'(p)}{x-p}-\frac{f'(\gamma)-f'(p)}{x-p}\right)=\lim_{x\to p}\frac{f'(x)-f'(p)}{x-p}-\lim_{x\to p}\frac{f'(\gamma)-f'(p)}{x-p}=\frac{f''(p)}{2}$.

(3) $f(x)-f(p)=f'(\gamma)(x-p)$ の両辺を x で微分すれば $f'(x)=\gamma'f''(\gamma)(x-p)+f'(\gamma)$ が得られる. 従って f'' の連続性と (2) の結果から $\displaystyle f''(p)\lim_{x\to p}\gamma'=\lim_{x\to p}\gamma'f''(\gamma)=\lim_{x\to p}\frac{f'(x)-f'(\gamma)}{x-p}=\frac{f''(p)}{2}$ だから $\displaystyle\lim_{x\to p}\gamma'=\frac{1}{2}$ である.

(4) (2) の結果より, 次が得られる.

$$\lim_{x\to p}\frac{f''(x)-f''(\gamma)}{x-p}=\lim_{x\to p}\left(\frac{f''(x)-f''(p)}{x-p}-\frac{f''(\gamma)-f''(p)}{\gamma-p}\frac{\gamma-p}{x-p}\right)=f^{(3)}(p)-\frac{f^{(3)}(p)}{2}=\frac{f^{(3)}(p)}{2}$$

(5) γ は x の関数として $\gamma(x)=(f')^{-1}\left(\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}\right)$ だから $\gamma'(x)=\dfrac{f(p)-f(x)-f'(x)(p-x)}{(x-p)^2f''(\gamma(x))}$ が成り立ち, テイラーの定理より $f(p)=f(x)+f'(x)(p-x)+\dfrac{f''(x)}{2}(p-x)^2+\dfrac{f^{(3)}(x+\theta(p-x))}{6}(p-x)^3$ を満たす $0<\theta<1$ が存在するため, (4) の結果と f'', $f^{(3)}$ の連続性から以下の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to p}\frac{2\gamma'-1}{x-p}&=\lim_{x\to p}\frac{2f(p)-2f(x)-2f'(x)(p-x)-(p-x)^2f''(\gamma(x))}{(x-p)^3f''(\gamma(x))}\\&=\lim_{x\to p}\frac{3f''(x)(x-p)^2-f^{(3)}(x+\theta(p-x))(x-p)^3-3(x-p)^2f''(\gamma(x))}{3(x-p)^3f''(\gamma(x))}\\&=\lim_{x\to p}\left(\frac{f''(x)-f''(\gamma(x))}{(x-p)f''(\gamma(x))}-\frac{f^{(3)}(x+\theta(p-x))}{3f''(\gamma(x))}\right)=\frac{f^{(3)}(p)}{2f''(p)}-\frac{f^{(3)}(p)}{3f''(p)}=\frac{f^{(3)}(p)}{6f''(p)}\end{aligned}$$

$f(x)-f(p)=f'(\gamma)(x-p)$ の両辺を x で 2 回微分して $f''(x)=(\gamma''f''(\gamma)+(\gamma')^2f^{(3)}(\gamma))(x-p)+2\gamma'f''(\gamma)$ を得る. 故に $\gamma''f''(\gamma)=\dfrac{f''(x)-2\gamma'f''(\gamma)}{x-p}-(\gamma')^2f^{(3)}(\gamma)=\dfrac{f''(x)-f''(\gamma)}{x-p}-\dfrac{f''(\gamma)(2\gamma'-1)}{x-p}-(\gamma')^2f^{(3)}(\gamma)$ であり, $\displaystyle\lim_{x\to p}\left(\frac{f''(x)-f''(\gamma)}{x-p}-\frac{f''(\gamma)(2\gamma'-1)}{x-p}-(\gamma')^2f^{(3)}(\gamma)\right)=\frac{f^{(3)}(p)}{2}-\frac{f^{(3)}(p)}{6}-\frac{f^{(3)}(p)}{4}=\frac{f^{(3)}(p)}{12}$, $\displaystyle\lim_{x\to p}\gamma''f''(\gamma)=f''(p)\lim_{x\to p}\gamma''$ だから $\displaystyle\lim_{x\to p}\gamma''=\frac{f^{(3)}(p)}{12f''(p)}$ である.

(6) $f(x)-f(p)=f'(\gamma)(x-p)$ の両辺を x で 3 回微分すれば

$$f^{(3)}(x)=(x-p)\Big(\gamma^{(3)}f''(\gamma)+3\gamma'\gamma''f^{(3)}(\gamma)+(\gamma')^3f^{(4)}(\gamma)\Big)+3\gamma''f''(\gamma)+3(\gamma')^2f^{(3)}(\gamma)$$

が得られるため

$$\lim_{x\to p}\Big(\gamma^{(3)}f''(\gamma)+3\gamma'\gamma''f^{(3)}(\gamma)+(\gamma')^3f^{(4)}(\gamma)\Big)=\lim_{x\to p}\frac{f^{(3)}(x)-3\gamma''f''(\gamma)-3(\gamma')^2f^{(3)}(\gamma)}{x-p}\quad\cdots(*)$$

が成り立つ. $\lim_{x\to p}\gamma^{(3)}=L$ とおけば, (3) と (5) の結果から $(*)$ の左辺は $Lf''(p)+\dfrac{f^{(3)}(p)^2}{8f''(p)}+\dfrac{f^{(4)}(p)}{8}$ に等しい. (2) の結果より, 次が得られる.

$$\lim_{x\to p}\frac{f^{(3)}(x)-f^{(3)}(\gamma)}{x-p}=\lim_{x\to p}\left(\frac{f^{(3)}(x)-f^{(3)}(p)}{x-p}-\frac{f^{(3)}(\gamma)-f^{(3)}(p)}{\gamma-p}\frac{\gamma-p}{x-p}\right)=f^{(4)}(p)-\frac{f^{(4)}(p)}{2}=\frac{f^{(4)}(p)}{2}$$

$$\lim_{x\to p}\frac{f^{(3)}(\gamma)-f^{(3)}(p)}{x-p}=\lim_{x\to p}\frac{f^{(3)}(\gamma)-f^{(3)}(p)}{\gamma-p}\frac{\gamma-p}{x-p}=\frac{f^{(4)}(p)}{2}$$

従って (2), (3), (5) の結果を用いると次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}(*)&=\lim_{x\to p}\frac{f^{(3)}(x)-f^{(3)}(\gamma)}{x-p}+\lim_{x\to p}\frac{f^{(3)}(\gamma)(1-3(\gamma')^2)-3\gamma''f''(\gamma)}{x-p}\\&=\frac{f^{(4)}(p)}{2}+\lim_{x\to p}\frac{\big(f^{(3)}(\gamma)-f^{(3)}(p)\big)(1-3(\gamma')^2)}{x-p}+\lim_{x\to p}\frac{f^{(3)}(p)(1-3(\gamma')^2)-3\gamma''f''(\gamma)}{x-p}\\&=\frac{5f^{(4)}(p)}{8}-\lim_{x\to p}\frac{3\gamma''(f''(\gamma)-f''(p))}{\gamma-p}\frac{\gamma-p}{x-p}+\lim_{x\to p}\frac{f^{(3)}(p)(1-3(\gamma')^2)-3\gamma''f''(p)}{x-p}\\&=\frac{5f^{(4)}(p)}{8}-\frac{f^{(3)}(p)^2}{8f''(p)}-\lim_{x\to p}\frac{3f^{(3)}(p)(2\gamma'+1)(2\gamma'-1)}{4(x-p)}+\lim_{x\to p}\frac{f^{(3)}(p)-12\gamma''f''(p)}{4(x-p)}\\&=\frac{5f^{(4)}(p)}{8}-\frac{3f^{(3)}(p)^2}{8f''(p)}-3f''(p)\lim_{x\to p}\gamma^{(3)}=\frac{5f^{(4)}(p)}{8}-\frac{3f^{(3)}(p)^2}{8f''(p)}-3Lf''(p)\end{aligned}$$

故に $Lf''(p)+\dfrac{f^{(3)}(p)^2}{8f''(p)}+\dfrac{f^{(4)}(p)}{8}=\dfrac{5f^{(4)}(p)}{8}-\dfrac{3f^{(3)}(p)^2}{8f''(p)}-3Lf''(p)$ だから $L=\dfrac{f^{(4)}(p)}{8f''(p)}-\dfrac{f^{(3)}(p)^2}{8f''(p)^2}$ である.

(7) $f(x)-f(p)=f'(\gamma)(x-p)$ の両辺を x で 4 回微分すれば

$$\begin{aligned}f^{(4)}(x)=(x-p)&\Big(\gamma^{(4)}f''(\gamma)+4\gamma'\gamma^{(3)}f^{(3)}(\gamma)+3(\gamma'')^2f^{(3)}(\gamma)+6(\gamma')^2\gamma''f^{(4)}(\gamma)+(\gamma')^4f^{(5)}(\gamma)\Big)\\&+4\gamma^{(3)}f''(\gamma)+12\gamma'\gamma''f^{(3)}(\gamma)+4(\gamma')^3f^{(4)}(\gamma)\end{aligned}$$

が得られるため次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to p}\Big(\gamma^{(4)}f''(\gamma)+4\gamma'\gamma^{(3)}f^{(3)}(\gamma)+3(\gamma'')^2f^{(3)}(\gamma)+6(\gamma')^2\gamma''f^{(4)}(\gamma)+(\gamma')^4f^{(5)}(\gamma)\Big)\\&\quad=\lim_{x\to p}\frac{f^{(4)}(x)-4\gamma^{(3)}f''(\gamma)-12\gamma'\gamma''f^{(3)}(\gamma)-4(\gamma')^3f^{(4)}(\gamma)}{x-p}\quad\cdots(**)\end{aligned}$$

$\lim_{x\to p}\gamma^{(4)}=M$ とおけば, (3), (5), (6) の結果から $(**)$ の左辺は $Mf''(p)+\dfrac{3f^{(3)}(p)f^{(4)}(p)}{8f''(p)}-\dfrac{11f^{(3)}(p)^3}{48f''(p)^2}+\dfrac{f^{(5)}(p)}{16}$ に

等しく, 右辺は

$$
\begin{aligned}
(**) &= \lim_{x\to p}\frac{f^{(4)}(x)-f^{(4)}(p)}{x-p}+\lim_{x\to p}\frac{f^{(4)}(p)-4\gamma^{(3)}f''(\gamma)-12\gamma'\gamma''f^{(3)}(\gamma)-4(\gamma')^3f^{(4)}(\gamma)}{x-p}\\
&= f^{(5)}(p)-\lim_{x\to p}\frac{4(\gamma')^3(f^{(4)}(\gamma)-f^{(4)}(p))}{\gamma-p}\frac{\gamma-p}{x-p}+\lim_{x\to p}\frac{(1-4(\gamma')^3)f^{(4)}(p)-4\gamma^{(3)}f''(\gamma)-12\gamma'\gamma''f^{(3)}(\gamma)}{x-p}\\
&= \frac{3f^{(5)}(p)}{4}-\lim_{x\to p}\frac{4\gamma^{(3)}(f''(\gamma)-f''(p))}{\gamma-p}\frac{\gamma-p}{x-p}+\lim_{x\to p}\frac{(1-4(\gamma')^3)f^{(4)}(p)-4\gamma^{(3)}f''(p)-12\gamma'\gamma''f^{(3)}(\gamma)}{x-p}\\
&= \frac{3f^{(5)}(p)}{4}-\frac{f^{(3)}(p)f^{(4)}(p)}{4f''(p)}+\frac{f^{(3)}(p)^3}{4f''(p)^2}-\lim_{x\to p}\frac{12\gamma'\gamma''(f^{(3)}(\gamma)-f^{(3)}(p))}{\gamma-p}\frac{\gamma-p}{x-p}\\
&\quad+\lim_{x\to p}\frac{(1-4(\gamma')^3)f^{(4)}(p)-4\gamma^{(3)}f''(p)-12\gamma'\gamma''f^{(3)}(p)}{x-p}\\
&= \frac{3f^{(5)}(p)}{4}-\frac{f^{(3)}(p)f^{(4)}(p)}{2f''(p)}+\frac{f^{(3)}(p)^3}{4f''(p)^2}-4\lim_{x\to p}\Big(3(\gamma')^2\gamma''f^{(4)}(p)+\gamma^{(4)}f''(p)+3((\gamma'')^2+\gamma'\gamma^{(3)})f^{(3)}(p)\Big)\\
&= \frac{3f^{(5)}(p)}{4}-\frac{3f^{(3)}(p)f^{(4)}(p)}{2f''(p)}+\frac{11f^{(3)}(p)^3}{12f''(p)^2}-4Mf''(p)
\end{aligned}
$$

となるため, 次の等式が得られる.

$$
Mf''(p)+\frac{3f^{(3)}(p)f^{(4)}(p)}{8f''(p)}-\frac{11f^{(3)}(p)^3}{48f''(p)^2}+\frac{f^{(5)}(p)}{16}=\frac{3f^{(5)}(p)}{4}-\frac{3f^{(3)}(p)f^{(4)}(p)}{2f''(p)}+\frac{11f^{(3)}(p)^3}{12f''(p)^2}-4Mf''(p)
$$

故に $M=\dfrac{11f^{(5)}(p)}{80f''(p)}-\dfrac{3f^{(3)}(p)f^{(4)}(p)}{8f''(p)^2}+\dfrac{11f^{(3)}(p)^3}{48f''(p)^3}$ である.

微積分学 I 演習問題　第 8 回　関数の級数展開

1. 次の関数のマクローリン展開と, その収束半径を求めよ. ただし a, b, c, d は実数, α は 0 でない実数, k は自然数で, (3), (8), (20) では $a>0$, (4) では $bd\neq 0$ とする.

(1) $e^{\alpha x^2}$　(2) $\dfrac{1}{x+\alpha}$　(3) $(a^2-x^2)^\alpha$　(4) $\log(ax+b)(cx+d)$　(5) $\dfrac{x-1}{x+1}$　(6) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(7) $\dfrac{x}{1+x^2}$　(8) $\dfrac{1}{1+x+x^2}$　(9) $(e^x-e^{-x})^2$　(10) $\dfrac{1}{1-3x+2x^2}$　(11) $\cos^2 x$　(12) $\dfrac{1}{a^2+x^2}$

(13) $\cosh^3 x$　(14) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　(15) $\log(1+\alpha x^2)$　(16) $(ax^2+bx+c)e^x$　(17) $\sin^3 x$　(18) $\tanh^{-1} x$

(19) $\sinh^{-1} x$　(20) $\sqrt{1+a^kx^k}$　(21) $e^x\log(1+x)$　(22) $\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$　(23) $\sin^{-1}x$　(24) $\tan^{-1}x$

(25) $(\sin^{-1}x)^2$　(26) $(\log(1+x))^2$　(27) $(\tan^{-1}x)^2$　(28) $\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$

(29) $(ax^2+bx+c)\log(1+\alpha x)$

2. α, β はともに 0 でないとし, 数列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ 漸化式 $a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n$ を満たすとする. このとき, $\sum\limits_{n=0}^\infty a_nx^n$ が収束する場合に, この整級数の和を a_0, a_1, α, β, x を用いて表し, 収束半径を答えよ.

3. 以下で与える関数 f の増減, 凹凸, 漸近線の有無を調べてグラフの概形を描け.

(1) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=(2x^2+7x+7)e^{-x}$　(2) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$

4. a を実数, b を 0 でない実数の定数する. $f(x)=(x^2-ax+ab)e^{\frac{x}{b}}$ で与えられる関数が次の 2 つの条件 (1) と (2) の両方を満たすとき, a と b の値と, f が極小になる x を求めよ.

(1) f は $x>0$ の範囲で極小値をとる.

(2) f のグラフは $(-3,f(-3))$ と $(2,f(2))$ を変曲点にもつ.

5. 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ の法線のうちで, 原点から最大の距離を持つものを求めよ.

6. α を正の実数, p を 0, ±1 と異なる実数とする. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は $a_1\neq\alpha$ と漸化式 $a_{n+1}=\left(1-\dfrac{1}{p}\right)a_n+\dfrac{\alpha^p}{pa_n^{p-1}}$ を満たすとする.

(1) 関数 $f,g:(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{p}\right)x+\dfrac{\alpha^p}{px^{p-1}}$, $g(x)=\begin{cases}\dfrac{(p-1)x^p-\alpha px^{p-1}+\alpha^p}{x^{p-1}(x-\alpha)^2} & x\neq\alpha\\ \dfrac{p(p-1)}{2\alpha} & x=\alpha\end{cases}$ によって定めるとき, f, g の増減を調べよ.

(2) $p>1$ とする. $n\geqq 2$ ならば $a_n>a_{n+1}>\alpha$ であることを示せ.

(3) $p>1$ とする. $n\geqq 2$ ならば $a_{n+1}-\alpha<\dfrac{p-1}{p}(a_n-\alpha)$, $a_{n+1}-\alpha<\dfrac{p-1}{2\alpha}(a_n-\alpha)^2$ が成り立つことを示せ.

(4) $p>1$ とする. $n\geqq 3$ ならば次の不等式が成り立つことを示せ.

$$a_n-\alpha<\left(\frac{p-1}{p}\right)^{n-2}\left(a_1-\alpha-\frac{a_1^p-\alpha^p}{pa_1^{p-1}}\right),\quad a_n-\alpha<\frac{2\alpha}{p-1}\left(\frac{p-1}{2\alpha}\left(a_1-\alpha-\frac{a_1^p-\alpha^p}{pa_1^{p-1}}\right)\right)^{2^{n-2}}$$

(5) $p>1$ のとき, $a_1=\alpha\left(\dfrac{p-1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ ならば, $\dfrac{p-1}{2\alpha}\left(a_1-\alpha-\dfrac{a_1^p-\alpha^p}{pa_1^{p-1}}\right)<1$ であることを示せ.

7. (1) 関数 $\varphi:[p,q]\to\boldsymbol{R}$ が凸であるとき, $x_1,x_2,\dots,x_n\in[p,q]$ と, 正の実数 $a_1,a_2,\dots,a_n$ で $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$ を満たすものに対して, $\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i\in[p,q]$ であり, 不等式 $\varphi\left(\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i\right)\leqq\sum\limits_{i=1}^n a_i\varphi(x_i)$ が成り立つことを示せ.

(2) 0 以上の実数 $a_1,a_2,\dots,a_n$ に対し, 関数 $f:(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=\left(\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{a_k^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ で定める. このとき, f は単調増加関数であることを示せ.

第 8 回の演習問題の解答

1. (1) e^t のマクローリン展開 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ に $t = \alpha x^2$ を代入して $e^{\alpha x^2}$ のマクローリン展開 $e^{\alpha x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} x^{2n}$ を得る．この級数の収束半径は無限大である．

(2) $(1+t)^{-1}$ のマクローリン展開 $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$ を $\frac{1}{\alpha}$ 倍したものに $t = \frac{x}{\alpha}$ を代入すれば $\frac{1}{\alpha + x}$ のマクローリン展開 $\frac{1}{\alpha+x} = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^{n+1}} x^n$ を得る．この級数の収束半径は $\left|\frac{x}{\alpha}\right| = |t| < 1$ より $|\alpha|$ である．

(3) $(1+t)^{\alpha}$ のマクローリン展開 $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} t^n$ に $t = -\frac{x^2}{a^2}$ を代入して $\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\alpha}$ のマクローリン展開 $\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{2n}} \binom{\alpha}{n} x^{2n}$ を得る．この両辺を $a^{2\alpha}$ 倍すれば $(a^2 - x^2)^{\alpha}$ のマクローリン展開 $(a^2 - x^2)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{2(n-\alpha)}} \binom{\alpha}{n} x^{2n}$ を得る．この級数の収束半径は $\left|-\frac{x^2}{a^2}\right| = |t| < 1$ より a である．

(4) $\log(1+t)$ のマクローリン展開 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$ に $t = \frac{ax}{b}$, $t = \frac{cx}{d}$ を代入すれば,

$$\log\left(1 + \frac{ax}{b}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a^n x^n}{nb^n} \ \cdots (i), \qquad \log\left(1 + \frac{cx}{d}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{c^n x^n}{nd^n} \ \cdots (ii)$$

が得られる．(i) は条件 $\left|\frac{ax}{b}\right| < 1$ のもとで収束し, (ii) は条件 $\left|\frac{cx}{d}\right| < 1$ のもとで収束するため, $|x| < \min\left\{\left|\frac{b}{a}\right|, \left|\frac{d}{c}\right|\right\}$ ならば (i) と (ii) はともに収束する．従って (i), (ii) より $\log(ax+b)(cx+d)$ のマクローリン展開は

$$\log(ax+b)(cx+d) = \log\left(1 + \frac{ax}{b}\right) + \log b + \log\left(1 + \frac{cx}{d}\right) + \log d = \log bd + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{a^n}{b^n} + \frac{c^n}{d^n}\right) x^n$$

であり, この級数の収束半径は $\min\left\{\left|\frac{b}{a}\right|, \left|\frac{d}{c}\right|\right\}$ である．

(5) $\frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{1+x}$ だから $(1+x)^{-1}$ のマクローリン展開より $\frac{x-1}{x+1} = 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n-1} n x^n$ を得る．この級数の収束半径は 1 である．

(6) $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ のマクローリン展開 $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} t^n$ に $t = x^2$ を代入すれば $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}$ であり, この両辺に x をかけると $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ のマクローリン展開 $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}$ が得られる．この級数の収束半径は $|x^2| = |t| < 1$ より 1 である．

(7) $(1+t)^{-1}$ のマクローリン展開 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$ に $t = x^2$ を代入すれば $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ であり, この両辺に x をかけて $\frac{x}{1+x^2}$ のマクローリン展開 $\frac{x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}$ を得る．この級数の収束半径は $|x^2| = |t| < 1$ より 1 である．

(8) $\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{1-x^3} = \frac{1}{1-x^3} - \frac{x}{1-x^3}$ だから $(1+t)^{-1}$ のマクローリン展開 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$ に $t = -x^3$ を代入すれば $\frac{1}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}$ より $\frac{1}{1+x+x^2}$ のマクローリン展開 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} - x\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^{3n} - x^{3n+1}) = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \cdots + x^{3n} - x^{3n+1} + \cdots$ を得る．この級数の収束半径は, $|x^3| < 1$ より 1 である．

(9) e^t のマクローリン展開 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ に $t = \pm 2x$ を代入すれば $e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$, $e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n$ を得る．$2^n + (-2)^n = \begin{cases} 2^{n+1} & n \text{ は偶数} \\ 0 & n \text{ は奇数} \end{cases}$ であることに注意すれば, $(e^x - e^{-x})^2$ のマクローリン展開は

$(e^x-e^{-x})^2 = e^{2x}+e^{-2x}-2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}x^n - 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-2)^n}{n!}x^n = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2^{2m+1}}{(2m)!}x^{2m}$ となり, この級数の収束半径は無限大である.

(10) $\dfrac{1}{1-3x+2x^2} = \dfrac{1}{(1-x)(1-2x)} = \dfrac{2}{1-2x} - \dfrac{1}{1-x}$ だから $(1+t)^{-1}$ のマクローリン展開 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$ に $t=-2x$, $t=-x$ を代入すれば $\dfrac{1}{1-3x+2x^2}$ のマクローリン展開 $2\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)x^n$ を得る. この級数の収束半径は, $|-2x|<1$ かつ $|-x|<1$ より $\dfrac{1}{2}$ である.

(11) $\cos t$ のマクローリン展開 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}$ に $t=2x$ を代入すれば $\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}$ であり, $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$ から $\cos^2 x$ のマクローリン展開 $1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$ を得る. この級数の収束半径は無限大である.

(12) $(1+t)^{-1}$ のマクローリン展開 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$ を $\dfrac{1}{a^2}$ 倍したものに $t=\dfrac{x^2}{a^2}$ を代入すれば $\dfrac{1}{a^2+x^2}$ のマクローリン展開 $\dfrac{1}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a^2}\left(1+\dfrac{x^2}{a^2}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{a^2}\left(\dfrac{x^2}{a^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{a^{2n+2}}x^{2n}$ を得る. この級数の収束半径は $\left|\dfrac{x^2}{a^2}\right| = |t| < 1$ より a である.

(13) $\cosh^3 x = \left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}(e^{3x}+e^{-3x}+3e^x+3e^{-x})$ であり, e^t のマクローリン展開 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^n}{n!}$ に $t=\pm x.\pm 3x$ を代入して, $1+(-1)^n = \begin{cases} 2 & n \text{ は偶数} \\ 0 & n \text{ は奇数} \end{cases}$, $3^n+(-3)^n = \begin{cases} 2\cdot 3^n & n \text{ は偶数} \\ 0 & n \text{ は奇数} \end{cases}$ であることに注意すれば, $\cosh^3 x$ のマクローリン展開は $\dfrac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n+(-3)^n+3(1+(-1)^n)}{n!}x^n = \sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{9^m+3}{4(2m)!}x^{2m}$ によって与えられる. この級数の収束半径は無限大である.

(14) $\left(\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^{(n)} = \sin\left(x+\dfrac{\pi n}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ だから $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ の n 次導関数の 0 における値は $\sin\left(\dfrac{\pi n}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & n \text{ を 4 で割った余りが 0 または 1} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & n \text{ を 4 で割った余りが 2 または 3} \end{cases}$ となるため, テイラーの定理から $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{x}{\sqrt{2}} - \dfrac{x^2}{2!\sqrt{2}} - \dfrac{x^3}{3!\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!\sqrt{2}} + \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{\sin\left(c+\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{n!}x^n$ を満たす c が 0 と x の間にある.
$\left|\sin\left(c+\dfrac{\pi n}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right| \leqq 1$ だから, 任意の実数 x に対して, $n\to\infty$ のとき, 剰余項 $\dfrac{\sin\left(c+\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{n!}x^n$ は 0 に近づく. 従って $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ のマクローリン展開は $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{x}{\sqrt{2}} - \dfrac{x^2}{2!\sqrt{2}} - \dfrac{x^3}{3!\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!\sqrt{2}} + \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!\sqrt{2}} + \cdots$ であり, この級数の収束半径は無限大である.

(15) $\log(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}t^n$ であり, $t=\alpha x^2$ を代入すれば, $\log(1+\alpha x^2)$ のマクローリン展開 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\alpha^n}{n}x^{2n}$ が得られる. この整級数は $|\alpha x^2|<1$ で収束し, $|\alpha x^2|>1$ で発散するため, 収束半径は $\dfrac{1}{\sqrt{|\alpha|}}$ である.

(16) e^x のマクローリン展開 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ の両辺に ax^2, bx, c をかけることにより ax^2e^x, bxe^x, ce^x のマクローリン展開 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{ax^{n+2}}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{ax^n}{(n-2)!}$, $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{bx^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{bx^n}{(n-1)!}$, $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{cx^n}{n!}$ が得られる. これらを辺々加えれば $(ax^2+bx+c)e^x$ のマクローリン展開 $c+(b+c)x+\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{an(n-1)+bn+c}{n!}x^n$ が得られ, この級数の収束半径は無限大である.

(17) 第 6 回の演習問題 1 の (11) の解答から $\sin^3 x = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{1}{4}\sin 3x$ であるため, $\sin t$ のマクローリン展開 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1}$ より, $\sin^3 x$ のマクローリン展開は $\dfrac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} - \dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{3(-1)^n(1-9^n)}{4(2n+1)!}x^{2n+1}$ であり, この級数の収束半径は無限大である.

(18) $\tanh^{-1}x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}$ だから, $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$, $\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n$

より, $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n-1}}{2n}x^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ を得る. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ の収束半径は 1 だから, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ の収束半径も 1 である.

(19) $\sinh^{-1} x = \log\bigl(x+\sqrt{1+x^2}\bigr)$ であり, $\log\bigl(x+\sqrt{1+x^2}\bigr)$ の導関数は $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ だから, 微積分学の基本定理によって $\sinh^{-1} x = \int_0^x (1+t^2)^{-\frac{1}{2}}dt$ が成り立つ. 一方, $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^n$ の x に t^2 を代入すれば $(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}t^{2n}$ が得られる. 従って $\sinh^{-1} x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n+1}$. ここで, $\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!} = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}$ だから $\sinh^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1}$ と表すことができる. $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^n$ の収束半径が 1 であることから, 上で得た $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1}$ の収束半径も 1 である.

(20) $(1+t)^{\frac{1}{2}}$ のマクローリン展開 $\sqrt{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}t^n$ の t に a^kx^k を代入すれば $\sqrt{1+a^kx^k}$ のマクローリン展開

$$\begin{aligned}\sqrt{1+a^kx^k} &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(a^kx^k)^n = 1+\frac{a^k}{2}x^k+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}a^{kn}}{n!}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)-\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+2\right)x^{kn}\\ &= 1+\frac{a^k}{2}x^k+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}a^{kn}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^{kn}\end{aligned}$$

を得る. $\sqrt{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}t^n$ の収束半径は 1 だから上で求めた整級数は $|a^kx^k| < 1$ ならば収束し, $|a^kx^k| > 1$ ならば発散する. 従って収束半径は $\frac{1}{a}$ である.

(21) e^x, $\log(1+x)$ のマクローリン展開はそれぞれ, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ で, 前者の収束半径は無限大, 後者の収束半径は 1 だから, $|x| < 1$ のとき, これらの積を考えれば, $e^x\log(1+x)$ のマクローリン展開

$$e^x\log(1+x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k(n-k)!}\right)x^n$$

が得られ, この級数の収束半径は 1 である.

(22) $(1+t)^{\frac{1}{2}}$ のマクローリン展開 $(1+t)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}t^n$ の t に x^2 を代入すれば $\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^{2n}$ を得る. 従って $\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}-x = 1-x+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^{2n}$ が $\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$ のマクローリン展開で, $(1+t)^{\frac{1}{2}}$ のマクローリン展開の収束半径が 1 であることから, この級数の収束半径も 1 である.

(23) (3) で, $a=1$, $\alpha = -\frac{1}{2}$ の場合を考える. $\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right) = (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ であることに注意すれば, $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ のマクローリン展開は $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}$ で与えられる. この両辺の 0 から x までの積分を考えれば, $\sin^{-1}x$ のマクローリン展開 $\sin^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1}$ が得られ, その収束半径は 1 である.

(24) (8) で, $a=1$ の場合, $\frac{1}{1+t^2}$ のマクローリン展開 $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^{2n}$ の両辺の 0 から x までの積分を考えれば, $\tan^{-1}x$ のマクローリン展開 $\tan^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ が得られ, その収束半径は 1 である.

(25) (23) より, $\sin^{-1}x$ は $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1}$ とマクローリン展開されるため, $(\sin^{-1}x)^2$ は

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{(2i-1)!!(2n-2i-1)!!}{(2i+1)(2n-2i+1)(2i)!!(2n-2i)!!}\right)x^{2n+2}$$

とマクローリン展開される. 従って, $f(x)=(\sin^{-1}x)^2$ とおけば, $|x|<1$ ならば $(\sin^{-1}x)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ が成り立つ. 第 6 回の演習問題 3 の (13) より, n が奇数ならば $f^{(n)}(0)=0$ であり, $f^{(2n)}(0)=2^{2n-1}((n-1)!)^2$ だから, $(\sin^{-1}x)^2$ のマクローリン展開は $(\sin^{-1}x)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!}x^{2n}$ で与えられ, その収束半径は 1 である.

(26) $\log(1+x)$ は $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ とマクローリン展開されるため, $(\log(1+x))^2$ は

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right)^2=\sum_{n=2}^{\infty}\left((-1)^n\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i(n-i)}\right)x^n$$

とマクローリン展開される. $\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i(n-i)}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{n-i}\right)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}$ だから $(\log(1+x))^2$ のマクローリン展開は $(\log(1+x))^2=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\right)x^n$ で与えられ, その収束半径は 1 である.

(27) (24) より, $\tan^{-1}x$ は $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ とマクローリン展開されるため, $(\tan^{-1}x)^2$ は

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(2i+1)(2n-2i+1)}\right)x^{2n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)(2n-2i+1)}\right)x^{2n}$$

とマクローリン展開される. $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)(2n-2i+1)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2i-1}+\frac{1}{2n-2i+1}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1}$ だから $(\tan^{-1}x)^2$ のマクローリン展開は $(\tan^{-1}x)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i-1}\right)x^{2n}$ で与えられ, その収束半径は 1 である.

(28) $(1+t)^{\frac{1}{2}}$ のマクローリン展開 $(1+t)^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}t^n$ の t に x^2, $-x^2$ を代入すれば

$$\sqrt{1+x^2}=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^{2n},\qquad \sqrt{1-x^2}=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^nx^{2n}$$

を得る. 従って

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}&=\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^{2n}-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^nx^{2n}\right)\\&=\frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(1-(-1)^n)x^{2n}\end{aligned}$$

である. $1-(-1)^n$ は n が偶数のときは 0 で, 奇数のときは 2 だから $n=2m+1$ $(m=0,1,2,\dots)$ の場合の和をとればよいため. 上式から

$$\frac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{x^2}\sum_{m=0}^{\infty}2\binom{\frac{1}{2}}{2m+1}x^{4m+2}=\sum_{m=0}^{\infty}2\binom{\frac{1}{2}}{2m+1}x^{4m}$$

となる. 故に $\sum_{m=0}^{\infty}2\binom{\frac{1}{2}}{2m+1}x^{4m}=1+\sum_{m=1}^{\infty}2\frac{(4m-1)!!}{(4m+2)!!}x^{4m}$ が $\frac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$ のマクローリン展開で, $(1+t)^{\frac{1}{2}}$ のマクローリン展開の収束半径が 1 であることから, この級数の収束半径も 1 である.

(29) $\log(1+t)$ のマクローリン展開 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}$ に $t=\alpha x$ を代入して $\log(1+\alpha x)$ のマクローリン展開 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\alpha^nx^n}{n}$ を得る. この級数は $|\alpha x|<1$ のとき収束し, $|\alpha x|>1$ のとき発散するため, 収束半径は $\frac{1}{|\alpha|}$ である. $\log(1+\alpha x)$ のマクローリン展開の両辺に ax^2, bx, c をかけることにより $ax^2\log(1+\alpha x)$, $bx\log(1+\alpha x)$, $c\log(1+\alpha x)$ のマクローリン展開 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a\alpha^nx^{n+2}}{n}=\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a\alpha^{n-2}x^n}{n-2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{b\alpha^nx^{n+1}}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{b\alpha^{n-1}x^n}{n-1}$,

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{c\alpha^n x^n}{n}$ が得られる．これらを辺々加えることにより $(ax^2+bx+c)\log(1+\alpha x)$ のマクローリン展開 $c\alpha x+\left(b\alpha-\frac{c\alpha^2}{2}\right)x^2+\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\alpha^{n-2}\left(\frac{a}{n-2}-\frac{b\alpha}{n-1}+\frac{c\alpha^2}{n}\right)x^n$ が得られ, この級数の収束半径は $\frac{1}{|\alpha|}$ である．

2. $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$, $a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ だから, $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は初項が $a_1-\alpha a_0$, 公比が β の等比数列であり, $\{a_{n+1}-\beta a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は初項が $a_1-\beta a_0$, 公比が α の等比数列である．従って

$$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^n(a_1-\alpha a_0)\ \cdots(i),\qquad a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^n(a_1-\beta a_0)\ \cdots(ii)$$

が成り立つ．$\alpha\neq\beta$ の場合, (i) から (ii) を辺々引けば $(\beta-\alpha)a_n=\beta^n(a_1-\alpha a_0)-\alpha^n(a_1-\beta a_0)$ が得られるため, $a_n=\frac{\beta^n(a_1-\alpha a_0)-\alpha^n(a_1-\beta a_0)}{\beta-\alpha}$ である．故に

$$\sum_{n=0}^{m}a_nx^n=\sum_{n=0}^{m}\frac{\beta^n(a_1-\alpha a_0)-\alpha^n(a_1-\beta a_0)}{\beta-\alpha}x^n=\frac{a_1-\alpha a_0}{\beta-\alpha}\sum_{n=0}^{m}(\beta x)^n-\frac{a_1-\beta a_0}{\beta-\alpha}\sum_{n=0}^{m}(\alpha x)^n$$

だから, $|\alpha x|<1$ かつ $|\beta x|<1$ のときに $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ は収束して,

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\frac{a_1-\alpha a_0}{(\beta-\alpha)(1-\beta x)}-\frac{a_1-\beta a_0}{(\beta-\alpha)(1-\alpha x)}$$

が成り立つ．$\alpha=\beta$ の場合, (i) の両辺を α^n で割って $b_n=\frac{a_n}{\alpha^{n-1}}$ とおけば, $b_{n+1}-b_n=a_1-\alpha a_0$ となるため, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ は初項が αa_0, 公差が $a_1-\alpha a_0$ の等差数列である．従って $b_n=\alpha a_0+n(a_1-\alpha a_0)$ だから $a_n=a_0\alpha^n+n\alpha^{n-1}(a_1-\alpha a_0)$ である．故に

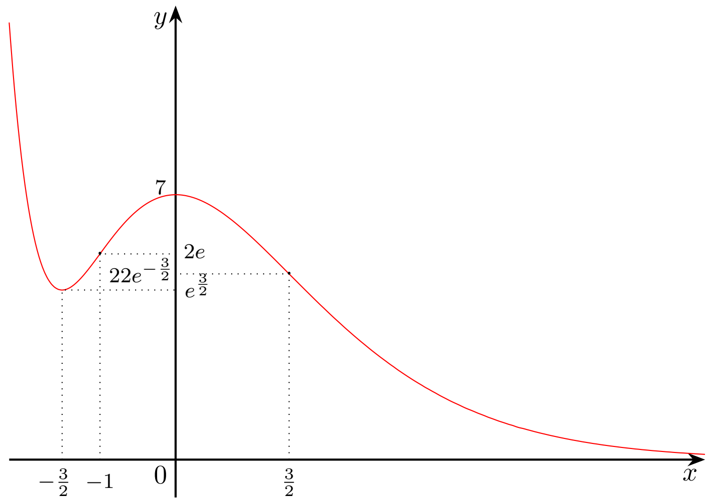
$$\sum_{n=0}^{m}a_nx^n=\sum_{n=0}^{m}(a_0\alpha^n+n\alpha^{n-1}(a_1-\alpha a_0))x^n=a_0\sum_{n=0}^{m}(\alpha x)^n+\frac{a_1-\alpha a_0}{\alpha}\sum_{n=0}^{m}n(\alpha x)^n$$

だから, $|\alpha x|<1$ のときに $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ は収束して,

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\frac{a_0}{1-\alpha x}+\frac{x(a_1-\alpha a_0)}{(1-\alpha x)^2}$$

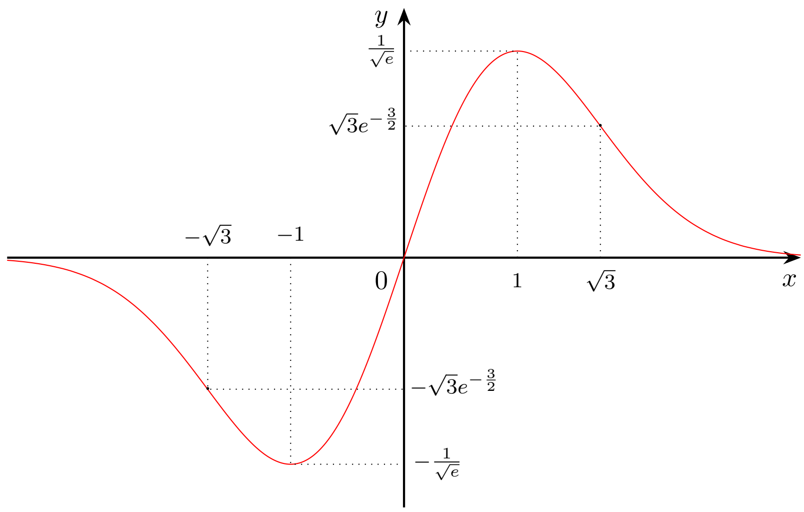
が成り立つ．以上から, $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径は $\frac{1}{|\alpha|}$ と $\frac{1}{|\beta|}$ の小さい方の値である．

3. (1) $f'(x)=(-2x^2-3x)e^{-x}=-x(2x+3)e^{-x}$ だから $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$ で f は狭義単調減少, $\left[-\frac{3}{2},0\right]$ で f は狭義単調増加, $[0,\infty)$ で f は狭義単調減少である．従って f は $-\frac{3}{2}$ で極小値 $e^{\frac{3}{2}}$ をとり, 0 で極大値 7 をとる．また $f''(x)=(2x^2-x-3)e^{-x}=(2x-3)(x+1)e^{-x}$ だから $(-\infty,-1]$ で f は下に凸, $\left[-1,\frac{3}{2}\right]$ で f は上に凸, $\left[\frac{3}{2},\infty\right)$ で f は下に凸である．さらに $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ だから x 軸は $x\to\infty$ における f の漸近線である．以上から f のグラフの概形は次のようになる．



(2) $f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = (1+x)(1-x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ だから f は区間 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$ で減少し，区間 $[1, 1]$ で増加する．よって，f は -1 で極小値 $-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ をとり，1 で極大値 $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ をとる．

$f''(x) = -3xe^{-\frac{x^2}{2}} + x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} = x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})e^{-\frac{x^2}{2}}$ だから f のグラフは区間 $\bigl(-\infty, -\sqrt{3}\bigr]$, $\bigl[0, \sqrt{3}\bigr]$ で上に凸，$\bigl[-\sqrt{3}, 0\bigr]$, $\bigl[\sqrt{3}, \infty\bigr)$ で下に凸である．また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ だから x 軸は漸近線である．さらに $f(-x) = -f(x)$ だから，f のグラフは原点について対称であることに注意すると，グラフは次のようになる．



4. $f(x) = (x^2 - ax + ab)e^{\frac{x}{b}}$ より $f'(x) = \dfrac{1}{b}(x^2 + (2b-a)x)e^{\frac{x}{b}}$, $f''(x) = \dfrac{1}{b^2}(x^2 + (4b-a)x + b(2b-a))e^{\frac{x}{b}}$．仮定より 2 次方程式 $x^2 + (4b-a)x + b(2b-a) = 0$ は -3 と 2 を解にもつため，解と係数の関係から $a - 4b = -1$, $b(2b-a) = -6$ である．$a = 4b - 1$ を第 2 式に代入して $b(1-2b) = -6$ だから $(2b+3)(b-2) = 0$ である．従って $b = -\dfrac{3}{2}, 2$ となるため，$(a, b) = \bigl(-7, -\frac{3}{2}\bigr), (7, 2)$ となる．

$(a, b) = \bigl(-7, -\frac{3}{2}\bigr)$ の場合，$f'(x) = -\dfrac{2}{3}x(x+4)e^{-\frac{2x}{3}}$ だから f は $(-\infty, -4]$ で単調減少，$[-4, 0]$ で単調増加，$[0, \infty)$ で単調減少するため，f は -4 で極小値をとり，0 で極大値をとる．

$(a, b) = (7, 2)$ の場合，$f'(x) = \dfrac{1}{2}x(x-3)e^{\frac{x}{2}}$ だから f は $(-\infty, 0]$ で単調増加，$[0, 3]$ で単調減少，$[3, \infty)$ で単調増加するため，f は 0 で極大値をとり，3 で極小値をとる．

以上から $a = 7$, $b = 2$ で，f は 3 で極小値をとる

5. 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $\left(\begin{smallmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{smallmatrix}\right)$ における接線の方向ベクトルは $\left(\begin{smallmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{smallmatrix}\right)$ で，法線はこのベクトルに垂直だから，$\left(\begin{smallmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{smallmatrix}\right)$ を通る法線の方程式は $-a\sin t(x - a\cos t) + b\cos t(y - b\sin t) = 0$ である．この法線と原点との距離の 2 乗は $\dfrac{(a^2-b^2)^2\cos^2 t\sin^2 t}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = \dfrac{(a^2-b^2)^2\sin^2 t(1-\sin^2 t)}{(a^2-b^2)\sin^2 t + b^2}$ だから，関数 $f : [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ を $f(s) = \dfrac{(a^2-b^2)^2 s(1-s)}{(a^2-b^2)s + b^2}$

で定めれば, $f(\sin^2 t)$ は上記の法線と原点との距離の 2 乗である. $f'(s) = -\dfrac{(a^2-b^2)^2((a-b)s+b)((a+b)s-b)}{((a^2-b^2)s+b^2)^2}$ だから f は $\left[0, \frac{b}{a+b}\right]$ で単調に増加し, $\left[\frac{b}{a+b}, 1\right]$ で単調に減少する. 故に $s = \frac{b}{a+b}$ のとき f は最大値 $(a-b)^2$ をとる. ここで $\sin^2 t = \frac{b}{a+b}$ $(0 \leqq t < 2\pi)$ ならば $t = \sin^{-1}\sqrt{\frac{b}{a+b}}$, $\pi - \sin^{-1}\sqrt{\frac{b}{a+b}}$, $\pi + \sin^{-1}\sqrt{\frac{b}{a+b}}$, $2\pi - \sin^{-1}\sqrt{\frac{b}{a+b}}$ であり, $\cos\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right) = \sqrt{\frac{a}{a+b}}$, $\cos\left(\pi - \sin^{-1}\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right) = -\sqrt{\frac{a}{a+b}}$, $\cos\left(\pi + \sin^{-1}\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right) = -\sqrt{\frac{a}{a+b}}$, $\cos\left(2\pi - \sin^{-1}\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right) = \sqrt{\frac{a}{a+b}}$ だから, 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $\begin{pmatrix} a\sqrt{\frac{a}{a+b}} \\ b\sqrt{\frac{b}{a+b}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a\sqrt{\frac{a}{a+b}} \\ -b\sqrt{\frac{b}{a+b}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -a\sqrt{\frac{a}{a+b}} \\ -b\sqrt{\frac{b}{a+b}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a\sqrt{\frac{a}{a+b}} \\ -b\sqrt{\frac{b}{a+b}} \end{pmatrix}$ における法線が, 原点との距離が最大になる法線で, 距離の最大値は $a-b$ である.

6. (1) $f'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{p}\right)\left(1 - \dfrac{\alpha^p}{x^p}\right)$ であり $\alpha > 0$, $p < 0$ または $p > 1$ ならば f は $(0, \alpha]$ において単調に減少し, $[\alpha, \infty)$ において単調に増加して, α において最小値 α をとる. $0 < p < 1$ ならば f は $(0, \alpha]$ において単調に増加し, $[\alpha, \infty)$ において単調に減少して, α において最大値 α をとる.

第 7 回の問題 3 の解答から $g'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^p((p-1)x-(p+1)\alpha)+\alpha^p((p+1)x-(p-1)\alpha)}{x^p(x-\alpha)^3} & x \neq \alpha \\ -\dfrac{p(p^2-1)}{6\alpha^2} & x = \alpha \end{cases}$ である. $\varphi : (0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ を $\varphi(x) = x^p(x-\alpha)^3 g(x) = -x^p((p-1)x-(p+1)\alpha) - \alpha^p((p+1)x-(p-1)\alpha)$ で定めれば, $\varphi'(x) = -(p^2-1)x^p + \alpha p(p+1)x^{p-1} - \alpha^p(p+1)$, $\varphi''(x) = p(p^2-1)x^{p-2}(\alpha - x)$ だから, $p < -1$ または $0 < p < 1$ ならば φ' は $(0, \alpha]$ で単調に減少し, $[\alpha, \infty)$ で単調に増加する. 従って, この場合 φ' は α で最大値 $\varphi'(\alpha) = 0$ をとるため, 任意の $x \in (0, \infty) - \{\alpha\}$ に対して $\varphi'(x) < 0$ である. $-1 < p < 0$ または $p > 1$ ならば φ' は $(0, \alpha]$ で単調に増加し, $[\alpha, \infty)$ で単調に減少する. 従って, この場合 φ' は α で最小値 $\varphi'(\alpha) = 0$ をとるため, 任意の $x \in (0, \infty) - \{\alpha\}$ に対して $\varphi'(x) > 0$ である. 故に, $p < -1$ または $0 < p < 1$ ならば φ は狭義単調減少関数であり, $-1 < p < 0$ または $p > 1$ ならば φ は狭義単調増加関数である. $\varphi(\alpha) = 0$ であり, φ は単調増加または単調減少だから, $x \neq \alpha$ ならば $\varphi(x) \neq 0$ である. ここで, $g'(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x^p(x-\alpha)^3} & x \neq \alpha \\ -\dfrac{p(p^2-1)}{6\alpha^2} & x = \alpha \end{cases}$ より $g(x) = 0$ を満たす $x > 0$ は存在しないため, 中間値の定理によって, 任意の $x > 0$ に対して $g'(x)$ は $g'(\alpha) = -\dfrac{p(p^2-1)}{6\alpha^2}$ と同符号である. 故に $p < -1$ または $0 < p < 1$ ならば g は単調増加関数であり, $-1 < p < 0$ または $p > 1$ ならば g は単調減少関数である.

(2) f は $(0, \alpha]$ において単調に減少するため, $0 < a_1 < \alpha$ ならば $a_2 = f(a_1) > f(\alpha) = \alpha$ である. また, f は $[\alpha, \infty)$ において単調に増加するため, $a_n > \alpha$ ならば $a_{n+1} = f(a_n) > f(\alpha) = \alpha$ である. よって, n による数学的帰納法により, $n = 2, 3, \ldots$ に対して $a_n > \alpha$ であることがわかる. $f(x) - x = \dfrac{1}{px^{p-1}}(\alpha^p - x^p)$ だから $x > \alpha$ ならば $f(x) - x < 0$ すなわち $f(x) < x$ であることに注意する. $a_1 \neq \alpha$ かつ $n \geqq 2$ ならば $a_n > \alpha$ だから, 上の注意により $a_n > f(a_n) = a_{n+1}$ が成り立つ.

(3) $x > \alpha$ ならば $f(x) - \alpha = \dfrac{p-1}{p}(x-\alpha) - \dfrac{\alpha(x^{p-1} - \alpha^{p-1})}{px^{p-1}} < \dfrac{p-1}{p}(x-\alpha)$ が成り立ち, $n \geqq 2$ ならば $a_n > \alpha$ だから $a_{n+1} - \alpha = f(a_n) - \alpha < \dfrac{p-1}{p}(a_n - \alpha)$ である. $n \geqq 2$ ならば $a_n > \alpha$ であり, $p > 1$ だから (1) より g は単調減少関数である. 従って $n \geqq 2$ ならば $a_{n+1} - \alpha = \dfrac{(p-1)a_n^p - \alpha p a_n^{p-1} + \alpha^p}{pa_n^{p-1}} = \dfrac{(a_n-\alpha)^2 g(a_n)}{p} < \dfrac{(a_n-\alpha)^2 g(\alpha)}{p} = \dfrac{p-1}{2\alpha}(a_n - \alpha)^2$ が成り立つ.

(4) $n \geqq 3$ ならば (3) の結果から次の不等式が得られる.

$$a_n - \alpha < \left(\frac{p-1}{p}\right)(a_{n-1} - \alpha) < \cdots < \left(\frac{p-1}{p}\right)^{n-2}(a_2 - \alpha) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{n-2}\left(a_1 - \alpha - \frac{a_1^p - \alpha^p}{pa_1^{p-1}}\right)$$

$$a_n-\alpha<\frac{p-1}{2\alpha}(a_{n-1}-\alpha)^2<\left(\frac{p-1}{2\alpha}\right)^{1+2}(a_{n-2}-\alpha)^{2^2}<\cdots<\left(\frac{p-1}{2\alpha}\right)^{1+2+2^2+\cdots+2^{n-3}}(a_2-\alpha)^{2^{n-2}}$$
$$=\left(\frac{p-1}{2\alpha}\right)^{2^{n-2}-1}(a_2-\alpha)^{2^{n-2}}=\frac{2\alpha}{p-1}\left(\frac{p-1}{2\alpha}\left(a_1-\alpha-\frac{a_1^p-\alpha^p}{pa_1^{p-1}}\right)\right)^{2^{n-2}}$$

(5) 関数 $\psi:(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ を $\psi(x)=(p-1)x^p-p(p+1)x+(p-1)^2$ で定義する. $\psi'(x)=p((p-1)x^{p-1}-(p+1))$ より, 区間 $\left[0,\left(\frac{p+1}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right]$ で ψ は単調に減少し, $\left[\left(\frac{p+1}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}},\infty\right)$ で ψ は単調に増加する. 従って ψ は $\left(\dfrac{p+1}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ において最小値 $(p-1)^2\left(1-\left(\dfrac{p+1}{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)$ をとる. $p>1$ だから $\left(\dfrac{p+1}{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}>1$ となるため, ψ の最小値は負の実数であり, $a_1=\alpha\left(\dfrac{p-1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ ならば

$$\frac{2\alpha p}{a_1}\left(\frac{p-1}{2\alpha}\left(a_1-\alpha-\frac{a_1^p-\alpha^p}{pa_1^{p-1}}\right)-1\right)=(p-1)\left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^p-p(p+1)\frac{\alpha}{a_1}+(p-1)^2=\psi\left(\frac{\alpha}{a_1}\right)=\psi\left(\left(\frac{p+1}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right)$$
$$=(p-1)^2\left(1-\left(\frac{p+1}{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)<0$$

が成り立つ. 従って, $\dfrac{p-1}{2\alpha}\left(a_1-\alpha-\dfrac{a_1^p-\alpha^p}{pa_1^{p-1}}\right)<1$ である.

7. (1) n による数学的帰納法で主張を示す. $n=1$ の場合は主張は明らかである. $n=k$ のとき, 主張が成り立つと仮定して, $x_1,x_2,\ldots,x_{k+1}\in[p,q]$ と, 正の実数 $a_1,a_2,\ldots,a_{k+1}$ で $a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=1$ を満たすものが与えられたとする. $b=\sum\limits_{i=1}^k a_i$, $y=\sum\limits_{i=1}^k\dfrac{a_i}{b}x_i$ とおけば, $i=1,2,\ldots,k$ に対して $\dfrac{a_i}{b}>0$ であり $\sum\limits_{i=1}^k\dfrac{a_i}{b}=1$ が成り立つため, 帰納法の仮定によって $y\in[p,q]$ であり, 不等式 $\varphi(y)=\varphi\left(\sum\limits_{i=1}^k\dfrac{a_i}{b}x_i\right)\leqq\sum\limits_{i=1}^k\dfrac{a_i}{b}\varphi(x_i)$ が成り立つ. $b+a_{k+1}=1$ だから $by+a_{k+1}x_{k+1}=\sum\limits_{i=1}^{k+1}a_ix_i$ は, 区間 $[p,q]$ に含まれる値 y と x_{k+1} を両端とする区間を $a_{k+1}:b$ に内分するため, $\sum\limits_{i=1}^{k+1}a_ix_i$ も区間 $[p,q]$ に含まれる. さらに関数 φ は凸で, 教科書の問 2.21 と上の不等式から

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{k+1}a_ix_i\right)=\varphi(by+a_{k+1}x_{k+1})\leqq b\varphi(y)+a_{k+1}\varphi(x_{k+1})\leqq\sum_{i=1}^k a_i\varphi(x_i)+a_{k+1}\varphi(x_{k+1})=\sum_{i=1}^{k+1}a_i\varphi(x_i)$$

が得られるため, $n=k+1$ のときも主張は正しい.

(2) $p\geqq q>0$ に対し, $\varphi(x)=x^{\frac{p}{q}}$ によって, 関数 $\varphi:[0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ を定めれば, $\varphi''(x)=\dfrac{p(p-q)}{q^2}x^{\frac{p-2q}{q}}\geqq0$ だから, 教科書の定理 2.16 より, φ は凸である. (1) の結果から, $\left(\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{a_k^q}{n}\right)^{\frac{p}{q}}=\varphi\left(\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{a_k^q}{n}\right)\leqq\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{\varphi(a_k^q)}{n}=\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{a_k^p}{n}$ が得られるため, 両辺の p 乗根を考えれば $f(q)=\left(\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{a_k^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}}\leqq\left(\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{a_k^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}=f(p)$ だから f は単調増加関数である.

微積分学 I 演習問題　第 9 回　原始関数と積分

1. 次の関数の原始関数を求めよ．ただし，n は 0 以上の整数，a, b, α は実数とし，(13)〜(16) では $a>0$, $n\neq 0$, (61) では $a<b$, (62) では $a>-1$ とする．

(1) $\dfrac{(x^2-1)^3}{x^4}$　(2) $\dfrac{x^{n-1}}{x^n+1}$　(3) $\dfrac{x^2}{(x^3+1)(x^3+4)}$　(4) $\dfrac{x^{n-1}}{x^{2n}+1}$

(5) $\dfrac{1}{x(x^n+1)}$　(6) $\dfrac{1}{x^2-2x+3}$　(7) $\dfrac{x+a}{(x^2+2ax+b)^\alpha}$　(8) $\dfrac{2x^3(x^2-1)}{(x^2+1)^3}$

(9) $\dfrac{2x}{x^4+x^2+1}$　(10) $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$　(11) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}$　(12) $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

(13) $\dfrac{1}{x\sqrt{a^2-x^n}}$　(14) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^n+a^2}}$　(15) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^n-a^2}}$　(16) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-e^x}}$

(17) $\sqrt{e^x-a^2}$　(18) $\dfrac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}$　(19) $\dfrac{\cos^2 x}{(x\sin x+\cos x)^2}$　(20) $\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$

(21) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}$　(22) $\dfrac{\cos^3 x}{\sin x}$　(23) $\dfrac{1}{\cos^3 x}$　(24) $\sin^4 x$

(25) $\tan^n x$　(26) $\dfrac{1}{\sin^4 x}$　(27) $\dfrac{\sin x\cos x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$　(28) $\dfrac{\sin^3 x}{2+\cos x}$

(29) $\dfrac{\cos x}{3-\cos^2 x}$　(30) $\dfrac{\sin^4 x}{\cos^6 x}$　(31) $\dfrac{1}{1+\sin x}$　(32) $\dfrac{x\sin x}{(x\cos x-\sin x)^2}$

(33) $\dfrac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$　(34) $\dfrac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$　(35) $\dfrac{1+\sin x}{1-\cos x}$　(36) $x^{2n}\tan^{-1}x$

(37) $x^{2n+1}\tan^{-1}x$　(38) $x\sin^{-1}x$　(39) $x^{2n}\sin^{-1}x$　(40) $(\sin^{-1}x)^2$

(41) $\dfrac{(\log x)^\alpha}{x}$　(42) $x^\alpha\log x$　(43) $\dfrac{\log x}{x(1+\log x)}$　(44) $x^3(\log|x|)^2$

(45) $x^2\log(x^2+1)$　(46) $x\log(x^2-2x+2)$　(47) $(\log|x|)^3$　(48) $x^5e^{-x^2}$

(49) $\dfrac{2}{(e^x+e^{-x})^2}$　(50) $\dfrac{1}{e^x+4e^{-x}+5}$　(51) $\left(\dfrac{1}{e^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)^2$　(52) $\dfrac{e^x}{e^{2x}-e^x+2}$

(53) x^3e^{2x}　(54) $x^3\cos 2x$　(55) $e^{4x}\sin 3x$　(56) $e^{-x}\sin^2 x$

(57) $\log\bigl(x+\sqrt{x^2-1}\bigr)$　(58) $(\sin x)\log\sin x$　(59) $\tan x\log(1+\tan^2 x)$　(60) $(x+1)e^x\log x$

(61) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$　(62) $\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{a-\cos x}}$　(63) $\dfrac{\cos x\sin x}{\cos^4 x+\sin^4 x}$　(64) $x(\tan^{-1}x)^2$

2. 次の積分を求めよ．ただし (33) の α は $|\alpha|<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする．

(1) $\displaystyle\int_0^1 2x\log(x^2+3x+2)dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\log 2}\frac{1}{1+e^{3x}}dx$　(3) $\displaystyle\int_0^\lambda x^{n-1}\sin^{-1}(x^n)dx$　(4) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} x^3\tan^{-1}xdx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2-\sin x+\sin^2 x}{\cos x}dx$　(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$　(7) $\displaystyle\int_0^\lambda x^{n-1}\tan^{-1}(x^n)dx$　(8) $\displaystyle\int_0^\lambda x^2\tan^{-1}xdx$

(9) $\displaystyle\int_0^{\log\lambda} e^x\log(e^{2x}+1)dx$　(10) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx$　(11) $\displaystyle\int_0^{\log\sqrt{3}}\frac{1}{e^x+e^{3x}}dx$　(12) $\displaystyle\int_0^1 2x\tan^{-1}xdx$

(13) $\displaystyle\int_0^1(2-6x^2)\sin^{-1}xdx$　(14) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+3}dx$　(15) $\displaystyle\int_1^2 x(2x-3)^5dx$　(16) $\displaystyle\int_0^3\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx$

(17) $\displaystyle\int_3^4(x-2)\log(x^3-2x^2)dx$　(18) $\displaystyle\int_0^2 x^5e^{x^2}dx$　(19) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sin^{-1}x}{x^2}dx$　(20) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 xdx$

(21) $\displaystyle\int_0^1 3x^2\log(1+x^2)dx$　(22) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^5 xdx$　(23) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$　(24) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\cos 2xdx$

(25) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\log(e^x+1)dx$　(26) $\displaystyle\int_0^1 x^3\tan^{-1}xdx$　(27) $\displaystyle\int_0^\pi e^{-x}\sin\frac{x}{3}dx$　(28) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sin^{-1}xdx$

(29) $\displaystyle\int_{e^{\frac{\pi}{2}}}^{e^\pi}\frac{(\log x)\sin(\log x)}{x}dx$　(30) $\displaystyle\int_0^1 e^x\tan^{-1}(e^x)dx$　(31) $\displaystyle\int_1^e\frac{\sin^{-1}(\log x)}{x}dx$　(32) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}}2x\sin(x^2)dx$

(33) $\displaystyle\int_0^{\sin\alpha}\frac{\tan^{-1}(\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$　(34) $\displaystyle\int_0^{\log\frac{\pi}{2}}e^x\cos(e^x)dx$　(35) $\displaystyle\int_{\log\frac{\pi}{2}}^{\log\pi}e^{2x}\sin(e^x)dx$　(36) $\displaystyle\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\frac{\sin(\log x)}{x}dx$

3. 次の極限値を積分を用いて表し, 値を求めよ. ただし, m は整数で, (2) では $a>1$, (3) では $m \geqq 0$, l は -1 以上の整数とする.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{p-1}(ak^p+bn^p)^q}{n^{p(q+1)}}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a^2n^2-k^2}}$ (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^m(n^2-k^2)^{\frac{l}{2}}}{n^{m+l+1}}$ (4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\tan\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\tan^{-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)$ (6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=pn+1}^{qn}\frac{1}{k}$ (7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$ (8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^{m-1}}{(n^2+k^2)^{\frac{m}{2}}}$

4. 以下で与えられる I_n に関する漸化式をつくれ. ただし (1) では $a\neq 0$, (3) では $m\neq -1$ とする.

(1) $\displaystyle I_n=\int x^n e^{ax}dx$ (2) $\displaystyle I_n=\int(\sin^{-1}x)^n dx$ (3) $\displaystyle I_n=\int x^m(\log x)^n\,dx$ (4) $\displaystyle I_n=\int\frac{1}{\sin^n x}\,dx$

(5) $\displaystyle I_n=\int\tan^n x\,dx$

5. $\displaystyle I_n=\int x^n\sin x dx$, $\displaystyle J_n=\int x^n\cos x dx$ とおくとき, I_n, J_n に関する漸化式をつくれ.

6. $\lambda\in\boldsymbol{R}$, 整数 n と 0 以上の整数 k に対して $\displaystyle I_n=\int_0^{\lambda}\cos^n x\,dx$ ($n<0$ の場合は $|\lambda|<\dfrac{\pi}{2}$ とする.), $\displaystyle J_k=\int_0^{\lambda}\sin^k x\,dx$ とおく. I_n, J_k に関する漸化式を求め, さらに I_n, J_k を n, k を用いて表せ.

7. 平面上の点 A, B を直径とする半径 r の半円がある. この半円の弧を $\mathrm{A}=\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1,\ldots,\mathrm{P}_n,\mathrm{P}_{n+1}=\mathrm{B}$ と n 等分し $\triangle\mathrm{AP}_k\mathrm{B}$ の面積を S_k とするとき, 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$ を求めよ.

8. $(1+x)^n$ の二項展開を用いて次の等式を証明せよ.

(1) $\displaystyle\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

(2) $\displaystyle\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\binom{n}{n}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$

9. f を閉区間 $[a,b]$ で定義された, つねに 0 以上の値をとる連続関数とする. $f(c)>0$ となる $c\in[a,b]$ が存在すれば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx>0$ であることを示せ.

10. 次の不等式を示せ. ただし (3), (4) の n は 2 より大きい実数であるとする.

(1) $\displaystyle\frac{2}{3}n\sqrt{n}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}<\frac{2}{3}\left((n+1)\sqrt{n+1}-1\right)$ (2) $\displaystyle 2\left(\sqrt{n+1}-1\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n}-1$

(3) $\displaystyle\log\left(1+\sqrt{2}\right)<\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^n}}\,dx<1$ (4) $\displaystyle\frac{1}{2}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}dx<\frac{\pi}{6}$

(5) $\displaystyle 1-\frac{1}{e}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\sin x}dx<\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$ (6) $\displaystyle\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^3}{144}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx<\frac{\pi}{2}$

11. $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ が単調減少である連続関数ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx\right)$ が存在することを示せ.

12. (発展問題) f, g を閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数とする. すべての $x\in[a,b]$ に対して $g(x)\geqq 0$ ならば, $c\in(a,b)$ で $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(c)\int_a^b g(x)\,dx$ を満たすものが存在することを示せ.

13. (発展問題) (1) 連続関数 $f:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right)=\exp\left(\int_0^1 f(x)dx\right)$ が成り立つことを示せ.

(2) 次の極限を求めよ. (i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ (ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{an-k}{an+a-k}$ (ただし $a<0$ または $a>1$)

14. (発展問題) (1) 関数 $\varphi:[p,q]\to\boldsymbol{R}$ を凸である連続関数とする. このとき連続関数 $f:[a,b]\to[p,q]$ に対して, 次

の不等式が成り立つことを示せ.

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))dx$$

(2) 連続関数 $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqq \log\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b e^{f(x)}dx\right)$$

(3) $p \geqq q > 0$ とする. 連続関数 $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{q}}}\left(\int_a^b |f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqq \frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

15. (発展問題) $f:[a,b]\to[0,\infty)$ を連続関数とし, f の最大値を $\max(f)$ とする.

(1) $\left(\displaystyle\int_a^b f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqq (b-a)^{\frac{1}{p}}\max(f)$ が成り立つことを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{p\to\infty}\left(\int_a^b f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \max(f)$ が成り立つことを示せ.

(3) $p \geqq 1$ のとき, 正の定数 K で, $[a,b]$ で定義されたすべての連続関数 f に対して不等式

$$\left(\int_a^b f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \geqq K\max(f)$$

が成り立つようなものは存在しないことを示せ.

第 9 回の演習問題の解答

1. (1) $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)^3}{x^4}dx = \int\left(x^2-3+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)dx = \frac{1}{3}x^3-3x-\frac{3}{x}+\frac{1}{3x^3}$

(2) $n \neq 0$ のとき $t = x^n$ とおくと $\displaystyle\int \frac{x^{n-1}}{x^n+1}dx = \frac{1}{n}\int \frac{nx^{n-1}}{x^n+1}dx = \frac{1}{n}\int \frac{1}{t+1}dt = \frac{1}{n}\log|t+1| = \frac{1}{n}\log|x^n+1|$. $n=0$ ならば $\displaystyle\int \frac{x^{n-1}}{x^n+1}dx = \int \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\log|x|$.

(3) $x^3 = t$ とおくと $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^3+1)(x^3+4)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(t+1)(t+4)}dt = \frac{1}{9}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+4}\right)dt =$ $\displaystyle\frac{1}{9}\left(\log|t+1|-\log|t+4|\right) = \frac{1}{9}\left(\log|x^3+1|-\log|x^3+4|\right)$

(4) $n \neq 0$ のとき $x^n = t$ とおくと $\displaystyle\int \frac{x^{n-1}}{x^{2n}+1}dx = \frac{1}{n}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{n}\tan^{-1}t = \frac{1}{n}\tan^{-1}x^n$. $n=0$ ならば $\displaystyle\int \frac{x^{n-1}}{x^{2n}+1}dx = \int \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\log|x|$.

(5) $n \neq 0$ のとき $x^n = t$ とおくと $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^n+1)}dx = \int \frac{x^{n-1}}{x^n(x^n+1)}dx = \frac{1}{n}\int \frac{1}{t(t+1)}dt = \frac{1}{n}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt =$ $\displaystyle\frac{1}{n}\left(\log|t|-\log|t+1|\right) = \log|x|-\frac{1}{n}\log|x^n+1|$. $n=0$ ならば $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^n+1)}dx = \int \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\log|x|$.

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x+3} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x-1}{\sqrt{2}}$

(7) $t = x^2+2ax+b$ とおくと $(x+a)dx = \frac{1}{2}dt$ だから $\displaystyle\int \frac{x+a}{(x^2+2ax+b)^\alpha}dx = \int \frac{1}{2t^\alpha}dt = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{2t^{\alpha-1}} & \alpha \neq 1 \\ \frac{1}{2}\log|t| & \alpha = 1 \end{cases}$

従って $\displaystyle\int \frac{x+a}{(x^2+2ax+b)^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{2(x^2+2ax+b)^{\alpha-1}} & \alpha \neq 1 \\ \frac{1}{2}\log|x^2+2ax+b| & \alpha = 1 \end{cases}$

(8) $t = x^2+1$ とおくと, $2xdx = dt$ だから $\displaystyle\int \frac{2x^3(x^2-1)}{(x^2+1)^3}dx = \int \frac{(t-1)(t-2)}{t^3}dt = \int\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{t^2}+\frac{2}{t^3}\right)dt =$ $\displaystyle\log t+\frac{3}{t}-\frac{1}{t^2} = \log(x^2+1)+\frac{3}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^2}$

(9) $t = x^2+\frac{1}{2}$ とおくと, $2xdx = dt$ だから $\displaystyle\int \frac{2x}{x^4+x^2+1}dx = \int \frac{2x}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx = \int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$ $\displaystyle\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2t}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}$

(10) $t = x+\frac{1}{2}$ とおくと $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{t+\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt = \int\left(\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)dt =$ $\displaystyle\frac{1}{2}\log\left(t^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2t}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\log(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$

(11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}} = \int \frac{-\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}{3}dx = -\frac{2}{9}\sqrt{x^3}+\frac{2}{9}\sqrt{(x+3)^3}$

(12) $t = x^2+x+1$ とおくと $dt = (2x+1)dx$ より $\displaystyle\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}}dt = 2\sqrt{t} = 2\sqrt{x^2+x+1}$

(13) $t = \sqrt{a^2-x^n}$ とおくと, $x^n = a^2-t^2$, $\displaystyle\frac{x^{n-1}}{\sqrt{a^2-x^n}}dx = -\frac{2}{n}dt$ だから $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^n}} = \int \frac{x^{n-1}}{x^n\sqrt{a^2-x^n}}dx =$ $\displaystyle\int \frac{2dt}{n(t^2-a^2)} = \int \frac{1}{an}\left(\frac{1}{t-a}-\frac{1}{t+a}\right)dt = \frac{\log|t-a|-\log|t+a|}{an} = \frac{1}{an}\log\frac{\left|a-\sqrt{a^2-x^n}\right|}{a+\sqrt{a^2-x^n}} = \frac{2}{an}\log\frac{a-\sqrt{a^2-x^n}}{x^n}$

(14) $t = \sqrt{x^n+a^2}$ とおくと, $x^n = t^2-a^2$, $\displaystyle\frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^n+a^2}}dx = \frac{2}{n}dt$ だから, $a \neq 0$ ならば $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n+a^2}} =$ $\displaystyle\int \frac{x^{n-1}}{x^n\sqrt{x^n+a^2}}dx = \int \frac{2dt}{n(t^2-a^2)} = \int \frac{1}{an}\left(\frac{1}{t-a}-\frac{1}{t+a}\right)dt = \frac{\log|t-a|-\log|t+a|}{an} = \frac{1}{an}\log\frac{\left|\sqrt{x^n+a^2}-a\right|}{\sqrt{x^n+a^2}+a} =$ $\displaystyle\frac{2}{an}\log\frac{\sqrt{x^n+a^2}-a}{x^n}$

(15) $t=\sqrt{x^n-a^2}$ とおくと, $x^n=t^2+a^2$, $\dfrac{x^{n-1}}{\sqrt{x^n-a^2}}dx=\dfrac{2}{n}dt$ だから $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^n-a^2}}=\int\frac{x^{n-1}}{x^n\sqrt{x^n-a^2}}dx=\int\frac{2}{n(t^2+a^2)}dt=\frac{2}{an}\tan^{-1}\frac{t}{a}=\frac{2}{an}\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^n-a^2}}{a}$

(16) $y=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-e^x}}$ とおくと, $x=\log(ay-1)+\log(ay+1)-2\log|y|$ だから $dx=\left(\dfrac{a}{ay-1}+\dfrac{a}{ay+1}-\dfrac{2}{y}\right)dy$ である. 従って $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{a^2-e^x}}\,dx=\int\left(\frac{1}{ay-1}-\frac{1}{ay+1}\right)dy=\frac{1}{a}\log\frac{ay-1}{ay+1}=\frac{1}{a}\log\frac{a-\sqrt{a^2-e^x}}{a+\sqrt{a^2-e^x}}$.

(17) $t=\sqrt{e^x-a^2}$ とおくと $x=\log(t^2+a^2)$ だから $dx=\dfrac{2t}{t^2+a^2}dt$ である. 従って
$\displaystyle\int\sqrt{e^x-a^2}\,dx=\int\frac{2t^2}{t^2+a^2}\,dt=\int\left(2-\frac{2a^2}{t^2+a^2}\right)dt=2t-2a\tan^{-1}\frac{t}{a}=2\sqrt{e^x-a^2}-2a\tan^{-1}\frac{\sqrt{e^x-a^2}}{a}$.

(18) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x}{x\sin x+\cos x}=\dfrac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}$ を満たす A, B, C, D を求める.
(左辺) $=\dfrac{(B+C)\cos^2 x-Cx^2+(A-D)(x+\cos x\sin x)}{(x\sin x+\cos x)^2}$ だから $C=-1$, $B=1$, $A=D=0$ とすればよい. 従って $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\,dx=\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x+\cos x}$ である.

(19) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x}{x\sin x+\cos x}=\dfrac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}$ を満たす A, B, C, D を求める.
(左辺) $=\dfrac{(B+C)\cos^2 x-Cx^2+(A-D)(x+\cos x\sin x)}{(x\sin x+\cos x)^2}$ だから $C=0$, $B=1$, $A=D=0$ とすればよい. 従って $\displaystyle\int\frac{\cos^2 x}{(x\sin x+\cos x)^2}\,dx=\frac{\sin x}{x\sin x+\cos x}$ である.

(20) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{(Ax+B)e^x}{1+x}=\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$ を満たす A, B, C, D を求める.
(左辺) $=\dfrac{e^x(Ax^2+(A+B)x+A)}{(1+x)^2}$ だから $A=0$, $B=1$ とすればよい. 従って $\displaystyle\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx=\frac{e^x}{1+x}$ である.

(21) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}dx=\int\frac{1-x^2}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$

(22) $t=\sin x$ とおくと $\displaystyle\int\frac{\cos^3 x}{\sin x}dx=\int\frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{1-t^2}{t}dt=\int\left(\frac{1}{t}-t\right)dt=\log|t|-\frac{t^2}{2}=\log|\sin x|-\frac{\sin^2 x}{2}$.

(23) $t=\sin x$ とおけば $\cos x dx=dt$ だから $\displaystyle\int\frac{1}{\cos^3 x}dx=\int\frac{\cos x}{\cos^4 x}dx=\int\frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)^2}dx=$
$\displaystyle\int\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\right)^2dt=\int\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{2}{1-t^2}+\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt=$
$\displaystyle\int\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-t}-\log(1-t)+\log(1+t)-\frac{1}{1+t}\right)=$
$\displaystyle\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\sin x}+\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}-\frac{1}{1+\sin x}\right)=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{4}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$

(24) $\sin^4 x=\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=\dfrac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\dfrac{1+\cos 4x}{2}\right)=\dfrac{3}{8}-\dfrac{\cos 2x}{2}+\dfrac{\cos 4x}{8}$ だから $\displaystyle\int\sin^4 x dx=\int\left(\frac{3}{8}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}\right)dx=\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}$.

(25) $t=\tan x$ とおけば $x=\tan^{-1}t$ より $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ であり, $t^{2l}=(t^2+1)\sum\limits_{k=0}^{l-1}(-1)^{l-k-1}t^{2k}+(-1)^l$ が成り立つため, $\displaystyle\int\tan^{2l}x\,dx=\int\frac{t^{2l}}{1+t^2}dt=\int\left(\sum_{k=0}^{l-1}(-1)^{l-k-1}t^{2k}+\frac{(-1)^l}{1+t^2}\right)dt=\sum_{k=0}^{l-1}\frac{(-1)^{l-k-1}t^{2k+1}}{2k+1}+(-1)^l\tan^{-1}t=\sum_{k=0}^{l-1}\frac{(-1)^{l-k-1}\tan^{2k+1}x}{2k+1}+(-1)^l x$. $\displaystyle\int\tan^{2l+1}x\,dx=\int\frac{t^{2l+1}}{1+t^2}dt=\int\left(\sum_{k=0}^{l-1}(-1)^{l-k-1}t^{2k+1}+\frac{(-1)^l t}{1+t^2}\right)dt=\sum_{k=1}^{l}\frac{(-1)^{l-k}t^{2k}}{2k}+\frac{(-1)^l}{2}\log(1+t^2)=\sum_{k=1}^{l}\frac{(-1)^{l-k}\tan^{2k}x}{2k}+(-1)^{l+1}\log|\cos x|$.

(26) $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ の両辺を $\sin^2 x$ で割れば $\dfrac{1}{\tan^2 x}+1=\dfrac{1}{\sin^2 x}$ だから $\dfrac{1}{\sin^4 x}=\left(\dfrac{1}{\tan^2 x}+1\right)^2$ である. $t=\tan x$ とおけば $x=\tan^{-1} t$ より $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ だから $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^4 x}dx=$ $\displaystyle\int\left(\frac{1}{\tan^2 x}+1\right)^2 dx=\int\frac{1}{1+t^2}\left(\frac{1}{t^2}+1\right)^2 dt=\int\left(\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^2}\right)dt=-\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{t}=-\frac{1}{3\tan^3 x}-\frac{1}{\tan x}$

(27) $a=\pm b$ ならば $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin 2x}{2a^2}dx=-\frac{\cos 2x}{4a^2}$. $a\neq\pm b$ ならば $t=\sin^2 x$ とおくと $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}dx=\int\frac{1}{2a^2+2(b^2-a^2)t}dt=\frac{\log|a^2+(b^2-a^2)t|}{2(b^2-a^2)}=\frac{\log|a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x|}{2(b^2-a^2)}$

(28) $t=\cos x$ とおけば $\sin xdx=-dt$ だから $\displaystyle\int\frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx=\int\frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{2+\cos x}dx=\int\frac{t^2-1}{2+t}dt=$ $\displaystyle\int\left(t-2+\frac{3}{2+t}\right)dt=\frac{t^2}{2}-2t+3\log(2+t)=\frac{\cos^2 x}{2}-2\cos x+3\log(2+\cos x)$

(29) $t=\sin x$ とおけば $dt=\cos xdx$ だから $\displaystyle\int\frac{\cos x}{3-\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos x}{2+\sin^2 x}dx=\int\frac{dt}{2+t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}}=$ $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{\sin x}{\sqrt{2}}$

(30) $t=\tan x$ とおけば $\dfrac{dx}{\cos^2 x}=dt$ だから $\displaystyle\int\frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx=\int\frac{\tan^4 x}{\cos^2 x}dx=\int t^4dt=\frac{t^5}{5}=\frac{\tan^5 x}{5}$

(31) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin x}dx=\int\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=\tan x-\frac{1}{\cos x}$

(32) $t=x\cos x-\sin x$ とおくと $dt=-x\sin xdx$ より $\displaystyle\int\frac{x\sin x}{(x\cos x-\sin x)^2}dx=\int\frac{-1}{t^2}dt=\frac{1}{t}=\frac{1}{x\cos x-\sin x}$

(33) $t=\sin^{-1} x$ とおくと $dt=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ より $\displaystyle\int\frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int tdt=\frac{t^2}{2}=\frac{1}{2}\left(\sin^{-1} x\right)^2$

(34) $\displaystyle\int\frac{x\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\left(-\sqrt{1-x^2}\right)'\sin^{-1} x\,dx=-\sqrt{1-x^2}\sin^{-1} x+\int\sqrt{1-x^2}\left(\sin^{-1} x\right)'dx=$ $\displaystyle-\sqrt{1-x^2}\sin^{-1} x+\int dx=x-\sqrt{1-x^2}\sin^{-1} x$

(35) $\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{1-\cos x}dx=\int\frac{1}{1-\cos x}dx+\int\frac{\sin x}{1-\cos x}dx=\int\frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}dx+\log(1-\cos x)=\int\frac{1}{\sin^2 x}dx+$ $\displaystyle\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx+\log(1-\cos x)=-\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{\sin x}+\log(1-\cos x)$

(36) $\displaystyle\int x^{2n}\tan^{-1} xdx=\int\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'\tan^{-1} xdx=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\tan^{-1} x-\int\frac{x^{2n+1}}{2n+1}(\tan^{-1} x)'dx=$ $\displaystyle\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\tan^{-1} x-\int\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+x^2)}dx$ ここで $t=x^2$ とおけば $xdx=\dfrac{1}{2}dt$ であり, 初項 1, 公比 $-t$ の等比級数の和の公式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k=\frac{1-(-1)^n t^n}{1+t}$ より $\displaystyle\frac{t^n}{1+t}=\frac{(-1)^n}{1+t}-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}t^k$ だから (上式) $\displaystyle=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\tan^{-1} x-$ $\displaystyle\int\frac{t^n}{2(2n+1)(1+t)}dt=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\tan^{-1} x-\int\frac{(-1)^n}{2(2n+1)(1+t)}dt+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\int\frac{t^k}{2(2n+1)}dt=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\tan^{-1} x-$ $\displaystyle\frac{(-1)^n\log(1+t)}{2(2n+1)}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}t^{k+1}}{2(k+1)(2n+1)}=\frac{1}{4n+2}\left(2x^{2n+1}\tan^{-1} x-(-1)^n\log(1+x^2)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}x^{2k+2}}{k+1}\right)$

(37) $\displaystyle\int x^{2n+1}\tan^{-1}xdx=\int\left(\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right)'\tan^{-1} xdx=\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\tan^{-1} x-\int\frac{x^{2n+2}}{2n+2}(\tan^{-1} x)'dx=\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\tan^{-1} x-$ $\displaystyle\int\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)(1+x^2)}dx$ 初項 1, 公比 $-x^2$ の等比級数の和の公式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k=\frac{1-(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$ より $\displaystyle\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}=$ $\displaystyle\frac{(-1)^{n+1}}{1+x^2}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}x^{2k}$ だから (上式) $\displaystyle=\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\tan^{-1} x-\int\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)(1+x^2)}dx-\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\int\frac{x^{2k}}{2n+2}dx=$ $\displaystyle\frac{1}{2n+2}\left((x^{2n+2}+(-1)^n)\tan^{-1} x-\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right)$

(38) $x=\sin t$ $(-\frac{\pi}{2}\leqq t\leqq\frac{\pi}{2})$ とおくと $dx=\cos tdt$, $\sin^{-1} x=t$, $\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-x^2}$ より $\displaystyle\int x\sin^{-1} xdx=\int t\sin t\cos tdt=\int\frac{t}{2}\sin 2tdt=\int\frac{t}{2}\left(-\frac{\cos 2t}{2}\right)'dt=-\frac{t\cos 2t}{4}+\int\left(\frac{t}{2}\right)'\frac{\cos 2t}{2}dt=$

$-\dfrac{t\cos 2t}{4}+\displaystyle\int\dfrac{\cos 2t}{4}dt=-\dfrac{t\cos 2t}{4}+\dfrac{\sin 2t}{8}=-\dfrac{t}{4}(1-2\sin^2 t)+\dfrac{\sin t\cos t}{4}=\dfrac{1}{4}\sin^{-1}x(2x^2-1)+\dfrac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$

(39) $\displaystyle\int x^{2n}\sin^{-1}xdx=\int\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'\sin^{-1}xdx=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\sin^{-1}x-\int\frac{x^{2n+1}}{2n+1}(\sin^{-1}x)'dx=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\sin^{-1}x-$ $\displaystyle\int\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\sqrt{1-x^2}}dx$ $t=\sqrt{1-x^2}$ とおけば $x^2=1-t^2$, $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-dt$ だから (上式) $=\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\sin^{-1}x+$ $\displaystyle\int\frac{(1-t^2)^n}{2n+1}dt=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\sin^{-1}x+\sum_{k=0}^{n}\int\frac{\binom{n}{k}(-t^2)^k}{2n+1}dt=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\sin^{-1}x+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\binom{n}{k}t^{2k+1}}{(2k+1)(2n+1)}=$ $\displaystyle\frac{1}{2n+1}\left(x^{2n+1}\sin^{-1}x+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\binom{n}{k}(1-x^2)^{k+\frac{1}{2}}}{2k+1}\right)$

(40) (34) の結果を用いると $\displaystyle\int(\sin^{-1}x)^2dx=\int(x)'(\sin^{-1}x)^2dx=x(\sin^{-1}x)^2-\int x((\sin^{-1}x)^2)'dx=$ $\displaystyle x(\sin^{-1}x)^2-\int\frac{2x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x(\sin^{-1}x)^2+2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x-2x$

(41) $t=\log x$ とおくと $dt=\dfrac{1}{x}dx$ より $\alpha\neq-1$ ならば $\displaystyle\int\frac{(\log x)^\alpha}{x}dx=\int t^\alpha dt=\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}=$ $\dfrac{(\log x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ であり, $\alpha=-1$ ならば $\displaystyle\int\frac{(\log x)^\alpha}{x}dx=\int t^\alpha dt=\log|t|=\log|\log x|$.

(42) $\alpha\neq-1$ の場合, $\displaystyle\int x^\alpha\log xdx=\int\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'\log xdx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\log x-\int\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\log x)'dx=$ $\displaystyle\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\log x-\int\frac{x^\alpha}{\alpha+1}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\log x-\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}.$

$\alpha=-1$ の場合, $y=\log x$ とおくと $\dfrac{1}{x}dx=dy$ より $\displaystyle\int x^\alpha\log xdx=\int ydy=\frac{y^2}{2}=\frac{1}{2}(\log x)^2.$

(43) $t=\log x$ とおけば $\dfrac{1}{x}dx=dt$ だから $\displaystyle\int\frac{\log x}{x(1+\log x)}dx=\int\frac{t}{1+t}dt=\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=$ $t-\log|1+t|=\log x-\log|1+\log x|$

(44) $\displaystyle\int x^3(\log|x|)^2dx=\int\left(\frac{x^4}{4}\right)'(\log|x|)^2dx=\frac{x^4}{4}(\log|x|)^2-\int\frac{x^4}{4}((\log|x|)^2)'dx=$ $\displaystyle\frac{x^4}{4}(\log|x|)^2-\int\frac{x^3}{2}\log|x|dx=\frac{x^4}{4}(\log|x|)^2-\int\left(\frac{x^4}{8}\right)'\log|x|dx=\frac{x^4}{4}(\log|x|)^2-\frac{x^4}{8}\log|x|+\int\frac{x^4}{8}(\log|x|)'dx=$ $\displaystyle\frac{x^4}{4}(\log|x|)^2-\frac{x^4}{8}\log|x|+\int\frac{x^3}{8}dx=\frac{x^4}{4}(\log|x|)^2-\frac{x^4}{8}\log|x|+\frac{x^4}{32}$

(45) $\displaystyle\int x^2\log(x^2+1)dx=\int\left(\frac{x^3}{3}\right)'\log(x^2+1)dx=\frac{x^3}{3}\log(x^2+1)-\int\frac{x^3}{3}(\log(x^2+1))'dx=\frac{x^3}{3}\log(x^2+1)-$ $\displaystyle\int\frac{2x^4}{3(x^2+1)}dx=\frac{x^3}{3}\log(x^2+1)-\frac{2}{3}\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{x^3}{3}\log(x^2+1)-\frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}-x+\tan^{-1}x\right)$

(46) $\displaystyle\int x\log(x^2-2x+2)dx=\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\log(x^2-2x+2)dx=$ $\displaystyle\frac{x^2}{2}\log(x^2-2x+2)-\int\frac{x^2}{2}(\log(x^2-2x+2))'dx=\frac{x^2}{2}\log(x^2-2x+2)-\int\frac{x^3-x^2}{x^2-2x+2}dx=$ $\displaystyle\frac{x^2}{2}\log(x^2-2x+2)-\int\left(x+1-\frac{2}{(x-1)^2+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}\log(x^2-2x+2)-\frac{x^2}{2}-x+2\tan^{-1}(x-1)$

(47) $\displaystyle\int(\log|x|)^3dx=\int(x)'(\log|x|)^3dx=x(\log|x|)^3-\int x((\log|x|)^3)'dx=x(\log|x|)^3-\int3(\log|x|)^2dx=$ $\displaystyle x(\log|x|)^3-\int3(x)'(\log|x|)^2dx=x(\log|x|)^3-3x(\log|x|)^2+\int3x((\log|x|)^2)'dx=x(\log|x|)^3-3x(\log|x|)^2+$ $\displaystyle\int6\log|x|dx=x(\log|x|)^3-3x(\log|x|)^2+\int6(x)'\log|x|dx=x(\log|x|)^3-3x(\log|x|)^2+6x\log|x|-$ $\displaystyle\int6x(\log|x|)'dx=x(\log|x|)^3-3x(\log|x|)^2+6x\log|x|-\int6dx=x(\log|x|)^3-3x(\log|x|)^2+6x\log|x|-6x$

(48) $t=x^2$ とおけば $xdx=\dfrac{1}{2}dt$ だから $\displaystyle\int x^5e^{-x^2}dx=\int\frac{1}{2}t^2e^{-t}dt=\int\frac{1}{2}t^2(-e^{-t})'dt=-\frac{1}{2}t^2e^{-t}+\int te^{-t}dt=$ $\displaystyle-\frac{1}{2}t^2e^{-t}+\int t(-e^{-t})'dt=-\frac{1}{2}t^2e^{-t}-te^{-t}+\int e^{-t}dt=-\frac{1}{2}t^2e^{-t}-te^{-t}-e^{-t}=-\left(\frac{x^4}{2}+x^2+1\right)e^{-x^2}$

(49) $t=e^x$ とおけば, $e^x dx=dt$ だから $\displaystyle\int\frac{2}{(e^x+e^{-x})^2}dx=\int\frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}dx=\int\frac{2t}{(t^2+1)^2}dt=-\frac{1}{t^2+1}=$
$\displaystyle-\frac{1}{e^{2x}+1}$

(50) $t=e^x$ とおくと $dt=e^x dx$ より $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x+4e^{-x}+5}=\int\frac{e^x}{e^{2x}+5e^x+4}dx=\int\frac{dt}{t^2+5t+4}=$
$\displaystyle\int\frac{dt}{(t+1)(t+4)}=\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+4}\right)dt=\frac{1}{3}(\log(t+1)-\log(t+4))=\frac{1}{3}\log\frac{e^x+1}{e^x+4}$

(51) $t=e^x$ とおけば, $dx=\dfrac{1}{t}dt$ だから $\displaystyle\int\left(\frac{1}{e^x+1}-\frac{1}{2}\right)^2dx=\int\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{2}\right)^2dt=\int\frac{(1-t)^2}{4t(1+t)^2}dt=$
$\displaystyle\int\frac{(1+t)^2-4t}{4t(1+t)^2}dt=\int\left(\frac{1}{4t}-\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt=\frac{1}{4}\log t+\frac{1}{1+t}=\frac{x}{4}+\frac{1}{1+e^x}$

(52) $t=e^x$ とおけば, $e^x dx=dt$ だから $\displaystyle\int\frac{e^x}{e^{2x}-e^x+2}dx=\int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\frac{2t-1}{\sqrt{7}}=$
$\displaystyle\frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\frac{2e^x-1}{\sqrt{7}}$

(53) $\displaystyle\int x^3e^{2x}dx=\int x^3\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx=\frac{x^3}{2}e^{2x}-\int\frac{3x^2}{2}e^{2x}dx=\frac{x^3}{2}e^{2x}-\int\frac{3x^2}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx=$
$\displaystyle\frac{x^3}{2}e^{2x}-\frac{3x^2}{4}e^{2x}+\int\frac{3x}{2}e^{2x}dx=\frac{x^3}{2}e^{2x}-\frac{3x^2}{4}e^{2x}+\int\frac{3x}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx=\frac{x^3}{2}e^{2x}-\frac{3x^2}{4}e^{2x}+\frac{3x}{4}e^{2x}-\int\frac{3}{4}e^{2x}dx=$
$\displaystyle\frac{x^3}{2}e^{2x}-\frac{3x^2}{4}e^{2x}+\frac{3x}{4}e^{2x}-\frac{3}{8}e^{2x}=\left(\frac{x^3}{2}-\frac{3x^2}{4}+\frac{3x}{4}-\frac{3}{8}\right)e^{2x}$

(54) $\displaystyle\int x^3\cos 2xdx=\int x^3\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)'dx=\frac{x^3\sin 2x}{2}-\int\frac{3x^2\sin 2x}{2}dx=\frac{x^3\sin 2x}{2}+\int\frac{3x^2(\cos 2x)'}{4}dx=$
$\displaystyle\frac{x^3\sin 2x}{2}+\frac{3x^2\cos 2x}{4}-\int\frac{3x\cos 2x}{2}dx=\frac{x^3\sin 2x}{2}+\frac{3x^2\cos 2x}{4}-\int\frac{3x(\sin 2x)'}{4}dx=\frac{x^3\sin 2x}{2}+\frac{3x^2\cos 2x}{4}-$
$\displaystyle\frac{3x\sin 2x}{4}+\int\frac{3\sin 2x}{4}dx=\frac{x^3\sin 2x}{2}+\frac{3x^2\cos 2x}{4}-\frac{3x\sin 2x}{4}-\frac{3\cos 2x}{8}=\left(\frac{x^3}{2}-\frac{3x}{4}\right)\sin 2x+\left(\frac{3x^2}{4}-\frac{3}{8}\right)\cos 2x$

(55) $\displaystyle\int e^{4x}\sin 3xdx=\int\left(\frac{e^{4x}}{4}\right)'\sin 3xdx=\frac{e^{4x}}{4}\sin 3x-\int\frac{e^{4x}}{4}(\sin 3x)'dx=\frac{e^{4x}}{4}\sin 3x-\int\frac{3e^{4x}}{4}\cos 3xdx=$
$\displaystyle\frac{e^{4x}}{4}\sin 3x-\int\left(\frac{3e^{4x}}{16}\right)'\cos 3xdx=\frac{e^{4x}}{4}\sin 3x-\frac{3e^{4x}}{16}\cos 3x+\int\frac{3e^{4x}}{16}(\cos 3x)'dx=\frac{e^{4x}}{4}\sin 3x-\frac{3e^{4x}}{16}\cos 3x-$
$\displaystyle\frac{9}{16}\int e^{4x}\sin 3xdx$ だから $\displaystyle\frac{25}{16}\int e^{4x}\sin 3xdx=\frac{e^{4x}}{4}\sin 3x-\frac{3e^{4x}}{16}\cos 3x$ となるため
$\displaystyle\int e^{4x}\sin 3xdx=\frac{e^{4x}}{25}(4\sin 3x-3\cos 3x)$

(56) $\displaystyle\int e^{-x}\sin^2 xdx=\int\frac{1}{2}e^{-x}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\int e^{-x}dx-\frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2xdx$ であり, $\displaystyle\int e^{-x}dx=-e^{-x}$,
$\displaystyle\int e^{-x}\cos 2xdx=\int(-e^{-x})'\cos 2xdx=-e^{-x}\cos 2x+\int e^{-x}(\cos 2x)'dx=-e^{-x}\cos 2x-\int 2e^{-x}\sin 2xdx=$
$\displaystyle-e^{-x}\cos 2x-\int 2(-e^{-x})'\sin 2xdx=-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x-\int 2e^{-x}(\sin 2x)'dx=$
$\displaystyle-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x-4\int e^{-x}\cos 2xdx$ だから $\displaystyle 5\int e^{-x}\sin 2xdx=-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x$ となるため
$\displaystyle\int e^{-x}\sin 2xdx=\frac{e^{-x}}{5}(-\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x)$ である. 以上から $\displaystyle\int e^{-x}\sin^2 xdx=\frac{e^{-x}}{10}(\cos 2x-2\sin 2x-5)$

(57) $\displaystyle\int\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx=\int(x)'\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx=x\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\int\frac{x+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}dx=$
$\displaystyle x\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx=x\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\sqrt{x^2-1}$

(58) $\displaystyle\int(\sin x)\log\sin xdx=\int(-\cos x)'\log\sin xdx=-\cos x\log\sin x+\int\frac{\cos^2 x}{\sin x}dx$ であり, $t=\cos x$ とおくと
$\displaystyle\int\frac{\cos^2 x}{\sin x}dx=\int\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}\sin xdx=\int\frac{t^2}{t^2-1}dt=\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=\int\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right)dt=$
$\displaystyle t+\frac{1}{2}\log|t-1|-\frac{1}{2}\log|t+1|=\cos x+\frac{1}{2}\log(1-\cos x)-\frac{1}{2}\log(1+\cos x)$ だから

$\int (\sin x)\log\sin x dx = -\cos x\log\sin x + \cos x + \frac{1}{2}\log(1-\cos x) - \frac{1}{2}\log(1+\cos x)$

(59) $t = \log(1+\tan^2 x)$ おけば ($t = \tan x$ とおき, さらに $s = \log(1+t^2)$ とおいて置換積分してもよい.) $dt = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x(1+\tan^2 x)}dx = 2\tan x dx$ だから $\int \tan x\log(1+\tan^2 x)dx = \int \frac{t}{2}dt = \frac{t^2}{4} = \frac{1}{4}(\log(1+\tan^2 x))^2 = \frac{1}{4}\left(\log\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)\right)^2 = (\log|\cos x|)^2$

(60) $\int (x+1)e^x \log x dx = \int (xe^x)'\log x dx = xe^x\log x - \int xe^x(\log x)'dx = xe^x\log x - \int e^x dx = xe^x\log x - e^x$

(61) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$

(62) $t = \cos\frac{x}{2}$ とおけば, $dt = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\,dx$ だから $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1-\cos x}{a-\cos x}}\,dx = \int\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{a+1-2\cos^2\frac{x}{2}}}\,dx = \int \frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{a+1-2t^2}}\,dt = \int \frac{-2}{\sqrt{\frac{a+1}{2}-t^2}}\,dt = -2\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{a+1}} = -2\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{a+1}}$.

[別解] $t = \cos x$ とおけば, $dt = -\sin x\,dx$ だから $2n\pi \leqq x \leqq \pi(2n+1)$ の場合, (61) の結果から $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1-\cos x}{a-\cos x}}\,dx = \int\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sqrt{(a-\cos x)(1+\cos x)}}\,dx = \int\frac{\sin x}{\sqrt{(a-\cos x)(1+\cos x)}}\,dx = \int\frac{-1}{\sqrt{(a-t)(1+t)}}\,dt = -\sin^{-1}\left(\frac{2t-a+1}{a+1}\right) = -\sin^{-1}\left(\frac{2\cos x-a+1}{a+1}\right)$ であり, $\pi(2n-1) \leqq x \leqq 2\pi n$ の場合, $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1-\cos x}{a-\cos x}}\,dx = \int\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sqrt{(a-\cos x)(1+\cos x)}}\,dx = \int\frac{-\sin x}{\sqrt{(a-\cos x)(1+\cos x)}}\,dx = \int\frac{1}{\sqrt{(a-t)(1+t)}}\,dt = \sin^{-1}\left(\frac{2t-a+1}{a+1}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{2\cos x-a+1}{a+1}\right)$.

(63) $\cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\cos^2 x\sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x + 2\sin^4 x$ であり, $t = \sin^2 x$ とおけば $\cos x\sin x\,dx = \frac{1}{2}dt$ だから $\displaystyle\int\frac{\cos x\sin x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx = \int\frac{1}{2(1-2t+2t^2)}\,dt = \frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\,dt = \frac{1}{2}\tan^{-1}(2t-1) = \frac{1}{2}\tan^{-1}(2\sin^2 x-1)$.

(64) $\int\tan^{-1}x\,dx = x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)$ だから $\displaystyle\int x(\tan^{-1}x)^2\,dx = \int\left(\frac{x^2}{2}\right)'(\tan^{-1}x)^2\,dx = \frac{x^2(\tan^{-1}x)^2}{2} - \int\frac{x^2\tan^{-1}x}{1+x^2}dx = \frac{x^2(\tan^{-1}x)^2}{2} - \int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\tan^{-1}x\,dx = \frac{x^2(\tan^{-1}x)^2}{2} - \int\tan^{-1}x\,dx + \int\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}dx = \frac{x^2(\tan^{-1}x)^2}{2} - x\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \frac{(\tan^{-1}x)^2}{2}$.

2. (1) $\displaystyle\int_0^1 2x\log(x^2+3x+2)dx = \int_0^1 (x^2)'(\log(x+1)+\log(x+2))dx = [x^2(\log(x+1)+\log(x+2)]_0^1 - \int_0^1 x^2((\log(x+1)+\log(x+2))'dx = \log 6 - \int_0^1\left(\frac{x^2}{x+1}+\frac{x^2}{x+2}\right)dx = \log 6 - \int_0^1\left(2x-3+\frac{1}{x+1}+\frac{4}{x+2}\right)dx = \log 6 - [x^2-3x+\log(x+1)+4\log(x+2)]_0^1 = 2 - 3\log 3 + 4\log 2$

(2) $y = e^{3x}$ とおくと $x = \frac{\log y}{3}$ だから $dx = \frac{1}{3y}dy$ であり, x が 0 から $\log 2$ まで動けば y は 1 から 8 まで動くため, $\displaystyle\int_0^{\log 2}\frac{1}{1+e^{3x}}dx = \int_1^8\frac{1}{3y(1+y)}dy = \int_1^8\frac{1}{3}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{1+y}\right)dy = \left[\frac{1}{3}(\log y - \log(1+y))\right]_1^8 = \frac{1}{3}(4\log 2 - 2\log 3)$

(3) $\displaystyle\int_0^\lambda x^{n-1}\sin^{-1}(x^n)dx = \int_0^\lambda\left(\frac{x^n}{n}\right)'\sin^{-1}(x^n)dx = \left[\frac{x^n}{n}\sin^{-1}(x^n)\right]_0^\lambda - \int_0^\lambda\frac{x^n}{n}(\sin^{-1}(x^n))'dx = \frac{\lambda^n}{n}\sin^{-1}(\lambda^n) - \int_0^\lambda\frac{nx^{2n-1}}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx = \frac{\lambda^n}{n}\sin^{-1}(\lambda^n) - \left[-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^{2n}}\right]_0^\lambda = \frac{\lambda^n}{n}\sin^{-1}(\lambda^n) + \frac{1}{2}\sqrt{1-\lambda^{2n}} - \frac{1}{2}$

(4) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} x^3\tan^{-1}x dx = \int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{x^4}{4}\right)'\tan^{-1}x dx = \left[\frac{x^4}{4}\tan^{-1}x\right]_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}}\frac{x^4}{4}(\tan^{-1}x)'dx = \frac{11\pi}{16} - \int_1^{\sqrt{3}}\frac{x^4}{4(1+x^2)}dx = \frac{11\pi}{16} - \int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{4}\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{11\pi}{16} - \left[\frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}-x+\tan^{-1}x\right)\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{6}$

(5) $y = \sin x$ とおくと $\cos x dx = dy$ であり, x が 0 から $\frac{\pi}{6}$ まで動けば y は 0 から $\frac{1}{2}$ まで動くため,

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2-\sin x+\sin^2 x}{\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(2-\sin x+\sin^2 x)\cos x}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2-y+y^2}{1-y^2}dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-1+\frac{3-y}{1-y^2}\right)dy =$
$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(-1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{1+y}+\frac{3}{1-y}-\frac{2y}{1-y^2}\right)\right)dy = \left[-x+\frac{1}{2}(3\log(1+y)-3\log(1-y)+\log(1-y^2))\right]_0^{\frac{1}{2}} =$
$2\log 3-\log 2-\frac{1}{2}$

(6) $t = \cos x$ とおくと, $-dt = \sin x dx$ であり, x が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで動けば t は 1 から 0 まで動くため,
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx = \int_1^0 \frac{-1}{1+t}dx = [-\log|1+t|]_1^0 = \log 2.$

(7) $y = x^n$ とおくと, $x^{n-1}dx = \frac{1}{n}dy$ であり, x が 0 から λ まで動けば y は 0 から λ^n まで動くため,
$\int_0^\lambda x^{n-1}\tan^{-1}(x^n)dx = \frac{1}{n}\int_0^{\lambda^n} \tan^{-1} y dy = \frac{1}{n}\int_0^{\lambda^n} (y)'\tan^{-1} y dy = \frac{1}{n}\left[y\tan^{-1} y\right]_0^{\lambda^n} - \frac{1}{n}\int_0^{\lambda^n} y\left(\tan^{-1} y\right)' dy =$
$\frac{\lambda^n}{n}\tan^{-1}(\lambda^n) - \frac{1}{n}\int_0^{\lambda^n} \frac{y}{1+y^2}dy = \frac{\lambda^n}{n}\tan^{-1}(\lambda^n) - \frac{1}{2n}[\log(1+y^2)]_0^{\lambda^n} = \frac{\lambda^n}{n}\tan^{-1}(\lambda^n) - \frac{\log(1+\lambda^{2n})}{2n}$
(別解) 部分積分を行ってから $y = x^{2n}$ とおいて置換積分を行う. $\int_0^\lambda x^{n-1}\tan^{-1}(x^n)dx = \int_0^\lambda \left(\frac{x^n}{n}\right)'\tan^{-1}(x^n)dx =$
$\left[\frac{x^n}{n}\tan^{-1}(x^n)\right]_0^\lambda - \int_0^\lambda \frac{x^n}{n}\left(\tan^{-1}(x^n)\right)' dx = \frac{\lambda^n}{n}\tan^{-1}(\lambda^n) - \int_0^\lambda \frac{x^{2n-1}}{x^{2n}+1}dx =$
$\frac{\lambda^n}{n}\tan^{-1}(\lambda^n) - \left[\frac{1}{2n}\log\left(1+x^{2n}\right)\right]_0^\lambda = \frac{\lambda^n}{n}\tan^{-1}(\lambda^n) - \frac{\log(1+\lambda^{2n})}{2n}$

(8) $\int_0^\lambda x^2\tan^{-1} x dx = \int_0^\lambda \left(\frac{x^3}{3}\right)'\tan^{-1} x dx = \left[\frac{x^3}{3}\tan^{-1} x\right]_0^\lambda - \int_0^\lambda \frac{x^3}{3}(\tan^{-1} x)' dx =$
$\frac{\lambda^3\tan^{-1}\lambda}{3} - \int_0^\lambda \frac{x^3}{3(1+x^2)}dx = \frac{\lambda^3\tan^{-1}\lambda}{3} - \int_0^\lambda \frac{1}{3}\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)dx = \frac{\lambda^3\tan^{-1}\lambda}{3} - \left[\frac{1}{6}(x^2-\log(1+x^2))\right]_0^\lambda =$
$\frac{\lambda^3\tan^{-1}\lambda}{3} - \frac{\lambda^2}{6} + \frac{\log(1+\lambda^2)}{6}$

(9) $t = e^x$ とおくと, $e^x dx = dt$ であり, x が 0 から $\log\lambda$ まで動くとき, t は 1 から λ まで動くため,
$\int_0^{\log\lambda} e^x\log(e^{2x}+1)dx = \int_1^\lambda (t)'\log(t^2+1)dt = [t\log(t^2+1)]_1^\lambda - \int_1^\lambda \left(2-\frac{2}{t^2+1}\right)dt =$
$\lambda\log(\lambda^2+1) - \log 2 - \left[2t-2\tan^{-1} t\right]_1^\lambda = \lambda^3 - 2\lambda + 2\tan^{-1}\lambda - \log 2 + \frac{\pi}{2} + 2$

(10) $x = \sqrt{2}\sin\theta$ とおくと, $dx = \sqrt{2}\cos\theta d\theta$ であり, x が 0 から 1 まで動けば θ は 0 から $\frac{\pi}{4}$ まで動くため,
$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\cos\theta}{\sqrt{2(1-\sin^2\theta)}}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}.$

(11) $t = e^x$ とおくと, $x = \log t$, $dx = \frac{1}{t}dt$ であり, x が 0 から $\log\sqrt{3}$ まで動けば t は 1 から $\sqrt{3}$ まで動くため,
$\int_0^{\log\sqrt{3}} \frac{dx}{e^x+e^{3x}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2(t^2+1)} = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = \left[-\frac{1}{t}-\tan^{-1} t\right]_1^{\sqrt{3}} = 1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{12}$

(12) $\int_0^1 2x\tan^{-1} x dx = \int_0^1 (x^2)'\tan^{-1} x dx = \left[x^2\tan^{-1} x\right]_0^1 - \int_0^1 x^2(\tan^{-1} x)' dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx =$
$\frac{\pi}{4} - \int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2} - 1$ ((1) より)

(13) $\int_0^1 (2-6x^2)\sin^{-1} x dx = \left[(2x-2x^3)\sin^{-1} x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x-2x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}dx$ $t = x^2$ とおくと $dt = 2xdx$ であり, x が 0 から 1 まで動けば t も 0 から 1 まで動くため, (上式)$= -\int_0^1 \sqrt{1-t}dx = \left[\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{2}{3}}\right]_0^1 = -\frac{2}{3}.$

(14) $x = \sqrt{3}\tan\theta$ とおくと, $dx = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$ であり, x が 0 から 1 まで動けば θ は 0 から $\frac{\pi}{6}$ まで動くため,
$\int_0^1 \frac{1}{x^2+3}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{3(1+\tan^2\theta)\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{3}d\theta = \frac{\sqrt{3}\pi}{18}.$

(15) $\int_1^2 x(2x-3)^5 dx = \int_1^2 x\left(\frac{1}{12}(2x-3)^6\right)' dx = \left[\frac{x}{12}(2x-3)^6\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x'}{12}(2x-3)^6 dx =$

$\dfrac{1}{12}-\displaystyle\int_1^2\dfrac{1}{12}(2x-3)^6dx=\dfrac{1}{12}-\left[\dfrac{1}{168}(2x-3)^7\right]_1^2dx=\dfrac{1}{14}$

(16) $t=\sqrt{1+x}$ とおくと, $x=t^2-1$, $\dfrac{dx}{\sqrt{1+x}}=2dt$ であり, x が 0 から 3 まで動けば t は 1 から 2 まで動くため, $\displaystyle\int_0^3\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx=\int_1^2 2(t^2-1)^2dt=\int_1^2(2t^4-4t^2+2)dt=\left[\frac{2t^5}{5}-\frac{4t^3}{3}+2t\right]_1^2=\frac{76}{15}$

(17) $t=x-2$ とおくと, $dx=dt$ であり, x が 3 から 4 まで動けば t は 1 から 2 まで動くため,

$\displaystyle\int_3^4(x-2)\log(x^3-2x^2)dx=\int_1^2 t\log(t(t+2)^2)dt=\int_1^2\left(\frac{t^2}{2}\right)'(\log t+2\log(t+2))dt=\left[\frac{t^2}{2}(\log t+2\log(t+2))\right]_1^2$

$\displaystyle-\int_1^2\frac{t^2}{2}(\log t+2\log(t+2))'dt=10\log 2-\log 3-\int_1^2\left(\frac{t}{2}+\frac{t^2}{t+2}\right)dt=$

$\displaystyle 10\log 2-\log 3-\int_1^2\left(\frac{3t}{2}-2+\frac{4}{t+2}\right)dt=10\log 2-\log 3-\left[\frac{3t^2}{4}-2t+4\log(t+2)\right]_1^2=2\log 2+3\log 3-\frac{1}{4}$

(18) $t=x^2$ とおくと, $xdx=\dfrac{1}{2}dt$ であり, x が 0 から 2 まで動けば t は 0 から 4 まで動くため, $\displaystyle\int_0^2 x^5e^{x^2}dx=$

$\displaystyle\int_0^4\frac{t^2}{2}e^tdt=\int_0^4\frac{t^2}{2}(e^t)'dt=\left[\frac{t^2}{2}e^t\right]_0^4-\int_0^4\left(\frac{t^2}{2}\right)'e^tdt=8e^4-\int_0^4 te^tdt=8e^4-\int_0^4 t(e^t)'dt=$

$\displaystyle 8e^4-[te^t]_0^4+\int_0^4(t)'e^tdt=4e^4+\int_0^4 e^tdt=4e^4+[e^t]_0^4=5e^4-1$

(19) $x=\sin\theta$ とおくと, $dx=\cos\theta d\theta$ であり, x が $\dfrac{1}{2}$ から 1 まで動けば θ は $\dfrac{\pi}{6}$ から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くため,

$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sin^{-1}x}{x^2}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\theta\left(-\frac{1}{\sin\theta}\right)'d\theta=\left[-\frac{\theta}{\sin\theta}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\theta)'}{\sin\theta}d\theta=-\frac{\pi}{6}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\theta}d\theta=$

$\displaystyle-\frac{\pi}{6}+\left[\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=-\frac{\pi}{6}+\log\bigl(2+\sqrt{3}\bigr)$ (教科書の例題 3.12 の結果を用いた)

(20) $t=\tan x$ とおくと, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ であり, x が $\dfrac{\pi}{6}$ から $\dfrac{\pi}{4}$ まで動けば t は $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ から 1 まで動くため,

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 xdx=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1\frac{t^2}{1+t^2}dt=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=[t-\tan^{-1}t]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1=1-\frac{\pi}{12}-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(21) $\displaystyle\int_0^1 3x^2\log(1+x^2)dx=\int_0^1(x^3)'\log(1+x^2)dx=[x^3\log(1+x^2)]_0^1-\int_0^1\frac{2x^4}{1+x^2}dx=$

$\displaystyle\log 2-2\int_0^1\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\log 2-2\left[\frac{x^3}{3}-x+\tan^{-1}x\right]_0^1=\log 2+\frac{4}{3}-\frac{\pi}{2}$

(22) $t=\cos x$ とおくと, $\sin xdx=dt$ であり, x が 0 から $\dfrac{\pi}{3}$ まで動けば t は 1 から $\dfrac{1}{2}$ まで動くため,

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^5 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos^2x)^2\sin xdx=-\int_1^{\frac{1}{2}}(1-t^2)^2dt=\int_{\frac{1}{2}}^1(1-2t^2+t^4)dt=\left[t-\frac{2t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right]_{\frac{1}{2}}^1=\frac{53}{480}$

(23) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}x(\tan x)'dx=[x\tan x]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}(x)'\tan xdx=\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan xdx=\frac{\pi}{\sqrt{3}}+[\log\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$\displaystyle=\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\log 2$

(24) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\cos 2xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)'dx=\left[\frac{x^2\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x^2)'\frac{\sin 2x}{2}dx=\frac{\pi^2}{32}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\sin 2xdx=$

$\displaystyle\frac{\pi^2}{32}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)'dx=\frac{\pi^2}{32}+\left[\frac{x\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x)'\frac{\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi^2}{32}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi^2}{32}-\left[\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=$

$\displaystyle\frac{\pi^2}{32}-\frac{1}{4}$

(25) $t=e^x$ とおくと, $e^xdx=dt$ であり, x が 0 から 1 まで動くとき, t は 1 から e まで動くため,

$\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\log(e^x+1)dx=\int_1^e t\log(t+1)dt=\left[\frac{t^2}{2}\log(t+1)\right]_1^e-\int_1^e\frac{t^2}{2(t+1)}dt=\frac{e^2}{2}\log(e+1)-\frac{1}{2}\log 2-$

$\displaystyle\int_1^e\left(\frac{t-1}{2}+\frac{1}{2(t+1)}\right)dt=\frac{e^2}{2}\log(e+1)-\frac{1}{2}\log 2-\left[\frac{t^2-2t}{4}+\frac{1}{2}\log(t+1)\right]_1^e=\frac{e^2-1}{2}\log(e+1)-\frac{(e-1)^2}{4}$

(26) $\displaystyle\int_0^1 x^3\tan^{-1}xdx=\int_0^1\left(\frac{x^4}{4}\right)'\tan^{-1}xdx=\left[\frac{x^4}{4}\tan^{-1}x\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^4}{4(x^2+1)}dx=$

$\dfrac{\pi}{16}-\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^1\left(x^2-1+\dfrac{1}{x^2+1}\right)dx=\dfrac{\pi}{16}-\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{x^3}{3}-x+\tan^{-1}x\right]_0^1=\dfrac{1}{6}$

(27) $\displaystyle\int_0^\pi e^{-x}\sin\frac{x}{3}dx=\int_0^\pi(-e^{-x})'\sin\frac{x}{3}dx=\left[-e^{-x}\sin\frac{x}{3}\right]_0^\pi+\int_0^\pi e^{-x}\left(\sin\frac{x}{3}\right)'dx=-\frac{\sqrt{3}e^{-\pi}}{2}+$ $\displaystyle\int_0^\pi\frac{e^{-x}}{3}\cos\frac{x}{3}dx=-\frac{\sqrt{3}e^{-\pi}}{2}+\int_0^\pi\frac{(-e^{-x})'}{3}\cos\frac{x}{3}dx=-\frac{\sqrt{3}e^{-\pi}}{2}+\left[-\frac{e^{-x}}{3}\cos\frac{x}{3}\right]_0^\pi+\int_0^\pi\frac{e^{-x}}{3}\left(\cos\frac{x}{3}\right)'dx=$ $\displaystyle-\frac{\sqrt{3}e^{-\pi}}{2}-\frac{e^{-\pi}}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\int_0^\pi e^{-x}\sin\frac{x}{3}dx$ より $\displaystyle\frac{10}{9}\int_0^\pi e^{-x}\sin\frac{x}{3}dx=\frac{1}{6}\left(2-\left(3\sqrt{3}+1\right)e^{-\pi}\right)$ である．従って $\displaystyle\int_0^\pi e^{-x}\sin\frac{x}{3}dx=\frac{3}{20}\left(2-\left(3\sqrt{3}+1\right)e^{-\pi}\right)$

(28) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sin^{-1}xdx=\int_0^1\left(\frac{x^3}{3}\right)'\sin^{-1}xdx=\left[\frac{x^3}{3}\sin^{-1}x\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^3}{3\sqrt{1-x^2}}dx.$ $t=1-x^2$ とおくと，$dt=-2xdx$ であり x が 0 から 1 まで動けば t は 1 から 0 まで動くため，$\displaystyle\int_0^1\frac{x^3}{3\sqrt{1-x^2}}dx=\int_1^0\frac{t-1}{6\sqrt{t}}dt=$ $\displaystyle\int_0^1\left(\frac{1}{6\sqrt{t}}-\frac{\sqrt{t}}{6}\right)dt=\left[\frac{\sqrt{t}}{3}-\frac{t\sqrt{t}}{9}\right]_0^1=\frac{2}{9}$ である．従って上式から，$\displaystyle\int_0^1 x^2\sin^{-1}xdx=\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}.$

(29) $t=\log x$ とおくと，$dt=\dfrac{1}{x}dx$ であり x が $e^{\frac{\pi}{2}}$ から e^π まで動けば t は $\dfrac{\pi}{2}$ から π まで動くため，$\displaystyle\int_{e^{\frac{\pi}{2}}}^{e^\pi}\frac{(\log x)\sin(\log x)}{x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}t(-\cos t)'dt=[-t\cos t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos tdt=\pi+[\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\pi-1$

(30) $t=e^x$ とおくと，$e^xdx=dt$ であり，x が 0 から 1 まで動くとき，t は 1 から e まで動くため，$\displaystyle\int_0^1 e^x\tan^{-1}(e^x)dx=$ $\displaystyle\int_1^e(t)'\tan^{-1}tdt=[t\tan^{-1}t]_1^e-\int_1^e\frac{t}{1+t^2}dt=e\tan^{-1}e-\frac{\pi}{4}-\left[\frac{\log(1+t^2)}{2}\right]_1^e=e\tan^{-1}e-\frac{\pi}{4}-\frac{\log(1+e^2)}{2}-\frac{\log 2}{2}$

(31) $t=\log x$ とおくと，$dt=\dfrac{1}{x}dx$ であり x が 1 から e まで動けば t は 0 から 1 まで動くため，$\displaystyle\int_1^e\frac{1}{x}\sin^{-1}(\log x)dx=\int_0^1(t)'\sin^{-1}t\,dt=[t\sin^{-1}t]_0^1-\int_0^1\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{\pi}{2}-\left[-\sqrt{1-t^2}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}-1$

(32) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}}2x\sin(x^2)dx=[-\cos(x^2)]_0^{\sqrt{\pi}}=2$

(33) $t=\sin^{-1}x$ とおくと，$dt=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ であり x が 0 から $\sin\alpha$ まで動けば t は 0 から α まで動くため，$\displaystyle\int_0^{\sin\alpha}\frac{\tan^{-1}(\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^\alpha(t)'\tan^{-1}t\,dt=[t\tan^{-1}t]_0^\alpha-\int_0^\alpha\frac{t}{1+t^2}dt=\alpha\tan^{-1}\alpha-\frac{1}{2}[\log(1+t^2)]_0^\alpha=$ $\alpha\tan^{-1}\alpha-\dfrac{1}{2}\log(1+\alpha^2)$

(34) $t=e^x$ とおくと，$e^xdx=dt$ であり，x が 0 から $\log\dfrac{\pi}{2}$ まで動くとき，t は 1 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くため，$\displaystyle\int_0^{\log\frac{\pi}{2}}e^x\cos(e^x)\,dx=\int_1^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=[\sin t]_1^{\frac{\pi}{2}}=1-\sin 1$

(35) $t=e^x$ とおくと，$e^xdx=dt$ であり，x が $\log\dfrac{\pi}{2}$ から $\log\pi$ まで動くとき，t は $\dfrac{\pi}{2}$ から π まで動くため，$\displaystyle\int_{\log\frac{\pi}{2}}^{\log\pi}e^{2x}\sin(e^x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}t(-\cos t)'\,dt=[-t\cos t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos t\,dt=\pi+[\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\pi-1$

(36) $t=\log x$ とおくと，$dt=\dfrac{1}{x}dx$ であり x が 1 から $e^{\frac{\pi}{2}}$ まで動けば t は 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くため，$\displaystyle\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\frac{\sin(\log x)}{x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=1$

3. (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{k^{p-1}(ak^p+bn^p)^q}{n^{p(q+1)}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^{p-1}\left(a\left(\frac{k}{n}\right)^p+b\right)^q\frac{1}{n}=\int_0^1x^{p-1}(ax^p+b)^qdx\ \cdots(*).$ $q\neq-1$ ならば $\displaystyle(*)=\left[\frac{(ax^p+b)^{q+1}}{ap(q+1)}\right]_0^1=\frac{(a+b)^{q+1}-b^{q+1}}{ap(q+1)}.$ $q=-1$ ならば $\displaystyle(*)=\left[\frac{\log|b+ax^p|}{ap}\right]_0^1=\frac{\log|a+b|-\log|b|}{ap}.$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{a^2n^2-k^2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{a^2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\left[\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^1=\sin^{-1}\frac{1}{a}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^m(n^2-k^2)^{\frac{l}{2}}}{n^{m+l+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^m\left(1-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{\frac{l}{2}}\frac{1}{n}=\int_0^1 x^m(1-x^2)^{\frac{l}{2}}\,dx$. $x=\sin\theta$ とおくと, $dx=\cos\theta d\theta$ であり, x が 0 から 1 まで動けば θ は 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くため, $\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x^2)^{\frac{l}{2}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m\theta\cos^{l+1}\theta\,d\theta$ である. 従って, l が奇数で m が偶数ならば, 求める極限値は $\dfrac{l!!(m-1)!!}{(m+l+1)!!}\dfrac{\pi}{2}$ であり, l が偶数または m が奇数ならば, 求める極限値は $\dfrac{l!!(m-1)!!}{(m+l+1)!!}$ である.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\tan\left(\frac{k\pi}{4n}\right)=\int_0^1\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx=\left[-\frac{4}{\pi}\log\left(\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)\right]_0^1=\frac{2\log 2}{\pi}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\tan^{-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_1^2\tan^{-1}x dx=\left[x\tan^{-1}x\right]_1^2-\int_1^2\frac{x}{1+x^2}dx=$
$\displaystyle 2\tan^{-1}2-\frac{\pi}{4}-\left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_1^2=2\tan^{-1}2-\frac{\pi}{4}-\frac{\log 5}{2}+\frac{\log 2}{2}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=pn+1}^{qn}\frac{1}{k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n(q-p)}\frac{1}{np+i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n(q-p)}\frac{1}{p+\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\int_p^q\frac{1}{x}\,dx=[\log x]_p^q=\log\frac{q}{p}$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\log(1+x)dx=\int_0^1(1+x)'\log(1+x)dx=$
$\displaystyle[(1+x)\log(1+x)]_0^1-\int_0^1(1+x)(\log(1+x))'dx=2\log 2-\int_0^1 dx=2\log 2-1$

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^{m-1}}{(n^2+k^2)^{\frac{m}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{\frac{m}{2}}}=\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{m}{2}}}dx\ \cdots(*)$. $x=\tan\theta$ とおくと, x が 0 から 1 まで動けば θ は 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ まで動き, $dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ だから, 問題 6 の記号を用いれば $\displaystyle(*)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^{m-2}\theta\,d\theta=I_{m-2}$ である. 従って問題 6 の結果から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^{m-1}}{(n^2+k^2)^{\frac{m}{2}}}$ は以下で与えられる.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^{m-1}}{(n^2+k^2)^{\frac{m}{2}}}=\begin{cases}\dfrac{(2l-1)!!}{(2l)!!}\left(\dfrac{\pi}{4}+\displaystyle\sum_{i=1}^{l}\frac{(i-1)!}{2(2i-1)!!}\right) & m=2l+2\ \ (l\geqq 0)\\ \dfrac{(2l)!!}{(2l+1)!!}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\displaystyle\sum_{i=1}^{l}\frac{(2i-1)!!}{4^i i!\sqrt{2}}\right) & m=2l+3\ \ (l\geqq 0)\\ \dfrac{(2l-2)!!}{(2l-1)!!}\displaystyle\sum_{i=1}^{l}\frac{(2i-3)!!}{(i-1)!} & m=-2l+2\ \ (l\geqq 1)\\ \dfrac{(2l-1)!!}{(2l)!!}\left(\log\left(1+\sqrt{2}\right)+\displaystyle\sum_{i=1}^{l}\frac{4^{i-1}\sqrt{2}(i-1)!}{(2i-1)!!}\right) & m=-2l+1\ \ (l\geqq 0)\end{cases}$$

4. 部分積分法を用いる.

(1) $\displaystyle I_0=\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax},\ I_n=\int x^n\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)'dx=\frac{1}{a}x^ne^{ax}-\int\frac{n}{a}x^{n-1}e^{ax}dx=\frac{1}{a}x^ne^{ax}-\frac{n}{a}I_{n-1}$

(2) $\displaystyle I_0=x,\ I_1=\int(x)'\sin^{-1}x\,dx=x\sin^{-1}x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2},$

$$\begin{aligned}I_n&=\int(x)'(\sin^{-1}x)^ndx=x(\sin^{-1}x)^n-\int x\left((\sin^{-1}x)^n\right)'dx=x(\sin^{-1}x)^n-\int x\frac{n(\sin^{-1}x)^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}}dx\\&=x(\sin^{-1}x)^n+\int\left(\sqrt{1-x^2}\right)'n(\sin^{-1}x)^{n-1}dx\\&=x(\sin^{-1}x)^n+n\sqrt{1-x^2}(\sin^{-1}x)^{n-1}-n\int(n-1)(\sin^{-1}x)^{n-2}dx\\&=x(\sin^{-1}x)^n+n\sqrt{1-x^2}(\sin^{-1}x)^{n-1}-n(n-1)I_{n-2}\end{aligned}$$

(3) $I_0 = \displaystyle\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$,

$$I_n = \int\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)'(\log x)^n\,dx = \frac{x^{m+1}(\log x)^n}{m+1} - \int\frac{nx^m(\log x)^{n-1}}{m+1}\,dx = \frac{x^{m+1}(\log x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}I_{n-1}$$

(4) $I_0 = \displaystyle\int 1\,dx = x$, $I_1 = \displaystyle\int\frac{1}{\sin x}\,dx = \int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx = \int\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right)dx =$
$\dfrac{1}{2}(\log(1-\cos x) - \log(1+\cos x)) = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} = \log\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$.

$$\begin{aligned}I_{n-2} &= \int\frac{1}{\sin^{n-2}x}\,dx = \int\frac{(-\cos x)'}{\sin^{n-1}x}\,dx = -\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} - \int\frac{(n-1)\cos^2 x}{\sin^n x}\,dx\\ &= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} - \int\frac{(n-1)(1-\sin^2 x)}{\sin^n x}\,dx = -\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} - (n-1)\int\frac{1}{\sin^n x}\,dx + (n-1)\int\frac{1}{\sin^{n-2}x}\,dx\end{aligned}$$

だから $I_{n-2} = -\dfrac{\cos x}{\sin^{n-1}x} - (n-1)I_n + (n-1)I_{n-2}$ である. 従って $I_n = \dfrac{n-2}{n-1}I_{n-2} - \dfrac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}$ が得られる.

(5) $I_0 = \displaystyle\int 1\,dx = x$, $I_1 = \displaystyle\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x|$. $n \geqq 2$ の場合, $\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 = (\tan x)' - 1$ より

$$\begin{aligned}I_n &= \int\tan^2 x\tan^{n-2}x\,dx = \int(\tan x)'\tan^{n-2}x\,dx - \int\tan^{n-2}x\,dx\\ &= \tan^{n-1}x - \int\frac{(n-2)\tan^{n-2}x}{\cos^2 x}\,dx - I_{n-2} = \tan^{n-1}x - (n-2)\int\tan^{n-2}x(1+\tan^2 x)\,dx - I_{n-2}\\ &= \tan^{n-1}x - (n-2)I_n - (n-1)I_{n-2}\end{aligned}$$

である. 従って $I_n = \dfrac{\tan^{n-1}x}{n-1} - I_{n-2}$ である.

5. $I_n = \displaystyle\int x^n(-\cos x)'dx = -x^n\cos x + \int nx^{n-1}\cos x dx = -x^n\cos x + nJ_{n-1}$,
$J_n = \displaystyle\int x^n(\sin x)'dx = x^n\sin x - \int nx^{n-1}\sin x dx = x^n\sin x - nI_{n-1}$ より $\begin{cases}I_n = -x^n\cos x + nJ_{n-1}\\ J_n = x^n\sin x - nI_{n-1}\end{cases}$
故に $I_{n-1} = -x^{n-1}\cos x + (n-1)J_{n-2}$, $J_{n-1} = x^{n-1}\sin x - (n-1)I_{n-2}$ だから

$$I_n = -x^n\cos x + nx^{n-1}\sin x - n(n-1)I_{n-2}, \qquad J_n = x^n\sin x + nx^{n-1}\cos x - n(n-1)J_{n-2}.$$

$n < -1$ のとき $I_n = \displaystyle\int\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'\sin x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sin x - \int\frac{x^{n+1}}{n+1}\cos x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sin x - \frac{J_{n+1}}{n+1}$,
$J_n = \displaystyle\int\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'\cos x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cos x + \int\frac{x^{n+1}}{n+1}\sin x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cos x + \frac{I_{n+1}}{n+1}$ より
$\begin{cases}I_n = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\sin x - \dfrac{J_{n+1}}{n+1}\\ J_n = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\cos x + \dfrac{I_{n+1}}{n+1}\end{cases}$ 故に $I_{n+1} = \dfrac{x^{n+2}}{n+2}\sin x - \dfrac{J_{n+2}}{n+2}$, $J_{n+1} = \dfrac{x^{n+2}\cos x}{n+2} + \dfrac{I_{n+2}}{n+2}$ だから

$$I_n = \frac{x^{n+1}\sin x}{n+1} - \frac{x^{n+2}\cos x}{(n+1)(n+2)} - \frac{I_{n+2}}{(n+1)(n+2)}, \quad J_n = \frac{x^{n+1}\cos x}{n+1} + \frac{x^{n+2}\sin x}{(n+1)(n+2)} - \frac{J_{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

6. $I_0 = J_0 = \lambda$, $I_1 = \displaystyle\int_0^\lambda\cos x\,dx = \sin\lambda$, $J_1 = \displaystyle\int_0^\lambda\sin x\,dx = 1-\cos\lambda$ であり,

$$\begin{aligned}I_{-1} &= \int_0^\lambda\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\left[\log(1+\sin x) - \log(1-\sin x)\right]_0^\lambda = \log\frac{1+\sin\lambda}{\cos\lambda}\\ I_{-2} &= \int_0^\lambda\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = [\tan x]_0^\lambda = \tan\lambda\end{aligned}$$

$n \neq 0, \pm 1$, $k \geqq 2$ とする．$\cos^n x = (\sin x)' \cos^{n-1} x$, $\sin^k x = (-\cos x)' \sin^{k-1} x$ として, 部分積分を行う．

$$\begin{aligned} I_n &= [\sin x \cos^{n-1} x]_0^\lambda + (n-1)\int_0^\lambda \sin^2 x \cos^{n-2} x\,dx = \sin\lambda\cos^{n-1}\lambda + (n-1)\int_0^\lambda (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x\,dx \\ &= \sin\lambda\cos^{n-1}\lambda + (n-1)(I_{n-2} - I_n) \\ J_k &= [-\cos x \sin^{k-1} x]_0^\lambda + (k-1)\int_0^\lambda \cos^2 x \sin^{k-2} x\,dx = -\cos\lambda\sin^{k-1}\lambda + (k-1)\int_0^\lambda (1-\cos^2 x)\cos^{k-2} x\,dx \\ &= -\cos\lambda\sin^{k-1}\lambda + (k-1)(J_{k-2} - J_k) \end{aligned}$$

より $nI_n = (n-1)I_{n-2} + \sin\lambda\cos^{n-1}\lambda$, $kJ_k = (k-1)J_{k-2} - \cos\lambda\sin^{k-1}\lambda$ だから $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2} + \dfrac{\sin\lambda\cos^{n-1}\lambda}{n}$, $J_k = \dfrac{k-1}{k} J_{k-2} - \dfrac{\cos\lambda\sin^{k-1}\lambda}{k}$ であり, $I_n = \dfrac{n+2}{n+1} I_{n+2} - \dfrac{\sin\lambda\cos^{n+1}\lambda}{n+1}$ が成り立つ．従って, 以下の漸化式が得られる．

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{2(n-1)} + \frac{\sin\lambda\cos^{2n-1}\lambda}{2n} & I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} + \frac{\sin\lambda\cos^{2n}\lambda}{2n+1} \\ I_{-2n} &= \frac{2n-2}{2n-1} I_{-2(n-1)} + \frac{\sin\lambda}{(2n-1)\cos^{2n-1}\lambda} & I_{-2n-1} &= \frac{2n-1}{2n} I_{-2n+1} + \frac{\sin\lambda}{2n\cos^{2n}\lambda} \\ J_{2k} &= \frac{2k-1}{2k} J_{2(k-1)} - \frac{\cos\lambda\sin^{2k-1}\lambda}{2k} & J_{2k+1} &= \frac{2k}{2k+1} J_{2k-1} - \frac{\cos\lambda\sin^{2k}\lambda}{2k+1} \end{aligned}$$

そこで $x_n = \dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!} I_{2n}$, $y_n = \dfrac{(2n+1)!!}{(2n)!!} I_{2n+1}$, $z_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!} I_{-2n}$, $w_n = \dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!} I_{-2n-1}$, $u_k = \dfrac{(2k)!!}{(2k-1)!!} J_{2k}$, $v_k = \dfrac{(2k+1)!!}{(2k)!!} J_{2k+1}$, とおけば, 上式から $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, $\{y_n\}_{n=0}^\infty$, $\{z_n\}_{n=0}^\infty$, $\{w_n\}_{n=0}^\infty$, $\{u_n\}_{n=0}^\infty$, $\{v_n\}_{n=0}^\infty$ はそれぞれ次の漸化式をみたす．

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + \frac{(2n-2)!!\sin\lambda\cos^{2n-1}\lambda}{(2n-1)!!} & y_n &= y_{n-1} + \frac{(2n-1)!!\sin\lambda\cos^{2n}\lambda}{(2n)!!} \\ z_n &= z_{n-1} + \frac{(2n-3)!!\sin\lambda}{(2n-2)!!\cos^{2n-1}\lambda} & w_n &= w_{n-1} + \frac{(2n-2)!!\sin\lambda}{(2n-1)!!\cos^{2n}\lambda} \\ u_n &= u_{n-1} - \frac{(2n-2)!!\cos\lambda\sin^{2n-1}\lambda}{(2n-1)!!} & v_n &= v_{n-1} - \frac{(2n-1)!!\cos\lambda\sin^{2n}\lambda}{(2n)!!} \end{aligned}$$

さらに $x_0 = I_0 = \lambda$, $y_0 = I_1 = \sin\lambda$, $z_1 = I_{-2} = \tan\lambda$, $w_0 = I_{-1} = \log\dfrac{1+\sin\lambda}{\cos\lambda}$, $u_0 = J_0 = \lambda$, $v_0 = J_1 = 1-\cos\lambda$ だから, $n \geqq 1$ に対して以下の等式が成り立つ．ただし $(-1)!! = 1$ とする．

$$\begin{aligned} x_n &= \lambda + \sum_{i=1}^n \frac{(2i-2)!!\sin\lambda\cos^{2i-1}\lambda}{(2i-1)!!} & y_n &= \sin\lambda + \sum_{i=1}^n \frac{(2i-1)!!\sin\lambda\cos^{2i}\lambda}{(2i)!!} \\ z_n &= \tan\lambda + \sum_{i=2}^n \frac{(2i-3)!!\sin\lambda}{(2i-2)!!\cos^{2i-1}\lambda} & w_n &= \log\frac{1+\sin\lambda}{\cos\lambda} + \sum_{i=1}^n \frac{(2i-2)!!\sin\lambda}{(2i-1)!!\cos^{2i}\lambda} \\ u_n &= \lambda - \sum_{i=1}^n \frac{(2i-2)!!\mu^{2i-1}}{(2i-1)!!(1+\mu^2)^i} & v_n &= 1-\cos\lambda - \sum_{i=1}^n \frac{(2i-1)!!\mu^{2i}}{(2i)!!(1+\mu^2)^{i+\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

従って $n \geqq 1$ に対して I_{2n}, I_{2n+1}, I_{-2n}, I_{-2n-1}, J_{2n}, J_{2n+1} は以下の式で与えられる．

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\lambda + \sum_{i=1}^n \frac{(2i-2)!!\sin\lambda\cos^{2i-1}\lambda}{(2i-1)!!}\right) & I_{2n+1} &= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\left(\sin\lambda + \sum_{i=1}^n \frac{(2i-1)!!\sin\lambda\cos^{2i}\lambda}{(2i)!!}\right) \\ I_{-2n} &= \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\left(\tan\lambda + \sum_{i=2}^n \frac{(2i-3)!!\sin\lambda}{(2i-2)!!\cos^{2i-1}\lambda}\right) & I_{-2n-1} &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\log\frac{1+\sin\lambda}{\cos\lambda} + \sum_{i=1}^n \frac{(2i-2)!!\sin\lambda}{(2i-1)!!\cos^{2i}\lambda}\right) \\ J_{2n} &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\lambda - \sum_{i=1}^n \frac{(2i-2)!!\cos\lambda\sin^{2i-1}\lambda}{(2i-1)!!}\right) & J_{2n+1} &= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\left(1-\cos\lambda - \sum_{i=1}^n \frac{(2i-1)!!\cos\lambda\sin^{2i}\lambda}{(2i)!!}\right) \end{aligned}$$

7. A, B をそれぞれ x 軸上の点 $(-r, 0)$, $(0, r)$ とし, 半円の弧が上半平面にあるとき, P_k の座標は $\left(r\cos\dfrac{\pi k}{n}, r\sin\dfrac{\pi k}{n}\right)$ で与えられる．このとき $S_k = r^2 \sin\dfrac{\pi k}{n}$ だから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n S_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n r^2 \sin\frac{\pi k}{n}\frac{1}{n} = \int_0^1 r^2\sin(\pi x)\,dx = \left[-\frac{r^2}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 = \frac{2r^2}{\pi}.$$

8. (1) $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n$ であり, この両辺の 0 から 1 までの積分は

$$\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)dx=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 x^k\,dx=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k},\quad \int_0^1(1+x)^n\,dx=\left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

だから, $\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ が得られる.

(2) 初項が 1, 公比が $1-x$ で項数が n の等比数列の和は $\sum\limits_{k=1}^{n}(1-x)^{k-1}=\frac{1-(1-x)^n}{x}$ であり, 2 項定理により $\frac{1-(1-x)^n}{x}=-\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{k-1}=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}x^{k-1}$ だから, $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}x^{k-1}=\sum\limits_{k=1}^{n}(1-x)^{k-1}$ が成り立つ. この両辺の 0 から 1 までの積分は

$$\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}x^{k-1}\right)dx=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\int_0^1 x^{k-1}\,dx=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\binom{n}{k}$$

$$\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{n}(1-x)^{k-1}\right)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_0^1(1-x)^{k-1}\,dx=\sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{(1-x)^k}{k}\right]_0^1=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

だから, $\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\binom{n}{n}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ が得られる.

9. f の c における連続性から, $c\neq a$ ならば $0<\delta\leqq c-a$ で, 条件「$c-\delta\leqq x\leqq c$ ならば $f(x)\geqq\frac{f(c)}{2}$」を満たすものが存在する. 従って $\int_{c-\delta}^{c}f(x)\,dx\geqq\int_{c-\delta}^{c}\frac{f(c)}{2}$ である. また, すべての $x\in[a,b]$ に対して $f(x)\geqq 0$ だから, $\int_a^{c-\delta}f(x)\,dx$ と $\int_c^b f(x)\,dx$ はともに 0 以上である. 故

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{c-\delta}f(x)\,dx+\int_{c-\delta}^{c}f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx\geqq 0+\int_{c-\delta}^{c}\frac{f(c)}{2}+0=\frac{\delta f(c)}{2}>0$$

が成り立つ. $c=a$ の場合は, f の a における連続性から, $0<\delta\leqq b-a$ で, 条件「$a\leqq x\leqq a+\delta$ ならば $f(x)\geqq\frac{f(a)}{2}$」を満たすものが存在する. 従って $\int_a^{a+\delta}f(x)\,dx\geqq\int_a^{a+\delta}\frac{f(a)}{2}$ である. また, すべての $x\in[a,b]$ に対して $f(x)\geqq 0$ だから, $\int_{a+\delta}^{b}f(x)\,dx$ は 0 以上である. 故に $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{a+\delta}f(x)\,dx+\int_{a+\delta}^{b}f(x)\,dx\geqq\int_a^{a+\delta}\frac{f(a)}{2}+0=\frac{\delta f(a)}{2}>0$ が成り立つ.

10. (1) $k-1<x<k$ ならば $\sqrt{k-1}<\sqrt{x}<\sqrt{k}$ であり, $k-1<x<k$ ならば $\sqrt{k-1}<\sqrt{x}<\sqrt{k}$ だから, 問題 9 の結果から $\int_{k-1}^{k}\sqrt{k-1}\,dx<\int_{k-1}^{k}\sqrt{x}\,dx<\int_{k-1}^{k}\sqrt{k}\,dx$ が成り立つ.

$$\int_{k-1}^{k}\sqrt{k-1}\,dx=\sqrt{k-1},\quad \int_{k-1}^{k}\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\left(k\sqrt{k}-(k-1)\sqrt{k-1}\right),\quad \int_{k-1}^{k}\sqrt{k}\,dx=\sqrt{k}$$

だから, 上の不等式から $\sqrt{k-1}<\frac{2}{3}\left(k\sqrt{k}-(k-1)\sqrt{k-1}\right)$ と $\frac{2}{3}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)<\sqrt{k}$ が得られる. 前者の不等式の k を $k+1$ で置き換えれば $\sqrt{k}<\frac{2}{3}\left((k+1)\sqrt{k+1}-k\sqrt{k}\right)$ が得られ, これに $k=1,2,\ldots,n$ を代入して辺々加えれば $\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2}{3}\left((k+1)\sqrt{k+1}-k\sqrt{k}\right)=\frac{2}{3}\left((n+1)\sqrt{n+1}-1\right)$ が得られる. また, 後者の不等式に $k=1,2,\ldots,n$ を代入して辺々加えれば $\frac{2}{3}n\sqrt{n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2}{3}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)<\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}$ が得られる. 以上から $\frac{2}{3}n\sqrt{n}<\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}<\frac{2}{3}\left((n+1)\sqrt{n+1}-1\right)$ である.

(2) $k-1 \leqq x \leqq k$ ならば $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{k-1}}$ であり $k-1 < x < k$ ならば $\dfrac{1}{\sqrt{k}} < \dfrac{1}{\sqrt{x}} < \dfrac{1}{\sqrt{k-1}}$ だから, 問題 9 の結果から $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{k}}\,dx < \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{k-1}}\,dx$ が成り立つ.

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{k}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right), \quad \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{k-1}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{k-1}}$$

だから, 上の不等式から $\dfrac{1}{\sqrt{k}} < 2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$ と $2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{k-1}}$ が得られる. 前者の不等式に $k=2,\dots,n$ を代入して辺々加えれば $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sum_{k=2}^{n} 2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right) = 2\sqrt{n}-2$ が得られ, この両辺に 1 を加えて, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}-1$ を得る. また, 後者の不等式の k を $k+1$ で置き換えれば $2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ が得られ, これに $k=1,2,\dots,n$ を代入して辺々加えれば $2\left(\sqrt{n+1}-1\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ が得られる. 以上から $2\left(\sqrt{n+1}-1\right) < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}-1$ である.

(3) $n > 2$ より $0 \leqq x \leqq 1$ ならば $1 \leqq \sqrt{1+x^n} \leqq \sqrt{1+x^2}$ だから $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1+x^n}} \leqq 1$ であり, $x \neq 0, 1$ のとき, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} < \dfrac{1}{\sqrt{1+x^n}} < 1$ が成り立つため, 問題 9 により $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^n}}\,dx < \int_0^1 1\,dx = 1$ である. 一方 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left[\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1 = \log\left(1+\sqrt{2}\right)$ が成り立つため, $\log\left(1+\sqrt{2}\right) < \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^n}}\,dx < 1$ が得られる.

(4) $n > 2$ より, $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ ならば $\sqrt{1-x^2} \leqq \sqrt{1-x^n} \leqq 1$ だから $1 \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1-x^n}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ であり, $x \neq 0$ のとき, $1 < \dfrac{1}{\sqrt{1-x^n}} < \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ が成り立つため, 問題 9 により $\dfrac{1}{2} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 1\,dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^n}}\,dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ である. 一方 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[\sin^{-1} x\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}$ が成り立つため, $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^n}}dx < \frac{\pi}{6}$ が得られる.

(5) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ならば $\dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin x \leqq x$ だから, $e^{-x} \leqq e^{-\sin x} \leqq e^{-\frac{2}{\pi}x}$ が成り立つ. また, $x \neq 0, \dfrac{\pi}{2}$ ならば $\sin x \neq x, \dfrac{2}{\pi}x$ だから, $e^{-\sin x} \neq e^{-x}, e^{-\frac{2}{\pi}x}$ である. 従って問題 9 より $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin x}\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}x}\,dx$ が得られる. 一方 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1-e^{-\frac{\pi}{2}} > 1-\frac{1}{e}$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}x}\,dx = \left[-\frac{\pi}{2}e^{-\frac{2}{\pi}x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$ だから $1-\dfrac{1}{e} < \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin x}dx < \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$ が得られる.

(6) テイラーの定理から $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{\cos\theta x}{5!}x^5$ を満たす $0 < \theta < 1$ がある. $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ならば $\dfrac{\cos\theta x}{5!}x^5 > 0$ だから, 上式から $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$ が得られ, $\dfrac{\sin x}{x} > 1 - \dfrac{x^2}{6}$ が成り立つことがわかる. $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $f(0) = 1$, $x \neq 0$ ならば $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ で定めれば, f は原点で連続であり, 上のことから $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ならば $f(x) > 1 - \dfrac{x^2}{6}$ が成り立つ. 従って問題 9 より $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\frac{x^2}{6}\right)dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{144}$ が得られる. 一方, $x > 0$ ならば $\sin x < x$ だから $f(x) < 1$ となり, 問題 9 より $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$ である.

11. f は単調減少関数だから $k \leqq x \leqq k+1$ ならば $f(k+1) \leqq f(x) \leqq f(k)$ である. 従って次の不等式が成り立つ.

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k)\,dx \leqq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqq \int_k^{k+1} f(k)\,dx = f(k)$$

$a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx$ とおけば, 上の不等式から $a_{k+1} - a_k = f(k+1) - \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)dx \leqq 0$ だから, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列である. 上の不等式の中央の辺と右辺に $k = 1, 2, \dots, n-1$ を代入して加えれば $\displaystyle\int_1^n f(x)\,dx \leqq \sum_{k=1}^{n} f(k)$

が得られるため, $a_n \geqq 0$ で, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界である. 故に $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する.

12. g がつねに値が 0 である定数値関数ならば任意の $c \in [a,b]$ に対して $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0 = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$ が成り立つため, $g(\alpha) > 0$ を満たす $\alpha \in [a,b]$ が存在する場合を考える. このとき, g の連続性から α を含む半開区間 I で, $x \in I$ ならば $g(x) > 0$ となるものが存在する. f の連続性から, 最大値・最小値の定理によって $p, q \in [a,b]$ で, すべての $x \in [a,b]$ に対して $f(p) \leqq f(x) \leqq f(q)$ が成り立つようなものがある. よって, 仮定から $f(p)g(x) \leqq f(x)g(x) \leqq f(q)g(x)$ がすべての $x \in [a,b]$ に対して成り立つため,

$$f(p)\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(p)g(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqq \int_a^b f(q)g(x)\,dx = f(q)\int_a^b g(x)\,dx$$

である. そこで関数 $F : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ を $F(t) = f(t)\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ で定めれば F は連続で, $F(p) \leqq \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqq F(q)$ だから, 中間値の定理により $F(\xi) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ を満たす ξ が p と q の間に存在する. $p < \xi < q$ または $q < \xi < p$ ならば, $p, q \in [a,b]$ より $\xi \neq a, b$ だから $c = \xi$ とおけば, $c \in (a,b)$ であり, $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$ が成り立つ. もし $\xi = p$ ならば $\displaystyle\int_a^b (f(x) - f(p))g(x)\,dx = 0$ が得られ, $\xi = q$ ならば $\displaystyle\int_a^b (f(q) - f(x))g(x)\,dx = 0$ が得られる. 一方, すべての $x \in [a,b]$ に対して $(f(x) - f(p))g(x) \geqq 0$ かつ $(f(q) - f(x))g(x) \geqq 0$ だから, 問題 9 により $\xi = p$ ならば $(f(x) - f(p))g(x) = 0$ がすべての $x \in [a,b]$ に対して成り立ち, $\xi = q$ ならば $(f(q) - f(x))g(x) = 0$ がすべての $x \in [a,b]$ に対して成り立つ. ここで, $x \in I$ ならば $g(x) > 0$ だから, $\xi = p$ の場合は a, b と異なる $c \in I$ を選べば $f(c) = f(p)$ であり, $\xi = q$ の場合は a, b と異なる $c \in I$ を選べば $f(c) = f(q)$ である. いずれの場合にしても, すべての $x \in [a,b]$ に対して $f(x)g(x) = f(c)g(x)$ が成り立つため, 区間 $[a,b]$ におけるこの等式の両辺の積分を考えれば $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$ が成り立つ.

13. f は連続で, y を $|y|$ に対応させる関数も連続であり, 連続関数の合成関数は連続だから x を $|f(x)|$ に対応させる関数 $|f|$ も連続である. 最大値・最小値の定理によって $|f|$ の $[0,1]$ における最大値は存在する. そこで K を $|f|$ の最大値とすると, $n > K$ ならば, $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\left|f\left(\dfrac{k}{n}\right)\dfrac{1}{n}\right| < 1$ である. $|y| < 1$ ならば $\log(1+y) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}y^m$ が成り立ち, この右辺は絶対収束するため, $n > K$ のとき y に $f\left(\dfrac{k}{n}\right)\dfrac{1}{n}$ を代入し, $\left|f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right| \leqq K$ であることを用いれば

$$\begin{aligned}\left|\log\left(1 + f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right| &= \left|\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right)^m\right| \\ &\leqq \sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m}\left|\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right)^m\right| \leqq \sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{K}{n}\right)^m = \frac{K^2}{n(n-K)}\end{aligned}$$

である. 従って

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\log\left(1 + f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right) - \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right| &\leqq \sum_{k=1}^{n}\left|\log\left(1 + f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right| \\ &\leqq \frac{nK^2}{n(n-K)} = \frac{K^2}{n-K}\end{aligned}$$

を得る．さらに

$$\begin{aligned}\left|\log\prod_{k=1}^{n}\left(1+f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right)-\int_0^1 f(x)dx\right| &\leqq \left|\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right)-\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right| \\ &\quad+\left|\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}-\int_0^1 f(x)dx\right| \\ &\leqq \frac{K^2}{n-K}+\left|\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}-\int_0^1 f(x)dx\right|\end{aligned}$$

となるため, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{K^2}{n-K}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$ および対数関数の連続性から,

$$\log\left(\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\log\prod_{k=1}^{n}\left(1+f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

が得られる．従って $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right)=\exp\left(\int_0^1 f(x)dx\right)$ が示された.

(2) (i) $f(x)=x$ の場合, $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right)=\exp\left(\int_0^1 x\,dx\right)=\sqrt{e}$ である.

(ii) $f(x)=\dfrac{a}{a-x}$ の場合, $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{an+a-k}{an-k}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right)=\exp\left(\int_0^1\frac{a}{a-x}dx\right)=e^{a\log\frac{a}{a-1}}=\left(\dfrac{a}{a-1}\right)^a$ である．求める極限値 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{an-k}{an+a-k}$ は $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{an+a-k}{an-k}$ の逆数だから $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{an-k}{an+a-k}=\left(\dfrac{a-1}{a}\right)^a$ である.

14. (1) 第 8 回の演習問題 7 の (1) の不等式において $i=1,2,\ldots,n$ に対し, $a_i=\dfrac{1}{n}$, $x_i=f\left(a+\dfrac{i(b-a)}{n}\right)$ とすれば

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}\right)&=\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)\frac{1}{n}\right)\\ &\leqq\sum_{i=1}^{n}\varphi\left(f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\varphi\left(f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)\right)\frac{b-a}{n}\end{aligned}$$

が得られる．φ の連続性と連続関数の積分可能性から

$$\lim_{n\to\infty}\varphi\left(\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}\right)=\varphi\left(\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}\right)=\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\varphi\left(f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)\right)\frac{b-a}{n}=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\varphi\left(f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)\right)\frac{b-a}{n}=\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(f(x))dx$$

が成り立つため, 上の不等式から $\varphi\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right)\leqq\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b\varphi(f(x))dx$ が得られる.

(2) $\varphi(x)=e^x$ によって, 関数 $\varphi:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を定めれば, $\varphi''(x)=e^x>0$ だから, 教科書の定理 2.16 より, φ は凸である．(1) の結果から, $e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}\leqq\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b e^{f(x)}dx$ が得られ, この両辺の対数をとれば

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leqq\log\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b e^{f(x)}dx\right)$$

が得られる.

(3) $\varphi(x)=x^{\frac{p}{q}}$ によって, 関数 $\varphi:[0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ を定めれば, $\varphi''(x)=\dfrac{p(p-q)}{q^2}x^{\frac{p-2q}{q}}\geqq 0$ だから, 教科書の定理 2.16 より, φ は凸である. (1) の結果から, $\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b|f(x)|^q dx\right)^{\frac{p}{q}}\leqq\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b|f(x)|^p dx$ が得られ, この両辺を $\dfrac{1}{p}$ 乗すれば

$$\frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{q}}}\left(\int_a^b|f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\leqq\frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

が得られる.

15. (1) $x\in[a,b]$ に対し, $0\leqq f(x)\leqq\max(f)$ だから $f(x)^p\leqq(\max(f))^p$ である. 従って

$$\left(\int_a^b f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqq\left(\int_a^b(\max(f))^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=((b-a)(\max(f))^p)^{\frac{1}{p}}=(b-a)^{\frac{1}{p}}\max(f).$$

(2) $x\in[a,b]$ に対し, $0\leqq f(x)\leqq\max(f)$ だから, $\max(f)=0$ の場合は f はつねに値が 0 である定数値関数だから, 主張は明らかである. 従って, 以後 $\max(f)>0$ と仮定する. $F(t)=\dfrac{1}{(b-a)^{\frac{1}{t}}}\left(\displaystyle\int_a^b f(x)^t dx\right)^{\frac{1}{t}}$ によって関数 $F:(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ を定めれば, 問題 14 の (3) から, F は単調増加関数である. また, (1) の不等式から, 任意の $p>0$ に対して $F(p)\leqq\max(f)$ だから, F は上に有界である. 従って $\displaystyle\lim_{p\to\infty}F(p)$ は存在して, この値を m とおけば, $m\leqq\max(f)$ であり, $\displaystyle\lim_{p\to\infty}\left(\int_a^b f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=\lim_{p\to\infty}(b-a)^{\frac{1}{p}}F(p)=\left(\lim_{p\to\infty}(b-a)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\lim_{p\to\infty}F(p)\right)=m$ が成り立つ. ここで, $m<\max(f)$ と仮定して $f(c)=\max(f)$ を満たす $c\in[a,b]$ をとれば f の連続性から, $\delta>0$ で $c\neq b$ の場合は条件「$c-\delta\leqq x\leqq c$ ならば $f(x)>\dfrac{\max(f)+m}{2}$」を満たし, $c\neq a$ の場合は条件「$c\leqq x\leqq c+\delta$ ならば $f(x)>\dfrac{\max(f)+m}{2}$」を満たすものがある. 前者の場合は

$$\left(\int_a^b f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\geqq\left(\int_{c-\delta}^c f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\geqq\left(\int_{c-\delta}^c\left(\frac{\max(f)+m}{2}\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=\frac{\delta^{\frac{1}{p}}(\max(f)+m)}{2}$$

が得られ, 後者の場合も次の不等式が得られる.

$$\left(\int_a^b f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\geqq\left(\int_c^{c+\delta} f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\geqq\left(\int_c^{c+\delta}\left(\frac{\max(f)+m}{2}\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=\frac{\delta^{\frac{1}{p}}(\max(f)+m)}{2}$$

上の不等式で $p\to\infty$ とすれば, $\left(\displaystyle\int_a^b f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ は m に近付き, $\delta^{\frac{1}{p}}$ は 1 に近付くため, $m\geqq\dfrac{\max(f)+m}{2}$ が成り立ち, $m\geqq\max(f)$ が得られる. これは $m<\max(f)$ と仮定したことと矛盾するため, $m\geqq\max(f)$ である. 故に $m=\max(f)$ である.

(3) 正の実数 q に対し, $f_q(x)=\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{q}{p}}$ によって $f_q:[a.b]\to[0,\infty)$ を定めれば $\max(f_q)=1$ であり,

$$\left(\int_a^b f_q(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_a^b\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^q dx\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{b-a}{q+1}\right)^{\frac{1}{p}}\cdots(*)$$

が成り立つ. 正の定数 K で, $[a,b]$ で定義されたすべての連続関数 f に対して不等式 $\left(\displaystyle\int_a^b f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\geqq K\max(f)$ が成り立つようなものが存在すると仮定すれば, $f=f_{\frac{b-a}{K^p}}$ の場合, 仮定と $(*)$ から $\left(\dfrac{b-a}{\frac{b-a}{K^p}+1}\right)^{\frac{1}{p}}\geqq K$ が成り立つ. この不等式の左辺は $K\left(\dfrac{b-a}{b-a+K^p}\right)^{\frac{1}{p}}$ であるが, $\dfrac{b-a}{b-a+K^p}<1$ だから, この左辺は K より小さいので, 矛盾が生じ

る. 故に正の定数 K で, $[a,b]$ で定義されたすべての連続関数 f に対して不等式 $\left(\int_a^b f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \geqq K\max(f)$ が成り立つようなものは存在しない.

微積分学 I 演習問題　第 10 回　有理関数の積分

1. 次の関数の原始関数を求めよ．ただし (2) では $q \neq 0$, (3), (6) では $pq(p-q) \neq 0$, (5) では $pqr(p-q)(q-r)(p-r) \neq 0$, (7), (12) では $p \neq 0$, (9) では $r(p-q) \neq 0$, (10) では $p \neq 0$ または $q \neq 0$, (11) では $p \neq \pm r$ または $q \neq 0$ とする．

(1) $\dfrac{ax+b}{(x-p)(x-q)}$　(2) $\dfrac{ax+b}{(x-p)^2+q^2}$　(3) $\dfrac{ax^2+bx+c}{x(x-p)(x-q)}$　(4) $\dfrac{ax^2+bx+c}{(x-p)(x^2+q^2)}$

(5) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x(x-p)(x-q)(x-r)}$　(6) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2(x-p)(x-q)}$　(7) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2(x-p)^2}$　(8) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^3(x-p)}$

(9) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-p)(x-q)(x^2+r^2)}$　(10) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-p)^2(x^2+q^2)}$　(11) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x^2+p^2)((x-q)^2+r^2)}$　(12) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x^2+p^2)^2}$

2. 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+7}{(x+2)^2(x^2+1)}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x(x+7)}{(x+2)^2(x^2+1)}dx$　(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2-2x+2)^2}dx$　(4) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2}{x^2-4x+5}dx$

(5) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2-2}{x^2(x^2-2x+2)}dx$　(6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-2)^2(x-3)}dx$　(7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x-3)^2}dx$　(8) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2}dx$

(9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{(x+1)(x^2+1)}dx$　(10) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$　(11) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2(x+2)}dx$　(12) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2+1}{x^2-x-6}dx$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x(2x+1)}{(x^2+1)(x+1)^2}dx$ と $\dfrac{1}{2}$ の大小を判定せよ．ただし，$\pi = 3.14\cdots$, $e = 2.71\cdots$ である．

4. $\dfrac{ax^2+2bx+c}{(x^2+x+1)^2}$ の原始関数が有理関数になるための必要十分条件は $a+c=b$ であることを証明せよ．

5. (発展問題) l, m, n は 0 以上の整数で $n < m$ であるとする．

(1) $\dfrac{x^n}{x^m-1}$ を部分分数で表せ．　(2) $\dfrac{x^n}{x^m-1}$ の原始関数を求めよ．　(3) $\dfrac{x^{lm+n}}{x^m-1}$ の原始関数を求めよ．

6. (発展問題) a, m を 0 でない実数とし，f は n 回微分可能な関数であるとする．n 以下の自然数 k に対して $x^{km-1}f^{(k)}(ax^m)$ の原始関数を，f の n 次以下の導関数を用いて表せ．

7. (発展問題) 常に 0 の値をとる定数値関数とは異なる連続関数 f と 0 でない実数 λ が次の等式を満たすとき，λ と f を求めよ．

$$\lambda f(x) = \int_{-1}^1 (x-t)^2 f(t)dt$$

8. (発展問題) 関数 $f:[0,1] \to \boldsymbol{R}$ は連続で，$(0,1)$ の各点で微分可能であるとし，f の導関数 $f':(0,1) \to \boldsymbol{R}$ は有界であるとする．また，$g:\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ は周期が 1 の連続な周期関数とする．このとき次の等式が成り立つことを示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g(nx)dx = \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx$$

第 10 回の演習問題の解答

1. (1) $p \neq q$ の場合, $\dfrac{ax+b}{(x-p)(x-q)} = \dfrac{A}{x-p} + \dfrac{B}{x-q}$ とおくと, (右辺) $= \dfrac{(A+B)x - qA - pB}{(x-p)(x-q)}$ より $A+B=a$, $-qA-pB=b$. 従って $A = \dfrac{ap+b}{p-q}$, $B = -\dfrac{aq+b}{p-q}$ となるため

$$\int \frac{ax+b}{(x-p)(x-q)}\,dx = \frac{1}{p-q}\left(\int \frac{ap+b}{x-p}\,dx - \int \frac{aq+b}{x-q}\,dx\right) = \frac{(ap+b)\log|x-p| - (aq+b)\log|x-q|}{p-q}.$$

$p=q$ の場合, $\dfrac{ax+b}{(x-p)^2} = \dfrac{A}{x-p} + \dfrac{B}{(x-p)^2}$ とおくと, (右辺) $= \dfrac{Ax-pA+B}{(x-p)(x-q)}$ より $A=a$, $-pA+B=b$. 従って $A=a$, $B=ap+b$ となるため

$$\int \frac{ax+b}{(x-p)^2}\,dx = \int \frac{a}{x-p}\,dx + \int \frac{ap+b}{(x-p)^2}\,dx = a\log|x-p| - \frac{ap+b}{x-p}.$$

(2) $\displaystyle\int \frac{ax+b}{(x-p)^2+q^2}\,dx = \int \frac{a(x-p)}{(x-p)^2+q^2}\,dx + \int \frac{ap+b}{(x-p)^2+q^2}\,dx = \frac{a}{2}\log((x-p)^2+q^2) + \frac{ap+b}{q}\tan^{-1}\frac{x-p}{q}$

(3) $\dfrac{ax^2+bx+c}{x(x-p)(x-q)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-p} + \dfrac{C}{x-q}$ とおくと, 右辺は $\dfrac{(A+B+C)x^2 - ((p+q)A+qB+pC)x + pqA}{x(x-p)(x-q)}$ に等しいため, $A+B+C=a$, $(p+q)A+qB+pC=-b$, $pqA=c$ である. 従って $A = \dfrac{c}{pq}$, $B = \dfrac{ap^2+bp+c}{p(p-q)}$, $C = -\dfrac{aq^2+bq+c}{q(p-q)}$ だから, $\displaystyle\int \frac{ax^2+bx+c}{x(x-p)(x-q)}\,dx = \frac{1}{pq(p-q)}\int\left(\frac{c(p-q)}{x} + \frac{q(ap^2+bp+c)}{x-p} - \frac{p(aq^2+bq+c)}{x-q}\right)dx = \frac{1}{pq(p-q)}\big(c(p-q)\log|x| + q(ap^2+bp+c)\log|x-p| - p(aq^2+bq+c)\log|x-q|\big)$ である.

(4) $\dfrac{ax^2+bx+c}{(x-p)(x^2+q^2)} = \dfrac{A}{x-p} + \dfrac{Bx+C}{x^2+q^2}$ とおくと, 右辺は $\dfrac{(A+B)x^2 + (-pB+C)x + q^2A - pC}{(x-p)(x^2+q^2)}$ に等しいため, $A+B=a$, $-pB+C=b$, $q^2A-pC=c$ である. 従って $A = \dfrac{ap^2+bp+c}{p^2+q^2}$, $B = \dfrac{aq^2-bp-c}{p^2+q^2}$, $C = \dfrac{apq^2+bq^2-cp}{p^2+q^2}$ だから, $q \neq 0$ ならば $\displaystyle\int \frac{ax^2+bx+c}{(x-p)(x^2+q^2)}\,dx = \frac{1}{p^2+q^2}\int\left(\frac{ap^2+bp+c}{x-p} + \frac{(aq^2-bp-c)x + apq^2+bq^2-cp}{x^2+q^2}\right)dx = \frac{ap^2+bp+c}{p^2+q^2}\log|x-p| + \frac{aq^2-bp-c}{2(p^2+q^2)}\log(x^2+q^2) + \frac{apq^2+bq^2-cp}{q(p^2+q^2)}\tan^{-1}\frac{x}{q}$ である. $q=0$ の場合, $\displaystyle\int \frac{ax^2+bx+c}{x^2(x-p)}\,dx = \frac{1}{p^2}\int\left(\frac{ap^2+bp+c}{x-p} - \frac{(bp+c)x+cp}{x^2}\right)dx = a\log|x-p| + \frac{bp+c}{p^2}\log\left|1-\frac{p}{x}\right| + \frac{c}{px}$ である.

(5) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x(x-p)(x-q)(x-r)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-p} + \dfrac{C}{x-q} + \dfrac{D}{x-r}$ とおくと, この等式の右辺は

$$\frac{(A{+}B{+}C{+}D)x^3 - ((p{+}q{+}r)A{+}(q{+}r)B{+}(p{+}r)C{+}(p{+}q)D)x^2 + ((pq{+}qr{+}pr)A{+}qrB{+}prC{+}pqD)x - pqrA}{x(x{-}p)(x{-}q)(x{-}r)}$$

に等しいため, $\begin{cases} A+B+C+D=a \\ (p+q+r)A+(q+r)B+(p+r)C+(p+r)D=-b \\ (pq+qr+pr)A+qrB+prC+pqD=c \\ pqrA=-d \end{cases}$. 従って $A = -\dfrac{d}{pqr}$, $B = \dfrac{ap^3+bp^2+cp+d}{p(p-q)(p-r)}$, $C = -\dfrac{aq^3+bq^2+cq+d}{q(p-q)(q-r)}$, $D = \dfrac{ar^3+br^2+cr+d}{r(p-r)(q-r)}$ となる.

$$\begin{aligned}
\int \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x(x-p)(x-q)(x-r)}\,dx &= \int \frac{A}{x}\,dx + \int \frac{B}{x-p}\,dx + \int \frac{C}{x-q}\,dx + \int \frac{D}{x-r}\,dx \\
&= A\log|x| + B\log|x-p| + C\log|x-q| + D\log|x-r| \\
&= -\frac{d}{pqr}\log|x| + \frac{ap^3+bp^2+cp+d}{p(p-q)(p-r)}\log|x-p| - \frac{aq^3+bq^2+cq+d}{q(p-q)(q-r)}\log|x-q| + \frac{ar^3+br^2+cr+d}{r(p-r)(q-r)}\log|x-r|
\end{aligned}$$

(6) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2(x-p)(x-q)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x-p} + \dfrac{D}{x-q}$ とおくと, この等式の右辺は

$$\frac{(A+C+D)x^3 + (-(p+q)A+B-qC-pD)x^2 + (pqA-(p+q)B)x + Bpq}{x^2(x-p)(x-q)}$$

に等しいため, $\begin{cases} A+C+D=a \\ (p+q)A-B+qC+pD=-b \\ pqA-(p+q)B=c \\ pqB=d \end{cases}$. 従って $A=\dfrac{cpq+d(p+q)}{p^2q^2}$, $B=\dfrac{d}{pq}$, $C=\dfrac{ap^3+bp^2+cp+d}{p^2(p-q)}$, $D=-\dfrac{aq^3+bq^2+cq+d}{q^2(p-q)}$ となる.

$$\begin{aligned}\int\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2(x-p)(x-q)}\,dx &= \int\frac{A}{x}\,dx+\int\frac{B}{x^2}\,dx+\int\frac{C}{x-p}\,dx+\int\frac{D}{x-q}\,dx \\ &= A\log|x|-\frac{B}{x}+C\log|x-p|+D\log|x-q| \\ &= \frac{cpq+d(p+q)}{p^2q^2}\log|x|-\frac{d}{pqx}+\frac{ap^3+bp^2+cp+d}{p^2(p-q)}\log|x-p|-\frac{aq^3+bq^2+cq+d}{q^2(p-q)}\log|x-q|\end{aligned}$$

(7) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2(x-p)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-p}+\dfrac{D}{(x-p)^2}$ とおくと, この等式の右辺は

$$\frac{(A+C)x^3+(-2pA+B-pC+D)x^2+(p^2A-2pB)x+p^2B}{x^2(x-p)^2}$$

に等しいため, $\begin{cases} A+C=a \\ -2pA+B-pC+D=b \\ p^2A-2pB=c \\ p^2B=d \end{cases}$. 従って $A=\dfrac{cp+2d}{p^3}$, $B=\dfrac{d}{p^2}$, $C=\dfrac{ap^3-cp-2d}{p^3}$, $D=\dfrac{ap^3+bp^2+cp+d}{p^2}$ となる.

$$\begin{aligned}\int\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2(x-p)^2}\,dx &= \int\frac{A}{x}\,dx+\int\frac{B}{x^2}\,dx+\int\frac{C}{x-p}\,dx+\int\frac{D}{(x-p)^2}\,dx \\ &= A\log|x|-\frac{B}{x}+C\log|x-p|-\frac{D}{x-p} \\ &= \frac{cp+2d}{p^3}\log\left|\frac{x}{x-p}\right|+a\log|x-p|-\frac{d}{p^2x}-\frac{ap^3+bp^2+cp+d}{p^2(x-p)}\end{aligned}$$

(8) $p\neq 0$ の場合, $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^3(x-p)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x^3}+\dfrac{D}{x-p}$ とおくと, この等式の右辺は

$$\frac{(A+D)x^3+(-pA+B)x^2+(-pB+C)x-pC}{x^3(x-p)}$$

に等しいため, $\begin{cases} A+D=a \\ -pA+B=b \\ -pB+C=c \\ -pC=d \end{cases}$. 従って $A=-\dfrac{bp^2+cp+d}{p^3}$, $B=-\dfrac{cp+d}{p^2}$, $C=-\dfrac{d}{p}$, $D=\dfrac{ap^3+bp^2+cp+d}{p^3}$ となる.

$$\begin{aligned}\int\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^3(x-p)}\,dx &= \int\frac{A}{x}\,dx+\int\frac{B}{x^2}\,dx+\int\frac{C}{x^3}\,dx+\int\frac{D}{x-p}\,dx \\ &= A\log|x|-\frac{B}{x}-\frac{C}{2x^2}+D\log|x-p| \\ &= \frac{bp^2+cp+d}{p^3}\log\left|\frac{x-p}{x}\right|+a\log|x-p|+\frac{cp+d}{p^2x}+\frac{d}{2px^2}\end{aligned}$$

$p=0$ の場合, $\displaystyle\int\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^4}\,dx=a\log|x|-\frac{b}{x}-\frac{c}{2x^2}-\frac{d}{3x^3}$.

(9) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-p)(x-q)(x^2+r^2)}=\dfrac{A}{x-p}+\dfrac{B}{x-q}+\dfrac{Cx+D}{x^2+r^2}$ とおくと, この等式の右辺は

$$\frac{(A+B+C)x^3+(-qA-pB-(p+q)C+D)x^2+(r^2A+r^2B+pqC-(p+q)D)x-qr^2A-pr^2B+pqD}{(x-p)(x-q)(x^2+r^2)}$$

に等しいため $\begin{cases} A+B+C=a \\ -qA-pB-(p+q)C+D=b \\ r^2A+r^2B+pqC-(p+q)D=c \\ -qr^2A-pr^2B+pqD=d \end{cases}$. 従って $A=\dfrac{ap^3+bp^2+cp+d}{(p^2+r^2)(p-q)}$, $B=-\dfrac{aq^3+bq^2+cq+d}{(p-q)(q^2+r^2)}$,

$C=-\dfrac{(ar^2-c)(pq-r^2)+(br^2-d)(p+q)}{(p^2+r^2)(q^2+r^2)}$, $D=\dfrac{r^2(ar^2-c)(p+q)-(br^2-d)(pq-r^2)}{(p^2+r^2)(q^2+r^2)}$ となるため,

$$\begin{aligned}
&\int \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-p)(x-q)(x^2+r^2)}\,dx=\int\frac{A}{x-p}\,dx+\int\frac{B}{x-q}\,dx+\int\frac{Cx+D}{x^2+r^2}\,dx\\
&=A\log|x-p|+B\log|x-q|+\frac{C}{2}\log(x^2+r^2)+\frac{D}{r}\tan^{-1}\frac{x}{r}\\
&=\frac{ap^3+bp^2+cp+d}{(p-q)(p^2+r^2)}\log|x-p|-\frac{aq^3+bq^2+cq+d}{(p-q)(q^2+r^2)}\log|x-q|\\
&\quad-\frac{(ar^2-c)(pq-r^2)+(br^2-d)(p+q)}{2(p^2+r^2)(q^2+r^2)}\log(x^2+r^2)+\frac{r^2(ar^2-c)(p+q)-(br^2-d)(pq-r^2)}{r(p^2+r^2)(q^2+r^2)}\tan^{-1}\frac{x}{r}
\end{aligned}$$

(10) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-p)^2(x^2+q^2)}=\dfrac{A}{x-p}+\dfrac{B}{(x-p)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+q^2}$ とおくと,

$$(\text{右辺})=\frac{(A+C)x^3+(-pA+B-2pC+D)x^2+(q^2A+p^2C-2pD)x-pq^2A+q^2B+p^2D}{(x-p)^2(x^2+q^2)}$$

より $\begin{cases}A+C=a\\-pA+B-2pC+D=b\\q^2A+p^2C-2pD=c\\-pq^2A+q^2B+p^2D=d\end{cases}$. 従って $A=\dfrac{a(p^2+q^2)^2+(aq^2-c)(p^2-q^2)+2p(bq^2-d)}{(p^2+q^2)^2}$, $B=\dfrac{ap^3+bp^2+cp+d}{p^2+q^2}$,
$C=\dfrac{-(aq^2-c)(p^2-q^2)-2p(bq^2-d)}{(p^2+q^2)^2}$, $D=\dfrac{2pq^2(aq^2-c)-(p^2-q^2)(bq^2-d)}{(p^2+q^2)^2}$ となるため, $q\neq 0$ の場合,

$$\begin{aligned}
&\int\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-p)^2(x^2+q^2)}\,dx=\int\frac{A}{x-p}\,dx+\int\frac{B}{(x-p)^2}\,dx+\int\frac{Cx}{x^2+q^2}\,dx+\int\frac{D}{x^2+q^2}\,dx\\
&=A\log|x-p|-\frac{B}{x-p}+\frac{C}{2}\log(x^2+q^2)+\frac{D}{q}\tan^{-1}\frac{x}{q}\\
&=\frac{a(p^2+q^2)^2+(aq^2-c)(p^2-q^2)+2p(bq^2-d)}{(p^2+q^2)^2}\log|x-p|-\frac{ap^3+bp^2+cp+d}{(p^2+q^2)(x-p)}\\
&\quad-\frac{(aq^2-c)(p^2-q^2)+2p(bq^2-d)}{2(p^2+q^2)^2}\log(x^2+q^2)+\frac{2pq^2(aq^2-c)-(p^2-q^2)(bq^2-d)}{q(p^2+q^2)^2}\tan^{-1}\frac{x}{q}\\
&=a\log|x-p|+\frac{(aq^2-c)(p^2-q^2)+2p(bq^2-d)}{2(p^2+q^2)^2}\log\frac{(x-p)^2}{x^2+q^2}-\frac{ap^3+bp^2+cp+d}{(p^2+q^2)(x-p)}\\
&\quad+\frac{2pq^2(aq^2-c)-(p^2-q^2)(bq^2-d)}{q(p^2+q^2)^2}\tan^{-1}\frac{x}{q}.
\end{aligned}$$

$q=0$ の場合,

$$\begin{aligned}
\int\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2(x-p)^2}dx&=\int\frac{A}{x-p}\,dx+\int\frac{B}{(x-p)^2}\,dx+\int\frac{C}{x}\,dx+\int\frac{D}{x^2}\,dx\\
&=A\log|x-p|-\frac{B}{x-p}+C\log|x|-\frac{D}{x}\\
&=\frac{ap^3-cp-2d}{p^3}\log|x-p|-\frac{ap^3+bp^2+cp+d}{p^2(x-p)}+\frac{cp+2d}{p^3}\log|x|-\frac{d}{p^2x}\\
&=a\log|x-p|+\frac{cp+2d}{p^3}\log\left|\frac{x}{x-p}\right|-\frac{ap^3+bp^2+cp+d}{p^2(x-p)}-\frac{d}{p^2x}.
\end{aligned}$$

(11) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x^2+p^2)((x-q)^2+r^2)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+p^2}+\dfrac{C(x-q)+D}{(x-q)^2+r^2}$ とおくと,

$$(\text{右辺})=\frac{(A+C)x^3+(-2qA+B-qC+D)x^2+((q^2+r^2)A-2qB+p^2C)x+(q^2+r^2)B-p^2qC+p^2D}{(x^2+p^2)((x-q)^2+r^2)}$$

より $\begin{cases}A+C=a\\-2qA+B-qC+D=b\\(q^2+r^2)A-2qB+p^2C=c\\(q^2+r^2)B-p^2qC+p^2D=d\end{cases}$. 従って
$A=\dfrac{(ap^2-c)(p^2-q^2-r^2)-2q(bp^2-d)}{((p+r)^2+q^2)((p-r)^2+q^2)}$, $B=\dfrac{2p^2q(ap^2-c)+(bp^2-d)(p^2-q^2-r^2)}{((p+r)^2+q^2)((p-r)^2+q^2)}$,

$$C=\frac{a((p+r)^2+q^2)((p-r)^2+q^2)-(ap^2-c)(p^2-q^2-r^2)+2q(bp^2-d)}{((p+r)^2+q^2)((p-r)^2+q^2)},$$
$$D=\frac{aq(p^2(q^2-3r^2)+(q^2+r^2)^2)+b(p^2(q^2-r^2)+(q^2+r^2)^2)+cq(p^2+q^2+r^2)+d(p^2+q^2-r^2)}{((p+r)^2+q^2)((p-r)^2+q^2)}$$ となるため,

$$\begin{aligned}
&\int\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x^2+p^2)((x-q)^2+r^2)}\,dx=\int\frac{Ax+B}{x^2+p^2}\,dx+\int\frac{C(x-q)+D}{(x-q)^2+r^2}\,dx\\
&=\frac{A}{2}\log(x^2+p^2)+\frac{B}{p}\tan^{-1}\frac{x}{p}+\frac{C}{2}\log((x-q)^2+r^2)+\frac{D}{r}\tan^{-1}\frac{x-q}{r}\\
&=\frac{(ap^2-c)(p^2-q^2-r^2)-2q(bp^2-d)}{2((p+r)^2+q^2)((p-r)^2+q^2)}\log(x^2+p^2)+\frac{2p^2q(ap^2-c)+(bp^2-d)(p^2-q^2-r^2)}{p((p+r)^2+q^2)((p-r)^2+q^2)}\tan^{-1}\frac{x}{p}\\
&\quad+\frac{a((p+r)^2+q^2)((p-r)^2+q^2)-(ap^2-c)(p^2-q^2-r^2)+2q(bp^2-d)}{2((p+r)^2+q^2)((p-r)^2+q^2)}\log((x-q)^2+r^2)+\\
&\quad+\frac{aq(p^2(q^2-3r^2)+(q^2+r^2)^2)+b(p^2(q^2-r^2)+(q^2+r^2)^2)+cq(p^2+q^2+r^2)+d(p^2+q^2-r^2)}{r((p+r)^2+q^2)((p-r)^2+q^2)}\tan^{-1}\frac{x-q}{r}\\
&=\frac{(ap^2-c)(p^2-q^2-r^2)-2q(bp^2-d)}{2((p+r)^2+q^2)((p-r)^2+q^2)}\log\frac{x^2+p^2}{((x-q)^2+r^2)}+\frac{a}{2}\log((x-q)^2+r^2)\\
&\quad+\frac{2p^2q(ap^2-c)+(bp^2-d)(p^2-q^2-r^2)}{p((p+r)^2+q^2)((p-r)^2+q^2)}\tan^{-1}\frac{x}{p}\\
&\quad+\frac{aq(p^2(q^2-3r^2)+(q^2+r^2)^2)+b(p^2(q^2-r^2)+(q^2+r^2)^2)+cq(p^2+q^2+r^2)+d(p^2+q^2-r^2)}{r((p+r)^2+q^2)((p-r)^2+q^2)}\tan^{-1}\frac{x-q}{r}
\end{aligned}$$

(12) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x^2+p^2)^2}=\dfrac{Ax+B}{x^2+p^2}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+p^2)^2}$ とおくと,

$$(\text{右辺})=\frac{Ax^3+Bx^2+(p^2A+C)x+p^2B+D}{(x^2+p^2)^2}$$

より $A=a$, $B=b$, $C=c-ap^2$, $D=d-bp^2$ である. 従って教科書の問 3.10 の結果から

$$\begin{aligned}
\int\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x^2+p^2)^2}\,dx&=\int\frac{ax}{x^2+p^2}\,dx+\int\frac{b}{x^2+p^2}\,dx+\int\frac{(c-ap^2)x}{(x^2+p^2)^2}\,dx+\int\frac{d-bp^2}{(x^2+p^2)^2}\,dx\\
&=\frac{a}{2}\log(x^2+p^2)-\frac{c-ap^2}{2(x^2+p^2)}+\frac{(d-bp^2)x}{2p^2(x^2+p^2)}+\frac{d+bp^2}{2p^3}\tan^{-1}\frac{x}{p}
\end{aligned}$$

2. (1) $\dfrac{x+7}{(x+2)^2(x^2+1)}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{(x+2)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ とおくと,
(右辺) $=\dfrac{(A+C)x^3+(2A+B+4C+D)x^2+(A+4C+4D)x+2A+B+4D}{(x+2)^2(x^2+1)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+C=0\\2A+B+4C+D=0\\A+4C+4D=1\\2A+B+4D=7\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=B=D=1$, $C=-1$. 従って, $\displaystyle\int_0^1\frac{x+7}{(x+2)^2(x^2+1)}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{-x+1}{x^2+1}\right)dx=$ $\displaystyle\left[\log|x+2|-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}\log(x^2+1)+\tan^{-1}x\right]_0^1=\log 3-\frac{3}{2}\log 2+\frac{1}{6}+\frac{\pi}{4}$

(2) $\dfrac{x(x+7)}{(x+2)^2(x^2+1)}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{(x+2)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ とおくと,
(右辺) $=\dfrac{(A+C)x^3+(2A+B+4C+D)x^2+(A+4C+4D)x+2A+B+4D}{(x+2)^2(x^2+1)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+C=0\\2A+B+4C+D=1\\A+4C+4D=7\\2A+B+4D=0\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=-1$, $B=-2$, $C=1$, $D=1$. 従って, $\displaystyle\int_0^1\frac{x(x+7)}{(x+2)^2(x^2+1)}dx=\int_0^1\left(\frac{-1}{x+2}+\frac{-2}{(x+2)^2}+\frac{x+1}{x^2+1}\right)dx=$ $\displaystyle\left[-\log|x+2|+\frac{2}{x+2}+\frac{1}{2}\log(x^2+1)+\tan^{-1}x\right]_0^1=\frac{3}{2}\log 2-\log 3-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}$

(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{(x^2-2x+2)^2}dx=\int_0^1\frac{x^2-2x+2+2x-2}{(x^2-2x+2)^2}dx=\int_0^1\frac{1}{(x-1)^2+1}dx+\int_0^1\frac{2x-2}{(x^2-2x+2)^2}dx=$ $\displaystyle[\tan^{-1}(x-1)]_0^1+\left[-\frac{1}{x^2-2x+2}\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

(4) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2}{x^2-4x+5}dx = \int_1^3 \left(1+\frac{4x-5}{x^2-4x+5}\right)dx = \int_1^3 \left(1+\frac{4x-8}{x^2-4x+5}+\frac{3}{(x-2)^2+1}\right)dx =$
$\left[x+2\log(x^2-4x+5)+3\tan^{-1}(x-2)\right]_1^3 = 2+\dfrac{3\pi}{2}$

(5) $\dfrac{2x^2-2}{x^2(x^2-2x+2)} = \dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2-2x+2}$ とおくと,
(右辺) $= \dfrac{(A+C)x^3+(-2A+B+D)x^2+(2A-2B)x+B}{x^2(x^2-2x+2)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix} A+C=0 \\ -2A+B+D=2 \\ 2A-2B=0 \\ 2B=-2 \end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=B=-1$, $C=D=1$. 従って, $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2-2}{x^2(x^2-2x+2)}dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{x+1}{(x-1)^2+1}\right)dx =$
$\displaystyle\int_1^2 \left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{x-1}{(x-1)^2+1}+\frac{2}{(x-1)^2+1}\right)dx = \left[-\log x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\log((x-1)^2+1)+2\tan^{-1}(x-1)\right]_1^2 =$
$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\log 2}{2}-\dfrac{1}{2}$.

(6) $\dfrac{1}{(x-2)^2(x-3)} = \dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x-2)^2}+\dfrac{C}{x-3}$ とおくと,
(右辺) $= \dfrac{(A+C)x^2+(-5A+B-4C)x+6A-3B+4C}{(x-2)^2(x-3)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix} A+C=0 \\ -5A+B-4C=0 \\ 6A-3B+4C=1 \end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=B=-1$, $C=1$. 従って, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-2)^2(x-3)}dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{x-3}\right)dx = \left[-\log|x-2|+\frac{1}{x-2}+\log|x-3|\right]_0^1 =$
$2\log 2-\log 3-\dfrac{1}{2}$.

(7) $\dfrac{1}{(x-2)(x-3)^2} = \dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{(x-3)^2}+\dfrac{C}{x-2}$ とおくと,
(右辺) $= \dfrac{(A+C)x^2+(-5A+B-6C)x+6A-2B+9C}{(x-2)^2(x-3)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix} A+C=0 \\ -5A+B-6C=0 \\ 6A-2B+9C=1 \end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=-1$, $B=C=1$. 従って, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x-3)^2}dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{1}{x-2}\right)dx = \left[-\log|x-3|-\frac{1}{x-3}+\log|x-2|\right]_0^1 =$
$\log 3-2\log 2+\dfrac{1}{6}$.

(8) $\dfrac{1}{x(x+1)^2} = \dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$ とおくと, (右辺) $= \dfrac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(x+1)^2}$ より $\left\{\begin{smallmatrix} A+B=0 \\ 2A+B+C=0 \\ A=1 \end{smallmatrix}\right.$.
これを解けば, $A=1$, $B=C=-1$. 従って, $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2}dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx =$
$\left[\log x-\log(x+1)+\dfrac{1}{x+1}\right]_1^2 = 2\log 2-\log 3-\dfrac{1}{6}$.

(9) $\dfrac{4}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ とおくと,
(右辺) $= \dfrac{(A+B)x^2+(B+C)x+A+C}{(x+1)(x^2+1)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=4 \end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=2$, $B=-2$, $C=2$. 従って,
$\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{(x+1)(x^2+1)}dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{x+1}-\frac{2x}{x^2+1}+\frac{2}{x^2+1}\right)dx = \left[2\log(x+1)-\log(x^2+1)+2\tan^{-1}x\right]_0^1 = \log 2+\frac{\pi}{2}$.

(10) $\dfrac{4x+2}{(x+1)^2(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ とおくと,
(右辺) $= \dfrac{(A+C)x^3+(A+B+2C+D)x^2+(A+C+2D)x+A+B+D}{(x+1)^2(x^2+1)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix} A+C=0 \\ A+B+2C+D=0 \\ A+C+2D=4 \\ A+B+D=2 \end{smallmatrix}\right.$. これを解けば,
$A=1$, $B=C=-1$, $D=2$. 従って, $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{-x+2}{x^2+1}\right)dx =$
$\left[\log|x+1|+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\log(x^2+1)+2\tan^{-1}x\right]_0^1 = \dfrac{\log 2}{2}+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}$

(11) $\dfrac{1}{(x+1)^2(x+2)} = \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{C}{x+2}$ とおくと,
(右辺) $= \dfrac{(A+C)x^2+(3A+B+2C)x+2A+2B+C}{(x+1)^2(x+2)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix} A+C=0 \\ 3A+B+2C=0 \\ 2A+2B+C=1 \end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=-1$, $B=C=1$.
従って, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2(x+2)}dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+2}\right)dx = \left[-\log|x+1|-\frac{1}{x+1}+\log|x+2|\right]_0^1 =$

$\dfrac{1}{2}+\log 3-2\log 2$.

(12) $\dfrac{x^2+1}{x^2-x-6}=1+\dfrac{x+7}{x^2-x-6}$ であり, $x^2-x+6=(x-3)(x+2)$ だから $\dfrac{x+7}{x^2-x-6}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x+2}$ とおけば, (右辺) $=\dfrac{(A+B)x+2A-3B}{x^2-x-6}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+B=1\\2A-3B=7\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=2$, $B=-1$.

従って $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{x^2-x-6}dx=\int_{-1}^{1}\left(1+\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)dx=[x+2\log|x-3|-\log|x+2|]_{-1}^{1}=2-2\log 2-\log 3$.

3. $\dfrac{2x(2x+1)}{(x^2+1)(x+1)^2}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ とおくと,

(右辺) $=\dfrac{(A+C)x^3+(A+B+2C+D)x^2+(A+C+2D)x+A+B+D}{(x^2+1)(x+1)^2}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+C=0\\A+B+2C+D=4\\A+C+2D=2\\A+B+D=0\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=-2$, $B=1$, $C=2$, $D=1$. 従って, $\displaystyle\int\frac{2x(2x+1)}{(x^2+1)(x+1)^2}dx=\int\left(\frac{-2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2x+1}{x^2+1}\right)dx=$ $-2\log|x+1|-\dfrac{1}{x+1}+\log(x^2+1)+\tan^{-1}x$ である. 故に $\displaystyle\int_0^1\frac{2x(2x+1)}{(x^2+1)(x+1)^2}dx=$ $\left[-2\log|x+1|-\dfrac{1}{x+1}+\log(x^2+1)+\tan^{-1}x\right]_0^1=\dfrac{\pi}{4}-\log 2+\dfrac{1}{2}$ だから $\log 2$ と $\dfrac{\pi}{4}$ の大小を比較すればよい. $\log 2$ と $\dfrac{\pi}{4}$ の大小関係と $4\log 2=\log 16$ と π の大小関係は同じで, e^x は単調増加関数だから $\log 16$ と π の大小関係と $e^{\log 16}=16$ と e^π の大小関係は同じである. $\pi>3$, $e>2.7$ より $e^\pi>e^3>(2.7)^3=19.683>16$ であるため, $\dfrac{\pi}{4}>\log 2$. 従って $\displaystyle\int_0^1\frac{2x(2x+1)}{(x^2+1)(x+1)^2}dx>\frac{1}{2}$ である.

4. $y=x+\dfrac{1}{2}$ とおけば $\dfrac{ax^2+2bx+c}{(x^2+x+1)^2}=\dfrac{ay^2-(a-2b)y+\frac{a}{4}-b+c}{\left(y^2+\frac{3}{4}\right)^2}$ であり, この右辺が $\dfrac{Ay+B}{y^2+\frac{3}{4}}+\dfrac{Cy+D}{\left(y^2+\frac{3}{4}\right)^2}$ に等しいとすれば $ay^2-(a-2b)y+\dfrac{a}{4}-b+c=Ay^3+By^2+\left(\dfrac{3}{4}A+C\right)y+\dfrac{3}{4}B+D$ が成り立つため, $A=0$, $B=a$, $C=-a+2b$, $D=-\dfrac{a}{2}-b+c$ である. $\dfrac{1}{y^2+\frac{3}{4}}$, $\dfrac{y}{\left(y^2+\frac{3}{4}\right)^2}$, $\dfrac{1}{\left(y^2+\frac{3}{4}\right)^2}$ の原始関数はそれぞれ, $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2y}{\sqrt{3}}$, $-\dfrac{1}{2\left(y^2+\frac{3}{4}\right)}$, $\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2y}{\sqrt{3}}+\dfrac{y}{y^2+\frac{3}{4}}\right)$ だから, $\dfrac{ay^2-(a-2b)y+\frac{a}{4}-b+c}{\left(y^2+\frac{3}{4}\right)^2}$ の原始関数は $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2y}{\sqrt{3}}+$ $\dfrac{a-2b}{2\left(y^2+\frac{3}{4}\right)}+\dfrac{-a-2b+2c}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2y}{\sqrt{3}}+\dfrac{y}{y^2+\frac{3}{4}}\right)=\dfrac{4(a-b+c)}{3\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2y}{\sqrt{3}}-\dfrac{2(a+2b-2c)y-3a+6b}{6\left(y^2+\frac{3}{4}\right)}$ である. 従って $\dfrac{ax^2+2bx+c}{(x^2+x+1)^2}$ の原始関数は $\dfrac{4(a-b+c)}{3\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}-\dfrac{(a+2b-2c)x-a+4b-c}{3\left(y^2+\frac{3}{4}\right)}$ であり, この関数が有理関数であるためには $a-b+c=0$ であることが必要十分である.

5. (1) $\zeta=\cos\dfrac{2\pi}{m}+i\sin\dfrac{2\pi}{m}$ とおけば, $x^m-1=(x-1)(x-\zeta)(x-\zeta^2)\cdots(x-\zeta^{m-1})=\prod\limits_{j=0}^{m-1}(x-\zeta^j)$ である. 一方, $x^m-1=(x-1)\sum\limits_{k=0}^{m-1}x^k$ より, $\prod\limits_{j=1}^{m-1}(x-\zeta^j)=\sum\limits_{k=0}^{m-1}x^k$ だから, x に 1 を代入すれば $\prod\limits_{j=1}^{m-1}(1-\zeta^j)=m$ が得られる. $\dfrac{x^n}{x^m-1}=\sum\limits_{j=0}^{m-1}\dfrac{A_j}{x-\zeta^j}$ とおけば, $x^n=\sum\limits_{j=0}^{m-1}A_j\prod\limits_{k=0}^{j-1}(x-\zeta^k)\prod\limits_{k=j+1}^{m-1}(x-\zeta^k)$ だから, この等式の x に ζ^j を代入すれば

$$\begin{aligned}\zeta^{jn}&=A_j\prod_{k=0}^{j-1}(\zeta^j-\zeta^k)\prod_{k=j+1}^{m-1}(\zeta^j-\zeta^k)=\zeta^{j(m-1)}A_j\prod_{k=0}^{j-1}(1-\zeta^{k-j})\prod_{k=j+1}^{m-1}(1-\zeta^{k-j})\\&=\zeta^{-j}A_j\prod_{k=-j}^{-1}(1-\zeta^k)\prod_{k=1}^{m-j-1}(1-\zeta^k)=\zeta^{-j}A_j\prod_{k=m-j}^{m-1}(1-\zeta^k)\prod_{k=1}^{m-j-1}(1-\zeta^k)=\zeta^{-j}A_j\prod_{k=1}^{m-1}(1-\zeta^k)=m\zeta^{-j}A_j\end{aligned}$$

が得られる. 従って $A_j = \dfrac{\zeta^{j(n+1)}}{m}$ である. $\zeta^j = \cos\dfrac{2\pi j}{m} + i\sin\dfrac{2\pi j}{m}$, $\zeta^m = 1$ だから, 次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}\frac{A_j}{x-\zeta^j} + \frac{A_{m-j}}{x-\zeta^{m-j}} &= \frac{(\zeta^{j(n+1)} + \zeta^{(m-j)(n+1)})x - \zeta^{m+jn} - \zeta^{mn+m-jn}}{m(x-\zeta^j)(x-\zeta^{m-j})} \\ &= \frac{(\zeta^{j(n+1)} + \zeta^{-j(n+1)})x - \zeta^{jn} - \zeta^{-jn}}{m(x-\zeta^j)(x-\zeta^{-j})} = \frac{2\cos\frac{2\pi j(n+1)}{m}x - 2\cos\frac{2\pi jn}{m}}{m\bigl(x^2 - 2\cos\frac{2\pi j}{m}x + 1\bigr)}\end{aligned}$$

m が奇数の場合, $\dfrac{x^n}{x^m-1} = \dfrac{A_0}{x-1} + \sum_{j=1}^{\frac{m-1}{2}}\left(\dfrac{A_j}{x-\zeta^j} + \dfrac{A_{m-j}}{x-\zeta^{m-j}}\right) = \dfrac{1}{m(x-1)} + \dfrac{2}{m}\sum_{j=1}^{\frac{m-1}{2}}\dfrac{\cos\frac{2\pi j(n+1)}{m}x - \cos\frac{2\pi jn}{m}}{x^2 - 2\cos\frac{2\pi j}{m}x + 1}$ であり, m が偶数の場合は $A_{\frac{m}{2}} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{m}$ であることに注意すれば

$$\frac{x^n}{x^m-1} = \frac{A_0}{x-1} + \frac{A_{\frac{m}{2}}}{x+1} + \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{A_j}{x-\zeta^j} + \frac{A_{m-j}}{x-\zeta^{m-j}}\right) = \frac{1}{m(x-1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{m(x+1)} + \frac{2}{m}\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1}\frac{\cos\frac{2\pi j(n+1)}{m}x - \cos\frac{2\pi jn}{m}}{x^2 - 2\cos\frac{2\pi j}{m}x + 1}$$

が得られる.

(2) $\dfrac{\cos\frac{2\pi j(n+1)}{m}x - \cos\frac{2\pi jn}{m}}{x^2 - 2\cos\frac{2\pi j}{m}x + 1} = \dfrac{\cos\frac{2\pi j(n+1)}{m}\left(x - \cos\frac{2\pi j}{m}\right) + \cos\frac{2\pi j}{m}\cos\frac{2\pi j(n+1)}{m} - \cos\frac{2\pi jn}{m}}{\left(x - \cos\frac{2\pi j}{m}\right)^2 + \sin^2\frac{2\pi j}{m}}$ であり,

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi j}{m}\cos\frac{2\pi j(n+1)}{m} - \cos\frac{2\pi jn}{m} &= \cos\left(\frac{2\pi j(n+1)}{m} - \frac{2\pi j}{m}\right) - \sin\frac{2\pi j}{m}\sin\frac{2\pi j(n+1)}{m} - \cos\frac{2\pi jn}{m} \\ &= -\sin\frac{2\pi j}{m}\sin\frac{2\pi j(n+1)}{m}\end{aligned}$$

だから, $y = x - \cos\dfrac{2\pi j}{m}$ とおけば,

$$\begin{aligned}&\int\frac{\cos\frac{2\pi j(n+1)}{m}x - \cos\frac{2\pi jn}{m}}{x^2 - 2\cos\frac{2\pi j}{m}x + 1}\,dx = \int\frac{\cos\frac{2\pi j(n+1)}{m}y - \sin\frac{2\pi j}{m}\sin\dfrac{2\pi j(n+1)}{m}}{y^2 + \sin^2\frac{2\pi j}{m}}dy \\ &= \int\frac{\cos\frac{2\pi j(n+1)}{m}y}{y^2 + \sin^2\frac{2\pi j}{m}}dy - \int\frac{\sin\frac{2\pi j}{m}\sin\frac{2\pi j(n+1)}{m}}{y^2 + \sin^2\frac{2\pi j}{m}}dy \\ &= \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi j(n+1)}{m}\log\left(y^2 + \sin^2\frac{2\pi j}{m}\right) - \sin\frac{2\pi j(n+1)}{m}\tan^{-1}\left(\frac{y}{\sin\frac{2\pi j}{m}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi j(n+1)}{m}\log\left(x^2 - 2\cos\frac{2\pi j}{m}x + 1\right) - \sin\frac{2\pi j(n+1)}{m}\tan^{-1}\left(\frac{x - \cos\frac{2\pi j}{m}}{\sin\frac{2\pi j}{m}}\right)\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って (1) の結果から, $\dfrac{x^n}{x^m-1}$ の原始関数は以下で与えられる.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^n}{x^{2k+1}-1}\,dx &= \int \frac{1}{(2k+1)(x-1)}\,dx + \frac{2}{2k+1}\sum_{j=1}^{k}\int \frac{\cos\frac{2\pi j(n+1)}{2k+1}x - \cos\frac{2\pi jn}{2k+1}}{x^2-2\cos\frac{2\pi j}{2k+1}x+1}\,dx \\ &= \frac{\log|x-1|}{2k+1} + \frac{1}{2k+1}\sum_{j=1}^{k}\cos\frac{2\pi j(n+1)}{2k+1}\log\left(x^2-2\cos\frac{2\pi j}{2k+1}x+1\right) \\ &\quad - \frac{2}{2k+1}\sum_{j=1}^{k}\sin\frac{2\pi j(n+1)}{2k+1}\tan^{-1}\left(\frac{x-\cos\frac{2\pi j}{m}}{\sin\frac{2\pi j}{m}}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^n}{x^{2k}-1}\,dx &= \int \frac{1}{2k(x-1)}\,dx + \int \frac{(-1)^{n+1}}{2k(x+1)}\,dx + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1}\int \frac{\cos\frac{\pi j(n+1)}{k}x - \cos\frac{\pi jn}{k}}{x^2-2\cos\frac{\pi j}{k}x+1}dx \\ &= \frac{\log|x-1|}{2k} + \frac{(-1)^{n+1}\log|x+1|}{2k} + \frac{1}{2k}\sum_{j=1}^{k-1}\cos\frac{\pi j(n+1)}{k}\log\left(x^2-2\cos\frac{\pi j}{k}x+1\right) \\ &\quad - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1}\sin\frac{\pi j(n+1)}{k}\tan^{-1}\left(\frac{x-\cos\frac{2\pi j}{m}}{\sin\frac{2\pi j}{m}}\right)\end{aligned}$$

(3) $I_k = \displaystyle\int \frac{x^k}{x^m-1}\,dx$ とおくと, $k \geqq m$ ならば $I_k = \displaystyle\int \frac{x^{k-m}(x^m-1)+x^{k-m}}{x^m-1}\,dx = \frac{x^{k-m+1}}{k-m+1} + I_{k-m}$ だから,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{lm+n}}{x^m-1}\,dx &= I_{lm+n} = \frac{x^{(l-1)m+n+1}}{(l-1)m+n+1} + I_{(l-1)m+n} \\ &= \frac{x^{(l-1)m+n+1}}{(l-1)m+n+1} + \frac{x^{(l-2)m+n+1}}{(l-2)m+n+1} + I_{(l-2)m+n} = \cdots = \sum_{i=0}^{l-1}\frac{x^{im+n+1}}{im+n+1} + I_n\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って (2) の結果から, 以下の結果が得られる.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{l(2k+1)+n}}{x^{2k+1}-1}\,dx &= \sum_{i=0}^{l-1}\frac{x^{i(2k+1)+n+1}}{i(2k+1)+n+1} + \frac{\log|x-1|}{2k+1} + \frac{1}{2k+1}\sum_{j=1}^{k}\cos\frac{2\pi j(n+1)}{2k+1}\log\left(x^2-2\cos\frac{2\pi j}{2k+1}x+1\right) \\ &\quad - \frac{2}{2k+1}\sum_{j=1}^{k}\sin\frac{2\pi j(n+1)}{2k+1}\tan^{-1}\left(\frac{x-\cos\frac{2\pi j}{m}}{\sin\frac{2\pi j}{m}}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{2kl+n}}{x^{2k}-1}\,dx &= \sum_{i=0}^{l-1}\frac{x^{2ik+n+1}}{2ik+n+1} + \frac{\log|x-1|}{2k} + \frac{(-1)^{n+1}\log|x+1|}{2k} \\ &\quad + \frac{1}{2k}\sum_{j=1}^{k-1}\cos\frac{\pi j(n+1)}{k}\log\left(x^2-2\cos\frac{\pi j}{k}x+1\right) - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1}\sin\frac{\pi j(n+1)}{k}\tan^{-1}\left(\frac{x-\cos\frac{2\pi j}{m}}{\sin\frac{2\pi j}{m}}\right)\end{aligned}$$

6. $I_k = \displaystyle\int x^{km-1}f^{(k)}(ax^m)dx$ とおけば, $I_1 = \displaystyle\int x^{m-1}f'(ax^m)dx = \frac{1}{am}f(ax^m)$ であり, $k \geqq 2$ ならば部分積分法により $I_k = \displaystyle\int x^{(k-1)m}\left(\frac{1}{am}f^{(k-1)}(ax^m)\right)'dx = \frac{x^{(k-1)m}}{am}f^{(k-1)}(ax^m) - \int \frac{k-1}{a}x^{(k-1)m-1}f^{(k-1)}(ax^m)dx =$ $\dfrac{x^{(k-1)m}}{am}f^{(k-1)}(ax^m) - \dfrac{k-1}{a}I_{k-1}$ だから $I_k = \dfrac{x^{(k-1)m}}{am}f^{(k-1)}(ax^m) - \dfrac{k-1}{a}I_{k-1}$ である. $J_k = \begin{cases}\frac{(-a)^kI_k}{(k-1)!} & 1 \leqq k \leqq n \\ 0 & k=0\end{cases}$ とおけば, 上式から $J_k - J_{k-1} = \dfrac{-(-a)^{k-1}x^{(k-1)m}}{m(k-1)!}f^{(k-1)}(ax^m)$ だから $J_k = -\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{(-a)^{i-1}x^{(i-1)m}}{m(i-1)!}f^{(i-1)}(ax^m)$ が得られる. 従って $I_k = \dfrac{(k-1)!}{(-a)^k}J_k = \sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{(-1)^{k-i}(k-1)!x^{(i-1)m}}{a^{k-i+1}m(i-1)!}f^{(i-1)}(ax^m)$ である.

7. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x-t)^2f(t)dt = x^2\int_{-1}^{1}f(t)dt - 2x\int_{-1}^{1}tf(t)dt + \int_{-1}^{1}t^2f(t)dt$ より $a = \displaystyle\int_{-1}^{1}f(t)dt$, $b = \displaystyle\int_{-1}^{1}tf(t)dt$,

$c=\displaystyle\int_{-1}^{1} t^2 f(t)dt$ とおくと, 仮定から $\lambda f(x)=ax^2-2bx+c$ である. $\lambda\neq 0$ ならば $f(x)=\dfrac{a}{\lambda}x^2-\dfrac{2b}{\lambda}x+\dfrac{c}{\lambda}$ となるため, $a=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{a}{\lambda}t^2-\frac{2b}{\lambda}t+\frac{c}{\lambda}\right)dt=\frac{2a}{3\lambda}+\frac{2c}{\lambda}$ より $c=\left(\dfrac{\lambda}{2}-\dfrac{1}{3}\right)a$, $b=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{a}{\lambda}t^3-\frac{2b}{\lambda}t^2+\frac{c}{\lambda}t\right)dt=-\frac{4b}{3\lambda}$ より $(3\lambda+4)b=0$, $c=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{a}{\lambda}t^4-\frac{2b}{\lambda}t^3+\frac{c}{\lambda}t^2\right)dt=\frac{2a}{5\lambda}+\frac{2c}{3\lambda}$ より $-6a+(15\lambda-10)c=0$ が得られる.

$c=\left(\dfrac{\lambda}{2}-\dfrac{1}{3}\right)a$ を $-6a+(15\lambda-10)c=0$ に代入すると $(45\lambda^2-60\lambda-16)a=0$ となるため $a=0$ または $\lambda=\dfrac{2}{3}\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ である. $a=0$ の場合は $c=\left(\dfrac{\lambda}{2}-\dfrac{1}{3}\right)a$ から $c=0$ であるため, f についての仮定から $b\neq 0$ である. このとき, $(3\lambda+4)b=0$ から $\lambda=-\dfrac{4}{3}$ である. $\lambda=\dfrac{2}{3}\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ の場合は $c=\left(\dfrac{\lambda}{2}-\dfrac{1}{3}\right)a$ から $c=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}a$ であり, $(3\lambda+4)b=0$ から $b=0$ である. 以上から, C を 0 でない任意定数とすると「$\lambda=-\dfrac{4}{3}$, $f(x)=Cx$」または「$\lambda=\dfrac{2}{3}\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $f(x)=C\left(x^2\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$ (複号同順)」が求めるものである.

8. $\displaystyle\int_0^1 f(x)g(nx)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)g(nx)dx$ であり, $y=nx$ とおいて $\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)g(nx)dx$ の置換積分を考えると $\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)g(nx)dx=\int_{k-1}^{k}\frac{1}{n}f\left(\frac{y}{n}\right)g(y)dy$ である. 従って

$$\int_0^1 f(x)g(nx)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{n}f\left(\frac{y}{n}\right)g(y)dy \ \cdots\ (1)$$

が成り立つ. 一方 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ であることと, g の周期性から $y=x+k-1$ とおいて置換積分すれば, $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx=\int_{k-1}^{k} g(y)dy$ が成り立つことから

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx&=\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\int_0^1 g(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\int_0^1 g(x)dx\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\int_{k-1}^{k} g(y)dy=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)g(y)dy.\end{aligned}$$

故に

$$\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)g(y)dy \ \cdots\ (2)$$

が成り立つ. $f':(0,1)\to\boldsymbol{R}$ は有界であるという仮定から, 正の実数 K で, すべての $x\in(0,1)$ に対して $|f'(x)|\leqq K$ を満たすものがある. $y\in[k-1,k]$ に対し, 平均値の定理から $f\left(\dfrac{y}{n}\right)-f\left(\dfrac{k}{n}\right)=\left(\dfrac{y}{n}-\dfrac{k}{n}\right)f'(\xi)$ を満たす $\dfrac{k-1}{n}<\xi<\dfrac{k}{n}$ がある. 従って $y\in[k-1,k]$ ならば $\left|f\left(\dfrac{y}{n}\right)-f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right|\leqq\dfrac{K(k-y)}{n}\leqq\dfrac{K}{n}$ が成り立つ. この不等式と, $\displaystyle\int_{k-1}^{k}|g(y)|dy=\int_0^1|g(x)|dx$ を用いると

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{n}f\left(\frac{y}{n}\right)g(y)dy-\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)g(y)dy\right|&\leqq\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{n}\left|f\left(\frac{y}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right||g(y)|dy\\&\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{K}{n^2}\int_{k-1}^{k}|g(y)|dy=\sum_{k=1}^{n}\frac{K}{n^2}\int_0^1|g(y)|dy=\frac{K}{n}\int_0^1|g(x)|dx\end{aligned}$$

となる．故に (1) から

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(x)g(nx)dx - \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx\right| &\leqq \left|\sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{n} f\left(\frac{y}{n}\right) g(y)dy - \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) g(y)dy\right| \\
&\quad + \left|\sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) g(y)dy - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx\right| \\
&\leqq \frac{K}{n}\int_0^1 |g(x)|dx + \left|\sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) g(y)dy - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx\right|
\end{aligned}
$$

となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{K}{n}\int_0^1 g(x)dx = 0$ と (2) から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)dx = \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx$ が得られる．

微積分学 I 演習問題　第 11 回　三角関数と無理関数の積分

1. 次の関数の原始関数を求めよ. ただし, (19) の n は 0 以上の整数, (23) と (24) の n は自然数とする.

(1) $\dfrac{3}{\tan x(2+\cos^2 x)}$　(2) $\dfrac{2-\sin x}{2+\cos x}$　(3) $\dfrac{1}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$　(4) $\dfrac{2}{4\cos^2 x+\tan x-3}$

(5) $\dfrac{3\tan x-5}{\tan x+2\cos^2 x}$　(6) $\dfrac{\tan x}{a-\cos^2 x}$　(7) $\dfrac{\cos^2 x}{a-\cos^2 x}$　(8) $\dfrac{2\tan^2 x}{2\tan x-2\sin^2 x-1}$

(9) $\dfrac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$　(10) $\dfrac{\sin nx}{\sin x}$　(11) $\dfrac{1}{\sin^2 x(1+\tan x)}$　(12) $\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)(3-\sin x+2\cos x)}$

(13) $\dfrac{1}{a\cos x+b\sin x+c}$　(14) $\dfrac{x}{1+\cos x}$　(15) $\dfrac{\cos x}{a\cos x+b\sin x+c}$　(16) $\dfrac{2x\sin x\cos x}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2}$

(17) $\dfrac{\sqrt{\cos x\sin x}}{\cos x+\sin x}$　(18) $\dfrac{x}{1+\sin x}$　(19) $\dfrac{\cos^m x\sin^n x}{(\cos x+\sin x)^{m+n+2}}$　(20) $\dfrac{\tan x}{a\cos x+b\sin x+c}$

(21) $\sqrt{\tan x}$　(22) $\dfrac{1}{\sqrt{\tan x}}$　(23) $\dfrac{\tan^{-1} x}{x^{2n}}$　(24) $\dfrac{\tan^{-1} x}{x^{2n+1}}$

2. 次の関数の原始関数を求めよ. ただし (4), (8), (39) の n は自然数, (5), (9) では $a\neq 0$, (6) では $b\neq ac$ かつ $a\neq 0$, (11) では $a<b$, (17), (18), (19) では $a>0$, (28) では $p<q$ とする.

(1) $\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-(x-2)^2}}$　(2) $\dfrac{1}{x\sqrt[4]{x+1}}$　(3) $\dfrac{x(1+x^2)}{\sqrt{1+x^4}}$　(4) $\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)^n}{\sqrt{x^2+a}}$

(5) $(x+c)\sqrt{ax+b}$　(6) $\dfrac{x+c}{\sqrt{ax+b}}$　(7) $\dfrac{px+q}{ax+b+2\sqrt{x-c}}$　(8) $x^{n-1}\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$

(9) $\dfrac{\sqrt{ax+b}}{x+c}$　(10) $\sqrt{\dfrac{ax+b}{x+c}}$　(11) $\dfrac{px+q}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$　(12) $\dfrac{1}{\left(1+\sqrt{2x-x^2}\right)\sqrt{2x-x^2}}$

(13) $\dfrac{px+q}{\sqrt{x^2+2ax+b}}$　(14) $\dfrac{\log x}{2\sqrt{x-1}}$　(15) $\dfrac{x^2+b}{\sqrt{x^2+a}}$　(16) $(x^2+b)\sqrt{x^2+a}$

(17) $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$　(18) $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2-b}$　(19) $x^2\sqrt{a^2-x^2}$　(20) $\dfrac{\sqrt{x^2+a}}{x^2+b}$

(21) $\dfrac{1}{(x^2+b)\sqrt{x^2+a}}$　(22) $\dfrac{2x-1}{x^2\sqrt{x-1}}$　(23) $\dfrac{1}{(x^2-b)\sqrt{a^2-x^2}}$　(24) $\dfrac{1}{(x-r)\sqrt{x^2+2ax+b}}$

(25) $\dfrac{1}{(x+c)\sqrt{ax+b}}$　(26) $xe^{\sqrt{x-2}}$　(27) $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$　(28) $\dfrac{1}{(x-r)\sqrt{(x-p)(q-x)}}$

(29) $\dfrac{1}{x\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+4\right)}$　(30) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x(x+1)}$　(31) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x(1+x)}$　(32) $\dfrac{cx+d}{2\left(x+2a\sqrt{x-b}\right)\sqrt{x-b}}$

(33) $2x\tan^{-1}\sqrt{x+1}$　(34) $\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}+1}$　(35) $\dfrac{3}{x+4-3\sqrt[3]{x+2}}$　(36) $\dfrac{x^2}{\left(x+\sqrt{x+2}\right)\sqrt{x+2}}$

(37) $\log\left|x+2\sqrt{x+3}\right|$　(38) $\dfrac{\log x^3}{4\sqrt[4]{x+1}}$　(39) $\dfrac{\log x}{(1+x)^n}$　(40) $\dfrac{1-x^2}{(1+ax+x^2)\sqrt{1+bx+cx^2+bx^3+x^4}}$

3. (発展問題) 次の積分を求めよ. ただし (5) では $0<a<\dfrac{\pi}{2}$, (6) では $0<a<r$ とする.

(1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{1+\cos x}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^6 x}{\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x}dx$　(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{\log(x+1)}{x^2+1}dx$　(4) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^3\sin^{-1}x}{(3x^2+1)^4}dx$

(5) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{\cos^2 a}{\cos^2 x}}dx$　(6) $\displaystyle\int_{r-a}^{r}x\cos^{-1}\frac{r^2-a^2-x^2}{2ax}dx$

4. (発展問題) 連続関数 f と $R(X,Y)=R(Y,X)$ を満たす $X,\,Y$ の有理式 $R(X,Y)$ について, 次の等式を示せ.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(a\sin x+b\cos x)dx=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin x\right)dx$ ($a,\,b$ は定数)

(2) f が偶関数ならば $\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin x f(\cos x)dx=\pi\int_0^1 f(x)dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}xR(\sin x,\cos x)dx=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R(\sin x,\cos x)dx$

5. (発展問題) 前問を用いて次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}(\sin x+\cos x)^{10}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{2+\sin^2 x}dx$　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$

第 11 回の演習問題の解答

1. (1) $t=\tan x$ とおくと $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ だから $\displaystyle\int\frac{3}{\tan x(2+\cos^2 x)}dx=\int\frac{3}{t\left(2+\frac{1}{1+t^2}\right)(1+t^2)}dt=\int\frac{3}{t(3+2t^2)}dt$ $\cdots(*)$. $\dfrac{3}{t(3+2t^2)}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{Bt+C}{3+2t^2}$ とおくと (右辺) $=\dfrac{(2A+B)t^2+Ct+3A}{t(3+2t^2)}$ より $\begin{cases}2A+B=0\\C=0\\3A=3\end{cases}$. これを解けば, $A=1$, $B=-2$, $C=0$. 従って $\displaystyle(*)=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{2t}{3+2t^2}\right)dt=\log|t|-\frac{1}{2}\log(3+2t^2)=\log|\tan x|-\frac{1}{2}\log(3+2\tan^2 x)$

(2) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$ より $\displaystyle\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx=$ $\displaystyle\int\frac{2\left(2-\frac{2t}{1+t^2}\right)}{(1+t^2)\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}dt=\int\frac{4(1-t+t^2)}{(3+t^2)(1+t^2)}dt\cdots(*)$. $\dfrac{4(1-t+t^2)}{(3+t^2)(1+t^2)}=\dfrac{At+B}{3+t^2}+\dfrac{Ct+D}{1+t^2}$ とおくと (右辺) $=$ $\dfrac{(A+C)t^3+(B+D)t^2+(A+3C)t+(B+3D)}{(3+t^2)(1+t^2)}$ より $\begin{cases}A+C=0\\B+D=4\\A+3C=-4\\B+3D=4\end{cases}$. これを解けば, $A=2$, $B=4$, $C=-2$, $D=0$. 従って $\displaystyle(*)=\int\left(\frac{2t+4}{3+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}\right)dt=\int\frac{2t}{3+t^2}dt+\int\frac{4}{3+t^2}dt-\int\frac{2t}{1+t^2}dt=$ $\log(3+t^2)+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{t}{\sqrt{3}}-\log(1+t^2)=\log\left(3+\tan^2\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan\dfrac{x}{2}\right)-\log\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right)$.

(3) $t=\tan x$ とおくと $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ だから $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=$ $\displaystyle\int\frac{1}{a^2\frac{1}{1+t^2}+b^2\frac{t^2}{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}dt=\int\frac{dt}{a^2+b^2t^2}=\frac{1}{b^2}\int\frac{dt}{\left(\frac{a}{b}\right)^2+t^2}=\frac{1}{ab}\tan^{-1}\frac{bt}{a}=\frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\tan x\right)$

(4) $t=\tan x$ とおくと $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ だから $\displaystyle\int\frac{2}{4\cos^2 x+\tan x-3}dx=\int\frac{2}{\left(\frac{4}{1+t^2}+t-3\right)(1+t^2)}dt=$ $\displaystyle\int\frac{2}{(t-1)\left(t-1-\sqrt{2}\right)\left(t-1+\sqrt{2}\right)}dt\cdots(*)$. $\dfrac{2}{(t-1)\left(t-1-\sqrt{2}\right)\left(t-1+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{A}{t-1}+\dfrac{B}{t-1-\sqrt{2}}+\dfrac{C}{t-1+\sqrt{2}}$ とおくと (右辺) $=\dfrac{(A+B+C)t^2+\left(-2A+B\left(-2+\sqrt{2}\right)+C\left(-2-\sqrt{2}\right)\right)t-A+B\left(1-\sqrt{2}\right)+C\left(1+\sqrt{2}\right)}{(t-1)\left(t-1-\sqrt{2}\right)\left(t-1+\sqrt{2}\right)}$ より $\begin{cases}A+B+C=0\\-2A+B\left(-2+\sqrt{2}\right)+C\left(-2-\sqrt{2}\right)=0\\-A+B\left(1-\sqrt{2}\right)+C\left(1+\sqrt{2}\right)=2\end{cases}$. これを解けば, $A=-1$, $B=C=\dfrac{1}{2}$. 従って
$\displaystyle(*)=\int\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{t-1}+\frac{1}{t-1-\sqrt{2}}+\frac{1}{t-1+\sqrt{2}}\right)dt=-\log|t-1|+\frac{1}{2}\log|t^2-2t-1|=$
$\dfrac{1}{2}\log|\tan^2 x-2\tan x-1|-\log|\tan x-1|$

(5) $t=\tan x$ とおくと $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ だから $\displaystyle\int\frac{3\tan x-5}{\tan x+2\cos^2 x}dx=\int\frac{3t-5}{\left(t+\frac{2}{1+t^2}\right)(1+t^2)}dt=\int\frac{3t-5}{t^3+t+2}dt=$ $\displaystyle\int\frac{3t-5}{(t+1)(t^2-t+2)}dt\cdots(*)$. $\dfrac{3t-5}{(t+1)(t^2-t+2)}=\dfrac{A}{t+1}+\dfrac{Bt+C}{t^2-t+2}$ とおくと (右辺) $=$ $\dfrac{(A+B)t^2+(-A+B+C)t+2A+C}{(t+1)(t^2-t+2)}$ より $\begin{cases}A+B=0\\-A+B+C=3\\2A+C=-5\end{cases}$. これを解けば, $A=-2$, $B=2$ $C=-1$. 従って $\displaystyle(*)=\int\left(-\frac{2}{t+1}+\frac{2t-1}{t^2-t+2}\right)dt=-2\log|1+t|+\log(t^2-t+2)=-2\log|1+\tan x|+\log(\tan^2 x-\tan x+2)$

(6) $t=\cos x$ とおくと $\sin x\,dx=-dt$ だから $\displaystyle\int\frac{\tan x}{a-\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{t(t^2-a)}dt\ \cdots(*)$
$a\neq 0$ の場合, $\displaystyle(*)=\int\frac{1}{a}\left(\frac{t}{t^2-a}-\frac{1}{t}\right)dt=\frac{1}{2a}(\log|t^2-a|-2\log|t|)=\frac{1}{2a}\log|1-a-a\tan^2 x|$.
$a=0$ の場合, $\displaystyle(*)=\int\frac{1}{t^3}dt=\frac{1}{2}-\frac{1}{2t^2}=-\frac{\tan^2 x}{2}$.

(7) $t=\tan x$ とおけば $\cos^2 x=\dfrac{1}{t^2+1}$, $dx=\dfrac{1}{t^2+1}\,dt$ より $\displaystyle\int\frac{\cos^2 x}{a-\cos^2 x}\,dx=\frac{1}{a}\int\frac{1}{(t^2+1)\left(t^2+\frac{a-1}{a}\right)}\,dt\ \cdots(*)$
$a=1$ の場合, $\displaystyle(*)=\int\frac{1}{t^2(t^2+1)}\,dt=\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=-\frac{1}{t}-\tan^{-1}t=-x-\frac{1}{\tan x}$.

$0<a<1$ の場合, $(*)=\displaystyle\int\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1-a}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{\frac{1-a}{a}}}-\frac{1}{t+\sqrt{\frac{1-a}{a}}}\right)-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$
$\displaystyle\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1-a}}\log\left|\frac{\sqrt{a}t-\sqrt{1-a}}{\sqrt{a}t+\sqrt{1-a}}\right|-\tan^{-1}t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{1-a}}\log\left|\frac{\sqrt{a}\tan x-\sqrt{1-a}}{\sqrt{a}\tan x+\sqrt{1-a}}\right|-x$
$a<0$ または $a>1$ の場合, $(*)=\displaystyle\int\left(\frac{1}{t^2+\frac{a-1}{a}}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\sqrt{\frac{a}{a-1}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{a-1}}\,t\right)-\tan^{-1}t=$
$\displaystyle\sqrt{\frac{a}{a-1}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{a-1}}\,\tan x\right)-x.$

(8) $t=\tan x$ とおくと $\sin x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ だから $\displaystyle\int\frac{2\tan^2 x}{2\tan x-2\sin^2 x-1}dx=$
$\displaystyle\int\frac{2t^2}{(1+t^2)\left(2t-\frac{2t^2}{1+t^2}-1\right)}dt=\int\frac{2t^2}{(t-1)(2t^2-t+1)}dt\cdots(*)$. $\dfrac{2t^2}{(t-1)(2t^2-t+1)}=\dfrac{A}{t-1}+\dfrac{Bt+C}{2t^2-t+1}$ とおくと (右辺) $=\dfrac{(2A+B)t^2+(-A-B+C)t+A-C}{(t-1)(2t^2-t+1)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}2A+B=2\\-A-B+C=0\\A-C=0\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=1$, $B=0$, $C=1$. 従って $(*)=\displaystyle\int\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{2t^2-t+1}\right)dt=\int\frac{1}{t-1}dt+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}dt=\log|t-1|+\frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\frac{4t-1}{\sqrt{7}}=$
$\displaystyle\log|\tan x-1|+\frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\frac{4\tan x-1}{\sqrt{7}}$

(9) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$ より $\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx=$
$\displaystyle\int\frac{2+\frac{4t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)}dx=\int\left(\frac{1}{2t}+1+\frac{t}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\log|t|+t+\frac{1}{4}t^2=\frac{1}{2}\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}$

(10) $I_n=\displaystyle\int\frac{\sin nx}{\sin x}dx$ とおくと $I_1=\displaystyle\int dx=x$, $I_2=\displaystyle\int 2\cos x\,dx=2\sin x$ である. 加法定理より

$$\begin{aligned}\sin(n+2)x&=\sin(n+1)x\cos x+\cos(n+1)x\sin x=\sin nx\cos^2 x+2\cos nx\sin x\cos x-\sin nx\sin^2 x\\&=\sin nx+2\cos nx\cos x\sin x-2\sin nx\sin^2 x=\sin nx+2\cos(n+1)x\sin x\end{aligned}$$

だから $I_{n+2}=\displaystyle\int\left(\frac{\sin nx}{\sin x}+2\cos(n+1)x\right)dx=I_n+\frac{2\sin(n+1)x}{n+1}$ が得られる. 従って
$I_{2n}=I_2+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(I_{2k}-I_{2k-2})=2\sin x+\sum_{k=2}^{n}\frac{2\sin(2k-1)x}{2k-1}$, $I_{2n+1}=I_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(I_{2k+1}-I_{2k-1})=x+\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin 2kx}{k}$.

(11) $t=\tan x$ とおくと $\sin x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ だから $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^2 x(1+\tan x)}dx=\int\frac{1}{\frac{t^2}{1+t^2}(1+t)(1+t^2)}dt=$
$\displaystyle\int\frac{1}{t^2(1+t)}dt\cdots(*)$. $\dfrac{1}{t^2(1+t)}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{B}{t^2}+\dfrac{C}{t+1}$ とおくと (右辺) $=\dfrac{(A+C)t^2+(A+B)t+B}{t^2(t+1)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+C=0\\A+B=0\\B=1\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=-1$, $B=1$, $C=1$. 従って $(*)=\displaystyle\int\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t+1}\right)dt=-\log|t|-\frac{1}{t}+\log|t+1|=$
$\displaystyle\log|\tan x+1|-\log|\tan x|-\frac{1}{\tan x}$

(12) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$ より $\displaystyle\int\frac{\sin x}{(1+\cos x)(3-\sin x+2\cos x)}dx=$
$\displaystyle\int\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\left(3-\frac{2t}{1+t^2}+\frac{2-2t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)}dt=\int\frac{t}{t^2-2t+5}dt=\int\frac{t-1}{(t-1)^2+2^2}dt+\int\frac{1}{(t-1)^2+2^2}dt=$
$\displaystyle\frac{1}{2}\log((t-1)^2+4)+\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{t-1}{2}=\frac{1}{2}\log\left(\left(\tan\frac{x}{2}-1\right)^2+4\right)+\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)$

(13) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$ より $\displaystyle\int\frac{1}{a\cos x+b\sin x+c}dx=$
$\displaystyle\int\frac{2}{(c-a)t^2+2bt+c+a}dt\cdots(*)$. $a=c$, $b=0$ の場合, $(*)=\displaystyle\int\frac{1}{a}dt=t=\frac{1}{a}\tan\frac{x}{2}$. $a=c$, $b\neq 0$ の場合, $(*)=\displaystyle\int\frac{1}{bt+a}dt=\frac{\log|bt+a|}{b}=\frac{1}{b}\log\left|b\tan\frac{x}{2}+a\right|$. $a\neq c$, $a^2+b^2>c^2$ の場合, $D=a^2+b^2-c^2$ とおくと

$(*) = \int \frac{2}{(c-a)\left(t - \frac{b-\sqrt{D}}{a-c}\right)\left(t - \frac{b+\sqrt{D}}{a-c}\right)}dt = \int \frac{1}{\sqrt{D}}\left(\frac{1}{t - \frac{b-\sqrt{D}}{a-c}} - \frac{1}{t - \frac{b+\sqrt{D}}{a-c}}\right)dt =$
$\frac{1}{\sqrt{D}}\left(\log\left|t - \frac{b-\sqrt{D}}{a-c}\right| - \log\left|t - \frac{b+\sqrt{D}}{a-c}\right|\right) = \frac{1}{\sqrt{D}}\left(\log\left|\tan\frac{x}{2} - \frac{b-\sqrt{D}}{a-c}\right| - \log\left|\tan\frac{x}{2} - \frac{b+\sqrt{D}}{a-c}\right|\right).$
$a \neq c$, $a^2+b^2 = c^2$ の場合, $(*) = \int \frac{2}{(c-a)\left(t - \frac{b}{a-c}\right)^2}dt = \frac{2}{(a-c)t-b} = \frac{2}{(a-c)\tan\frac{x}{2} - b}$. $a \neq c$, $a^2+b^2 < c^2$ の場合, $(*) = \int \frac{2}{(c-a)\left(\left(t + \frac{b}{c-a}\right)^2 + \frac{c^2-a^2-b^2}{(c-a)^2}\right)}dt = \frac{2}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\tan^{-1}\left(\frac{(c-a)t+b}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\right) =$
$\frac{2}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\tan^{-1}\left(\frac{(c-a)\tan\frac{x}{2}+b}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\right).$

(14) $t = \tan\frac{x}{2}$ とおくと, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2\tan^{-1}t$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ より $\int \frac{x}{1+\cos x}dx =$
$\int \frac{2\tan^{-1}t}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int 2\tan^{-1}t\,dt = \int 2(t)'\tan^{-1}t\,dt = 2t\tan^{-1}t - \int\frac{2t}{1+t^2}dt = 2t\tan^{-1}t - \log(1+t^2) =$
$x\tan\frac{x}{2} - \log\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) = x\tan\frac{x}{2} + \log\left(\cos^2\frac{x}{2}\right) = x\tan\frac{x}{2} + \log(1+\cos x) - \log 2$. 従って, 定数の差を無視すれば $\int \frac{x}{1+\cos x}dx = x\tan\frac{x}{2} + \log(1+\cos x)$ である.

(15) $t = \tan\frac{x}{2}$ とおくと $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ より

$$\int \frac{\cos x}{a\cos x + b\sin x + c}dx = \int \frac{\frac{2-2t^2}{1+t^2}}{(1+t^2)\left(\frac{a(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{2bt}{1+t^2} + c\right)}dt = \int \frac{2t^2-2}{(t^2+1)((a-c)t^2-2bt-a-c)}dt \cdots (*).$$

$a = c \neq 0$, $b = 0$ の場合, $(*) = \frac{1}{a}\int\left(\frac{2}{t^2+1} - 1\right)dt = \frac{1}{a}\left(2\tan^{-1}t - t\right) = \frac{1}{a}\left(x - \tan\frac{x}{2}\right).$
$a = c$, $b \neq 0$ の場合, 第 10 回の問題 1.(4) の結果から $(*) = -\int \frac{t^2-1}{(t^2+1)(bt+a)}dt = \frac{-a^2+b^2}{b(a^2+b^2)}\log|bt+a| -$
$\frac{b}{a^2+b^2}\log(t^2+1) + \frac{2a}{a^2+b^2}\tan(t) = \frac{-a^2+b^2}{b(a^2+b^2)}\log\left|b\tan\frac{x}{2}+a\right| - \frac{b}{a^2+b^2}\log\left(\tan^2\frac{x}{2}+1\right) + \frac{ax}{a^2+b^2}.$
$a \neq c$ かつ $c^2 > a^2+b^2$ の場合, 第 10 回の問題 1.(11) の結果から $(*) = \int \frac{2(a-c)(t^2-1)}{(t^2+1)(((a-c)t-b)^2+c^2-a^2-b^2)}dt =$
$\frac{b}{a^2+b^2}\log\left(\frac{(a-c)x^2-2bx-a-c}{x^2+1}\right) + \frac{2a\tan^{-1}x}{a^2+b^2} + \frac{2ac}{(a^2+b^2)\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\tan\left(\frac{(a-c)x-b}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\right) =$
$\frac{b}{a^2+b^2}\log\left(\frac{(a-c)\tan^2\frac{x}{2}-2bx-a-c}{x^2+1}\right) + \frac{ax}{a^2+b^2} + \frac{2ac}{(a^2+b^2)\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\tan\left(\frac{(a-c)\tan\frac{x}{2}-b}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\right).$
$a \neq c$ かつ $c^2 = a^2+b^2$ の場合, 第 10 回の問題 1.(10) の結果から $(*) = \int \frac{2(a-c)(t^2-1)}{(t^2+1)((a-c)t-b)^2}dt =$
$\frac{4b(a-c)^2}{((a-c)^2+b^2)^2}\log\left(\frac{((a-c)x-b)^2}{x^2+1}\right) + \frac{2((a-c)^2-b^2)}{((a-c)^2+b^2)((a-c)x-b)} + \frac{4(a-c)((a-c)^2-b^2)}{((a-c)^2+b^2)^2}\tan^{-1}x =$
$\frac{4b(a-c)^2}{((a-c)^2+b^2)^2}\log\left(\frac{\left((a-c)\tan\frac{x}{2}-b\right)^2}{\tan^2\frac{x}{2}+1}\right) + \frac{2((a-c)^2-b^2)}{((a-c)^2+b^2)\left((a-c)\tan\frac{x}{2}-b\right)} + \frac{2x(a-c)((a-c)^2-b^2)}{((a-c)^2+b^2)^2}.$
$a \neq c$ かつ $c^2 < a^2+b^2$ の場合, $\alpha = \frac{b-\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a-c}$, $\beta = \frac{b+\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a-c}$ とおくと, 第 10 回の問題 1.(9) の結果から $(*) = \int \frac{2t^2-2}{(a-c)(t^2+1)(t-\alpha)(t-\beta)}dt =$
$\frac{1}{a-c}\left(\frac{2(\alpha^2-1)\log|t-\alpha|}{(\alpha-\beta)(\alpha^2+1)} - \frac{2(\beta^2-1)\log|t-\beta|}{(\alpha-\beta)(\beta^2+1)} - \frac{2(\alpha+\beta)\log(t^2+1)}{(\alpha^2+1)(\beta^2+1)} - \frac{4(\alpha\beta-1)\tan^{-1}t}{(\alpha^2+1)(\beta^2+1)}\right) =$
$\frac{ax}{a^2+b^2} + \frac{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}+ca+b^2-c^2}{\left(b\sqrt{a^2+b^2-c^2}+a^2-ca+b^2\right)\sqrt{a^2+b^2-c^2}}\log\left(\tan\frac{x}{2} - \frac{b+\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a-c}\right) -$
$\frac{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}-ca-b^2+c^2}{\left(b\sqrt{a^2+b^2-c^2}-a^2+ca-b^2\right)\sqrt{a^2+b^2-c^2}}\log\left(\tan\frac{x}{2} - \frac{b-\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a-c}\right) - \frac{b}{a^2+b^2}\log\left(\tan^2\frac{x}{2}+1\right)$

(16) $t=\tan x$ とおけば $x=\tan^{-1}t$, $dx=\dfrac{1}{1+t^2}dt$, $\sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}$, $\sin x\cos x=\dfrac{t}{1+t^2}$ だから, $a^2\neq b^2$ かつ $ab\neq 0$ の場合, 第 10 回の問題 1.(11) の結果より

$$\begin{aligned}\int\frac{2x\sin x\cos x}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2}dx&=\int\frac{2t\tan^{-1}t}{(a^2t^2+b^2)^2}dt=-\frac{\tan^{-1}t}{a^2(a^2t^2+b^2)}+\int\frac{1}{a^2(t^2+1)(a^2t^2+b^2)}dt\\&=-\frac{\tan^{-1}t}{a^2(a^2t^2+b^2)}+\frac{1}{a^2b(a^2-b^2)}\left(a\tan^{-1}\frac{at}{b}-b\tan^{-1}t\right)\\&=-\frac{x}{a^2(a^2\tan^2 x+b^2)}+\frac{1}{a^2b(a^2-b^2)}\left(a\tan^{-1}\frac{a\tan x}{b}-bx\right)\end{aligned}$$

$a\neq 0$, $b=0$ の場合, 第 10 回の問題 1.(10) の結果より

$$\begin{aligned}\int\frac{2x\sin x\cos x}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2}dx&=\int\frac{2\tan^{-1}t}{a^4t^3}dt=-\frac{\tan^{-1}t}{a^4t^2}+\int\frac{1}{a^4t^2(t^2+1)}dt=-\frac{\tan^{-1}t}{a^4t^2}+\frac{1}{a^4}\left(-\frac{1}{t}-\tan^{-1}t\right)\\&=-\frac{x}{a^4\tan^2 x}-\frac{1}{a^4\tan x}-\frac{x}{a^4}\end{aligned}$$

$a=0$, $b\neq 0$ の場合,

$$\begin{aligned}\int\frac{2x\sin x\cos x}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2}dx&=\int\frac{2t\tan^{-1}t}{b^4}dt=\frac{t^2\tan^{-1}t}{b^4}-\int\frac{t^2}{b^4(t^2+1)}dt=\frac{t^2\tan^{-1}t}{b^4}-\frac{1}{b^4}\left(t-\tan^{-1}t\right)\\&=\frac{x\tan^2 x-\tan x+x}{b^4}\end{aligned}$$

$a^2=b^2\neq 0$ の場合,

$$\begin{aligned}\int\frac{2x\sin x\cos x}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2}dx&=\int\frac{2t\tan^{-1}t}{a^4}dt=\frac{t^2\tan^{-1}t}{a^4}-\int\frac{t^2}{a^4(t^2+1)}dt=\frac{t^2\tan^{-1}t}{a^4}-\frac{1}{a^4}\left(t-\tan^{-1}t\right)\\&=\frac{x\tan^2 x-\tan x+x}{a^4}\end{aligned}$$

(17) $t=\sqrt{\tan x}$ とおけば $x=\tan^{-1}t^2$ より $dx=\dfrac{2t}{1+t^4}dt$ であり, $\displaystyle\int\frac{\sqrt{\cos x\sin x}}{\cos x+\sin x}dx=\int\frac{\sqrt{\tan x}}{1+\tan x}dx=$ $\displaystyle\int\frac{2t^2}{(1+t^2)(1+t^4)}dt=\int\left(\frac{1}{2\big(1+\sqrt{2}t+t^2\big)}+\frac{1}{2\big(1-\sqrt{2}t+t^2\big)}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}dt+$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}dt-\int\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\!\left(\sqrt{2}t+1\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\!\left(\sqrt{2}t-1\right)-\tan^{-1}t=$ $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\!\big(\sqrt{2\tan x}+1\big)+\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\!\big(\sqrt{2\tan x}-1\big)-\tan^{-1}\sqrt{\tan x}$.

(18) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$ より, $\displaystyle\int\frac{x}{1+\sin x}dx=\int\frac{4\tan^{-1}t}{(1+t)^2}dt=$ $\displaystyle\int 4\tan^{-1}t\left(-\frac{1}{1+t}\right)'dt=-\frac{4\tan^{-1}t}{1+t}+\int\frac{4}{(1+t)(1+t^2)}dt$. $\dfrac{4}{(1+t)(1+t^2)}=\dfrac{A}{1+t}+\dfrac{Bt+C}{1+t^2}$ とおけば, (右辺) $=$ $\dfrac{(A+B)t^2+(B+C)t+A+C}{(1+t)(1+t^2)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+B=0\\B+C=0\\A+C=4\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=C=2$, $B=-2$ である. 従って $\displaystyle\int\frac{4}{(1+t)(1+t^2)}dt=\int\frac{2}{1+t}dt-\int\frac{2x}{1+t^2}dt+\int\frac{2}{1+t^2}dt=2\log|1+t|-\log(1+t^2)+2\tan^{-1}t=$ $\displaystyle\log(1+t^2+2t)-\log(1+t^2)+2\tan^{-1}t=\log\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)+2\tan^{-1}t=\log(1+\sin x)+x$, $\dfrac{2}{1+t}=\dfrac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}=$ $\dfrac{2\cos^2\frac{x}{2}\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{2\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1+\cos x+\sin x}{1+\sin x}=1+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ であることと, $2\tan^{-1}t=x$ に注意すれば, $\displaystyle\int\frac{x}{1+\sin x}dx=-x\left(1+\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)+\log(1+\sin x)+x=-\frac{x\cos x}{1+\sin x}+\log(1+\sin x)$.

(19) $t=\tan x$ とおけば $x=\tan^{-1}t$ より $dx=\dfrac{1}{1+t^2}dt$, $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\cos x\sin x=\dfrac{t}{1+t^2}$ だ

から, $\displaystyle\int \frac{\cos^m x \sin^n x}{(\cos x+\sin x)^{m+n+2}}dx = \int \frac{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)^{\frac{m}{2}+\frac{n}{2}+1}(1+t^2)}dt = \int \frac{t^n}{(1+t)^{m+n+2}}dt = \int \frac{(s-1)^n}{s^{m+n+2}}ds =$ $\displaystyle\int\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{s^{k+m+2}}\right)ds = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+m+1)s^{k+m+1}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+m+1)(1+\tan x)^{k+m+1}} =$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}\cos^{k+m+1} x}{(k+m+1)(\cos x+\sin x)^{k+m+1}}$.

(20) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$ より

$$\int \frac{\tan x}{a\cos x + b\sin x + c}dx = \int \frac{\frac{4t}{1-t^2}}{(1+t^2)\left(\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2bt}{1+t^2}+c\right)}dt = \int \frac{4t}{(t^2-1)((a-c)t^2-2bt-a-c)}\,dt\cdots(*).$$

$b=c=0$ の場合, $\displaystyle(*) = \int \frac{4t}{a(t^2-1)^2}\,dt = -\frac{2}{a(t^2-1)} - \frac{1}{a} = \frac{2}{a\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{a} = \frac{\cos x+1}{a\cos x} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a\cos x}$.

$b=-c\neq 0$, $a=c$ の場合, 第 10 回の問題 1.(4) の結果から $\displaystyle(*) = \int \frac{2t}{a(t+1)(t-1)^2}\,dt = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{a(t-1)} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-1}{\tan\frac{x}{2}+1}\right| - \frac{1}{a\left(\tan\frac{x}{2}-1\right)} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{\cos x}{1+\sin x}\right| - \frac{1}{a\left(\tan\frac{x}{2}-1\right)}$.

$b=-c\neq 0$ かつ $a=0$ の場合, 第 10 回の問題 1.(8) の結果から $\displaystyle(*) = \int \frac{4t}{b(t+1)(t-1)^3}\,dt =$ $\displaystyle\frac{1}{2b}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{b(t-1)} - \frac{1}{b(t-1)^2} = \frac{1}{2b}\log\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-1}\right| - \frac{1}{b\left(\tan\frac{x}{2}-1\right)} - \frac{1}{b\left(\tan\frac{x}{2}-1\right)^2} =$ $\displaystyle\frac{1}{2b}\log\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| - \frac{1}{b\left(\tan\frac{x}{2}-1\right)} - \frac{1}{b\left(\tan\frac{x}{2}-1\right)^2}$

$b=-c\neq 0$ かつ $a\neq c$ かつ $a\neq 0$ の場合, 第 10 回の問題 1.(6) の結果から
$\displaystyle(*) = \int \frac{4t}{(t+1)(t-1)^2((a-c)t+a+c)}\,dt = \frac{c\log|t-1|}{2a^2} - \frac{1}{a(t-1)} - \frac{\log|t+1|}{2c} + \frac{a^2-c^2}{2a^2c}\log\left|t+\frac{a+c}{a-c}\right| =$ $\displaystyle\frac{c}{2a^2}\log\left|\tan\frac{x}{2}-1\right| - \frac{1}{a\left(\tan\frac{x}{2}-1\right)} - \frac{1}{2c}\log\left|\tan\frac{x}{2}+1\right| + \frac{a^2-c^2}{2a^2c}\log\left|\tan\frac{x}{2}+\frac{a+c}{a-c}\right|$.

$a=b=c\neq 0$ の場合, 第 10 回の問題 1.(4) の結果から $\displaystyle(*) = -\int \frac{2t}{a(t-1)(t+1)^2}\,dt =$ $\displaystyle-\frac{1}{2a}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{a(t+1)} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + \frac{1}{a\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)}$.

$b=c\neq 0$ かつ $a=0$ の場合, 第 10 回の問題 1.(8) の結果から $\displaystyle(*) = -\int \frac{4t}{b(t-1)(t+1)^3}\,dt =$ $\displaystyle-\frac{1}{2b}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{b(t+1)} + \frac{1}{b(t+1)^2} = \frac{1}{2b}\log\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| - \frac{1}{b\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)} + \frac{1}{b\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)^2}$

$b=c\neq 0$ かつ $a\neq c$ かつ $a\neq 0$ の場合, 第 10 回の問題 1.(6) の結果から
$\displaystyle(*) = \int \frac{4t}{(t-1)(t+1)^2((a-c)t-a-c)}\,dt = \frac{c\log|t+1|}{2a^2} + \frac{1}{a(t+1)} - \frac{\log|t-1|}{2c} + \frac{a^2-c^2}{2a^2c}\log\left|t+\frac{a+c}{a-c}\right| =$ $\displaystyle\frac{c}{2a^2}\log\left|\tan\frac{x}{2}+1\right| + \frac{1}{a\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)} - \frac{1}{2c}\log\left|\tan\frac{x}{2}-1\right| + \frac{a^2-c^2}{2a^2c}\log\left|\tan\frac{x}{2}+\frac{a+c}{a-c}\right|$.

$b\neq\pm c$ かつ $a=c$ の場合, 第 10 回の問題 1.(3) の結果から $\displaystyle(*) = -\int \frac{2t}{(t-1)(t+1)(bt+a)}\,dt =$ $\displaystyle\frac{\log|t+1|}{b-a} - \frac{\log|t-1|}{b+a} - \frac{2a}{b^2-a^2}\log\left|t+\frac{a}{b}\right| = \frac{1}{b-a}\log\left|\tan\frac{x}{2}+1\right| - \frac{1}{b+a}\log\left|\tan\frac{x}{2}-1\right| - \frac{2a}{b^2-a^2}\log\left|\tan\frac{x}{2}+\frac{a}{b}\right|$.

$a\neq c$ かつ $c^2>a^2+b^2$ の場合, 第 10 回の問題 1.(9) の結果から
$\displaystyle(*) = \int \frac{4(a-c)t}{(t-1)(t+1)(((a-c)t-b)^2+c^2-a^2-b^2)}\,dt =$ $\displaystyle\frac{\log|t+1|}{b-c} - \frac{\log|t-1|}{b+c} - \frac{c\log(((a-c)t-b)^2+c^2-a^2-b^2)}{b^2-c^2} + \frac{2ab}{(b^2-c^2)\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\tan^{-1}\left(\frac{(a-c)t-b}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\right) =$ $\displaystyle\frac{\log\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|}{b-c} - \frac{\log\left|\tan\frac{x}{2}-1\right|}{b+c} - \frac{c\log\left(\left((a-c)\tan\frac{x}{2}-b\right)^2+c^2-a^2-b^2\right)}{b^2-c^2} +$

$\dfrac{2ab}{(b^2-c^2)\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\tan^{-1}\!\left(\dfrac{(a-c)\tan\frac{x}{2}-b}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\right).$

$a\neq 0, c$ かつ $c^2=a^2+b^2$ の場合, 第 10 回の問題 1.(6) の結果から

$(*)=\displaystyle\int\frac{4(a-c)t}{(t-1)(t+1)((a-c)t-b)^2}\,dt=\frac{4b(a-c)}{((a-c)^2-b^2)((a-c)t-b)}-\frac{4(a-c)((a-c)^2+b^2)}{((a-c)^2-b^2)^2}\log|(a-c)t-b|+\frac{2(a-c)}{(a-b-c)^2}\log|(a-c)t-a+c|+\frac{2(a-c)}{(a+b-c)^2}\log|(a-c)t+a-c|=\frac{4b(a-c)}{((a-c)^2-b^2)\big((a-c)\tan\frac{x}{2}-b\big)}-\frac{4(a-c)((a-c)^2+b^2)}{((a-c)^2-b^2)^2}\log\left|(a-c)\tan\frac{x}{2}-b\right|+\frac{2(a-c)}{(a-b-c)^2}\log\left|\tan\frac{x}{2}-1\right|+\frac{2(a-c)}{(a+b-c)^2}\log\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|.$

$b\neq\pm c$ かつ $a\neq c$ かつ $c^2<a^2+b^2$ の場合, $\alpha=\dfrac{b-\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a-c}$, $\beta=\dfrac{b+\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a-c}$ とおけば $\alpha,\beta\neq\pm1$ であり, 第 10 回の問題 1.(5) の結果から $(*)=\displaystyle\int\frac{4t}{(a-c)(t-1)(t+1)(t-\alpha)(t-\beta)}\,dt=$

$\dfrac{2\log|t+1|}{(a-c)(\alpha+1)(\beta+1)}+\dfrac{2\log|t-1|}{(a-c)(\alpha-1)(\beta-1)}+\dfrac{4\alpha\log|t-\alpha|}{(a-c)(\alpha^2-1)(\alpha-\beta)}-\dfrac{4\beta\log|t-\beta|}{(a-c)(\beta^2-1)(\alpha-\beta)}=\dfrac{\log\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|}{b-c}-\dfrac{\log\left|\tan\frac{x}{2}-1\right|}{b+c}+\dfrac{4\alpha\log\left|\tan\frac{x}{2}-\alpha\right|}{(a-c)(\alpha^2-1)(\alpha-\beta)}-\dfrac{4\beta\log\left|\tan\frac{x}{2}-\beta\right|}{(a-c)(\beta^2-1)(\alpha-\beta)}.$

(21) $t=\sqrt{\tan x}$ とおけば $x=\tan^{-1}t^2$ より $dx=\dfrac{2t}{1+t^4}dt$ であり, 第 10 回の問題 1.(11) の結果より

$\displaystyle\int\sqrt{\tan x}\,dx=\int\frac{2t^2}{1+t^4}\,dt=\frac{1}{2\sqrt2}\log\left(\frac{t^2-\sqrt2t+1}{t^2+\sqrt2t+1}\right)+\frac{1}{\sqrt2}\tan^{-1}\left(\sqrt2t-1\right)+\frac{1}{\sqrt2}\tan^{-1}\left(\sqrt2t+1\right)=\frac{1}{2\sqrt2}\log\left(\frac{\tan x-\sqrt{2\tan x}+1}{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}\right)+\frac{1}{\sqrt2}\tan^{-1}\big(\sqrt{2\tan x}-1\big)+\frac{1}{\sqrt2}\tan^{-1}\big(\sqrt{2\tan x}+1\big).$

(22) $t=\sqrt{\tan x}$ とおけば $x=\tan^{-1}t^2$ より $dx=\dfrac{2t}{1+t^4}dt$ であり, 第 10 回の問題 1.(11) の結果より

$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,dx=\int\frac{2}{1+t^4}\,dt=\frac{1}{2\sqrt2}\log\left(\frac{t^2+\sqrt2t+1}{t^2-\sqrt2t+1}\right)+\frac{1}{\sqrt2}\tan^{-1}\left(\sqrt2t-1\right)+\frac{1}{\sqrt2}\tan^{-1}\left(\sqrt2t+1\right)=\frac{1}{2\sqrt2}\log\left(\frac{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}{\tan x-\sqrt{2\tan x}+1}\right)+\frac{1}{\sqrt2}\tan^{-1}\big(\sqrt{2\tan x}-1\big)+\frac{1}{\sqrt2}\tan^{-1}\big(\sqrt{2\tan x}+1\big).$

[別解] $x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおくと (18) の結果から $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,dx=-\int\frac{1}{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}}\,dt=-\int\sqrt{\tan t}\,dt=$

$\dfrac{1}{2\sqrt2}\log\left(\dfrac{\tan t+\sqrt{2\tan t}+1}{\tan t-\sqrt{2\tan t}+1}\right)-\dfrac{1}{\sqrt2}\tan^{-1}\big(\sqrt{2\tan t}-1\big)-\dfrac{1}{\sqrt2}\tan^{-1}\big(\sqrt{2\tan t}+1\big)=\dfrac{1}{2\sqrt2}\log\left(\dfrac{1+\sqrt{2\tan x}+\tan x}{1-\sqrt{2\tan x}+\tan x}\right)-\dfrac{1}{\sqrt2}\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt2}{\sqrt{\tan x}}-1\right)-\dfrac{1}{\sqrt2}\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt2}{\sqrt{\tan x}}+1\right).$

(23) $\displaystyle\int\frac{\tan^{-1}x}{x^{2n}}\,dx=\int\Big(-\frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}}\Big)'\tan^{-1}x\,dx=-\frac{\tan^{-1}x}{(2n-1)x^{2n-1}}+\int\frac{(\tan^{-1}x)'}{(2n-1)x^{2n-1}}\,dx=-\frac{\tan^{-1}x}{(2n-1)x^{2n-1}}+\frac{1}{2(2n-1)}\int\frac{2x}{x^{2n}(1+x^2)}\,dx=-\frac{\tan^{-1}x}{(2n-1)x^{2n-1}}+\frac{1}{2(2n-1)}\int\frac{1}{t^n(1+t)}\,dx\cdots(*).$

$\dfrac{1}{t^n(1+t)}=\dfrac{a_0}{1+t}+\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{a_k}{t^k}$ とおけば, 右辺は $\dfrac{1}{t^n(1+t)}\Big(a_n+\displaystyle\sum_{k=1}^n(a_{k-1}+a_k)t^{n-k+1}\Big)$ に等しいため $a_k=(-1)^{n-k}$ $(k=0,1,\ldots,n)$ である. 故に $(*)=-\dfrac{\tan^{-1}x}{(2n-1)x^{2n-1}}+\dfrac{1}{2(2n-1)}\Big(\displaystyle\int\frac{(-1)^n}{1+t}\,dt+\sum_{k=1}^n\int\frac{(-1)^{n-k}}{t^k}\,dt\Big)=$

$\dfrac{1}{2n-1}\Big(-\dfrac{\tan^{-1}x}{x^{2n-1}}+\dfrac{(-1)^n\log(1+t)}{2}+\dfrac{(-1)^{n-1}\log t}{2}+\displaystyle\sum_{k=2}^n\frac{(-1)^{n-k+1}}{(2k-2)t^{k-1}}\Big)=$

$\dfrac{1}{2n-1}\Big(-\dfrac{\tan^{-1}x}{x^{2n-1}}+\dfrac{(-1)^n\log(1+x^2)}{2}+(-1)^{n-1}\log|x|+\displaystyle\sum_{k=2}^n\frac{(-1)^{n-k+1}}{(2k-2)x^{2k-2}}\Big).$

(24) $\displaystyle\int\frac{\tan^{-1}x}{x^{2n+1}}\,dx=\int\Big(\frac{-1}{2nx^{2n}}\Big)'\tan^{-1}x\,dx=-\frac{\tan^{-1}x}{2nx^{2n}}+\int\frac{(\tan^{-1}x)'}{2nx^{2n}}\,dx=-\frac{\tan^{-1}x}{2nx^{2n}}+\frac{1}{2n}\int\frac{1}{x^{2n}(1+x^2)}\,dx$

であり, (23) の解答から $\dfrac{1}{x^{2n}(1+x^2)}=\dfrac{(-1)^n}{1+x^2}+\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{n-k}}{x^{2k}}$ だから上式は以下の式に等しい.

$$-\frac{\tan^{-1}x}{2nx^{2n}}+\frac{1}{2n}\Big(\int\frac{(-1)^n}{1+x^2}\,dx+\sum_{k=1}^{n}\int\frac{(-1)^{n-k}}{x^{2k}}\,dx\Big)=\frac{1}{2n}\Big(-\frac{\tan^{-1}x}{x^{2n}}+(-1)^n\tan^{-1}x+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k+1}}{(2k-1)x^{2k-1}}\Big).$$

2. (1) $x=\sin t+2$ とおくと $dx=\cos t dt$ より $\displaystyle\int\frac{x^2-4}{\sqrt{1-(x-2)^2}}dx=\int(\sin^2 t+4\sin t)dt=$
$\displaystyle\int\left(\frac{1-\cos 2t}{2}+4\sin t\right)dt=\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}-4\cos t=\frac{t}{2}+\frac{\sin t\cos t}{2}-4\cos t=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin^2 t}(\sin t-8)=$
$\displaystyle\frac{1}{2}\sin^{-1}(x-2)+\frac{1}{2}(x-10)\sqrt{1-(x-2)^2}$

(2) $t=\sqrt[4]{x+1}$ とおくと $x=t^4-1$, $dx=4t^3dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt[4]{x+1}}dx=\int\frac{4t^3}{t(t^4-1)}dt=\int\frac{4t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}dt\cdots(*)$.
$\displaystyle\frac{4t^2}{t^4-1}=\frac{A}{t^2-1}+\frac{B}{t^2+1}$ とおけば (右辺) $\displaystyle=\frac{(A+B)t^2+A-B}{t^4-1}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+B=4\\A-B=0\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=B=2$. 従って
$\displaystyle(*)=\int\left(\frac{2}{t^2-1}+\frac{2}{t^2+1}\right)dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}+\frac{2}{t^2+1}\right)dt=\log|t-1|-\log|t+1|+2\tan^{-1}t=$
$\log\left|\sqrt[4]{x+1}-1\right|-\log\left|\sqrt[4]{x+1}+1\right|+2\tan^{-1}\sqrt[4]{x+1}$

(3) $t=x^2$ とおくと, 教科書の 104 ページの結果から $\displaystyle\int\frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1+x^4}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}dt=$
$\displaystyle\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt+\frac{1}{2}\int\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt=\frac{1}{2}\log\Big(t+\sqrt{1+t^2}\Big)+\frac{1}{2}\sqrt{1+t^2}=\frac{1}{2}\log\Big(x^2+\sqrt{1+x^4}\Big)+\frac{1}{2}\sqrt{1+x^4}$

(4) $t=x+\sqrt{x^2+a}$ とおけば $\displaystyle\frac{x+\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}}dx=dt$ だから $n\neq 0$ の場合, $\displaystyle\int\frac{\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)^n}{\sqrt{x^2+a}}dx=\int t^{n-1}dt=\frac{t^n}{n}=$
$\displaystyle\frac{1}{n}\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)^n$. $n=0$ の場合, $\displaystyle\int\frac{\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)^n}{\sqrt{x^2+a}}dx=\int\frac{1}{t}\,dt=\log t=\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$.

(5) $t=\sqrt{ax+b}$ とおくと $\displaystyle x=\frac{t^2-b}{a}$, $\displaystyle dx=\frac{2t}{a}\,dt$ より $\displaystyle\int(x+c)\sqrt{ax+b}\,dx=\int\left(\frac{t^2-b}{a}+c\right)\frac{2t^2}{a}\,dt=$
$\displaystyle\frac{2}{a^2}\int(t^4+(ac-b)t^2)\,dt=\frac{2}{a^2}\left(\frac{t^5}{5}+\frac{(ac-b)t^3}{3}\right)=\frac{2(ax+b)^{\frac{3}{2}}(3ax+5ac-2b)}{15a^2}$.

(6) $t=\sqrt{ax+b}$ とおくと $\displaystyle x=\frac{t^2-b}{a}$, $\displaystyle dx=\frac{2t}{a}\,dt$ より $\displaystyle\int\frac{x+c}{\sqrt{ax+b}}\,dx=\int\left(\frac{t^2-b}{a}+c\right)\frac{2}{a}\,dt=$
$\displaystyle\frac{2}{a^2}\left(\frac{t^3}{3}+(ac-b)t\right)=\frac{2\sqrt{ax+b}\,(ax+3ac-2b)}{3a^2}$.

(7) $t=\sqrt{x-c}$ とおくと $x=t^2+c$, $dx=2tdt$ より $\displaystyle\int\frac{px+q}{ax+b+2\sqrt{x-c}}dx=\int\frac{2pt^3+2(cp+q)t}{at^2+2t+ac+b}dt\ \cdots(*)$
$a=0$ の場合, $\displaystyle(*)=\int\frac{2pt^3+2(cp+q)t}{2t+b}dt=\int\!\left(pt^2-\frac{bp}{2}t+\frac{b^2p+4cp+4q}{4}-\frac{b(b^2p+4cp+4q)}{4(2t+b)}\right)dt=$
$\displaystyle\frac{p}{3}t^3-\frac{bp}{4}t^2+\frac{b^2p+4cp+4q}{4}t-\frac{b(b^2p+4cp+4q)}{8}\log|2t+b|=$
$\displaystyle\frac{p}{3}(x-c)^{\frac{3}{2}}-\frac{bp}{4}(x-c)+\frac{b^2p+4cp+4q}{4}\sqrt{x-c}-\frac{b(b^2p+4cp+4q)}{8}\log\left|2\sqrt{x-c}+b\right|$
$a\neq 0$, $a(ac+b)<1$ の場合, $\displaystyle\alpha=\frac{1}{a}\Big(-1-\sqrt{1-a(ac+b)}\Big)$, $\displaystyle\beta=\frac{1}{a}\Big(-1+\sqrt{1-a(ac+b)}\Big)$ とおけば
$\displaystyle(*)=\frac{2p}{a^2}\int(at-2)\,dt+\frac{2}{a^3}\int\frac{(a^2q-abp+4p)t+2p(ac+b)}{(t-\alpha)(t-\beta)}\,dt=$
$\displaystyle\frac{p}{a^2}(at^2-4t)-\frac{1}{a^2\sqrt{1-a(ac+b)}}\int\!\left(\frac{\alpha(a^2q-abp+4p)+2p(ac+b)}{t-\alpha}-\frac{\beta(a^2q-abp+4p)+2p(ac+b)}{t-\beta}\right)dt=$
$\displaystyle\frac{p}{a^2}(at^2-4t)-\frac{\alpha(a^2q-abp+4p)+2p(ac+b)}{a^2\sqrt{1-a(ac+b)}}\log|t-\alpha|+\frac{\beta(a^2q-abp+4p)+2p(ac+b)}{a^2\sqrt{1-a(ac+b)}}\log|t-\beta|=$
$\displaystyle\frac{p}{a^2}\Big(a(x-c)-4\sqrt{x-c}\Big)+\frac{(a^2q-abp+4p)}{a^2\sqrt{1-a(ac+b)}}\log\frac{\left|\sqrt{x-c}-\beta\right|^{\beta}}{\left|\sqrt{x-c}-\alpha\right|^{\alpha}}+\frac{2p(ac+b)}{a^2\sqrt{1-a(ac+b)}}\log\left|\frac{\sqrt{x-c}-\beta}{\sqrt{x-c}-\alpha}\right|$
$a(ac+b)=1$ の場合, $\displaystyle(*)=\frac{2p}{a^2}\int(at-2)\,dt+\frac{2}{a^2}\int\!\left(\frac{a^2q+a^2cp+3p}{at+1}-\frac{a^2q+a^2cp+p}{(at+1)^2}\right)dt=$
$\displaystyle\frac{p}{a^2}(at^2-4t)+\frac{2(a^2q+a^2cp+3p)}{a^3}\log|at+1|+\frac{2(a^2q+a^2cp+p)}{a^3(at+1)}=$
$\displaystyle\frac{p}{a^2}\Big(a(x-c)-4\sqrt{x-c}\Big)+\frac{2(a^2q+a^2cp+3p)}{a^3}\log\left|a\sqrt{x-c}+1\right|+\frac{2(a^2q+a^2cp+p)}{a^3\big(a\sqrt{x-c}+1\big)}$

$a(ac+b)>1$ の場合, $(*)=\dfrac{2p}{a^2}\displaystyle\int(at-2)\,dt+\dfrac{2}{a^3}\int\dfrac{(a^2q-abp+4p)\left(t+\frac{1}{a}\right)+\frac{2a^2cp-a^2q+3abp-4p}{a}}{\left(t+\frac{1}{a}\right)^2+\frac{a(ac+b)-1}{a^2}}\,dt=$
$\dfrac{p}{a^2}(at^2-4t)+\dfrac{a^2q-abp+4p}{a^3}\log(at^2+2t+ac+b)+\dfrac{2(2a^2cp-a^2q+3abp-4p)}{a^3\sqrt{a(ac+b)-1}}\tan^{-1}\left(\dfrac{at+1}{\sqrt{a(ac+b)-1}}\right)=$
$\dfrac{p}{a^2}\left(a(x-c)-4\sqrt{x-c}\right)+\dfrac{a^2q-abp+4p}{a^3}\log\left(ax+2\sqrt{x-c}+b\right)+$
$\dfrac{2(2a^2cp-a^2q+3abp-4p)}{a^3\sqrt{a(ac+b)-1}}\tan^{-1}\left(\dfrac{a\sqrt{x-c}+1}{\sqrt{a(ac+b)-1}}\right)$

(8) $\displaystyle\int x^{n-1}\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)dx=\int\left(\frac{x^n}{n}\right)'\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)dx=\frac{x^n}{n}\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)-$
$\displaystyle\int\frac{x^n+\frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2+a}}}{n\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)}dx=\frac{x^n}{n}\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)-\int\frac{x^n}{n\sqrt{x^2+a}}dx$ $t=x+\sqrt{x^2+a}$ とおくと $x=\dfrac{t^2-a}{2t}$, $dx=$
$\dfrac{t^2+a}{2t^2}dt$ だから $\displaystyle\int\frac{x^n}{n\sqrt{x^2+a}}dx=\int\frac{(t^2-a)^n}{2^nnt^n}\frac{2t}{t^2+1}\frac{t^2+1}{2t^2}dt=\frac{1}{2^nn}\sum_{i=0}^{n}(-a)^i\binom{n}{i}\int t^{n-2i-1}dt\ \cdots(*)$ を得る. n が奇数ならば $(*)=\displaystyle\frac{1}{2^nn}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{n-2i}\binom{n}{i}t^{n-2i}=\frac{1}{2^nn}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-a)^i}{n-2i}\binom{n}{i}\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)^{n-2i}$ であり, n が偶数ならば

$$\begin{aligned}(*)&=\frac{1}{2^nn}\left(\sum_{0\leqq i\leqq n,\,i\neq\frac{n}{2}}\frac{(-a)^i}{n-2i}\binom{n}{i}t^{n-2i}+(-a)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}}\log t\right)\\&=\frac{1}{2^nn}\left(\sum_{0\leqq i\leqq n,\,i\neq\frac{n}{2}}\frac{(-a)^i}{n-2i}\binom{n}{i}\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)^{n-2i}+(-a)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}}\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)\right)\end{aligned}$$

となるため, $\displaystyle\int x^{n-1}\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$ は n が奇数ならば

$$\frac{x^n}{n}\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)-\frac{1}{2^nn}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-a)^i}{n-2i}\binom{n}{i}\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)^{n-2i}$$

で与えられ, n が偶数ならば

$$\frac{x^n}{n}\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)-\frac{1}{2^nn}\left(\sum_{0\leqq i\leqq n,\,i\neq\frac{n}{2}}\frac{(-a)^i}{n-2i}\binom{n}{i}\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)^{n-2i}+(-a)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}}\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)\right)$$

で与えられる.

(9) $t=\sqrt{ax+b}$ とおくと $x=\dfrac{t^2-b}{a}$, $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{a}$ より $\displaystyle\int\frac{\sqrt{ax+b}}{x+c}dx=\int\frac{2t^2}{t^2-b+ac}\,dt=\int\left(2+\frac{2(b-ac)}{t^2-b+ac}\right)dt\cdots(*)$ だから, $b>ac$ の場合, $(*)=\displaystyle\int\left(2+\frac{\sqrt{b-ac}}{t-\sqrt{b-ac}}-\frac{\sqrt{b-ac}}{t+\sqrt{b-ac}}\right)dt=2t+\sqrt{b-ac}\left(\log\left|\frac{t-\sqrt{b-ac}}{t+\sqrt{b-ac}}\right|\right)=$
$2\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac}\left(\log\left|\dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-ac}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac}}\right|\right)$. $b=ac$ の場合, $(*)=\displaystyle\int2\,dt=2t=2\sqrt{ax+b}$. $b<ac$ の場合,
$(*)=\displaystyle\int\left(2-\frac{2(ac-b)}{t^2+\left(\sqrt{ac-b}\right)^2}\right)dt=2t-2\sqrt{ac-b}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{ac-b}}=2\sqrt{ax+b}-2\sqrt{ac-b}\tan^{-1}\frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{ac-b}}$.

(10) $t=\sqrt{\dfrac{ax+b}{x+c}}$ とおけば $x=\dfrac{-ct^2+b}{t^2-a}$, $dx=\dfrac{2(ac-b)t}{(t^2-a)^2}dt$ だから $\displaystyle\int\sqrt{\frac{ax+b}{x+c}}\,dx=\int\frac{2(ac-b)t^2}{(t^2-a)^2}\,dt\cdots(*)$ である. $a>0$ の場合, $\dfrac{t^2}{(t^2-a)^2}=\dfrac{A}{t-\sqrt{a}}+\dfrac{B}{t+\sqrt{a}}+\dfrac{C}{(t-\sqrt{a})^2}+\dfrac{D}{(t+\sqrt{a})^2}$ とおけば, 左辺は次の式に等しい.

$$\frac{(A+B)t^3+(\sqrt{a}A-\sqrt{a}B+C+D)t^2+(-aA-aB+2\sqrt{a}C-2\sqrt{a}D)t-a\sqrt{a}A+a\sqrt{a}B+aC+aD}{(t^2-a)^2}$$

故に $A+B=-aA-aB+2\sqrt{a}C-2\sqrt{a}D=-a\sqrt{a}A+a\sqrt{a}B+aC+aD=0$, $\sqrt{a}A-\sqrt{a}B+C+D=1$ だから $A=\dfrac{1}{4\sqrt{a}}$, $B=-\dfrac{1}{4\sqrt{a}}$, $C=D=\dfrac{1}{4}$ となるため $(*)=\dfrac{ac-b}{2\sqrt{a}}\displaystyle\int\left(\frac{1}{t-\sqrt{a}}-\frac{1}{t+\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{(t-\sqrt{a})^2}+\frac{\sqrt{a}}{(t+\sqrt{a})^2}\right)dt=$

$\dfrac{ac-b}{2\sqrt{a}}\log\left|\dfrac{t-\sqrt{a}}{t+\sqrt{a}}\right| - \dfrac{(ac-b)t}{t^2-a} = \dfrac{ac-b}{2\sqrt{a}}\left(\log\left|\sqrt{\dfrac{ax+b}{x+c}}-\sqrt{a}\right| - \log\left|\sqrt{\dfrac{ax+b}{x+c}}+\sqrt{a}\right|\right) + (x+c)\sqrt{\dfrac{ax+b}{x+c}}.$

$a<0$ の場合, 教科書の問 3.10 の結果を用いれば, $(*) = 2(ac-b)\left(\displaystyle\int\frac{1}{t^2-a}\,dt + \int\frac{a}{(t^2-a)^2}\,dt\right) =$

$\dfrac{ac-b}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\dfrac{t}{\sqrt{-a}} - \dfrac{(ac-b)t}{t^2-a} = \dfrac{ac-b}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{ax+b}{-a(x+c)}} + (x+c)\sqrt{\dfrac{ax+b}{x+c}}.$

(11) $t=\sqrt{\dfrac{b-x}{x-a}}$ とおくと $x=\dfrac{at^2+b}{t^2+1}$, $\sqrt{(x-a)(b-x)}=\dfrac{(b-a)t}{t^2+1}$, $dx=-\dfrac{2(b-a)t}{(t^2+1)^2}dt$ であり, 教科書の問 3.10 の結果を用いると $\displaystyle\int\frac{px+q}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx = \int\frac{\left(\frac{p(at^2+b)}{t^2+1}+q\right)(-2(b-a)t)}{\frac{(b-a)t}{t^2+1}(t^2+1)^2}\,dt = -\int\frac{2p(b-a)}{(t^2+1)^2} - \int\frac{2(ap+q)}{t^2+1}\,dt =$
$-\dfrac{p(b-a)t}{t^2+1} - (p(a+b)+2q)\tan^{-1}t = -p\sqrt{(b-x)(x-a)} - (p(a+b)+2q)\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{b-x}{x-a}}$

(別解) $\displaystyle\int\frac{px+q}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx = \int\left(\frac{p(a+b)+2q}{2\sqrt{(x-a)(b-x)}} - \frac{p(-2x+a+b)}{2\sqrt{(x-a)(b-x)}}\right)dx =$
$\displaystyle\int\frac{p(a+b)+2q}{2\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}}dx - \int\frac{p((x-a)(b-x))'}{2\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx = \frac{p(a+b)+2q}{2}\sin^{-1}\frac{2x-a-b}{b-a} - p\sqrt{(x-a)(b-x)}$

(注意) 第 3 回の演習問題 5 の (4) の x に $\dfrac{2x-a-b}{b-a}$ を代入して, 教科書の問 1.11 の (4) を用いれば $2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{b-x}{x-a}} = \dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}\dfrac{2x-a-b}{b-a}$ が得られる.

(12) $t=\sqrt{\dfrac{2-x}{x}}$ とおくと $x=\dfrac{2}{1+t^2}$, $\sqrt{2x-x^2}=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx=-\dfrac{4t}{(1+t^2)^2}dt$ より
$\displaystyle\int\frac{1}{\left(1+\sqrt{2x-x^2}\right)\sqrt{2x-x^2}}dx = \int\frac{-4t}{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2t}{1+t^2}(1+t^2)^2}dt = \int\frac{-2}{(1+t)^2}dt = \frac{2}{1+t} = \frac{x-\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$

(13) $t=x+\sqrt{x^2+2ax+b}$ とおくと $x=\dfrac{t^2-b}{2(t+a)}$, $\sqrt{x^2+2ax+b}=\dfrac{t^2+2at+b}{2(t+a)}$, $dx=\dfrac{t^2+2at+b}{2(t+a)^2}dt$ より
$\displaystyle\int\frac{px+q}{\sqrt{x^2+2ax+b}}dx = \int\frac{\left(\frac{p(t^2-b)}{2(t+a)}+q\right)(t^2+2at+b)}{\frac{t^2+2at+b}{2(t+a)}2(t+a)^2}dt = \int\frac{p(t^2-b)+2q(t+a)}{2(t+a)^2}dt =$
$\displaystyle\int\left(\frac{p}{2}-\frac{ap-q}{t+a}+\frac{p(a^2-b)}{2(t+a)^2}\right)dt = \frac{pt}{2}-(ap-q)\log|t+a| - \frac{p(a^2-b)}{2(t+a)} =$
$\dfrac{p}{2}\left(x+\sqrt{x^2+2ax+b}\right) - (ap-q)\log\left|x+a+\sqrt{x^2+2ax+b}\right| - \dfrac{p(a^2-b)}{2\left(x+a+\sqrt{x^2+2ax+b}\right)}.$

(14) $t=\sqrt{x-1}$ とおくと $x=t^2+1$, $dx=2tdt$ より $\displaystyle\int\frac{\log x}{2\sqrt{x-1}}dx = \int\log(t^2+1)dt = \int t'\log(t^2+1)dt =$
$\displaystyle t\log(t^2+1) - \int\frac{2t^2}{t^2+1}dt = t\log(t^2+1) - \int\left(2-\frac{2}{t^2+1}\right)dt = t\log(t^2+1)-2t+2\tan^{-1}t =$
$\sqrt{x-1}(\log x-2)+2\tan^{-1}\sqrt{x-1}$

(15) $t=x+\sqrt{x^2+a}$ とおくと $x=\dfrac{t^2-a}{2t}$, $\sqrt{x^2+a}=\dfrac{t^2+a}{2t}$, $dx=\dfrac{t^2+a}{2t^2}dt$ より, $s=t^2$ と変数変換すれば
$\displaystyle\int\frac{x^2+b}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \int\frac{(t^2-a)^2+4bt^2}{4t^3}\,dt = \int\frac{(s-a)^2+4bs}{8s^2}\,ds = \int\left(\frac{1}{8}-\frac{a-2b}{4s}+\frac{a^2}{8s^2}\right)ds =$
$\dfrac{s}{8}-\dfrac{a-2b}{4}\log s-\dfrac{a^2}{8s} = \dfrac{t^4-a^2}{8t^2}-\dfrac{a-2b}{2}\log|t| = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a}-\dfrac{a-2b}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$

(16) $t=x+\sqrt{x^2+a}$ とおくと $x=\dfrac{t^2-a}{2t}$, $\sqrt{x^2+a}=\dfrac{t^2+a}{2t}$, $dx=\dfrac{t^2+a}{2t^2}dt$ より, $s=t^2$ と変数変換すれば
$\displaystyle\int(x^2+b)\sqrt{x^2+a}\,dx = \int\frac{(t^2+a)^2((t^2-a)^2+4bt^2)}{16t^5}\,dt = \int\frac{(s+a)^2((s-a)^2+4bs)}{32s^3}\,ds =$
$\displaystyle\int\frac{(s^2-a^2)^2+4bs(s+a)^2}{32s^3}\,ds = \int\left(\frac{s}{32}+\frac{b}{8}-\frac{a(a-4b)}{16s}+\frac{a^2b}{8s^2}+\frac{a^4}{32s^3}\right)ds =$
$\dfrac{s^2}{64}+\dfrac{bs}{8}-\dfrac{a(a-4b)}{16}\log s-\dfrac{a^2b}{8s}-\dfrac{a^4}{64s^2} = \dfrac{t^4}{64}+\dfrac{bt^2}{8}-\dfrac{a(a-4b)}{8}\log|t|-\dfrac{a^2b}{8t^2}-\dfrac{a^4}{64t^4} =$
$\dfrac{t^4-a^2}{8t^2}\left(\dfrac{t^4-a^2}{8t^2}+\dfrac{a^2}{4t^2}+b\right)-\dfrac{a(a-4b)}{8}\log|t| = \dfrac{x}{8}\sqrt{x^2+a}(2x^2+a+4b)-\dfrac{a(a-4b)}{8}\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$

(17) $x=a\sin t$ とおくと $dx=a\cos t\,dt$ より $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\int a^2\sin^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int(1-\cos 2t)\,dt=$
$\displaystyle\frac{a^2}{4}(2t-\sin 2t)=\frac{a^2}{2}(t-\sin t\cos t)=\frac{1}{2}\Big(a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}-x\sqrt{a^2-x^2}\Big).$

(18) $x=a\sin t$ とおくと $dx=a\cos t\,dt$ より $\displaystyle\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2-b}dx=\int\frac{\cos^2 t}{\frac{a^2-b}{a^2}-\cos^2 t}\,dt\cdots(*)$
$b=a^2$ の場合, $(*)=-t=-\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$. $b=0$ の場合, 1 の (7) と第 2 回の問題 2 の (4) より
$\displaystyle(*)=-t-\frac{1}{\tan t}=-\sin^{-1}\frac{x}{a}-\frac{1}{\tan(\sin^{-1}\frac{x}{a})}=-\sin^{-1}\frac{x}{a}-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$
$0<b<a^2$ の場合, 1 の (7) と第 2 回の問題 2 の (4) より $\displaystyle(*)=\frac{\sqrt{a^2-b}}{2\sqrt{b}}\log\left|\frac{\sqrt{a^2-b}\tan t-\sqrt{b}}{\sqrt{a^2-b}\tan t+\sqrt{b}}\right|-t=$
$\displaystyle\frac{\sqrt{a^2-b}}{2\sqrt{b}}\log\left|\frac{\sqrt{a^2-b}\tan(\sin^{-1}\frac{x}{a})-\sqrt{b}}{\sqrt{a^2-b}\tan(\sin^{-1}\frac{x}{a})+\sqrt{b}}\right|-\sin^{-1}\frac{x}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b}}{2\sqrt{b}}\log\left|\frac{\sqrt{a^2-b}\,x-\sqrt{b}\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-b}\,x+\sqrt{b}\sqrt{a^2-x^2}}\right|-\sin^{-1}\frac{x}{a}$
$b<0$ または $b>a^2$ の場合, 1 の (7) と第 2 回の問題 2 の (4) より $\displaystyle(*)=\sqrt{\frac{b-a^2}{b}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a^2}{b}}\,\tan t\right)-t=$
$\displaystyle\sqrt{\frac{b-a^2}{b}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a^2}{b}}\,\tan\Big(\sin^{-1}\frac{x}{a}\Big)\right)-\sin^{-1}\frac{x}{a}=\sqrt{\frac{b-a^2}{b}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a^2}{b}}\,\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)-\sin^{-1}\frac{x}{a}$

(19) $x=a\sin t$ とおくと $dx=a\cos t\,dt$ より $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int a^4\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{a^4}{4}\int\sin^2 2t\,dt=$
$\displaystyle\frac{a^4}{8}\int(1-\cos 4t)\,dt=\frac{a^4}{32}(4t-\sin 4t)=\frac{a^4}{16}(2t-\cos 2t\sin 2t)=\frac{a^4}{8}(t-\cos t\sin t(1-2\sin^2 t))=$
$\displaystyle\frac{1}{8}\Big(a^4\sin^{-1}\frac{x}{a}-x(a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}\Big).$

(20) $t=x+\sqrt{x^2+a}$ とおくと $x=\dfrac{t^2-a}{2t}$, $\sqrt{x^2+a}=\dfrac{t^2+a}{2t}$, $dx=\dfrac{t^2+a}{2t^2}dt$ より, $s=t^2$ と変数変換すれば
$\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2+a}}{x^2+b}\,dx=\int\frac{(t^2+a)^2}{t((t^2-a)^2+4bt^2)}\,dt=\int\frac{(s+a)^2}{2s((s-a)^2+4bs)}\,ds=\int\frac{s^2+2as+a^2}{2s(s^2-2(a-2b)s+a^2)}\,ds\ \cdots(*)$
$b(b-a)>0$ の場合, $p=a-2b-2\sqrt{b(b-a)}$, $q=a-2b+2\sqrt{b(b-a)}$ とおけば
$\displaystyle(*)=\int\left(\frac{1}{2s}+\frac{b-a}{2\sqrt{b(b-a)}(s-p)}-\frac{b-a}{2\sqrt{b(b-a)}(s-q)}\right)ds=\frac{1}{2}\log|s|+\frac{b-a}{2\sqrt{b(b-a)}}\log\left|\frac{s-p}{s-q}\right|=$
$\displaystyle\log|t|+\frac{b-a}{2\sqrt{b(b-a)}}\log\left|\frac{t^2-p}{t^2-q}\right|=\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+\frac{b-a}{2\sqrt{b(b-a)}}\log\left|\frac{2x^2+2x\sqrt{x^2+a}+2b+\sqrt{b(b-a)}}{2x^2+2x\sqrt{x^2+a}+2b-\sqrt{b(b-a)}}\right|.$
$b=0$ の場合, $\displaystyle(*)=\int\frac{s^2+2as+a^2}{2s(s^2-2as+a^2)}\,ds=\int\left(\frac{1}{2s}+\frac{2a}{(s-a)^2}\right)ds=\frac{1}{2}\log|s|-\frac{2a}{s-a}=\log|t|-\frac{2a}{t^2-a}=$
$\displaystyle\log|x+\sqrt{x^2+a}|-\frac{a}{x^2+x\sqrt{x^2+a}}$. $b=a$ の場合, $\displaystyle(*)=\int\frac{1}{2s}\,ds=\frac{1}{2}\log|s|=\log|t|=\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|.$
$b(b-a)<0$ の場合, $\displaystyle(*)=\int\left(\frac{1}{2s}+\frac{2(a-b)}{(s-a+2b)^2+4b(a-b)}\right)ds=\frac{\log|s|}{2}+\frac{a-b}{\sqrt{b(a-b)}}\tan^{-1}\frac{s-a+2b}{2\sqrt{b(a-b)}}=$
$\displaystyle\log|t|+\frac{a-b}{\sqrt{b(a-b)}}\tan^{-1}\frac{t^2-a+2b}{2\sqrt{b(a-b)}}=\log|x+\sqrt{x^2+a}|+\frac{a-b}{\sqrt{b(a-b)}}\tan^{-1}\frac{x^2+x\sqrt{x^2+a}+b}{\sqrt{b(a-b)}}$

(21) $t=x+\sqrt{x^2+a}$ とおくと $x=\dfrac{t^2-a}{2t}$, $\sqrt{x^2+a}=\dfrac{t^2+a}{2t}$, $dx=\dfrac{t^2+a}{2t^2}dt$ より, $s=t^2$ と変数変換すれば
$\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+b)\sqrt{x^2+a}}dx=\int\frac{t^2+a}{\frac{(t^2-a)^2+4bt^2}{4t^2}\frac{t^2+a}{2t}2t^2}dt=\int\frac{4t}{t^4-2(a-2b)t^2+a^2}dt=\int\frac{2}{s^2-2(a-2b)s+a^2}ds\ \cdots(*).$
$b=0$ の場合, $\displaystyle(*)=\int\frac{2}{(s-a)^2}ds=-\frac{1}{s-a}-\frac{1}{a}=-\frac{1}{t^2-a}-\frac{1}{a}=-\frac{1}{x\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)}-\frac{1}{a}=-\frac{\sqrt{x^2+a}}{ax}.$
$a=b$ の場合 $\displaystyle(*)=\int\frac{2}{(s+a)^2}ds=-\frac{1}{s+a}-\frac{1}{a}=-\frac{1}{t^2+a}-\frac{1}{a}=-\frac{1}{x^2+a+x\sqrt{x^2+a}}-\frac{1}{a}=\frac{x}{a\sqrt{x^2+a}}.$
$b(a-b)<0$ の場合, $p=a-2b-2\sqrt{b(b-a)}$, $q=a-2b+2\sqrt{b(b-a)}$ とおけば $\displaystyle(*)=\int\frac{2}{(s-p)(s-q)}ds=$
$\displaystyle\frac{2(\log|s-q|-\log|s-p|)}{q-p}=\frac{1}{2\sqrt{b(b-a)}}\log\left|\frac{x^2+x\sqrt{x^2+a}+b-\sqrt{b(b-a)}}{x^2+x\sqrt{x^2+a}+b+\sqrt{b(b-a)}}\right|$

$b(a-b)>0$ の場合, $(*)=\displaystyle\int\frac{2}{(s-a+2b)^2+4b(a-b)}ds=\frac{1}{\sqrt{b(a-b)}}\tan^{-1}\left(\frac{s-a+2b}{2\sqrt{b(a-b)}}\right)=$
$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{b(a-b)}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2+x\sqrt{x^2+a}+b}{\sqrt{b(a-b)}}\right)$

(22) $t=\sqrt{x-1}$ とおくと $x=t^2+1$, $dx=2tdt$ であり, 教科書の問 3.10 の結果を用いると $\displaystyle\int\frac{2x-1}{x^2\sqrt{x-1}}dx=$
$\displaystyle\int\frac{4t^2+2}{(t^2+1)^2}dt=\int\frac{4(t^2+1)-2}{(t^2+1)^2}dt=\int\frac{4}{t^2+1}dt-\int\frac{2}{(t^2+1)^2}dt=4\tan^{-1}t-\frac{t}{t^2+1}-\tan^{-1}t=$
$\displaystyle 3\tan^{-1}\sqrt{x-1}-\frac{\sqrt{x-1}}{x}$

(23) $a^2-x^2=(a-x)(x+a)$ だから $t=\sqrt{\dfrac{a-x}{x+a}}$ とおくと $x=\dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}=\dfrac{2at}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{-4at}{(1+t^2)^2}dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{(x^2-b)\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int\frac{-4at}{\frac{a^2(1-t^2)^2-b(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2}\frac{2at}{1+t^2}(1+t^2)^2}dt=\int\frac{-2(t^2+1)}{(a^2-b)t^4-2(a^2+b)t^2+a^2-b}dt\ \cdots(*)$
$b>0$, $b\neq a^2$ の場合, $p=\dfrac{a^2+b-2a\sqrt{b}}{a^2-b}$, $q=\dfrac{a^2+b+2a\sqrt{b}}{a^2-b}$ とおけば, $b<a^2$ ならば $p,q>0$, $b>a^2$ ならば $p,q<0$ である. このとき $(*)=\displaystyle\int\frac{-2(t^2+1)}{(a^2-b)(t^2-p)(t^2-q)}dt=\int\frac{2}{(a^2-b)(q-p)}\left(\frac{p+1}{t^2-p}-\frac{q+1}{t^2-q}\right)dt\ \cdots(**)$.
$0<b<a^2$ の場合, $pq=1$ より $(**)=\displaystyle\int\frac{1}{4a\sqrt{b}}\left(\frac{p+1}{\sqrt{p}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{p}}-\frac{1}{t+\sqrt{p}}\right)-\frac{q+1}{\sqrt{q}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{q}}-\frac{1}{t+\sqrt{q}}\right)\right)dt=$
$\displaystyle\frac{1}{4a\sqrt{b}}\left(\frac{p+1}{\sqrt{p}}\log\left|\frac{t-\sqrt{p}}{t+\sqrt{p}}\right|-\frac{q+1}{\sqrt{q}}\log\left|\frac{t-\sqrt{q}}{t+\sqrt{q}}\right|\right)=\frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{4a\sqrt{b}}\log\left|\frac{t^2-\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)t-1}{t^2+\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)t-1}\right|=$
$\displaystyle\frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{4a\sqrt{b}}\log\left|\frac{\frac{a-x}{x+a}-\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)\sqrt{\frac{a-x}{x+a}}-1}{\frac{a-x}{x+a}+\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)\sqrt{\frac{a-x}{x+a}}-1}\right|=\frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{4a\sqrt{b}}\log\left|\frac{2x+\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)\sqrt{a^2-x^2}}{2x-\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)\sqrt{a^2-x^2}}\right|$
$b>a^2$ の場合, $(**)=\displaystyle\frac{1}{2a\sqrt{b}}\left(\frac{p+1}{\sqrt{-p}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{-p}}-\frac{q+1}{\sqrt{-q}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{-q}}\right)=$
$\displaystyle\frac{\sqrt{-q}-\sqrt{-p}}{2a\sqrt{b}}\left(\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{-p}}+\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{-q}}\right)=\frac{\sqrt{-q}-\sqrt{-p}}{2a\sqrt{b}}\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{-p}}\sqrt{\frac{a-x}{x+a}}+\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{-q}}\sqrt{\frac{a-x}{x+a}}\right)$
$b=a^2$ の場合, $(*)=\displaystyle\int\frac{t^2+1}{2a^2t^2}dt=\frac{1}{2a^2}\left(t-\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{2a^2}\left(\sqrt{\frac{a-x}{x+a}}-\sqrt{\frac{x+a}{a-x}}\right)$
$b=0$ の場合 $(*)=\displaystyle-\int\frac{(1+t)^2+(1-t)^2}{a^2(1-t^2)^2}dt=-\int\frac{1}{a^2(1-t)^2}dt-\int\frac{1}{a^2(1+t)^2}dt=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)=$
$\displaystyle\frac{2t}{a^2(t^2-1)}=\frac{\frac{2}{a^2}\sqrt{\frac{a-x}{x+a}}}{\frac{a-x}{x+a}-1}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}$
$b<0$ の場合, $r=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-b}}$ とおくと $(*)=\displaystyle\int\frac{-2(t^2+1)}{\left(\sqrt{a^2-b}\,t^2-2at+\sqrt{a^2-b}\right)\left(\sqrt{a^2-b}\,t^2+2at+\sqrt{a^2-b}\right)}dt=$
$\displaystyle\frac{-1}{\sqrt{a^2-b}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-b}\,t^2-2at+\sqrt{a^2-b}}+\frac{1}{\sqrt{a^2-b}\,t^2+2at+\sqrt{a^2-b}}\right)dt=$
$\displaystyle\frac{-1}{a^2-b}\int\left(\frac{1}{(t-r)^2+1-r^2}+\frac{1}{(t+r)^2+1-r^2}\right)dt=\frac{-1}{(a^2-b)\sqrt{1-r^2}}\left(\tan^{-1}\frac{t-r}{\sqrt{1-r^2}}+\tan^{-1}\frac{t+r}{\sqrt{1-r^2}}\right)=$
$\displaystyle\frac{-1}{\sqrt{-b(a^2-b)}}\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{a^2-b}{-b}}\left(\sqrt{\frac{a-x}{x+a}}-\frac{a}{\sqrt{a^2-b}}\right)+\tan^{-1}\sqrt{\frac{a^2-b}{-b}}\left(\sqrt{\frac{a-x}{x+a}}+\frac{a}{\sqrt{a^2-b}}\right)\right)=$
$\displaystyle\frac{-1}{\sqrt{-b(a^2-b)}}\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a^2-b}{-b}}\sqrt{\frac{a-x}{x+a}}-\frac{a}{\sqrt{-b}}\right)+\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a^2-b}{-b}}\sqrt{\frac{a-x}{x+a}}+\frac{a}{\sqrt{-b}}\right)\right)$

(24) $t=x+\sqrt{x^2+2ax+b}$ とおくと, $x=\dfrac{t^2-b}{2(t+a)}$, $\sqrt{x^2+2ax+b}=\dfrac{t^2+2at+b}{2(t+a)}$, $dx=\dfrac{t^2+2at+b}{2(t+a)^2}dt$ より $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-r)\sqrt{x^2+2ax+b}}=\int\frac{2}{t^2-2rt-2ar-b}dt\cdots(*)$. $r^2+2ar+b>0$ の場合, $p=r-\sqrt{r^2+2ar+b}$, $q=r+\sqrt{r^2+2ar+b}$ とおけば 第 10 回の問題 1 の (1) より $(*)=\displaystyle\int\frac{2}{(t-p)(t-q)}dt=\frac{1}{\sqrt{r^2+2ar+b}}\log\left|\frac{t-q}{t-p}\right|=$

$\dfrac{1}{\sqrt{r^2+2ar+b}}\log\left|\dfrac{x-r+\sqrt{x^2+2ax+b}-\sqrt{r^2+2ar+b}}{x-r+\sqrt{x^2+2ax+b}+\sqrt{r^2+2ar+b}}\right|$. $r^2+2ar+b=0$ の場合, $(*)=\displaystyle\int\frac{2}{(t-r)^2}\,dt=\frac{-2}{t-r}=$ $-\dfrac{2}{x-r+\sqrt{x^2+2ax+b}}$. $r^2+2ar+b<0$ の場合, $(*)=\displaystyle\int\frac{2}{(t-r)^2+\left(\sqrt{-r^2-2ar-b}\right)^2}\,dt=$ $\dfrac{2}{\sqrt{-r^2-2ar-b}}\tan^{-1}\left(\dfrac{t-r}{\sqrt{-r^2-2ar-b}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{-r^2-2ar-b}}\tan^{-1}\left(\dfrac{x-r+\sqrt{x^2+2ax+b}}{\sqrt{-r^2-2ar-b}}\right)$.

(25) $t=\sqrt{ax+b}$ とおくと $x=\dfrac{t^2-b}{a}$, $\dfrac{1}{\sqrt{ax+b}}dx=\dfrac{2}{a}dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{(x+c)\sqrt{ax+b}}dx=\int\frac{2}{t^2+ac-b}dt\cdots(*)$. $ac>b$ の場合, $(*)=\dfrac{2}{\sqrt{ac-b}}\tan^{-1}\dfrac{t}{\sqrt{ac-b}}=\dfrac{2}{\sqrt{ac-b}}\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{ac-b}}$. $ac=b$ の場合, $(*)=-\dfrac{2}{t}=-\dfrac{2}{\sqrt{ax+b}}$. $ac<b$ の場合, $(*)=\displaystyle\int\frac{2}{\left(t-\sqrt{b-ac}\right)\left(t+\sqrt{b-ac}\right)}dt=\frac{1}{\sqrt{b-ac}}\int\left(\frac{1}{t-\sqrt{b-ac}}-\frac{1}{t+\sqrt{b-ac}}\right)dt=$ $\dfrac{\log\left|t-\sqrt{b-ac}\right|-\log\left|t+\sqrt{b-ac}\right|}{\sqrt{b-ac}}=\dfrac{1}{\sqrt{b-ac}}\log\left|\dfrac{\sqrt{x+b}-\sqrt{b-ac}}{\sqrt{x+b}+\sqrt{b-ac}}\right|$.

(26) $t=\sqrt{x-2}$ とおくと $x=t^2+2$, $dx=2tdt$ より $\displaystyle\int xe^{\sqrt{x-2}}dx=\int(2t^3+4t)e^tdt=\int(2t^3+4t)(e^t)'dt=$ $\displaystyle(2t^3+4t)e^t-\int(6t^2+4)e^tdt=(2t^3+4t)e^t-\int(6t^2+4)(e^t)'dt=(2t^3+4t)e^t-(6t^2+4)e^t+\int 12te^tdt=$ $\displaystyle(2t^3-6t^2+4t-4)e^t+\int 12t(e^t)'dt=(2t^3-6t^2+4t-4)e^t+12te^t-\int 12e^tdt=2(t^3-3t^2+8t-8)e^t=$ $2\left((x+6)\sqrt{x-2}-3x-2\right)e^{\sqrt{x-2}}$

(27) $t=x+\sqrt{x^2-2x+2}$ とおくと $x=\dfrac{t^2-2}{2t-2}$, $\sqrt{x^2-2x+2}=\dfrac{t^2-2t+2}{2t-2}$, $dx=\dfrac{t^2-2t+2}{2(t-1)^2}dt$ より $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx=\int\frac{\left(\frac{(t^2-2)^2}{4(t-1)^2}+1\right)(t^2-2t+2)}{\frac{t^2-2t+2}{2t-2}2(t-1)^2}dt=\int\frac{t^4-8t+8}{4(t-1)^3}dt$. $s=t-1$ とおけば, $t=s+1$, $dt=ds$ より (上式) $=\displaystyle\frac{1}{4}\int\frac{(s+1)^4-8s}{s^3}ds=\frac{1}{4}\int\left(s+4+\frac{6}{s}-\frac{4}{s^2}+\frac{1}{s^3}\right)ds=\frac{s^2}{8}+s+\frac{3}{2}\log|s|+\frac{1}{s}-\frac{1}{8s^2}=$ $\dfrac{1}{8}\left(s-\dfrac{1}{s}\right)\left(s+\dfrac{1}{s}\right)+s+\dfrac{1}{s}+\dfrac{3}{2}\log|s|=\dfrac{1}{8}\left(s-\dfrac{1}{s}+8\right)\left(s+\dfrac{1}{s}\right)+\dfrac{3}{2}\log|s|\cdots(*)$. ここで $s=t-1=x-1+\sqrt{x^2-2x+2}$ だから $\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}+x-1}=\sqrt{x^2-2x+2}-x+1$ であるため $s+\dfrac{1}{s}=2\sqrt{x^2-2x+2}$, $s-\dfrac{1}{s}=2x-2$ である. 従って $(*)=\dfrac{1}{2}(x+3)\sqrt{x^2-2x+2}+\dfrac{3}{2}\log\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\right)$.

(28) $t=\sqrt{\dfrac{x-p}{q-x}}$ とおくと, $x=\dfrac{qt^2+p}{t^2+1}=q+\dfrac{p-q}{t^2+1}$, $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2(q-p)t}{(t^2+1)^2}$ より $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-r)\sqrt{(x-p)(q-x)}}=$ $\displaystyle\int\frac{2(q-p)t}{\left(q-r+\frac{p-q}{t^2+1}\right)\sqrt{\left(q-p-\frac{q-p}{t^2+1}\right)\frac{q-p}{t^2+1}}(t^2+1)^2}dt=\int\frac{2}{(q-r)t^2+p-r}dt\cdots(*)$. $r<p$ または $r>q$ の場合, $(*)=\displaystyle\frac{2}{q-r}\int\frac{1}{t^2+\frac{p-r}{q-r}}dt=\frac{2}{q-r}\sqrt{\frac{q-r}{p-r}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{q-r}{p-r}}t\right)=\frac{2}{q-r}\sqrt{\frac{q-r}{p-r}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{q-r}{p-r}}\sqrt{\frac{x-p}{q-x}}\right)$. $r=p$ の場合, $(*)=\displaystyle\frac{2}{q-p}\int\frac{1}{t^2}dt=\frac{2}{(p-q)t}=\frac{2}{p-q}\sqrt{\frac{q-x}{x-p}}$. $r=q$ の場合, $(*)=\dfrac{2t}{p-q}=\dfrac{2}{p-q}\sqrt{\dfrac{x-p}{q-x}}$. $p<r<q$ の場合, $(*)=\displaystyle\frac{2}{q-r}\int\frac{1}{t^2-\frac{r-p}{q-r}}dt=\frac{1}{q-r}\int\sqrt{\frac{q-r}{r-p}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{\frac{r-p}{q-r}}}-\frac{1}{t+\sqrt{\frac{r-p}{q-r}}}\right)dt=$ $\dfrac{1}{q-r}\sqrt{\dfrac{q-r}{r-p}}\log\left|\dfrac{t-\sqrt{\frac{r-p}{q-r}}}{t+\sqrt{\frac{r-p}{q-r}}}\right|=\dfrac{1}{q-r}\sqrt{\dfrac{q-r}{r-p}}\log\left|\dfrac{\sqrt{\frac{x-p}{q-x}}-\sqrt{\frac{r-p}{q-r}}}{\sqrt{\frac{x-p}{q-x}}+\sqrt{\frac{r-p}{q-r}}}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{(q-r)(r-p)}}\log\left|\dfrac{\sqrt{(q-r)(x-p)}-\sqrt{(r-p)(q-x)}}{\sqrt{(q-r)(x-p)}+\sqrt{(r-p)(q-x)}}\right|$.

(29) $t=\sqrt[6]{x}$ とおくと $x=t^6$, $dx=6t^5dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+4\right)}dx=\int\frac{6}{t^4(t^2+4)}dt\cdots(*)$. $\dfrac{6}{t^4(t^2+4)}=$ $\dfrac{A}{t^2}+\dfrac{B}{t^4}+\dfrac{C}{t^2+4}$ とおけば (右辺) $=\dfrac{(A+C)t^4+(4A+B)t^2+4B}{t^4(t^2+4)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+C=0\\4A+B=0\\4B=6\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=-\dfrac{3}{8}$, $B=\dfrac{3}{2}$, $C=\dfrac{3}{8}$. 従って $(*)=\displaystyle\int\frac{3}{8}\left(-\frac{1}{t^2}+\frac{4}{t^4}+\frac{1}{t^2+4}\right)dt=\frac{3}{8t}-\frac{1}{2t^3}+\frac{3}{16}\tan^{-1}\frac{t}{2}=\frac{3}{8\sqrt[6]{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{3}{16}\tan^{-1}\frac{\sqrt[6]{x}}{2}$.

(30) $t=x+\sqrt{x^2-1}$ とおくと $x=\dfrac{t^2+1}{2t}$, $\sqrt{x^2-1}=\dfrac{t^2-1}{2t}$, $dx=\dfrac{t^2-1}{2t^2}dt$ より $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x(x+1)}dx=$ $\displaystyle\int\frac{\frac{t^2-1}{2t}(t^2-1)}{\frac{t^2+1}{2t}\left(\frac{t^2+1}{2t}+1\right)2t^2}dt=\int\frac{(t-1)^2}{t(t^2+1)}dt\cdots(*)$. $\dfrac{(t-1)^2}{t(t^2+1)}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{Bt+C}{t^2+1}$ とおけば (右辺) $=\dfrac{(A+B)t^2+Ct+A}{t(t^2+1)}$ より $A=1$, $B=0$ $C=-2$. 従って $(*)=\displaystyle\int\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2+1}\right)dt=\log|t|-2\tan^{-1}t=$ $\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-2\tan^{-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$. $x>0$ の場合, 第 3 回の演習問題 5 の (3) の等式の x に $x+\sqrt{x^2-1}$ を代入すれば $2\tan^{-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\tan^{-1}\sqrt{x^2-1}+\dfrac{\pi}{2}$ が得られる. また, $x<0$ の場合は $-x-\sqrt{x^2-1}>0$ だから上記の等式の x に $-x-\sqrt{x^2-1}$ を代入すれば $2\tan^{-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\tan^{-1}\sqrt{x^2-1}-\dfrac{\pi}{2}$ が得られる. 以上から, 関数 $2\tan^{-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ は定義域 $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ のそれぞれの区間 $(-\infty,-1]$, $[1,\infty)$ において, 関数 $\tan^{-1}\sqrt{x^2-1}$ と定数の違いしかないため, 上の結果から $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x(x+1)}dx=\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\tan^{-1}\sqrt{x^2-1}$.

(31) $t=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ とおけば $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=-\dfrac{4t}{(1+t^2)^2}dt$ であり, 第 10 回の問題 1.(9) の結果を用いると $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x(1+x)}dx=\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\int\frac{4t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}dt=\log|t-1|-\log|t+1|+2\tan^{-1}t=$ $\log\left|\dfrac{1-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right|+2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=\log\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)-\log|x|-\sin^{-1}x+\dfrac{\pi}{2}$.

[注意] 第 3 回の演習問題 5 の (4) と教科書の問 1.11 の (4) から $2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}x$ が得られる.

(32) $t=\sqrt{x-b}$ とおくと $x=t^2+b$, $dx=2tdt$ より $\displaystyle\int\frac{cx+d}{2\left(x+2a\sqrt{x-b}\right)\sqrt{x-b}}dx=\int\frac{ct^2+bc+d}{t^2+2at+b}dt=$ $ct+\displaystyle\int\frac{-2act+d}{t^2+2at+b}dt$ $\cdots(*)$ 第 10 回の演習問題 1 の (1), (2) の結果を用いる. $a^2>b$ の場合,

$(*)=ct+\dfrac{\left(2a^2c-2ac\sqrt{a^2-b}+d\right)\log\left|t+a-\sqrt{a^2-b}\right|-\left(2a^2c+2ac\sqrt{a^2-b}+d\right)\log\left|t+a+\sqrt{a^2-b}\right|}{2\sqrt{a^2-b}}=$

$c\sqrt{x-b}+\dfrac{\left(2a^2c-2ac\sqrt{a^2-b}+d\right)\log\left|\sqrt{x-b}+a-\sqrt{a^2-b}\right|-\left(2a^2c+2ac\sqrt{a^2-b}+d\right)\log\left|\sqrt{x-b}+a+\sqrt{a^2-b}\right|}{2\sqrt{a^2-b}}$

$a^2=b$ の場合, $(*)=ct-2ac\log|t+a|-\dfrac{-2a^2c+d}{t+a}=c\sqrt{x-a^2}-2ac\log\left|\sqrt{x-a^2}+a\right|-\dfrac{2a^2c+d}{\sqrt{x-a^2}+a}$

$a^2<b$ の場合, $(*)=ct-ac\log(t^2+2at+b)+\dfrac{2a^2c+d}{\sqrt{b^2-a}}\tan^{-1}\dfrac{t+a}{\sqrt{b^2-a}}=c\sqrt{x-b}-ac\log\left(x+2a\sqrt{x-b}\right)+$ $\dfrac{2a^2c+d}{\sqrt{b^2-a}}\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x-b}+a}{\sqrt{b^2-a}}$

(33) $t=\sqrt{x+1}$ とおくと $x=t^2-1$, $dx=2tdt$ より $\displaystyle\int 2x\tan^{-1}\sqrt{x+1}dx=\int(4t^3-4t)\tan^{-1}tdt=$ $\displaystyle\int(t^4-2t^2)'\tan^{-1}tdt=(t^4-2t^2)\tan^{-1}t-\int\frac{t^4-2t^2}{t^2+1}dt=(t^4-2t^2)\tan^{-1}t-\int\left(t^2-3+\frac{3}{t^2+1}\right)dt=$ $(t^4-2t^2)\tan^{-1}t-\dfrac{t^3}{3}+3t-3\tan^{-1}t=(t^2-3)(t^2+1)\tan^{-1}t-\dfrac{1}{3}t(t^2-9)=(x^2-4)\tan^{-1}\sqrt{x-1}-\dfrac{1}{3}(x-8)\sqrt{x-1}$

(34) $t=\sqrt[4]{x}$ とおくと $x=t^4$, $dx=4t^3dt$ より $\displaystyle\int\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}+1}dx=\int\frac{4t^4-4t^3}{t^2+1}dt=\int\left(4t^2-4t-4+\frac{4t+4}{t^2+1}\right)dt=$ $\dfrac{4}{3}t^3-2t^2-4t+2\log(t^2+1)+4\tan^{-1}t=\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+2\log(\sqrt{x}+1)+4\tan^{-1}\sqrt[4]{x}$

(35) $t=\sqrt[3]{x+2}$ とおくと $x=t^3-2$, $dx=3t^2dt$ より $\displaystyle\int\frac{3}{x+4-3\sqrt[3]{x+2}}dx=\int\frac{9t^2}{t^3-3t+2}dt=$ $\displaystyle\int\frac{9t^2}{(t-1)^2(t+2)}dt\cdots(*)$. $\dfrac{9t^2}{(t-1)^2(t+2)}=\dfrac{A}{t-1}+\dfrac{B}{(t-1)^2}+\dfrac{C}{t+2}$ とおけば (右辺) $=$ $\dfrac{(A+C)t^2+(A+B-2C)t-2A+2B+C}{(t-1)^2(t+2)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+C=9\\A+B-2C=0\\-2A+2B+C=0\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=5$, $B=3$, $C=4$. 従って $(*)=\displaystyle\int\left(\frac{5}{t-1}+\frac{3}{(t-1)^2}+\frac{4}{t+2}\right)dt=5\log|t-1|-\frac{3}{t-1}+4\log|t+2|=$ $5\log\left|\sqrt[3]{x+2}-1\right|+4\log\left|\sqrt[3]{x+2}+2\right|-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x+2}-1}$

(36) $t=\sqrt{x+2}$ とおくと $x=t^2-2$, $dx=2tdt$ より $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x+\sqrt{x+2})\sqrt{x+2}}dx=\int\frac{2t^4-8t^2+8}{t^2+t-2}dt=$ $\displaystyle\int\left(2t^2-2t-2+\frac{-2t+4}{(t-1)(t+2)}\right)dt\cdots(*)$. $\displaystyle\frac{-2t+4}{(t-1)(t+2)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+2}$ とおけば (右辺) $\displaystyle=\frac{(A+B)t+2A-B}{(t-1)(t+2)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+B=-2\\2A-B=4\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=\dfrac{2}{3}$, $B=-\dfrac{8}{3}$. 従って $\displaystyle(*)=\int\left(2t^2-2t-2+\frac{2}{3(t-1)}-\frac{8}{3(t+2)}\right)dt=$ $\displaystyle\frac{2}{3}t^3-t^2-2t+\frac{2}{3}\log|t-1|-\frac{8}{3}\log|t+2|=\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x+2}-x-2+\frac{2}{3}\log\left|\sqrt{x+2}-1\right|-\frac{8}{3}\log\left(\sqrt{x+2}+2\right)$

(37) $t=\sqrt{x+3}$ とおくと $x=t^2-3$, $dx=2tdt$ より $\displaystyle\int\log\left|x+2\sqrt{x+3}\right|dx=\int 2t\log|t^2+2t-3|dt=$ $\displaystyle\int(t^2)'\log|t^2+2t-3|dt=t^2\log|t^2+2t-3|-\int\frac{2t^3+2t^2}{t^2+2t-3}dt=t^2\log|t^2+2t-3|-$ $\displaystyle\int\left(2t-2+\frac{10t-6}{(t-1)(t+3)}\right)dt\cdots(*)$. $\displaystyle\frac{10t-6}{(t-1)(t+3)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+3}$ とおけば (右辺) $\displaystyle=\frac{(A+B)t+3A-B}{(t-1)(t+3)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+B=10\\3A-B=-6\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=1$, $B=9$. 従って $\displaystyle(*)=t^2\log|(t-1)(t+3)|-\int\left(2t-2+\frac{1}{t-1}+\frac{9}{t+3}\right)dt=$ $t^2\log|t-1|+t^2\log|t+3|-t^2+2t-\log|t-1|-9\log|t+3|=$ $(x+2)\log\left|\sqrt{x+3}-1\right|+(x-6)\log\left(\sqrt{x+3}+3\right)-x-3+2\sqrt{x+3}$

(38) $t=\sqrt[4]{x+1}$ とおくと $x=t^4-1$, $dx=4t^3dt$ だから $\displaystyle\int\frac{\log x^3}{4\sqrt[4]{x+1}}dx=\int 3t^2\log(t^4-1)dt=$ $\displaystyle\int(t^3)'\log(t^4-1)dt=t^3\log(t^4-1)-\int\frac{4t^6}{t^4-1}dt=t^3\log(t^4-1)-\int\left(4t^2+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}+\frac{2}{t^2+1}\right)dt=$ $t^3\log(t^4-1)-\dfrac{4}{3}t^3-\log|t-1|+\log|t+1|-2\tan^{-1}t=$ $\sqrt[4]{(x+1)^3}\log x-\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{(x+1)^3}-\log\left|\sqrt[4]{x+1}-1\right|+\log\left|\sqrt[4]{x+1}+1\right|-2\tan^{-1}\sqrt[4]{x+1}$

(39) $\displaystyle\int\frac{\log x}{(1+x)^n}dx=\frac{\log x}{(1-n)(1+x)^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\int\frac{1}{x(1+x)^{n-1}}dx\cdots(*)$ $\displaystyle\frac{1}{x(1+x)^{n-1}}=\frac{A_0}{x}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{A_k}{(1+x)^k}$ とおくと, $\displaystyle\frac{1}{(1+x)^{n-1}}=A_0+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{A_kx}{(1+x)^k}$ だから x に 0 を代入して $A_0=1$ を得る. 従って,

$$\begin{aligned}1&=(1+x)^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}A_kx(1+x)^{n-k-1}=(1+x)^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}A_k(1+x-1)(1+x)^{n-k-1}\\&=(1+x)^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}A_k(1+x)^{n-k}-\sum_{k=1}^{n-1}A_k(1+x)^{n-k-1}=(1+x)^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}A_k(1+x)^{n-k}-\sum_{k=2}^{n}A_{k-1}(1+x)^{n-k}\\&=(A_1+1)(1+x)^{n-1}+\sum_{k=2}^{n-1}(A_k-A_{k-1})(1+x)^{n-k}-A_{n-1}\end{aligned}$$

が得られるため, $A_1=A_{n-1}=-1$, $A_k=A_{k-1}$ $(2\leqq k\leqq n-1)$ が成り立つ. 故に $A_k=-1$ $(1\leqq k\leqq n-1)$ だから $\displaystyle\frac{1}{x(1+x)^{n-1}}=\frac{1}{x}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(1+x)^k}$ が成り立つため $(*)$ により

$$\int\frac{\log x}{(1+x)^n}dx=\frac{\log x}{(1-n)(1+x)^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\left(\log x-\log(1+x)+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(k-1)(1+x)^{k-1}}\right).$$

(40) $x=\tan\theta$ とおけば $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ であり, $\cos^4\theta+\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-2\cos^2\theta\sin^2\theta$ だから,

$$\begin{aligned}\int\frac{1-x^2}{(1+ax+x^2)\sqrt{1+bx+cx^2+bx^3+x^4}}dx&=\int\frac{1-\tan^2\theta}{(1+a\cos\theta\sin\theta)\sqrt{1+b\tan\theta(1+\tan^2\theta)+c\tan^2\theta+\tan^4\theta}}d\theta\\&=\int\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{(1+a\cos\theta\sin\theta)\sqrt{1+b\cos\theta\sin\theta+(c-2)\cos^2\theta\sin^2\theta}}d\theta\\&=\int\frac{4\cos2\theta}{(2+a\sin2\theta)\sqrt{4+2\sin2\theta+(c-2)\sin^22\theta}}d\theta\end{aligned}$$

が得られる． $y = \sin 2\theta$ とおけば $2\cos 2\theta\, d\theta = dy$ だから，上式は $\displaystyle\int \frac{2}{(2+ay)\sqrt{4+2by+(c-2)y^2}}dy$ に等しい．

$c > 2$ または「$c = 2$ かつ $b \neq 0$」の場合，$z = \sqrt{c-2}y + \sqrt{4+2by+(c-2)y^2}$ とおけば $y = \dfrac{z^2-4}{2\left(\sqrt{c-2}z+b\right)}$，$\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{\sqrt{c-2}z^2+2bz+4\sqrt{c-2}}{2\left(\sqrt{c-2}z+b\right)^2}$，$\sqrt{4+2by+(c-2)y^2} = \dfrac{\sqrt{c-2}z^2+2bz+4\sqrt{c-2}}{2\left(\sqrt{c-2}z+b\right)}$ だから

$$\int \frac{2}{(2+ay)\sqrt{4+2by+(c-2)y^2}}dy = \int \frac{4}{az^2+4\sqrt{c-2}z+4b-4a}dz \ \cdots (i)$$

であり，第 3 回の問題 2 の (5) と (6) の結果から $y = \sin(2\tan^{-1}x) = 2\sin(\tan^{-1}x)\cos(\tan^{-1}x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ だから $z = \dfrac{2\sqrt{c-2}x + 2\sqrt{x^4+bx^3+cx^2+bx+1}}{1+x^2}$ が成り立つ．

$a = 0$, $c = 2$ ならば，$(i) = \dfrac{z}{b} = \dfrac{2\sqrt{(1+x^2)^2+bx(1+x^2)}}{b(1+x^2)} = \dfrac{2\sqrt{1+bx+x^2}}{b\sqrt{1+x^2}}$．

$a = 0$, $c > 2$ ならば，$(i) = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{c-2}z+b}dz = \frac{\log\left|\sqrt{c-2}z+b\right|}{\sqrt{c-2}} = \frac{\log\left|\frac{2(c-2)x+2\sqrt{c-2}\sqrt{x^4+bx^3+cx^2+bx+1}}{1+x^2}+b\right|}{\sqrt{c-2}} = \frac{1}{\sqrt{c-2}}\left(\log\left|bx^2+2(c-2)x+b+2\sqrt{c-2}\sqrt{x^4+bx^3+cx^2+bx+1}\right| - \log(1+x^2)\right)$．

$a \neq 0$, $c-2 > a(b-a)$ ならば，$\alpha = \dfrac{-2\sqrt{c-2}-2\sqrt{c-2-a(b-a)}}{a}$，$\beta = \dfrac{-2\sqrt{c-2}+2\sqrt{c-2-a(b-a)}}{a}$ とおけば $(i) = \displaystyle\int \frac{4}{a(z-\alpha)(z-\beta)}dz = \int \frac{4}{a(\beta-\alpha)}\left(\frac{1}{z-\beta}-\frac{1}{z-\alpha}\right)dz = \frac{\log|z-\beta| - \log|z-\alpha|}{\sqrt{c-2-a(b-a)}} = \frac{1}{\sqrt{c-2-a(b-a)}}\log\left|\frac{a\sqrt{c-2}x+a\sqrt{x^4+bx^3+cx^2+bx+1}+\left(\sqrt{c-2}-\sqrt{c-2-a(b-a)}\right)(1+x^2)}{a\sqrt{c-2}x+a\sqrt{x^4+bx^3+cx^2+bx+1}+\left(\sqrt{c-2}+\sqrt{c-2-a(b-a)}\right)(1+x^2)}\right|$．

$a \neq 0$, $c-2 = a(b-a)$ ならば，$(i) = \displaystyle\int \frac{4a}{\left(az+2\sqrt{c-2}\right)^2}dz = \frac{-4}{az+2\sqrt{c-2}} = \frac{-2}{\frac{a\sqrt{c-2}x+a\sqrt{x^4+bx^3+cx^2+bx+1}}{1+x^2}+\sqrt{c-2}} = \frac{-2(1+x^2)}{\sqrt{a(b-a)}(x^2+ax+1)+a\sqrt{x^4+bx^3+(ab-a^2+2)x^2+bx+1}}$．

$a \neq 0$, $c-2 < a(b-a)$ ならば，$(i) = \displaystyle\int \frac{4a}{\left(az+2\sqrt{c-2}\right)^2+4(a(b-a)-c+2)}dz = \frac{2\tan^{-1}\left(\frac{az+2\sqrt{c-2}}{2\sqrt{a(b-a)-c+2}}\right)}{\sqrt{a(b-a)-c+2}} = \frac{2}{\sqrt{a(b-a)-c+2}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{c-2}(x^2+ax+1)+a\sqrt{x^4+bx^3+cx^2+bx+1}}{\sqrt{a(b-a)-c+2}(1+x^2)}\right)$．

$c < 2$ の場合，$\alpha = \dfrac{b-\sqrt{b^2-4c+8}}{2-c}$，$\beta = \dfrac{b+\sqrt{b^2-4c+8}}{2-c}$ とおき，$z = \sqrt{\dfrac{\beta-y}{y-\alpha}}$ とおけば $y = \dfrac{\beta+\alpha z^2}{1+z^2}$，$\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{2(\alpha-\beta)z}{(1+z^2)^2}$ だから

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{(2+ay)\sqrt{4+2by+(c-2)y^2}}dy &= \int \frac{2}{\sqrt{2-c}(2+ay)(y-\alpha)\sqrt{\frac{\beta-y}{y-\alpha}}}dy \\ &= \int \frac{4(\alpha-\beta)z}{\sqrt{2-c}z(1+z^2)^2\left(2+a\frac{\beta+\alpha z^2}{1+z^2}\right)\left(\frac{\beta+\alpha z^2}{1+z^2}-\alpha\right)}dz \\ &= \int \frac{-4}{\sqrt{2-c}((a\alpha+2)z^2+a\beta+2)}dz \ \cdots (ii)\end{aligned}$$

ここで，$z = \sqrt{\dfrac{\beta-y}{y-\alpha}} = \sqrt{\dfrac{\left(b+\sqrt{b^2-4c+8}\right)(1+x^2)-2(2-c)x}{2(2-c)x-\left(b-\sqrt{b^2-4c+8}\right)(1+x^2)}}$ と $(a\beta+2)(a\alpha+2) = \dfrac{4(2-c+ab-a^2)}{2-c}$ が成

り立つことに注意すると, $2-c+ab-a^2>0$ ならば $a\beta+2$ と $a\alpha+2$ は同符号だから

$$\begin{aligned}(ii) &= \frac{-4}{\sqrt{2-c}(a\alpha+2)}\int\frac{1}{z^2+\frac{a\beta+2}{a\alpha+2}}dz = \frac{-4}{\sqrt{2-c}(a\alpha+2)}\sqrt{\frac{a\alpha+2}{a\beta+2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a\alpha+2}{a\beta+2}}\,z\right)\\ &= \begin{cases}\dfrac{-2}{\sqrt{2-c+a(b-a)}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{b^2-4c+8}(1+ax+x^2)+(b-2a)(1+x^2)-(2(2-c)+ab)x}{\sqrt{b^2-4c+8}(1+ax+x^2)-(b-2a)(1+x^2)+(2(2-c)+ab)x}}\right) & a\alpha>-2\\ \dfrac{2}{\sqrt{2-c+a(b-a)}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{b^2-4c+8}(1+ax+x^2)+(b-2a)(1+x^2)-(2(2-c)+ab)x}{\sqrt{b^2-4c+8}(1+ax+x^2)-(b-2a)(1+x^2)+(2(2-c)+ab)x}}\right) & a\alpha<-2\end{cases}\end{aligned}$$

が得られる. $2-c+ab-a^2<0$ ならば $a\beta+2$ と $a\alpha+2$ は異符号だから

$$\begin{aligned}(ii) &= \frac{-4}{\sqrt{2-c}(a\alpha+2)}\int\frac{1}{z^2-\left(-\frac{a\beta+2}{a\alpha+2}\right)}dz = \frac{-2}{\sqrt{2-c}(a\alpha+2)}\sqrt{-\frac{a\alpha+2}{a\beta+2}}\int\left(\frac{1}{z-\sqrt{-\frac{a\beta+2}{a\alpha+2}}}-\frac{1}{z+\sqrt{-\frac{a\beta+2}{a\alpha+2}}}\right)dz\\ &= \begin{cases}\dfrac{-1}{\sqrt{c-2-a(b-a)}}\log\left|\dfrac{\sqrt{2-c}(a\alpha+2)z-2\sqrt{c-2-a(b-a)}}{\sqrt{2-c}(a\alpha+2)z+2\sqrt{c-2-a(b-a)}}\right| & a\alpha>-2\\ \dfrac{1}{\sqrt{c-2-a(b-a)}}\log\left|\dfrac{\sqrt{2-c}(a\alpha+2)z+2\sqrt{c-2-a(b-a)}}{\sqrt{2-c}(a\alpha+2)z-2\sqrt{c-2-a(b-a)}}\right| & a\alpha<-2\end{cases}\\ &= \frac{1}{\sqrt{c-2-a(b-a)}}\log\left|\frac{\frac{2(2-c)+ab-a\sqrt{b^2-4c+8}}{\sqrt{2-c}}\sqrt{\frac{\left(b+\sqrt{b^2-4c+8}\right)(1+x^2)-2(2-c)x}{2(2-c)x-\left(b-\sqrt{b^2-4c+8}\right)(1+x^2)}}+2\sqrt{c-2-a(b-a)}}{\frac{2(2-c)+ab-a\sqrt{b^2-4c+8}}{\sqrt{2-c}}\sqrt{\frac{\left(b+\sqrt{b^2-4c+8}\right)(1+x^2)-2(2-c)x}{2(2-c)x-\left(b-\sqrt{b^2-4c+8}\right)(1+x^2)}}-2\sqrt{c-2-a(b-a)}}\right|.\end{aligned}$$

$2-c+ab-a^2=0$ ならば $\alpha=\begin{cases}\frac{2}{a-b} & b\geqq 2a\\ -\frac{2}{a} & b<2a\end{cases}$, $\beta=\begin{cases}-\frac{2}{a} & b\geqq 2a\\ \frac{2}{a-b} & b<2a\end{cases}$ であり, $z=\begin{cases}\sqrt{\frac{(a-b)(1+ax+x^2)}{a(1-(a-b)x+x^2)}} & b\geqq 2a\\ \sqrt{\frac{a(1-(a-b)x+x^2)}{(a-b)(1+ax+x^2)}} & b<2a\end{cases}$ が成り立つ. $b=2a$ ならば $2-c=-a^2\leqq 0$ となり, $c<2$ であるという仮定と矛盾するため, $b\neq 2a$ である. $b>2a$ のとき $(ii)=\displaystyle\int\frac{-2(a-b)}{\sqrt{a(a-b)}(2a-b)z^2}dz=\frac{2(a-b)}{\sqrt{a(a-b)}(2a-b)z}=\frac{2(a-b)}{(2a-b)|a-b|}\sqrt{\frac{1-(a-b)x+x^2}{1+ax+x^2}}$, $b<2a$ のとき $(ii)=\displaystyle\int\frac{-2(a-b)}{\sqrt{a(a-b)}(2a-b)}dz=\frac{-2(a-b)}{\sqrt{a(a-b)}(2a-b)}z=\frac{-2(a-b)}{(2a-b)|a-b|}\sqrt{\frac{1-(a-b)x+x^2}{1+ax+x^2}}$ だから, $c<2$ かつ $2-c+ab-a^2=0$ の場合は $(ii)=\dfrac{-2(a-b)}{|2a-b||a-b|}\sqrt{\dfrac{1-(a-b)x+x^2}{1+ax+x^2}}$ である.

3. (1) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$ であり, x が $\dfrac{\pi}{4}$ から $\dfrac{\pi}{3}$ まで動くとき, t は $\tan\dfrac{\pi}{8}$ から $\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ まで動く. ここで, $\dfrac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$ だから $\tan^2\dfrac{\pi}{8}+2\tan\dfrac{\pi}{8}-1=0$ が成り立つため $\tan\dfrac{\pi}{8}$ は2次方程式 $x^2+2x-1=0$ の正の解である. 従って $\tan\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ である. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{1+\cos x}dx=\int_{\tan\frac{\pi}{8}}^{\tan\frac{\pi}{6}}\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}dt=\int_{\tan\frac{\pi}{8}}^{\tan\frac{\pi}{6}}\frac{1-t^2}{1+t^2}dt=\int_{\tan\frac{\pi}{8}}^{\tan\frac{\pi}{6}}\left(-1+\frac{2}{1+t^2}\right)dt=\left[2\tan^{-1}t-t\right]_{\tan\frac{\pi}{8}}^{\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}-1$

(2) $R(X,Y)=\dfrac{Y^6}{X^4-X^2Y^2+Y^4}$ として教科書の問 3.21 の (iv) を用いると,

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 x}{\cos^4 x - \cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x}dx$ だから

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x}dx &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x}dx\right. \\
&\qquad \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 x}{\cos^4 x - \cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x}dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 x + \sin^6 x}{\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x}dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)\left(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x\right)}{2(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)}dx \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

(3) $x = \tan t$ とおけば $t = \tan^{-1} x$ より $\dfrac{1}{x^2+1}dx = dt$ であり, x が 0 から 1 まで動くとき, t は 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ まで動くため, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x^2+1}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\tan t + 1)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin t + \cos t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos t dt \cdots (*)$.
ここで $\sin t + \cos t = \sqrt{2}\sin\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ だから $s = t + \dfrac{\pi}{4}$ とおけば, $dt = ds$ であり, t が 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ まで動くとき, s は $\dfrac{\pi}{4}$ から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くため, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin t + \cos t)dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\sqrt{2}\sin s\right)ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\log\sqrt{2} + \log\sin s\right)ds =$ $\displaystyle\frac{\pi\log 2}{8} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin s ds$. 一方, $\cos t = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$ だから $s = \dfrac{\pi}{2} - t$ とおけば, $dt = -ds$ であり, t が 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ まで動くとき, s は $\dfrac{\pi}{2}$ から $\dfrac{\pi}{4}$ まで動くため, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos t dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \log\sin s ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin s ds$. 従って $(*)$ から $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x^2+1}dx = \frac{\pi\log 2}{8} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin s ds - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin s ds = \frac{\pi\log 2}{8}$.

(4) $y = 3x^2 + 1$ とおけば $xdx = \dfrac{1}{6}dy$, $x^2 = \dfrac{y-1}{3}$ だから

$$\int \frac{x^3}{(3x^2+1)^4}dx = \int \frac{y-1}{18y^4}dy = \frac{1}{18}\int\left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{y^4}\right)dy = \frac{1}{18}\left(\frac{1}{3y^3} - \frac{1}{2y^2}\right) = \frac{-9x^2-1}{108(3x^2+1)^3}$$

が得られる. 従って, 部分積分を行った後, $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ と変数変換を行えば $x = \dfrac{1-y^2}{1+y^2}$, $dx = \dfrac{-4y}{(1+y^2)^2}dy$ だから

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^3\sin^{-1} x}{(3x^2+1)^4}dx &= \left[\frac{-(9x^2+1)\sin^{-1} x}{108(3x^2+1)^3}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{9x^2+1}{108(3x^2+1)^3\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= -\frac{5\pi}{6912} + \frac{1}{1728}\int_0^1 \frac{(y^2+1)^3(5y^4-8y^2+5)}{(y^4-y^2+1)^3}dy \ \cdots (i)
\end{aligned}$$

が得られる. $y^4 - y^2 + 1 = (y^2+1)^2 - 3y^2 = \left(y^2 - \sqrt{3}y + 1\right)\left(y^2 + \sqrt{3}y + 1\right)$ だから

$$\begin{aligned}
\frac{(y^2+1)^3(5y^4-8y^2+5)}{(y^4-y^2+1)^3} &= \frac{Ay+B}{y^2-\sqrt{3}y+1} + \frac{A'y+B'}{y^2+\sqrt{3}y+1} + \frac{Cy+D}{\left(y^2-\sqrt{3}y+1\right)^2} + \frac{C'y+D'}{\left(y^2+\sqrt{3}y+1\right)^2} \\
&\quad + \frac{Ey+F}{\left(y^2-\sqrt{3}y+1\right)^3} + \frac{E'y+F'}{\left(y^2+\sqrt{3}y+1\right)^3}
\end{aligned}$$

を満たす実数 A, A', B, B', C, C', D, D', E, E', F, F' が存在するが, 左辺は y の偶関数であることから $A' = -A$, $B' = B$, $C' = -C$, $D' = D$, $E' = -E$, $F' = F$ である. このとき,

$$\begin{aligned}
\frac{(y^2+1)^3(5y^4-8y^2+5)}{(y^4-y^2+1)^3} &= \frac{Ay+B}{y^2-\sqrt{3}y+1} + \frac{-Ay+B}{y^2+\sqrt{3}y+1} + \frac{Cy+D}{\left(y^2-\sqrt{3}y+1\right)^2} + \frac{-Cy+D}{\left(y^2+\sqrt{3}y+1\right)^2} \\
&\quad + \frac{Ey+F}{\left(y^2-\sqrt{3}y+1\right)^3} + \frac{-Ey+F}{\left(y^2+\sqrt{3}y+1\right)^3}
\end{aligned}$$

となり, 左辺の分子は $5y^{10}+7y^8-4y^6-4y^4+7y^2+5$ であり, 右辺を通分したときの分子は $\left(2\sqrt{3}A+2B\right)y^{10}-\left(4\sqrt{3}A+2B-4\sqrt{3}C-2D\right)y^8+\left(6\sqrt{3}A+2B+8D+6\sqrt{3}E+2F\right)y^6-\left(4\sqrt{3}A-2B+6D-18\sqrt{3}E-24F\right)y^4+\left(2\sqrt{3}A-2B+4\sqrt{3}C+8D+6\sqrt{3}E+24F\right)y^2+2B+2D+2F$ となるため, A, B, C, D, E, F は

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -4\sqrt{3} & -2 & 4\sqrt{3} & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 6\sqrt{3} & 2 & 0 & 8 & 6\sqrt{3} & 2 & -4 \\ -4\sqrt{3} & 2 & 0 & -6 & 18\sqrt{3} & 24 & -4 \\ 2\sqrt{3} & -2 & 4\sqrt{3} & 8 & 6\sqrt{3} & 24 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

を拡大係数行列とする連立一次方程式の解である. 従って $A=0$, $B=\dfrac{5}{2}$, $C=\dfrac{17\sqrt{3}}{16}$, $D=-\dfrac{3}{8}$, $E=-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$, $F=\dfrac{3}{8}$ が得られる. 一方, $y=-z$ と変数変換すれば,

$$\int_0^1 \frac{-Py+Q}{\left(y^2+\sqrt{3}y+1\right)^k}dy=\int_0^{-1}\frac{Pz+Q}{\left(z^2-\sqrt{3}z+1\right)^k}(-1)dz=\int_{-1}^0 \frac{Py+Q}{\left(y^2-\sqrt{3}y+1\right)^k}dy$$

だから, 次の等式が成り立つ.

$$\int_0^1 \frac{(y^2+1)^3(5y^4-8y^2+5)}{(y^4-y^2+1)^3}dy=\frac{5}{2}\int_{-1}^1\frac{1}{y^2-\sqrt{3}y+1}dy+\int_{-1}^1\frac{\frac{17\sqrt{3}}{16}y-\frac{3}{8}}{\left(y^2-\sqrt{3}y+1\right)^2}dy+\int_{-1}^1\frac{-\frac{3\sqrt{3}}{8}y+\frac{3}{8}}{\left(y^2-\sqrt{3}y+1\right)^3}dy \cdots (ii)$$

さらに $t=y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と変数変換し, $2+\sqrt{3}=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}>0$ であることに注意すれば, $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\int_{-1}^1\frac{1}{y^2-\sqrt{3}y+1}dy=\int_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{t^2+\frac{1}{4}}dt=\left[2\tan^{-1}2t\right]_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\left(\tan^{-1}\left(2-\sqrt{3}\right)+\tan^{-1}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)=\pi$$

となる. 同様に $t=y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と変数変換すれば, 次が得られる.

$$\int_{-1}^1\frac{\frac{17\sqrt{3}}{16}y-\frac{3}{8}}{\left(y^2-\sqrt{3}y+1\right)^2}dy=\int_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\frac{17\sqrt{3}}{16}t+\frac{39}{32}}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{17\sqrt{3}}{16}\int_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{t}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^2}dt+\frac{39}{32}\int_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^2}dt$$

$$\int_{-1}^1\frac{-\frac{3\sqrt{3}}{8}y+\frac{3}{8}}{\left(y^2-\sqrt{3}y+1\right)^3}dy=\int_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{-\frac{3\sqrt{3}}{8}t-\frac{3}{16}}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^3}dt=-\frac{3\sqrt{3}}{8}\int_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{t}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^3}dt-\frac{3}{16}\int_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^3}dt$$

ここで,

$$\int_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{t}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^2}dt=\left[-\frac{2}{4t^2+1}\right]_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\sqrt{3},\quad \int_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{t}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^3}dt=\left[-\frac{4}{\left(4t^2+1\right)^2}\right]_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-2\sqrt{3}$$

であり, $I_k=\displaystyle\int_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^k}dt$ とおけば, $I_1=\pi$, $I_{k+1}=\dfrac{1}{k}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{k-1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{k-1}\right)+\dfrac{4k-2}{k}I_k$ だから $I_2=2+2I_1=2\pi+2$, $I_3=2+3I_2=6\pi+8$ が得られる. 故に (ii) から

$$\int_0^1\frac{(y^2+1)^3(5y^4-8y^2+5)}{(y^4-y^2+1)^3}dy=\frac{5\pi}{2}+\frac{17\sqrt{3}}{16}\left(-\sqrt{3}\right)+\frac{39}{32}(2\pi+2)-\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(-2\sqrt{3}\right)-\frac{3}{16}(6\pi+8)=\frac{61\pi}{16}$$

となるため, (i) により $\displaystyle\int_0^1\frac{x^3\sin^{-1}x}{(3x^2+1)^4}dx=-\frac{5\pi}{6912}+\frac{1}{1728}\frac{61\pi}{16}=\frac{41\pi}{27648}$.

(5) $\sqrt{1-\dfrac{\cos^2 a}{\cos^2 x}}=\sqrt{1-\cos^2 a(1+\tan^2 x)}=\sqrt{\sin^2 a-\cos^2 a\tan^2 x}=\cos a\sqrt{\tan^2 a-\tan^2 x}$ より $x=\tan^{-1}(\tan a\sin t)$ とおくと, $dx=\dfrac{\tan a\cos t}{1+\tan^2 a\sin^2 t}dt$, $\sqrt{\tan^2 a-\tan^2 x}=\tan a\cos t$ であり, t が $-\dfrac{\pi}{2}$ から $\dfrac{\pi}{2}$ ま

で動けば, x は $-a$ から a まで動くため, 次の等式が成り立つ.

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{\cos^2 a}{\cos^2 x}}dx = \int_{-a}^{a}\cos a\sqrt{\tan^2 a - \tan^2 x}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos a\tan^2 a\cos^2 t}{1+\tan^2 a\sin^2 t}dt = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 a\cos a\cos^2 t}{1-\sin^2 a\cos^2 t}dt\cdots(*)$$

ここで, $\dfrac{\sin^2 a\cos a\cos^2 t}{1-\sin^2 a\cos^2 t} = \cos a\left(-1+\dfrac{1}{1-\sin^2 a\cos^2 t}\right) = \dfrac{\cos a}{2}\left(\dfrac{1}{1-\sin a\cos t}+\dfrac{1}{1+\sin a\cos t}-2\right)$ だから, 問題 1 の (11) の結果と $x>0$ ならば $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$ であることを用いれば

$$\begin{aligned}
(*) &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos a\left(\frac{1}{1-\sin a\cos t}+\frac{1}{1+\sin a\cos t}-2\right)dt\\
&= \cos a\left[\frac{2}{\cos a}\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sin a}{1-\sin a}}\tan\frac{t}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sin a}{1+\sin a}}\tan\frac{t}{2}\right)\right)-2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \cos a\left(\frac{2}{\cos a}\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+\sin a}{1-\sin a}}\right)+\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\sin a}{1+\sin a}}\right)\right)-\pi\right) = \pi(1-\cos a)
\end{aligned}$$

(6) $t=r^2+a^2-x^2$ とおくと $dt=-2xdx$ であり, x が $r-a$ から r まで動けば t は $2ar$ から a^2 まで動くため, $\displaystyle\int_{r-a}^{r}\frac{x(x^2+r^2-a^2)}{2\sqrt{4a^2x^2-(r^2-a^2-x^2)^2}}dx = \int_{a^2}^{2ar}\frac{2r^2-t}{4\sqrt{4a^2r^2-t^2}}dt = \int_{a^2}^{2ar}\frac{r^2}{2\sqrt{4a^2r^2-t^2}}dt - \int_{a^2}^{2ar}\frac{t}{4\sqrt{4a^2r^2-t^2}}dt =$ $\displaystyle\left[\frac{r^2}{2}\sin^{-1}\frac{t}{2ar}\right]_{a^2}^{2ar}+\left[\frac{1}{4}\sqrt{4a^2r^2-t^2}\right]_{a^2}^{2ar} = \frac{\pi r^2}{4}-\frac{r^2}{2}\sin^{-1}\frac{a}{2r}-\frac{a}{4}\sqrt{4r^2-a^2}$. $\cos^{-1}\dfrac{-a}{2r}=\dfrac{\pi}{2}+\sin^{-1}\dfrac{a}{2r}$ だから $\displaystyle\int_{r-a}^{r}x\cos^{-1}\frac{r^2-a^2-x^2}{2ax}dx = \left[\frac{x^2}{2}\cos^{-1}\frac{r^2-a^2-x^2}{2ax}\right]_{r-a}^{r} - \int_{r-a}^{r}\frac{x(x^2+r^2-a^2)}{2\sqrt{4a^2x^2-(r^2-a^2-x^2)^2}}dx = \frac{r^2}{2}\cos^{-1}\frac{-a}{2r} -$ $\displaystyle\int_{r-a}^{r}\frac{x(x^2+r^2-a^2)}{2\sqrt{4a^2x^2-(r^2-a^2-x^2)^2}}dx = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\sin^{-1}\frac{a}{2r}\right)-\frac{\pi r^2}{4}+\frac{a}{4}\sqrt{4r^2-a^2} = r^2\sin^{-1}\frac{a}{2r}+\frac{a}{4}\sqrt{4r^2-a^2}$

4. (1) $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ は単位円上の点だから $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす $0\leqq\theta<2\pi$ がある. このとき, 加法定理から次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
a\sin x+b\cos x &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)\\
&= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\sin x+\sin\theta\cos x) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)
\end{aligned}$$

一般に φ を周期 τ をもつ連続な周期関数とすれば, $\theta\in\boldsymbol{R}$ に対して, $y=x+\theta$, $z=y-\tau$ と変数変換すれば

$$\begin{aligned}
\int_0^{\tau}\varphi(x+\theta)dx &= \int_{\theta}^{\tau+\theta}\varphi(y)dy = \int_{\theta}^{\tau}\varphi(y)dy+\int_{\tau}^{\tau+\theta}\varphi(y)dy = \int_{\theta}^{\tau}\varphi(y)dy+\int_{\tau}^{\tau+\theta}\varphi(y-\tau)dy\\
&= \int_{\theta}^{\tau}\varphi(y)dy+\int_0^{\theta}\varphi(z)dz = \int_{\theta}^{\tau}\varphi(x)dx+\int_0^{\theta}\varphi(x)dx = \int_0^{\tau}\varphi(x)dx
\end{aligned}$$

だから, $\alpha\in\boldsymbol{R}$ に対し, $y=x-\alpha$ と変数変換すれば $\displaystyle\int_{\alpha}^{\tau+\alpha}\varphi(x)dx = \int_0^{\tau}\varphi(y+\alpha)dy = \int_0^{\tau}\varphi(x)dx$ が成り立つ. 従って $\displaystyle\int_0^{\tau}\varphi(x+\theta)dx = \int_{\alpha}^{\tau+\alpha}\varphi(x)dx$ が得られる. また, $y=\pi-x$ と変数変換すれば

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin x\right)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin(\pi-y)\right)dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin y\right)dy$$

が成り立つことに注意すると, 以上のことから,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(a\sin x + b\cos x)dx &= \int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)\right)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin x\right)dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin x\right)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin x\right)dx \\ &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin x\right)dx\end{aligned}$$

(2) $I = \displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x f(\cos x)dx$ とおく. $y = \pi - x$ と変数変換すれば

$$\begin{aligned}I &= -\int_{\pi}^{0} (\pi - y)\sin(\pi - y)f(\cos(\pi - y))dy = \int_0^{\pi} (\pi - y)\sin y f(-\cos y)dy \\ &= \int_0^{\pi} (\pi - x)\sin x f(\cos x)dx = \pi\int_0^{\pi} \sin x f(\cos x)dx - \int_0^{\pi} x\sin x f(\cos x)dx \\ &= \pi\int_0^{\pi} \sin x f(\cos x)dx - I\end{aligned}$$

だから $2I = \pi\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x f(\cos x)dx$ である. さらに, $z = \cos x$ と変数変換して, f が偶関数であることを用いれば, $2I = -\pi\displaystyle\int_1^{-1} f(z)dz = 2\pi\int_0^1 f(x)dx$ だから $I = \pi\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ が得られる.

(3) $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} xR(\sin x, \cos x)dx$ とおく. $y = \dfrac{\pi}{2} - x$ と変数変換すれば, $R(Y,X) = R(X,Y)$ より

$$\begin{aligned}J &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\frac{\pi}{2} - y\right)R\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right), \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - y\right)R(\cos y, \sin y)dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)R(\sin x, \cos x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R(\sin x, \cos x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xR(\sin x, \cos x)dx \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R(\sin x, \cos x)dx - J\end{aligned}$$

だから $2J = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} R(\sin x, \cos x)dx$ である. 故に $J = \dfrac{\pi}{4}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} R(\sin x, \cos x)dx$.

5. (1) $a = b = 1$, $f(x) = x^{10}$ として前問の (1) を用い, さらに $\left(\sqrt{2}\sin x\right)^{10}$ が偶関数であることと, 教科書の 91 ページの公式から
$\displaystyle\int_0^{2\pi} (\sin x + \cos x)^{10}dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{2}\sin x\right)^{10}dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 32\sin^{10} x dx = 128\frac{9!!}{10!!}\frac{\pi}{2} = \frac{63\pi}{4}$.

(2) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ として前問の (2) を用いると, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \pi\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \pi\left[\tan^{-1} x\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{4}$.

(3) $\dfrac{x\sin^3 x}{2+\sin^2 x} = \dfrac{x\sin x(1-\cos^2 x)}{3-\cos^2 x}$ だから $f(x) = \dfrac{1-x^2}{3-x^2}$ として前問の (2) を用いると,
$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin^3 x}{2+\sin^2 x}dx = \pi\int_0^1 \frac{1-x^2}{3-x^2}dx = \pi\int_0^1 \left(1 - \frac{2}{3-x^2}\right)dx = \pi\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}+x} + \frac{1}{\sqrt{3}-x}\right)\right)dx =$
$\displaystyle\pi\left[x - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\log\left(\sqrt{3}+x\right) - \log\left(\sqrt{3}-x\right)\right)\right]_0^1 = \pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\log\left(\sqrt{3}+2\right)\right)$.

(4) $R(X,Y) = \dfrac{XY}{X^4+Y^4}$ として前問の (3) を用い, $y = \sin^2 x$ と変数変換すれば, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x\cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx =$
$\displaystyle\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x + (1-\sin^2 x)^2}dx = \frac{\pi}{8}\int_0^1 \frac{1}{y^2+(1-y)^2}dy = \frac{\pi}{16}\int_0^1 \frac{1}{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}dy =$
$\displaystyle\frac{\pi}{16}\left[2\tan^{-1}(2y-1)\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{16}$.

微積分学 I 演習問題　第 12 回　広義積分

1. 次の広義積分を求めよ．ただし a, b, c, k, α は定数で, $a>0$, $c>1$, $1<\alpha<\pi$, (24), (25) では n は 2 以上の自然数, (54) では $0 \leqq a < b \leqq 2\pi - a$, (55) では $a>1$ とする．

(1) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{8x+64}{x(x^2+4)^2}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$　(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{k-1}}{x^{2k}+2x^k+2}dx$　(4) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sin^{-1}x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\log 2} \frac{1}{e^x\sqrt{e^x-1}}dx$　(6) $\displaystyle\int_0^\alpha \left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)dx$　(7) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^\infty \frac{8x-16}{x^6+x^4-x^2-1}dx$　(8) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}x}{(1+x^2)^2}dx$

(9) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx dx$　(10) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$　(11) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx$　(12) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(13) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4\sin^{-1}x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$　(14) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^7}{(1+x^4)^4}dx$　(15) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+(\sin^{-1}x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$　(16) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}x}{x^2}dx$

(17) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}dx$　(18) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{2-x^2}}dx$　(19) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}dx$　(20) $\displaystyle\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx$

(21) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{x^2}dx$　(22) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)^2}dx$　(23) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1+(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}dx$　(24) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{(1+x)^n}dx$

(25) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{(1+x)^n}dx$　(26) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{\sin x}dx$　(27) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\log\sin x dx$　(28) $\displaystyle\int_0^1 x(\log x)^2dx$

(29) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx$　(30) $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n-1}e^{-ax^n}dx$　(31) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{2x-1}{(x+1)^2(x-1)}dx$　(32) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2+3}}dx$

(33) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log(x^2+1)}{x^3}dx$　(34) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{e^{2x}-e^x}dx$　(35) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(1+\log x)^2}{x^2}dx$　(36) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\log x}{\sqrt{x-1}}dx$

(37) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x^k}dx$　(38) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^k}dx$　(39) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{(c-x)\sqrt{1-x^2}}dx$　(40) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\log x}{(1+x)^4}dx$

(41) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x\sqrt{e^x+1}}dx$　(42) $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{\log x}{x}\right)^2dx$　(43) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log(x^{2a}+1)}{x^{a+1}}dx$　(44) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}x}{x^3}dx$

(45) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\left(\tan^{-1}x\right)}{1+x^2}dx$　(46) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^n}dx$　(47) $\displaystyle\int_1^e \left(\frac{1}{x\log x}-\frac{1}{x-1}\right)dx$　(48) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(49) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\pi-2\tan^{-1}x}{x^2}dx$　(50) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x+1}dx$　(51) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\log 3} e^{2x}\log(e^x+1)dx$　(52) $\displaystyle\int_0^1 \frac{ax^{a-1}}{\sqrt{1-x^a}}dx$

(53) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}\,dx$　(54) $\displaystyle\int_a^b \sqrt{\frac{1-\cos x}{\cos a-\cos x}}\,dx$　(55) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}dx$　(56) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx$

2. 次の広義積分の収束・発散を調べよ．ただし $\alpha>0$ とする．

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{1-x^2}dx$　(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\tan x dx$　(3) $\displaystyle\int_0^\infty \tan^{-1}x dx$　(4) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{\cos x}dx$

(5) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}dx$　(6) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}dx$　(7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx$　(8) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$

(9) $\displaystyle\int_0^2 2^x\log x dx$　(10) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^6\sin^2 x}dx$　(11) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sin x}dx$　(12) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$

(13) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$　(14) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{(x+1)\log x}dx$　(15) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}x}{x}dx$　(16) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$

(17) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}x}{x\sqrt{x-1}}dx$　(18) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}dx$　(19) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{x}{\sin x}dx$　(20) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x\sqrt{x+1}}dx$

(21) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}dx$　(22) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x(x+1)}}dx$　(23) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^3}dx$　(24) $\displaystyle\int_0^\infty \sin\frac{1}{x^2}dx$

(25) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+\log x}dx$　(26) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x-1}dx$　(27) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$　(28) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^\alpha}{(\sin x)^{\alpha+1}}dx$

(29) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x\cos x}{x}dx$　(30) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}}dx$　(31) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{\sinh x}dx$　(32) $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2dx$

3. 広義積分 $\displaystyle\int_r^\infty \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-p)^2(x^2+q^2)}dx$ (ただし $r>p$) を求めよ．

4. ベータ関数 $B(p,q)$ $(p>0,\ q>0)$ に関する次の等式を示せ.

(1) $B(p,q)=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{p-1}\theta\sin^{q-1}\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^{p+q}}\,d\theta$

(2) $B(p,q)=B(q,p)$

(3) $p,\ q$ が自然数の場合, $B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

5. $p>0$ とするとき, ベータ関数を用いて積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^{2p}x}{(1+e^x)\sqrt{1+\cos x}}\,dx$ の値を表せ.

6. $s>0$ とするとき, 次の級数の収束発散を判定せよ. (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^s}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)(\log(\log n))^s}$

7. 以下の各問で与えられたの広義積分と級数の収束・発散を判定せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3+x+1}}dx,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}}$ (2) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x^4+1}}dx,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{\sqrt{n^4+1}}$

(3) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)dx,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ (4) $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}(\log x)^2}dx,\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}(\log n)^2}$

(5) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$

8. $a>-1$ かつ $a\neq 0$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty}\left(\log(x+a)-\log x-\frac{a}{x+a}\right)dx$ の値を求めよ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log\left(1+\frac{a}{n}\right)-\frac{a}{n+a}\right)$ の収束・発散を判定せよ.

9. 一般項が $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\log n$ で与えられる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について次の問いに答えよ.

(1) $\log x=\displaystyle\int_1^x\frac{dt}{t}$ であることを用いて, $a_n>\log(n+1)-\log n$ が成り立つことを示せ.

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列であることを示すことにより, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ.

(3) $\dfrac{1}{2}<\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n<\frac{5}{6}$ であることを示せ.

10. (発展問題) (1) $0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ ならば $\dfrac{2}{\pi}x\leqq\sin x$ であることを用いて $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin x\,dx$ は収束することを示せ.

(2) $2I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx$ を示し, I の値を求めよ.

11. (発展問題) 前問の結果を用いて, 次の積分の値を求めよ. ただし (14) の a は $-1\leqq a\leqq 1$ を満たすとする.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)^2dx$ (4) $\displaystyle\int_0^{\pi}\log(1-\cos x)dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi}\log(1+\cos x)dx$ (6) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1-\cos x}dx$ (7) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (8) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\sin^{-1}x}{x}dx$

(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x\,dx$ (10) $\displaystyle\int_0^{\pi}x\log\sin x\,dx$ (11) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\tan x\,dx$ (12) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{x^2\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(13) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\log\sin x\,dx$ (14) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\log|a-x|}{\sqrt{1-x^2}}dx$

12. (発展問題) $f:(a,b]\to\boldsymbol{R}$ は単調減少関数であり, 広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は収束するとする.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a+0}(x-a)f(x)=0$ であることを示せ.

(2) 命題「単調減少関数 $g:(0,1]\to\boldsymbol{R}$ が $\displaystyle\lim_{x\to+0}xg(x)=0$ を満たせば, 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ は収束する.」が正しければ証明をし, 正しくなければ, 反例を挙げよ.

(3) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}$ が成り立つことを示せ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ を求めよ.

第 12 回の演習問題の解答

1. (1) $\dfrac{8x+64}{x(x^2+4)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+4} + \dfrac{Dx+E}{(x^2+4)^2}$ とおくと,

$$(\text{右辺}) = \frac{(A+B)x^4 + Cx^3 + (8A+4B+D)x^2 + (4C+E)x + 16A}{x(x^2+4)^2}$$

より, $\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ 8A+4B+D=0 \\ 4C+E=8 \\ 16A=64 \end{cases}$. これを解けば, $A=4$, $B=-4$, $C=0$, $D=-16$, $E=8$ となるため $\dfrac{8x+64}{x(x^2+4)^2} = \dfrac{4}{x} - \dfrac{4x}{x^2+4} - \dfrac{16x-8}{(x^2+4)^2}$ である. 教科書の問 3.10 の結果から $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+4)^2}dx = \frac{x}{8(x^2+4)} + \frac{1}{16}\tan^{-1}\frac{x}{2}$ より $\displaystyle\int_2^\infty \frac{8x+64}{x(x^2+4)^2}dx = \int_2^\infty \left(\frac{4}{x} - \frac{4x}{x^2+4} - \frac{16x-8}{(x^2+4)^2}\right)dx = \left[2\log\frac{x^2}{x^2+4} + \frac{8}{x^2+4} + \frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}\right]_2^\infty = \frac{\pi}{8} + 2\log 2 - \frac{5}{4}$.

(2) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = -\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{x} = \frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x} = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\frac{x}{\sin x}$ であり, ロピタルの定理から $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{2} = 0$ だから $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \left[\frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\frac{x}{\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} - \lim_{x\to+0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\frac{x}{\sin x} = \frac{2}{\pi}$

(3) $k=0$ ならば与えられた広義積分は発散するため, $k\neq 0$ の場合を考える. $t=x^k$ とおくと $x^{k-1}dx = \dfrac{t}{k}dt$ だから $\displaystyle\int\frac{x^{k-1}}{x^{2k}+2x^k+2}dx = \int\frac{1}{k((t+1)^2+1)}dt = \frac{1}{k}\tan^{-1}(t+1)t = \frac{1}{k}\tan^{-1}(x^k+1)$ である. 従って $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{k-1}}{x^{2k}+2x^k+2}dx = \frac{1}{k}\left(\lim_{t\to\infty}\tan^{-1}(t^k+1) - \lim_{s\to+0}\tan^{-1}(s^k+1)\right) = \frac{\pi}{4|k|}$.

(4) $\theta = \sin^{-1}x$ とおくと $x=\dfrac{1}{2}$ のとき $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ であり, $x\to 1-0$ のとき, $\theta\to\dfrac{\pi}{2}-0$ である. また $x=\sin\theta$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d\theta$ だから $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sin^{-1}x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\theta}{\sin^2\theta}d\theta$ である.
$\displaystyle\int\frac{\theta}{\sin^2\theta}d\theta = \int\theta\left(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)'d\theta = -\frac{\theta\cos\theta}{\sin\theta} + \int\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta = -\frac{\theta\cos\theta}{\sin\theta} + \log|\sin\theta|$ だから
$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\theta}{\sin^2\theta}d\theta = \left[-\frac{\theta\cos\theta}{\sin\theta} + \log|\sin\theta|\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \log 2$

(5) $t=\sqrt{e^x-1}$ とおくと, $x\to+0$ のとき, $t\to+0$ であり, $x=\log 2$ ならば $t=1$ である. また, $x=\log(t^2+1)$, $dx = \dfrac{2t}{t^2+1}dt$ だから $\displaystyle\int_0^{\log 2}\frac{1}{e^x\sqrt{e^x-1}}dx = \int_0^1\frac{2}{(t^2+1)^2}dt$ である. さらに $t=\tan\theta$ と変数変換すれば t が 0 から 1 まで動くとき, θ は 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ まで動き, $dt = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ だから $\displaystyle\int_0^1\frac{2}{(t^2+1)^2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)d\theta = \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

(6) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{(\sin x)'}{\sin x}\right)dx = \log|x| - \log|\sin x| = -\log\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ だから
$\displaystyle\int_0^\alpha\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)dx = \left[-\log\left|\frac{\sin x}{x}\right|\right]_0^\alpha = -\log\left|\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right| + \lim_{x\to+0}\log\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \log\alpha - \log\sin\alpha$.

(7) $\dfrac{8x-16}{x^6+x^4-x^2-1} = \dfrac{8x-16}{(x-1)(x+1)(x^2+1)^2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1} + \dfrac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$ とおいて右辺を通分すれば, 分子は $(A+B+C)x^5 + (A-B+D)x^4 + (2A+2B+E)x^3 + (2A-2B+F)x^2 + (A+B-C-E)x + A-B-D-F$ となるため, $\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ 2A+2B+E=0 \\ 2A-2B+F=0 \\ A+B-C-E=8 \\ A-B-D-F=-16 \end{cases}$. これを解けば, $A=-1$, $B=3$, $C=-2$, $D=4$, $E=-4$, $F=8$ となるため $\dfrac{8x-16}{x^6+x^4-x^2-1} = -\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2x-4}{x^2+1} - \dfrac{4x-8}{(x^2+1)^2}$ である. 教科書の問 3.10 の結果から

$\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\tan^{-1} x$ より $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{8x-16}{x^6+x^4-x^2-1}dx =$
$\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \left(-\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{2x-4}{x^2+1} - \frac{4x-8}{(x^2+1)^2}\right)dx = \left[\log\frac{(x+1)^3}{(x-1)(x^2+1)} + 8\tan^{-1} x + \frac{4x+2}{x^2+1}\right]_{\sqrt{3}}^{\infty} =$
$\displaystyle\frac{4\pi}{3} - \log\frac{7+4\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}+1}{2}$.

(8) $t = \tan^{-1} x$ とおくと $x = 0$ のとき $t = 0$ であり, $x \to \infty$ のとき, $t \to \frac{\pi}{2} - 0$ である. また $x = \tan t$, $\displaystyle\frac{1}{1+x^2}dx = dt$ だから $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{(1+x^2)^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^2 t dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)'dx =$
$\displaystyle\left[t\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)dx = \frac{\pi^2}{8} - \left[\frac{t^2}{4} - \frac{\cos 2t}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$

(9) $\displaystyle\int e^{-ax}\cos bx dx = \int e^{-ax}\left(\frac{1}{b}\sin bx\right)'dx = \frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx + \frac{a}{b}\int e^{-ax}\sin bx dx =$
$\displaystyle\frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx + \frac{a}{b}\int e^{-ax}\left(-\frac{1}{b}\cos bx\right)'dx = \frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx - \frac{a}{b^2}e^{-ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{-ax}\cos bx dx$ だから
$\displaystyle\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{-ax}\cos bx dx = \frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx - \frac{a}{b^2}e^{-ax}\cos bx$ である. 従って $\displaystyle\int e^{-ax}\cos bx dx =$
$\displaystyle\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx - a\cos bx)$ が成り立つため $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx dx = \left[\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx - a\cos bx)\right]_0^{\infty} = \frac{a}{a^2+b^2}$.

(10) 教科書の問題 3.2 の (1) の結果から $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = \tan^{-1} e^x$ だから $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx =$
$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = \frac{\pi}{4} - \lim_{x\to-\infty}\tan^{-1} e^x + \lim_{x\to\infty}\tan^{-1} e^x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

(11) $t = x + \sqrt{x^2+2x-3}$ とおくと $\displaystyle x = \frac{t^2+3}{2t+2}$, $\displaystyle\sqrt{x^2+2x-3} = \frac{t^2+2t-3}{2t+2}$, $\displaystyle dx = \frac{t^2+2t-3}{2(t+1)^2}dt$ より
$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx = \int \frac{\frac{t^2+3}{2t+2}(t^2+2t-3)}{\frac{t^2+2t-3}{2t+2}2(t+1)^2}dt = \int \frac{t^2+3}{2(t+1)^2}dt = \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{2t-2}{(t+1)^2}\right)dt =$
$\displaystyle\frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{2}{t+1} + \frac{4}{(t+1)^2}\right)dt = \frac{t}{2} - \log|t+1| - \frac{2}{t+1} = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+2x-3}\right) - \log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right|$
$\displaystyle-\frac{2}{x+1+\sqrt{x^2+2x-3}} = \sqrt{x^2+2x-3} - \log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right| - \frac{1}{2}$ だから $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx =$
$\displaystyle\sqrt{5} - \log(3+\sqrt{5}) - \lim_{x\to1+0}\left(\sqrt{x^2+2x-3} - \log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right|\right) = \sqrt{5} - \log(3+\sqrt{5}) + \log 2$

(12) $t = \sin^{-1} x$ とおくと $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = dt$, $x = \sin t$ であり, 第 3 回の演習問題 2 の (1) から $\displaystyle\int \frac{x\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$
$\displaystyle\int t\sin t dt = \int t(-\cos t)'dt = -t\cos t + \int \cos t dt = -t\cos t + \sin t = x - \sin^{-1}x\cos(\sin^{-1}x) = x - \sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}$
だから $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^{0} \frac{x\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int_0^1 \frac{x\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{x\to-1+0}\left(-x + \sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}\right) +$
$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\left(x - \sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}\right) = 2$

(13) $t = \sin^{-1} x$ とおくと $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = dt$, $x = \sin t$ より $\displaystyle\int \frac{4\sin^{-1} x - 1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int (4t-1)dt = 2t^2 - t =$
$\displaystyle 2(\sin^{-1} x)^2 - \sin^{-1} x$ だから $\displaystyle\int_0^1 \frac{4\sin^{-1} x - 1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{x\to1-0}\left(2(\sin^{-1} x)^2 - \sin^{-1} x\right) = \frac{\pi^2-\pi}{2}$

(14) $t = 1 + x^4$ とおくと, $\displaystyle x^3dx = \frac{1}{4}dt$ より $\displaystyle\int \frac{x^7}{(1+x^4)^4}dx = \int \frac{t-1}{4t^4}dt = \int\left(\frac{1}{4t^3} - \frac{1}{4t^4}\right)dt = -\frac{1}{8t^2} + \frac{1}{12t^3} =$
$\displaystyle-\frac{1}{8(1+x^4)^2} + \frac{1}{12(1+x^4)^3}$ だから $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^7}{(1+x^4)^4}dx = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{8(1+x^4)^2} + \frac{1}{12(1+x^4)^3} + \frac{1}{24}\right) = \frac{1}{24}$

(15) $t = \sin^{-1} x$ とおくと $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = dt$, $x = \sin t$ であり, 第 3 回の演習問題 2 の (1) から
$\displaystyle\int \frac{x + (\sin^{-1} x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int (\sin t + t^3)dt = -\cos t + \frac{t^4}{4} = -\cos(\sin^{-1} x) + \frac{1}{4}(\sin^{-1} x)^4 = -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4}(\sin^{-1} x)^4$
だから, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x + (\sin^{-1} x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{x\to1-0}\left(-\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4}(\sin^{-1} x)^4 + 1\right) = \frac{\pi^4}{64} + 1$

(16) $\displaystyle\int \frac{\tan^{-1}x}{x^2}dx = \int \tan^{-1}x\left(-\frac{1}{x}\right)'dx = -\frac{\tan^{-1}x}{x} + \int \frac{1}{x(x^2+1)}dx = -\frac{\tan^{-1}x}{x} + \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx =$ $\displaystyle -\frac{\tan^{-1}x}{x} + \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+1)$ だから $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}x}{x^2}dx = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\tan^{-1}x}{x} + \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \frac{\pi}{4} + \frac{\log 2}{2}\right)$ $\displaystyle = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\tan^{-1}x}{x} - \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\pi}{4} + \frac{\log 2}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\log 2}{2}$

(17) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}dx - \int \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}dx = \sin^{-1}(x-1) - \sqrt{2x-x^2}$ だから $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}dx + \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}dx = \lim_{x\to+0}\left(-1-\sin^{-1}(x-1)+\sqrt{2x-x^2}\right) +$ $\displaystyle\lim_{x\to 2-0}\left(\sin^{-1}(x-1) - \sqrt{2x-x^2} + 1\right) = \pi$

(18) $t = \sqrt{2-x^2}$ とおくと $xdx = -tdt$, $x^2 = 2-t^2$ だから $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{2-x^2}}dx = \int \frac{x}{x^2\sqrt{2-x^2}}dx = \int \frac{1}{t^2-2}dt =$ $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\log\left|t-\sqrt{2}\right| - \log\left|t+\sqrt{2}\right|\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2-x^2}} =$ $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2-x^2}}{|x|}$ だから $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{2-x^2}}dx = \lim_{x\to\sqrt{2}-0}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2-x^2}}{|x|} - \frac{\log(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\log(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}$

(19) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}dx = \int \frac{x^2+2x+2-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx - \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}dx =$ $\displaystyle\tan^{-1}(x+1) + \frac{1}{x^2+2x+2}$ だから $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}dx = \lim_{x\to\infty}\left(\tan^{-1}(x+1) + \frac{1}{x^2+2x+2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

(20) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx = \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}$ だから $\displaystyle\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx + \int_1^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx =$ $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}\right) + \lim_{x\to 1+0}\left(6 - \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{9}{2}$

(21) $\displaystyle\int \frac{\log(1+x^2)}{x^2}dx = \int \log(1+x^2)\left(-\frac{1}{x}\right)'dx = -\frac{\log(1+x^2)}{x} + \int \frac{2}{1+x^2}dx = -\frac{\log(1+x^2)}{x} + 2\tan^{-1}x$ だから $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{\log(1+x^2)}{x^2}x = \left(\lim_{x\to+0}\frac{\log(1+x^2)}{x^2}\right)\left(\lim_{x\to+0}x\right) = 1\cdot 0 = 0$ であることに注意すれば, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{x^2}dx = \lim_{x\to+0}\left(\frac{\pi}{2} - \log 2 + \frac{\log(1+x^2)}{x} - 2\tan^{-1}x\right) = \frac{\pi}{2} - \log 2$

(22) $\displaystyle\frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{(1+x)^2}$ とおくと (右辺) $\displaystyle = \frac{(A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A}{x(1+x)^2}$ より, $\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B+C=0 \\ A=1 \end{cases}$. これを解けば, $A=1$, $B=C=-$ となる. 従って $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)^2}dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right)dx =$ $\displaystyle\log\left|\frac{x}{1+x}\right| + \frac{1}{1+x}$ だから $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)^2}dx = \lim_{x\to\infty}\left(\log\left|\frac{x}{1+x}\right| + \frac{1}{1+x} + \log 2 - \frac{1}{2}\right) = \log 2 - \frac{1}{2}$

(23) $t = \tan^{-1}x$ とおくと $\displaystyle dt = \frac{1}{1+x^2}dx$ より $\displaystyle\int \frac{1+(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}dx = \int(1+t^2)dt = t + \frac{t^3}{3} =$ $\displaystyle\tan^{-1}x + \frac{1}{3}(\tan^{-1}x)^3$ だから $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1+(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}dx = \lim_{x\to\infty}\left(\tan^{-1}x + \frac{1}{3}(\tan^{-1}x)^3 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{192}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{7\pi^3}{192}$

(24) 第 11 回の問題 1.(58) の結果から

$$\begin{aligned}\int_1^t \frac{\log x}{(1+x)^n}dx &= \left[\frac{\log x}{(1-n)(1+x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\left(\log x - \log(1+x) + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(k-1)(1+x)^{k-1}}\right)\right]_1^t \\ &= \frac{\log t}{(1-n)(1+t)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\left(\log\frac{2t}{1+t} + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(k-1)}\left(\frac{1}{(1+t)^{k-1}} - \frac{1}{2^{k-1}}\right)\right)\end{aligned}$$

であり, 教科書の問 1.18 より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{(1+x)^{n-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}\frac{x}{(1+x)^{n-1}} = \left(\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}\right)\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(1+x)^{n-1}}\right) = 0$ だから $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{(1+x)^n}dx = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log t}{(1-n)(1+t)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\left(\log\frac{2t}{1+t} + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(k-1)}\left(\frac{1}{(1+t)^{k-1}} - \frac{1}{2^{k-1}}\right)\right)\right) =$ $\displaystyle\frac{1}{n-1}\left(\log 2 - \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{2^{k-1}(k-1)}\right).$

(25) 第 11 回の問題 1.(58) の結果から

$$\int_t^1 \frac{\log x}{(1+x)^n}dx = \left[\frac{\log x}{(1-n)(1+x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\left(\log x - \log(1+x) + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(k-1)(1+x)^{k-1}}\right)\right]_t^1$$
$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(k-1)}\left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{(1+t)^{k-1}}\right) + \log\frac{1+t}{2} + \frac{\log t(1-(1+t)^{n-1})}{(1+t)^{n-1}}\right)$$

であり, 教科書の問 1.18 より $\lim_{t\to 0}\log t(1-(1+t)^{n-1}) = \lim_{t\to 0} t\log t(t$ の $n-2$ 次多項式$) = 0$ だから $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{(1+x)^n}dx = \lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(k-1)}\left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{(1+t)^{k-1}}\right) + \log\frac{1+t}{2} + \frac{\log t(1-(1+t)^{n-1})}{(1+t)^{n-1}}\right)\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(k-1)}\left(\frac{1}{2^{k-1}}-1\right) - \log 2\right)$.

(26) $\displaystyle\int\frac{1-\cos x}{\sin x}dx = \int\frac{(1-\cos x)\sin x}{\sin^2 x}dx = \int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx = -\log(1+\cos x)$ だから $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{\sin x}dx = \lim_{x\to+0}\log(1+\cos x) = \log 2$

(27) 教科書の例題 3.12 から $\displaystyle\int\sin x\log\sin x dx = \int(-\cos x)'\log\sin x dx = -\cos x\log\sin x + \int\frac{\cos^2 x}{\sin x}dx = \int\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}dx - \cos x\log\sin x = \int\frac{1}{\sin x}dx - \int\sin x dx - \cos x\log\sin x = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \cos x - \cos x\log\sin x$.
$0<x<\pi$ ならば $\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \cos x\log\sin x = \log\left(\tan\frac{x}{2}\right) - \cos x\log\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right) = (1-\cos x)\log\left(\sin\frac{x}{2}\right) - (1+\cos x)\log\left(\cos\frac{x}{2}\right) - \log 2\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}\log\left(\sin\frac{x}{2}\right) - 2\cos^2\frac{x}{2}\log\left(\cos\frac{x}{2}\right) - \log 2\cos x$ であり, 教科書の問 1.18 より $\lim_{x\to+0}\sin^2\frac{x}{2}\log\left(\sin\frac{x}{2}\right) = 0$ であることに注意すれば $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\log\sin x dx = \lim_{x\to+0}\left((\log 2 - 1)\cos x - 2\sin^2\frac{x}{2}\log\left(\sin\frac{x}{2}\right) + 2\cos^2\frac{x}{2}\log\left(\cos\frac{x}{2}\right)\right) = \log 2 - 1$

(28) $\displaystyle\int x(\log x)^2 dx = \int\left(\frac{x^2}{2}\right)'(\log x)^2 dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \int x\log x dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}\log x + \int\frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4}$ だから, 教科書の問 1.18 より $\displaystyle\int_0^1 x(\log x)^2 dx = \lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{2}(\log x)^2 + \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{1}{4}$

(29) $t=\sqrt{x^2-4}$ とおくと $x^2 = t^2+4$, $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx = dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx = \int\frac{x}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx = \int\frac{1}{t^2+4}dt = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{t}{2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$ だから $\displaystyle\int_2^\infty\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} = \frac{\pi}{4}$

(30) $t=x^n$ とおくと $x^{n-1}dx = \dfrac{1}{n}dt$ より $\displaystyle\int x^{2n-1}e^{-ax^n}dx = \int\frac{t}{n}e^{-at}dt = \int\frac{t}{an}(-e^{-at})'dt = -\frac{t}{an}e^{-at} + \int\frac{1}{an}e^{-at}dt = -\frac{t}{an}e^{-at} - \frac{1}{a^2n}e^{-at} = -\frac{x^n}{an}e^{-ax^n} - \frac{1}{a^2n}e^{-ax^n}$ だから, 教科書の問 1.17 から $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{an}e^{-ax^n} = 0$ であることに注意すれば $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n-1}e^{-ax^n}dx = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{a^2n} - \frac{x^n}{an}e^{-ax^n} - \frac{1}{a^2n}e^{-ax^n}\right) = \frac{1}{a^2n}$

(31) $\dfrac{2x-1}{(x+1)^2(x-1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$ とおいて右辺を通分すれば, 分子は $(A+B)x^2 + (2A+C)x + A-B-C$ となるため, $\left\{\begin{smallmatrix} A+B=0 \\ 2A+C=2 \\ A-B-C=-1\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=\dfrac{1}{4}$, $B=-\dfrac{1}{4}$, $C=\dfrac{3}{2}$ となるため $\dfrac{2x-1}{(x+1)^2(x-1)} = \dfrac{1}{4(x-1)} - \dfrac{1}{4(x+1)} + \dfrac{3}{2(x+1)^2}$ である. $\displaystyle\int_2^\infty\frac{2x-1}{(x+1)^2(x-1)}dx = \int_2^\infty\left(\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{3}{2(x+1)^2}\right)dx = \left[\frac{1}{4}\log\frac{x-1}{x+1} - \frac{3}{2(x+1)}\right]_2^\infty = \frac{1}{4}\log 3 + \frac{1}{2}$.

(32) $t=\sqrt{x^2+3}$ とおくと $x^2 = t^2-3$, $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx = dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+3}}dx = \int\frac{x}{x^2\sqrt{x^2+3}}dx = \int\frac{1}{t^2-3}dt = \int\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{3}} - \frac{1}{t+\sqrt{3}}\right)dt = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\log\left|t-\sqrt{3}\right| - \log\left|t+\sqrt{3}\right|\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\log\left(\frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3}}\right)$ だから

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2+3}}dx = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\left(\frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3}}\right) + \frac{\log(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\log(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$

(33) $\displaystyle\int \frac{\log(x^2+1)}{x^3}dx = \int\left(-\frac{1}{2x^2}\right)'\log(x^2+1)dx = -\frac{\log(x^2+1)}{2x^2} + \int\frac{1}{x(x^2+1)}dx =$
$\displaystyle -\frac{\log(x^2+1)}{2x^2} + \int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx = -\frac{\log(x^2+1)}{2x^2} + \frac{1}{2}\log\frac{x^2}{x^2+1}$ であり, 教科書の問 1.18 から $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2+1)}{2x^2}$
$\displaystyle = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}\frac{x^2+1}{2x^2} = \left(\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}\right)\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2}\right) = 0\cdot\frac{1}{2} = 0$ だから $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log(x^2+1)}{x^3}dx =$
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\log(x^2+1)}{2x^2} + \frac{1}{2}\log\frac{x^2}{x^2+1} + \log 2\right) = \log 2$

(34) $t = e^x$ とおくと $e^x dx = dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{e^{2x}-e^x}dx = \int\frac{e^x}{e^{3x}-e^{2x}}dx = \int\frac{1}{t^2(t-1)}dt = \int\frac{t-(t-1)}{t^2(t-1)}dt =$
$\displaystyle\int\left(\frac{1}{t(t-1)}-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt = \log|t-1| - \log|t| + \frac{1}{t} = \log|1-e^{-x}| + e^{-x}$ だから
$\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{e^{2x}-e^x}dx = \lim_{x\to\infty}\left(\log|1-e^{-x}| + e^{-x} - \log(1-e^{-1}) - e^{-1}\right) = 1 - \frac{1}{e} - \log(e-1)$

(35) $\displaystyle\int\frac{(1+\log x)^2}{x^2}dx = \int\left(-\frac{1}{x}\right)'(1+\log x)^2dx = -\frac{(1+\log x)^2}{x} + 2\int\frac{1+\log x}{x^2}dx = -\frac{(1+\log x)^2}{x} +$
$\displaystyle 2\int\left(-\frac{1}{x}\right)'(1+\log x)dx = -\frac{(1+\log x)^2}{x} - \frac{2+2\log x}{x} + 2\int\frac{1}{x^2}dx = -\frac{5}{x} - \frac{4\log x}{x} - \frac{(\log x)^2}{x}$ であり, 教科書の
問 1.18 から $\displaystyle\int_1^\infty\frac{(1+\log x)^2}{x^2}dx = \lim_{x\to\infty}\left(5 - \frac{5}{x} - \frac{4\log x}{x} - \frac{4(\log x)^2}{x}\right) = 5$

(36) $t = \sqrt{x-1}$ とおくと, $x = t^2+1$, $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = 2dt$ より $\displaystyle\int\frac{\log x}{\sqrt{x-1}}dx = \int 2\log(t^2+1)dt =$
$\displaystyle\int(2t)'\log(t^2+1)dt = 2t\log(t^2+1) - \int\frac{4t^2}{t^2+1}dt = 2t\log(t^2+1) - \int\left(4-\frac{4}{t^2+1}\right)dt =$
$\displaystyle 2t\log(t^2+1) - 4t + 4\tan^{-1}t = 2\sqrt{x-1}\log x - 4\sqrt{x-1} + 4\tan^{-1}\sqrt{x-1}$ だから $\displaystyle\int_1^2\frac{\log x}{\sqrt{x-1}}dx =$
$\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\left(2\log 2 + \pi - 4 - 2\sqrt{x-1}\log x + 4\sqrt{x-1} - 4\tan^{-1}\sqrt{x-1}\right) = 2\log 2 + \pi - 4$

(37) $k=1$ ならば $\displaystyle\int\frac{\log x}{x}dx = \frac{(\log x)^2}{2}$ だから, $\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{x^k}dx = \lim_{x\to+0}\left(-\frac{1}{2}(\log x)^2\right) = -\infty$, $k\neq 1$ ならば
$\displaystyle\int\frac{\log x}{x^k}dx = \int\left(\frac{x^{1-k}}{1-k}\right)'\log x\,dx = \frac{x^{1-k}\log x}{1-k} - \int\frac{1}{(1-k)x^k} = \frac{x^{1-k}}{1-k}\log x - \frac{x^{1-k}}{(1-k)^2}$ だから, $k<1$ ならば教科書
の問 1.18 から, $\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{x^k}dx = \lim_{x\to+0}\left(\frac{x^{1-k}}{(1-k)^2} - \frac{x^{1-k}}{1-k}\log x - \frac{1}{(1-k)^2}\right) = -\frac{1}{(1-k)^2}$, $k>1$ ならば $\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{x^k}dx =$
$\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{x^{1-k}}{(1-k)^2} - \frac{x^{1-k}}{1-k}\log x - \frac{1}{(1-k)^2}\right) = \lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x^{k-1}(k-1)}\left(\log x + \frac{1}{k-1}\right) - \frac{1}{(1-k)^2}\right) = -\infty.$

(38) 上の問題より $\displaystyle\int\frac{\log x}{x^k}dx = \begin{cases}\frac{x^{1-k}}{1-k}\log x - \frac{x^{1-k}}{(1-k)^2} & k\neq 1\\ \frac{1}{2}(\log x)^2 & k=1\end{cases}$ だから, $k<1$ ならば
$\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log x}{x^k}dx = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{1-k}}{1-k}\log x - \frac{x^{1-k}}{(1-k)^2} + \frac{1}{(1-k)^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{1-k}}{1-k}\left(\log x - \frac{1}{1-k}\right) + \frac{1}{(1-k)^2}\right) = \infty,$
$k=1$ ならば $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log x}{x^k}dx = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}(\log x)^2 = \infty$, $k>1$ ならば教科書の問 1.18 から, $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log x}{x^k}dx =$
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{1-k}}{1-k}\log x - \frac{x^{1-k}}{(1-k)^2} + \frac{1}{(1-k)^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\log x}{x^{k-1}(k-1)} - \frac{1}{x^{k-1}(k-1)^2} + \frac{1}{(k-1)^2}\right) = \frac{1}{(1-k)^2}.$

(39) $x = \sin t$ とおけば $dx = \cos t dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{(c-x)\sqrt{1-x^2}}dx = \int\frac{1}{c-\sin t}dt\cdots(*)$. さらに $s = \tan\frac{t}{2}$ とおけ
ば $\displaystyle\sin t = \frac{2s}{1+s^2}$, $\displaystyle dt = \frac{2}{1+s^2}ds$ だから $\displaystyle(*) = \int\frac{2}{\left(c-\frac{2s}{1+s^2}\right)(1+s^2)}ds = \frac{2}{c}\int\frac{1}{\left(s-\frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{c^2-1}}{c}\right)^2}ds =$

$\dfrac{2}{\sqrt{c^2-1}}\tan^{-1}\left(\dfrac{cs-1}{\sqrt{c^2-1}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{c^2-1}}\tan^{-1}\left(\dfrac{c\tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}x\right)-1}{\sqrt{c^2-1}}\right)$ である. 従って

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(c-x)\sqrt{1-x^2}}dx&=\int_{-1}^{0}\frac{1}{(c-x)\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{(c-x)\sqrt{1-x^2}}dx\\&=\lim_{x\to-1+0}\left(-\frac{2}{\sqrt{c^2-1}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{c^2-1}}\right)-\frac{2}{\sqrt{c^2-1}}\tan^{-1}\left(\frac{c\tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}x\right)-1}{\sqrt{c^2-1}}\right)\right)\\&\quad+\lim_{x\to1+0}\left(\frac{2}{\sqrt{c^2-1}}\tan^{-1}\left(\frac{c\tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}x\right)-1}{\sqrt{c^2-1}}\right)+\frac{2}{\sqrt{c^2-1}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{c^2-1}}\right)\right)\\&=\frac{2}{\sqrt{c^2-1}}\left(\tan^{-1}\left(\frac{c+1}{\sqrt{c^2-1}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{c-1}{\sqrt{c^2-1}}\right)\right).\end{aligned}$$

$\dfrac{c+1}{\sqrt{c^2-1}}\dfrac{c-1}{\sqrt{c^2-1}}=1$ であることに注意すれば, 教科書の問 1.11 の (4) と上式から $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{(c-x)\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{\sqrt{c^2-1}}$.

(40) 第 11 回の問題 1 の (61) より, $\dfrac{x\log x}{(1+x)^4}$ の原始関数は $\dfrac{x^2\log x(x+3)}{6(1+x)^3}-\dfrac{1}{6}\log(1+x)+\dfrac{1}{6(1+x)}-\dfrac{1}{6(1+x)^2}$ だから, 教科書の問 1.18 から, $\displaystyle\int_0^1\frac{x\log x}{(1+x)^4}dx=\lim_{x\to+0}\left(-\frac{1}{6}\log2+\frac{1}{24}-\frac{x^2(x+3)\log x}{6(1+x)^3}+\frac{1}{6}\log(1+x)-\frac{x}{6(1+x)^2}\right)$ $=-\dfrac{1}{6}\left(\log2-\dfrac{1}{4}\right)$.

(41) $t=\sqrt{e^x+1}$ とおくと $e^x=t^2-1$, $\dfrac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx=2dt$ であり, 第 10 回の演習問題 1 の (7) の結果から $\displaystyle\int\frac{1}{e^x\sqrt{e^x+1}}dx=\int\frac{e^x}{e^{2x}\sqrt{e^x+1}}dx=\int\frac{2}{(t^2-1)^2}dt=\frac{1}{2}\left(-\log|t-1|-\frac{1}{t-1}+\log|t+1|-\frac{1}{t+1}\right)=$ $\dfrac{1}{2}\left(\log\dfrac{\sqrt{e^x+1}+1}{\sqrt{e^x+1}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{e^x+1}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right)$ だから $\displaystyle\int_0^\infty\frac{1}{e^x\sqrt{e^x+1}}dx=$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\log\frac{\sqrt{e^x+1}+1}{\sqrt{e^x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{e^x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right)+\sqrt{2}-\log\bigl(\sqrt{2}+1\bigr)\right)=\sqrt{2}-\log\bigl(\sqrt{2}+1\bigr)$

(42) $t>1$ とする. $\displaystyle\int_1^t\left(\frac{\log x}{x}\right)^2dx=\int_1^t\left(-\frac{1}{x}\right)'(\log x)^2dx=\left[-\frac{(\log x)^2}{x}\right]_1^t+\int_1^t\frac{((\log x)^2)'}{x}dx=-\frac{(\log t)^2}{t}+$ $\displaystyle\int_1^t\frac{2\log x}{x^2}dx=-\frac{(\log t)^2}{t}+\int_1^t\left(-\frac{2}{x}\right)'\log x\,dx=-\frac{(\log t)^2}{t}+\left[-\frac{2\log x}{x}\right]_1^t+\int_1^t\frac{2}{x^2}dx=-\frac{(\log t)^2}{t}-\frac{2\log t}{t}+$ $\displaystyle\left[-\frac{2}{x}\right]_1^t=-\frac{(\log t)^2}{t}-\frac{2\log t}{t}-\frac{2}{t}+2$ だから, 教科書の問 1.18 から $\displaystyle\int_1^\infty\left(\frac{\log x}{x}\right)^2dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^t\left(\frac{\log x}{x}\right)^2dx=$ $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{(\log t)^2}{t}-\frac{2\log t}{t}-\frac{2}{t}+2\right)=2$.

(43) $\displaystyle\int_1^t\frac{\log(x^{2a}+1)}{x^{a+1}}dx=\int_1^t\left(-\frac{1}{ax^a}\right)'\log(x^{2a}+1)dx=\left[-\frac{\log(x^{2a}+1)}{ax^a}\right]_1^t+\int_1^t\frac{2x^{a-1}}{x^{2a}+1}dx=$ $\displaystyle\frac{1}{a}\log2-\frac{\log(t^{2a}+1)}{at^a}+\left[\frac{2}{a}\tan^{-1}x^a\right]_1^t=\frac{1}{a}\log2-\frac{\log(t^{2a}+1)}{at^a}+\frac{2}{a}\tan^{-1}t^a-\frac{\pi}{2a}$ だから $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log(x^{2a}+1)}{x^{a+1}}dx=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{a}\left(\log2-\frac{\log(t^{2a}+1)}{t^a}+2\tan^{-1}t^a-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\log2}{a}+\frac{\pi}{2a}$

(44) $t>1$ とする. $\displaystyle\int_1^t\frac{\tan^{-1}x}{x^3}dx=\int_1^t\tan^{-1}x\left(-\frac{1}{2x^2}\right)'dx=\left[-\frac{\tan^{-1}x}{2x^2}\right]_1^t+\int_1^t\frac{\left(\tan^{-1}x\right)'}{2x^2}dx=\frac{\pi}{8}-\frac{\tan^{-1}t}{2t^2}+$ $\displaystyle\int_1^t\frac{1}{2x^2(x^2+1)}dx=\frac{\pi}{8}-\frac{\tan^{-1}t}{2t^2}+\int_1^t\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{\pi}{8}-\frac{\tan^{-1}t}{2t^2}+\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}-\tan^{-1}x\right)\right]_1^t=$ $\displaystyle\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{\tan^{-1}t}{2t^2}-\frac{1}{2t}-\frac{1}{2}\tan^{-1}t$ だから $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\tan^{-1}x}{x^3}dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{\tan^{-1}x}{x^3}dx=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{\tan^{-1}t}{2t^2}-\frac{1}{2t}-\frac{1}{2}\tan^{-1}t\right)=\frac{1}{2}$.

(45) $y=\tan^{-1}x$ とおくと, $dy=\dfrac{1}{1+x^2}dx$ であり x が 0 から t まで動けば y は 0 から $\tan^{-1}t$ まで動くため, $\displaystyle\int_0^t\frac{\cos\left(\tan^{-1}x\right)}{1+x^2}dx=\int_0^{\tan^{-1}t}\cos y\,dy=\sin(\tan^{-1}t)$. 従って $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cos\left(\tan^{-1}x\right)}{1+x^2}dx=\lim_{t\to\infty}\sin(\tan^{-1}t)=1$.

(46) $y=\log x$ とおくと, $dy=\dfrac{1}{x}dx$ であり x が 2 から t まで動けば y は $\log 2$ から $\log t$ まで動くため, $\displaystyle\int_2^t \frac{1}{x(\log x)^n}dx=\int_{\log 2}^{\log t}\frac{1}{y^n}dy=\begin{cases}\log(\log t)-\log(\log 2) & n=1\\ \frac{1}{(n-1)(\log 2)^{n-1}}-\frac{1}{(n-1)(\log t)^{n-1}} & n\neq 1\end{cases}$ である.

従って $n<1$ ならば $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^n}dx=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{(\log t)^{1-n}}{1-n}-\frac{(\log 2)^{1-n}}{1-n}-\frac{1}{(n-1)(\log t)^{n-1}}\right)=\infty$,

$n=1$ ならば $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\log x}dx=\lim_{t\to\infty}(\log(\log t)-\log(\log 2))=\infty$,

$n>1$ ならば $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^n}dx=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{(n-1)(\log 2)^{n-1}}-\frac{1}{(n-1)(\log t)^{n-1}}\right)=\frac{1}{(n-1)(\log 2)^{n-1}}$.

(47) $y=\log x$ とおくと, $dy=\dfrac{1}{x}dx$ であり x が t から e まで動けば y は $\log t$ から 1 まで動くため, $\displaystyle\int_t^e\left(\frac{1}{x\log x}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\int_{\log t}^1\frac{1}{y}dy-\int_t^e\frac{1}{x-1}dx=-\log\left|\frac{\log t}{t-1}\right|-\log(e-1)$. 従って $\displaystyle\int_1^e\left(\frac{1}{x\log x}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\lim_{t\to 1+0}\left(-\log\left|\frac{\log t}{t-1}\right|-\log(e-1)\right)=-\log(e-1)$.

(48) $y=\sin^{-1}x$ とおくと, $dy=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ であり x が 0 から t まで動けば y は 0 から $\sin^{-1}t$ まで動くため, $\displaystyle\int_0^t\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\sin^{-1}t}ydy=\frac{1}{2}(\sin^{-1}t)^2$. 従って $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{t\to 1-0}\frac{1}{2}(\sin^{-1}t)^2=\frac{\pi^2}{8}$.

(49) $y=x^2$ とおけば $\displaystyle\int_1^t\frac{\pi-2\tan^{-1}x}{x^2}dx=\int_1^t\left(-\frac{1}{x}\right)'(\pi-2\tan^{-1}x)dx=\left[\frac{2\tan^{-1}x-\pi}{x}\right]_1^t-\int_1^t\frac{2}{x(1+x^2)}dx=$ $\displaystyle\frac{2\tan^{-1}t-\pi}{t}+\frac{\pi}{2}-\int_1^{t^2}\frac{1}{y(1+y)}dy=\frac{2\tan^{-1}t-\pi}{t}+\frac{\pi}{2}-[\log y-\log(1+y)]_1^{t^2}=\frac{2\tan^{-1}t-\pi}{t}+\frac{\pi}{2}+$ $\displaystyle\log\left(\frac{1}{t^2}+1\right)-\log 2$. 従って $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\pi-2\tan^{-1}x}{x^2}dx=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{2\tan^{-1}t-\pi}{t}+\frac{\pi}{2}+\log\left(\frac{1}{t^2}+1\right)-\log 2\right)=\frac{\pi}{2}-\log 2$.

(50) $y=e^x$ とおくと, $dx=\dfrac{1}{y}dy$ であり x が 0 から t まで動けば y は 1 から e^t まで動くため, $\displaystyle\int_0^t\frac{1}{e^x+1}dx=$ $\displaystyle\int_1^{e^t}\frac{1}{y(y+1)}dy=\left[\log\frac{y}{y+1}\right]_1^{e^t}=\log\frac{e^t}{e^t+1}+\log 2$. 従って $\displaystyle\int_0^\infty\frac{1}{e^x+1}dx=\lim_{t\to\infty}\left(\log\frac{e^t}{e^t+1}+\log 2\right)=\log 2$.

(51) $y=e^x$ とおくと, $dx=\dfrac{1}{y}dy$ であり x が t から $\log 3$ まで動けば y は e^t から 3 まで動くため,

$\displaystyle\int_t^{\log 3}e^{2x}\log(e^x+1)dx=\int_{e^t}^3 y\log(y+1)dy=\int_{e^t}^3\left(\frac{y^2}{2}\right)'\log(y+1)dy=\left[\frac{y^2\log(y+1)}{2}\right]_{e^t}^3-\int_{e^t}^3\frac{y^2}{2(y+1)}dy=$ $\displaystyle 9\log 2-\frac{e^{2t}\log(e^t+1)}{2}-\frac{1}{2}\int_{e^t}^3\left(y-1+\frac{1}{y+1}\right)dy=9\log 2-\frac{e^{2t}\log(e^t+1)}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2}-y+\log(y+1)\right]_{e^t}^3=$ $\displaystyle 9\log 2-\frac{e^{2t}\log(e^t+1)}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+2\log 2-\frac{e^{2t}}{2}+e^t-\log(e^t+1)\right)=8\log 2-1+\frac{(1-e^{2t})\log(e^t+1)}{2}+\frac{(1-e^t)^2}{4}$.

従って $\displaystyle\int_{-\infty}^{\log 3}e^{2x}\log(e^x+1)dx=\lim_{t\to-\infty}\left(8\log 2-1+\frac{(1-e^{2t})\log(e^t+1)}{2}+\frac{(1-e^t)^2}{4}\right)=8\log 2-\frac{3}{4}$.

(52) $0<t<1$ とする. $y=x^a$ とおくと, $dy=ax^{a-1}dx$ であり x が 0 から t まで動けば y は 0 から t^a まで動くため, $\displaystyle\int_0^t\frac{ax^{a-1}}{\sqrt{1-x^a}}dx=\int_0^{t^a}\frac{1}{\sqrt{1-y}}dy=\left[-2\sqrt{1-y}\right]_0^{t^a}=2-2\sqrt{1-t^a}$.

従って $\displaystyle\int_0^1\frac{ax^{a-1}}{\sqrt{1-x^a}}dx=\lim_{t\to 1-0}\left(2-2\sqrt{1-t^a}\right)=2$

(53) 第 11 回の問題 1.(62) の結果より,

$$\begin{aligned}\int_0^t\sqrt{\tan x}\,dx&=\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left(\frac{\tan x-\sqrt{2\tan x}+1}{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{2\tan x}-1\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{2\tan x}+1\right)\right]_0^t\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left(\frac{\tan t-\sqrt{2\tan t}+1}{\tan t+\sqrt{2\tan t}+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{2\tan t}-1\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{2\tan t}+1\right)\end{aligned}$$

であり, $\displaystyle\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\tan t-\sqrt{2\tan t}+1}{\tan t+\sqrt{2\tan t}+1}=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\tan t}}+\frac{1}{\tan t}}{1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\tan t}}+\frac{1}{\tan t}}=1$ だから $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan x}\,dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(54) 仮定から $\dfrac{a}{2} < \dfrac{b}{2} \leqq \pi - \dfrac{a}{2}$ だから, $a \leqq x \leqq b$ ならば $\sin\dfrac{x}{2} \geqq 0$ である. 従って $t = \cos\dfrac{x}{2}$ と変数変換を行えば, $x \to a+0$ のとき, $t \to \cos\dfrac{a}{2} - 0$, $x = b$ のとき $t = \cos\dfrac{b}{2}$ であり, $\sin\dfrac{x}{2}\,dx = -2dt$ だから $\displaystyle\int_a^b \sqrt{\frac{1-\cos x}{\cos a - \cos x}}\,dx = \int_a^b \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2}}}\,dx = \int_{\cos\frac{a}{2}}^{\cos\frac{b}{2}} \frac{-2}{\sqrt{\cos^2\frac{a}{2} - t^2}}\,dt = \left[-2\sin^{-1}\left(\frac{t}{\cos\frac{a}{2}}\right)\right]_{\cos\frac{a}{2}}^{\cos\frac{b}{2}} = \pi - 2\sin^{-1}\left(\frac{\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\right)$.

(55) 第 11 回の問題 1.(36) の結果より, $\displaystyle\int \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ だから

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\substack{t\to -1+0\\ s\to 1-0}} \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\sqrt{\frac{1+s}{1-s}}\right) - \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right)\right) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

(56) $y = \dfrac{\pi}{2} - x$ とおけば $\displaystyle\int_s^t \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}-s}^{\frac{\pi}{2}-t} \frac{1}{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}}\,dy = \int_{\frac{\pi}{2}-t}^{\frac{\pi}{2}-s} \sqrt{\tan y}\,dy =$ だから, (53) の結果から $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx = \lim_{s\to+0}\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0}\int_{\frac{\pi}{2}-t}^{\frac{\pi}{2}-s}\sqrt{\tan y}\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan x}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

2. (1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{1-x^2}dx = \int_0^1\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)dx = [\log|1+x| - \log|1-x|]_0^1 = \lim_{x\to 1-0}(\log|1+x| - \log|1-x|) = \infty$, $\displaystyle\int_1^2 \frac{2}{1-x^2}dx = \int_1^2\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)dx = [\log|1+x| - \log|1-x|]_1^2 = \lim_{x\to 1+0}(\log 3 - \log|1+x| + \log|1-x|) = -\infty$ だから $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{1-x^2}dx$ は存在しない.

(2) $t = \cos x$ とおけば $\sin x dx = -dt$ だから $\displaystyle\int \sin^2 x\tan x dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos x}dx = \int\left(t - \frac{1}{t}\right)dt = \frac{t^2}{2} - \log|t| = \frac{\cos^2 x}{2} - \log|\cos x|$. 従って $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\tan x dx = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\cos^2 x}{2} - \log|\cos x|\right) - \frac{1}{2} = \infty$, $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 x\tan x dx = \frac{1}{2} - \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0}\left(\frac{\cos^2 x}{2} - \log|\cos x|\right) = -\infty$ となるため $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\tan x dx$ は存在しない.

(3) 第 10 回の演習問題 1 の (37) から $\displaystyle\int \tan^{-1} x dx = x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)$ である. 一方 $x > 0$ ならば $0 < \dfrac{\log(x^2+1)}{2x} < \dfrac{\log(x^2+2x+1)}{2x} = \dfrac{\log(x+1)}{x}$ であり, 教科書の問 1.18 から $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+1)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+1)}{x+1}\frac{x+1}{x} = 0$ だから $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2+1)}{2x} = 0$ である. 従って $\displaystyle\int_0^\infty \tan^{-1} x dx = \lim_{x\to\infty}\left(x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\tan^{-1} x - \frac{\log(x^2+1)}{2x}\right) = \infty$.

(4) 教科書の問 3.7 の結果から $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx = -\log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right|$ だから $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x}dx = \left[-\log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| = \infty$ であり, 同様に $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{1}{\cos x}dx = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| = -\infty$ である. 従って, $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{\cos x}dx$ は存在しない.

(5) 教科書の 104 ページの結果から $\displaystyle\int\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx - \int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \sqrt{x^2-1} - \log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|$ である. 一方 $x \geqq 1$ ならば $0 \leqq \dfrac{\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|}{x} < \dfrac{\log 2x}{x}$ であり, 教科書の問 1.18 から $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log 2x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log x}{x} + \frac{\log 2}{x}\right) = 0$ となるため, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|}{x} = 0$ である.
従って $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1} - \log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| - \sqrt{3} + \log\left(2+\sqrt{3}\right)\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|}{x} - \frac{\sqrt{3} - \log(2+\sqrt{3})}{x}\right) = \infty$.

(6) $\dfrac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{(x+1)^1+(x-1)^2}{(x^2-1)^2}=\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$ だから $\displaystyle\int_0^1\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}dx=\left[-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right]_0^1=\lim_{x\to1-0}\left(-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=\infty$, $\displaystyle\int_1^2\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}dx=\left[-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right]_1^2=\lim_{x\to1+0}\left(-\frac{4}{3}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)=\infty$ だから $\displaystyle\int_0^2\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}dx=\infty$.

(7) $0<x\leqq1$ ならば $1<e^x\leqq e$ だから $0<\dfrac{e^x}{\sqrt{x}}\leqq\dfrac{e}{\sqrt{x}}$ が成り立つ. 教科書の問 4.1 により $\displaystyle\int_0^1\frac{e}{\sqrt{x}}dx$ は収束するため, 教科書の定理 4.2 の (1) によって $\displaystyle\int_0^1\frac{e^x}{\sqrt{x}}dx$ も収束する.

(8) $x\geqq1$ ならば $\dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}\leqq\dfrac{1}{\sqrt{x^4}}=\dfrac{1}{x^2}$ であり, 教科書の問 4.3 により $\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx$ は収束するため, 教科書の定理 4.2 の (1) によって $\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$ も収束する. 従って $\displaystyle\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx+\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$ も収束する.

(9) $0<x\leqq1$ ならば $1<2^x\leqq2$ だから $0\leqq-2^x\log x\leqq-2\log x$ が成り立つ. $\displaystyle\int_0^1(-2\log x)dx=[-2x\log x+2x]_0^1=2-\lim_{x\to+0}(-2x\log x+2x)=2$ となって, $\displaystyle\int_0^1(-4\log x)dx$ は収束するため教科書の定理 4.2 の (1) によって $\displaystyle\int_0^1(-2^x\log x)dx$ も収束する. 従って $\displaystyle\int_0^2 2^x\log x dx=-\int_0^1(-2^x\log x)dx+\int_1^2 2^x\log x dx$ も収束する.

(10) 0 以上の整数 n に対して $x\in[\pi n,\pi(n+1)]$ ならば $\dfrac{x}{1+x^6\sin^2x}\leqq\dfrac{\pi(n+1)}{1+x^6\sin^2x}\leqq\dfrac{\pi(n+1)}{1+(\pi n)^6\sin^2x}$ だから $\displaystyle\int_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{x}{1+x^6\sin^2x}dx\leqq\int_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{\pi(n+1)}{1+(\pi n)^6\sin^2x}dx$ である. $y=x-\pi n-\dfrac{\pi}{2}$ とおけば, $n>0$ の場合 $\displaystyle\int_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{\pi(n+1)}{1+(\pi n)^6\sin^2x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi(n+1)}{1+(\pi n)^6\cos^2y}dy\cdots(*)$ であり, $t=\tan y$ とおくと $\cos^2y=\dfrac{1}{1+t^2}$, $dy=\dfrac{dt}{1+t^2}$ だから $\displaystyle\int\frac{\pi(n+1)}{1+(\pi n)^6\cos^2x}dx=\int\frac{\pi(n+1)}{\left(1+(\pi n)^6\frac{1}{1+t^2}\right)(1+t^2)}dt=\int\frac{\pi(n+1)}{t^2+(\pi n)^6}dt=\frac{n+1}{\pi^2n^3}\tan^{-1}\frac{t}{(\pi n)^3}=\frac{n+1}{\pi^2n}\tan^{-1}\frac{\tan y}{(\pi n)^3}$. 従って $(*)=\dfrac{n+1}{\pi n^3}\leqq\dfrac{4}{\pi n(n+1)}=\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$ が成り立ち, $n=0$ の場合は $(*)=\pi^2$ である. 任意の正の実数 R に対して $k\geqq\dfrac{R}{\pi}$ を満たす自然数 k をとれば, $\displaystyle\int_0^R\frac{x}{1+x^6\sin^2x}dx\leqq\int_0^{\pi k}\frac{x}{1+x^6\sin^2x}dx=\sum_{n=0}^{k-1}\int_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{x}{1+x^6\sin^2x}dx\leqq\pi^2+\sum_{n=1}^{k-1}\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\pi^2+\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{k}\right)<\pi^2+\frac{4}{\pi}$ となるため, $\displaystyle\int_0^R\frac{x}{1+x^6\sin^2x}dx$ は上に有界である. 故に $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x}{1+x^6\sin^2x}dx$ は収束する.

(11) $0<x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ ならば $0<\sin x\leqq x$, $\dfrac{\sqrt{16-\pi^2}}{4}\leqq\sqrt{1-x^2}$ だから $0<\dfrac{\sqrt{16-\pi^2}}{4x}\leqq\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sin x}$ である. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{16-\pi^2}}{4x}dx=\left[\frac{\sqrt{16-\pi^2}}{4}\log x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{16-\pi^2}}{4}\log\frac{\pi}{4}-\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{16-\pi^2}}{4}\log x=\infty$ となるため, 教科書の定理 4.2 の (2) によって $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sin x}dx$ は発散する.

(12) $\sin x$ のグラフは $[0,\pi]$ において上に凸であるため $0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ ならば $0<\dfrac{2}{\pi}x\leqq\sin x$ が成り立つ. 従って $0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ ならば $0<\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}\leqq\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}$ であり, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}dx=\left[\sqrt{2\pi x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$ となるため, 教科書の定理 4.2 の (1) によって $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$ は収束する. $\dfrac{\pi}{2}<t<\pi$ に対し, $y=\pi-x$ と変数変換すれば $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^t\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-t}\frac{-1}{\sqrt{\sin(\pi-y)}}dy=\int_{\pi-t}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin y}}dy$ であり, 上の結果から $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx=\lim_{t\to\pi-0}\int_{\pi-t}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin y}}dy$ は収束するため, $\displaystyle\int_0^\pi\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$ も収束する.

(13) $x \geqq 1$ ならば $\dfrac{x}{\sqrt{x^5+1}} < \dfrac{x}{\sqrt{x^5}} = \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ であり, 教科書の問 4.3 により $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ は収束するため, 教科書の定理 4.2 の (1) によって $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$ も収束する. 従って $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx + \int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$ も収束する.

(14) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x\log x}}{\frac{1}{(x+1)\log x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ だから $\dfrac{1}{(x+1)\log x} \simeq \dfrac{1}{x\log x}$ $(x \to \infty)$ である.
また $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}dx = \int \frac{(\log x)'}{\log x}dx = \log(\log x)$ より $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\log x}dx = \lim_{x\to\infty} \log(\log x) - \log(\log 2) = \infty$ だから教科書の定理 4.3 によって $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{(x+1)\log x}dx$ は発散する.

(15) $x \geqq 1$ ならば $\tan^{-1} x \geqq \dfrac{\pi}{4}$ だから $\dfrac{\tan^{-1} x}{x} \geqq \dfrac{\pi}{4x}$ である. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\pi}{4x}dx = \left[\frac{\pi}{4}\log x\right]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi}{4}\log x = \infty$ となるため, 教科書の定理 4.2 の (2) によって $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\tan^{-1} x}{x}dx$ は発散する.
従って $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\tan^{-1} x}{x}dx = \int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{x}dx + \int_1^\infty \frac{\tan^{-1} x}{x}dx$ も発散する.

(16) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x^4-1}}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 1$ だから $\dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}} \simeq \dfrac{1}{x^2}$ $(x \to \infty)$ である. また $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^\infty = \frac{1}{2} - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 2$ となって $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^2}dx$ は収束するため, 教科書の定理 4.3 によって $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$ は収束する. 一方, $x > 1$ ならば $0 < \dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)(x^2+1)}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ であり, $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \left[2\sqrt{x-1}\right]_1^2 = 2$ だから教科書の定理 4.2 の (1) によって
$\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$ は収束する. 従って $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx + \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$ も収束する.

(17) $x \geqq 2$ ならば $0 < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}} < \dfrac{1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}$ だから $0 < \dfrac{\tan^{-1} x}{x\sqrt{x-1}} < \dfrac{\pi}{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}$ である.
$\displaystyle\int_2^\infty \frac{\pi}{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}dx = \left[-\frac{\pi}{\sqrt{x-1}}\right]_2^\infty = \pi - \lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{\sqrt{x-1}} = \pi$ だから教科書の定理 4.2 の (1) により $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\tan^{-1} x}{x\sqrt{x-1}}dx$ は収束する. 一方 $1 < x \leqq 2$ ならば $\tan^{-1} x \leqq x$ だから $\dfrac{\tan^{-1} x}{x\sqrt{x-1}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ である.
$\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \left[2\sqrt{x-1}\right]_1^2 = 2$ だから教科書の定理 4.2 の (1) によって $\displaystyle\int_1^2 \frac{\tan^{-1} x}{x\sqrt{x-1}}dx$ は収束する.
従って $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\tan^{-1} x}{x\sqrt{x-1}}dx = \int_1^2 \frac{\tan^{-1} x}{x\sqrt{x-1}}dx + \int_2^\infty \frac{\tan^{-1} x}{x\sqrt{x-1}}dx$ も収束する.

(18) $x \geqq e$ ならば $\log x \geqq 1$, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(x+1)}} \geqq \dfrac{1}{x+1}$ だから $\dfrac{\log x}{\sqrt[3]{x^2(x+1)}} \geqq \dfrac{1}{x+1}$ である. $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x+1}dx =$ $[\log(1+x)]_e^\infty = \displaystyle\lim_{x\to\infty} \log(1+x) - \log(1+e) = \infty$ だから教科書の定理 4.2 の (2) によって $\displaystyle\int_e^\infty \frac{\log x}{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}dx$ は発散する. 従って $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}dx = \int_0^e \frac{\log x}{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}dx + \int_e^\infty \frac{\log x}{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}dx$ も発散する.

(19) $\sin x$ のグラフは $[0,\pi]$ において上に凸であり, 直線 $y = x$ は原点で $\sin x$ のグラフに接するため, $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ならば $\dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin x < x$ が成り立つ. 従って $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ならば $1 < \dfrac{x}{\sin x} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ だから $0 < \log\dfrac{x}{\sin x} \leqq \log\dfrac{\pi}{2}$ が成り立ち, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{\pi}{2}dx$ は存在するため, 教科書の定理 4.2 の (1) によって $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{x}{\sin x}dx$ は収束する.

(20) $0 < x \leqq \dfrac{1}{e}$ ならば $\dfrac{\sqrt{e}}{x\sqrt{1+e}} = \dfrac{1}{x\sqrt{\frac{1}{e}+1}} \leqq \dfrac{1}{x\sqrt{x+1}} \leqq -\dfrac{\log x}{x\sqrt{x+1}}$ であり, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\sqrt{e}}{x\sqrt{1+e}}dx = \left[\frac{\sqrt{e}\log x}{\sqrt{1+e}}\right]_0^{\frac{1}{e}} =$ $\displaystyle -\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{1+e}} - \lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{e}\log x}{\sqrt{1+e}} = \infty$ だから, 教科書の定理 4.2 の (2) によって $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\log x}{x\sqrt{x+1}}dx$ は発散する. 従って $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x\sqrt{x+1}}dx = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\log x}{x\sqrt{x+1}}dx + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{\log x}{x\sqrt{x+1}}dx$ も発散する.

(21) $0 \leqq x < 1$ ならば $\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ であり, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^1 = 2 - \lim_{x\to 1-0} 2\sqrt{1-x} = 2$ となって $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ は収束するため, 教科書の定理 4.2 の (1) によって $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}dx$ は収束する.

(22) $x \geqq 1$ ならば $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x(x+1)}} \geqq \dfrac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}$ であり, 教科書の問 4.3 により $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}dx = \int_2^\infty \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx$ は発散するため, 教科書の定理 4.2 の (2) によって $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x(x+1)}}dx$ も発散する.

(23) $x \geqq 1$ ならば $xe^{-x^3} \leqq x^2e^{-x^3}$ であり, $\displaystyle\int_1^\infty x^2e^{-x^3}dx = \left[-\frac{1}{3}e^{-x^3}\right]_1^\infty = \frac{1}{3e} - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}e^{-x^3} = \frac{1}{3e}$ となって $\displaystyle\int_1^\infty x^2e^{-x^3}dx$ は収束するため, 教科書の定理 4.2 の (1) によって $\displaystyle\int_1^\infty xe^{x^3}dx$ は収束する. 従って $\displaystyle\int_0^\infty xe^{x^3}dx = \int_0^1 xe^{x^3}dx + \int_1^\infty xe^{x^3}dx$ も収束する.

(24) $0 < x \leqq 1$ ならば $\left|\sin\dfrac{1}{x^2}\right| \leqq 1$ だから, 教科書の定理 4.2 の (1) によって $\displaystyle\int_0^1 \left|\sin\frac{1}{x^2}\right|dx$ は収束する. また, $x \geqq 1$ ならば $0 < \dfrac{1}{x^2} \leqq 1 < \pi$ であり, 任意の正の実数 t に対して $\sin t < t$ が成り立つため, $x \geqq 1$ ならば $0 < \sin\dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{x^2}$ である. 教科書の問 4.3 により, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ は収束するため, 教科書の定理 4.2 の (1) によって $\displaystyle\int_1^\infty \left|\sin\frac{1}{x^2}\right|dx$ は収束する. 従って $\displaystyle\int_0^\infty \left|\sin\frac{1}{x^2}\right|dx = \int_0^1 \left|\sin\frac{1}{x^2}\right|dx + \int_1^\infty \left|\sin\frac{1}{x^2}\right|dx$ は収束するため, 教科書の定理 4.4 によって $\displaystyle\int_0^\infty \sin\frac{1}{x^2}dx$ は絶対収束する.

(25) $x \geqq 1$ ならば $x \geqq \log x + 1 > 0$ だから $\dfrac{1}{x} \leqq \dfrac{1}{1+\log x}$ である. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ は発散するため, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+\log x}dx$ も発散する.

(26) $\log x$ のグラフは上に凸だから, $\log x$ のグラフ上の 2 点 $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$, $(1, 0)$ を通る直線 $y = \dfrac{e(x-1)}{e-1}$ を考えれば, $\dfrac{1}{e} \leqq x \leqq 1$ ならば $\dfrac{e(x-1)}{e-1} \leqq \log x$ であることがわかる. 従って $\dfrac{1}{e} \leqq x < 1$ ならば $0 < \dfrac{\log x}{x-1} \leqq \dfrac{e}{e-1}$ が成り立つため, $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{\log x}{x-1}dx$ は収束する. $0 < x \leqq \dfrac{1}{e}$ ならば $\log x < 0$, $1-x \geqq 1-\dfrac{1}{e} > \dfrac{1}{2}$ だから $0 < \dfrac{\log x}{x-1} = \dfrac{-\log x}{1-x} \leqq -2\log x$ である. また, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}}(-2\log x)dx = \lim_{t\to+0}\int_t^{\frac{1}{e}}(-2\log x)dx = \lim_{t\to+0}[2x - 2x\log x]_t^{\frac{1}{e}} = \lim_{t\to+0}\left(\frac{4}{e} - 2t + 2t\log t\right) = \frac{4}{e}$ だから $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}}(-2\log x)dx$ は収束するため, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{\log x}{x-1}dx$ も収束する. 故に $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x-1}dx$ は収束する.

(27) $0 < \alpha < 1$ の場合, $0 < x \leqq 1$ ならば $0 < \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x} \leqq x^{\alpha-1}$ であり, $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}dx = \lim_{t\to+0}\int_t^1 x^{\alpha-1}dx = \lim_{t\to+0}\left[\frac{x^\alpha}{\alpha}\right]_t^1 = \lim_{t\to+0}\frac{1-t^\alpha}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ より $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}dx$ は収束するため, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ も収束する. $x \geqq 1$ ならば $0 < \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x} \leqq x^{\alpha-2}$ であり, $\displaystyle\int_1^\infty x^{\alpha-2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{\alpha-2}dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\frac{t^{\alpha-1}-1}{\alpha-1} = \frac{1}{1-\alpha}$ より $\displaystyle\int_1^\infty x^{\alpha-1}dx$ は収束するため, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ も収束する. 故に $0 < \alpha < 1$ ならば $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ は収束する. $\alpha \geqq 1$ の場合, $x \geqq 1$ ならば $\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x} \geqq \dfrac{x^{\alpha-1}}{2x} = \dfrac{x^{\alpha-2}}{2} \geqq \dfrac{1}{2x}$ であり, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{2x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{2x}dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{\log x}{2}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{2} = \infty$ より $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{2x}dx$ は発散するため, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ も発散する. 故に $\alpha \geqq 1$ ならば $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ は発散する.

(28) $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ならば $\dfrac{x}{\sin x} > 0$ であり, $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x}{\sin x} = 1$ だから, $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^\alpha$ で定めれば, f はつねに正の値をとる連続関数である. f の最小値を m とすれば $m > 0$ であり, $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ならば $0 < \sin x < x$ だから $\dfrac{x^\alpha}{(\sin x)^{\alpha+1}} = \dfrac{f(x)}{\sin x} \geqq \dfrac{m}{x}$ が成り立つ. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m}{x}dx$ は発散するため, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^\alpha}{(\sin x)^{\alpha+1}}dx$ も発散する.

(29) $t > s > 0$ のとき, $y = \dfrac{x}{2}$ と変数変換を行えば $\displaystyle\int_s^t \frac{\sin x\cos x}{x}\,dx = \int_s^t \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\,dx = 2\int_{\frac{s}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{\sin y}{y}\,dy$ である. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy = \lim_{t\to\infty}\lim_{s\to+0}\int_{\frac{s}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{\sin y}{y}\,dy$ は存在するため, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x\cos x}{x}\,dx$ は存在する.

(30) $0 < x \leqq \dfrac{1}{2}$ ならば $\sqrt{1-x^2} \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ だから $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}} \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3x}}$ であり, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{3x}}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ は収束するため, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}}dx$ も収束する. $\dfrac{1}{2} \leqq x < 1$ ならば $\sqrt{x} \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ だから $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}} \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$ であり, $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{t\to1-0}\int_{\frac{1}{2}}^t \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{t\to1-0}\sqrt{2}\Big(\sin^{-1}t - \frac{\pi}{6}\Big) = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$ である. 従って $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}}dx$ も収束するため, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}}dx$ は収束する.

(31) $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ だから, $x \geqq 0$ ならば任意の 0 以上の整数 n に対して $\sinh x \geqq \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ が成り立つ. 従って $n > \dfrac{\alpha}{2}$ を満たす自然数 n を選べば, $x \geqq 1$ ならば $\dfrac{x^\alpha}{\sinh x} \leqq \dfrac{(2n+1)!}{x^{2n-\alpha+1}}$ であり, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(2n+1)!}{x^{2n-\alpha+1}}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{(2n+1)!}{x^{2n-\alpha+1}}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{(2n+1)!}{(2n-\alpha)x^{2n-\alpha}}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{(2n+1)!}{2n-\alpha} - \frac{(2n+1)!}{(2n-\alpha)t^{2n-\alpha}}\right) = \frac{(2n+1)!}{2n-\alpha}$ より $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(2n+1)!}{x^{2n-\alpha+1}}dx$ は収束するため, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{\sinh x}dx$ も収束する. $\sinh x$ のグラフは $x \geqq 0$ の範囲で下に凸だから, $\sinh x$ のグラフ上の 2 点 $(0,0)$, $(1,\sinh 1)$ を通る直線 $y = (\sinh 1)x$ を考えれば, $0 \leqq x \leqq 1$ ならば $\sinh x \leqq (\sinh 1)x$ であることがわかる. 従って $0 < x \leqq 1$ ならば $0 < \dfrac{x^\alpha}{\sinh x} \leqq \dfrac{x^{\alpha-1}}{\sinh 1}$ が成り立ち, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{\sinh 1}dx = \lim_{t\to+0}\int_t^1 \frac{x^{\alpha-1}}{\sinh 1}dx = \lim_{t\to+0}\left[\frac{x^\alpha}{\alpha\sinh 1}\right]_t^1 = \lim_{t\to+0}\frac{1-t^\alpha}{\alpha\sinh 1} = \frac{1}{\alpha\sinh 1}$ より $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{\sinh 1}dx$ は収束するため, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sinh x}dx$ も収束する. 故に $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{\sinh x}dx$ は収束する.

(32) $R > 0$ に対し, $\displaystyle\int_0^R \sin(x^2)dx = \int_0^R \frac{1}{2x}\left(1-\cos(x^2)\right)'dx = \left[\frac{1-\cos(x^2)}{2x}\right]_0^R + \int_0^R \frac{1-\cos(x^2)}{2x^2}dx = \frac{1-\cos(R^2)}{2R} + \int_0^R \frac{1-\cos(x^2)}{2x^2}dx$ が成り立つ. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x^2)}{2x^2} = \lim_{y\to+0}\frac{1-\cos y}{2y} = 0$ だから $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos(x^2)}{2x^2}dx$ は存在する. また $\dfrac{1-\cos(x^2)}{2x^2} \leqq \dfrac{1}{x^2}$ で, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ は収束するため, 教科書の定理 4.2 の (1) によって $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1-\cos(x^2)}{2x^2}dx$ も収束する. 従って $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(x^2)}{2x^2}dx$ は収束し, さらに $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\frac{1-\cos(R^2)}{2R} = 0$ だから, 最初の等式から $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x^2)dx$ は収束する.

$n = 0,1,2,\ldots$ に対し $\dfrac{\pi}{4} + n\pi \leqq x^2 \leqq \dfrac{3\pi}{4} + n\pi$ すなわち $\sqrt{\dfrac{\pi}{4}+n\pi} \leqq x \leqq \sqrt{\dfrac{3\pi}{4}+n\pi}$ ならば $|\sin(x^2)| \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ だから $\displaystyle\int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}+n\pi}}^{\sqrt{\frac{3\pi}{4}+n\pi}} |\sin(x^2)|dx \geqq \int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}+n\pi}}^{\sqrt{\frac{3\pi}{4}+n\pi}} \frac{1}{\sqrt{2}}dx = \sqrt{\frac{3\pi}{4}+n\pi} - \sqrt{\frac{\pi}{4}+n\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{3+4n}+\sqrt{1+4n}} > \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{n}}$ が成り立つ. 従って $R \geqq \sqrt{\dfrac{3\pi}{4}+N\pi}$ ならば $\displaystyle\int_0^R |\sin(x^2)|dx \geqq \sum_{n=1}^N \int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}+n\pi}}^{\sqrt{\frac{3\pi}{4}+n\pi}} |\sin(x^2)|dx > \sum_{n=1}^N \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{n}}$ が成り立つ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{n}}$ は発散するため, 上の不等式により $\displaystyle\int_0^\infty |\sin(x^2)|dx$ は発散することがわかる. 以上から, $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x^2)dx$ は条件収束する.

3. 第 10 回の問題 1.(10) の結果から次の等式が得られる.

$$\int_r^t \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-p)^2(x^2+q^2)}dx = \left[a\log|x-p| + \frac{(aq^2-c)(p^2-q^2)+2p(bq^2-d)}{2(p^2+q^2)^2}\log\frac{(x-p)^2}{x^2+q^2} - \frac{ap^3+bp^2+cp+d}{(p^2+q^2)(x-p)}\right.$$
$$\left. + \frac{2pq^2(aq^2-c)-(p^2-q^2)(bq^2-d)}{q(p^2+q^2)^2}\tan^{-1}\frac{x}{q}\right]_r^t$$
$$= a\log\frac{|t-p|}{|r-p|} + \frac{2pq^2(aq^2-c)-(p^2-q^2)(bq^2-d)}{q(p^2+q^2)^2}\left(\tan^{-1}\frac{t}{q} - \tan^{-1}\frac{r}{q}\right)$$
$$+ \frac{(aq^2-c)(p^2-q^2)+2p(bq^2-d)}{2(p^2+q^2)^2}\log\frac{(t-p)^2(r^2+q^2)}{(r-p)^2(t^2+q^2)} + \frac{(ap^3+bp^2+cp+d)(t-r)}{(p^2+q^2)(t-p)(r-p)}$$

従って, $a > 0$ ならば $\displaystyle\int_r^\infty \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-p)^2(x^2+q^2)}dx = \infty$, $a < 0$ ならば $\displaystyle\int_r^\infty \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-p)^2(x^2-q^2)}dx = -\infty$ であり, $a=0$ ならば $\displaystyle\int_r^\infty \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-p)^2(x^2+q^2)}dx = \frac{bp^2+cp+d}{(p^2+q^2)(r-p)} - \frac{2cpq^2+(p^2-q^2)(bq^2-d)}{q(p^2+q^2)^2}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{r}{q}\right) - \frac{c(p^2-q^2)-2p(bq^2-d)}{2(p^2+q^2)^2}\log\frac{r^2+q^2}{(r-p)^2}$.

4. (1) $t=\cos^2\theta$ と変数変換すれば, $dt = -2\sin\theta\cos\theta d\theta$ であり, θ が 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動けば t は 1 から 0 まで動くため, $\displaystyle 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\theta\right)^{p-1}\left(1-\cos^2\theta\right)^{q-1}2\sin\theta\cos\theta\,d\theta = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = B(p,q)$ が得られる. $x = \dfrac{1}{1+\tan\theta}$ とおけば $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$ より $d\theta = -\dfrac{1}{x^2+(1-x)^2}dx$, $\cos^2\theta = \dfrac{x^2}{x^2+(1-x)^2}$, $\sin^2\theta = \dfrac{(1-x)^2}{x^2+(1-x)^2}$, $\cos\theta\sin\theta = \dfrac{x(1-x)}{x^2+(1-x)^2}$ だから, $0<t<\dfrac{\pi}{2}$ に対して次の等式が成り立つ.

$$\int_0^t \frac{\cos^{p-1}\theta\sin^{q-1}\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^{p+q}}\,d\theta = \int_0^t \frac{(\cos^2\theta)^{\frac{p-1}{2}}(\sin^2\theta)^{\frac{q-1}{2}}}{(1+2\cos\theta+\sin\theta)^{\frac{p+q}{2}}}\,d\theta = -\int_1^{\frac{1}{1+\tan t}} \frac{\left(\frac{x^2}{x^2+(1-x)^2}\right)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{(1-x)^2}{x^2+(1-x)^2}\right)^{\frac{q-1}{2}}}{\left(1+\frac{2x(1-x)}{x^2+(1-x)^2}\right)^{\frac{p+q}{2}}(x^2+(1-x)^2)}\,dx$$
$$= \int_{\frac{1}{1+\tan t}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

$t\to\dfrac{\pi}{2}-0$ のとき, $\dfrac{1}{1+\tan t}\to +0$ だから, 上式から $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{p-1}\theta\sin^{q-1}\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^{p+q}}\,d\theta = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = B(p,q)$ が得られる.

(2) $t=1-x$ とおく. $x\to r$ のとき $t\to 1-r$, $x\to\dfrac{1}{2}$ のとき $t\to\dfrac{1}{2}$, $x\to R$ のとき $t\to 1-R$ であり, $dx=-dt$ だから,

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \lim_{r\to+0}\int_r^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx + \lim_{R\to1-0}\int_{\frac{1}{2}}^R x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$
$$= \lim_{r\to+0}\int_{1-r}^{\frac{1}{2}} -(1-t)^{p-1}t^{q-1}dt + \lim_{R\to1-0}\int_{\frac{1}{2}}^{1-R} -(1-t)^{p-1}t^{q-1}dt$$
$$= \lim_{R\to1-0}\int_{1-R}^{\frac{1}{2}} t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt + \lim_{r\to+0}\int_{\frac{1}{2}}^{1-r} t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt$$
$$= \lim_{s\to+0}\int_s^{\frac{1}{2}} t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt + \lim_{S\to1-0}\int_{\frac{1}{2}}^S t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt = \int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx = B(q,p).$$

(3) $p, q > 0$ ならば $B(p+1,q) = \dfrac{p}{q}B(p,q+1)$ が成り立つことを示す.

$$\begin{aligned}
B(p+1,q) &= \int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx = \lim_{r\to+0}\int_r^{\frac12} x^p\left(-\frac{(1-x)^q}{q}\right)' dx + \lim_{R\to1-0}\int_{\frac12}^R x^p\left(-\frac{(1-x)^q}{q}\right)' dx \\
&= \lim_{r\to+0}\left[-\frac{x^p(1-x)^q}{q}\right]_r^{\frac12} + \lim_{r\to+0}\int_r^{\frac12}\frac{p}{q}x^{p-1}(1-x)^q dx + \lim_{R\to1-0}\left[-\frac{x^p(1-x)^q}{q}\right]_{\frac12}^R \\
&\quad + \lim_{R\to1-0}\int_{\frac12}^R \frac{p}{q}x^{p-1}(1-x)^q dx \\
&= \lim_{r\to+0}\frac{1}{q}\left(r^p(1-r)^q - \frac{1}{2^{p+q}}\right) + \lim_{R\to1-0}\frac{1}{q}\left(\frac{1}{2^{p+q}} - R^p(1-R)^q\right) \\
&\quad + \frac{p}{q}\left(\lim_{r\to+0}\int_r^{\frac12} x^{p-1}(1-x)^q dx + \lim_{R\to1-0}\int_{\frac12}^R x^{p-1}(1-x)^q dx\right) \\
&= \frac{p}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx = \frac{p}{q}B(p,q+1)
\end{aligned}$$

従って p, q が自然数ならば, 教科書の問題 4.13 の (2) の結果から

$$\begin{aligned}
B(p,q) &= \frac{p-1}{q}B(p-1,q+1) = \frac{p-1}{q}\frac{p-2}{q+1}B(p-2,q+2) = \cdots = \frac{p-1}{q}\frac{p-2}{q+1}\cdots\frac{2}{p+q-2}B(1,p+q-1) \\
&= \frac{(p-1)(p-2)\cdots 2}{(p+q-2)(p+q-3)\cdots q}\int_0^1 (1-x)^{p+q-2}dx = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-2)!}\left[-\frac{(1-x)^{p+q-1}}{p+q-1}\right]_0^1 \\
&= \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.
\end{aligned}$$

5. 以下の等式が成り立つため, 前問の (1) から $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^{2p}x}{(1+e^x)\sqrt{1+\cos x}}dx = 2^{2p-\frac12}B\big(p+\tfrac12,p\big)$ である.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^{2p}x}{(1+e^x)\sqrt{1+\cos x}}dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{2^{2p}\sin^{2p}\frac{x}{2}\cos^{2p}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}(1+e^x)\cos\frac{x}{2}}dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{2^{2p-\frac12}\sin^{2p}\frac{x}{2}\cos^{2p-1}\frac{x}{2}}{1+e^x}dx \\
&= 2^{2p-\frac12}\left(\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin^{2p}\frac{x}{2}\cos^{2p-1}\frac{x}{2}}{1+e^x}dx + \int_0^{\pi}\frac{\sin^{2p}\frac{x}{2}\cos^{2p-1}\frac{x}{2}}{1+e^x}dx\right) \\
&= 2^{2p-\frac12}\left(\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2p}\frac{x}{2}\cos^{2p-1}\frac{x}{2}}{1+e^{-x}}dx + \int_0^{\pi}\frac{\sin^{2p}\frac{x}{2}\cos^{2p-1}\frac{x}{2}}{1+e^x}dx\right) \\
&= 2^{2p-\frac12}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^x}\right)\sin^{2p}\frac{x}{2}\cos^{2p-1}\frac{x}{2}\,dx \\
&= 2^{2p-\frac12}\int_0^{\pi}\sin^{2p}\frac{x}{2}\cos^{2p-1}\frac{x}{2}\,dx = 2^{2p+\frac12}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}\theta\cos^{2p-1}\theta\,d\theta
\end{aligned}$$

6. (1) $f:(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ を $f(x) = \dfrac{\log x}{x^s}$ で定めれば $f'(x) = \dfrac{1-s\log x}{x^{s+1}}$ だから $\left[e^{\frac1s},\infty\right)$ において f は単調減少である. 演習問題 1 の (38) から $s>1$ の場合は $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\log x}{x^s}dx$ は収束する. よって, $s>1$ ならば $e^{\frac1s}<3$ であることに注意すれば, 教科書の定理 4.8 から, $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\log n}{n^s}$ は収束するため $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^s}$ も収束する.

$s \leqq 1$ の場合, $n \geqq 3$ ならば $\log n \geqq 1$ だから, $\dfrac{\log n}{n^s} \geqq \dfrac{1}{n^s}$ である. 教科書の 119 ページの結果によって $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ は発散するため, 定理 4.6 の (2) によって $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\log n}{n^s}$ は発散する. 従って $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^s}$ も発散する.

(2) $f:(e,\infty)\to\boldsymbol{R}$ を $f(x) = \dfrac{1}{x\log x(\log\log x)^s}$ で定める. x, $\log x$, $(\log\log x)^s$ はすべて (e,∞) において正の値をとる単調増加関数であるため, f は正の値をとる単調減少関数である. $\log(\log x) = t$ とおくと $\dfrac{1}{x\log x}dx = dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{x\log x(\log\log x)^s}dx = \int\frac{1}{t^s}dt = \begin{cases}\log|t| & s=1\\ \frac{t^{1-s}}{1-s} & s\neq1\end{cases}$ だから $\displaystyle\int\frac{1}{x\log x(\log\log x)^s}dx = \begin{cases}\log|\log(\log x)| & s=1\\ \frac{(\log(\log x))^{1-s}}{1-s} & s\neq1\end{cases}$. 故

に $s=1$ の場合, $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x\log x(\log\log x)^s}dx = \lim_{r\to\infty}[\log|\log(\log x)|]_3^\infty = \lim_{r\to\infty}(\log|\log(\log r) - \log|\log(\log 3)|) = \infty$ であり, $s \neq 1$ の場合, $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x\log x(\log\log x)^s}dx = \lim_{r\to\infty}\frac{(\log(\log r))^{1-s} - (\log(\log 3))^{1-s}}{1-s} = \begin{cases}\infty & s<1 \\ \frac{(\log(\log 3))^{1-s}}{s-1} & s>1\end{cases}$ である. 以上から $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x\log x(\log\log x)^s}dx$ は $s \leqq 1$ ならば発散し, $s>1$ ならば $\dfrac{(\log(\log 3))^{1-s}}{s-1}$ に収束する. 故に教科書の定理 4.8 から, $\displaystyle\sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n(\log n)(\log(\log n))^s}$ は $s \leqq 1$ ならば発散し, $s>1$ ならば収束する.

7. (1) $x \geqq 1$ ならば $0 < \dfrac{1}{\sqrt{x^3+x+1}} \leqq \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ であり, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ は収束するため, 教科書の定理 4.2 の (1) により $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+x+1}}dx$ も収束する. 故に $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+x+1}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3+x+1}}dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+x+1}}dx$ も収束する.

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+x+1}}$ で定義される関数 $f[1,\infty) \to \boldsymbol{R}$ は明らかに単調減少で, つねに正の値をとる. 故に教科書の定理 4.8 と上の結果から, 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}}$ は収束する.

(2) $x^2 = \sqrt{x^4} \leqq \sqrt{x^4+1}$ だから $x \geqq 1$ ならば $0 \leqq \dfrac{\log x}{\sqrt{x^4+1}} \leqq \dfrac{\log x}{x^2}$ である. 問題 1 の (38) の結果から広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}dx$ は収束するため, 教科書の定理 4.2 の (1) によって広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x^4+1}}dx$ は収束する.

$f : [1,\infty) \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \dfrac{\log x}{\sqrt{x^4+1}}$ で定義する. $x > e$ ならば $\log x > 1$ だから

$$f'(x) = \frac{x^4+1-2x^4\log x}{x(x^4+1)^{\frac{3}{2}}} < \frac{2x^4(1-\log x)}{x(x^4+1)^{\frac{3}{2}}} < 0$$

となるため, f は $[e,\infty)$ では単調減少である. 広義積分 $\displaystyle\int_3^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x^4+1}}dx$ は上の結果から収束するため, 教科書の定理 4.8 によって, 級数 $\displaystyle\sum_{n=3}^\infty \frac{\log n}{\sqrt{n^4+1}}$ は収束する. 故に 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\log n}{\sqrt{n^4+1}}$ も収束する.

(3) 不等式 $\log(1+t) \leqq t$ において $t = \dfrac{1}{x}$ とすれば $\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \leqq \dfrac{1}{x}$ だから $x>0$ ならば $0 < \dfrac{1}{x}\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \leqq \dfrac{1}{x^2}$ が成り立つ. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ は収束するため, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$ も収束する.

$f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ を $f(x) = \dfrac{1}{x}\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ で定める. $0 < x < y$ ならば $\dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$ だから $\log\left(1+\dfrac{1}{y}\right) < \log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ であるため, $f(y) = \dfrac{1}{y}\log\left(1+\dfrac{1}{y}\right) < \dfrac{1}{x}\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$ が成り立つ. 従って f は単調減少である正値関数である. 上の結果から $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ は収束するため, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f(n) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ も収束する.

(3 の別解) 数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^\infty$ は単調に増加して e に収束するため, 任意の自然数 n に対して $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqq e$ が成り立つ. 故に $\dfrac{1}{n}\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2}\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqq \dfrac{1}{n^2}$ である. 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ は収束するため, $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ も収束する.

$0 < x < y$ ならば $\dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$ より $\log\left(1+\dfrac{1}{y}\right) < \log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ だから, $f(y) = \dfrac{1}{y}\log\left(1+\dfrac{1}{y}\right) < \dfrac{1}{x}\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$ が成り立つ. 従って f は単調減少である正値関数である. 上の結果から $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f(n) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ は収束するため, 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$ も収束する.

(4) $x \geqq 2$ ならば $x = \sqrt{x^2} \leqq \sqrt{x^2+1}$ だから $0 \leqq \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}(\log x)^2} \leqq \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ である. 問題 1 の (46) の結果から広義積分 $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^2}dx$ は収束するため, 教科書の定理 4.2 の (1) によって広義積分 $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+1}(\log x)^2}dx$ は収

束する．

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}(\log x)^2}$ で定義される関数 $f:[2,\infty)\to\boldsymbol{R}$ は明らかに単調減少で, つねに正の値をとる．故に教科書の定理 4.8 と上の結果から, 級数 $\sum\limits_{n=}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}(\log n)^2}$ は収束する．

(5) $t>0$ ならば $\sin t<t$ が成り立ち, $x>\dfrac{1}{\pi}$ ならば $0<\dfrac{1}{x}<\pi$ だから, $x\geqq 1$ ならば $0<\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{x^2}$ が成り立つ．広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ が収束するため, $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx$ も収束する．$x\geqq 1$ ならば $0<\dfrac{1}{x}\leqq 1<\dfrac{\pi}{2}$ だから, x を $\dfrac{1}{x}$ に対応させる関数と, x を $\sin\dfrac{1}{x}$ に対応させる関数はともに正の値をとる単調減少関数だから, $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ で定義される関数 $f:[1,\infty)\to\boldsymbol{R}$ もつねに正の値をとる単調減少関数である．従って, 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx$ が収束することから, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$ も収束する．

8. (1) $\displaystyle\int_1^t\left(\log(x+a)-\log x-\frac{a}{x+a}\right)dx=[(x+a)\log(x+a)-x\log x-a\log(x+a)]_1^t=\left[x\log\Bigl(1+\frac{a}{x}\Bigr)\right]_1^t$ $\displaystyle=t\log\Bigl(1+\frac{a}{t}\Bigr)-\log(1+a)$ だから $\displaystyle\int_1^{\infty}\left(\log(x+a)-\log x-\frac{a}{x+a}\right)dx=\lim_{t\to\infty}\Bigl(t\log\Bigl(1+\frac{a}{t}\Bigr)-\log(1+a)\Bigr)=$ $\displaystyle\lim_{t\to\infty}a\log\Bigl(1+\frac{a}{t}\Bigr)^{\frac{t}{a}}-\log(1+a)=a\log\Biggl(\lim_{t\to\infty}\Bigl(1+\frac{a}{t}\Bigr)^{\frac{t}{a}}\Biggr)-\log(1+a)=a\log e-\log(1+a)=a-\log(1+a).$

(2) $f:[1,\infty)\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=\log\Bigl(1+\dfrac{a}{x}\Bigr)-\dfrac{a}{x+a}$ で定めれば, $x>1$ のとき

$$f'(x)=\frac{-a}{x(x+a)}+\frac{a}{(x+a)^2}=\frac{-a^2}{x(x+a)^2}<0$$

となるため f は単調減少関数である．また, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\log\Bigl(1+\frac{a}{x}\Bigr)-\frac{a}{x+a}\right)=0$ だから $x\to\infty$ のとき f は単調に減少して 0 に収束するため, $x\geqq 1$ ならば $f(x)>0$ である．(1) の結果から

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\left(\log(x+a)-\log x-\frac{a}{x+a}\right)dx$$

は収束するため, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log\Bigl(1+\frac{a}{n}\Bigr)-\frac{a}{n+a}\right)$ は収束する．

[注意] 与えられた級数が収束することは, (1) の結果を用いなくても, 以下のように示すことができる．上の解答の前半から, 与えられた級数は正項級数であり, $x>-1$ ならば $\log(1+x)\leqq x$ だから, $n=1,2,\ldots$ に対して次の不等式が成り立つ．

$$\log\Bigl(1+\frac{a}{n}\Bigr)-\frac{a}{n+a}\leqq\frac{a}{n}-\frac{a}{n+a}=\frac{a^2}{n(n+a)}$$

一方, $\dfrac{a^2}{n^2}$ と $\dfrac{a^2}{n(n+a)}$ は $n\to\infty$ のとき, 同位の無限小であり, 教科書の 119 ページの結果によって級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^2}{n^2}$ は収束するため, 教科書の定理 4.7 によって, 級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^2}{n(n+a)}$ も収束する．従って, 上の不等式と教科書の定理 4.6 により, 与えられた級数も収束する．

9. (1) $x>k$ ならば $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{k}$ だから $\displaystyle\log(k+1)-\log k=\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx=\frac{1}{k}$ である．この不等式に $k=1,2,\ldots,n$ を代入したものを辺々加えると, $\log(n+1)<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ が得られ, この両辺から $\log n$ を引けば $\log(n+1)-\log n<a_n$ が得られる．

(2) $x<k+1$ ならば $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{k+1}$ だから $\displaystyle\log(k+1)-\log k=\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx>\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dx=\frac{1}{k+1}$ である．故に $a_{k+1}-a_k=\dfrac{1}{k+1}-\log(k+1)+\log k<0$ だから, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列である．(1) の結果から $a_n>\log(n+1)-\log n>0$ であるため, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界である．故に連続性の公理から $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する．

(3) $a_3 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \log 3 < 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \log e = \dfrac{5}{6}$ であり, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n < \frac{5}{6}$ である. n を 8 以上の自然数とし, (1) で得た不等式 $\log(k+1) - \log k < \dfrac{1}{k}$ に $k = 7, 8, \ldots, n-1$ を代入したものを辺々加えると, $\log n - \log 7 < \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{n-1}$ が得られ, この両辺に $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{n} - \log n$ を加えて, 右辺と左辺を入れ替えれば $a_n > \dfrac{49}{20} - \log 7 + \dfrac{1}{n}$ が得られる. 従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \geqq \frac{49}{20} - \log 7$ である. ここで, $\log 7 = 1.9459... < 1.95 = \dfrac{39}{20}$ だから $\dfrac{49}{20} - \log 7 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{39}{20} - \log 7 > \dfrac{1}{2}$ となるため, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n > \frac{1}{2}$ である.
(Gauss 全集第 3 巻, 154 ページによると, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0.577215664901532860606512090082402431042 1....$)

10. (1) 教科書の問題 3.10 の (2) により $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ならば $\dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin x$ だから, 両辺の対数を考えれば $\log \sin x \geqq \log x + \log 2 - \log \pi$ である. よって $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ ならば $\log t + \log 2 - \log \pi - 1 < 0$ であることに注意すれば

$$\begin{aligned}\int_t^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx &\geqq \int_t^{\frac{\pi}{2}} (\log x + \log 2 - \log \pi) dx = [x \log x + x(\log 2 - \log \pi - 1)]_t^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\pi}{2} - t(\log t + \log 2 - \log \pi - 1) \geqq -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

となるため, $\displaystyle\int_t^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx$ は下に有界である. 一方, $f(t) = \displaystyle\int_t^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx$ によって, 関数 $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \to \boldsymbol{R}$ を定めれば $f'(t) = -\log \sin t \geqq 0$ だから f は単調増加関数である. そこで, $a_n = f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ によって数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めれば $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界な単調減少数列であるため, 連続性の公理によって収束する. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = I$ とおく. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 自然数 k で, 条件「$n \geqq k$ ならば $|a_n - I| < \varepsilon$」を満たすものがある. $0 < t < \dfrac{1}{k}$ ならば $n > \dfrac{1}{t}$ を満たす自然数 n をとると, $n > k$ かつ $\dfrac{1}{n} < t$ より $-\varepsilon < a_n - I = f\left(\dfrac{1}{n}\right) - I < f(t) - I < f\left(\dfrac{1}{n}\right) - I = a_k - I < \varepsilon$ となるため $|f(t) - I| < \varepsilon$ である. 故に $\displaystyle\lim_{t\to+0} \int_t^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx = \lim_{t\to 0} f(t) = I$ となり, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx$ は存在する.

(2) $x = \dfrac{\pi}{2} - y$ とおくと $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \log \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin y dy = I$ であるから $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1}{2} \sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x dx = 2I$. $x = \dfrac{y}{2}$ とおき, 教科書の問 3.21 の (ii) で示したことと, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x dx = I$ を用いて $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \log \sin y dy =$ $\displaystyle\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin y + \log \cos y) dy = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin y dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos y dy\right) = I$ を得る. 故に $2I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1}{2} \sin 2x dx =$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin 2x - \log 2) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2 dx = I - \frac{\pi \log 2}{2}$ となるため, $I = -\dfrac{\pi \log 2}{2}$ である.

11. (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\log \sin x)' dx = [x \log \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx = -\lim_{x\to+0} x \log \sin x + \frac{\pi \log 2}{2} =$ $\displaystyle-\lim_{x\to+0} \frac{x}{\sin x} \sin x \log \sin x + \frac{\pi \log 2}{2} = -\lim_{x\to+0} \frac{x}{\sin x} \lim_{x\to+0} \sin x \log \sin x + \frac{\pi \log 2}{2} =$ $\displaystyle-\left(\lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x}\right)^{-1} \lim_{y\to+0} y \log y + \frac{\pi \log 2}{2} = \frac{\pi \log 2}{2}$ ($y = \sin x$ とおき, 教科書の問 1.18 の結果を用いた.)

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \left(\frac{-1}{\tan x}\right)' dx = \left[-\frac{x^2}{\tan x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{\tan x} dx = \left[-x \cos x \frac{x}{\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} dx =$ $\pi \log 2$ ((1) の結果を用いた.)

(3) $y = \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$ とおくと $x \to +0$ のとき, $y \to \dfrac{\pi}{2} - 0$, $x \to \infty$ のとき $y \to +0$ であり, $x = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) = \dfrac{1}{\tan y}$ だから $dx = -\dfrac{1}{\sin^2 y} dy$ である. 従って (2) の結果から $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)^2 dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\frac{y}{\sin y}\right)^2 dy =$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{y}{\sin y}\right)^2 dy = \pi \log 2.$

(4) $y=\dfrac{x}{2}$ とおくと $\displaystyle\int_0^{\pi}\log(1-\cos x)dx=\int_0^{\pi}\log\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2(2\log\sin y+\log 2)dy=$
$\displaystyle 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin y dy+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log 2dy=-2\pi\log 2+\pi\log 2=-\pi\log 2.$

(5) $y=\pi-x$, $z=\dfrac{\pi}{2}-y$ とおくと, (4) の結果より $\displaystyle\int_0^{\pi}\log(1+\cos x)dx=\int_{\pi}^{0}-\log(1+\cos(\pi-y))dy=$
$\displaystyle\int_0^{\pi}\log(1-\cos y)dy=-\pi\log 2.$

(6) 教科書の問題 1.6 の (1) の結果から $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log(1-\cos x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log(1-\cos x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{\sin x}{1-\cos x}}{-\frac{1}{x^2}}=$
$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{-x^2\sin x}{1-\cos x}=-\lim_{x\to+0}x\left(\frac{1-\cos x}{x\sin x}\right)^{-1}=-0\cdot 2=0$ だから, (4) より $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1-\cos x}dx=$
$\displaystyle\int_0^{\pi}x(\log(1-\cos x))'dx=[x\log(1-\cos x)]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\log(1-\cos x)dx=\pi\log 2+\pi\log 2=2\pi\log 2.$

(7) $x=\sin y$ とおけば, $dx=\cos ydy$ だから $\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin ydy=-\frac{\pi\log 2}{2}.$

(8) $\displaystyle\int\frac{\sin^{-1}x}{x}dx=\int\sin^{-1}x(\log x)'dx=\sin^{-1}x\log x-\int\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ であり, 教科書の問 1.18 と問題 1.6 の (4) の結果から $\displaystyle\lim_{x\to+0}\sin^{-1}x\log x=\left(\lim_{x\to+0}\frac{\sin^{-1}x}{x}\right)\left(\lim_{x\to+0}x\log x\right)=0$ だから, (6) の結果により $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin^{-1}x}{x}dx=$
$\displaystyle\lim_{x\to+0}\sin^{-1}x\log x-\int_0^1\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi\log 2}{2}.$

(9) $y=\dfrac{\pi}{2}-x$ とおき, (1) の結果を用いると $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan xdx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(-y\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right)dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{y}{\tan y}dy$
$=\dfrac{\pi\log 2}{2}$

(10) $y=\pi-x$ とおけば $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\log\sin x\,dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\pi-y)\log\sin(\pi-y)\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-x)\log\sin x\,dx$ だから
$\displaystyle\int_0^{\pi}x\log\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\log\sin x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\log\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\log\sin x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-x)\log\sin x\,dx=$
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\log\sin x+(\pi-x)\log\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\log\sin x\,dx=-\frac{\pi^2\log 2}{2}.$

(11) $y=\dfrac{\pi}{2}-x$ とおけば $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\cos x\,dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\log\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin xdx$ だから
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\tan x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\log\sin x-\log\cos x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\cos x\,dx=0.$

(12) $x=\sin t$ とおけば, $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\log\sin t\,dt$ であり, 一方 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$
$\displaystyle\int_0^1\left(-\sqrt{1-x^2}\right)'x\log x\,dx=\left[\left(-\sqrt{1-x^2}\right)x\log x\right]_0^1+\int_0^1\sqrt{1-x^2}(\log x+1)\,dx=-\lim_{x\to+0}\left(-\sqrt{1-x^2}\right)x\log x+$
$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x^2}\log x\,dx+\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\log\sin t\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\log\sin t\,dt+\frac{\pi}{4}$ だから
$\displaystyle 2\int_0^1\frac{x^2\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\log\sin t\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\log\sin t\,dt+\frac{\pi}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t+\cos^2 t)\log\sin t\,dt+\frac{\pi}{4}=$
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin t\,dt+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi\log 2}{2}$ が得られる. 従って $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi\log 2}{4}$ である.

(13) (12) の結果から $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\log\sin x\,dx=\int_0^1\frac{x^2\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi\log 2}{4}.$

(14) $\theta=\sin^{-1}a$, $x=\sin t$ とおけば, $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{\log|y-x|}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\log|\sin\theta-\sin t|\,dt=$
$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\log\left|2\sin\frac{\theta-t}{2}\cos\frac{\theta+t}{2}\right|dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\log 2\,dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\log\left|\sin\frac{\theta-t}{2}\right|dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\log\left|\cos\frac{\theta+t}{2}\right|dt=$
$\displaystyle\pi\log 2+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}\log\sin\frac{\theta-t}{2}dt+\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\log\sin\frac{t-\theta}{2}dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\log\sin\frac{\pi-\theta-t}{2}dt$ である.

$\varphi = \dfrac{\theta - t}{2}$ とおけば $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \log\sin\frac{\theta - t}{2}dt = \int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}}^{0} -2\log\sin\varphi\, d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi$,
$\varphi = \dfrac{t - \theta}{2}$ とおけば $\displaystyle\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\frac{t - \theta}{2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}} 2\log\sin\varphi\, d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi$,
$\varphi = \dfrac{\pi - \theta - t}{2}$ とおけば $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\frac{\pi - \theta - t}{2}dt = \int_{\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}} -2\log\sin\varphi\, d\varphi = 2\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}}^{\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi$ だから
$\displaystyle\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\frac{t-\theta}{2}dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\frac{\pi-\theta-t}{2}dt = 2\int_0^{\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi =$
$\displaystyle -\pi\log 2 + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi$ である. $\psi = \pi - \varphi$ とおけば $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}} \log\sin\psi\, d\psi =$
$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\psi\, d\psi$ より, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\log|y - x|}{\sqrt{1 - x^2}}dx = \pi\log 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi - \pi\log 2 + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi =$
$\displaystyle 2\int_0^{\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi + 2\int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\psi\, d\psi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi = -\pi\log 2.$

12. (1) $g : (a, b] \to \boldsymbol{R}$ を $g(x) = f(x) - f(b)$ で定めれば, f が単調減少関数であることから, g は単調減少関数かつ正値関数であり, $f(x) = g(x) + f(b)$ だから $\displaystyle\lim_{x\to a+0}(x - a)g(x) = 0$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a+0}(x - a)f(x) = 0$ である. さらに, f と g は定数値関数の差しか違わないので, 広義積分 $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ も収束する. g が単調減少関数であることから, $a < s < x \leqq b$ ならば, $t \in [s, x]$ に対して $g(x) \leqq g(t)$ だから, 次の不等式が成り立つ.

$$0 \leqq (x - s)g(x) = \int_s^x g(x)dt \leqq \int_s^x g(t)dt = \int_s^b g(t)dt - \int_x^b g(t)dt$$

上の不等式で, x を固定して $s \to a+0$ とすれば $0 \leqq (x - a)g(x) \leqq \displaystyle\int_a^b g(t)dt - \int_x^b g(t)dt$ が得られ, さらに $x \to a+0$ のとき, $\displaystyle\int_a^b g(t)dt - \int_x^b g(t)dt$ は 0 に近づくため, $\displaystyle\lim_{x\to a+0}(x - a)g(x) = 0$ である.

(2) $g : (0, 1] \to \boldsymbol{R}$ を $g(x) = -\dfrac{1}{x(\log x - 1)}$ によって定めれば, $0 < x < 1$ のとき, $g'(x) = \dfrac{\log x}{x^2(\log x - 1)^2} < 0$ だから g は単調減少関数であり, $\displaystyle\lim_{x\to+0} xg(x) = \lim_{x\to+0}\left(-\frac{1}{\log x - 1}\right) = 0$ が成り立つ. 一方, $y = \log x$ とおけば $\dfrac{1}{x}dx = dy$ であり, x が t $(0 < t < 1)$ から 1 まで動けば y は $\log t$ から 0 まで動くため,

$$\int_t^1 g(x)dx = \int_t^1 \left(-\frac{1}{x(\log x - 1)}\right)dx = \int_{\log t}^0 \left(-\frac{1}{y - 1}\right)dy = [-\log|y - 1|]_{\log t}^0 = \log(1 - \log t)$$

が成り立つ. 従って $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx = \lim_{t\to+0}\log(1 - \log t) = \infty$ となって, $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ は発散する.

(3) f は単調減少関数だから, 自然数 n と $k = 2, 3, \ldots, n$ に対し $a + \dfrac{(k-1)(b-a)}{n} \leqq x \leqq a + \dfrac{k(b-a)}{n}$ ならば $f\left(a + \dfrac{k(b-a)}{n}\right) \leqq f(x) \leqq f\left(a + \dfrac{(k-1)(b-a)}{n}\right)$ だから

$$\int_{a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}}^{a+\frac{k(b-a)}{n}} f(x)\,dx \geqq \int_{a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}}^{a+\frac{k(b-a)}{n}} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)dx = f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$
$$\int_{a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}}^{a+\frac{k(b-a)}{n}} f(x)\,dx \leqq \int_{a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}}^{a+\frac{k(b-a)}{n}} f\left(a + \frac{(k-1)(b-a)}{n}\right)dx = f\left(a + \frac{(k-1)(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

が成り立つ. 上の 2 つの不等式に $k = 2, 3, \ldots, n$ を代入して得られる不等式を辺々加えれば

$$\sum_{k=2}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n} \leqq \int_{a+\frac{b-a}{n}}^{b} f(x)\,dx \quad\cdots(i) \qquad \int_{a+\frac{b-a}{n}}^{b} f(x)\,dx \leqq \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n} \quad\cdots(ii)$$

が得られる．(i) の不等式の両辺に $f\left(a+\dfrac{b-a}{n}\right)\dfrac{b-a}{n}$ を加え，(ii) の不等式の両辺に $f(b)\dfrac{b-a}{n}$ を加えれば，

$$\int_{a+\frac{b-a}{n}}^{b} f(x)\,dx+f(b)\frac{b-a}{n} \leqq \sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n} \leqq \int_{a+\frac{b-a}{n}}^{b} f(x)\,dx+f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

が得られる．(1) の結果から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}=0$ だから，$n\to\infty$ のとき，上の不等式の両端は $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ に近づくため，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}$ が成り立つ．

(4) $a_n=\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ とおく．log の連続性と $f(x)=-\log x$ で定義される $f:(0,1]\to\boldsymbol{R}$ に (3) の結果を用いると

$$\begin{aligned}\log\Bigl(\lim_{n\to\infty} a_n\Bigr) &= \lim_{n\to\infty}\log a_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\log\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\log\frac{n!}{n^n}\right)\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-\log\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\\ &=\int_0^1(-\log x)\,dx=\lim_{t\to+0}\int_t^1(-\log x)\,dx=\lim_{t\to+0}[x-x\log x]_t^1=\lim_{t\to+0}(1-t+t\log t)=1\end{aligned}$$

だから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=e$ である．従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{e}$ である．

微積分学 I 演習問題　第 13 回　級数の収束・発散

1. 次の級数の収束・発散を判定せよ．一般項に a, b, c, k などの定数が含まれる場合は, 必要ならば場合分けをすること．ただし, (2) の k は 0 以上の整数, (8) では $a > 0$ とし, (16) の a, b は負の整数ではないとする．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n+k)!)^2}{(2n)!}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n \log n$　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{\pi}{2^n}$　(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$　(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi - 2\tan^{-1} n}{n}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2+1}$　(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{a^n n!}$　(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n (n!)^2}{(2n)!}$　(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{a^{2n}+1}$　(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$　(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^b}{n^a+1}$

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n!}$　(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$　(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$　(16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2+n}$　(17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)} c^n$

2. 次の級数の収束・発散を判定せよ．一般項に a, b などの定数が含まれる場合は, 必要ならば場合分けをすること．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n}\right)^{\frac{n}{2}}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3}$　(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$　(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$　(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 6^n \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}$　(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+b}{an}\right)^n$　(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$　(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} b^n$

3. 次の級数の収束・発散を判定せよ．ただし (7) では $a > 1$ とする．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{2^n}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{n^2+1}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{n}$　(6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{(\log n)^n}$　(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{\log n}}$　(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{(n+1)^{n+1}}$

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)^{n\sqrt{n}}$　(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sin\frac{a}{n}$　(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\log n)^{\log n}}$　(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{a}{n}$

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$　(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sin\frac{n\pi}{12}$　(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n(n+1)}$　(16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n}{3n+1}$

4. 次の級数の収束半径を求めよ．ただし, (1), (13), (15) の k は自然数とし, (2) の a は $a < 0$ または $a > 1$ であり, (24) の a は負の整数ではないとする．

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{an}{n} x^n$　(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^{n^2} x^n$　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n x^n$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} x^n$　(6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+a)^n}{n!} x^n$　(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{n}\right)^{n^2} x^{2n}$　(8) $\displaystyle\sum_{n \geqq 0, n \neq -a} \frac{n!}{(n+a)^n} x^{2n+1}$

(9) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{(n+1)!} x^n$　(10) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(n+1)^n} x^n$　(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+2}\right)^n x^n$　(12) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\left(\tan^{-1} n\right)^n}$

(13) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kn)!}{(n!)^k} x^{kn}$　(14) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!} x^n$　(15) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kn)!}{n^{kn}} x^n$　(16) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$

(17) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\log n}$　(18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} x^n$　(19) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2-n+1}}$　(20) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) x^n$

(21) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^{\sqrt{n}}}$　(22) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\right) x^n$　(23) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2}\right) x^n$　(24) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! x^n}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$

5. 次の級数の収束半径を求め, さらに x の絶対値が収束半径に一致する場合の級数の収束性を判定せよ．ただし, (4) と (8) では a の値によって場合分けをすること．

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\tan\frac{n+1}{3^n}\right) x^{2n}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2^n+1)} x^{2n+1}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^n x^n$　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^a x^n$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n} - \sqrt{n-1}}{n} x^n$　(6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2n+1} x^{2n+1}$　(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2+1} x^n$　(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^a+1}$

(9) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^3-n+1}}$　(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}\right) x^n$　(11) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}\right) x^n$

6. 次の整級数によって表される関数を求めよ．

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty}n^3x^n$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}x^n$ (5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)^2}{(n-1)!}x^n$ (7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

7. 0 以上の整数 k に対して整級数 $\sigma_k(x)$ を $\sigma_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^n$ で定義する.

(1) $\sigma_k(x)$ の収束半径を求めよ.

(2) $\sigma_k(x)$ が収束する x に対し, $\sigma_k(x)$ を x の有理関数で表せ.

8. 交代級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan^{-1}\frac{1}{n}$ が収束するかどうかを判定し, 収束する場合は絶対収束するかどうかを判定せよ.

9. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束する単調減少数列ならば $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ は収束することを示せ.

10. (発展問題) 次の級数の収束・発散を判定せよ. ただし, α, β は正の実数, k, l は自然数とする.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\log n}{\sqrt{n+1}}\right)^n$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{\pi}{n}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n}{2^n}$ (5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^k}{n^k+1}\right)^{n^{k+l+1}}$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-[\sqrt{n}]-\frac{1}{2}}{([\sqrt{n}]+1)^3}$ (7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{n^\alpha}$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}$ (9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ (10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{n^\beta}}$

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)$ (12) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{\alpha}-1)$ (13) $\sum_{n=2}^{\infty}n^p\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (14) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\log n}{n+1}\right)^2$

(15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n+1)-\log n}{n+1}$ (16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ (17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha-\cos n\alpha}{n^{\frac{3}{2}}}$ (18) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)$

(19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\log n}$ (20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{n^2-n+1}$ (21) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n}\right)$ (22) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

11. (発展問題) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は絶対収束すると仮定する.

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の各項が -1 より大きいとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n)$ も絶対収束することを示せ.

(2) すべての自然数 n に対して $a_n\neq -1$ のとき, 数列 $\left\{\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\right\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 でない値に収束することを示せ.

12. (発展問題) $a_1>0$, $a_n\geqq 0$ $(n\geqq 2)$ とし, $s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく. このとき, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するためには $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n}$ が収束することが必要十分であることを示せ.

13. (発展問題) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するとき, 等式 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k=0$ と $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)a_k=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が成り立つことを示せ.

14. (発展問題) $a_n>0$, $b_n>0$ とし, $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$ とおく. $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が単調増加であれば, $\left\{\frac{S_n}{T_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ も単調増加であることを示せ.

15. (発展問題) $n=1,2,3,\ldots$ に対し, S_{2n}, T_{3n}, U_{3n} を以下のように定める.

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$
$$T_{3n}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}$$
$$U_{3n}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}$$

(1) $S_{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}$ を示せ.

(2) $T_{3n}=S_{4n}+\frac{1}{2}S_{2n}$ を示せ.

(3) $U_{3n}=\frac{1}{2}S_{2n}$ を示せ.

16. (発展問題) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ のとき, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k} = ab$ であることを示せ.

17. (発展問題) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列で, 各項が 0 以上であるとする. このとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するためには, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ が収束することが必要十分であることを示せ.

18. (発展問題) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が 1 であるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $|x| < 1$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n a_{n+1} x^n$ は収束することを示せ. また, 任意の $1 \leqq r \leqq \infty$ に対し, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が 1 で, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n a_{n+1} x^n$ の収束半径が r になるような数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の例を挙げよ.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n^2}$ の収束半径を求めよ.

(3) $|x| < 1$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) x^n$ は収束することを示せ. また, 任意の $1 \leqq r \leqq \infty$ に対し, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が 1 で, $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) x^n$ の収束半径が r になるような数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の例を挙げよ.

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) x^n$ の収束半径を求めよ.

第 13 回の演習問題の解答

1. (1) $a_n=\dfrac{n!}{n^n}$ とおくと $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$ だからダランベールの判定法から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ は収束する.

(2) $a_n=\dfrac{((n+k)!)^2}{(2n)!}$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+k+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{1}{4}<1$ だからダランベールの判定法によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n+k)!)^2}{(2n)!}$ は収束する.

(3) $a_n=|a^n\log n|$ とおく. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n+\log\frac{n+1}{n}}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right)=1$ より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a|\log(n+1)}{\log n}=|a|$ だからダランベールの判定法によって $|a|<1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^n\log n$ は絶対収束する. $|a|\geqq 1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a^n\log n|=\infty$ だから $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^n\log n$ は収束しない.

(4) $a_n=n\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}\right)^{-1}=\frac{1}{2}<1$ だからダランベールの判定法によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{\pi}{2^n}$ は収束する.

(5) $a_n=\dfrac{n^k}{n!}$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{k-1}}{n^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1}=0<1$ だからダランベールの判定法によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n!}$ は収束する.

(6) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ ならば $\tan x>x$ だから $x>0$ に対して $0<\tan^{-1}x<x$ が成り立つ. また, $n>0$ に対して $\tan^{-1}n+\tan^{-1}\dfrac{1}{n}=\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つため, $0<\dfrac{\pi-2\tan^{-1}n}{n}=\dfrac{2\tan^{-1}\frac{1}{n}}{n}<\dfrac{2}{n^2}$ である. 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ は収束するため, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi-2\tan^{-1}n}{n}$ も収束する.

(7) $a_n=\left|\dfrac{a^n}{n^2+1}\right|$ とおくと. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}(n^2+1)}{a^n((n+1)^2+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|a|\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}}=|a|$ だから, ダランベールの判定法により $|a|<1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^2+1}$ は絶対収束する. $a=\pm1$ ならば $a_n=\dfrac{1}{n^2+1}<\dfrac{1}{n^2}$ で, 教科書の 119 ページの結果により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束するため, 教科書の定理 4.6 の (1) によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^2+1}$ は絶対収束する. $|a|>1$ ならば, 教科書の問 1.4 の (2) により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{|a|^n}=\lim_{n\to\infty}(n^2|a|^{-n}+|a|^{-n})=0$ だから, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^2+1}$ は 0 に収束しない. 従って教科書の定理 1.5 の (2) によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^2+1}$ は収束しない.

(8) $a_n=\dfrac{(2n+1)!!}{a^n n!}$ とおけば, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a^n n!(2n+3)!!}{a^{n+1}(n+1)!(2n+1)!!}=\dfrac{2n+3}{a(n+1)}$ より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{a}$ だから, ダランベールの判定法により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{a^n n!}$ は, $a>2$ ならば収束し, $0<a<2$ ならば発散する. $a=2$ の場合, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2}=\frac{1}{2}>-1$ だから, ラーベの判定法によって, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{2^n n!}$ は発散する.

(9) $a_n=\left|\dfrac{a^n(n!)^2}{(2n)!}\right|$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a|^{n+1}(2n)!((n+1)!)^2}{|a|^n(2n+2)!(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a|(n+1)}{2(2n+1)}=\frac{|a|}{4}$. ダランベールの判定法により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n(n!)^2}{(2n)!}$ は $|a|<4$ ならば絶対収束し, $|a|>4$ ならば収束しない. $|a|=4$ のとき, $|a_n|=\dfrac{(2^n n!)^2}{(2n)!}=\dfrac{((2n)!!)^2}{(2n)!}=\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}>1$ だから $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束しないため, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n(n!)^2}{(2n)!}$ は発散する.

(10) $a_n = \left|\dfrac{a^n}{a^{2n}+1}\right|$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a|(a^{2n}+1)}{a^2a^{2n}+1} = \begin{cases} |a| & |a|<1 \\ 1 & a=\pm1 \\ \frac{1}{|a|} & |a|>1 \end{cases}$ だからダランベールの判定法によって $a \neq \pm1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{a^{2n}+1}$ は絶対収束する. $a=1$ ならば $\dfrac{a^n}{a^{2n}+1} = \dfrac{1}{2}$, $a=-1$ ならば $\dfrac{a^n}{a^{2n}+1} = \dfrac{(-1)^n}{2}$ となり, $\left\{\dfrac{a^n}{a^{2n}+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束しないため, $a=\pm1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{a^{2n}+1}$ は発散する.

(11) $a_n = \left|\dfrac{n^k}{a^n}\right|$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k|a|^n}{n^k|a|^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|a|}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{|a|}$ である.

$|a|>1$ の場合, ダランベールの判定法により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{a^n}$ は絶対収束する.

$0<|a|<1$ の場合, 教科書の問 1.4 の (2) により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^k} = 0$ となるため, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}$ は 0 に収束しない. 従って, 教科書の定理 1.5 の (2) により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{a^n}$ は収束しない.

$a=\pm1$ の場合, $k<-1$ ならば教科書の 119 ページの結果により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{a^n}$ は絶対収束する. $k \geqq 0$ ならば $\{n^k\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束しないため, 教科書の定理 1.5 の (2) により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{a^n}$ は収束しない.

$a=-1$ の場合, $k<0$ ならば $\{n^k\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する単調減少数列だから, ライプニッツの定理によって, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{a^n}$ は収束する.

$a=1$ の場合, $-1 \leqq k < 0$ ならば教科書の 119 ページの結果により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{a^n}$ は収束しない.

(12) $a \leqq b+1$ の場合, $\dfrac{n^b}{n^a+1} \geqq \dfrac{n^b}{n^a+n^a} = \dfrac{1}{2n^{a-b}}$ であり, 教科書の 119 ページの結果によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a-b}}$ は発散するため, 教科書の定理 4.6 から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^b}{n^a+1}$ は発散する. $a>b+1$ の場合, $\dfrac{n^b}{n^a+1} \leqq \dfrac{n^b}{n^a} = \dfrac{1}{n^{a-b}}$ であり, 教科書の 119 ページの結果によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a-b}}$ は収束するため, 教科書の定理 4.6 から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^b}{n^a+1}$ は収束する.

(13) $a_n = \dfrac{\log n}{n!}$ とおくと, 第 13 回の問題 1 の (3) の解答から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}\frac{1}{n+1} = 0 < 1$ だからダランベールの判定法によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n!}$ は収束する.

(14) $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ とおけば, $n\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-1\right) = n\left(\dfrac{(2n+1)!!(2n)!!}{(2n+2)!!(2n-1)!!}-1\right) = n\left(\dfrac{2n+1}{2n+2}-1\right) = \dfrac{-n}{2n+2}$ より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2n+2} = -\frac{1}{2} > -1$ だから, ラーベの判定法によって, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ は発散する.

(15) $\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1} < \dfrac{\sqrt{n}}{n^2} = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ であり, 教科書の 119 ページの結果によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ は収束するため, 教科書の定理 4.6 から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ は収束する.

(16) $a_n = \left|\dfrac{a^n}{n^2+n}\right|$ とおくと. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}(n^2+n)}{a^n((n+1)^2+n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|a|\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = |a|$ だから, ダランベールの判定法により $|a|<1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^2+1}$ は絶対収束する. $a=\pm1$ ならば $a_n = \dfrac{1}{n^2+n} < \dfrac{1}{n^2}$ で, 教科書の 119 ページの結果により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束するため, 教科書の定理 4.6 の (1) によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^2+n}$ は絶対収束する. $|a|>1$ ならば, 教科書の問 1.4 の (2) により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{|a|^n} = \lim_{n\to\infty}(n^2|a|^{-n}+n|a|^{-n}) = 0$ だから, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^2+n}$ は 0 に収束しない. 従って教科書の定理 1.5 の (2) によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^2+n}$ は収束しない.

(17) $a_n = \left|\dfrac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}c^n\right|$ とおくと $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}|c|\left|\frac{a+n+1}{b+n+1}\right| = |c|$ だから, ダランベールの

判定法によって $|c| < 1$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}c^n$ は絶対収束する．$|c| > 1$ のとき, $1 < r < |c|$ を満たす r を選べば, 自然数 N で条件「$n \geqq N$ ならば $\frac{a_{n+1}}{a_n} = |c|\left|\frac{a+n+1}{b+n+1}\right| > r$」を満たすものがある．従って $n > N$ ならば $a_n > ra_{n-1} > r^2a_{n-2} > \cdots > r^{n-N}a_N$ であり, $r > 1$ だから $\lim_{n\to\infty} r^{n-N}a_N = \infty$ である．故に $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ となり, $\lim_{n\to\infty} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}c^n$ は 0 でないため, 教科書の定理 1.5 の (2) によって $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}c^n$ は収束しない．

$|c| = 1$ のとき, $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a+n+1}{b+n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(a-b)n}{b+n+1} = a-b$ だから, ラーベの判定法により $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}c^n$ は $a-b < -1$ ならば 絶対収束し, $a-b > -1$ ならば絶対収束しない．

$n_0 > \max\{-a, -b\}$ を満たす自然数 n_0 をとり, n_0 以上の自然数 n に対して $b_n = \frac{(a+n_0)(a+n_0+1)\cdots(a+n)}{(b+n_0)(b+n_0+1)\cdots(b+n)}$ とおけば, $b_n > 0$ であり, 次の等式が成り立つ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}c^n = \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}c^n + \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n_0-1)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n_0-1)}\sum_{n=n_0}^{\infty} c^nb_n$$

$a-b > -1$ かつ $c = 1$ の場合, $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{b_{n+1}}{b_n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a+n+1}{b+n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(a-b)n}{b+n+1} = a-b > -1$ だから, ラーベの判定法により $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ は発散するため, 上式から $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}c^n$ も発散する．

$a \geqq b$ かつ $c = -1$ の場合, $n \geqq n_0$ ならば $b_{n+1} = \frac{a+n+1}{b+n+1}b_n \geqq b_n$ だから $\{b_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ は初項が正である単調増加数列である．従って $\lim_{n\to\infty} |c^nb_n| = \lim_{n\to\infty} b_n$ は 0 でないため, 教科書の定理 1.5 の (2) によって $\sum_{n=n_0}^{\infty} c^nb_n$ は発散する．故に $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}c^n$ も発散する．

$b > a > b-1$ かつ $c = -1$ の場合, $n \geqq n_0$ ならば $b_{n+1} = \frac{a+n+1}{b+n+1}b_n < b_n$ だから $\{b_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ は各項が正である単調減少数列である．$c_k = \frac{b-a}{b+n_0+k-1}$ とおけば $c_k > 0$ であり $1 - c_k = \frac{a+n_0+k-1}{b+n_0+k-1} > 0$ だから $0 < c_k < 1$ かつ $b_n = \prod_{k=1}^{n-n_0}(1-c_k)$ である．$\lim_{k\to\infty} \frac{c_k}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k(b-a)}{b+n_0+k-1} = b-a \neq 0$ であり, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ は発散するため, 教科書の定理 4.7 により, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ も発散する．従って第 1 回の演習問題 8 の結果から $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n-n_0}(1-c_k) = 0$ である．故にライプニッツの定理によって $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^nb_n$ は条件収束するため, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}c^n$ も条件収束する．

$a-b = -1$ かつ $c = 1$ の場合, $b_n = \frac{a+n_0}{a+n+1}$ であり, $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a+n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a+n+1} = 1 \neq 0$ である．$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散するため, 教科書の定理 4.6 から $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{a+n+1}$ は発散する．故に $\sum_{n=n_0}^{\infty} c^nb_n = (a+n_0)\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{a+n+1}$ も発散するため $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}c^n$ も発散する．

$a-b = -1$ かつ $c = -1$ の場合, $b_n = \frac{a+n_0}{a+n+1}$ だから $\{b_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ は単調に減少して 0 に収束するため, ライプニッツの定理によって $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^nb_n$ は条件収束する．故に $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}c^n$ も条件収束する．

以上の結果をまとめると, 与えられた級数は $|c| < 1$ または「$|c| = 1$ かつ $a-b < -1$」ならば絶対収束し, $c = -1$ かつ $-1 \leqq a-b < 0$ ならば条件収束する．$|c| > 1$ または「$c = 1$ かつ $a-b \geqq 1$」または「$c = -1$ かつ $a \geqq b$」ならば, 与えられた級数は発散する．

2. (1) $a_n = \left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n$ とおくと, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+4} = \frac{2}{3} < 1$ だから, コーシーの判定法によって $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n$ は収束する．

(2) $a_n = \left(\dfrac{n+3}{2n}\right)^{\frac{n}{2}}$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ だから, コーシーの判定法によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n}\right)^{\frac{n}{2}}$ は収束する.

(3) $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$ だから, コーシーの判定法によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ は収束する.

(4) $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e\cdot 1} = \frac{1}{e} < 1$ だから, コーシーの判定法によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ は収束する.

(5) $a_n = \left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3}$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} = \frac{1}{e} < 1$ だから, コーシーの判定法によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3}$ は収束する.

(6) $a_n = 2^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$ だから, コーシーの判定法によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ は収束する.

(7) 二項定理により, すべての自然数 n に対して $\displaystyle 2^n = (1+1)^n = 1+n+\sum_{k=2}^{n} {}_nC_k > n$ が成り立つため, $n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} < 2^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ である. (6) によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ は収束するため, 教科書の定理 4.6 の (1) から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ は収束する.

(8) $a_n = 6^n\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{n^2}$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} 6\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}$ ここで, $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$ で与えられる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考えると, これらは収束するため, $b_{2n} = a_n^2$ であることに注意すれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_n^2 = e^2$ である. また, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調に増加して e に収束するため, $e^2 > a_5^2 = \left(\dfrac{6}{5}\right)^{10} = 6.1917364224 > 6$ より, 上の式から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{6}{e^2} < 1$ だから, コーシーの判定法によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 6^n\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$ は収束する.

(9) $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}$ とおくと, 前問の解答から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1} = e^2$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^2} = \frac{1}{e^2\cdot 1^2} = \frac{1}{e^2} < 1$. 従って, コーシーの判定法から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}$ は収束する.

(10) $a_n = \left|\left(\dfrac{n+b}{an}\right)^n\right|$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+b}{an}\right| = \frac{1}{|a|}$ だから, $|a| > 1$ ならばコーシーの判定法によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+b}{an}\right)^n$ は絶対収束する. $0 < |a| \leqq 1$ の場合, $b \geqq -k$ を満たす自然数 k をとると, $a_{kn} = \dfrac{1}{|a|^{kn}}\left(1+\dfrac{b}{kn}\right)^{kn} \geqq \left(1+\dfrac{-k}{kn}\right)^{kn} = \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^k\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^k} \geqq \dfrac{1}{2^k e^k} > 0$ だから $\{a_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束しない. 従って $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

も 0 に収束しないため, $\left\{\left(\dfrac{n+b}{an}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ も 0 に収束しない．故に, 教科書の定理 1.5 の (2) により, $0<|a|\leqq 1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+b}{an}\right)^n$ は収束しない.

(11) $a_n=\dfrac{1}{2^n n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ とおくと, 教科書問題 1.9 より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ であることに注意すれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt[n]{a_n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{2}>1$ だから, コーシーの判定法によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ は発散する.

(12) $a_n=|a^{n^2}b^n|$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}|a|^n|b|=\begin{cases}0 & |a|<1\\ |b| & a=\pm 1\end{cases}$ となるため, $|a|<1$ または「$a=\pm1$ かつ $|b|<1$」ならば, コーシーの判定法によって, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^{n^2}b^n$ は絶対収束する.

$b=0$ のときは $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^{n^2}b^n$ は明らかに収束するため, 以後 $b\neq 0$ の場合を考える.

$|a|>1$ の場合, $|a|^K>\dfrac{1}{|b|}$ を満たす自然数 K を選べば, $|a^{n^2}b^n|=(|a|^n|b|)^n>|a|^{n(n-K)}$ となるため, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a^{n^2}b^n|=\infty$ である．また, $|a|=\pm1$ かつ $|b|\geqq 1$ の場合は, $|a^{n^2}b^n|=|b|^n\geqq 1$ である．いずれの場合にしても $\{a^{n^2}b^n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束しないため, 教科書の定理 1.5 の (2) により, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^{n^2}b^n$ は発散する.

3. (1) $\sqrt{n^2+1}-n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$ であり, 右辺の分母からなる数列は単調増加数列だから $\left\{\sqrt{n^2+1}-n\right\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する単調減少数列である．よって, ライプニッツの定理により, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ は収束する．一方 $3n^2>1$ だから $\sqrt{n^2+1}-n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}>\dfrac{1}{\sqrt{4n^2}+n}=\dfrac{1}{3n}$ であり, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散するため, 教科書の定理 4.6 の (2) によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ も発散する．故に $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ は絶対収束しない.

(2) 1 の (3) の結果から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{2^n}$ は絶対収束する.

(3) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する単調減少数列だからライプニッツの定理により, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$ は収束する．一方 $n\geqq 1$ ならば $(n+1)^2-\left(\sqrt{n^2+3}\right)^2=2n-2\geqq 0$ だから $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}\geqq\dfrac{1}{n+1}$ であり, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-1$ は発散するため, 教科書の定理 4.6 の (2) によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ も発散する．故に $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$ は絶対収束しない.

(4) n が自然数 ならば $0<\dfrac{\pi}{2n}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ だから $0\leqq\dfrac{\cos\frac{\pi}{2n}}{n^2+1}<\dfrac{1}{n^2}$ であり, 教科書の 119 ページの結果から, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束するため, 教科書の定理 4.6 の (1) から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{n^2+1}$ も収束する．従って $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{n^2+1}$ は絶対収束する.

(5) $\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n}=\dfrac{2}{n\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}<\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ であり, 教科書の 119 ページの結果より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ は収束するため, 教科書の定理 4.6 の (1) から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n}$ も収束する．従って $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n}$ は絶対収束する.

(6) $n\geqq 3$ ならば $\log n\geqq\log 3$ だから $(\log n)^n\geqq(\log 3)^n$ が成り立つため, $\dfrac{n-1}{(\log n)^n}\leqq\dfrac{n}{(\log 3)^n}$ である．$\log 3>1$ だから, $a_n=\dfrac{n}{(\log 3)^n}$ とおけば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n\log 3}=\frac{1}{\log 3}<1$ となり, ダランベールの判定法によって $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{(\log 3)^n}$ は収束する．故に教科書の定理 4.6 の (1) から, 級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{(\log n)^n}$ は収束する．従って $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{(\log n)^n}$ は絶対収束する.

(7) $a>1$ だから $\left\{\dfrac{1}{a^{\log n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列で, 0 に収束する．故にライプニッツの定理により, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^{\log n}}$ は収束する．$a^{\log n}=\left(e^{\log a}\right)^{\log n}=e^{\log a\log n}=\left(e^{\log n}\right)^{\log a}=n^{\log a}$ だから, 教科書の 119 ページの結果によって, 級

数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a^{\log n}}$ は $1<a\leqq e$ のとき発散し, $a>e$ のとき収束する. 故に級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{a^{\log n}}$ は $1<a\leqq e$ のとき収束はするが絶対収束せず, $a>e$ のとき絶対収束する.

(8) $\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ の分母と分子を n^n で割れば, $\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)}$ が得られる. 数列 $\{n+1\}_{n=1}^{\infty}$ と $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ はともに単調増加数列だから, $\left\{\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列であり, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{e}\cdot 0=0$ となるため, ライプニッツの定理により, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^n}{(n+1)^{n+1}}$ は収束する. 一方, 任意の自然数 n に対して $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e$ だから $\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)}>\dfrac{1}{e(n+1)}$ であり, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{e(n+1)}=\dfrac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{e}$ は発散するため, 教科書の定理 4.6 の (2) によって $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ も発散する. 故に $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^n}{(n+1)^{n+1}}$ は絶対収束しない.

(9) $a_n=\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}\right)^{n\sqrt{n}}$ とおくと, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}\right)^{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}}$. である. ここで $m=[\sqrt{n}]$ とおけば $m\leqq\sqrt{n}<m+1$ だから $1+\dfrac{1}{m+1}<1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leqq 1+\dfrac{1}{m}$ である. この各辺を $\sqrt{n}$ 乗すれば $\left(1+\dfrac{1}{m+1}\right)^{\sqrt{n}}<\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\leqq\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{\sqrt{n}}$ であり, 再度 $m\leqq\sqrt{n}<m+1$ を用いると (左辺) $\geqq\left(1+\dfrac{1}{m+1}\right)^m$, (右辺) $<\left(1+\dfrac{1}{m+1}\right)^{m+1}$ となるため, $\left(1+\dfrac{1}{m+1}\right)^m<\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\leqq\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{m+1}$ が成り立つ. 第 1 回の演習問題 1 の (3) の結果から $\lim_{m\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{m+1}\right)^m=e$ であり, $\lim_{m\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{m+1}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m\left(1+\dfrac{1}{m}\right)=e\cdot 1=e$ だから, $n\to\infty$ のとき $m\to\infty$ となることに注意すれば, はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}=e$ である. 故に $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\dfrac{1}{e}<1$ だから, コーシーの判定法によって $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}\right)^{n\sqrt{n}}$ は収束する. 従って $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}\right)^{n\sqrt{n}}$ は絶対収束する.

(10) x の関数 $x-\sin x$ の増減を調べることにより, 任意の正の実数 x に対して $\sin x<x$ が成り立つことがわかる. よって, $a>0$ ならば任意の自然数 n に対して $0<\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{a}{n}<\dfrac{a}{n^{\frac{3}{2}}}$ が成り立ち, 教科書の 119 ページの結果から, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a}{n^{\frac{3}{2}}}$ は収束するため, 教科書の定理 4.6 の (1) から $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{a}{n}$ も収束する. 従って $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{a}{n}$ は絶対収束する. $\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{a}{n}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{|a|}{n}$ だから, 上で示したことから, $a<0$ の場合も $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{a}{n}$ は絶対収束する.

(11) $n\geqq 16$ ならば $\dfrac{1}{(\log n)^{\log n}}\leqq\dfrac{1}{(\log 16)^{\log n}}$ であり, $16>e^e=15.154262241\cdots$ だから $\log 16>e$ となるため, (7) の結果から級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\log 16)^{\log n}}$ は収束する. よって, 教科書の定理 4.6 の (1) から $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\log n)^{\log n}}$ は収束するため, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(\log n)^{\log n}}$ は絶対収束する.

(12) $a>0$ の場合, $n\geqq\dfrac{2a}{\pi}$ ならば $0<\dfrac{a}{n+1}<\dfrac{a}{n}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ だから $\sin\dfrac{a}{n+1}<\sin\dfrac{a}{n}$ となるため, $\dfrac{2a}{\pi}$ 以上である最小の自然数を N_a とおけば $\left\{\sin\dfrac{a}{n}\right\}_{n=N_a}^{\infty}$ は単調減少数列で, 0 に収束する. 故にライプニッツの定理により, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{a}{n}$ は収束する. $\sin x$ のグラフは $0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で上に凸であるため, 原点と点 $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ を通る直線 $y=\dfrac{2}{\pi}x$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin x$ のグラフより下にある. 従って $0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ ならば $\sin x\geqq\dfrac{2}{\pi}x$ が成り立つため, N_a 以上の自然数 n に対して $\sin\dfrac{a}{n}\geqq\dfrac{2a}{\pi n}$ が成り立つ. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2a}{\pi n}=\dfrac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ は発散するため, 教科書の定理 4.6 の (2) によって $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{a}{n}$ は発散する. よって $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{a}{n}$ は絶対収束しない. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{a}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{-a}{n}$

であることに注意すれば, 上で示したことから, $a<0$ の場合も $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{a}{n}$ は収束はするが, 絶対収束はしない.

(13) $\sum_{n=1}^{k}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\sqrt{k+1}-1$ だから $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ は発散する. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ だから, 数列 $\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は単調に減少して 0 に収束するため, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ はライプニッツの定理によって収束する. 以上から $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ は条件収束する.

(14) $a_n=\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ とおくと, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!((n+1)!)^2}{(n!)^2(2n+2)!}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\dfrac{1}{4}<1$ だから, ダランベールの判定法により, 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ は収束する. $\left|\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\sin\dfrac{n\pi}{12}\right|\leqq\left|\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\right|$ だから定理 4.6 の (1) によって $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\sin\dfrac{n\pi}{12}\right|$ は収束する. 故に $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\sin\dfrac{n\pi}{12}$ は絶対収束する.

(15) 教科書の例題 1.5 より, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ は収束するため, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n(n+1)}$ は絶対収束する.

(16) $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n}{3n+1}$ は存在しないため, 定理 1.5 の (2) によって, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n}{3n+1}$ は収束しない.

4. (1) $a_n=\left|\dfrac{(n!)^k}{(kn)!}\right|$ とおくと, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(kn+k)!(n!)^k}{(kn)!((n+1)!)^k}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{k(kn+k-1)(kn+k-2)\cdots(kn+1)}{(n+1)^{k-1}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{k\left(k+\frac{k-1}{n}\right)\left(k+\frac{k-2}{n}\right)\cdots\left(k+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1}}=k^k$. よって与えられた級数の収束半径は k^k である.

(2) $a_n=\dbinom{an}{n}$ とおくと, 第 9 回の演習問題 13 の (2) の結果から

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\binom{an}{n}}{\binom{an+a}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(an)(an-1)\cdots(an-n+1)}{n!(an+a)(an+a-1)\cdots(an+a-n)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(an-1)\cdots(an-n+1)}{(an+a-1)\cdots(an+a-n)}=\frac{1}{a-1}\lim_{n\to\infty}\frac{(an-1)\cdots(an-n+1)(an-n)}{(an+a-1)\cdots(an+a-n)}\\
&=\frac{1}{a-1}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{an-k}{an+a-k}=\frac{1}{a-1}\left(\frac{a-1}{a}\right)^a
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 故に $\sum_{n=0}^{\infty}\dbinom{an}{n}x^n$ の収束半径は $\left|\dfrac{1}{a-1}\left(\dfrac{a-1}{a}\right)^a\right|=\dfrac{|a-1|^{a-1}}{|a|^a}$ である.

(3) $a_n=\left(\dfrac{1+n}{2+n}\right)^{n^2}$ とおけば $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+n}{1+n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+n}\right)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{1+n}\right)^{-1}=e$ となり, 与えられた級数の収束半径は e である.

(4) $a_n=\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$ とおけば $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)=2$ となり, 与えられた級数の収束半径は 2 である.

(5) $a_n=|a^{n^2}|$ とおくと, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}|a|^n=\begin{cases}0 & |a|<1\\ 1 & a=\pm1\\ +\infty & |a|>1\end{cases}$ である. 従って $|a|<1$ の場合, $\sum_{n=1}^{\infty}a^{n^2}x^n$ の収束半径は無限大であり, $a=\pm1$ の場合, $\sum_{n=1}^{\infty}a^{n^2}x^n$ の収束半径は 1 である. $|a|>1$ の場合, $\sum_{n=1}^{\infty}a^{n^2}x^n$ の収束半径は 0 である.

(6) $a_n=\dfrac{(n+a)^n}{n!}$ とおけば $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n+a)^n(n+1)!}{n!(n+a+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n+a+1}\left(\dfrac{n+a}{n+a+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{a+1}{n}}\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n+a}\right)^a}{\left(1+\frac{1}{n+a}\right)^{n+a}}=\dfrac{1}{e}$ だから, $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+a)^n}{n!}x^n$ の収束半径は $\dfrac{1}{e}$ である.

(7) $a_n=\left(\dfrac{n+4}{n}\right)^{n^2}$ とおけば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+4}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\left(1+\frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}}\right)^4}=\frac{1}{e^4}$ だから, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{n}\right)^{n^2}y^n$ の収束半径は $\dfrac{1}{e^4}$ である．従って $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{n}\right)^{n^2}x^{2n}$ は $|x^2|<\dfrac{1}{e^4}$ で収束し, $|x^2|>\dfrac{1}{e^4}$ 発散するため, この級数の収束半径は $\dfrac{1}{e^2}$ である．

(8) $a_n=\dfrac{n!}{(n+a)^n}$ とおけば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+a+1)^{n+1}}{(n+a)^n(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+a+1)^{n+a}(n+a)^a}{(n+a)^{n+a}(n+1)(n+a+1)^{a-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+a}\right)^{n+a}\frac{\left(1+\frac{a}{n}\right)^a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{a+1}{n}\right)^{a-1}}=e$ だから, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+a)^n}y^n$ の収束半径は e である．従って $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+a)^n}x^{2n}$ は $|x^2|<e$ で収束し, $|x^2|>e$ で発散するため $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+a)^n}x^{2n+1}$ の収束半径は $\sqrt{e}$ である．

(9) $a_n=\dfrac{2^{n^2}}{(n+1)!}$ とおけば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n^2}(n+2)!}{2^{(n+1)^2}(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2^{2n+1}}=0$ だから, 与えられた級数の収束半径は 0 である．

(10) $a_n=\dfrac{(2n+1)!!}{(n+1)^n}$ とおけば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!(n+2)^{n+1}}{(2n+3)!!(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+3}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{e}{2}$ だから, 与えられた級数の収束半径は $\dfrac{e}{2}$ である．

(11) $a_n=\left(\dfrac{n}{n^2+2}\right)^n$ とおけば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n}=\infty$ だから, 与えられた級数の収束半径は ∞ である．

(12) $a_n=\dfrac{1}{\left(\tan^{-1}n\right)^n}$ とおけば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\tan^{-1}n=\frac{\pi}{2}$ だから, 与えられた級数の収束半径は $\dfrac{\pi}{2}$ である．

(13) $a_n=\dfrac{(kn)!}{(n!)^k}$ とおけば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(kn)!((n+1)!)^k}{(kn+k)!(n!)^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{k-1}}{k(kn+k-1)(kn+k-2)\cdots(kn+1)}=\frac{1}{k^k}$ だから, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kn)!}{(n!)^k}y^n$ の収束半径は $\dfrac{1}{k^k}$ である．従って $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kn)!}{(n!)^k}x^{kn}$ は $|x^k|<\dfrac{1}{k^k}$ で収束し, $|x^k|>\dfrac{1}{k^k}$ で発散するため, この級数の収束半径は $\dfrac{1}{k}$ である．

(14) $a_n=\left|\dfrac{n!}{(2n+1)!!}\right|$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)!!n!}{(2n+1)!!(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1}=2$. 故に $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!!}x^n$ の収束半径は 2 である．

(15) $a_n=\left|\dfrac{(kn)!}{n^{kn}}\right|$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(kn)!(n+1)^{kn+k}}{(kn+k)!n^{kn}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k(n+1)^{kn}}{(kn+k)(kn+k-1)\cdots(kn+1)n^{kn}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}{\left(k+\frac{k}{n}\right)\left(k+\frac{k-1}{n}\right)\cdots\left(k+\frac{1}{n}\right)}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^k=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}{\lim_{n\to\infty}\left(k+\frac{k}{n}\right)\left(k+\frac{k-1}{n}\right)\cdots\left(k+\frac{1}{n}\right)}\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^k=\frac{e^k}{k^k}$. 故に $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kn)!}{n^{kn}}x^n$ の収束半径は $\dfrac{e^k}{k^k}$ である．

(16) $a_n=\left|\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right|$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+1}=1$.
故に $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$ の収束半径は 1 である．

(17) $a_n=\left|\dfrac{1}{\log n}\right|$ とおくと, (3) の解答の結果を用いると $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}=1$. 故に $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\log n}$ の収束半径は 1 である．

(18) $a_n=\left|\dfrac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}\right|$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!(2n+3)(2n+2)!!}{(2n+1)(2n)!!(2n+1)!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)(2n+2)}{(2n+1)^2}=1$. 故に $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^n$ の収束半径は 1 である．

(19) $a_n=\left|\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n+1}}\right|$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n+1)^2-(n+1)+1}}{\sqrt{n^2-n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}}=1$. 故に $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n^2-n+1}}$ の収束半径は 1 である．

(20) $a_n=\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right|$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=1$. 故に $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)x^n$ の収束半径は 1 である.

(21) $a_n=\dfrac{1}{4^{\sqrt{n}}}$ とおけば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{\sqrt{n+1}}}{4^{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}4^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}4^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}=1$ となるため, 与えられた級数の収束半径は 1 である.

(22) $a_n=\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a^kb^{n-k}\right|$ とおく. $a\neq b$ ならば $a_n=\left|\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}\right|$ だから $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\left|\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b^{n+2}-a^{n+2}}\right|$ である. 従って $|a|<|b|$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{b-a\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}\right|=\frac{1}{|b|}$, $|a|>|b|$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}-1}{b\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}-a}\right|=\frac{1}{|a|}$ である. また $a=-b$ ならば $a_n=\begin{cases}a^n & n\text{ は偶数}\\ 0 & n\text{ は偶数}\end{cases}$ だから, 与えられた級数は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(ax)^{2n}$ となるため, 収束半径は $\dfrac{1}{|a|}$ である. $a=b\neq 0$ ならば $a_n=(n+1)|a|^n$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)|a|^n}{(n+2)|a|^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+2)|a|}=\frac{1}{|a|}$ である. 以上から, 与えられた級数の収束半径は $|a|<|b|$ ならば $\dfrac{1}{|b|}$, $|a|\geqq|b|$ かつ $a\neq 0$ ならば $\dfrac{1}{|a|}$, $a=b=0$ ならば ∞ である.

(23) $a_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2}$ とおくと $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{n}{k^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\frac{1}{n}\right)=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx=\frac{1}{2}$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{(n+1)a_{n+1}}\frac{n+1}{n}=1$ となるため $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2}\right)x^n$ の収束半径は 1 である.

(24) $a_n=\left|\dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}\right|$ とおくと $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!(a+1)(a+2)\cdots(a+n+1)}{(n+1)!(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a+n+1}{n+1}\right|=1$. 故に $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!x^n}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$ の収束半径は 1 である.

5. (1) $a_n=\tan\dfrac{n+1}{3^n}$ とおくと, $n\to\infty$ のとき, $\dfrac{n+1}{3^n}$, $\dfrac{n+2}{3^{n+1}}$ はともに 0 に収束するため. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{n+1}{3^n}}{\tan\frac{n+2}{3^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)}{n+2}\frac{\cos\frac{n+2}{3^{n+1}}}{\cos\frac{n+1}{3^n}}\frac{\sin\frac{n+1}{3^n}}{\frac{n+1}{3^n}}\left(\frac{\sin\frac{n+2}{3^{n+1}}}{\frac{n+2}{3^{n+1}}}\right)^{-1}=3$ である. 従って $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tan\frac{n+1}{3^n}\right)y^n$ の収束半径は 3 である. 故に $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tan\frac{n+1}{3^n}\right)x^{2n}$ は $|x^2|<3$ で収束し, $|x^2|>3$ 発散でするため, この級数の収束半径は $\sqrt{3}$ である. $b_n=3^n\tan\dfrac{n+1}{3^n}$ によって数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos\frac{n+1}{3^n}}\frac{\sin\frac{n+1}{3^n}}{\frac{n+1}{3^n}}=1$ となるため, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ である. 故に, 教科書の定理 1.5 の (2) によって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}3^n\tan\frac{n+1}{3^n}$ は発散するため, $x=\pm\sqrt{3}$ の場合には $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tan\frac{n+1}{3^n}\right)x^{2n}$ は発散する.

(2) $a_n=\dfrac{1}{n(2^n+1)}$ とおけば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2^{n+1}+1)}{n(2^n+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{2+2^{-n}}{1+2^{-n}}=2$ だから $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2^n+1)}y^n$ の収束半径は 2 である. 従って $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2^n+1)}x^{2n}$ は $|x^2|<2$ で収束し, $|x^2|>2$ で発散するため, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2^n+1)}x^{2n+1}$ の収束半径は $\sqrt{2}$ である. また, 任意の n に対して $2^n\sqrt{2}>2^n+1$ だから $\dfrac{2^n\sqrt{2}}{n(2^n+1)}>\dfrac{1}{n}$ が成り立つ. ここで $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散するため, 教科書の定理 4.6 の (2) によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sqrt{2}}{n(2^n+1)}$ も発散する. 故に $x=\pm\sqrt{2}$ の場合, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2^n+1)}x^{2n+1}$ は発散する.

(3) $a_n=\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^n$ とおけば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)=1$ だから, 与えられた級数の収束半径は 1 である. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2}=\frac{1}{e^2}\neq 0$ だから, 教科書の定理 1.5 の (2) により, $x=\pm 1$ の

場合は $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^n x^n$ は発散する.

(4) $a_n = |n^a|$ とおくと, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{n^a}{(n+1)^a} = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^a = \left(\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^a = 1$ だから, 与えられた級数の収束半径は 1 である. $\sum_{n=0}^{\infty} n^a x^n$ の収束半径は 1 である. $x=1$ のとき, 教科書の 119 ページの結果から $\sum_{n=0}^{\infty} n^a x^n$ は $a<-1$ ならば収束し, $a \geqq -1$ ならば発散する. $x=-1$ のとき, ライプニッツの定理から $\sum_{n=0}^{\infty} n^a x^n$ は $a<0$ ならば収束し, $a \geqq 0$ ならば発散する.

(5) $a_n = \dfrac{\sqrt{2n}-\sqrt{n-1}}{n}$ とおくと, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\left(\sqrt{2n}-\sqrt{n-1}\right)}{n\left(\sqrt{2n+2}-\sqrt{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{2+\frac{2}{n}}-1}$ $=1$ だから, 与えられた級数の収束半径は 1 である. $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ によって数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めれば $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\left(\sqrt{2n}-\sqrt{n-1}\right)}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right) = \sqrt{2}-1 \neq 0$ であり, 教科書の 119 ページの結果によって $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は発散するため, 教科書の定理 4.7 から $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も発散する. 故に $x=1$ の場合は, 与えられた級数は発散する. $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{n-1}}$ だから, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束し, 数列 $\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ と $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ はともに正の値をとる単調減少数列だから, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ も単調減少数列である. 従ってライプニッツの定理から, $x=-1$ の場合は, 与えられた級数は収束する.

(6) $a_n = \dfrac{2^n}{2n+1}$ とおくと, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{2^n(2n+3)}{2^{n+1}(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{2(2n+1)} = \dfrac{1}{2}$ だから, $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{2n+1}y^n$ の収束半径は $\dfrac{1}{2}$ である. 従って $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{2n+1}x^{2n}$ は $|x^2|<\dfrac{1}{2}$ で収束し, $|x^2|>\dfrac{1}{2}$ で発散するため, $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{2n+1}x^{2n+1}$ の収束半径は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である. 任意の自然数 n に対して $\dfrac{2^n}{2n+1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}(2n+1)} > \dfrac{1}{4n}$ が成り立ち, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n} = \dfrac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ は発散するため, 教科書の定理 4.6 の (2) によって $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{2n+1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}$ は発散する. 故に, 与えられた級数は $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の場合は発散する.

(7) $a_n = \dfrac{\log n}{n^2+1}$ とおく. 問題 1 の (3) の解答から $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\log(n+1)}{\log n} = 1$ だから $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{((n+1)^2+1)\log n}{(n^2+1)\log(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\frac{\log(n+1)}{\log n}} = 1$ となるため, 与えられた級数の収束半径は 1 である. $b_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ によって数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めれば, 教科書の問 1.18 から $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{\log n}{\sqrt{n}}\dfrac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 0$ となるため, 自然数 N で条件「$n \geqq N$ ならば $\dfrac{a_n}{b_n} \leqq 1$」を満たすものが存在する. 従って $n \geqq N$ ならば $a_n \leqq b_n$ であり, 教科書の 119 ページの結果によって $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束するため, 教科書の定理 4.6 の (1) によって $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する. 故に, 与えられた級数は $x=\pm 1$ の場合は絶対収束する.

(8) $a_n = \dfrac{1}{n^a+1}$ とおくと, $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{(n+1)^a+1}{n^a+1} = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a+\frac{1}{n^a}}{1+\frac{1}{n^a}}$ だから a が負でも, 0 以上でも $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1$ となるため, 与えられた級数の収束半径は 1 である. $a>1$ の場合, $a_n < \dfrac{1}{n^a}$ であり, 教科書の 119 ページの結果によって $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^a}$ は収束するため, 教科書の定理 4.6 の (1) から $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する. 故に, $a>1$ の場合, 与えられた級数は $x=\pm 1$ のときに絶対収束する. $0<a\leqq 1$ の場合, $b_n = \dfrac{1}{n^a}$ によって数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めれば, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{n^a}{n^a+1} = 1 \neq 0$ であり, 教科書の 119 ページの結果によって $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は発散するため, 教科書の定理 4.7 から $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も発散する. また, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調に減少して 0 に収束するため, ライプニッツの定理から $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ は収束する. 従って, $0<a\leqq 1$ の場合には, 与えられた級数は $x=1$ ならば発散し, $x=-1$ ならば収束する. $a\leqq 0$

の場合は, $x = \pm 1$ ならば数列 $\left\{\dfrac{x^n}{n^a+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束しないため, 教科書の定理 1.5 の (2) によって, 与えられた級数は発散する.

(9) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^3-n+1}}$ とおけば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n+1)^3-n}}{\sqrt{n^3-n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3-\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}} = 1$ だから, 与えられた級数の収束半径は 1 である. $b_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ によって数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n^3-n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}} = 1 \neq 0$ であり, 教科書の 119 ページの結果によって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は収束するため, 教科書の定理 4.7 から $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束する. 故に $x = \pm 1$ のとき, 与えられた級数は絶対収束する.

(10) $a_n = \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n}$ とおけば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cos\frac{1}{n}}{n\cos\frac{1}{n+1}} = 1$ だから, 与えられた級数の収束半径は 1 である. 任意の自然数 n に対して $\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}n}$ であり, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散するため, 教科書の定理 4.6 の (2) によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}\right)x^n$ は $x = 1$ の場合は発散する. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n} = 0$ だから, 数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が単調減少数列であることを示せば, ライプニッツの定理によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}\right)x^n$ は $x = 1$ の場合には収束することがわかる.

関数 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = x\cos x$ によって定める. $f'(x) = \cos x - x\sin x = \cos x(1 - x\tan x)$ より, $g(x) = 1 - x\tan x$ とおけば, $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ における $f'(x)$ の符号は $g(x)$ の符号と一致する. この区間で $\tan x$, x はともに 0 以上の値をとり, 単調に増加するため, $g(x)$ は単調に減少して, $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 - \dfrac{\pi}{4} > 0$ だから, $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ において $g(x)$ は常に正である. 故に f は $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ で単調に増加する. $n \geqq 2$ ならば $\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n+1}$ はともに f が単調増加している区間 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ に属するため, $\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n} = f\left(\dfrac{1}{n}\right) > f\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{n+1}\cos\dfrac{1}{n+1}$ が成り立つ. さらに, $\cos 1 > \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{1}{2}$ より, $\left\{\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列である.

(11) $a_n = \sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}$ とおけば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}}{\sqrt{(n+1)^3+1}-\sqrt{(n+1)^3-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n+1)^3+1}+\sqrt{(n+1)^3-1}}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}} = 1$ だから, 与えられた級数の収束半径は 1 である. $b_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ によって数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}} = 1 \neq 0$ であり, 教科書の 119 ページの結果によって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は収束するため, 教科書の定理 4.7 から $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束する. 故に $x = \pm 1$ のとき, 与えられた級数は絶対収束する.

6. (1) $(1+x)^m$ の級数展開 $(1+x)^m = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n$ において $m = -\dfrac{1}{2}$ として, x を $-4x$ で置き換えれば

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-4x}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(2n-1)!!}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n n!(2n-1)!!}{(n!)^2}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!(2n-1)!!}{(n!)^2}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n\end{aligned}$$

だから $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ (ただし $|x| < \dfrac{1}{4}$) である.

(2) $\dfrac{1}{1-x}$ の級数展開 $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ において, 両辺の導関数を考えれば $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ が得られる. この

両辺に x を掛けた等式 $\dfrac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ の両辺の導関数を考えれば $\dfrac{1+x}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ が得られるため, この等式のこの両辺に x を掛ければ $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\dfrac{x+x^2}{(1-x)^3}$ が得られる.

(3) (2) の結果 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\dfrac{x+x^2}{(1-x)^3}$ の両辺の導関数を考えれば $\sum_{n=1}^{\infty}n^3x^{n-1}=\dfrac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}$ が得られ, この両辺に x を掛ければ $\sum_{n=1}^{\infty}n^3x^n=\dfrac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$ が得られる.

(4) e^x の級数展開 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ において, 両辺の導関数を考えれば $e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n!}x^{n-1}$ が得られる. この両辺に x を掛けた等式 $xe^x=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n!}x^n$ の両辺の導関数を考えれば $(1+x)e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}x^{n-1}$ が得られる. この等式の両辺に x を掛ければ $(x+x^2)e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}x^n$ が得られ, この両辺の導関数を考えれば $(1+3x+x^2)e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{n!}x^{n-1}$ が得られる. さらにこの等式の両辺に x を掛ければ $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{n!}x^n=(x+3x^2+x^3)e^x$ が得られる.

(5) e^x の級数展開 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ において, x を $-x$ で置き換えれば $e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}x^n$ が得られる. 従って $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{2n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ だから $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=\cosh x$ である.

(6) e^x の級数展開 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ の両辺に x を掛けて得られる等式 $xe^x=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n-1)!}$ の両辺の導関数を考えれば $(x+1)e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{(n-1)!}$ が得られる. この両辺に x^2 を掛けて得られる等式 $(x^3+x^2)e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^{n+1}}{(n-1)!}$ の両辺の導関数を考えれば $(x^3+4x^2+2x)e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{(n-1)!}x^n$ が得られる. さらに, この両辺に x を掛けて得られる等式 $(x^4+4x^3+2x^2)e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{(n-1)!}x^{n+1}$ の両辺の導関数を考えれば $(x^4+8x^3+14x^2+4x)e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)^2}{(n-1)!}x^n$ が得られる.

(7) $\log(1+x)$ の級数展開 $\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ において, x を $-x$ で置き換えて, 両辺を -1 倍すれば $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=-\log(1-x)$ が得られる. 故に $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}+x=-x\log(1-x)+\log(1-x)+x=(1-x)\log(1-x)+x$ である.

[別解] $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ とおけば $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=-\log(1-x)$ だから $f(x)=f(0)+\displaystyle\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x(-\log(1-t))dt=\int_0^x((1-t))'\log(1-t)dt=[(1-t)\log(1-t)]_0^x-\int_0^x(-1)dt=(1-x)\log(1-x)+x$

7. (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-k+1}{n+1}=1$ だから, $\sigma_k(x)$ の収束半径は 1 である.

(2) $\sigma_k(x)=\dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ であることを k による帰納法で示す. $\sigma_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$ だから, $k=0$ のとき, 主張は成り立つ. $\sigma_{k-1}(x)=\dfrac{x^{k-1}}{(1-x)^k}$ が成り立つと仮定する. $\sigma_{k-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dbinom{n}{k-1}x^n$ の両辺を微分すれば $\sigma'_{k-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n\dbinom{n}{k-1}x^{n-1}$ だから, 次の等式が得られる.

$$\sigma_{k-1}(x)+x\sigma'_{k-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k-1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}n\binom{n}{k-1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{n}{k-1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}k\binom{n+1}{k}x^n$$

従って $x\sigma_{k-1}(x)+x^2\sigma'_{k-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}k\dbinom{n+1}{k}x^{n+1}=k\sum_{n=0}^{\infty}\dbinom{n}{k}x^n=k\sigma_k(x)$ である. 一方, $\sigma_{k-1}(x)=\dfrac{x^{k-1}}{(1-x)^k}$

の両辺を微分すれば $\sigma'_{k-1}(x) = \dfrac{(k-1)x^{k-1}}{(1-x)^k} + \dfrac{kx^{k-1}}{(1-x)^{k+1}} = \dfrac{(k-1)x^{k-2}+x^{k-1}}{(1-x)^{k+1}}$ だから, 上式より

$$k\sigma_k(x) = x\sigma_{k-1}(x) + x^2\sigma'_{k-1}(x) = \frac{x^k}{(1-x)^k} + \frac{(k-1)x^k + x^{k+1}}{(1-x)^{k+1}} = \frac{kx^k}{(1-x)^{k+1}}$$

が得られるため, $\sigma_k(x) = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ が成り立つ.

8. 数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は単調に減少して 0 に収束するため, 数列 $\left\{\tan^{-1}\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ も単調に減少して 0 に収束する. 従ってライプニッツの定理から交代級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan^{-1}\dfrac{1}{n}$ は収束する. $n\to\infty$ のとき $\dfrac{1}{n}\to 0$ だから問題 1 の (8) の結果から $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan^{-1}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$ が成り立つ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ は発散するため, 教科書の定理 4.7 によって 級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan^{-1}\dfrac{1}{n}$ も発散する. よって交代級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan^{-1}\dfrac{1}{n}$ は絶対収束しない.

9. $s_n = \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ とおく. $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ をすべての項が 1 である数列とすれば, 仮定から $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = 0$ であり, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \infty$ が成り立つため, 第 1 回の演習問題 18 の結果から $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n} = 0$ である. また $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列だから

$$s_n - s_{n+1} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n - na_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{(a_1-a_{n+1})+(a_2-a_{n+1})+\cdots+(a_n-a_{n+1})}{n(n+1)} \geqq 0$$

である. 故に $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する単調減少数列だから, ライプニッツの定理によって $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ は収束する.

10. (1) 任意の自然数 n に対して $2 < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$ だから, $\dfrac{2}{n^\alpha} < \dfrac{1}{n^\alpha}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < \dfrac{e}{n^\alpha}$ が成り立つ. $\alpha \leqq 1$ の場合は教科書の 119 ページの結果から, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^\alpha}$ は発散するため, 教科書の定理 4.6 の (2) によって $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ は発散する. $\alpha > 1$ の場合は教科書の 119 ページの結果から, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e}{n^\alpha}$ は収束するため, 教科書の定理 4.6 の (1) によって $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ は収束する.

(2) x の関数 $x-\log x$ の増減を調べることにより, 任意の正の実数 x に対して $x > \log x$ が成り立つことがわかる. n を自然数として, $x = n^{\frac{1}{3}}$ を代入すれば $\dfrac{1}{3}\log n < n^{\frac{1}{3}}$ が得られるため, $\log n < 3n^{\frac{1}{3}} < 3(n+1)^{\frac{1}{3}}$ である. 従って $0 \leqq \dfrac{\log n}{\sqrt{n+1}} < \dfrac{3}{(n+1)^{\frac{1}{6}}}$ となり, $n\to\infty$ のとき, 右辺は 0 に近づくため, はさみうちの原理から $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log n}{\sqrt{n+1}} = 0$ であることがわかる. $a_n = \left(\dfrac{\log n}{\sqrt{n+1}}\right)^n$ とおくと, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log n}{\sqrt{n+1}} = 0 < 1$ だから, コーシーの判定法によって $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\log n}{\sqrt{n+1}}\right)^n$ は収束する.

(3) 3 の (10) と同様に, $x > 0$ ならば $\sin x < x$ だから $\sin^2\dfrac{\pi}{n} \leqq \dfrac{\pi^2}{n^2}$ であり, 教科書の 119 ページの結果から $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi^2}{n^2}$ は収束するため, 定理 4.6 の (1) により $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^2\dfrac{\pi}{n}$ は収束する.

(4) 3 の (10) と同様に, $x > 0$ ならば $\sin x < x$ だから $0 < \sin\dfrac{n}{2^n} < \dfrac{n}{2^n}$ であり, 教科書の例題 1.4 から $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$ は収束するため, 定理 4.6 の (1) により $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n}{2^n}$ は収束する.

(5) $a_n = \left(\dfrac{n^k}{n^k+1}\right)^{n^{k+l+1}}$ とおくと, 任意の自然数 m に対して $\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m \geqq 2$ だから $\sqrt[n]{a_n} = \left(\dfrac{n^k}{n^k+1}\right)^{n^{k+l}} = \dfrac{1}{\left(\left(1+\frac{1}{n^k}\right)^{n^k}\right)^{n^l}} \leqq \dfrac{1}{2^{n^l}}$ である. 従って $0 < \sqrt[n]{a_n} < \dfrac{1}{2^{n^l}}$ となり, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{n^l}} = 0$ だから, はさみうちの原理から

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=0<1$ となるため, コーシーの判定法によって $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^k}{n^k+1}\right)^{n+l+1}$ は収束する.

(6) $[\sqrt{n}]\leqq\sqrt{n}<[\sqrt{n}]+1$ より $-\frac{1}{2}\leqq\sqrt{n}-[\sqrt{n}]-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$ および $0<\frac{1}{([\sqrt{n}]+1)^3}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ が成り立つ. 従って $\left|\frac{\sqrt{n}-[\sqrt{n}]-\frac{1}{2}}{([\sqrt{n}]+1)^3}\right|\leqq\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ であり, 教科書の 119 ページの結果より $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ は収束するため, 教科書の定理 4.6 の (1) によって $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-[\sqrt{n}]-\frac{1}{2}}{([\sqrt{n}]+1)^3}$ は絶対収束する.

(7) t の関数 $t-\log t$ の増減を調べることにより, 任意の正の実数 t に対して $t>\log t$ が成り立つことがわかる. $x>0$ として $t=\sqrt{x^\alpha}$ を代入すれば $\frac{\alpha}{2}\log x<\sqrt{x^\alpha}$ が得られるため, $0\leqq\frac{\log x}{x^\alpha}<\frac{2}{\alpha\sqrt{x^\alpha}}$ である. $x\to\infty$ のとき, 右辺は 0 に近づくため, はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}=0$ である.

$f(x)=\frac{\log x}{x^\alpha}$ で与えられる関数 $f:(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ の導関数は $f'(x)=\frac{1-\alpha\log x}{x^{\alpha+1}}$ だから, f は $\left(0,e^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ で単調に増加し, $\left(e^{\frac{1}{\alpha}},\infty\right)$ で単調に減少する. 故に, 数列 $\left\{\frac{\log n}{n^\alpha}\right\}_{n=1}^{\infty}$ の第 $\left[e^{\frac{1}{\alpha}}\right]+1$ 項目以降は単調に減少して 0 に収束する. 従ってライプニッツの定理により, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{n^\alpha}$ は収束する.

$0<\alpha\leqq 1$ の場合, n が 3 以上ならば $\frac{\log n}{n^\alpha}>\frac{1}{n^\alpha}$ であり, 級数 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ は発散するため, 教科書の定理 4.6 の (2) により $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{n^\alpha}$ は絶対収束しない.

$\alpha>1$ の場合, 上で得た不等式 $t>\log t$ に $t=n^{\frac{\alpha-1}{2}}$ を代入すれば $\frac{\alpha-1}{2}\log n<2^{\frac{\alpha-1}{2}}$ が得られるため, $0\leqq\frac{\log n}{n^\alpha}<\frac{2}{(\alpha-1)n^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ である. $\frac{\alpha+1}{2}>1$ だから, 教科書の 119 ページの結果から級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ は収束するため, 教科書の定理 4.6 の (1) により $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{n^\alpha}$ は絶対収束する.

(8) $a_n=\frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}$, $b_n=\frac{1}{n}$ とおくと, 教科書の問題 1.9 から $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^{\frac{n+1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\neq 0$ となるため, $a_n\simeq b_n$ である. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散するため, 定理 4.6 の (2) によって, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}$ も発散する.

(9) $a_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$, $b_n=\frac{1}{n}$ とおくと, 第 1 回の問題 26 の (2) から $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e\neq 0$ となるため, $a_n\simeq b_n$ である. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散するため, 教科書の定理 4.6 の (2) によって, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ も発散する.

(10) $\alpha\leqq 1$ ならば, 任意の自然数 n に対して $\frac{1}{\alpha^{n^\beta}}\geqq 1$ であるため, 教科書の定理 1.5 の (2) によって $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{n^\beta}}$ は発散する. $\alpha>1$ とする. 任意の正の実数 x に対して $x>\log x$ が成り立つため, n を自然数として $x=\frac{\beta n^\beta\log\alpha}{2}$ 代入すれば $\frac{\beta n^\beta\log\alpha}{2}>\beta\log n+\log(\log\alpha)+\log\left(\frac{\beta}{2}\right)$ が得られる. この両辺に $\frac{2}{\beta}$ をかければ, 左辺は $\log\alpha^{n^\beta}$ となり, 右辺は $\log\left(n^2(\log\alpha)^{\frac{2}{\beta}}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{2}{\beta}}\right)$ となるため, $\alpha^{n^\beta}>n^2(\log\alpha)^{\frac{2}{\beta}}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{2}{\beta}}$ であることがわかる. 従って $\frac{1}{\alpha^{n^\beta}}<\frac{1}{n^2(\log\alpha)^{\frac{2}{\beta}}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{2}{\beta}}}$ であり, 教科書の 119 ページの結果により $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(\log\alpha)^{\frac{2}{\beta}}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{2}{\beta}}}$ は収束するため, 教科書の定理 4.6 の (1) によって $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{n^\beta}}$ は収束する.

(11) 教科書の定理 1.3 の証明から, すべての自然数 n に対して $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$ であるため, n が 3 以上ならば $n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ が成り立つ. この両辺に n^n をかければ $n^{n+1}>(n+1)^n$ が得られ, 両辺の $n(n+1)$ 乗根を考えれば $\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}$ が得られる. これより, $\left\{1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right\}_{n=3}^{\infty}$ は単調減少数列であり, 教科書の問題 1.9 より, この数列は 0

に収束することがわかる．従ってライプニッツの定理により，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)$ は収束する．

初項 1, 公比 $n^{-\frac{1}{n}}$, 項数 n の等比級数を考えると, $1+n^{-\frac{1}{n}}+n^{-\frac{2}{n}}+\cdots+n^{-\frac{n-1}{n}}=\frac{1-(n^{-\frac{1}{n}})^n}{1-n^{-\frac{1}{n}}}=\frac{1-n^{-1}}{1-n^{-\frac{1}{n}}}$ となるため, $n^{-\frac{k}{n}}<1$ が $k=1,2,\ldots,n-1$ に対して成り立つことに注意すれば $1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\frac{1-n^{-1}}{1+n^{-\frac{1}{n}}+n^{-\frac{2}{n}}+\cdots+n^{-\frac{n-1}{n}}}>\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}$ である．教科書の 119 ページの結果から正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束するため，任意の自然数 k に対して $\sum_{n=1}^{k}\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)>\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ が成り立つことがわかる．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は正の無限大に発散するため, k が大きくなれば $\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ はいくらでも大きくなる．故に上の不等式から $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)$ は正の無限大に発散する．従って, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)$ は絶対収束しない．

(12) 初項 1, 公比 $\alpha^{\frac{1}{n}}$, 項数 n の等比級数を考えると, $1+\alpha^{\frac{1}{n}}+\alpha^{\frac{\alpha}{n}}+\cdots+\alpha^{\frac{n-1}{n}}=\frac{\left(\alpha^{\frac{1}{n}}\right)^n-1}{\alpha^{\frac{1}{n}}-1}=\frac{\alpha-1}{\sqrt[n]{\alpha}-1}$. $\alpha>1$ の場合は $k=0,1,2,\ldots,n-1$ に対して $\alpha^{\frac{k}{n}}<\alpha$ だから, $1+\alpha^{\frac{1}{n}}+\alpha^{\frac{\alpha}{n}}+\cdots+\alpha^{\frac{n-1}{n}}<\alpha n$ が成り立つ．故に $\frac{\alpha-1}{\sqrt[n]{\alpha}-1}\leqq\alpha n$ より $\sqrt[n]{\alpha}-1\geqq\frac{\alpha-1}{\alpha n}$ である．級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha-1}{\alpha n}=\frac{\alpha-1}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散するため, $\alpha>1$ ならば教科書の定理 4.6 の (2) により $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{\alpha}-1)$ は発散する．$0<\alpha<1$ ならば $\frac{1}{\alpha}>1$ だから, 上で示したことから, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}}-1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\alpha}}$ は発散する．そこで, $a_n=1-\sqrt[n]{\alpha}$, $b_n=\frac{1-\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\alpha}}$ によって, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めれば, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha}=1\neq 0$ だから, 教科書の定理 4.7 により正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\sqrt[n]{\alpha})$ は発散する．故に $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{\alpha}-1)=-\sum_{n=1}^{\infty}(1-\sqrt[n]{\alpha})$ も発散する．以上から, α が 1 と異なる正の実数ならば $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{\alpha}-1)$ は発散する．また, $\alpha=1$ の場合は明らかに $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{\alpha}-1)=0$ である．

(13) $a_n=n^p\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $b_n=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}-p}}$ とおくと $\frac{a_n}{b_n}=\frac{n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n(n-1)}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}$ だから $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}=\frac{1}{2}\neq 0$ である．従って $\sum_{n=2}^{\infty}n^p\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ と $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}-p}}$ は同時に収束・発散をするため, $\sum_{n=2}^{\infty}n^p\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ は $p<\frac{1}{2}$ ならば収束し, $p\geqq\frac{1}{2}$ ならば発散する．

(14) 不等式 $\log x<x$ に $x=\sqrt[3]{n}$ を代入すれば $\frac{1}{3}\log n<\sqrt[3]{n}$ が得られるため, $\left(\frac{\log n}{n+1}\right)^2<\left(\frac{3\sqrt[3]{n}}{n+1}\right)^2=\frac{9n^{\frac{2}{3}}}{(n+1)^2}<\frac{9}{n^{\frac{4}{3}}}$ であり, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{n^{\frac{4}{3}}}$ は収束するため, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\log n}{n+1}\right)^2$ も収束する．

(15) $\log(1+x)-x$ の増減を調べることにより, $x>-1$ ならば $\log(1+x)\leqq x$ が成り立つことがわかる．従って, $\frac{\log(n+1)-\log n}{n+1}=\frac{1}{n+1}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqq\frac{1}{n(n+1)}$ であり, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1$ だから, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n+1)-\log n}{n+1}$ は収束する．

(16) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ だから $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\log\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\log e}=1\neq 0$ となるため, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ は発散する．

(17) $\left|\frac{\sin n\alpha-\cos n\alpha}{n^{\frac{3}{2}}}\right|\leqq\frac{|\sin n\alpha|+|\cos n\alpha|}{n^{\frac{3}{2}}}\leqq\frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ であり, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ は収束するため, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha-\cos n\alpha}{n^{\frac{3}{2}}}$ は絶対収束する．

(18) 関数 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=\frac{x^2}{2}+\cos x-1$ で定める．$f'(x)=x-\sin x$ より $x<0$ ならば $f'(x)<0$, $x>0$ ならば $f'(x)>0$ だから f は $(-\infty,0)$ で単調に減少し, $(0,\infty)$ で単調に増加する．従って f は 0 で最小値 0 をとる

ため, すべての実数 x に対して $f(x) \geqq 0$ である. 故に, 不等式 $1-\cos x \leqq \dfrac{x^2}{2}$ が成り立つため, すべての自然数 n に対して $1-\cos\dfrac{\alpha}{n} \leqq \dfrac{\alpha^2}{2n^2}$ が成り立つ. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^2}{2n^2}$ は収束するため, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)$ も収束する.

(19) すべての自然数 n に対して $\log n = \log(1+(n-1)) \leqq n-1$ だから $\dfrac{1}{1+\log n} \geqq \dfrac{1}{n}$ が成り立つ. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ は発散するため, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+\log n}$ も発散する.

(20) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}+2}{n^2-n+1}$, $b_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ とおくと $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n^{\frac{3}{2}}}{n^2-n+1} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{2}{\sqrt{n}}}{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0$ である. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ は収束するため, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}+2}{n^2-n+1}$ も収束する.

(21) $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{ex^2}{2}$ で定めれば $f'(x) = e^x - 1 - ex$, $f''(x) = e^x - e$ である. 従って $x < 1$ ならば $f''(x) < 0$ だから f' は $[0,1]$ で単調に減少し, $f'(0) = 0$ だから $0 < x < 1$ ならば $f'(x) < 0$ である. 故に f は $[0,1]$ で単調に減少し, $f(0) = 0$ だから, $0 < x \leqq 1$ ならば $f(x) < 0$ である. また, 関数 $e^x - 1 - x$ の増減を調べれば, すべての実数 x に対して $e^x - 1 - x \geqq 0$ が成り立つことがわかるため, すべての自然数 n に対して $0 \leqq e^{\frac{1}{n}} - 1 - \dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{e}{2n^2}$ が成り立つ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \dfrac{1}{n}\right)$ は正項級数であり, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{e}{2n^2}$ は収束するため $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \dfrac{1}{n}\right)$ は収束する.

(22) $a_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ とおくと $a_{n-1} - a_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{n(n+1)}\sum_{k=2}^{n-1}\dfrac{1}{k} \geqq 0$ だから $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列である. 2 以上の自然数 n に対し, $n-1 \leqq x \leqq n$ ならば $\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{1}{x}$ だから, 次の不等式が成り立つ.

$$\frac{1}{n} = \int_{n-1}^{n}\frac{1}{n}dx \leqq \int_{n-1}^{n}\frac{1}{x}dx = \log n - \log(n-1)$$

従って $a_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} \leqq \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n}(\log k - \log(k-1)) = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{\log n}{n+1}$ であり, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{\log n}{n+1} = 0$ だから $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である. 故に, ライプニッツの定理によって $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ は収束する. すべての自然数 n に対して $a_n \geqq \dfrac{1}{n+1}$ であり, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ は発散するため, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ は発散する. よって $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ は絶対収束しない.

11. (1) まず $|x| < \dfrac{1}{2}$ ならば $|\log(1+x)| \leqq 2|x|$ であることを示す. x の関数 $x - \log(1+x)$ の増減を調べることにより, $x > -1$ ならば $\log(1+x) \leqq x$ が成り立つことがわかる. 従って $x \geqq 0$ ならば $|\log(1+x)| = \log(1+x) \leqq x \leqq 2|x|$ であり, $-\dfrac{1}{2} < x < 0$ ならば $\dfrac{1}{1+x} < 2$ だから $|\log(1+x)| = \log\dfrac{1}{1+x} = \log\left(1+\dfrac{-x}{1+x}\right) \leqq \dfrac{-x}{1+x} \leqq -2x = 2|x|$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するため, 条件「$n \geqq N$ ならば $|a_n| < \dfrac{1}{2}$」を満たす自然数 N がある. 故に $k \geqq N$ ならば

$$\sum_{n=1}^{k}|\log(1+a_n)| = \sum_{n=1}^{N-1}|\log(1+a_n)| + \sum_{n=N}^{k}|\log(1+a_n)| \leqq \sum_{n=1}^{N-1}|\log(1+a_n)| + \sum_{n=N}^{k}2|a_n| \leqq \sum_{n=1}^{N-1}|\log(1+a_n)| + 2\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

となり, $\sum_{n=1}^{k}|\log(1+a_n)|$ は上に有界であるため, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n)$ は絶対収束する.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するため, 条件「$n \geqq N$ ならば $|a_n| < 1$」を満たす自然数 N がある. 故に $n \geqq N$ ならば

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) = \prod_{k=1}^{N-1}(1+a_k)\prod_{k=N}^{n}(1+a_k) = \prod_{k=1}^{N-1}(1+a_k)e^{\log\left(\prod_{k=N}^{n}(1+a_k)\right)} = \prod_{k=1}^{N-1}(1+a_k)e^{\sum_{k=N}^{n}\log(1+a_k)}$$

が成り立ち, (1) の結果より $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=N}^{n}\log(1+a_k)=\sum_{k=N}^{\infty}\log(1+a_k)$ は収束するため, 指数関数の連続性により

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{N-1}(1+a_k)e^{\sum_{k=N}^{n}\log(1+a_k)}=\prod_{k=1}^{N-1}(1+a_k)e^{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=N}^{n}\log(1+a_k)}=\prod_{k=1}^{N-1}(1+a_k)e^{\sum_{k=N}^{\infty}\log(1+a_k)}$$

となり, 極限 $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$ は存在し, $\prod_{k=1}^{N-1}(1+a_k)\neq 0$ かつ $e^{\sum_{k=N}^{\infty}\log(1+a_k)}\neq 0$ だから, その値は 0 ではない.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束すると仮定して $S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ とおく. $s_n\geqq s_1=a_1>0$ だから $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{s_k}\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_1}=\frac{1}{a_1}\sum_{k=1}^{n}a_k\leqq\frac{S}{a_1}$ が成り立つため, $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{s_k}$ は上に有界な正項級数である. 故に $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n}$ は収束する.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n}$ が収束すると仮定し, $b_k=\frac{a_k}{s_k}$ とおく. $k\geqq 2$ ならば $0\leqq b_k<1$ であり, 仮定から $\sum_{n=2}^{\infty}(-b_n)$ は絶対収束するため, 前問の (2) の結果により, 極限 $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}(1-b_k)$ が存在して 0 ではない. 一方, $s_k-s_{k-1}=a_k=b_ks_k$ だから, $\frac{s_{k-1}}{s_k}=1-b_k$ である. 従って $\frac{s_1}{s_n}=\frac{s_1}{s_2}\frac{s_2}{s_3}\cdots\frac{s_{n-1}}{s_n}=(1-b_2)(1-b_3)\cdots(1-b_n)=\prod_{k=2}^{n}(1-b_k)$ だから

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{s_1}{\prod_{k=2}^{n}(1-b_k)}=\frac{s_1}{\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}(1-b_k)}$$

となり, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する.

13. $S_0=0$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおけば, $a_n=S_n-S_{n-1}$ だから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}ka_k&=\sum_{k=1}^{n}k(S_k-S_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}kS_k-\sum_{k=1}^{n}kS_{k-1}=\sum_{k=1}^{n}kS_k-\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)S_k\\&=\sum_{k=1}^{n}kS_k-\sum_{k=1}^{n}(k+1)S_k+(n+1)S_n=(n+1)S_n-\sum_{k=1}^{n}S_k.\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は存在するため, 第 1 回の演習問題 18 において $a_n=S_n$, $b_n=1$, $c=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ として結果を用いれば $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が得られる. 従って

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left((n+1)S_n-\sum_{k=1}^{n}S_k\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)S_n-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}a_n=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)a_k=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}a_k-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k-0=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

14. $\frac{S_{n+1}}{T_{n+1}}-\frac{S_n}{T_n}=\frac{S_n+a_{n+1}}{T_n+b_{n+1}}-\frac{S_n}{T_n}=\frac{a_{n+1}T_n-b_{n+1}S_n}{T_n(T_n+b_{n+1})}$ だから, $a_{n+1}T_n\geqq b_{n+1}S_n$ が成り立つことを n による数学的帰納法で示せばよい. $n=1$ のとき, $\frac{a_2}{b_2}\geqq\frac{a_1}{b_1}$ より $a_2T_1=a_2b_1=b_2\frac{a_2}{b_2}b_1\geqq b_2\frac{a_1}{b_1}b_1=b_2a_1=b_2S_1$. 故にこの場合は主張は正しい. $a_{n+1}T_n\geqq b_{n+1}S_n$ ならば, $\frac{a_{n+2}}{b_{n+2}}\geqq\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ より $a_{n+2}T_{n+1}=b_{n+2}\frac{a_{n+2}}{b_{n+2}}(T_n+b_{n+1})\geqq b_{n+2}\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}(T_n+b_{n+1})=b_{n+2}\frac{a_{n+1}T_n}{b_{n+1}}+a_{n+1}b_{n+2}\geqq b_{n+2}\frac{b_{n+1}S_n}{b_{n+1}}+a_{n+1}b_{n+2}=b_{n+2}(S_n+a_{n+1})=b_{n+2}S_{n+1}$ となって, $a_{n+2}T_{n+1}\geqq b_{n+2}S_{n+1}$ が得られる.

15. (1) n による数学的帰納法で $S_{2n}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$ を示す. $n=1$ のとき, $S_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ だからこの等式は成立する. $S_{2n}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$ が成り立つと仮定する. S_{2n} の定義から, $S_{2(n+1)}=S_{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{n+1}+\sum_{k=n+2}^{2n}\frac{1}{k}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\sum_{k=n+2}^{2n}\frac{1}{k}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}=\sum_{k=(n+1)+1}^{2(n+1)}\frac{1}{k}$ となるため, $S_{2n}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$ の n を $n+1$ で置き換えた等式も成立する.

(2) S_{2n} の定義と (1) より, $S_{4n}+\frac{1}{2}S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2k}+\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}$. 一方, $T_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}$ だから $T_{3n}=S_{4n}+\frac{1}{2}S_{2n}$.

(3) $U_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-2}+\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)-\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2k}=S_{2n}-\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=S_{2n}-\frac{1}{2}S_{2n}=\frac{1}{2}S_{2n}$. (最後から 2 つめの等号の根拠は (1) で示した等式である.)

16. 仮定から, 任意の $0<\varepsilon<1$ に対して, 自然数 N_1, N_2, N_3 で, それぞれ条件「$n\geqq N_1$ ならば $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2(1+|a|+|b|)}$」, 「$n\geqq N_2$ ならば $|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2(1+|a|+|b|)}$」, 「$n\geqq N_3$ ならば $|a_n-a|<1$」を満たすものがある. ここで, $n\geqq N_3$ ならば $|a_n|=|a_n-a+a|\leqq|a_n-a|+|a|<1+|a|$ であることに注意する. さらに $N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$, $A_N=\max\{|a_1|,|a_2|,\ldots,|a_{N-1}|\}$, $B_N=\max\{|b_1|,|b_2|,\ldots,|b_{N-1}|\}$ とおく. $n\geqq 2N-1$ のとき,

$$|a_kb_{n+1-k}-ab|=|a_kb_{n+1-k}-a_kb+a_kb-ab|\leqq|a_k||b_{n+1-k}-b|+|b||a_k-a|$$

が成り立つことを用いると, $1\leqq k\leqq N-1$ の場合は $n+1-k\geqq N+1$ だから次の不等式が成り立つ.

$$|a_kb_{n+1-k}-ab|\leqq|a_k||b_{n+1-k}-b|+|b|(|a_k|+|a|)\leqq\frac{\varepsilon A_N}{2(1+|a|+|b|)}+|b|(A_N+|a|)$$

$N\leqq k\leqq n-N+1$ の場合は $n+1-k\geqq N$ だから次の不等式が成り立つ.

$$|a_kb_{n+1-k}-ab|\leqq\frac{\varepsilon(1+|a|)}{2(1+|a|+|b|)}+\frac{\varepsilon|b|}{2(1+|a|+|b|)}=\frac{\varepsilon}{2}$$

$n-N+2\leqq k\leqq n$ の場合は $k\geqq N$ だから次の不等式が成り立つ.

$$|a_kb_{n+1-k}-ab|\leqq|a_k|(|b_{n+1-k}|+|b|)+|b||a_k-a|\leqq(1+|a|)(B_N+|b|)+\frac{\varepsilon|b|}{2(1+|a|+|b|)}$$

従って

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}-ab\right|&=\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(a_kb_{n+1-k}-ab)\right|\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_kb_{n+1-k}-ab|\\&\leqq\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{n}\left(\frac{\varepsilon A_N}{2(1+|a|+|b|)}+|b|(A_N+|a|)\right)+\sum_{k=N}^{n-N+1}\frac{\varepsilon}{2n}\\&\quad+\sum_{k=n-N+2}^{n}\frac{1}{n}\left((1+|a|)(B_N+|b|)+\frac{\varepsilon|b|}{2(1+|a|+|b|)}\right)\\&=\frac{N-1}{n}\left(\frac{\varepsilon(A_N+|b|)}{2(1+|a|+|b|)}+(|a|+1)B_N+|b|(A_N+1)+2|ab|\right)+\frac{\varepsilon(n-2N+2)}{2n}\\&<\frac{N-1}{n}\left(\frac{A_N+|b|}{2(1+|a|+|b|)}+(|a|+1)B_N+|b|(A_N+1)+2|ab|\right)+\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

が成り立つ．そこで $M \geqq \dfrac{2(N-1)}{\varepsilon}\left(\dfrac{A_N+|b|}{2(1+|a|+|b|)}+(|a|+1)B_N+|b|(A_N+1)+2|ab|\right)$ かつ $M \geqq N$ を満たす自然数 M を選べば, $n \geqq M$ ならば $\dfrac{N-1}{n}\left(\dfrac{A_N+|b|}{2(1+|a|+|b|)}+(|a|+1)B_N+|b|(A_N+1)+2|ab|\right)<\dfrac{\varepsilon}{2}$ となるため, 上式より $\left|\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}-ab\right|<\varepsilon$ が得られる．故に, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}=ab$ が成り立つ．

17. $S_k=\sum_{n=1}^{k}a_n$, $T_k=\sum_{n=1}^{k}2^na_{2^n}$ とおくと, 仮定から $s=1,2,\dots,2^{l-1}$ に対して $a_{2^l}\leqq a_{2^{l-1}+s}\leqq a_{2^{l-1}}$ だから,

$$S_{2^k}=\sum_{n=1}^{2^k}a_n=a_1+\sum_{l=1}^{k}\sum_{s=1}^{2^{l-1}}a_{2^{l-1}+s}\leqq a_1+\sum_{l=1}^{k}2^{l-1}a_{2^{l-1}}=2a_1+\sum_{n=1}^{k-1}2^na_{2^n}=2a_1+T_{k-1}$$
$$S_{2^k}=\sum_{n=1}^{2^k}a_n=a_1+\sum_{l=1}^{k}\sum_{s=1}^{2^{l-1}}a_{2^{l-1}+s}\geqq a_1+\sum_{l=1}^{k}2^{l-1}a_{2^l}=a_1+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k}2^la_{2^l}=a_1+\frac{1}{2}T_k$$

が成り立つ．$\sum_{n=1}^{\infty}2^na_{2^n}$ が収束すると仮定して $B=\lim_{n\to\infty}T_k=\sum_{n=1}^{\infty}2^na_{2^n}$ とおくと, すべての k に対して $T_k\leqq B$ だから, 上の 1 つ目の不等式から $S_{2^k}\leqq 2a_1+B$ が得られる．任意の自然数 m に対して $2^k\geqq m$ を満たす自然数 k をとれば, $S_m\leqq S_{2^k}\leqq 2a_1+B$ となるため $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加数列である．従って $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する．逆に $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束すると仮定して $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A$ とおけば, すべての自然数 m に対して $S_m\leqq A$ が成り立つため, 上の 2 つ目の不等式から $T_k\leqq 2(S_{2^k}-a_1)\leqq 2(A-a_1)$ が得られる．従って $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加数列だから $\sum_{n=1}^{\infty}2^na_{2^n}$ は収束する．

18. (1) $|x|<1$ の場合, $\sqrt{|x|}<r<1$ を満たす r を選ぶ．$\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n$ は収束するため, $\lim_{n\to\infty}a_nr^n=0$ である．従って, 自然数 N で条件「$n\geqq N$ ならば $|a_nr^n|<1$」を満たすものがある．このとき $n\geqq N$ ならば $|a_n|<\dfrac{1}{r^n}$ かつ $|a_{n+1}|<\dfrac{1}{r^{n+1}}$ だから $|a_na_{n+1}x^n|<\dfrac{|x^n|}{r^{2n+1}}=\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{|x|}{r^2}\right)^n$ が成り立つ．故に $m\geqq N$ ならば

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{m}|a_na_{n+1}x^n|&<\sum_{n=0}^{N-1}|a_na_{n+1}x^n|+\sum_{n=N}^{m}\frac{1}{r}\left(\frac{|x|}{r^2}\right)^n<\sum_{n=0}^{N-1}|a_na_{n+1}x^n|+\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{r}\left(\frac{|x|}{r^2}\right)^n\\&=\sum_{n=0}^{N-1}|a_na_{n+1}x^n|+\frac{|x|^N}{r^{2N-1}(r^2-|x|)}\end{aligned}$$

となり, 数列 $\left\{\sum_{n=0}^{m}|a_na_{n+1}x^n|\right\}_{m=1}^{\infty}$ は上に有界だから, $\sum_{n=0}^{\infty}a_na_{n+1}x^n$ は絶対収束する．

$1\leqq r<\infty$ のとき, $a_n=\begin{cases}\frac{1}{r^n} & n\text{ は偶数}\\ 1 & n\text{ は奇数}\end{cases}$ によって $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を定めれば, $x\neq 1,r$ ならば

$$\sum_{n=0}^{2k-1}a_nx^n=\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{x}{r}\right)^{2i}+\sum_{i=0}^{k-1}x^{2i+1}=\frac{1-\left(\frac{x}{r}\right)^{2k}}{1-\frac{x^2}{r^2}}+\frac{x-x^{k+1}}{1-x},\quad \sum_{n=0}^{2k}a_nx^n=\frac{1-\left(\frac{x}{r}\right)^{2k}}{1-\frac{x^2}{r^2}}+\frac{x-x^{k+1}}{1-x}+\left(\frac{x}{r}\right)^{2k}$$

だから, $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径は 1 である．一方

$$\sum_{n=0}^{2k-1}a_na_{n+1}x^n=\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{x}{r}\right)^{2i}+\sum_{i=0}^{k-1}\frac{x}{r^2}\left(\frac{x}{r}\right)^{2i}=\left(1+\frac{x}{r^2}\right)\frac{1-\left(\frac{x}{r}\right)^{2k}}{1-\frac{x^2}{r^2}},\ \sum_{n=0}^{2k}a_na_{n+1}x^n=\left(1+\frac{x}{r^2}\right)\frac{1-\left(\frac{x}{r}\right)^{2k}}{1-\frac{x^2}{r^2}}+\left(\frac{x}{r}\right)^{2k}$$

だから $\sum_{n=0}^{\infty}a_na_{n+1}x^n$ の収束半径は r である．$a_n=\begin{cases}0 & n\text{ は偶数}\\ 1 & n\text{ は奇数}\end{cases}$ によって $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を定めれば, すべての自然数 n に対して $a_na_{n+1}=0$ だから $\sum_{n=0}^{\infty}a_na_{n+1}x^n$ の収束半径は ∞ である．

(2) $|x|<1$ の場合, $\left|a_nx^{n^2}\right| \leqq |a_nx^n|$ であり, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ は収束するため, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_nx^{n^2}\right|$ も収束する. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{n^2}$ が収束するような $x\in(1,\infty)$ が存在すれば, $1<r<|x|$ を満たす r に対して $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nr^{n^2}|$ は収束し $|a_nr^n|<\left|a_nr^{n^2}\right|$ だから $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nr^n|$ は収束する. このことは $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径が 1 であることと矛盾するため, $|x|>1$ ならば $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{n^2}$ は発散する. 従って $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{n^2}$ の収束半径は 1 である.

(3) $x\neq 0$ ならば

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{m}(a_{n+1}-a_n)x^n &= \sum_{n=0}^{m}a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{m}a_nx^n = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{m}a_nx^n-a_0+a_{m+1}x^{m+1}\right)-\sum_{n=0}^{m}a_nx^n\\ &= \left(\frac{1}{x}-1\right)\sum_{n=0}^{m}a_nx^n-\frac{a_0}{x}+a_{m+1}x^m\end{aligned}$$

であり, $|x|<1$ ならば $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ は収束するため, $|x|<1$ ならば $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)x^n$ は収束する. $1\leqq r<\infty$ のとき, $a_0=0$, $a_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{r^k}$ $(n\geqq 1)$ によって $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を定める. $r=1$ ならば $a_n=n$ だから $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$ であり, $r>1$ ならば $a_n=\dfrac{1-\frac{1}{r^n}}{1-\frac{1}{r}}$ だから $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{r^n}}{1-\frac{1}{r^{n+1}}}=1$ である. 従って, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径は 1 である. 一方 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{r}\right)^n$ だから $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)x^n$ の収束半径は 1 である. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ をすべての項が 1 である数列とすれば, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径は 1 であるが, すべての自然数 n に対して $a_{n+1}-a_n=0$ だから $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)x^n$ の収束半径は ∞ である.

(4) $s_m=\sum\limits_{n=0}^{m}a_nx^n$, $t_m=\sum\limits_{n=0}^{m}(a_0+a_1+\cdots+a_n)x^n$ とおけば

$$\begin{aligned}t_m-xt_{m-1} &= \sum_{n=0}^{m}(a_0+a_1+\cdots+a_n)x^n-\sum_{n=0}^{m-1}(a_0+a_1+\cdots+a_n)x^{n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{m}(a_0+a_1+\cdots+a_n)x^n-\sum_{n=1}^{m}(a_0+a_1+\cdots+a_{n-1})x^n=\sum_{n=0}^{m}a_nx^n=s_m\end{aligned}$$

だから, $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ が収束すれば s_m もする. 故に $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径が 1 であるという仮定から, $|x|>1$ ならば $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_0+a_1+\cdots+a_n)x^n$ は収束しない. $S_m=\sum\limits_{n=0}^{m}|a_n||x|^n$, $T_m=\sum\limits_{n=0}^{m}(|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_n|)|x|^n$ とおけば

$$\begin{aligned}T_m-|x|T_{m-1} &= \sum_{n=0}^{m}(|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_n|)|x|^n-\sum_{n=0}^{m-1}(|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_n|)|x|^{n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{m}(|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_n|)|x|^n-\sum_{n=1}^{m}(|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|)|x|^n=\sum_{n=0}^{m}|a_n||x|^n=S_m\end{aligned}$$

だから, $x\neq 0$ ならば $\dfrac{T_m}{x^m}-\dfrac{T_{m-1}}{|x|^{m-1}}=\dfrac{S_m}{|x|^m}$ が成り立つ. 従って $\dfrac{T_m}{|x|^m}=T_0+\sum\limits_{k=1}^{m}\left(\dfrac{T_k}{|x|^k}-\dfrac{T_{k-1}}{|x|^{k-1}}\right)=|a_0|+\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{S_k}{|x|^k}$ が得られるため, $T_m=|a_0||x|^m+\sum\limits_{k=1}^{m}|x|^{m-k}S_k$ である. 仮定から $|x|<1$ ならば $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n||x|^n$ は収束するため, $S_\infty=\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n||x|^n$ とおく. $S_k\leqq S_\infty$ がすべての自然数 k に対して成り立つため, $|x|<1$ ならば

$$T_m=|a_0||x|^m+\sum_{k=1}^{m}|x|^{m-k}S_k\leqq|a_0|+\sum_{k=1}^{m}|x|^{m-k}S_\infty=|a_0|+\frac{S_\infty(1-|x|^m)}{1-|x|}\leqq|a_0|+\frac{S_\infty}{1-|x|}$$

である．従って $\{T_m\}_{m=0}^{\infty}$ は上に有界であるため，$\sum_{n=0}^{\infty}(|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_n|)|x|^n$ は収束する．$|a_0+a_1+\cdots+a_n| \leqq |a_0|+|a_1|+\cdots+|a_n|$ だから，$|x|<1$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+a_1+\cdots+a_n)x^n$ は絶対収束することがわかる．故に $\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+a_1+\cdots+a_n)x^n$ の収束半径は 1 である．

微積分学 I 演習問題　第 14 回　面積・曲線の長さ・回転体の体積

1. a, b $(a \geqq b)$ を正の実数, m, n を自然数とするとき, 以下の領域の面積を求めよ.

(1) 楕円の内部 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1$ と $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2} \leqq 1$ の共通部分.

(2) 第一象限の $x^{\frac{1}{m}}+y^{\frac{1}{n}} \leqq 1$ を満たす部分.

(3) 極座標で表された曲線 $r=a+b\cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で囲まれた部分.

(4) 極座標で表された曲線 $r=a\sin n\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{n})$ で囲まれた部分.

(5) 媒介変数表示された曲線 $\begin{cases} x=t^3+3t \\ y=2t-t^2 \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2)$ と x 軸で囲まれた部分.

(6) 媒介変数表示された曲線 $\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$ と y 軸で囲まれた部分.

(7) 媒介変数表示された曲線 $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれた部分.

(8) 媒介変数表示された曲線 $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれた部分.

(9) 媒介変数表示された曲線 $\begin{cases} x=2a\cos t+a\cos 2t \\ y=2a\sin t-a\sin 2t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で囲まれた部分.

(10) 媒介変数表示された曲線 $\begin{cases} x=2a\cos t-a\cos 2t \\ y=2a\sin t-a\sin 2t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で囲まれた部分.

2. 次の曲線の長さを求めよ. ただし a, b, p, q は実数の定数で, (3), (6), (7), (10), (20), (21), (22) では $a>0$ とし, (15), (16) の n は自然数とする.

(1) $y=ax^{\frac{3}{2}}$　$(0 \leqq x \leqq b)$

(2) $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\log x$　$(1 \leqq x \leqq 2)$

(3) $y=a\log(x^2-a^2)$　$(2a \leqq x \leqq 3a)$

(4) $y=\log(\cos x)$　$(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4})$

(5) $y=e^x$　$(0 \leqq x \leqq \log 2)$

(6) $y=a^2e^{\frac{x}{2ab}}+b^2e^{-\frac{x}{2ab}}$　$(2abp \leqq x \leqq 2abq)$

(7) $y=\log x$　$(a \leqq x \leqq b)$

(8) $y=\dfrac{3a}{2}x^{\frac{2}{3}}$　$(0 \leqq x \leqq b)$

(9) $y=(1-\sqrt{x})^2$　$(0 \leqq x \leqq 1)$

(10) $y=(a-x)\sqrt{\dfrac{x}{3a}}$　$(0 \leqq x \leqq a)$

(11) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}t^4-t^2 \\ y=\frac{4}{3}t^3 \end{cases}$　$(-1 \leqq t \leqq 2)$

(12) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}t^2-\log t \\ y=\frac{1}{3}t^3-t \end{cases}$　$(1 \leqq t \leqq 2\sqrt{2})$

(13) $\begin{cases} x=t^2+2t \\ y=\frac{2}{3}t^3+t^2 \end{cases}$　$(0 \leqq t \leqq \sqrt{3})$

(14) $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$　$(0 \leqq t \leqq \sqrt{3})$

(15) $\begin{cases} x=(a-b)\cos t+b\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right) \\ y=(a-b)\sin t-b\sin\left(\frac{a-b}{b}t\right) \end{cases}$　$(0 \leqq t \leqq \frac{\pi bn}{a})$

(16) $\begin{cases} x=(a+b)\cos t-b\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right) \\ y=(a+b)\sin t-b\sin\left(\frac{a+b}{b}t\right) \end{cases}$　$(0 \leqq t \leqq \frac{\pi bn}{a})$

(17) $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=bt \end{cases}$　$(p \leqq t \leqq q)$

(18) $\begin{cases} x=a\cosh t \\ y=b\sinh t \\ z=at \end{cases}$　$(p \leqq t \leqq q)$

(19) $r=e^{a\theta}$ $(\theta \leqq b)$

(20) $r=a\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq b)$

(21) $r=a\theta^2$ $(0 \leqq \theta \leqq b)$

(22) $r=\dfrac{a}{\theta}$ $(1 \leqq \theta \leqq b)$

3. a, p, q を正の実数の定数とし, 関数 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=\dfrac{a}{2}\left(pe^{\frac{x}{a}}+qe^{-\frac{x}{a}}\right)$ によって定義する. 正の実数 t に対し, x 軸, y 軸, 直線 $x=t$ と f のグラフによって囲まれた部分の面積を $S(t)$ とし, 点 $(0,f(0))$ から $(t,f(t))$ までの曲線 $y=f(x)$ の長さを $L(t)$ とする.

(1) $S(t)$ を求めよ.

(2) $pq=1$ ならば, すべての正の実数 t に対して $S(t)=aL(t)$ が成り立つことを示せ.

4. xy 平面において, 原点を中心とする半径 r の円 O に, 長さ $2\pi r$ の伸び縮みしない糸を $(r,0)$ を一方の端点として時計回りに巻き付ける. 糸のもう一方の端点を P として, O に巻き付けた糸を P からピンと張ったまま点 $(r,0)$ から反時計回りにほどいてゆくとき, P が点 $(r,-2\pi r)$ に到達するまでに P が描いた軌跡の曲線の長さを求めよ.

5. 次の (1) から (8) の曲線を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積と表面積を求めよ.

(1) $x^2+y^2=r^2$ $(-r\leqq a<b\leqq r,\ a\leqq x\leqq b)$

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0,\ a\neq b)$

(3) $y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$

(4) $y=\tan x$ $(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4})$

(5) $y=e^x$ $(0\leqq x\leqq\log 2)$

(6) $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a>0,\ 0\leqq t\leqq 2\pi)$

(7) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$

(8) $x^2+(y-a)^2=R^2$ $(0<R\leqq a)$

6. 次の回転体の体積を求めよ.

(1) 極座標で表された曲線 $r=a(1+\cos\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ を x 軸を軸として 1 回転して得られる回転体.

(2) 双曲線 $xy=1$ と y 軸と直線 $y=1$ で囲まれた部分を y 軸を軸として 1 回転して得られる回転体.

(3) 曲線 $x=a\log\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right)-\sqrt{a^2-y^2}$ $(a>0)$ と x 軸と y 軸で囲まれた部分を x 軸を軸として 1 回転して得られる回転体.

7. a, b を正の実数とし, xy 平面の x 軸上の点 $(a,0)$ を A, y 軸上の点 $(0,b)$ を B とする. さらに原点を O とし, $0<s<1$ を満たす実数 s と $r>-1$ を満たす実数 r に対し, 線分 OA, OB を $s^r:(1-s^r)$ の比に内分する点をそれぞれ $\mathrm{P}(s)$, $\mathrm{Q}(s)$ で表すことにする.

(1) f, g は閉区間 $[0,1]$ で定義された連続関数で, ともに開区間 $(0,1)$ において微分可能であるとし, xy 平面上で $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ と媒介変数表示される曲線を C とする. 次の条件 $(*)$ が満たされるとき, $f(t)$, $g(t)$ を a, b, t, r の式で表せ.

$(*)$ 任意の $0<s<1$ に対し, $\mathrm{P}(s)$ と $\mathrm{Q}(1-s)$ を通る直線は, 点 $(f(s),g(s))$ において, C に接する.

(2) 曲線 C と x 軸, y 軸で囲まれた部分の面積をベータ関数を用いて表せ.

(3) 曲線 C と x 軸, y 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転させて得られる回転体の体積をベータ関数を用いて表せ.

8. (1) 関数 f が逆関数 f^{-1} をもつとき, f の定義域に属する実数 $a<b$ と自然数 n に対して以下の等式が成り立つことを示せ.

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)^n\,dy=b^nf(b)-a^nf(a)-n\int_a^b x^{n-1}f(x)\,dx$$

(2) $x>0$ において定義された関数 $f(x)=-x\log x$ を考える. $0<t<\dfrac{1}{e}$ に対し, f のグラフ, y 軸と x 軸に平行な 2 直線 $y=f(t)$, $y=f\left(\dfrac{1}{e}\right)$ で囲まれた部分を y 軸の回りに回転して得られる回転体の体積を求めよ.

(3) $x>0$ において定義された関数 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ を考える. $1<s<t$ に対し, f のグラフ, y 軸と x 軸に平行な 2 直線 $y=f(t)$, $y=f(s)$ で囲まれた部分を y 軸の回りに回転して得られる回転体の体積求めよ.

(4) $x>0$ において定義された関数 $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}$ を考える. $0<s<t$ に対し, f のグラフ, y 軸と x 軸に平行な 2 直

線 $y=f(t)$, $y=f(s)$ で囲まれた部分を y 軸の回りに回転して得られる回転体の体積を求めよ.

(5) $x \geqq 0$ において定義された関数 $f(x)=e^{-x^2}$ を考える. $0<t<1$ に対し, f のグラフ, y 軸と x 軸に平行な直線 $y=f(t)$ で囲まれた部分を y 軸の回りに回転して得られる回転体の体積を求めよ.

9. (発展問題) 関数 $f,g:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ は連続で, (a,b) の各点で微分可能であり, 導関数 $f',g':(a,b)\to\boldsymbol{R}$ は連続であるとする. $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ によって媒介変数表示される曲線を C とし, C は原点を通らないとする.

(1) (a,b) の各点で微分可能な関数 $\theta:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ が, 各 $t\in[a,b]$ に対して $f(t)=\sqrt{f(t)^2+g(t)^2}\cos\theta(t)$, $g(t)=\sqrt{f(t)^2+g(t)^2}\sin\theta(t)$ を満たすとき, θ の導関数は $\theta'(t)=\dfrac{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)}{f(t)^2+g(t)^2}$ で与えられることを示せ.

(2) C が $r=\rho(\theta)$ $(\alpha\leqq\theta\leqq\beta)$ の形に極座標表示され, $f(a)=\rho(\alpha)\cos\alpha$, $g(a)=\rho(\alpha)\sin\alpha$, $f(b)=\rho(\beta)\cos\beta$, $g(b)=\rho(\beta)\sin\beta$ であるとき, C と原点を始点として $(f(a),g(a))$ を通る半直線と原点を始点として $(f(b),g(b))$ を通る半直線で囲まれた部分の面積は $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^b (f(t)g'(t)-f'(t)g(t))\,dt$ で与えられることを示せ.

10. (発展問題) a, b は正の実数で, (1) では $a>2b$, (2) では $a>b$ であるとする. 以下の領域の面積を求めよ.

(1) 曲線 $\begin{cases} x=(a-b)\cos t+b\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right) \\ y=(a-b)\sin t-b\sin\left(\frac{a-b}{b}t\right) \end{cases}$ $(0\leqq t\leqq \frac{2\pi b}{a})$ と円弧 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$ $(0\leqq t\leqq\frac{2\pi b}{a})$ で囲まれた部分.

(2) 曲線 $\begin{cases} x=(a+b)\cos t-b\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right) \\ y=(a+b)\sin t-b\sin\left(\frac{a+b}{b}t\right) \end{cases}$ $(0\leqq t\leqq \frac{2\pi b}{a})$ と円弧 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$ $(0\leqq t\leqq\frac{2\pi b}{a})$ で囲まれた部分.

(3) 曲線 $y^2(2a-x)=x^3$ と直線 $x=2a$ ではさまれた部分.

(4) 曲線 $x^3+y^3-3axy=0$ の第 2 象限と第 4 象限にある部分と直線 $x+y+a=0$ ではさまれた部分.

第 14 回の演習問題の解答

1. (1) 対称性から第 1 象限の $x \leqq y \leqq b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$ を満たす部分の面積を求めれば, 与えられた図形の面積はその値の 8 倍である. $0 \leqq x \leqq b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$ が成り立つのは $0 \leqq x \leqq \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ のときであり, $x = a\sin t$ とおけば $0 \leqq t \leqq \sin^{-1}\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $dx = a\cos t\,dt$ だから, 求める面積は $8\displaystyle\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}-x\right)dx =$
$8\displaystyle\int_0^{\sin^{-1}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} ab\cos^2 t\,dt - [4x^2]_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}} = 4\int_0^{\sin^{-1}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} ab(1+\cos 2t)\,dt - \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2} =$
$2\left[ab(2t+\sin 2t)\right]_0^{\sin^{-1}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} - \dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2} = 2ab\left(2\sin^{-1}\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \sin\left(2\sin^{-1}\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right) - \dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2} =$
$4ab\sin^{-1}\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + 4ab\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) - \dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2} = 4ab\sin^{-1}\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である.

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ かつ $0 \leqq y \leqq \left(1-x^{\frac{1}{m}}\right)^n$ を満たす部分の面積を求めればよい. $t = x^{\frac{1}{m}}$ とおけば $0 \leqq t \leqq 1$, $dx = mt^{m-1}dt$ だから, 求める面積はベータ関数を用いて $\displaystyle\int_0^1\left(1-x^{\frac{1}{m}}\right)^n dx = m\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^n dx = mB(m,n+1)$ と表される. 教科書の問題 4.13 の (2) と第 12 回の問題 4 の (3) の結果から, 上の値は $\dfrac{m!n!}{(m+n)!}$ に等しい.

(3) 教科書の定理 4.18 より, 求める面積は $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a+b\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a^2+2ab\cos\theta+\frac{b^2(1+\cos 2\theta)}{2}\right)d\theta =$
$\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2a^2+b^2}{2}\theta + 2ab\sin\theta + \dfrac{b^2}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \dfrac{\pi(2a^2+b^2)}{2}$.

(4) 教科書の定理 4.18 より, 求める面積は $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}} a^2\sin^2 n\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{a^2}{4}(1-\cos 2n\theta)\,d\theta = \frac{a^2}{4}\left[\theta - \frac{\sin 2n\theta}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{n}} = \frac{\pi a^2}{4n}$.

(5) $0 \leqq t \leqq 2$ ならば $\dfrac{dx}{dt} = 3t^2+3 > 0$ だから x は 0 から 14 まで単調に増加し, $y \geqq 0$ だから, 求める面積は $\displaystyle\int_0^{14} y\,dx = \int_0^2 y\frac{dx}{dt}dt = \int_0^2(2t-t^2)(3t^2+3)dt = \int_0^2(6t-3t^2+6t^3-3t^4)dt = \left[3t^2-t^3+\frac{3}{2}t^4-\frac{3}{5}t^5\right]_0^2 = \frac{44}{5}$.

(6) y は 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで単調に増加するため, 求める面積は $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{dy}{dt}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t(\sin t + t\cos t)dt =$
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(t\sin 2t + t^2(1+\cos 2t))dt = \frac{\pi^3}{48} + \left[\frac{1}{4}(-t\cos 2t + t^2\sin 2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}(\cos 2t - 2t\sin 2t)dt =$
$\displaystyle\frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8} + \left[\frac{\sin 2t}{8} + \frac{t\cos 2t}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2t}{8}dt = \frac{\pi^3}{48}$.
[別解] $\sqrt{x^2+y^2} = t$ だから, 与えられた曲線を極座標で表せば $r = \theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2})$ となるため, 教科書の定理 4.18 より求める面積は $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2\theta d\theta = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{3}\theta^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{48}$ である.

(7) $\sqrt{x^2+y^2} = e^t$ だから, 与えられた曲線を極座標で表せば $r = e^\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ となるため, 教科書の定理 4.18 より求める面積は $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2\theta}d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2\theta}\right]_0^{\pi} = \frac{e^{2\pi}-1}{4}$ である.

(8) $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ならば $\sin t = y$ より $0 \leqq y \leqq 1$, $t = \sin^{-1} y$ であり, $\cos t \geqq 0$ だから $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対応する与えられた曲線の部分を C_1 とすれば, C_1 は方程式 $x = \sqrt{1-y^2} + y\sin^{-1} y$ が定める曲線である. $\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$ ならば $\sin(\pi - t) = y$ より $0 \leqq y \leqq 1$, $t = \pi - \sin^{-1} y$ であり, $\cos t \leqq 0$ だから $\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$ に対応する与えられた曲線の部分を C_2 とすれば, C_2 は方程式 $x = -\sqrt{1-y^2} + y(\pi - \sin^{-1} y)$ が定める曲線である. ここで関数 $f, g : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を $f(y) = \sqrt{1-y^2} + y\sin^{-1} y$, $g(y) = -\sqrt{1-y^2} + y(\pi - \sin^{-1} y)$ で定めれば, $0 \leqq y < 1$ ならば $\dfrac{d}{dy}(f(y) - g(y)) = 2\sin^{-1} y - \pi < 0$ だから $f(y) - g(y)$ は y の単調減少関数であり, $f(1) - g(1) = 0$ だから $0 \leqq y \leqq 1$ に対して $g(y) \leqq f(y)$ が成り立つ. 故に C_1, C_2 と x 軸で囲まれた部分の面積は
$\displaystyle\int_0^1(f(y)-g(y))\,dy = \int_0^1\left(2\sqrt{1-y^2} + 2y\sin^{-1} y - \pi y\right)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\theta + 2\theta\sin\theta\cos\theta\right)d\theta - \int_0^1 \pi y\,dy =$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\sin 2\theta\,d\theta-\frac{\pi}{2}=\left[-\frac{\theta\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2\theta}{2}\,d\theta=\frac{\pi}{4}$ である.

(9) 与えられた曲線の $\pi \leqq t \leqq 2\pi$ に対応する部分を x 軸に関して対称移動した曲線は $\begin{cases} x=2a\cos t+a\cos 2t \\ y=-2a\sin t+a\sin 2t \end{cases}$ $(\pi \leqq t \leqq 2\pi)$ によってパラメータ表示されるが, $t=2\pi-s$ $(0 \leqq s \leqq \pi)$ としてパラメータを t から s に置き換えれば, 上の曲線は $\begin{cases} x=2a\cos s+a\cos 2s \\ y=2a\sin s-a\sin 2s \end{cases}$ $(0 \leqq s \leqq \pi)$ によってパラメータ表示されるため, 与えられた曲線の $0 \leqq t \leqq \pi$ に対応する部分に一致する. 従って与えられた曲線で囲まれた部分は x 軸に関して対称だから, 与えられた曲線の $0 \leqq t \leqq \pi$ に対応する部分と x 軸で囲まれた部分の面積を求め, それを 2 倍したものが求める面積である.

$\dfrac{dx}{dt}=-2a\sin t-2a\sin 2t=-2a\sin t(1+2\cos t)$ だから $0 \leqq t \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ のときに x は $3a$ から $-\dfrac{3a}{2}$ まで単調に減少し, $\dfrac{2\pi}{3} \leqq t \leqq \pi$ のときに x は $-\dfrac{3a}{2}$ から $-a$ まで単調に増加する. $0 \leqq t \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ に対応する与えられた曲線の部分を C_1, $\dfrac{2\pi}{3} \leqq t \leqq \pi$ に対応する与えられた曲線の部分を C_2 とする.

$$\begin{aligned}2a\sin t-a\sin 2t+\sqrt{3}(2a\cos t+a\cos 2t)&=4a\Big(\cos t\cos\frac{\pi}{6}+\sin t\sin\frac{\pi}{6}\Big)-2a\Big(\sin 2t\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2t\sin\frac{\pi}{3}\Big)\\&=4a\cos\Big(t-\frac{\pi}{6}\Big)-2a\sin\Big(2t-\frac{\pi}{3}\Big)=4a\cos\Big(t-\frac{\pi}{6}\Big)\Big(1-\sin\Big(t-\frac{\pi}{6}\Big)\Big)\end{aligned}$$

だから $0 \leqq t \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ ならば $2a\sin t-a\sin 2t \geqq -\sqrt{3}(2a\cos t+a\cos 2t)$ であり, $\dfrac{2\pi}{3} \leqq t \leqq \pi$ ならば $2a\sin t-a\sin 2t \leqq -\sqrt{3}(2a\cos t+a\cos 2t)$ である. 従って C_1 は直線 $y=-\sqrt{3}x$ より上にあり, C_2 は直線 $y=-\sqrt{3}x$ より下にあるため x 座標が $-\dfrac{3a}{2} \leqq x \leqq -a$ の範囲で C_1 は C_2 より上にある. また, $0 \leqq t \leqq \pi$ ならば $y=2a\sin t-a\sin 2t=2a\sin t(1-\cos t) \geqq 0$ だから, 与えられた曲線の $0 \leqq t \leqq \pi$ に対応する部分と x 軸で囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{3a}{2}}^{3a}y\,dx-\int_{-\frac{3a}{2}}^{-a}y\,dx&=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{0}y\frac{dx}{dt}dt-\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}y\frac{dx}{dt}dt\\&=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{0}(2a\sin t-a\sin 2t)(-2a\sin t-2a\sin 2t)dt-\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}(2a\sin t-a\sin 2t)(-2a\sin t-2a\sin 2t)dt\\&=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}a^2(2\sin t-\sin 2t)(2\sin t+2\sin 2t)dt+\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}a^2(2\sin t-\sin 2t)(2\sin t+2\sin 2t)dt\\&=\int_0^{\pi}a^2(4\sin^2 t+2\sin t\sin 2t-2\sin^2 2t)dt=\int_0^{\pi}a^2(1-2\cos 2t+4\sin^2 t\cos t+\cos 4t)dt\\&=a^2\left[t-\sin 2t+\frac{4}{3}\sin^3 t+\frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{\pi}=\pi a^2.\end{aligned}$$

である. 故に求める面積は $2\pi a^2$ である.

(10) 与えられた曲線の $\pi \leqq t \leqq 2\pi$ に対応する部分を x 軸に関して対称移動した曲線は $\begin{cases} x=2a\cos t-a\cos 2t \\ y=-2a\sin t+a\sin 2t \end{cases}$ $(\pi \leqq t \leqq 2\pi)$ によってパラメータ表示されるが, $t=2\pi-s$ $(0 \leqq s \leqq \pi)$ としてパラメータを t から s に置き換えれば, 上の曲線は $\begin{cases} x=2a\cos s-a\cos 2s \\ y=2a\sin s-a\sin 2s \end{cases}$ $(0 \leqq s \leqq \pi)$ によってパラメータ表示されるため, 与えられた曲線の $0 \leqq t \leqq \pi$ に対応する部分に一致する. 従って与えられた曲線で囲まれた部分は x 軸に関して対称だから, 与えられた曲線の $0 \leqq t \leqq \pi$ に対応する部分と x 軸で囲まれた部分の面積を求め, それを 2 倍したものが求める面積である.

$\dfrac{dx}{dt}=-2a\sin t+2a\sin 2t=-2a\sin t(1-2\cos t)$ だから $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{3}$ のときに x は a から $\dfrac{3a}{2}$ まで単調に増加し, $\dfrac{\pi}{3} \leqq t \leqq \pi$ のときに x は $\dfrac{3a}{2}$ から $-3a$ まで単調に減少する. また, $\dfrac{dy}{dt}=2a\cos t-2a\cos 2t=2a(1-\cos t)(1+2\cos t)$ だから $0 \leqq t \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ のときに y は 0 から $\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$ まで単調に増加し, $\dfrac{2\pi}{3} \leqq t \leqq \pi$ のときに x は $\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$ から 0 まで単調に減少する. $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{3}$ に対応する与えられた曲線の部分を C_1, $\dfrac{\pi}{3} \leqq t \leqq \pi$ に対応する与えられた曲線の

部分を C_2 とすれば, C_1 は x 座標が $a \leqq x \leqq \dfrac{3a}{2}$ の範囲に含まれ, $t = \dfrac{\pi}{2}$ のとき, $x = a$ だから, C_2 の x 座標が $a \leqq x \leqq \dfrac{3a}{2}$ の範囲に含まれる部分は, $\dfrac{\pi}{3} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対応する部分である. $0 \leqq t \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ の範囲で y は単調に増加しているので, C_2 の x 座標が $a \leqq x \leqq \dfrac{3a}{2}$ の範囲に含まれる部分は, C_1 より上にある. また, $0 \leqq t \leqq \pi$ ならば $y = 2\sin t - \sin 2t = 2\sin t(1-\cos t) \geqq 0$ だから, 与えられた曲線の $0 \leqq t \leqq \pi$ に対応する部分と x 軸で囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned}
\int_{-3a}^{\frac{3a}{2}} y\,dx - \int_{a}^{\frac{3a}{2}} y\,dx &= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{dt}dt - \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{dt}dt \\
&= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{3}} (2a\sin t - a\sin 2t)(-2a\sin t + 2a\sin 2t)dt - \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (2a\sin t - a\sin 2t)(-2a\sin t + 2a\sin 2t)dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} a^2(2\sin t - \sin 2t)(2\sin t - 2\sin 2t)dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} a^2(2\sin t - \sin 2t)(2\sin t - 2\sin 2t)dt \\
&= \int_{0}^{\pi} a^2(4\sin^2 t - 6\sin t\sin 2t + 2\sin^2 2t)dt = \int_{0}^{\pi} a^2(3 - 2\cos 2t - 12\sin^2 t\cos t - \cos 4t)dt \\
&= a^2\left[3t - \sin 2t - 4\sin^3 t - \frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{\pi} = 3\pi a^2.
\end{aligned}$$

である. 故に求める面積は $6\pi a^2$ である.

2. (1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3a}{2}\sqrt{x}$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_0^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_0^b \sqrt{1+\frac{9a^2}{4}x}dx = \left[\frac{8}{27a^2}\left(1+\frac{9a^2}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^b =$ $\displaystyle\frac{8}{27a^2}\left(\left(1+\frac{9a^2}{4}b\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{(4+9a^2b)^{\frac{3}{2}} - 8}{27a^2}$.

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2x}$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_1^2 \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)dx = \left[\frac{x^2}{4}+\frac{\log x}{2}\right]_1^2 =$ $\dfrac{3}{4} + \dfrac{\log 2}{2}$.

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2ax}{x^2-a^2}$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_{2a}^{3a} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_{2a}^{3a} \frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}dx =$ $\displaystyle\int_{2a}^{3a}\left(1+\frac{a}{x-a}-\frac{a}{x+a}\right)dx = [x + a\log(x-a) - a\log(x+a)]_{2a}^{3a} = a(1-\log 2+\log 3)$.

(4) $\dfrac{dy}{dx} = -\tan x$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}dx$ で与えられる. $t = \sin x$ とおけば, $\cos x dx = dt$ であり, x が 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ まで動けば, t は 0 から $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ まで動くため, $\displaystyle(*) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx =$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1-t^2}dt = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt = \left[\frac{1}{2}(\log(1+t)-\log(1-t))\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \log\bigl(\sqrt{2}+1\bigr)$.

(5) $\dfrac{dy}{dx} = e^x$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_0^{\log 2} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_0^{\log 2} \sqrt{1+e^{2x}}dx \cdots (*)$. $t = \sqrt{1+e^{2x}}$ とおけば $x = \dfrac{1}{2}\log(t^2-1)$, $dx = \dfrac{t}{t^2-1}dt$ であり, x が 0 から $\log 2$ まで動くとき, t は $\sqrt{2}$ から $\sqrt{5}$ まで動くため, $\displaystyle(*) = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{t^2}{t^2-1}dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\left(1+\frac{1}{2(t-1)}-\frac{1}{2(t+1)}\right)dt = \left[1+\frac{1}{2}\log(t-1)-\frac{1}{2}\log(t+1)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \sqrt{5}-\sqrt{2}+$ $\dfrac{1}{2}\log\bigl(\sqrt{5}-1\bigr) - \dfrac{1}{2}\log\bigl(\sqrt{5}+1\bigr) - \dfrac{1}{2}\log\bigl(\sqrt{2}-1\bigr) + \dfrac{1}{2}\log\bigl(\sqrt{2}+1\bigr) = \sqrt{5}-\sqrt{2}+\log\bigl(\sqrt{5}-1\bigr)+\log\bigl(\sqrt{2}+1\bigr)-\log 2.$

(6) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ae^{\frac{x}{2ab}}}{2b} - \dfrac{be^{\frac{-x}{2ab}}}{2a}$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_{2abp}^{2abq} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_{2abp}^{2abq} \sqrt{1+\left(\frac{ae^{\frac{x}{2ab}}}{2b} - \frac{be^{\frac{-x}{2ab}}}{2a}\right)^2}dx$ $\displaystyle= \int_{2abp}^{2abq}\left(\frac{ae^{\frac{x}{2ab}}}{2b} + \frac{be^{\frac{-x}{2ab}}}{2a}\right)dx = \left[a^2e^{\frac{x}{2ab}} - b^2e^{\frac{-x}{2ab}}\right]_{2abp}^{2abq} = (e^q - e^p)\left(a^2+\frac{b^2}{e^{p+q}}\right)$.

(7) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_a^b \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx\cdots(*)$ で与えられる. $t=\sqrt{x^2+1}$ とおけば $xdx=tdt$ だから, $\displaystyle(*)=\int_a^b \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx=\int_{\sqrt{a^2+1}}^{\sqrt{b^2+1}} \frac{t^2}{t^2-1}dt=\int_{\sqrt{a^2+1}}^{\sqrt{b^2+1}} \left(1+\frac{1}{2(t-1)}-\frac{1}{2(t+1)}\right)dt=$ $\displaystyle\left[t+\frac{1}{2}\log\frac{t-1}{t+1}\right]_{\sqrt{a^2+1}}^{\sqrt{b^2+1}}=\sqrt{b^2+1}-\sqrt{a^2+1}+\log\left(\sqrt{b^2+1}-1\right)-\log\left(\sqrt{a^2+1}-1\right)-\log b+\log a.$

(8) 与えられた曲線は $\begin{cases} x=t^3 \\ y=\frac{3a}{2}t^2 \end{cases}$ $(0\leqq t\leqq \sqrt[3]{b})$ とパラメータ表示される. $\dfrac{dx}{dt}=3t^2$, $\dfrac{dy}{dt}=3at$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{b}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^{\sqrt[3]{b}} 3t\sqrt{t^2+a^2}\,dt=\left[(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt[3]{b}}=\left(b^{\frac{2}{3}}+a^2\right)^{\frac{3}{2}}-a^3.$

(9) 与えられた曲線は $\begin{cases} x=t^2 \\ y=(1-t)^2 \end{cases}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とパラメータ表示される. $\dfrac{dx}{dt}=2t$, $\dfrac{dy}{dt}=2t-2$ だから, 求める曲線の長さは, 教科書の 104 ページの結果から $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^1 2\sqrt{2}\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}dt=$ $\displaystyle\sqrt{2}\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\log\left(t-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\right)\right]_0^1=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\log(1+\sqrt{2}).$

(10) 与えられた曲線は $\begin{cases} x=at^2 \\ y=\frac{a}{\sqrt{3}}t(1-t^2) \end{cases}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とパラメータ表示される. $\dfrac{dx}{dt}=2at$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}(1-3t^2)$ だから, 求める曲線の長さは, $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^1 \frac{a}{\sqrt{3}}(1+3t^2)dt=\frac{a}{\sqrt{3}}[t+t^3]_0^1=\frac{2a}{\sqrt{3}}.$

(11) $\dfrac{dx}{dt}=2t^3-2t$, $\dfrac{dy}{dt}=4t^2$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_{-1}^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_{-1}^2 2|t^3+t|dt=$ $\displaystyle\int_{-1}^0 2(-t^3-t)dt+\int_0^2 2(t^3+t)dt=\left[-\frac{t^4}{2}-t^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{t^4}{2}+t^2\right]_0^2=\frac{27}{2}.$

(12) $\dfrac{dx}{dt}=t-\dfrac{1}{t}$, $\dfrac{dy}{dt}=t^2-1$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_1^{2\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_1^{2\sqrt{2}} \frac{(t^2-1)\sqrt{t^2+1}}{t^2}tdt$ $\cdots(*)$ で与えられる. $s=\sqrt{t^2+1}$ とおくと, $t^2=s^2-1$, $tdt=sds$ であり, t が 1 から $2\sqrt{2}$ まで動くとき, s は $\sqrt{2}$ から 3 まで動くため, $\displaystyle(*)=\int_{\sqrt{2}}^3 \frac{s^2(s^2-2)}{s^2-1}ds=\int_{\sqrt{2}}^3 \left(s^2-1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right)\right)ds=$ $\displaystyle\left[\frac{s^3}{3}-s-\frac{1}{2}(\log(s-1)-\log(s+1))\right]_{\sqrt{2}}^3=6+\frac{\sqrt{2}}{3}+\log(2-\sqrt{2}).$

(13) $\dfrac{dx}{dt}=2t+2$, $\dfrac{dy}{dt}=2t^2+2t$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^{\sqrt{3}} 2(t+1)\sqrt{1+t^2}dt$ $\cdots(*)$ で与えられる. $s=t^2$ とおくと, $2tdt=ds$ であり, t が 0 から $\sqrt{3}$ まで動くとき, s は 0 から 3 まで動くため, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} 2t\sqrt{1+t^2}dt=\int_0^3 \sqrt{1+s}ds=\left[\frac{2}{3}(1+s)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=\frac{14}{3}$ である. また, 教科書の 104 ページの結果から $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} 2\sqrt{1+t^2}dt=\left[t\sqrt{1+t^2}+\log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_0^{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}+\log\left(\sqrt{3}+2\right)$ だから $(*)=\dfrac{14}{3}+2\sqrt{3}+\log\left(\sqrt{3}+2\right)$.

(14) $\dfrac{dx}{dt}=6t$, $\dfrac{dy}{dt}=3-3t^2$ だから, 求める曲線の長さは, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^{\sqrt{3}} 3(1+t^2)\,dt=$ $[3t+t^3]_0^{\sqrt{3}}=6\sqrt{3}.$

(15) $\dfrac{dx}{dt}=-(a-b)\left(\sin t+\sin\left(\dfrac{a-b}{b}t\right)\right)$, $\dfrac{dy}{dt}=(a-b)\left(\cos t-\cos\left(\dfrac{a-b}{b}t\right)\right)$ だから, $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=$ $2(a-b)^2\left(1+\sin t\sin\left(\dfrac{a-b}{b}t\right)-\cos t\cos\left(\dfrac{a-b}{b}t\right)\right)=2(a-b)^2\left(1-\cos\left(\dfrac{a}{b}t\right)\right)=4(a-b)^2\sin^2\left(\dfrac{a}{2b}t\right)$ である. 従っ

て, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi bn}{a}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^{\frac{\pi bn}{a}}2|a-b|\left|\sin\left(\frac{a}{2b}t\right)\right|dt\cdots(*)$ で与えられる. $\theta=\dfrac{a}{2b}t$ とおけば, $dt=\dfrac{2b}{a}d\theta$ であり, t が 0 から $\dfrac{\pi bn}{a}$ まで動けば, θ は 0 から $\dfrac{\pi n}{2}$ まで動くため, $(*)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi n}{2}}\frac{4b|a-b|}{a}|\sin\theta|d\theta=\frac{4b|a-b|}{a}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{\pi(k-1)}{2}}^{\frac{\pi k}{2}}|\sin\theta|d\theta$ が成り立つ. 任意の整数 k に対して $\displaystyle\int_{\frac{\pi(k-1)}{2}}^{\frac{\pi k}{2}}|\sin\theta|d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta=1$ だから, 上式から求める曲線の長さは $\dfrac{4bn|a-b|}{a}$ である.

(16) $\dfrac{dx}{dt}=-(a+b)\left(\sin t-\sin\left(\dfrac{a+b}{b}t\right)\right)$, $\dfrac{dy}{dt}=(a+b)\left(\cos t-\cos\left(\dfrac{a+b}{b}t\right)\right)$ だから, $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=2(a+b)^2\left(1-\sin t\sin\left(\dfrac{a+b}{b}t\right)-\cos t\cos\left(\dfrac{a+b}{b}t\right)\right)=2(a+b)^2\left(1-\cos\left(\dfrac{a}{b}t\right)\right)=4(a+b)^2\sin^2\left(\dfrac{a}{2b}t\right)$ である. 従って, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi bn}{a}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^{\frac{\pi bn}{a}}2|a+b|\left|\sin\left(\frac{a}{2b}t\right)\right|dt\cdots(*)$ で与えられる. $\theta=\dfrac{a}{2b}t$ とおけば, $dt=\dfrac{2b}{a}d\theta$ であり, t が 0 から $\dfrac{\pi bn}{a}$ まで動けば, θ は 0 から $\dfrac{\pi n}{2}$ まで動くため, $(*)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi n}{2}}\frac{4b|a+b|}{a}|\sin\theta|d\theta=\frac{4b|a+b|}{a}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{\pi(k-1)}{2}}^{\frac{\pi k}{2}}|\sin\theta|d\theta$ が成り立つ. 任意の整数 k に対して $\displaystyle\int_{\frac{\pi(k-1)}{2}}^{\frac{\pi k}{2}}|\sin\theta|d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta=1$ だから, 上式から求める曲線の長さは $\dfrac{4bn|a+b|}{a}$ である.

(17) $\dfrac{dx}{dt}=-a\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=a\cos t$, $\dfrac{dz}{dt}=b$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_p^q\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt=\int_p^q\sqrt{a^2+b^2}dt=\sqrt{a^2+b^2}(q-p)$.

(18) $\dfrac{dx}{dt}=a\sinh t$, $\dfrac{dy}{dt}=b\cosh t$, $\dfrac{dz}{dt}=a$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_p^q\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt=\int_p^q\sqrt{b^2\cosh^2 t+a^2\sinh^2 t+a^2}dt=\int_p^q\sqrt{a^2+b^2}\cosh t\,dt=\sqrt{a^2+b^2}[\sinh t]_p^q=\sqrt{a^2+b^2}(\sinh q-\sinh p)$.

(19) $\dfrac{dr}{d\theta}=ae^{a\theta}$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_{-\infty}^b\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\theta=\int_{-\infty}^b\sqrt{1+a^2}e^{a\theta}d\theta=\left[\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}e^{a\theta}\right]_{-\infty}^b=\lim_{\theta\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}e^{ab}-\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}e^{a\theta}\right)=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}e^{ab}$.

(20) $\dfrac{dr}{d\theta}=a$ だから, 求める曲線の長さは, 教科書の 104 ページの結果から $\displaystyle\int_0^b\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta=\int_0^b a\sqrt{\theta^2+1}\,d\theta=\left[\frac{a\theta}{2}\sqrt{1+\theta^2}+\frac{a}{2}\log\left(\theta+\sqrt{1+\theta^2}\right)\right]_0^b=\frac{a}{2}\left(b\sqrt{1+b^2}+\log\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)\right)$.

(21) $\dfrac{dr}{d\theta}=2a\theta$ だから, 求める曲線の長さは, $\displaystyle\int_0^b\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta=\int_0^b a\theta\sqrt{\theta^2+4}d\theta\cdots(*)$ で与えられる. $s=\theta^2$ とおくと, $\theta dt=\dfrac{1}{2}ds$ であり, θ が 0 から b まで動くとき, s は 0 から b^2 まで動くため, $(*)=\displaystyle\int_0^{b^2}\frac{a}{2}\sqrt{s+4}ds=\left[\frac{a}{3}(s+4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{b^2}=\frac{a}{3}\left((b^2+4)^{\frac{3}{2}}-8\right)$.

(22) $\dfrac{dr}{d\theta}=-\dfrac{a}{\theta^2}$ だから, 求める曲線の長さは, $\displaystyle\int_1^b\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta=\int_1^b\sqrt{\left(\frac{a}{\theta}\right)^2+\left(-\frac{a}{\theta^2}\right)^2}d\theta=\int_1^b\frac{a\sqrt{\theta^2+1}}{\theta^2}d\theta$ $\cdots(*)$ で与えられる. $t=\theta+\sqrt{\theta^2+1}$ とおくと $\theta=\dfrac{t^2-1}{2t}$, $\sqrt{\theta^2+1}=\dfrac{t^2+1}{2t}$, $d\theta=\dfrac{t^2+1}{2t^2}dt$ であり, θ が 1 から b まで動くとき, t は $1+\sqrt{2}$ から $b+\sqrt{b^2+1}$ まで動くため, $(*)=\displaystyle\int_{1+\sqrt{2}}^{b+\sqrt{b^2+1}}\frac{a(t^2+1)^2}{t(t^2-1)^2}dt=$
$\displaystyle a\int_{1+\sqrt{2}}^{b+\sqrt{b^2+1}}\frac{(t^2-1)^2+4t^2}{t(t^2-1)^2}dt=a\int_{1+\sqrt{2}}^{b+\sqrt{b^2+1}}\left(\frac{1}{t}+\frac{4t}{(t^2-1)^2}\right)dt=a\left[\log t-\frac{2}{t^2-1}\right]_{1+\sqrt{2}}^{b+\sqrt{b^2+1}}=$

$a\left(\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{b^2+1}}{b}+\log\bigl(b+\sqrt{b^2+1}\bigr)-\log\bigl(1+\sqrt{2}\bigr)\right).$

3. (1) $S(t)=\displaystyle\int_0^t f(x)\,dx=\int_0^t \frac{a}{2}\bigl(pe^{\frac{x}{a}}+qe^{-\frac{x}{a}}\bigr)\,dx=\frac{a^2}{2}\bigl[pe^{\frac{x}{a}}-qe^{-\frac{x}{a}}\bigr]_0^t=\frac{a^2}{2}\Bigl(pe^{\frac{t}{a}}-qe^{-\frac{t}{a}}-p+q\Bigr).$

(2) $f'(x)=\dfrac{1}{2}\bigl(pe^{\frac{x}{a}}-qe^{-\frac{x}{a}}\bigr)$ だから $pq=1$ であることに注意すれば, $\sqrt{1+f'(x)^2}=\dfrac{1}{2}\left(pe^{\frac{x}{a}}+qe^{-\frac{x}{a}}\right)=\dfrac{1}{a}f(x)$ が成り立つ. 従って $aL(t)=\displaystyle\int_0^t a\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_0^t f(x)\,dx=S(t)$ である.

4. 点 $\mathrm{Q}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ で糸が円 O に接しているとき, $(r,0)$ から Q までの O の弧の長さ $r\theta$ は, 線分 QP の長さに等しく, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ は Q の位置ベクトルを時計回りに 90° 回転させたベクトルの正の実数倍になるため, $\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(r\theta\sin\theta,-r\theta\cos\theta)$ である. 従って P の座標は $(r\cos\theta+r\theta\sin\theta, r\sin\theta-r\theta\cos\theta)$ となる. θ は 0 から 2π まで動くため, 求める長さは $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{(r\theta\cos\theta)^2+(r\theta\sin\theta)^2}d\theta=\int_0^{2\pi} r\theta d\theta=2\pi^2 r$ である.

5. (1) $y=\sqrt{r^2-x^2}$ の $a\leqq x\leqq b$ の部分を x 軸のまわりに回転させてできる図形の体積は

$\displaystyle\int_a^\pi by^2dx=\int_a^\pi b(r^2-x^2)dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_a^b=\frac{\pi(b-a)}{3}(3r^2-(a^2+ab+b^2))$ であり, 面積は

$\displaystyle\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_a^b 2\pi\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}dx=\int_a^b 2\pi r dx=2\pi r(b-a)$ である.

(2) $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ $(-a\leqq x\leqq a)$ を x 軸のまわりに回転させてできる図形の体積は

$\pi\displaystyle\int_{-a}^a y^2dx=\pi\int_{-a}^a\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=\pi\left[\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\right]_{-a}^a=\frac{4}{3}\pi ab^2.$

$a>b$ の場合, $\displaystyle\int\sqrt{A^2-x^2}dx=\frac{A^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{A}+\frac{x}{2}\sqrt{A^2-x^2}$ (ただし $A>0$) であることを用いると, 面積は

$2\pi\displaystyle\int_{-a}^a y\sqrt{1+y'^2}dx=2\pi\int_{-a}^a\frac{b}{a^2}\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}dx=2\pi\int_{-a}^a\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}\sqrt{\frac{a^4}{a^2-b^2}-x^2}dx=$

$\dfrac{\pi b\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}\left[\dfrac{a^4}{a^2-b^2}\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}x}{a^2}+x\sqrt{\dfrac{a^4}{a^2-b^2}-x^2}\right]_{-a}^a=\dfrac{2\pi a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}+2\pi b^2.$ $a<b$ の場合は教科書の 104 ページの結果から, 面積は $2\pi\displaystyle\int_{-a}^a y\sqrt{1+y'^2}dx=2\pi\int_{-a}^a\frac{b}{a^2}\sqrt{(b^2-a^2)x^2+a^4}dx=$

$2\pi\displaystyle\int_{-a}^a\frac{b\sqrt{b^2-a^2}}{a^2}\sqrt{x^2+\frac{a^4}{b^2-a^2}}dx=\frac{\pi b\sqrt{b^2-a^2}}{a^2}\left[\frac{a^4}{b^2-a^2}\log\left(x+\sqrt{x^2+\frac{a^4}{b^2-a^2}}\right)+x\sqrt{x^2+\frac{a^4}{b^2-a^2}}\right]_{-a}^a=$

$\dfrac{2\pi a^2b}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\left(\dfrac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right)+2\pi b^2.$

(3) $y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ を x 軸のまわりに回転させてできる図形の体積は $\displaystyle\int_0^\pi\pi y^2dx=\int_0^\pi\pi\sin^2 xdx=$

$\displaystyle\int_0^\pi\frac{\pi(1-\cos 2x)}{2}dx=\left[\frac{\pi x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}$ であり, 面積は $\displaystyle\int_0^\pi 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^\pi 2\pi\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx=$

$\displaystyle\int_1^{-1}\left(-2\pi\sqrt{1+t^2}\right)dt=\pi\left[t\sqrt{1+t^2}+\log\Bigl(t+\sqrt{1+t^2}\Bigr)\right]_{-1}^1=\pi\left(2\sqrt{2}+\log\Bigl(\sqrt{2}+1\Bigr)-\log\Bigl(\sqrt{2}-1\Bigr)\right)=$

$2\pi\left(\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)\right)$ である.

(4) $y=\tan x$ $(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4})$ を x 軸のまわりに回転させてできる図形の体積は $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y^2+1}$ より

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\pi y^2dx=\int_0^1\pi y^2\frac{dx}{dy}dy=\int_0^1\frac{\pi y^2}{y^2+1}dy=\int_0^1\pi\left(1-\frac{1}{y^2+1}\right)dy=\pi\left[y-\tan^{-1}y\right]_0^1=\pi-\frac{\pi^2}{4}$ であり, 面積は

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^1 2\pi y\sqrt{1+(1+y^2)^2}\frac{dx}{dy}dy=\int_0^1\frac{2\pi y\sqrt{1+(y^2+1)^2}}{y^2+1}dy$ である. $t=\sqrt{1+(1+y^2)^2}$ とおくと, $2y(y^2+1)dy=tdt$ だから (上式) $=\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{\pi t^2}{t^2-1}dy=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\pi\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right)dt=$

$\pi\left[1+\frac{1}{2}(\log(t-1)-\log(t+1))\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}=\pi\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}+\log\left(\sqrt{5}-1\right)-\log 2+\log\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$ である.

(5) $y=e^x$ $(0\leqq x\leqq \log 2)$ を x 軸のまわりに回転させてできる図形の体積は $\displaystyle\int_0^{\log 2}\pi y^2dx=\int_0^{\log 2}\pi e^{2x}dx=\left[\frac{\pi}{2}e^{2x}\right]_0^{\log 2}=\frac{3\pi}{2}$ であり, 面積は $\displaystyle\int_0^{\log 2}2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^{\log 2}2\pi e^x\sqrt{1+e^{2x}}dx=\int_1^2 2\pi\sqrt{1+t^2}dt=\pi\left[t\sqrt{1+t^2}+\log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_1^2=\pi\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}+\log\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$.

(6) $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(a>0,\ 0\leqq t\leqq 2\pi)$ を x 軸のまわりに回転させてできる図形の体積は $\displaystyle\int_0^{2\pi a}\pi y^2dx=\int_0^{2\pi}\pi y^2\frac{dx}{dt}dt=\int_0^{2\pi}\pi a^3(1-\cos t)^3dt=\int_0^{2\pi}\pi a^3(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt=\int_0^{2\pi}\pi a^3\left(\frac{5}{2}+\frac{3\cos 2t}{2}\right)dt=5\pi^2a^3$ であり, 面積は $\displaystyle\int_0^{2\pi a}2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^{2\pi}2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\frac{dx}{dt}dt=\int_0^{2\pi}2\pi a^2(1-\cos t)^2\sqrt{1+\left(\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}\right)^2}dt=\int_0^{2\pi}8\pi a^2\sin^3\frac{t}{2}dt=\int_0^{2\pi}8\pi a^2\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}dt=\int_1^{-1}(-16\pi a^2(1-t^2))dt=\left[16\pi a^2\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\right]_{-1}^1=\frac{64\pi a^2}{3}$.

(7) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$ は x 軸について対称だから, この曲線を x 軸のまわりに回転させてできる図形は, この曲線の $y\geqq 0$ の部分 $y=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ $(-a\leqq x\leqq a)$ を x 軸のまわりに回転させてできる図形に一致する. 従って, この図形の体積は $\displaystyle\int_{-a}^a\pi y^2dx=\int_{-a}^a\pi\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3dx=\int_{-a}^a\pi\left(a^2-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}-x^2\right)dx=\pi\left[a^2x-\frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}}-\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^a=\frac{32\pi a^3}{105}$ であり, 面積は $\displaystyle\int_{-a}^a 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_{-a}^a 2\pi\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\left(-x^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}dx=\int_0^a 4\pi a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}dx=\int_0^{a^{\frac{2}{3}}}6\pi a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}-t\right)^{\frac{3}{2}}dt=\left[-\frac{12}{5}\pi a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}-t\right)^{\frac{5}{2}}\right]_0^{a^{\frac{2}{3}}}=\frac{12}{5}\pi a^2$.

(8) 得られる回転体は, 曲線 $y=a+\sqrt{R^2-x^2}$ $(-R\leqq x\leqq R)$ を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体から, 曲線 $y=a-\sqrt{R^2-x^2}$ $(-R\leqq x\leqq R)$ を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の部分を除いたものだから, その体積は $\displaystyle\int_{-R}^R\pi\left(a+\sqrt{R^2-x^2}\right)^2dx-\int_{-R}^R\pi\left(a-\sqrt{R^2-x^2}\right)^2dx=4\pi a\int_{-R}^R\sqrt{R^2-x^2}dx=2\pi^2aR^2$ である.

得られる回転体の表面は, 曲線 $y=a+\sqrt{R^2-x^2}$ $(-R\leqq x\leqq R)$ を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の表面と, 曲線 $y=a-\sqrt{R^2-x^2}$ $(-R\leqq x\leqq R)$ を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の表面の合併集合だから, 求める表面積は $\displaystyle\int_{-R}^R 2\pi\left(a+\sqrt{R^2-x^2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}dx+\int_{-R}^R 2\pi\left(a-\sqrt{R^2-x^2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}dx=4\pi a\int_{-R}^R\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=4\pi aR\left[\sin^{-1}\frac{x}{R}\right]_{-R}^R=4\pi^2aR$ である.

6. (1) 与えられた曲線は θ を媒介変数として $\begin{cases}x=a(1+\cos\theta)\cos\theta\\ y=a(1+\cos\theta)\sin\theta\end{cases}$ と表される. 与えられた曲線は x 軸に関して対称だから, $0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分を x 軸の回りに回転させればよい. $x=a\left(\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)$ だから $0\leqq\theta\leqq\frac{2\pi}{3}$ で x は $2a$ から $-\frac{a}{4}$ まで単調に減少し, $\frac{2\pi}{3}\leqq\theta\leqq\pi$ で x は $-\frac{a}{4}$ から 0 まで単調に増加する. また, $\frac{dy}{d\theta}=a(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$ だから $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ の範囲で y は 0 から $\frac{3\sqrt{3}a}{4}$ まで単調に増加して, $\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\pi$

の範囲で y は $\dfrac{3\sqrt{3}a}{4}$ から 0 まで単調に減少する．従って θ が 0 から $\dfrac{2\pi}{3}$ まで動いて得られる曲線の部分を C_1 とし，$\dfrac{2\pi}{3}$ から π まで動いて得られる曲線の部分を C_2 とすれば，C_2 は第 2 象限の $-\dfrac{a}{4} \leqq x \leqq 0$ の範囲に含まれて，直線 $y = \dfrac{\sqrt{3}a}{4}$ より下にあり，C_1 の第 2 象限に含まれる部分は 直線 $y = \dfrac{\sqrt{3}a}{4}$ より上にあるため，与えられた曲線を x 軸の回りに回転させて得られる回転体は C_1 を x 軸の回りに回転させて得られる回転体から C_2 を x 軸の回りに回転させて得られる回転体を除いた部分である．C_1 を x 軸の回りに回転させて得られる回転体の体積は $\displaystyle\int_{-\frac{a}{4}}^{2a} \pi y^2\,dx = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{0} \pi y^2 \frac{dx}{d\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \pi a^3(1+\cos\theta)^2(1-\cos^2\theta)(1+2\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$ であり，C_2 を x 軸の回りに回転させて得られる回転体の体積は $\displaystyle\int_{-\frac{a}{4}}^{0} \pi y^2\,dx = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \pi y^2 \frac{dx}{d\theta}\,d\theta = -\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \pi a^3(1+\cos\theta)^2(1-\cos^2\theta)(1+2\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$ である．以上から求める回転体の体積は $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \pi a^3(1+\cos\theta)^2(1-\cos^2\theta)(1+2\cos\theta)\sin\theta\,d\theta -$ $\displaystyle\left(-\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \pi a^3(1+\cos\theta)^2(1-\cos^2\theta)(1+2\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\right) = \int_0^{\pi} \pi a^3(1+\cos\theta)^2(1-\cos^2\theta)(1+2\cos\theta)\sin\theta\,d\theta =$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \pi a^3(1+4t+4t^2-2t^3-5t^4-2t^5)\,dt = 2\int_0^1 \pi a^3(1+4t^2-5t^4)\,dt = \frac{8\pi a^3}{3}$ である．

(2) $y = t$ のときの回転体の断面の半径は $\dfrac{1}{t}$ だから，求める体積は $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\pi}{t^2}\,dt = \lim_{s\to\infty}\left[-\frac{\pi}{t}\right]_1^s = \lim_{s\to\infty}\left(\pi - \frac{\pi}{s}\right) = \pi$.

(3) 関数 $g : (0, a] \to \boldsymbol{R}$ を $g(y) = a\log\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right) - \sqrt{a^2-y^2}$ で定めれば，$y \in (0, a)$ に対し，$g'(y) = -\dfrac{\sqrt{a^2-y^2}}{y} < 0$ だから g は単調減少関数であり，$\displaystyle\lim_{y\to+0} g(y) = \infty$, $g(a) = 0$ である．従って g は $(0, a]$ から $[0, \infty)$ への全単射である．$f : [0, \infty) \to (0, a]$ を g の逆関数とし，$x = g(y)$ とおいて置換積分を行えば，求める回転体の体積は，$\displaystyle\int_0^{\infty} \pi f(x)^2\,dx = \int_a^0 \pi f(g(y))^2 \frac{dx}{dy}\,dy = \int_0^a \pi y\sqrt{a^2-y^2}\,dy = \left[-\frac{\pi}{3}(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{\pi a^3}{3}$ である．

7. (1) $\mathrm{P}(s)$ の座標は $(as^r, 0)$, $\mathrm{Q}(1-s)$ の座標は $(0, b(1-s)^r)$ だから $\mathrm{P}(s)$ と $\mathrm{Q}(1-s)$ を通る直線の方程式は $y = -\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{1}{s}-1\right)^r (x - as^r)$ である．$(f(s), g(s))$ はこの直線上にあるため

$$g(s) = -\frac{b}{a}\left(\frac{1}{s}-1\right)^r (f(s) - as^r)\ \cdots\ (i)$$

が成り立つ．$(f(s), g(s))$ における C の接線の傾きは $\dfrac{g'(s)}{f'(s)}$ であり，これは $\mathrm{P}(s)$ と $\mathrm{Q}(1-s)$ を通る直線の傾きに一致するため，

$$\frac{g'(s)}{f'(s)} = -\frac{b}{a}\left(\frac{1}{s}-1\right)^r\ \cdots\ (ii)$$

が成り立つ．(i) は任意の $0 < s < 1$ に対して成り立つため，(i) の両辺を s で微分して

$$g'(s) = \frac{br}{as^2}\left(\frac{1}{s}-1\right)^{r-1}(f(s) - as^r) - \frac{b}{a}\left(\frac{1}{s}-1\right)^r (f'(s) - ars^{r-1})\ \cdots\ (iii)$$

を得る．これを (ii) に代入すれば $f(s) = as^{r+1}$ が得られるため，(i) より $g(s) = b(1-s)^{r+1}$ である．故に f, g は $f(t) = at^{r+1}$, $g(t) = b(1-t)^{r+1}$ で与えられる関数である．

(2) $\displaystyle\int_0^a y dx = \int_0^1 b(1-t)^{r+1}\frac{dx}{dt}dt = ab(r+1)\int_0^1 t^r(1-t)^{r+1}dt = ab(r+1)B(r+1, r+2)$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} ay^2 dx = \int_0^1 \pi b^2(1-t)^{2r+2}\frac{dx}{dt}dt = \pi ab^2(r+1)\int_0^1 t^r(1-t)^{2r+2}dt = \pi ab^2(r+1)B(r+1, 2r+3)$

8. (1) $y = f(x)$ と変数変換すれば，$f^{-1}(y) = x$ だから置換積分法と部分積分法により，

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)^n\,dy = \int_a^b x^n f'(x)\,dx = [x^n f(x)]_a^b - \int_a^b (x^n)' f(x)\,dx = b^n f(b) - a^n f(a) - n\int_a^b x^{n-1} f(x)\,dx.$$

(2) $n=2,\ a=t,\ b=\dfrac{1}{e},\ f(x)=-x\log x$ を (1) の等式に代入すれば, 求める体積は

$$\begin{aligned}\int_{f(t)}^{f\left(\frac{1}{e}\right)}\pi x^2\,dy&=\pi\int_{f(t)}^{f\left(\frac{1}{e}\right)}f^{-1}(y)^2\,dy=\frac{\pi}{e^3}+\pi t^3\log t+2\pi\int_t^{\frac{1}{e}}x^2\log x\,dx\\&=\frac{\pi}{e^3}+\pi t^3\log t+2\pi\left[\frac{x^3\log x}{3}\right]_t^{\frac{1}{e}}-2\pi\int_t^{\frac{1}{e}}\frac{x^2}{3}\,dx\\&=\frac{\pi}{e^3}+\pi t^3\log t-\frac{2\pi}{3e^3}-\frac{2\pi t^3\log t}{3}-\frac{2\pi}{9e^3}+\frac{2\pi t^3}{9}=\frac{\pi}{9e^3}+\frac{\pi t^3\log t}{3}+\frac{2\pi t^3}{9}.\end{aligned}$$

(3) $n=2,\ a=s,\ b=t,\ f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ を (1) の等式に代入すれば, 求める体積は

$$\begin{aligned}\int_{f(s)}^{f(t)}\pi x^2\,dy&=\pi\int_{f(s)}^{f(t)}f^{-1}(y)^2\,dy=\pi t(e^t-1)-\pi s(e^s-1)-2\pi\int_s^t(e^x-1)\,dx\\&=\pi t(e^t-1)-\pi s(e^s-1)-2\pi(e^t-t-e^s+s)=\pi(te^t-2e^t+t-se^s+2e^s-s).\end{aligned}$$

(4) $n=2,\ a=s,\ b=t,\ f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}$ を (1) の等式に代入すれば, 求める体積は

$$\begin{aligned}\int_{f(t)}^{f(s)}\pi x^2\,dy&=-\int_{f(s)}^{f(t)}\pi x^2\,dy=-\pi\int_{f(s)}^{f(t)}f^{-1}(y)^2\,dy=-\pi te^{-t}+\pi se^{-s}+2\pi\int_s^t e^{-t}\,dx\\&=-\pi te^{-t}+\pi se^{-s}+2\pi(-e^{-t}+e^{-s})=\pi((s+2)e^{-s}-(t+2)e^{-t}).\end{aligned}$$

(5) $n=2,\ a=0,\ b=t,\ f(x)=e^{-x^2}$ を (1) の等式に代入すれば, 求める体積は

$$\begin{aligned}\int_{f(t)}^{f(0)}\pi x^2\,dy&=-\int_{f(0)}^{f(t)}\pi x^2\,dy=-\pi\int_{f(0)}^{f(t)}f^{-1}(y)^2\,dy=-\pi t^2e^{-t^2}+2\pi\int_0^t xe^{-x^2}\,dx\\&=-\pi t^2e^{-t^2}-\pi e^{-t^2}+\pi=\pi(1-(t^2+1)e^{-t^2}).\end{aligned}$$

9. (1) $f(t)=\sqrt{f(t)^2+g(t)^2}\cos\theta(t),\ g(t)=\sqrt{f(t)^2+g(t)^2}\sin\theta(t)$ の両辺の導関数を考えれば

$$\begin{aligned}f'(t)&=\frac{f'(t)f(t)+g'(t)g(t)}{\sqrt{f(t)^2+g(t)^2}}\cos\theta(t)-\theta'(t)\sqrt{f(t)^2+g(t)^2}\sin\theta(t)\\g'(t)&=\frac{f'(t)f(t)+g'(t)g(t)}{\sqrt{f(t)^2+g(t)^2}}\sin\theta(t)+\theta'(t)\sqrt{f(t)^2+g(t)^2}\cos\theta(t)\end{aligned}$$

だから $f(t)g'(t)-f'(t)g(t)=\theta'(t)(f(t)^2+g(t)^2)$ である. 従って $\theta'(t)=\dfrac{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)}{f(t)^2+g(t)^2}$ が得られる.

(2) 仮定から, 各 $t\in[a,b]$ に対して $f(t)=\sqrt{f(t)^2+g(t)^2}\cos\theta,\ g(t)=\sqrt{f(t)^2+g(t)^2}\sin\theta$ を満たす $\theta\in[\alpha,\beta]$ が一通りに定まるため, $\rho(\theta)=\sqrt{f(t)^2+g(t)^2}$ であり, θ は t の関数と考えられる. このとき, 与えられた図形の面積は (1) の結果から $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\theta(a)}^{\theta(b)}\rho(\theta)^2d\theta=\frac{1}{2}\int_a^b(f(t)^2+g(t)^2)\frac{d\theta}{dt}dt=\frac{1}{2}\int_a^b(f(t)g'(t)-f'(t)g(t))\,dt$ である.

10. (1) $f(t)=(a-b)\cos t+b\cos\left(\dfrac{a-b}{b}t\right),\ g(t)=(a-b)\sin t-b\sin\left(\dfrac{a-b}{b}t\right)$ とおく.

$$f(t)^2+g(t)^2=(a-b)^2+b^2+2b(a-b)\left(\cos t\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right)-\sin t\sin\left(\frac{a-b}{b}t\right)\right)=a^2-2b(a-b)\left(1-\cos\left(\frac{a}{b}t\right)\right)$$

より $a^2-(f(t)^2+g(t)^2)=2b(a-b)\left(1-\cos\left(\dfrac{a}{b}t\right)\right)\geqq 0$ だから t が 0 から $\dfrac{2\pi b}{a}$ まで動くとき, 与えられた曲線は原点を中心とする半径が a の円の内側を点 $\mathrm{A}(0,a)$ から点 $\mathrm{B}\left(a\cos\left(\frac{2\pi b}{a}\right),a\sin\left(\frac{2\pi b}{a}\right)\right)$ まで動く.

$$g'(t)=(a-b)\left(\cos t-\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right)\right)=2(a-b)\sin\left(\frac{a}{2b}t\right)\sin\left(\frac{a-2b}{2b}t\right)$$

であり, $0 < t < \dfrac{2\pi b}{a}$ ならば $0 < \dfrac{a}{2b}t < \pi$, $0 < \dfrac{a-2b}{2b}t < \dfrac{\pi(a-2b)}{a} < \pi$ だから $g'(t) > 0$ となるため, g は区間 $\left[0, \frac{2\pi b}{a}\right]$ で単調に増加する. このことと $g(0) = 0$ より, $0 < t \leqq \dfrac{2\pi b}{a}$ ならば $g(t) > 0$ であることがわかる.

$-1 \leqq \dfrac{f(t)}{\sqrt{f(t)^2 + g(t)^2}} \leqq 1$ だから, 関数 $\theta : \left[0, \frac{2\pi b}{a}\right] \to [0, \pi]$ を $\theta(t) = \cos^{-1} \dfrac{f(t)}{\sqrt{f(t)^2 + g(t)^2}}$ によって定義すれば $f(t) = \sqrt{f(t)^2 + g(t)^2} \cos\theta(t)$ が成り立つ. $g(t) \geqq 0$, $0 \leqq \theta(t) \leqq \pi$ であることから, この等式を $g(t)$ について解けば $g(t) = \sqrt{f(t)^2 + g(t)^2} \sin\theta(t)$ が得られる. ここで $0 < t < \dfrac{2\pi b}{a}$ ならば, 問題 7 の (1) の結果から

$$\theta'(t) = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{f(t)^2 + g(t)^2} = \frac{(a-b)(a-2b)\left(1 - \cos\left(\frac{a}{b}t\right)\right)}{f(t)^2 + g(t)^2} > 0$$

だから θ は狭義単調増加関数である. $\theta(0) = 0$ であり, $\theta\left(\frac{2\pi b}{a}\right) = \dfrac{2\pi b}{a}$ だから $\theta : \left[0, \frac{2\pi b}{a}\right] \to \left[0, \frac{2\pi b}{a}\right]$ は全単射であり, θ の逆関数 $\theta^{-1} : \left[0, \frac{2\pi b}{a}\right] \to \left[0, \frac{2\pi b}{a}\right]$ も連続で, $\left(0, \frac{2\pi b}{a}\right)$ の各点で微分可能である. 故に t は θ の関数とみなせて, 与えられた曲線は極座標表示されるため, 原点 O を始点とする 2 本の半直線 OA, OB と与えられた曲線で囲まれた部分の面積は, 問題 7 の (2) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi b}{a}} (f(t)g'(t) - f'(t)g(t))dt &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi b}{a}} (a-b)(a-2b)\left(1 - \cos\left(\frac{a}{b}t\right)\right)dt = \frac{(a-b)(a-2b)}{2}\left[t - \frac{b}{a}\sin\left(\frac{a}{b}t\right)\right]_0^{\frac{2\pi b}{a}} \\ &= \frac{\pi b(a-b)(a-2b)}{a}\end{aligned}$$

である. 原点 O を始点とする 2 本の半直線 OA, OB と円弧 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq \frac{2\pi b}{a})$ で囲まれた扇形の面積は πab だから, 求める図形の面積は $\pi ab - \dfrac{\pi b(a-b)(a-2b)}{a} = \dfrac{\pi b^2(3a-2b)}{a}$ である.

(2) $f(t) = (a+b)\cos t - b\cos\left(\dfrac{a+b}{b}t\right)$, $g(t) = (a+b)\sin t - b\sin\left(\dfrac{a+b}{b}t\right)$ とおく.

$$f(t)^2 + g(t)^2 = (a+b)^2 + b^2 - 2b(a+b)\left(\cos t\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right) + \sin t\sin\left(\frac{a+b}{b}t\right)\right) = a^2 + 2b(a+b)\left(1 - \cos\left(\frac{a}{b}t\right)\right)$$

より $f(t)^2 + g(t)^2 - a^2 = 2b(a+b)\left(1 - \cos\left(\dfrac{a}{b}t\right)\right) \geqq 0$ だから t が 0 から $\dfrac{2\pi b}{a}$ まで動くとき, 与えられた曲線は原点を中心とする半径が a の円の外側を点 $\mathrm{A}(0, a)$ から点 $\mathrm{B}\left(a\cos\left(\frac{2\pi b}{a}\right), a\sin\left(\frac{2\pi b}{a}\right)\right)$ まで動く.

$$g'(t) = (a+b)\left(\cos t - \cos\left(\frac{a+b}{b}t\right)\right) = 2(a+b)\sin\left(\frac{a}{2b}t\right)\sin\left(\frac{a+2b}{2b}t\right)$$

であり, t が 0 から $\dfrac{2\pi b}{a}$ まで動くとき, $\dfrac{a}{2b}t$ は 0 から π まで動き, $\dfrac{a+2b}{2b}t$ は 0 から $\dfrac{\pi(a+2b)}{a}$ まで動くため, 以下の場合が考えられる.

(i) $0 < b \leqq \dfrac{a}{2}$ の場合：$\pi < \dfrac{\pi(a+2b)}{a} \leqq 2\pi$ であり, 区間 $\left[0, \frac{2\pi b}{a+2b}\right]$ で g は単調に増加し, 区間 $\left[\frac{2\pi b}{a+2b}, \frac{2\pi b}{a}\right]$ で g は単調に減少する. $g(0) = 0$, $g\left(\frac{2\pi b}{a}\right) = a\sin\left(\frac{2\pi b}{a}\right) \geqq 0$ だから, 区間 $0 < t < \dfrac{2\pi b}{a}$ ならば $g(t) > 0$ である. そこで関数 $\theta : \left[0, \frac{2\pi b}{a}\right] \to [0, \pi]$ を $\theta(t) = \cos^{-1} \dfrac{f(t)}{\sqrt{f(t)^2 + g(t)^2}}$ によって定義すれば $f(t) = \sqrt{f(t)^2 + g(t)^2}\cos\theta(t)$ が成り立つ. $g(t) \geqq 0$, $0 \leqq \theta(t) \leqq \pi$ であることから, この等式を $g(t)$ について解けば $g(t) = \sqrt{f(t)^2 + g(t)^2}\sin\theta(t)$ が得られる.

(ii) $\dfrac{a}{2} < b < a$ の場合：$2\pi < \dfrac{\pi(a+2b)}{a} < 3\pi$ であり, 区間 $\left[0, \frac{2\pi b}{a+2b}\right]$ と区間 $\left[\frac{4\pi b}{a+2b}, \frac{2\pi b}{a}\right]$ で g は単調に増加し, 区間 $\left[\frac{2\pi b}{a+2b}, \frac{4\pi b}{a+2b}\right]$ で g は単調に減少する. また, $\pi < \dfrac{2\pi b}{a} < 2\pi$ かつ $\dfrac{3\pi}{4} < \dfrac{3\pi b}{a+2b} < \pi < \dfrac{4\pi b}{a+2b} < \dfrac{4\pi}{3}$ であり,

$$\begin{aligned} g\left(\frac{3\pi b}{a+2b}\right) &= (a+b)\sin\left(\frac{3\pi b}{a+2b}\right) - b\sin\left(3\pi - \frac{3\pi b}{a+2b}\right) = a\sin\left(\frac{3\pi b}{a+2b}\right) > 0 \\ g\left(\frac{4\pi b}{a+2b}\right) &= (a+b)\sin\left(\frac{4\pi b}{a+2b}\right) - b\sin\left(4\pi - \frac{4\pi b}{a+2b}\right) = (a+2b)\sin\left(\frac{4\pi b}{a+2b}\right) < 0 \end{aligned}$$

だから, 上記の g の増減から $g(t_0)=0$ を満たす $t_0\in\left(\frac{3\pi b}{a+2b},\frac{4\pi b}{a+2b}\right)$ がただ 1 つ存在する. さらに $g\left(\frac{2\pi b}{a}\right)=a\sin\left(\frac{2\pi b}{a}\right)<0$ だから, 区間 $\left[0,\frac{2\pi b}{a}\right]$ において $g(t)=0$ を満たす t は 0 と t_0 のみで, $0<t<t_0$ ならば $g(t)>0$, $t_0<t\leqq\dfrac{2\pi b}{a}$ ならば $g(t)<0$ が成り立つ. 一方,

$$f'(t)=(a+b)\left(-\sin t+\sin\left(\frac{a+b}{b}t\right)\right)=2(a+b)\sin\left(\frac{a}{2b}t\right)\cos\left(\frac{a+2b}{2b}t\right)$$

だから, f は区間 $\left[\frac{3\pi b}{a+2b},\frac{4\pi b}{a+2b}\right]$ で f は単調に増加し,

$$f\left(\frac{4\pi b}{a+2b}\right)=(a+b)\cos\left(\frac{4\pi b}{a+2b}\right)-b\cos\left(4\pi-\frac{4\pi b}{a+2b}\right)=a\cos\left(\frac{4\pi b}{a+2b}\right)<0$$

だから $f(t_0)<f\left(\frac{4\pi b}{a+2b}\right)<0$ である. そこで関数 $\theta:\left[0,\frac{2\pi b}{a}\right]\to[0,2\pi]$ を

$$\theta(t)=\begin{cases}\cos^{-1}\dfrac{f(t)}{\sqrt{f(t)^2+g(t)^2}} & 0\leqq t\leqq t_0\\ 2\pi-\cos^{-1}\dfrac{f(t)}{\sqrt{f(t)^2+g(t)^2}} & t_0\leqq t\leqq\frac{2\pi b}{a}\end{cases}$$

によって定義すれば θ は連続であり, $0\leqq t\leqq\dfrac{2\pi b}{a}$ に対して $f(t)=\sqrt{f(t)^2+g(t)^2}\cos\theta(t)$ が成り立つ. この等式の両辺を 2 乗すれば $g(t)^2=(f(t)^2+g(t)^2)\sin^2\theta(t)$ が得られるが, $0\leqq t\leqq t_0$ ならば $0\leqq\theta(t)\leqq\pi$ かつ $g(t)\geqq 0$ であり, $t_0\leqq t\leqq\dfrac{2\pi b}{a}$ ならば $\pi\leqq\theta(t)\leqq 2\pi$ かつ $g(t)\leqq 0$ だから, $g(t)$ と $\sin^2\theta(t)$ は同符号であることから, $0\leqq t\leqq\dfrac{2\pi b}{a}$ に対して $g(t)=\sqrt{f(t)^2+g(t)^2}\sin\theta(t)$ が成り立つ. 従って $\sin(\pi-\theta(t))=\sin\theta(t)=\dfrac{g(t)}{\sqrt{f(t)^2+g(t)^2}}$ であり, $\theta(t_0)=\pi$ だから t が t_0 の近くで $\pi-\theta(t)=\sin^{-1}\dfrac{g(t)}{\sqrt{f(t)^2+g(t)^2}}$ が成り立つため, θ は t_0 でも微分可能である.

ここで $0<t<\dfrac{2\pi b}{a}$ ならば, 上記の (i), (ii) のどちらの場合でも問題 7 の (1) の結果から

$$\theta'(t)=\frac{f'(t)g(t)-f(t)g'(t)}{f(t)^2+g(t)^2}=\frac{(a+b)(a+2b)\left(1-\cos\left(\frac{a}{b}t\right)\right)}{f(t)^2+g(t)^2}>0$$

だから θ は狭義単調増加関数である. $\theta(0)=0$ であり, $\theta\left(\frac{2\pi b}{a}\right)=\dfrac{2\pi b}{a}$ だから $\theta:\left[0,\frac{2\pi b}{a}\right]\to\left[0,\frac{2\pi b}{a}\right]$ は全単射であり, θ の逆関数 $\theta^{-1}:\left[0,\frac{2\pi b}{a}\right]\to\left[0,\frac{2\pi b}{a}\right]$ も連続で, $\left(0,\frac{2\pi b}{a}\right)$ の各点で微分可能である. 故に t は θ の関数とみなせて, 与えられた曲線は極座標表示されるため, 原点を O として, 2 本の半直線 OA, OB と与えられた曲線で囲まれた部分の面積は, 問題 7 の (2) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi b}{a}}(f(t)g'(t)-f'(t)g(t))dt&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi b}{a}}(a+b)(a+2b)\left(1-\cos\left(\frac{a}{b}t\right)\right)dt\\&=\frac{(a+b)(a+2b)}{2}\left[t-\frac{b}{a}\sin\left(\frac{a}{b}t\right)\right]_0^{\frac{2\pi b}{a}}=\frac{\pi b(a+b)(a+2b)}{a}\end{aligned}$$

である. 原点 O を始点とする 2 本の半直線 OA, OB と円弧 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}$ $\left(0\leqq t\leqq\frac{2\pi b}{a}\right)$ で囲まれた扇形の面積は πab だから, 求める図形の面積は $\dfrac{\pi b(a+b)(a+2b)}{a}-\pi ab=\dfrac{\pi b^2(3a+2b)}{a}$ である.

(3) 曲線 $y^2(2a-x)=x^3$ を C とする. C の第一象限に含まれる部分は $y=x\sqrt{\dfrac{x}{2a-x}}$ $(0\leqq x<2a)$ と表されるため, C と直線 $x=2a$ ではさまれた部分と第一象限の共通部分の面積は, $\displaystyle\int_0^{2a}x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$ で与えられる. $t=\sqrt{\dfrac{x}{2a-x}}$ とおけば, $x=\dfrac{2at^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{4at}{(1+t^2)^2}dt$ であり, x が $0\leqq x<2a$ の範囲を動けば, t は 0 以上のすべて

の値をとるため, $\displaystyle\int_0^{2a} x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx = \int_0^{\infty}\frac{8a^2t^4}{(1+t^2)^3}dt$ であり, さらに $t=\tan\theta$ とおけば, $dt = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$, $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ だから, 教科書の 91 ページの公式より $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{8a^2t^4}{(1+t^2)^3}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8a^2\sin^4\theta\, d\theta = 8a^2\frac{3!!}{4!!}\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}$ が得られる. (p,q) が C 上の点ならば, $(-p,q)$ も C 上の点だから, C は x 軸に関して対称である. 従って C と直線 $x=2a$ ではさまれた部分の面積は $3\pi a^2$ である.

(4) 曲線 $x^3+y^3-3axy=0$ を C とする. y 軸と C の交点は原点だけだから, 原点以外の C 上の点 (x,y) に対し, $t=\dfrac{y}{x}$ とおける. このとき $y=tx$ だから, $x^3+y^3-3axy=0$ に代入すると, $x(1+t^3)=3at$ が得られるため, $t\neq -1$ であり, $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$, $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$ が得られる. 上式は $t=0$ の場合, (x,y) は原点を表すため, C は t を媒介変数として $\begin{cases} x=\frac{3at}{1+t^3} \\ y=\frac{3at^2}{1+t^3}\end{cases}$ $(t\neq -1)$ で表される. 原点を中心とする $\dfrac{\pi}{4}$ の回転によって C が写される曲線を C' とすれば, C' は $\begin{cases} x=\frac{3at(1-t)}{\sqrt{2}(1+t^3)} \\ y=\frac{3at}{\sqrt{2}(1-t+t^2)}\end{cases}$ $(t\neq -1)$ によって媒介変数表示される. また, 原点を中心とする $\dfrac{\pi}{4}$ の回転によって直線 $x+y+a=0$ は直線 $y=-\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ に写されるため, C の第 2 象限と第 4 象限にある部分と直線 $x+y+a=0$ ではさまれた部分の面積は C' の第 3 象限と第 4 象限にある部分と直線 $y=-\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ ではさまれた部分の面積に等しい. C は直線 $y=x$ に関して対称だから, C' は y 軸に関して対称である. C' の点 (x,y) が第 4 象限にあるのは, 対応する t が $t<-1$ を満たす場合であり, $t\to-\infty$ のとき $x\to +0$, $t\to -1-0$ のとき $x\to\infty$ だから C' の第 4 象限の部分と y 軸と直線 $y=-\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ で囲まれた部分の面積は, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3a(1-2t-2t^3+t^4)}{\sqrt{2}(1+t^3)^2}$ より $\displaystyle\int_0^{\infty}\left(y-\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right)dx = \int_{-\infty}^{-1}\left(\frac{3at}{\sqrt{2}(1-t+t^2)}+\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\frac{dx}{dt}\,dt = \int_{-\infty}^{-1}\frac{3a^2(1-2t-2t^3+t^4)}{2(1-t+t^2)^3}\,dt \cdots (*)$ で与えられる. ここで, $1-2t-2t^3+t^4 = (t^2-t-2)(t^2-t+1)-3t+3$ より $\dfrac{1-2t-2t^3+t^4}{(1-t+t^2)^3} = \dfrac{t^2-t-2}{(1-t+t^2)^2}+\dfrac{-3t+3}{(1-t+t^2)^3} =$
$\dfrac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} - \dfrac{3}{\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2} + \dfrac{3}{2\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^3} - \dfrac{3\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^3}$ であり, 教科書の問 3.10 の結果から
$\displaystyle\int\frac{3}{2\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^3}\,dt = \frac{2t-1}{4(t^2-t+1)^2}+\frac{2t-1}{2(t^2-t+1)}+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$, $\displaystyle\int\frac{3}{\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}\,dt =$
$\dfrac{2t-1}{t^2-t+1}+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2t-1}{\sqrt{3}}$ より $\displaystyle(*) = \int_{-\infty}^{-1}\frac{3a^2}{2\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)}\,dt - \int_{-\infty}^{-1}\frac{9a^2}{2\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}\,dt +$
$\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{9a^2}{4\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^3}\,dt - \int_{-\infty}^{-1}\frac{9a^2\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2!\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^3}\,dt = \left[\frac{3a^2(t+1)}{4(t^2-t+1)^2}-\frac{3a^2(2t-1)}{4(t^2-t+1)}\right]_{-\infty}^{-1} = \frac{3a^2}{4}$ が得られる.
故に, C' の対称性から求める面積は $\dfrac{3a^2}{2}$ である.

微積分学 I 演習問題　第 15 回　微分方程式

1. 以下の微分方程式の一般解を求めよ．ただし (7), (8), (10) の a は 0 でないとする．

(1) $\dfrac{dy}{dx}=x^n(1+y^2)$　(2) $\dfrac{dy}{dx}=ry\Big(1-\dfrac{y}{K}\Big)$　(3) $\dfrac{dy}{dx}=\cos x(y-a)$　(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2+y}{x}$

(5) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1+y}{1+x}$　(6) $\dfrac{dy}{dx}=(\sin x)y$　(7) $\dfrac{dy}{dx}=b^2-a^2y^2$　(8) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ax(1+y^2)}{y(1+x^2)}$

(9) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y^2}{1+x^2}$　(10) $\dfrac{dy}{dx}=ax^my^n$　(11) $\dfrac{dy}{dx}=-(\tan x)y$　(12) $\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{1+y}{1+x}\right)^2$

2. 以下の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x}$　(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2}$　(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$　(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy+y^2}{x^2+y^2}$

(5) $\dfrac{dy}{dx}=(x+y)^2$　(6) $\dfrac{dy}{dx}=(4x+y+1)^2$

3. 以下の微分方程式の一般解を求めよ．ただし (16) の α はつねに正の値をとる関数とする．

(1) $\dfrac{dy}{dx}=2xy+x$　(2) $\dfrac{dy}{dx}=y+\sin x$　(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x+1}+x+1$　(4) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}+\sin x$

(5) $\dfrac{dy}{dx}=2y+x$　(6) $\dfrac{dy}{dx}=2y+x^2$　(7) $\dfrac{dy}{dx}=-y+\cos x$　(8) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x}{x^2+1}y+\cos x$

(9) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-y+x}{x+1}$　(10) $\dfrac{dy}{dx}=xy+x$　(11) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-1}{x^2}y+1$　(12) $\dfrac{dy}{dx}=-2xy+2x^2+1$

(13) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy+1}{x^2+1}$　(14) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}-1$　(15) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{n}{x}y+x^ne^x$　(16) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}y+k\alpha(x)$

4. 微分方程式 $3\dfrac{d^2y}{dx^2}\dfrac{d^4y}{dx^4}=5\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^2$ の一般解を求めよ．

5. 以下の微分方程式の解のマクローリン展開の 6 次の項まで求めよ．

(1) $(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+(\sin x)y=0$　(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-a(x+b)y=0$

6. 以下の微分方程式の解のマクローリン展開を求めよ．ただし k は 0 以上の整数とする．

(1) $\dfrac{dy}{dx}=2y+1$　(2) $(x+1)\dfrac{dy}{dx}=2xy+x$　(3) $(x+1)\dfrac{dy}{dx}=y+x+1$

(4) $\dfrac{dy}{dx}=y+x(x+1)$　(5) $\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-y=0$　(6) $(1+x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+(a+1)y=0$

(7) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+x^ky=0$　(8) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+ay=0$　(9) $(x^2-1)\dfrac{d^2y}{dx^2}+2x\dfrac{dy}{dx}+2ay=0$

7. (発展問題) 関数 $f:[0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ は連続な導関数をもち，つねに 0 以上の値をとるとする．正の実数 t に対し，x 軸，y 軸，直線 $x=t$ と f のグラフによって囲まれた部分の面積を $S(t)$ とし，点 $(0,f(0))$ から $(t,f(t))$ までの曲線 $y=f(x)$ の長さを $L(t)$ とする．任意の正の実数 t に対して $\dfrac{S(t)}{L(t)}$ が一定の値 a であるとき，関数 f を求めよ．

第 15 回の演習問題の解答

1. (1) 与えられた方程式の両辺に $\dfrac{1}{y^2+1}$ をかければ $\dfrac{1}{y^2+1}\dfrac{dy}{dx} = x^n$ が得られる．この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int \frac{1}{y^2+1}\frac{dy}{dx}dx = \int x^n\,dx$ となり，左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{y^2+1}dy = \tan^{-1} y$, 右辺は $n \neq -1$ ならば $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n = -1$ ならば $\displaystyle\int x^n\,dx = \log|x| + C$ となるため, $\tan^{-1} y = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$, $\tan^{-1} y = \log|x| + C$ $(n = -1)$ が成り立つ．従って $n \neq -1$ ならば $y = \tan\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)$, $n = -1$ ならば $y = \tan(\log|x| + C)$ が求める解である．

(2) つねに値が 0 である定数値関数と, つねに値が K である定数値関数は与えられた微分方程式の解である．それ以外の解を求めるために与えられた方程式の両辺に $\dfrac{K}{y(K-y)}$ をかければ $\dfrac{K}{y(K-y)}\dfrac{dy}{dx} = r$ が得られる．この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int \frac{K}{y(K-y)}\frac{dy}{dx}dx = \int r\,dx$ となり, 左辺は $\displaystyle\int \frac{K}{y(K-y)}\,dy = \int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-K}\right)dy = \log|y| - \log|y-K|$, 右辺は $\displaystyle\int r\,dx = rx + C$ となるため, $\log\left|\dfrac{y}{y-K}\right| = rx + C$ が成り立つ．従って $\left|\dfrac{y}{y-K}\right| = e^{rx+C}$ だから, $\pm e^C$ を改めて C とおけば $\dfrac{y}{y-K} = Ce^{rx}$ が得られ, y について解けば, 解 $y = \dfrac{CKe^{rx}}{Ce^{rx}-1} = \dfrac{CK}{C - e^{-rx}}$ が得られる．

(3) つねに値が a である定数値関数は与えられた微分方程式の解である．それ以外の解を求めるために与えられた方程式の両辺に $\dfrac{1}{y-a}$ をかければ $\dfrac{1}{y-a}\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ が得られる．この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int \frac{1}{y-a}\frac{dy}{dx}dx = \int \cos x\,dx$ となり, 左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{y-a}\,dy = \log|y-a|$, 右辺は $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$ となるため, $\log|y-a| = \sin x + C$ が成り立つ．従って $|y-a| = e^{\sin x + C}$ だから, $\pm e^C$ を改めて C とおいて $y = Ce^{\sin x} + a$ が求める解である．

(4) つねに値が 0 である定数値関数と, つねに値が -1 である定数値関数は与えられた微分方程式の解である．それ以外の解を求めるために与えられた方程式の両辺に $\dfrac{1}{y(y+1)}$ をかければ $\dfrac{1}{y(y+1)}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$ が得られる．この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int \frac{1}{y(y+1)}\frac{dy}{dx}dx = \int \frac{1}{x}\,dx$ となり, 左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{y(y+1)}\,dy = \int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right)dy = \log|y| - \log|y+1|$, 右辺は $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$ となるため, $\log\left|\dfrac{y}{y+1}\right| = \log|x| + C$ が成り立つ．従って $\left|\dfrac{y}{y+1}\right| = e^C|x|$ だから, $\pm e^C$ を改めて C とおけば $\dfrac{y}{y+1} = Cx$ が得られ, y について解けば, 解 $y = \dfrac{Cx}{1-Cx}$ が得られる．

(5) つねに値が -1 である定数値関数は与えられた微分方程式の解である．それ以外の解を求めるために与えられた方程式の両辺に $\dfrac{1}{1+y}$ をかければ $\dfrac{1}{1+y}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{1+x}$ が得られる．この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int\frac{1}{y+1}\frac{dy}{dx}dx = \int\frac{-1}{1+x}\,dx$ となり, 左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{y+1}\,dy = \log|1+y|$, 右辺は $\displaystyle\int \frac{-1}{1+x}\,dx = -\log(1+x) + C$ となるため, $\log|1+y| = -\log|1+x| + C$ が成り立つ．従って $|1+y| = \dfrac{e^C}{|1+x|}$ だから, $\pm e^C$ を改めて C とおけば $1+y = \dfrac{C}{1+x}$ が得られ, $y = \dfrac{C}{1+x} - 1$ が求める解である．

(6) つねに値が 0 である定数値関数は与えられた微分方程式の解である．それ以外の解を求めるために与えられた方程式の両辺に $\dfrac{1}{y}$ をかければ $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = \sin x$ が得られる．この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx = \int \sin x\,dx$ となり, 左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \log|y|$, 右辺は $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ となるため, $\log|y| = -\cos x + C$ が成り立つ．従って $|y| = e^{-\cos x + C}$ だから, $\pm e^C$ を改めて C とおいて $y = Ce^{-\cos x}$ が求める解である．

(7) つねに値が $\dfrac{b}{a}$ である定数値関数と, つねに値が $-\dfrac{b}{a}$ である定数値関数は与えられた微分方程式の解である．それ以外の解を求めるために与えられた方程式の両辺に $\dfrac{1}{b^2 - a^2y^2}$ をかければ $\dfrac{1}{b^2-a^2y^2}\dfrac{dy}{dx} = 1$ が得られる．この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int \frac{1}{b^2-a^2y^2}\frac{dy}{dx}dx = \int dx$ となり, 左辺は $b = 0$ ならば $\displaystyle\int \frac{1}{-a^2y^2}\,dy = \frac{1}{a^2y}$, $b \neq 0$ ならば $\displaystyle\int \frac{1}{b^2-a^2y^2}\,dy = \int \frac{1}{2b}\left(\frac{1}{ay+b} - \frac{1}{ay-b}\right)dy = \frac{\log|ay+b| - \log|ay-b|}{2ab}$, 右辺は $\displaystyle\int dx = x + C$ となるため, $b = 0$ ならば $y = \dfrac{1}{a^2(x+C)}$ が求める解であり, $b \neq 0$ ならば $\log\left|\dfrac{ay+b}{ay-b}\right| = 2ab(x+C)$ が成り立つ．従っ

て $\left|\dfrac{ay+b}{ay-b}\right| = e^{2ab(x+C)}$ だから, $\pm e^{2abC}$ を改めて C とおけば $\dfrac{ay+b}{ay-b} = Ce^{2abx}$ が得られ, y について解けば, 解 $y = \dfrac{b(Ce^{2abx}+1)}{a(Ce^{2abx}-1)}$ が得られる.

(8) 与えられた方程式の両辺に $\dfrac{2y}{y^2+1}$ をかければ $\dfrac{2y}{y^2+1}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2ax}{x^2+1}$ が得られる. この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int \frac{2y}{y^2+1}\frac{dy}{dx}dx = \int \frac{2ax}{x^2+1}dx$ となり, 左辺は $\displaystyle\int \frac{2y}{y^2+1}dy = \log(y^2+1)$, 右辺は $\displaystyle\int \frac{2ax}{x^2+1}dx = a\log(x^2+1)+C$ となるため, $\log(y^2+1) = a\log(x^2+1)+C$ が成り立つ. 従って

$$y^2+1 = e^{a\log(x^2+1)+C} = e^C e^{a\log(x^2+1)} = e^C e^{\log(x^2+1)^a} = e^C(x^2+1)^a$$

だから e^C を改めて C とおいて $y^2 = C(x^2+1)^a - 1$ を得る. 従って求める解は $y = \sqrt{C(x^2+1)^a-1}$ または $y = -\sqrt{C(x^2+1)^a-1}$ である.

(9) 与えられた方程式の両辺に $\dfrac{1}{y^2+1}$ をかければ $\dfrac{1}{y^2+1}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2+1}$ が得られる. この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int \frac{1}{y^2+1}\frac{dy}{dx}dx = \int \frac{1}{x^2+1}dx$ となり, 左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{y^2+1}dy = \tan^{-1}y$, 右辺は $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}dx = \tan^{-1}x + C$ となるため, $\tan^{-1}y = \tan^{-1}x + C$ が成り立つ. 従って $y = \tan(\tan^{-1}x + C)$ が求める解である.

(10) $n > 0$ の場合は, つねに値が 0 である定数値関数は与えられた微分方程式の解である. それ以外の解を求めるために与えられた方程式の両辺に $\dfrac{1}{y^n}$ をかければ $\dfrac{1}{y^n}\dfrac{dy}{dx} = ax^m$ が得られる. この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int \frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}dx = \int ax^m\,dx$ となり, 左辺は $n \neq 1$ ならば $\displaystyle\int \frac{1}{y^n}\,dy = \frac{y^{1-n}}{1-n}$, $n = 1$ ならば $\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \log|y|$ となり, 右辺は $m \neq -1$ ならば $\displaystyle\int ax^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$, $m = -1$ ならば $\displaystyle\int \frac{a}{x}\,dx = a\log|x| + C$ となるため, $m \neq -1$ かつ $n \neq 1$ の場合は $\dfrac{y^{1-n}}{1-n} = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C$ より, $y = \left(\dfrac{1-n}{1+m}x^{m+1} + C\right)^{\frac{1}{1-n}}$, $m = -1$ かつ $n \neq 1$ の場合は $\dfrac{y^{1-n}}{1-n} = \log|x| + C$ より, $y = ((1-n)\log|x| + C)^{\frac{1}{1-n}}$, $m \neq -1$ かつ $n = 1$ の場合は $\log|y| = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C$ より, e^C を改めて C とおけば $y = Ce^{\frac{x^{m+1}}{m+1}}$, $m = -1$ かつ $n = 1$ の場合は $\log|y| = a\log|x| + C$ より $|y| = e^C|x|^a$ だから $\pm e^C$ を改めて C とおけば $y = C|x|^a$ が求める解である.

(11) つねに値が 0 である定数値関数は与えられた微分方程式の解である. それ以外の解を求めるために与えられた方程式の両辺に $\dfrac{1}{y}$ をかければ $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = -\tan x$ が得られる. この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx = \int(-\tan x)\,dx$ となり, 左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \log|y|$, 右辺は $\displaystyle\int(-\tan x)\,dx = \log\cos x + C$ となるため, $\log|y| = \log\cos x + C$ が成り立つ. 従って $|y| = e^{\log\cos x + C}$ だから, $\pm e^C$ を改めて C とおいて $y = C\cos x$ が求める解である.

(12) つねに値が -1 である定数値関数は与えられた微分方程式の解である. それ以外の解を求めるために与えられた方程式の両辺に $\dfrac{1}{(1+y)^2}$ をかければ $\dfrac{1}{(1+y)^2}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ が得られる. この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int \frac{1}{(y+1)^2}\frac{dy}{dx}dx = \int \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$ となり, 左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{(y+1)^2}\,dy = -\frac{1}{1+y}$, 右辺は $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = -\frac{1}{1+x} - C$ となるため, $-\dfrac{1}{1+y} = -\dfrac{1}{1+x} - C$ が成り立つ. 従って $1+y = \dfrac{1+x}{1-C(1+x)}$ だから, $y = \dfrac{C+(C+1)x}{1-C(1+x)}$ が求める解である.

2. (1) $z = \dfrac{y}{x}$ とおけば $y = xz$ だから $\dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx}$ である. これを与えられた方程式に代入すれば, $z + x\dfrac{dz}{dx} = 1 + z$ より $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{x}$ が得られる. この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int \frac{dz}{dx}dx = \int \frac{1}{x}\,dx$ となり, 左辺は z, 右辺は $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$ となるため, $z = \log|x| + C$ が成り立つ. 従って $\dfrac{y}{x} = \log|x| + C$ だから, $y = x(\log x + C)$ が求める解である.

(2) $z = \dfrac{y}{x}$ とおけば $y = xz$ だから $\dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx}$ である. これを与えられた方程式に代入すれば, $z + x\dfrac{dz}{dx} = 1 + z + z^2$ より $\dfrac{1}{1+z^2}\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{x}$ が得られる. この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int \frac{1}{1+z^2}\frac{dz}{dx}dx = \int \frac{1}{x}\,dx$ となり, 左辺

は $\displaystyle\int \frac{1}{1+z^2}\,dz = \tan^{-1} z$, 右辺は $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$ となるため, $\tan^{-1} z = \log|x| + C$ が成り立つ．従って $\dfrac{y}{x} = z = \tan^{-1}(\log|x| + C)$ だから, $y = x\tan^{-1}(\log|x| + C)$ が求める解である．

(3) $z = \dfrac{y}{x}$ とおけば $y = xz$ だから $\dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx}$ である．これを与えられた方程式に代入すれば, $z + x\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{z} + z$ より $2z\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{2}{x}$ が得られる．この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int 2z\frac{dz}{dx}dx = \int \frac{2}{x}\,dx$ となり, 左辺は $\displaystyle\int 2z\,dz = z^2$, 右辺は $\displaystyle\int \frac{2}{x}\,dx = 2\log|x| + C$ となるため, $z^2 = 2\log|x| + C$ が成り立つ．従って $\dfrac{y}{x} = z = \pm\sqrt{2\log|x| + C}$ だから, $y = x\sqrt{\log x + C}$, $y = -x\sqrt{\log x + C}$ が求める解である．

(4) $z = \dfrac{y}{x}$ とおけば $y = xz \cdots (i)$ だから $\dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx} \cdots (ii)$ である．(i), (ii) を与えられた方程式に代入すれば $\dfrac{1+z^2}{z^2-z^3}\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{x} \cdots (ii)$ が得られる．$\dfrac{1+z^2}{z^2-z^3} = \dfrac{a}{z} + \dfrac{b}{z^2} + \dfrac{c}{z-1}$ とおけば, この右辺は $\dfrac{-(a+c)z^2 + (a-b)z + b}{z^2 - z^3}$ に等しいため, $a = b = 1$, $c = -2$ だから $\displaystyle\int \frac{1+z^2}{z^2-z^3}dz = \int\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z-1}\right)dz = \log|z| - \frac{1}{z} - 2\log|z-1|$. 故に (iii) の両辺を x で積分すれば, C を任意の定数として, $\log|z| - \dfrac{1}{z} - 2\log|z-1| = \log|x| + C$ が得られる．この等式に $z = \dfrac{y}{x}$ を代入すれば, 与えられた微分方程式の解は, C を任意の定数として, $\log|y| - \dfrac{x}{y} - 2\log|y-x| = C$ から定まる陰関数であることがわかる．

(5) $z = x + y$ とおけば $y = z - x$ だから $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx} - 1$ である．これを与えられた方程式に代入すれば, $\dfrac{dz}{dx} - 1 = z^2$ より $\dfrac{1}{1+z^2}\dfrac{dz}{dx} = 1$ が得られる．この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int \frac{1}{1+z^2}\frac{dz}{dx}dx = \int dx$ となり, 左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{1+z^2}\,dz = \tan^{-1} z$, 右辺は $\displaystyle\int dx = x + C$ となるため, $\tan^{-1} z = x + C$ が成り立つ．従って $x + y = z = \tan(x + C)$ だから, $y = \tan(x + C) - x$ が求める解である．

(6) $z = 4x + y + 1$ とおけば $y = z - 4x - 1$ だから $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx} - 4$ である．これを与えられた方程式に代入すれば, $\dfrac{dz}{dx} - 4 = z^2$ より $\dfrac{1}{4+z^2}\dfrac{dz}{dx} = 1$ が得られる．この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int \frac{2}{4+z^2}\frac{dz}{dx}dx = \int 2dx$ となり, 左辺は $\displaystyle\int \frac{2}{4+z^2}\,dz = \tan^{-1}\frac{z}{2}$, 右辺は $\displaystyle\int dx = x + C$ となるため, $\tan^{-1}\dfrac{z}{2} = x + C$ が成り立つ．従って $4x + y + 1 = z = 2\tan(x + C)$ だから, $y = 2\tan(x + C) - 4x - 1$ が求める解である．

3. (1) $\displaystyle\int 2x\,dx = x^2$, $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$ より, 求める解は $y = e^{x^2}\left(-\dfrac{1}{2}e^{2x} + C\right) = Ce^{x^2} - \dfrac{1}{2}$ である．

(2) $\displaystyle\int dx = x$, $\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)$ より, 求める解は $y = e^x\left(-\dfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + C\right) = Ce^x - \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x)$ である．

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x+1}dx = \log|1+x|$, $\displaystyle\int e^{-\log|1+x|}(x+1)\,dx = \int \frac{1+x}{|1+x|}\,dx = |1+x|$ より, 求める解は $y = e^{\log|1+x|}(|1+x| + C) = (1+x)^2 + C|1+x|$ である．

(4) $\displaystyle\int \frac{-1}{x}dx = -\log|x|$, $\displaystyle\int e^{\log|x|}\sin x\,dx = \int |x|\sin x\,dx = \begin{cases} \sin x - x\cos x & x \geqq 0 \\ -\sin x + x\cos x & x \leqq 0 \end{cases}$ であり,

$e^{-\log|x|} = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ -\frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$ であることに注意すれば, 求める解は $y = \dfrac{\sin x - x\cos x + C}{x}$ である．

(5) $\displaystyle\int 2dx = 2x$, $\displaystyle\int xe^{-2x}\,dx = -\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$ より, 求める解は
$y = e^{2x}\left(-\dfrac{x}{2}e^{-2x} - \dfrac{1}{4}e^{-2x} + C\right) = Ce^{2x} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}$ である．

(6) $\displaystyle\int 2dx = 2x$, $\displaystyle\int x^2e^{-2x}\,dx = -\frac{x^2}{2}e^{-2x} - \frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$ より, 求める解は
$y = e^{2x}\left(-\dfrac{x^2}{2}e^{-2x} - \dfrac{x}{2}e^{-2x} - \dfrac{1}{4}e^{-2x} + C\right) = Ce^{2x} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}$ である．

(7) $\displaystyle\int(-1)dx = -x$, $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x)$ より, 求める解は

$y=e^{-x}\left(\dfrac{e^x}{2}(\cos x+\sin x)+C\right)=Ce^{-x}-\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin x)$ である.

(8) $\displaystyle\int\left(-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=-\log(1+x^2)$, $\displaystyle\int e^{\log(1+x^2)}\cos x\,dx=\int(1+x^2)\cos x\,dx=(x^2-1)\sin x+2x\cos x$ より, 求める解は $y=e^{-\log(1+x^2)}\big((x^2-1)\sin x+2x\cos x+C\big)=\dfrac{C}{1+x^2}+\dfrac{(x^2-1)\sin x+2x\cos x}{1+x^2}$ である.

(9) $\displaystyle\int\left(-\frac{1}{x+1}\right)dx=-\log|1+x|$, $\displaystyle\int\frac{xe^{\log|x+1|}}{x+1}dx=\int\frac{x|x+1|}{x+1}dx=\frac{1}{2}(x-1)|x+1|$ より, 求める解は $y=e^{-\log|1+x|}\left(\dfrac{1}{2}(x-1)|x+1|+C\right)=\dfrac{C}{|1+x|}+\dfrac{1}{2}(x-1)$ である.

(10) $\displaystyle\int x\,dx=\frac{x^2}{2}$, $\displaystyle\int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=-e^{-\frac{x^2}{2}}$ より, 求める解は $y=e^{\frac{x^2}{2}}\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}+C\right)=Ce^{\frac{x^2}{2}}-1$ である.

(11) $\displaystyle\int\frac{2x-1}{x^2}dx=2\log|x|+\frac{1}{x}$, $\displaystyle\int e^{-2\log|x|-\frac{1}{x}}dx=\int\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx=e^{-\frac{1}{x}}$ より, 求める解は $y=e^{2\log|x|+\frac{1}{x}}\left(e^{-\frac{1}{x}}+C\right)=Cx^2e^{\frac{1}{x}}+x^2$ である.

(12) $\displaystyle\int(-2x)\,dx=-x^2$, $\displaystyle\int e^{x^2}(2x^2+1)dx=xe^{x^2}$ より, 求める解は $y=e^{-x^2}\left(xe^{x^2}+C\right)=Ce^{-x^2}+x$ である.

(13) $\displaystyle\int\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\log(x^2+1)$ であり, $x=\tan\theta$ と変数変換を行えば, $\displaystyle\int\frac{e^{-\frac{1}{2}\log(x^2+1)}}{x^2+1}dx=\int(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}dx=\int(\tan^2\theta+1))^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int\cos\theta\,d\theta=\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ より, 求める解は $y=e^{\frac{1}{2}\log(x^2+1)}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C\right)=C\sqrt{x^2+1}+x$ である.

(14) $\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=\log|x|$, $\displaystyle\int\left(-e^{-\log|x|}\right)dx=-\int\frac{1}{|x|}dx=\begin{cases}-\log|x| & x>0\\ \log|x| & x<0\end{cases}$ より, $e^{\log|x|}=\begin{cases}x & x>0\\ -x & x<0\end{cases}$ であることに注意すれば, 求める解は $y=-x\log|x|+C|x|$ である.

(15) $\displaystyle\int\frac{n}{x}dx=n\log|x|$, $\displaystyle\int e^{-n\log|x|}x^ne^xdx=\begin{cases}e^x & x>0\\ -e^x & x<0\end{cases}$ より, $e^{n\log|x|}=|x|^n=\begin{cases}x^n & x>0\\ (-x)^n & x<0\end{cases}$ であることに注意すれば, 求める解は $y=\begin{cases}Cx^n+x^ne^x & x>0\\ C(-x)^n-(-x)^ne^x & x<0\end{cases}$ である.

(16) $\displaystyle\int\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}dx=\log\alpha(x)$, $\displaystyle\int e^{-\log\alpha(x)}k\alpha(x)\,dx=\int k\,dx=kx$ より, 求める解は $y=e^{\log\alpha(x)}(kx+C)=\alpha(x)(kx+C)$ である.

4. $z=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とおけば z は $3z\dfrac{d^2z}{dx^2}=5\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2$ を満たす. z が定数値関数の場合は, 上の方程式の解である. z が定数値関数の場合でない場合, 上の方程式の両辺を $z\dfrac{dz}{dx}$ で割った方程式 $\dfrac{3}{\frac{dz}{dx}}\dfrac{d^2z}{dx^2}=\dfrac{5}{z}\dfrac{dz}{dx}$ の両辺を積分すれば $3\log\left|\dfrac{dz}{dx}\right|=5\log|z|+c$ となり $\dfrac{dz}{dx}=Az^{\frac{5}{3}}$ という形になる. さらに $\dfrac{1}{z^{\frac{5}{3}}}\dfrac{dz}{dx}=A$ の両辺を積分すれば $-\dfrac{3}{2z^{\frac{2}{3}}}=Ax+B$ が得られ, 任意定数を置き換えれば $\dfrac{d^2y}{dx^2}=z=\pm(ax+b)^{-\frac{3}{2}}$ となる. $a=0$ の場合は y は x の 2 次関数であり, $a\neq0$ の場合は $\dfrac{dy}{dx}=\pm\dfrac{2}{a\sqrt{ax+b}}+c$, $y=\pm\dfrac{4\sqrt{ax+b}}{a^2}+cx+d$ が得られる. 以上から, 与えられた微分方程式の解は 2 次関数 ax^2+bx+c であるか, $\sqrt{ax+b}+cx+d$ または $-\sqrt{ax+b}+cx+d$ という形の関数である.

5. 与えられた微分方程式の解のマクローリン展開を $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ とおけば, 以下の等式が成り立つ.

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\ \cdots(i),\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n\ \cdots(ii)$$

(1) $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ と (ii) を与えられた方程式に代入して, $(1-x)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$ が成り

立つように a_n を定めればよい．上式の左辺は $2a_2+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}((n+1)(n+2)a_{n+2}-n(n+1)a_{n+1}+a_n)x^n$ に等しいため, $2a_2+a_0=0$, $(n+1)(n+2)a_{n+2}-n(n+1)a_{n+1}+a_n=0$ $(n\geqq 1)$ が得られる．従って $a_0=\alpha$, $a_1=\beta$ とおけば, $a_2=-\frac{\alpha}{2}$, $a_{n+2}=\frac{n(n+1)a_{n+1}-a_n}{(n+1)(n+2)}$ より, $a_3=-\frac{\alpha}{6}-\frac{\beta}{6}$, $a_4=-\frac{\alpha}{24}-\frac{\beta}{12}$, $a_5=-\frac{\alpha}{60}-\frac{\beta}{24}$, $a_6=-\frac{7\alpha}{720}-\frac{\beta}{40}$ が得られる．故に 与えられた方程式の解のマクローリン展開は以下で与えられる．

$$y=\alpha\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24}-\frac{x^5}{60}-\frac{7x^6}{720}-\cdots\right)+\beta\left(x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^5}{24}-\frac{x^6}{40}-\cdots\right)$$

(2) $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ と (ii) を与えられた方程式に代入して, $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)=0$ が成り立つように a_n を定めればよい．上式の左辺は $2a_2+\sum_{n=1}^{\infty}\left((n+1)(n+2)a_{n+2}+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^ia_{n-2i-1}}{(2i+1)!}\right)x^n$ に等しいため, $a_2=0$ であり $n\geqq 1$ ならば $a_{n+2}=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^{i+1}a_{n-2i-1}}{(n+1)(n+2)(2i+1)!}$ が成り立つ．$a_0=\alpha$, $a_1=\beta$ とおけば, $a_3=-\frac{\alpha}{6}$, $a_4=-\frac{\beta}{12}$, $a_5=\frac{\alpha}{120}$, $a_6=\frac{\alpha}{180}+\frac{\beta}{180}$ だから, 与えられた方程式の解のマクローリン展開は以下で与えられる．

$$y=\alpha\left(1-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{180}+\cdots\right)+\beta\left(x-\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{180}+\cdots\right)$$

(3) $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ と (ii) を与えられた方程式に代入して, $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n-a(x+b)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$ が成り立つように a_n を定めればよい．上式の左辺は $2a_2-aba_0+\sum_{n=1}^{\infty}((n+1)(n+2)a_{n+2}-aa_{n-1}-aba_n)x^n$ に等しいため, $2a_2-ba_0=0$, $a_{n+2}=\frac{aa_{n-1}+aba_n}{(n+1)(n+2)}$ $(n\geqq 1)$ が得られる．$a_0=\alpha$, $a_1=\beta$ とおけば, $a_2=\frac{\alpha ab}{2}$ であり, $a_3=\frac{\alpha a}{6}+\frac{\beta ab}{6}$, $a_4=\frac{\alpha a^2b^2}{24}+\frac{\beta a}{12}$, $a_5=\frac{\alpha a^2b}{30}+\frac{\beta a^2b^2}{120}$, $a_6=\frac{\alpha(4a^2+a^3b^3)}{720}+\frac{\beta a^2b}{120}$ だから, 与えられた方程式の解のマクローリン展開は以下でで与えられる．

$$y=\alpha\left(1+\frac{ab}{2}x^2+\frac{a}{6}x^3+\frac{a^2b^2}{24}x^4+\frac{a^2b}{30}x^5+\frac{4a^2+a^3b^3}{720}x^6+\cdots\right)+\beta\left(x+\frac{ab}{6}x^3+\frac{\beta a^2b^2}{120}x^4+\frac{a^2b^2}{120}x^5+\frac{a^2b}{120}x^6+\cdots\right)$$

6. 与えられた微分方程式の解のマクローリン展開を $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ とおけば, 以下の等式が成り立つ．

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\ \cdots(i),\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n\ \cdots(ii)$$

(1) $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ と (i) を与えられた方程式に代入して, $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^n=1$ が成り立つように a_n を定めればよい．上式の左辺は $\sum_{n=0}^{\infty}((n+1)a_{n+1}-2a_n)x^n$ に等しいため, 両辺の x^n の係数を比較すれば, $a_1-2a_0=1$, $(n+1)a_{n+1}-2a_n=0$ $(n\geqq 1)$ が得られる．従って $a_1=c$ とおけば, $a_0=\frac{c-1}{2}$, $a_{n+1}=\frac{2}{n+1}a_n$ $(n\geqq 1)$ だから $a_n=\frac{2}{n}a_{n-1}=\frac{2}{n}\frac{2}{n-1}a_{n-2}=\cdots=\frac{2^{n-1}}{n!}a_1=\frac{2^{n-1}c}{n!}$ が得られる．以上から解のマクローリン展開は $\frac{c-1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}c}{n!}x^n$ で与えられる．

(2) 与えられた方程式の両辺を $x+1$ で割れば $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x+1}y+\frac{x}{x+1}$ だから, $\int\frac{2x}{x+1}\,dx=2x-2\log|x+1|$, $\int e^{-2x+2\log|x+1|}\frac{x}{x+1}\,dx=\int e^{-2x}(x^2+x)\,dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2+x)-\frac{1}{4}e^{-2x}(2x+1)-\frac{1}{4}e^{-2x}=-\frac{e^{-2x}}{2}(x+1)^2$ よ

り，求める解は $y = e^{2x-2\log|x+1|}\left(-\frac{e^{-2x}}{2}(x+1)^2+C\right) = \frac{Ce^{2x}}{(x+1)^2}-\frac{1}{2}$ である． ここで，$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$，$\frac{1}{(x+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$ だから，上で得た解のマクローリン展開は以下で与えられる．

$y = C\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2^i}{i!}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(j+1)x^j\right)-\frac{1}{2} = C-\frac{1}{2}+C\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{2^i}{i!}(-1)^{n-i}(n-i+1)\right)x^n$

(3) 与えられた方程式の両辺を $x+1$ で割れば $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1}y+1$ だから，$\int\frac{1}{x+1}\,dx = \log|x+1|$，$\int e^{-\log|x+1|}\,dx = \int\frac{1}{|x+1|}\,dx = \log(x+1)$ $(x > -1)$ より，求める解は $x > -1$ の範囲では $y = e^{\log|x+1|}(\log(x+1)+C) = C(x+1)+(x+1)\log(x+1)$ で与えられる．ここで，$\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ だから，上で得た解のマクローリン展開は $y = C(x+1)+(x+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = C+(C+1)x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$ で与えられる．

(4) $\int dx = x$，$\int e^{-x}x(x+1)\,dx = -e^{-x}(x^2+x)-e^{-x}(2x+1)-2e^{-x} = -e^{-x}(x^2+3x+3)$ より，求める解は $y = e^x(-e^{-x}(x^2+3x+3)+C) = Ce^x-x^2-3x-3$ である．ここで，$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ だから，上で得た解のマクローリン展開は $y = C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-x^2-3x-3 = C-3+(C-3)x+\left(\frac{C}{2}-1\right)x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ で与えられる．

(5) $y = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ と (i), (ii) を与えられた方程式に代入して，

$$\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = 0$$

が成り立つように a_n を定めればよい．上式の左辺は $-a_0+2a_2+6a_3x+\sum_{n=2}^{\infty}((n+1)(n+2)a_{n+2}-\frac{1}{2}(n-2)(n-1)a_n)x^n$ に等しいため，$-a_0+2a_2 = 6a_3 = 0$, $(n+1)(n+2)a_{n+2}-\frac{1}{2}(n-2)(n-1)a_n = 0$ $(n \geqq 2)$ が得られる．$a_3 = 0$ であり，$n \geqq 2$ ならば $a_{n+2} = \frac{(n-2)(n-1)}{2(n+1)(n+2)}a_n$ だから，$a_4 = 0$ が得られ，帰納的に $n \geqq 3$ ならば $a_n = 0$ であることが示される．従って与えられた方程式の解のマクローリン展開は，$a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$ とおけば，$y = \alpha\left(1+\frac{x^2}{2}\right)+\beta x$ で与えられる．

(6) $y = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ と (i), (ii) を与えられた方程式に代入して，

$$(1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n-x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+(a+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = 0$$

が成り立つように a_n を定めればよい．上式の左辺は

$$4a_0+2a_2+(3a_1+6a_3)x+\sum_{n=2}^{\infty}((n+1)(n+2)a_{n+2}+((n-1)^2+a)a_n)x^n$$

に等しいため，$4a_0+2a_2 = 3a_1+6a_3 = 0$, $(n+1)(n+2)a_{n+2}+((n-1)^2+a)a_n = 0$ $(n \geqq 2)$ が得られる．$a_0 = \alpha$,

$a_1=\beta$ とおけば, $a_2=-2\alpha$, $a_3=-\dfrac{\beta}{2}$ であり, $a_{n+2}=-\dfrac{(n-1)^2+a}{(n+1)(n+2)}a_n$ だから,

$$\begin{aligned}
a_{2n}&=-\frac{(2n-3)^2+a}{(2n)(2n-1)}a_{2(n-1)}=(-1)^2\frac{((2n-3)^2+a)((2n-5)^2+a)}{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)}a_{2(n-2)}=\cdots\\
&=(-1)^{n-1}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}((2n-2i-1)^2+a)}{(2n)(2n-1)\cdots 4\cdot 3}a_2=\frac{4\alpha(-1)^n}{(2n)!}\prod_{i=1}^{n-1}((2i-1)^2+a)\\
a_{2n+1}&=-\frac{(2n-2)^2+a}{(2n+1)(2n)}a_{2(n-1)+1}=(-1)^2\frac{((2n-2)^2+a)((2n-4)^2+a)}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)}a_{2(n-2)+1}=\cdots\\
&=(-1)^{n-1}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}((2n-2i)^2+a)}{(2n+1)(2n)\cdots 5\cdot 4}a_3=\frac{3\beta(-1)^n}{(2n+1)!}\prod_{i=1}^{n-1}((2i)^2+a)
\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って与えられた方程式の解のマクローリン展開は以下で与えられる.

$$y=\alpha\left(1-2x^2+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^n}{(2n)!}\prod_{i=1}^{n-1}((2i-1)^2+a)\right)x^{2n}\right)+\beta\left(x-\frac{1}{2}x^3+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3(-1)^n}{(2n+1)!}\prod_{i=1}^{n-1}((2i)^2+a)\right)x^{2n+1}\right)$$

(7) $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ と (ii) を与えられた方程式に代入して, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+x^k\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$ が成り立つように a_n を定めればよい. 上式の左辺は $\sum\limits_{n=0}^{k-1}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+\sum\limits_{n=k}^{\infty}((n+1)(n+2)a_{n+2}+a_{n-k})x^n$ に等しいため, $i=2,3,\ldots,k+1$ に対して $a_i=0$ であり, $n\geqq k$ ならば $(n+1)(n+2)a_{n+2}+a_{n-k}=0$ である. $a_0=\alpha$, $a_1=\beta$ とおけば, $a_{n+k+2}=-\dfrac{1}{(n+k+2)(n+k+1)}a_n$ だから,

$$\begin{aligned}
a_{(k+2)n}&=\frac{-a_{(k+2)(n-1)}}{((k+2)n)((k+2)n-1)}=\frac{(-1)^2a_{(k+2)(n-2)}}{((k+2)n)((k+2)n-1)((k+2)(n-1))((k+2)(n-1)-1)}=\cdots\\
&=\frac{(-1)^na_0}{((k+2)n)((k+2)n-1)\cdots(k+2)(k+1)}=\frac{\alpha(-1)^n}{(k+2)^nn!\prod\limits_{i=1}^{n}((k+2)i-1)}\\
a_{(k+2)n+1}&=\frac{-a_{(k+2)(n-1)+1}}{((k+2)n+1)((k+2)n)}=\frac{(-1)^2a_{(k+2)(n-2)+1}}{((k+2)n+1)((k+2)n)((k+2)(n-1)+1)((k+2)(n-1))}=\cdots\\
&=\frac{(-1)^na_1}{((k+2)n+1)((k+2)n)\cdots(k+3)(k+2)}=\frac{\beta(-1)^n}{(k+2)^nn!\prod\limits_{i=1}^{n}((k+2)i+1)}\\
a_{(k+2)n+l}&=0\quad(l=2,3,\ldots,k+1)
\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って与えられた方程式の解のマクローリン展開は以下で与えられる.

$$y=\alpha\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(k+2)^nn!\prod\limits_{i=1}^{n}((k+2)i-1)}\right)x^{(k+2)n}\right)+\beta\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(k+2)^nn!\prod\limits_{i=1}^{n}((k+2)i+1)}\right)x^{(k+2)n+1}\right)$$

(8) $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, (i), (ii) を与えられた方程式に代入し, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n-x\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}aa_nx^n=0$ が成り立つように a_n を定めればよい. 上式の左辺は $na_0+2a_2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}((n+1)(n+2)a_{n+2}-(n-a)a_n)x^n$ に等しいため, $aa_0+2a_2=0$, $(n+1)(n+2)a_{n+2}-(n-a)a_n=0$ $(n\geqq 1)$ が得られる. $a_0=\alpha$, $a_1=\beta$ とおけば, $a_2=-\dfrac{a\alpha}{2}$

であり, $a_{n+2} = \dfrac{n-a}{(n+1)(n+2)}a_n$ だから,

$$a_{2n} = \frac{(2n-a-2)a_{2(n-1)}}{(2n)(2n-1)} = \frac{(2n-a-2)(2n-a-4)a_{2(n-2)}}{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)} = \cdots = \frac{a_2 \prod_{i=1}^{n-1}(2n-a-2i)}{(2n)(2n-1)\cdots 4\cdot 3} = \frac{\alpha}{(2n)!}\prod_{i=0}^{n-1}(2i-a)$$

$$a_{2n+1} = \frac{(2n-a-1)a_{2(n-1)+1}}{(2n+1)(2n)} = \frac{(2n-a-1)(2n-a-3)a_{2(n-2)+1}}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)} = \cdots = \frac{a_1 \prod_{i=1}^{n}(2n-a-2i+1)}{(2n+1)(2n)\cdots 3\cdot 2}$$
$$= \frac{\beta}{(2n+1)!}\prod_{i=0}^{n-1}(2i-a+1)$$

が成り立つ. 従って与えられた方程式の解のマクローリン展開は以下で与えられる.

$$y = \alpha\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n)!}\prod_{i=0}^{n-1}(2i-a)\right)x^{2n}\right) + \beta\left(x + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)!}\prod_{i=0}^{n-1}(2i-a+1)\right)x^{2n+1}\right)$$

(9) $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と (i), (ii) を与えられた方程式に代入し,

$$(x^2-1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + 2x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}2aa_nx^n = 0$$

が成り立つように a_n を定めればよい. 上式の左辺は

$$2aa_0 - 2a_2 + ((2a+2)a_1 - 6a_3)x + \sum_{n=2}^{\infty}(n(n-1)a_n - (n+1)(n+2)a_{n+2} + 2na_n + 2aa_n)x^n$$

に等しいため, $2aa_0 - 2a_2 = (2a+2)a_1 - 6a_3 = 0$, $(n+1)(n+2)a_{n+2} - (n(n+1)+2a)a_n = 0$ $(n \geqq 2)$ が得られる. $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$ とおけば, $a_2 = a\alpha$, $a_3 = \dfrac{\beta(a+1)}{3}$ であり, $a_{n+2} = \dfrac{n(n+1)+2a}{(n+1)(n+2)}a_n$ だから,

$$a_{2n} = \frac{((2n-2)(2n-1)+2a)a_{2(n-1)}}{(2n)(2n-1)} = \frac{((2n-2)(2n-1)+2a)((2n-4)(2n-3)+2a)a_{2(n-2)}}{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)} = \cdots$$
$$= \frac{a_2 \prod_{i=1}^{n-1}((2n-2i)(2n-2i+1)+2a)}{(2n)(2n-1)\cdots 4\cdot 3} = \frac{\alpha}{(2n)!}\prod_{i=0}^{n-1}((2i)(2i+1)+2a)$$
$$a_{2n+1} = \frac{((2n)(2n-1)+2a)a_{2(n-1)+1}}{(2n+1)(2n)} = \frac{((2n)(2n-1)+2a)((2n-2)(2n-3)+2a)a_{2(n-2)+1}}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)} = \cdots$$
$$= \frac{a_3 \prod_{i=0}^{n-2}((2n-2i)(2n-2i-1)+2a)}{(2n+1)(2n)\cdots 5\cdot 4} = \frac{\beta}{(2n+1)!}\prod_{i=1}^{n}((2i)(2i-1)+2a)$$

が成り立つ. 従って与えられた方程式の解のマクローリン展開は以下で与えられる.

$$y = \alpha\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n)!}\prod_{i=0}^{n-1}((2i)(2i+1)+2a)\right)x^{2n}\right) + \beta\left(x + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)!}\prod_{i=1}^{n}((2i)(2i-1)+2a)\right)x^{2n+1}\right)$$

7. $S(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,dx$, $L(t) = \displaystyle\int_0^t \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$ だから, 任意の正の実数 t に対して $S(t) = aL(t)$ が成り立つならば, 等式 $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = a\int_0^x \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt$ の両辺を x の関数とみなして, この両辺の関数の導関数を考えると, 微積分学の基本定理より, $f(x) = a\sqrt{1+f'(x)^2}$ が得られる. 従って $f'(x) = \pm\dfrac{1}{a}\sqrt{f(x)^2-a^2}$ だから, $\alpha = \pm a$ とおけば, f は微分方程式 $\alpha\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{y^2-\alpha^2}$ の解である. このとき, $\displaystyle\int \frac{\alpha}{\sqrt{y^2-\alpha^2}}dy = \int dx$ であり, こ

の左辺は $\alpha\log\left|y+\sqrt{y^2-\alpha^2}\right|$ に等しいため，$\alpha\log\left|y+\sqrt{y^2-\alpha^2}\right| = x+C$ を満たす定数 C が存在する．故に $y+\sqrt{y^2-\alpha^2} = \pm e^{\frac{x}{\alpha}}e^{\frac{C}{\alpha}}$ だから，$b=\pm e^{\frac{C}{\alpha}}$ とおけば $\sqrt{y^2-\alpha^2} = be^{\frac{x}{\alpha}} - y$ だから，$-\alpha^2 = b^2e^{\frac{2x}{\alpha}} - 2be^{\frac{x}{\alpha}}y$ が得られるため，$f(x) = \dfrac{\alpha}{2}\left(\dfrac{b}{\alpha}e^{\frac{x}{\alpha}} + \dfrac{\alpha}{b}e^{-\frac{x}{\alpha}}\right) = \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{b}{a}e^{\pm\frac{x}{a}} + \dfrac{a}{b}e^{\mp\frac{x}{a}}\right)$ (複号同順) である．従って $f(x) = \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{b}{a}e^{\frac{x}{a}} + \dfrac{a}{b}e^{-\frac{x}{a}}\right)$ の場合は $p=\dfrac{b}{a}$, $q=\dfrac{a}{b}$ とおき，$f(x) = \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{b}{a}e^{-\frac{x}{a}} + \dfrac{a}{b}e^{\frac{x}{a}}\right)$ の場合は $p=\dfrac{a}{b}$, $q=\dfrac{b}{a}$ とおけば，f は $pq=1$ を満たす正の実数 p, q に対して，$f(x) = \dfrac{a}{2}\left(pe^{\frac{x}{a}} + qe^{-\frac{x}{a}}\right)$ で与えられる関数であることがわかる．第 14 回の問題 4 の (2) により，このように与えられる関数 f は，与えられた条件を満たす．

微積分学 I 演習問題　第 16 回　応用問題

1. (1) 関数 $f:(1,+\infty)\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=\log(\log x)$ で定める. f の増減, 凹凸を調べて, f のグラフの概形をかけ.

(2) 直線 $y=e^{-k}x-k$ が $y=f(x)$ のグラフの接線になるような実数 k の値を求め, さらにそのときの接点の座標を求めよ.

2. a を正の実数とするとき, 方程式 $a^x=x$ の解の個数を調べよ.

3. a を正の実数とするとき, 連立方程式 $\begin{cases} a^x=y \\ a^y=x \end{cases}$ の解について調べよ.

4. a を正の実数とし, $x_1=a$, $x_{n+1}=a^{x_n}$ により数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定める.

(1) $a>1$ ならば $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列であることを示せ.

(2) $1<a\leqq c^{\frac{1}{c}}$ $(c>1)$ ならば $x_n<c$ であることを示せ.

(3) $a<1$ のとき, $x_{2n-1}<x_{2n+1}<x_{2m+2}<x_{2m}$ が成り立つことを示せ.

(4) $a<1$ のとき, $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}$, $\beta=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}$ とおくとき, $\alpha=\beta$ となるための条件を求めよ.

(5) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束する a の範囲を求めよ.

5. 関数 $f:(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$, $g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ を $f(x)=\dfrac{1}{\log(x+1)-\log x}-x$, $g(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$ で定めるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) g は狭義単調減少関数で, 全単射であることを示せ.

(2) 合成関数 $f\circ g:(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ は狭義単調減少関数であることを示すことによって, f は狭義単調増加関数であることを示せ.

(3) 極限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ を求めよ.

(4) 任意の正の実数 x に対して, 不等式 $\dfrac{2}{2x+1}<\log(x+1)-\log x<\dfrac{1}{x}$ が成り立つことを示せ.

(5) $x\geqq 1$ ならば 不等式 $\log(x+1)-\log x<\dfrac{5}{5x+2}$ が成り立つことを示せ.

(6) $a>0$ に対し, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を帰納的に $a_1=a$, $a_{n+1}=\log(a_n+1)$ で定めるとき, 極限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ.

(7) 極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log a_n}{\log n}$ を求めよ.

6. a を正の定数とする. xy 平面上で $\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ と媒介変数表示される曲線を C として, C 上に定点 $\mathrm{A}(\pi a,2a)$ をとる. C 上の動点 $\mathrm{T}(a(t-\sin t),a(1-\cos t))$ $(0<t<\pi)$ をとり, T における C の接線を ℓ とする.

(1) 2 点 T と A の間の曲線 C の弧の長さ L を求めよ.

(2) $\mathrm{PT}=L$ を満たす ℓ 上の点 P の座標を求めよ. ただし, P の x 座標は T の x 座標より大きいとする.

(3) T が $0<t<\pi$ の範囲で C 上を動くとき, P が描く軌跡を C' とする. C' を平行移動すれば, C の一部に重なることを示せ.

7. a を正の実数とする. 放物線 $C:y=ax^2$ 上の 2 つの点 $\mathrm{P}(s,as^2)$, $\mathrm{Q}(t,at^2)$ $(s<t)$ における接線をそれぞれ ℓ_1, ℓ_2 として, ℓ_1 と ℓ_2 の交点を R とする.

(1) $\angle\mathrm{PRQ}=\theta$ とおくとき, $\cos\theta$ を s, t を用いて表せ.

(2) $\angle\mathrm{PRQ}$ が常に一定の角度 θ であるように P と Q が C 上を動くとき, R が動く曲線の方程式を求めよ.

(3) $\theta>\dfrac{\pi}{2}$ のとき (2) で求めた曲線と ℓ_1 が相異なる 2 点で交わるための s の範囲を求めよ.

(4) $\theta>\dfrac{\pi}{2}$ であり, s が (3) で求めた範囲にあるとき, (2) で求めた曲線と ℓ_1 で囲まれた領域の面積を求めよ.

8. (発展問題) 関数 $f:(a,b)\to \boldsymbol{R}$ は 2 回微分可能で, f の導関数は狭義単調増加関数であるとする. f のグラフを C として, C の相異なる 2 点 $\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{Q}(\beta, f(\beta))$ $(a<\alpha<\beta<b)$ における接線をそれぞれ ℓ_1, ℓ_2 とし, P, Q における法線をそれぞれ L_1, L_2 とする.

(1) ℓ_1, ℓ_2 と C で囲まれた部分の面積を S とするとき, f, α, β を用いて S を表せ.

(2) L_1, L_2 と C で囲まれた部分の面積を T とするとき, T を f, α, β を用いて T を表せ.

(3) 線分 PQ と C で囲まれた部分の面積を U とするとき, U を f, α, β を用いて U を表せ.

(4) $\dfrac{T}{S}$ が P と Q の位置に依存しない一定の値になるような関数 f は存在しないことを示せ.

(5) $\dfrac{T}{U}$ が P と Q の位置に依存しない一定の値になるような関数 f は存在しないことを示せ.

9. (発展問題) 開区間 I で定義された関数 $f:I\to \boldsymbol{R}$ は微分可能で, f の導関数は狭義単調増加関数または狭義単調減少関数であるとする. f のグラフを C として, C の相異なる 2 点 $\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{Q}(\beta, f(\beta))$ $(\alpha<\beta)$ を通る線分と C で囲まれた部分の面積を $S(\alpha,\beta)$ とする. また, $f(\beta)-f(\alpha)=f'(\gamma)(\beta-\alpha)$ を満たす $\gamma\in(\alpha,\beta)$ はただ一つ存在するが, このとき C 上の点 $\mathrm{R}(\gamma, f(\gamma))$ をとり, $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を $T(\alpha,\beta)$ とする.

(1) f が 2 回微分可能で, 2 次導関数が連続であるとき $\dfrac{S(\alpha,\beta)}{T(\alpha,\beta)}$ が α, β によらない一定の値ならば, その値は $\dfrac{4}{3}$ であることを示せ.

(2) f が 4 回微分可能で, 4 次導関数が連続であるとき $\dfrac{S(\alpha,\beta)}{T(\alpha,\beta)}$ が α, β によらない一定の値であるような関数 f を求めよ.

10. (発展問題) 開区間 I で定義された関数 $f:I\to \boldsymbol{R}$ は微分可能で, f の導関数は狭義単調増加関数または狭義単調減少関数であるとする. f のグラフ上の相異なる 2 点 $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$ $(\alpha<\beta)$ における接線をそれぞれ ℓ_α, ℓ_β とする. ℓ_α と ℓ_β の交点を C とし, $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を $S(\alpha,\beta)$ とする. また, $f(\beta)-f(\alpha)=f'(\gamma)(\beta-\alpha)$ を満たす $\gamma\in(\alpha,\beta)$ はただ一つ存在するが, このとき f のグラフ上の点 $(\gamma, f(\gamma))$ における f のグラフの接線 ℓ_β と ℓ_α, ℓ_β との交点をそれぞれ P, Q として $\triangle\mathrm{PQC}$ の面積を $T(\alpha,\beta)$ とする.

(1) f が 2 回微分可能で, 2 次導関数が連続であるとき $\dfrac{S(\alpha,\beta)}{T(\alpha,\beta)}$ が α, β によらない一定の値ならば, その値は 4 であることを示せ.

(2) f が 4 回微分可能で, 4 次導関数が連続であるとき $\dfrac{S(\alpha,\beta)}{T(\alpha,\beta)}$ が α, β によらない一定の値であるような関数 f を求めよ.

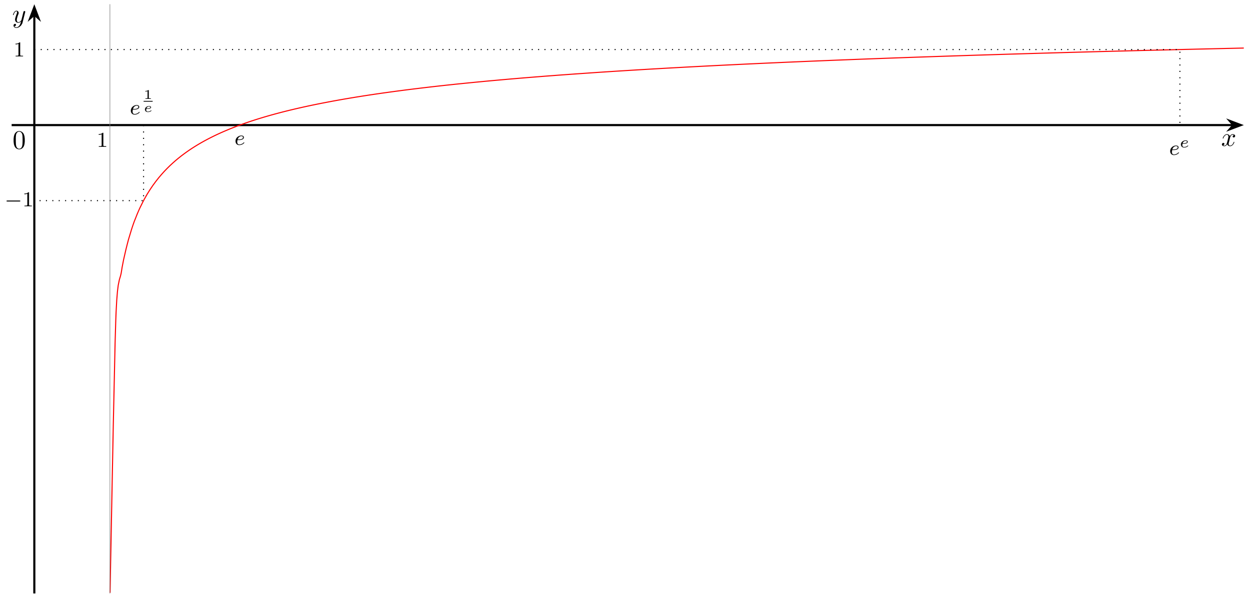
11. (発展問題) 開区間 I で定義された関数 $f:I\to \boldsymbol{R}$ は微分可能で, f の導関数は狭義単調増加関数または狭義単調減少関数であるとする. f のグラフ上の相異なる 2 点 $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$ $(\alpha<\beta)$ における接線をそれぞれ ℓ_α, ℓ_β とする. ℓ_α, ℓ_β と f のグラフで囲まれた部分の面積を $S(\alpha,\beta)$, 線分 PQ と f のグラフで囲まれた部分の面積を $T(\alpha,\beta)$ とする.

(1) f が 2 回微分可能で, 2 次導関数が連続であるとき, $\dfrac{S(\alpha,\beta)}{T(\alpha,\beta)}$ が α, β によらない一定の値ならば, その値は 2 であることを示せ. .

(2) f が 4 回微分可能で, 4 次導関数が連続であるとき $\dfrac{S(\alpha,\beta)}{T(\alpha,\beta)}$ が α, β によらない一定の値であるような関数 f を求めよ.

第 16 回の演習問題の解答

1. (1) $f'(x) = \dfrac{1}{x\log x}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2\log x} - \dfrac{1}{x^2(\log x)^2}$ より $x \in (1, +\infty)$ ならば $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ である．従って f は単調増加で，f のグラフは上に凸である．また，$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \log(\log x) = \lim_{y\to +0} \log y = -\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \log(\log x) = \lim_{y\to +\infty} \log y = +\infty$ であり，$f(e) = 0$, $f(e^{\frac{1}{e}}) = -1$, $f(e^e) = 1$ となることに注意すれば，グラフは次のようになる．



(2) $(t, f(t))$ $(t > 1)$ における $y = f(x)$ の接線の方程式は $y = \dfrac{1}{t\log t}(x-t) + \log(\log t)$ である．これが $y = e^{-k}x - k$ に一致するには

$$\begin{cases} \dfrac{1}{t\log t} = e^{-k} & \cdots(i) \\ \log(\log t) - \dfrac{1}{\log t} = -k & \cdots(ii) \end{cases}$$

が成り立つことが必要十分である．(i) より $e^k = t\log t$ で，この両辺の対数をとれば $k = \log t + \log(\log t)$ が得られる．この式と (ii) から t は $2\log(\log t) + \log t - \dfrac{1}{\log t} = 0$ を満たすことがわかる．そこで，$s = \log t$ とおき，$g(s) = 2\log s + s - \dfrac{1}{s}$ で定められる関数 $g : (0, +\infty) \to \boldsymbol{R}$ を考える．このとき，$g'(s) = \dfrac{1}{s} + 1 + \dfrac{1}{s^2} > 0$ だから g は単調増加であり，$g(1) = 0$ となるため，$g(s) = 0$ を満たす正の実数 s は 1 だけであることがわかる．従って $2\log(\log t) + \log t - \dfrac{1}{\log t} = g(\log t) = 0$ を満たす t は $t = e$ だけである．よって (ii) により $k = 1$ であり，接点の座標は $(e, 0)$ である．

2. $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\log x}$ により，関数 $f : (0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ を定めれば，$f'(x) = \dfrac{1-\log x}{x^2}f(x)$ だから区間 $(0, e)$ で f は増加，区間 (e, ∞) で f は減少する．さらに $\lim_{x\to +0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ だから，$0 < a < 1$ のとき $a^x = x$ の解は区間 $(0, 1)$ にただ 1 つ存在，$1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ のとき $a^x = x$ の解は区間 $(1, e)$ と (e, ∞) に 1 つずつ存在，$a = e^{\frac{1}{e}}$ のとき $a^x = x$ の解は $x = e$ のみであり，$a > e^{\frac{1}{e}}$ のとき $a^x = x$ の解は存在しない．

3. (x, y) が与えられた連立方程式の解で $x < y$ を満たすとき，$t = \dfrac{x}{y}$ とおけば，$0 < t < 1$ であり，$x^{\frac{1}{y}} = y^{\frac{1}{x}} = a$ より，$y = x^t = \dfrac{x}{t}$ となる．従って，$x^{1-t} = t$ だから，$x = t^{\frac{1}{1-t}}$, $y = t^{\frac{t}{1-t}}$, $a = t^{\frac{1}{1-t}t^{-\frac{t}{1-t}}}$ である．そこで関数 $\lambda, \mu, \nu : (0, 1) \to \boldsymbol{R}$ を $\lambda(t) = t^{\frac{1}{1-t}}$, $\mu(t) = t^{\frac{t}{1-t}}$, $\nu(t) = \lambda(t)^{\frac{1}{\mu(t)}}$ で定める．$\lambda'(t) = \dfrac{\lambda(t)}{(1-t)^2}\left(\dfrac{1}{t} - 1 + \log t\right)$,

$\mu'(t) = \dfrac{\mu(t)}{(1-t)^2}(1-t+\log t)$ より

$$\nu'(t) = \frac{\nu(t)(\lambda'(t)\mu(t) - \lambda(t)\mu'(t)\log\lambda(t))}{\lambda(t)\mu(t)^2} = \frac{\nu(t)}{(1-t)^3\mu(t)}\left(\frac{1-t}{\sqrt{t}} - \log t\right)\left(\frac{1-t}{\sqrt{t}} + \log t\right)$$

$\bar{\lambda}(t) = \dfrac{1}{t} - 1 + \log t$, $\bar{\mu}(t) = 1 - t + \log t$, $\bar{\nu}(t) = \dfrac{1-t}{\sqrt{t}} + \log t$ により関数 $\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu} : (0,1] \to \boldsymbol{R}$ を定めれば, 上式から $\lambda'(t)$, $\mu'(t)$, $\nu'(t)$ の符号は, それぞれ $\bar{\lambda}(t)$, $\bar{\mu}(t)$, $\bar{\nu}(t)$ の符号と一致する. $\bar{\lambda}'(t) = \dfrac{1}{t^2}(t-1)$, $\bar{\mu}'(t) = \dfrac{1}{t} - 1$, $\bar{\nu}'(t) = -\dfrac{(1-\sqrt{t})^2}{2\sqrt{t^3}}$ だから $\bar{\lambda}$, $\bar{\nu}$ は単調減少, $\bar{\mu}$ は単調増加であり, $\bar{\lambda}(1) = \bar{\mu}(1) = \bar{\nu}(1) = 0$ だから $0 < t < 1$ ならば $\bar{\lambda}(t), \bar{\nu}(t) > 0$, $\bar{\mu}(t) < 0$ である. 従って λ, ν は単調増加関数, μ は単調減少関数である. 一方, $\lim_{t\to+0}\lambda(t) = 0$, $\lim_{t\to 1-0}\lambda(t) = e^{-1}$, $\lim_{t\to+0}\mu(t) = 1$, $\lim_{t\to 1-0}\mu(t) = e^{-1}$, $\lim_{t\to+0}\nu(t) = 0$, $\lim_{t\to 1-0}\nu(t) = e^{-e}$, だから λ, μ, ν の値域はそれぞれ $(0, e^{-1})$, $(e^{-1}, 1)$, $(0, e^{-e})$ である.

以上から, 与えられた連立方程式が $x < y$ を満たす解をもてば $t = \dfrac{x}{y}$ とおくと $x = \lambda(t)$, $y = \mu(t)$, $a = \nu(t)$ となるため $x < e^{-1} < y < 1$, $0 < a < e^{-e}$ である. さらに (z, w) も与えられた連立方程式の解で $z < w$ を満たせば, $s = \dfrac{z}{w}$ とおけば $z = \lambda(s)$, $w = \mu(s)$, $a = \nu(s)$ となるが, ν の単調性から $s = t$ となるため $z = x$, $w = y$ である. 故に与えられた連立方程式の解 (x, y) で $x < y$ を満たすものは, 存在しても 1 組だけである.

$0 < a < e^{-e}$ の場合, 上の議論から $\nu(t) = a$ を満たす $t \in (0,1)$ がただ 1 つ定まり, $x = \lambda(t)$, $y = \mu(t)$ とおけば $x = a^y$, $y = a^x$ が成り立つ. 前問の結果から $a^z = z$ を満たす z がただ 1 つ存在するため, $0 < a < e^{-e}$ ならば与えられた連立方程式は $x < e^{-1} < y < 1$ を満たす解を 1 組と, $x = y$ を満たす解を 1 組もつ. また, $x = a^y$, $y = a^x$ $(x < y)$ ならば $x^{\frac{1}{x}} < x^{\frac{1}{y}} = a = y^{\frac{1}{x}} < y^{\frac{1}{y}}$ だから前問の結果と中間値の定理から $z^{\frac{1}{z}} = a$ を満たす z が区間 (x, y) にただ 1 つ存在する. 従って, $0 < a < e^{-e}$ の場合は与えられた連立方程式の解 (x, y) は $0 < \alpha < e^{-1} < \beta < 1$ を満たす (α, β) が 1 組, $\alpha < \gamma < \beta < 1$ を満たす (γ, γ) が 1 組ある.

$a \geqq e^{-e}$ ならば与えられた連立方程式の解 (x, y) で $x < y$ を満たすものは, 存在しないため, 前問の結果から $e^{-e} \leqq a < 1$ のとき, 解はただ 1 組存在, $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ のとき解は 2 組存在, $a = e^{\frac{1}{e}}$ のとき解は $x = y = e$ のみであり, $a > e^{\frac{1}{e}}$ のとき解は存在しない.

4. (1) $a > 1$ だから $x_1 = a < a^a = x_2$ であり, $x_{n-1} < x_n$ が $n \geqq 2$ に対して成り立てば, $x_n = a^{x_{n-1}} < a^{x_n} = x_{n+1}$ だから $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列である.

(2) 仮定から $x_1 = a \leqq c^{\frac{1}{c}} < c$ であり, $x_n < c$ と仮定すれば, $x_{n+1} = a^{x_n} < a^c \leqq (c^{\frac{1}{c}})^c = c$ である.

(3) 関数 $\varphi : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $\varphi(x) = a^x$ で定めれば, $a < 1$ のとき, φ は単調減少であることに注意する. 関数 $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $g(x) = \varphi(\varphi(x)) = a^{a^x}$ で定めれば, $x < y$ のとき, $\varphi(x) > \varphi(y)$ だから $\varphi(\varphi(x)) < \varphi(\varphi(y))$ となるため g は単調増加関数である. $x_1 = \varphi(1) < \varphi(a) = x_2 < \varphi(0) = 1$, $x_1 = \varphi(1) < \varphi(x_2) = x_3$ だから, 帰納的に $x_{2n-1} < x_{2n+1}$ を仮定すれば, $x_{n+2} = g(x_n)$ だから $x_{2n+1} = g(x_{2n-1}) < g(x_{2n+1}) = x_{2n+3}$ である. 従って, 任意の $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $x_{2n-1} < x_{2n+1}$ が成り立つ. これより, $x_{2n} = \varphi(x_{2n-1}) > \varphi(x_{2n+1}) = x_{2n+2}$ も得られる. また, 帰納的に $x_{2n-1} < x_{2n}$ を仮定すれば $x_{2n+1} = g(x_{2n-1}) < g(x_{2n}) = x_{2n+2}$ だから, $x_{2n-1} < x_{2n}$ が任意の $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して成り立つ. 任意の正の整数 m, n に対し, 上の結果から $x_{2n-1} < x_{2(m+n)-1} < x_{2(m+n)} < x_{2m}$ が得られる.

(4) $x_{2n+1} = a^{x_{2n}}$, $x_{2n} = a^{x_{2n-1}}$ において $n \to \infty$ とすれば $\alpha = a^{\beta}$, $\beta = a^{\alpha}$ が成り立ち, (3) で示したことから $\alpha \leqq \beta$ である. $e^{-e} \leqq a < 1$ ならば前問の結果から $\alpha = \beta$ である.

$a < e^{-e}$ の場合は前問の結果により, $a^x = y$, $a^y = x$, $x < y$ を満たす (x, y) がただ 1 組存在するため, それらを (λ, μ) とする. このとき, $x_{2n-1} < \lambda$, $x_{2n} > \mu$ であることを示す. まず $a, \mu < 1$ より $x_1 = a < a^{\mu} = \lambda$ である. このことと $a < 1$ より $x_2 = a^a > a^{\lambda} = \mu$ となるため $n = 1$ のときは, 主張が成り立つ. $x_{2n-1} < \lambda$, $x_{2n} > \mu$ を仮定すると, $x_{2n+1} = a^{x_{2n}} < a^{\mu} = \lambda$, $x_{2n+2} = a^{x_{2n+1}} > a^{\lambda} = \mu$ となるため, n による帰納法で, 主張が示された.

従って $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} \leqq \lambda$, $\beta = \lim_{n\to\infty} x_{2n} \geqq \mu$ であるが (α, β) も $a^x = y$, $a^y = x$ を満たすため, 前問の結果から $\alpha = \lambda$, $\beta = \mu$ である. 故に $a < e^{-e}$ ならば $\{x_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\lambda < e^{-1}$ に収束して, $\{x_{2n}\}$ は $\mu > e^{-1}$ に収束するため $\{x_n\}$ は収束しない.

(5) (4) で示したことから, $0<a<e^{-e}$ ならば $\{x_n\}$ は収束せず, $e^{-e} \leqq a<1$ ならば $\{x_n\}$ は収束する. $a=1$ ならば, つねに $x_n=1$ であるため, $\{x_n\}$ は収束する. $a>1$ の場合, (1) によって $\{x_n\}$ は単調増加数列であり, $a \leqq e^{\frac{1}{e}}$ ならば, (2) によって $x_n<e$ となって $\{x_n\}$ は上に有界であるため, 収束する. $a>e^{\frac{1}{e}}$ のとき, もし $\{x_n\}$ が α に収束するならば, $x_{n+1}=a^{x_n}$ の両辺で $n \to \infty$ とすれば $\alpha=a^{\alpha}$ となるため, α は方程式 $a^x=x$ の解である. ところが, 問題 2 の結果から, $a>e^{\frac{1}{e}}$ のとき $a^x=x$ の解は存在しないため, 矛盾が生じる. 故に $a>e^{\frac{1}{e}}$ ならば $\{x_n\}$ は発散する. 以上から $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束する a の範囲は $e^{-e} \leqq a \leqq e^{\frac{1}{e}}$ である.

5. (1) $0<x<y$ ならば $0<e^x-1<e^y-1$ だから $g(x)=\dfrac{1}{e^x-1}>\dfrac{1}{e^y-1}=g(y)$ となるため g は狭義単調減少関数である. 従って, とくに g は単射である. 任意の $p \in (0,\infty)$ に対し, $c=\log\left(1+\dfrac{1}{p}\right)$ とおけば $e^c=1+\dfrac{1}{p}$ より $g(c)=\dfrac{1}{e^c-1}=p$ だから g は全射である.

(2) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{1}{\log(g(x)+1)-\log g(x)}-g(x)=\dfrac{1}{\log\left(1+\frac{1}{g(x)}\right)}-g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}$ だから $f\circ g$ の導関数は $(f\circ g)'(x)=\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\left(xe^{\frac{x}{2}}\right)^2-(e^x-1)^2}{x^2(e^x-1)^2}=\dfrac{\left(xe^{\frac{x}{2}}-e^x+1\right)\left(xe^{\frac{x}{2}}+e^x-1\right)}{x^2(e^x-1)^2}$ で与えられる. $x>0$ ならば $xe^{\frac{x}{2}}+e^x-1>0$ であるため, $(f\circ g)'(x)$ の符号は $xe^{\frac{x}{2}}-e^x+1$ の符号と一致する.

そこで $h(x)=xe^{\frac{x}{2}}-e^x+1$ によって関数 $h:[0,\infty)\to \boldsymbol{R}$ を定義すれば, $h'(x)=e^{\frac{x}{2}}\left(1+\dfrac{x}{2}-e^{\frac{x}{2}}\right)$ である. $t>0$ ならば $e^t>1+t$ が成り立つため, t に $\dfrac{x}{2}$ を代入すれば, $x>0$ のとき $e^{\frac{x}{2}}>1+\dfrac{x}{2}$ が成り立つ. このことから, $x>0$ ならば $h'(x)<0$ であることがわかるため, h は狭義単調減少関数である. 故に $x>0$ ならば $h(x)<h(0)=0$ だから h は $(0,\infty)$ においてつねに負の値をとる. 従って, $x>0$ ならば $(f\circ g)'(x)<0$ となるため, $f\circ g$ は狭義単調減少関数である

g は全単射だから, g の逆関数 g^{-1} を考える. $0<x<y$ ならば, $u=g^{-1}(x)$, $v=g^{-1}(y)$ とおけば, $x=g(u)$, $y=g(v)$ である. もし, $u \leqq v$ ならば, g が単調減少関数であることから $x=g(u) \geqq g(v)=y$ となって, 仮定に反するため, $u>v$ である. 従って, $f\circ g$ が狭義単調減少関数であることから, $f(x)=f(g(u))=(f\circ g)(u)<(f\circ g)(v)=f(g(v))=f(y)$ となるため, f が狭義単調増加関数であることがわかる.

(3) $y=\dfrac{1}{x}$ とおけば, $x\to\infty$ のとき, $y\to+0$ だから, 第 7 回の演習問題 1 の (40) の結果を用いれば, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\log(x+1)-\log x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x\right)=\lim_{y\to+0}\left(\frac{1}{\log(1+y)}-\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{2}$.

(4) もし $f(p)>\dfrac{1}{2}$ を満たす $p>0$ が存在すれば, (3) から $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{2}$ だから, $f(q)<\dfrac{1}{2}+\left(f(p)-\dfrac{1}{2}\right)=f(p)$ を満たす $q>p$ が存在するが, このことは, f が単調増加関数であることと矛盾する. 従って, すべての $x>0$ に対して $f(x)\leqq\dfrac{1}{2}$ である. また, もし $f(p)=\dfrac{1}{2}$ を満たす $p>0$ が存在すれば, f が狭義単調増加関数であることから, $q>p$ ならば $f(q)>f(p)=\dfrac{1}{2}$ となって, すべての $x>0$ に対して $f(x)\leqq\dfrac{1}{2}$ であることと矛盾するため, すべての $x>0$ に対して $f(x)<\dfrac{1}{2}$ である.

もし $f(p)<0$ を満たす $p>0$ が存在すれば, $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{\log(x+1)-\log x}-x\right)=0$ だから, $f(q)>f(p)$ を満たす $0<q<p$ が存在するが, このことは, f が単調増加関数であることと矛盾する. 従って, すべての $x>0$ に対して $f(x)\geqq 0$ である. また, もし $f(p)=0$ を満たす $p>0$ が存在すれば, f が狭義単調増加関数であることから, $0<q<p$ ならば $f(q)<f(p)=0$ となって, すべての $x>0$ に対して $f(x)\geqq 0$ であることと矛盾するため, すべての $x>0$ に対して $f(x)>0$ である.

以上から, すべての $x>0$ に対して不等式 $0<\dfrac{1}{\log(x+1)-\log x}-x<\dfrac{1}{2}$ が成り立つ. この不等式より $x<\dfrac{1}{\log(x+1)-\log x}<x+\dfrac{1}{2}$ であり, 逆数をとれば, $\dfrac{1}{x}>\log(x+1)-\log x>\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{2x+1}$ が得られる.

(5) f は単調増加関数だから $x\geqq c>0$ ならば $\dfrac{1}{\log(x+1)-\log x}-x=f(x)\geqq f(c)$ となるため, 左辺の x を移項し

て逆数をとれば, $\log(x+1)-\log x \leqq \dfrac{1}{x+f(c)}$ が成り立つことがわかる. とくに $c=1$ の場合 $f(1)=\dfrac{1}{\log 2}-1$ であり, $e^5>(2.7)^5=143.48907>128=2^7$ だから $e^{\frac{5}{7}}>2$ となるため, 対数をとれば $\dfrac{5}{7}>\log 2$ より $f(1)=\dfrac{1}{\log 2}-1>\dfrac{2}{5}$ である. 従って $x \geqq 1$ ならば $\log(x+1)-\log x \leqq \dfrac{1}{x+f(1)}<\dfrac{1}{x+\frac{2}{5}}=\dfrac{5}{5x+2}$ が成り立つ.

(6) $a_1=a>$ であり, 帰納的に $a_n>0$ と仮定すれば, $a_n+1>1$ だから $a_{n+1}=\log(a_n+1)>0$ となるため, n による数学的帰納法で, すべての自然数 n に対して $a_n>0$ である. さらに, 任意の $x>-1$ に対して不等式 $x \geqq \log(x+1)$ が成り立つため, $a_n \geqq \log(a_n+1)=a_{n+1}$ だから $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界な単調減少数列である. 故に, 連続性の公理によって $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=L$ とおいて, $a_{n+1}=\log(a_n+1)$ の両辺で $n\to\infty$ とすれば, $L=\log(L+1)$ が得られるが, $x>-1$ かつ $x\neq 0$ ならば不等式 $x>\log(x+1)$ が成り立つので, $x=\log(x+1)$ を満たす x は 0 に限る. 従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=0$ となる.

(7) (6) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=0$ だから, 自然数 k で, 条件「$n \geqq k$ ならば $0<a_n<1$」を満たすものがある. そこで, 数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ で定めると, $n \geqq k$ ならば $b_n>1$ であるため, (4) と (5) の結果から, 不等式 $\dfrac{2}{2b_n+1}<\log(b_n+1)-\log b_n<\dfrac{5}{5b_n+2}$ が成り立つ. 一方, $\log(b_n+1)-\log b_n=\log\left(\dfrac{1}{b_n}+1\right)=\log(a_n+1)=a_{n+1}=\dfrac{1}{b_{n+1}}$ だから, $n \geqq k$ ならば $\dfrac{2}{2b_n+1}<\dfrac{1}{b_{n+1}}<\dfrac{5}{5b_n+2}$ であり, この各辺の逆数を考えれば, $b_n+\dfrac{1}{2}>b_{n+1}>b_n+\dfrac{2}{5}$ が得られる. 従って $n \geqq k$ ならば $\dfrac{2}{5}<b_{n+1}-b_n<\dfrac{1}{2}$ が成り立ち, この不等式の n に $k, k+1, k+2, \ldots, n-1$ を代入して得られる不等式を各辺ごとに加えれば, $n>k$ のとき, $\dfrac{2}{5}(n-k)<b_n-b_k<\dfrac{1}{2}(n-k)$ が成り立つことがわかる. さらに, この各辺に b_k を加えて, 対数をとれば $\log\left(\dfrac{2}{5}(n-k)+b_k\right)<\log b_n<\log\left(\dfrac{1}{2}(n-k)+b_k\right)$ であり, この各辺を $\log n$ で割れば

$$\frac{\log\left(\frac{2}{5}(n-k)+b_k\right)}{\log n}<\frac{\log b_n}{\log n}<\frac{\log\left(\frac{1}{2}(n-k)+b_k\right)}{\log n}\cdots(*)$$

が $n>k$ に対して成り立つことがわかる. 一般に正の実数 α と実数 β に対して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(\alpha n+\beta)}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n+\log\alpha+\log\left(1+\frac{\beta}{\alpha n}\right)}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\log\alpha}{\log n}+\frac{\log\left(1+\frac{\beta}{\alpha n}\right)}{\log n}\right)=1$$

であるため, $(*)$ と, はさみうちの原理によって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log b_n}{\log n}=1$ であることがわかる.

従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log a_n}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log\frac{1}{b_n}}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\log b_n}{\log n}=-1$ である.

6. (1) $\dfrac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$, $\dfrac{dy}{dt}=a\sin t$ だから A から T までの C の弧の長さは
$\displaystyle\int_{-\pi}^{t}\sqrt{2^2a(1-\cos\theta)}d\theta=\int_{-\pi}^{t}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}}d\theta=-2a\int_{-\pi}^{t}\sin\frac{\theta}{2}d\theta=4a\cos\frac{t}{2}$.

(2) T における C の接線の方程式は s を媒介変数として $\begin{cases} x=a(1-\cos t)s+a(t-\sin t) \\ y=a(\sin t)s+a(1-\cos t) \end{cases}$ で表される. P の座標を $(a(1-\cos t)s+a(t-\sin t), a(\sin t)s+a(1-\cos t))$ とすれば, 仮定から $\overrightarrow{\mathrm{TP}}$ は T における C の接ベクトル $(a(1-\cos t), a\sin t)$ の負の実数倍である. 従って, $s<0$ だから $\mathrm{PT}=\sqrt{4a^2s^2\sin^2\dfrac{t}{2}}=2as\sin\dfrac{t}{2}$ である. 故に仮定から $2as\sin\dfrac{t}{2}=4a\cos\dfrac{t}{2}$ すなわち $s=2\dfrac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$. このとき P の座標は $2a(1-\cos t)\dfrac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}+a(t-\sin t)=4a\cos\dfrac{t}{2}\sin\dfrac{t}{2}+a(t-\sin t)=a(t+\sin t)$, $2a\sin t\dfrac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}+a(1-\cos t)=4a\cos^2\dfrac{t}{2}+a(1-\cos t)=a(3+\cos t)$ より $(a(t+\sin t), a(3+\cos t))$ で与えられる.

(3) 上の結果から P の座標は $(a((t+\pi)-\sin(t+\pi))-\pi a, a(1-\cos(t+\pi))+2a)$ と表されるため, P の軌跡をベクトル $(\pi a, -2a)$ だけ平行移動すれば曲線 C の $0 \leqq t < \pi$ の部分に重なることがわかる.

7. (1) ℓ_1 の方程式は $y=2asx-as^2$, ℓ_2 の方程式は $y=2atx-at^2$ だから R の座標は $\left(\dfrac{s+t}{2}, ast\right)$ である.

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\left(\frac{s-t}{2}, as^2-ast\right)=\frac{t-s}{2}(-1,-2as), \quad \overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\left(\frac{-s+t}{2}, at^2-ast\right)=\frac{t-s}{2}(1,2at)$$

だから $\cos\theta=\dfrac{\left(\overrightarrow{\mathrm{RP}}, \overrightarrow{\mathrm{RQ}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathrm{RP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\right|}=\dfrac{-1-4a^2st}{\sqrt{1+4a^2s^2}\sqrt{1+4a^2t^2}}$.

(2) $x=\dfrac{s+t}{2}$, $y=ast$ とおけば (1) の結果から $\cos\theta=\dfrac{-1-4ay}{\sqrt{1+16a^2x^2-8ay+16a^2y^2}}$ となるため, この両辺を 2 乗して整理すれば

$$(\cos^2\theta)x^2-(\sin^2\theta)\left(y+\frac{1+\cos^2\theta}{4a\sin^2\theta}\right)^2=-\frac{\cos^2\theta}{4a^2\sin^2\theta} \quad \cdots(*)$$

である. よって $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ならば R は直線 $y=-\dfrac{1}{4a}$ 上を動く. $\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ならば $\cos\theta>0$ だから $-1-4ay>0$, すなわち $y<-\dfrac{1}{4a}$ より, R は $(*)$ で与えられる双曲線の下半分の曲線上を動く. $\theta>\dfrac{\pi}{2}$ ならば $\cos\theta<0$ だから $-1-4ay<0$, すなわち $y>-\dfrac{1}{4a}$ より, R は $(*)$ で与えられる双曲線の上半分の曲線上を動く.

直線 $y=-\dfrac{1}{4a}$ 上の任意の点 (x,y) は $4x^2-\dfrac{4y}{a}=4x^2+\dfrac{1}{a^2}>0$ を満たし, $\theta\neq\dfrac{\pi}{2}$ の場合, $(*)$ で与えられる双曲線上の任意の点 (x,y) も $4x^2-\dfrac{4y}{a}=4\left(\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\left(y+\dfrac{1+\cos^2\theta}{4a\sin^2\theta}\right)^2-\dfrac{1}{4a^2\sin^2\theta}\right)-\dfrac{4y}{a}=\dfrac{4\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\left(y+\dfrac{1}{4a}\right)^2>0$ を満たすため, $s+t=2x$, $st=\dfrac{y}{a}$ を満たす実数 実数 $s<t$ が存在する. 故に $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ならば R は直線 $y=-\dfrac{1}{4a}$ 全体を動き, $\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ならば R は $(*)$ で与えられる双曲線の下半分の曲線全体を動き, $\theta>\dfrac{\pi}{2}$ ならば R は $(*)$ で与えられる双曲線の上半分の曲線全体を動く.

(3) 上の結果から $y=-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\sqrt{x^2+\dfrac{1}{4a^2\sin^2\theta}}-\dfrac{1+\cos^2\theta}{4a\sin^2\theta}$ となるため, この曲線と ℓ_1 との交点の x-座標は

$$2asx-as^2=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sqrt{x^2+\frac{1}{4a^2\sin^2\theta}}-\frac{1+\cos^2\theta}{4a\sin^2\theta}$$

の解である. 移項して両辺を 2 乗し, 整理すると

$$\left(4a^2s^2-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)x^2+4as\left(\frac{1+\cos^2\theta}{4a\sin^2\theta}-as^2\right)x+a^2s^4-\frac{1+\cos^2\theta}{2\sin^2\theta}s^2+\frac{1}{16a^2}=0.$$

この右辺を因数分解すると,

$$\left(\left(2as+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)x-as^2-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}s+\frac{1}{4a}\right)\left(\left(2as-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)x-as^2+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}s+\frac{1}{4a}\right)=0.$$

故に $s\neq\pm\dfrac{\cos\theta}{2a\sin\theta}$ のとき, 上の方程式は 2 つの解

$$\alpha=\frac{as^2+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}s-\frac{1}{4a}}{2as+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}, \quad \beta=\frac{as^2-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}s-\frac{1}{4a}}{2as-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

をもつ. このとき, ℓ_1 と $(*)$ で与えられる双曲線との交点は $(\alpha, 2as\alpha-as^2)$, $(\beta, 2as\beta-as^2)$ で, これらはともに $(*)$ の上半分の部分にあるためには $2as\alpha-as^2>-\dfrac{1}{4a}$ かつ $2as\beta-as^2>-\dfrac{1}{4a}$ が成り立つことが必要十分である. ここで

$$2as\alpha-as^2+\frac{1}{4a}=\frac{\frac{a\cos\theta}{\sin\theta}\left(s^2+\frac{1}{4a^2}\right)}{2as+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}, \quad 2as\beta-as^2+\frac{1}{4a}=-\frac{\frac{a\cos\theta}{\sin\theta}\left(s^2+\frac{1}{4a^2}\right)}{2as-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

だから, 求める s の範囲は $\dfrac{\cos\theta}{2a\sin\theta} < s < -\dfrac{\cos\theta}{2a\sin\theta}$ である.

(4) $\dfrac{\cos\theta}{2a\sin\theta} < s < -\dfrac{\cos\theta}{2a\sin\theta}$ のとき, 上で求めた α, β の大小関係は

$$\alpha - \beta = \frac{\frac{2a\cos\theta}{\sin\theta}\left(s^2 + \frac{1}{4a^2}\right)}{\left(2as + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(2as - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)} > 0$$

より $\alpha > \beta$ である. 従って, 求める面積を S とおけば, S は以下の積分で与えられる.

$$\begin{aligned} S &= \int_\beta^\alpha \left(2asx - as^2 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sqrt{x^2 + \frac{1}{4a^2\sin^2\theta}} + \frac{1+\cos^2\theta}{4a\sin^2\theta}\right)dx \\ &= \int_\beta^\alpha \left(2asx - as^2 + \frac{1+\cos^2\theta}{4a\sin^2\theta}\right)dx + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\int_\beta^\alpha \sqrt{x^2 + \frac{1}{4a^2\sin^2\theta}}dx \end{aligned}$$

$\displaystyle\int_\beta^\alpha \left(2asx - as^2 + \frac{1+\cos^2\theta}{4a\sin^2\theta}\right)dx = \left[asx^2 - as^2x + \frac{1+\cos^2\theta}{4a\sin^2\theta}x\right]_\beta^\alpha = (\alpha-\beta)\left(as(\alpha+\beta) + \frac{1+\cos^2\theta}{4a\sin^2\theta} - as^2\right) =$ $\displaystyle(\alpha-\beta)\frac{\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\left(as^2 - \frac{1+\cos^2\theta}{4a\sin^2\theta}\right)}{4a^2s^2 - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}} = \frac{\frac{2a\cos^3\theta}{\sin^3\theta}\left(s^2 + \frac{1}{4a^2}\right)\left(as^2 - \frac{1+\cos^2\theta}{4a\sin^2\theta}\right)}{\left(4a^2s^2 - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)^2}$ であり, 教科書の 104 ページの結果から $\displaystyle\int_\beta^\alpha \sqrt{x^2 + \frac{1}{4a^2\sin^2\theta}}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 + \frac{1}{4a^2\sin^2\theta}} + \frac{1}{4a^2\sin^2\theta}\log\left(x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4a^2\sin^2\theta}}\right)\right]_\beta^\alpha =$ $\displaystyle\frac{1}{2}\left(\alpha\sqrt{\alpha^2 + \tfrac{1}{4a^2\sin^2\theta}} - \beta\sqrt{\beta^2 + \tfrac{1}{4a^2\sin^2\theta}}\right) + \frac{1}{8a^2\sin^2\theta}\log\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{4a^2\sin^2\theta}}}{\beta + \sqrt{\beta^2 + \frac{1}{4a^2\sin^2\theta}}}$ である. 以上から $\alpha = \dfrac{as^2 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}s - \frac{1}{4a}}{2as + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$, $\beta = \dfrac{as^2 - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}s - \frac{1}{4a}}{2as - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$ とおくと, 求める面積 S は次の式で与えられる.

$$\begin{aligned} S = &\frac{\frac{2a\cos^3\theta}{\sin^3\theta}\left(s^2 + \frac{1}{4a^2}\right)\left(as^2 - \frac{1+\cos^2\theta}{4a\sin^2\theta}\right)}{\left(4a^2s^2 - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)^2} + \frac{\cos\theta\left(\alpha\sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{4a^2\sin^2\theta}} - \beta\sqrt{\beta^2 + \frac{1}{4a^2\sin^2\theta}}\right)}{2\sin\theta} \\ &+ \frac{\cos\theta\left(\log\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{4a^2\sin^2\theta}}\right) - \log\left(\beta + \sqrt{\beta^2 + \frac{1}{4a^2\sin^2\theta}}\right)\right)}{8a^2\sin^3\theta} \end{aligned}$$

8. (1) ℓ_1, ℓ_2 の方程式はそれぞれ $y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$, $y = f'(\beta)(x-\beta) + f(\beta)$ で与えられるため, これら交点の x 座標を p とおけば,

$$p = \frac{\beta f'(\beta) - \alpha f'(\alpha) - f(\beta) + f(\alpha)}{f'(\beta) - f'(\alpha)}$$

だから, S は次で与えられる.

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^p (f(x) - f'(\alpha)(x-\alpha) - f(\alpha))dx + \int_p^\beta (f(x) - f'(\beta)(x-\beta) - f(\beta))dx \\ &= \int_\alpha^p f(x)dx - \left[\frac{f'(\alpha)}{2}(x-\alpha)^2 + f(\alpha)x\right]_\alpha^p + \int_p^\beta f(x)dx - \left[\frac{f'(\beta)}{2}(x-\beta)^2 + f(\beta)x\right]_p^\beta \\ &= \int_\alpha^\beta f(x)dx + \frac{f'(\beta)}{2}(p-\beta)^2 - \frac{f'(\alpha)}{2}(p-\alpha)^2 + f(\beta)(p-\beta) - f(\alpha)(p-\alpha) \\ &= \int_\alpha^\beta f(x)dx - \frac{(\beta-\alpha)^2 f'(\alpha)f'(\beta) + 2(\beta-\alpha)(f'(\beta)f(\alpha) - f'(\alpha)f(\beta)) + (f(\beta)-f(\alpha))^2}{2(f'(\beta) - f'(\alpha))} \end{aligned}$$

(2) L_1, L_2 の方程式はそれぞれ $x - \alpha + f'(\alpha)(y - f(\alpha)) = 0$, $x - \beta + f'(\beta)(y - f(\beta)) = 0$ で与えられるため, これら交点の x 座標を q とおけば,

$$q = \frac{\alpha f'(\beta) - \beta f'(\alpha) - f'(\alpha)f'(\beta)(f(\beta) - f(\alpha))}{f'(\beta) - f'(\alpha)}$$

だから, T は次で与えられる.

$$\begin{aligned}
T &= \int_\alpha^q \left(-\frac{1}{f'(\alpha)}(x-\alpha)+f(\alpha)-f(x)\right)dx + \int_q^\beta \left(-\frac{1}{f'(\beta)}(x-\beta)+f(\beta)-f(x)\right)dx \\
&= \left[-\frac{1}{2f'(\alpha)}(x-\alpha)^2+f(\alpha)x\right]_\alpha^q - \int_\alpha^q f(x)dx + \left[-\frac{1}{2f'(\beta)}(x-\beta)^2+f(\beta)x\right]_q^\beta - \int_q^\beta f(x)dx \\
&= \frac{(q-\beta)^2}{2f'(\beta)} - \frac{(q-\alpha)^2}{2f'(\alpha)} - f(\beta)(q-\beta)+f(\alpha)(q-\alpha) - \int_\alpha^\beta f(x)dx \\
&= \frac{(\beta-\alpha)^2+2(\beta-\alpha)(f'(\beta)f(\beta)-f'(\alpha)f(\alpha))+f'(\alpha)f'(\beta)(f(\beta)-f(\alpha))^2}{2(f'(\beta)-f'(\alpha))} - \int_\alpha^\beta f(x)dx
\end{aligned}$$

(3) P と Q を通る直線の方程式は $y=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}x-\dfrac{\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ だから U は次で与えられる.

$$U=\int_\alpha^\beta \left(\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}x-\frac{\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha)}{\beta-\alpha}-f(x)\right)dx=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(f(\beta)+f(\alpha))-\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

(4) 任意の $a<\alpha<\beta<b$ に対し, $\dfrac{T}{S}$ が一定の値 k ならば $T=kS$ だから, (1) と (2) から次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
2(k+1)\int_\alpha^\beta f(x)dx &= \frac{k(\beta-\alpha)^2f'(\alpha)f'(\beta)+2k(\beta-\alpha)(f'(\beta)f(\alpha)-f'(\alpha)f(\beta))+k(f(\beta)-f(\alpha))^2}{f'(\beta)-f'(\alpha)} \\
&\quad + \frac{(\beta-\alpha)^2+2(\beta-\alpha)(f'(\beta)f(\beta)-f'(\alpha)f(\alpha))+f'(\alpha)f'(\beta)(f(\beta)-f(\alpha))^2}{f'(\beta)-f'(\alpha)}
\end{aligned}$$

f の原始関数を φ とすれば, 上式より以下の等式が得られる.

$$\begin{aligned}
2(k+1)(\varphi(\beta)-\varphi(\alpha))(\varphi''(\beta)-\varphi''(\alpha)) &= (\beta-\alpha)^2(k\varphi''(\alpha)\varphi''(\beta)+1)+(k+\varphi''(\alpha)\varphi''(\beta))(\varphi'(\beta)-\varphi'(\alpha))^2 \\
&\quad +2(\beta-\alpha)(k\varphi''(\beta)\varphi'(\alpha)-k\varphi''(\alpha)\varphi'(\beta)+\varphi''(\beta)\varphi'(\beta)-\varphi''(\alpha)\varphi'(\alpha))
\end{aligned}$$

上式の両辺を $(\beta-\alpha)^2$ で割り, β を α に近づければ, 左辺は $2(k+1)\varphi'(\alpha)\varphi^{(3)}(\alpha)$ に近づき,

$$\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\varphi''(\beta)\varphi'(\alpha)-\varphi''(\alpha)\varphi'(\beta)}{\beta-\alpha}=\lim_{\beta\to\alpha}\left(\frac{(\varphi''(\beta)-\varphi''(\alpha))\varphi'(\alpha)}{\beta-\alpha}-\frac{\varphi''(\alpha)(\varphi'(\beta)-\varphi'(\alpha))}{\beta-\alpha}\right)=\varphi^{(3)}(\alpha)\varphi'(\alpha)-\varphi''(\alpha)^2$$
$$\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\varphi''(\beta)\varphi'(\beta)-\varphi''(\alpha)\varphi'(\alpha)}{\beta-\alpha}=\lim_{\beta\to\alpha}\left(\frac{(\varphi''(\beta)-\varphi''(\alpha))\varphi'(\beta)}{\beta-\alpha}+\frac{\varphi''(\alpha)(\varphi'(\beta)-\varphi'(\alpha))}{\beta-\alpha}\right)=\varphi^{(3)}(\alpha)\varphi'(\alpha)+\varphi''(\alpha)^2$$

だから, 右辺は $2(k+1)\varphi^{(3)}(\alpha)\varphi'(\alpha)+\left(\varphi''(\alpha)^2+1\right)^2$ に近づく. 故に, 等式 $\left(f'(\alpha)^2+1\right)^2=0$ が任意の $\alpha\in(a,b)$ に対して成り立つことになるが, この左辺はつねに正の値をとるため, 矛盾が生じる. 従って, 任意の $a<\alpha<\beta<b$ に対し, $\dfrac{T}{S}$ が一定の値であるような関数 f は存在しない.

(5) 任意の $a<\alpha<\beta<b$ に対し, $\dfrac{T}{U}$ が一定の値 k ならば $T=kU$ だから, (2) と (3) から次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
2(k-1)\int_\alpha^\beta f(x)dx &= k(\beta-\alpha)(f(\beta)+f(\alpha)) \\
&\quad - \frac{(\beta-\alpha)^2+2(\beta-\alpha)(f'(\beta)f(\beta)-f'(\alpha)f(\alpha))+f'(\alpha)f'(\beta)(f(\beta)-f(\alpha))^2}{f'(\beta)-f'(\alpha)}
\end{aligned}$$

f の原始関数を φ とすれば, 上式より以下の等式が得られる.

$$\begin{aligned}
2(k-1)(\varphi(\beta)-\varphi(\alpha))(\varphi''(\beta)-\varphi''(\alpha)) &= k(\beta-\alpha)(\varphi'(\beta)+\varphi'(\alpha))(\varphi''(\beta)-\varphi''(\alpha))-(\beta-\alpha)^2 \\
&\quad -2(\beta-\alpha)(\varphi''(\beta)\varphi'(\beta)-\varphi''(\alpha)\varphi'(\alpha))-\varphi''(\alpha)\varphi''(\beta)(\varphi'(\beta)-\varphi'(\alpha))^2
\end{aligned}$$

上式の両辺を $(\beta-\alpha)^2$ で割り, β を α に近づければ, 左辺は $2(k-1)\varphi'(\alpha)\varphi^{(3)}(\alpha)$ に近づき, 右辺は

$$2(k-1)\varphi'(\alpha)\varphi^{(3)}(\alpha)-\left(\varphi''(\alpha)^2+1\right)^2$$

に近づく．故に，等式 $\left(f'(\alpha)^2+1\right)^2=0$ が任意の $\alpha\in(a,b)$ に対して成り立つことになるが，この左辺はつねに正の値をとるため，矛盾が生じる．従って，任意の $a<\alpha<\beta<b$ に対し，$\dfrac{T}{U}$ が一定の値であるような関数 f は存在しない．

9. (1) $\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\begin{pmatrix}\alpha-\gamma\\ f(\alpha)-f(\gamma)\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\begin{pmatrix}\beta-\gamma\\ f(\beta)-f(\gamma)\end{pmatrix}$ だから $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積は

$$T(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}|(\beta-\gamma)(f(\alpha)-f(\gamma))-(\alpha-\gamma)(f(\beta)-f(\gamma))|=\frac{1}{2}|(\beta-\gamma)f(\alpha)-(\beta-\alpha)f(\gamma)+(\gamma-\alpha)f(\beta)|$$

である．P と Q を通る直線の方程式は $y=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}x-\dfrac{\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ だから $S(\alpha,\beta)$ は次で与えられる．

$$S(\alpha,\beta)=\left|\int_\alpha^\beta\left(\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}t-\frac{\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha)}{\beta-\alpha}-f(t)\right)dt\right|=\left|\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(f(\beta)+f(\alpha))-\int_\alpha^\beta f(t)\,dt\right|$$

$\dfrac{S(\alpha,\beta)}{T(\alpha,\beta)}$ が α,β によらない一定の値ならば，定数 C で，任意の $\alpha<\beta$ に対して次の等式を満たすものがある．

$$(\beta-\alpha)(f(\beta)+f(\alpha))-2\int_\alpha^\beta f(t)\,dt=C((\beta-\gamma)f(\alpha)-(\beta-\alpha)f(\gamma)+(\gamma-\alpha)f(\beta))\ \cdots(i)$$

このとき，γ を $f(\beta)-f(\alpha)=f'(\gamma)(\beta-\alpha)$ を満たす β の関数とみなして (i) を β に関して微分すれば

$$(C-1)f(\alpha)+(C\gamma-(C-1)\alpha-\beta)f'(\beta)+f(\beta)=Cf(\gamma)\ \cdots(ii)$$

が得られる．(ii) と $f(\beta)-f(\alpha)=f'(\gamma)(\beta-\alpha)$ の両辺を β に関して微分すれば

$$C\gamma'f'(\beta)+(C\gamma-(C-1)\alpha-\beta)f''(\beta)=C\gamma'f'(\gamma)\ \cdots(iii)\qquad f'(\beta)=f'(\gamma)+\gamma'f''(\gamma)(\beta-\alpha)\ \cdots(iv)$$

が得られる．仮定から f'' は恒等的に 0 でないため，$f''(\alpha)\neq0$ となる $\alpha\in I$ が存在する．第 7 回の問題 4 の (2) より $\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha}\frac{f'(\beta)-f'(\gamma)}{\beta-\alpha}=\frac{f''(\alpha)}{2}$ だから (iv) より $\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha}\gamma'=\lim_{\beta\to\alpha}\frac{f'(\beta)-f'(\gamma)}{f''(\gamma)(\beta-\alpha)}=\frac{1}{2}$ が得られる．一方 (iii) より

$$C\gamma'\frac{f'(\beta)-f'(\gamma)}{\beta-\alpha}-f''(\beta)+Cf''(\beta)\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=0\ \cdots(v)$$

であり，$\beta\to\alpha$ とすれば第 7 回の問題 4 の (2) より (v) の左辺は $\dfrac{Cf''(\alpha)}{4}-f''(\alpha)+\dfrac{Cf''(\alpha)}{2}=\dfrac{(3C-4)f''(\alpha)}{4}$ に近づくため，$C=\dfrac{4}{3}$ である．

(2) 以下で γ を $f(x)-f(p)=f'(\gamma)(x-p)$ を満たす x の関数とみなす．(1) の (ii) に $C=\dfrac{4}{3}$ を代入し，β を x, α を p で置き換えれば次の等式が得られる．

$$f(p)+3f(x)-4f(\gamma)+(4\gamma-p-3x)f'(x)=0\ \cdots(vi)$$

$x,p\in I$ に対し，テイラーの定理から次の等式が成り立つ．

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{f''(p)}{2}(x-p)^2+\frac{f^{(3)}(p)}{6}(x-p)^3+\frac{f^{(4)}(p)}{24}(x-p)^4+o\bigl((x-p)^4\bigr)$$
$$f(\gamma)=f(p)+f'(p)(\gamma-p)+\frac{f''(p)}{2}(\gamma-p)^2+\frac{f^{(3)}(p)}{6}(\gamma-p)^3+\frac{f^{(4)}(p)}{24}(\gamma-p)^4+o\bigl((\gamma-p)^4\bigr)$$
$$f'(x)=f'(p)+f''(p)(x-p)+\frac{f^{(3)}(p)}{2}(x-p)^2+\frac{f^{(4)}(p)}{6}(x-p)^3+o\bigl((x-p)^3\bigr)$$

第 7 回の問題 4 の (2) より $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{\gamma-p}{x-p}=\frac{1}{2}\neq0$, $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{4\gamma-p-3x}{x-p}=\lim_{x\to p}\frac{4\gamma-4p-3(x-p)}{x-p}=-1\neq0$ だから $o\bigl((\gamma-p)^4\bigr)=o\bigl((x-p)^4\bigr)$, $(4\gamma-p-3x)o\bigl((x-p)^3\bigr)=o\bigl((x-p)^4\bigr)$ であることに注意して上の 3 つの等式を (vi) に

代入すれば, 次の等式が得られる.

$$\frac{f''(p)}{2}\big((x-p)(8\gamma-5p-3x)-4(\gamma-p)^2\big)+\frac{f^{(3)}(p)}{6}\big((x-p)^2(12\gamma-6p-6x)-4(\gamma-p)^3\big)$$
$$+\frac{f^{(4)}(p)}{24}\big((x-p)^3(16\gamma-7p-9x)-4(\gamma-p)^4\big)=o\big((x-p)^4\big)\ \cdots(vii)$$

ここで, 第 7 回の問題 4 の (2) より $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{16\gamma-7p-9x}{x-p}=\lim_{x\to p}\frac{16(\gamma-p)-9(x-p)}{x-p}=\lim_{x\to p}\frac{16(\gamma-p)}{x-p}-9=-1$ だから $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{(x-p)^3(16\gamma-7p-9x)-4(\gamma-p)^4}{(x-p)^4}=\lim_{x\to p}\frac{16(\gamma-p)-9(x-p)}{x-p}-4\lim_{x\to p}\left(\frac{\gamma-p}{x-p}\right)^4=-\frac{5}{4}$ が成り立つ. 従って (vii) から

$$\frac{5f^{(4)}(p)}{96}=\lim_{x\to p}\left(\frac{f''(p)}{2}\big((x-p)(8\gamma-5p-3x)-4(\gamma-p)^2\big)+\frac{f^{(3)}(p)}{6}\big((x-p)^2(12\gamma-6p-6x)-4(\gamma-p)^3\big)\right)$$

が得られる. 第 7 回の問題 4 の結果とロピタルの定理を用いれば, 上式の右辺は以下のように変形される.

$$\begin{aligned}
\frac{5f^{(4)}(p)}{96}&=\lim_{x\to p}\frac{3f''(p)\big((x-p)(8\gamma-5p-3x)-4(\gamma-p)^2\big)+f^{(3)}(p)\big((x-p)^2(12\gamma-6p-6x)-4(\gamma-p)^3\big)}{6(x-p)^4}\\
&=\lim_{x\to p}\frac{3f''(p)\big((x-p)(8\gamma-5p-3x)-4(\gamma-p)^2\big)-4f^{(3)}(p)(\gamma-p)^3}{6(x-p)^4}+\lim_{x\to p}\frac{f^{(3)}(p)(2\gamma-p-x)}{(x-p)^2}\\
&=\lim_{x\to p}\frac{f''(p)(4\gamma-p-3x+4\gamma'(x-\gamma))-2f^{(3)}(p)\gamma'(\gamma-p)^2}{4(x-p)^3}+\lim_{x\to p}\frac{f^{(3)}(p)(2\gamma'-1)}{2(x-p)}\\
&=\lim_{x\to p}\frac{f''(p)\big(8\gamma'-3-4(\gamma')^2+4\gamma''(x-\gamma)\big)-2f^{(3)}(p)(2(\gamma')^2(\gamma-p)+\gamma''(\gamma-p)^2)}{12(x-p)^2}+\lim_{x\to p}f^{(3)}(p)\gamma''\\
&=\lim_{x\to p}\frac{f''(p)\big(8\gamma'-3-4(\gamma')^2+4\gamma''(x-\gamma)\big)-4f^{(3)}(p)(\gamma')^2(\gamma-p)}{12(x-p)^2}-\lim_{x\to p}\frac{f^{(3)}(p)\gamma''(\gamma-p)^2}{6(x-p)^2}+\frac{f^{(3)}(p)^2}{12f''(p)}\\
&=\lim_{x\to p}\frac{f''(p)\big(3\gamma''-3\gamma'\gamma''+\gamma^{(3)}(x-\gamma)\big)-f^{(3)}(p)((\gamma')^3+2\gamma'\gamma''(\gamma-p))}{6(x-p)}+\frac{23f^{(3)}(p)^2}{288f''(p)}\\
&=\lim_{x\to p}\frac{3\gamma''f''(p)(1-\gamma')-f^{(3)}(p)(\gamma')^3}{6(x-p)}+\lim_{x\to p}\frac{\gamma^{(3)}f''(p)(x-\gamma)}{6(x-p)}-\lim_{x\to p}\frac{f^{(3)}(p)\gamma'\gamma''(\gamma-p)}{3(x-p)}+\frac{23f^{(3)}(p)^2}{288f''(p)}\\
&=\lim_{x\to p}\frac{\gamma^{(3)}f''(p)(1-\gamma')-(\gamma'')^2f''(p)-f^{(3)}(p)(\gamma')^2\gamma''}{2}+\frac{f^{(4)}(p)}{96}+\frac{9f^{(3)}(p)^2}{144f''(p)}=\frac{f^{(4)}(p)}{24}+\frac{5f^{(3)}(p)^2}{288f''(p)}
\end{aligned}$$

故に $\dfrac{5f^{(4)}(p)}{96}=\dfrac{f^{(4)}(p)}{24}+\dfrac{5f^{(3)}(p)^2}{288f''(p)}$ だから, $3f''(p)f^{(4)}(p)=5f^{(3)}(p)^2$ が任意の $p\in I$ に対して成り立つ. 従って第 15 回の問題 4 から, 与えられた条件を満たす f は 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ であるか, $f(x)=\sqrt{ax+b}+cx+d$ または $f(x)=-\sqrt{ax+b}+cx+d$ という形の関数である.

10. (1) 直線 AB と PQ は平行だから $\triangle$ABC と $\triangle$PQC は相似である. 従って $\dfrac{S(\alpha,\beta)}{T(\alpha,\beta)}=\dfrac{(\mathrm{CA})^2}{(\mathrm{CP})^2}$ であり, A', C', P' をそれぞれ A, C, P から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点とすれば $\dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CP}}=\dfrac{\mathrm{C'A'}}{\mathrm{C'P'}}$ が成り立つ. 故に仮定から定数 c で $\mathrm{C'A'}=c\,\mathrm{C'P'}$ を満たすものが存在する. ℓ_α, ℓ_β, ℓ_γ の方程式は, それぞれ $y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$, $y=f'(\beta)(x-\beta)+f(\beta)$, $y=f'(\gamma)(x-\gamma)+f(\gamma)$ だから, C, P の x 座標は, それぞれ $\dfrac{\beta f'(\beta)-\alpha f'(\alpha)-f(\beta)+f(\alpha)}{f'(\beta)-f'(\alpha)}$, $\dfrac{\gamma f'(\gamma)-\alpha f'(\alpha)-f(\gamma)+f(\alpha)}{f'(\gamma)-f'(\alpha)}$ である. さらに A の x 座標が α であることから,

$$\mathrm{C'A'}=\frac{(\beta-\alpha)f'(\beta)-f(\beta)+f(\alpha)}{f'(\beta)-f'(\alpha)},\qquad \mathrm{P'A'}=\frac{(\gamma-\alpha)f'(\gamma)-f(\gamma)+f(\alpha)}{f'(\gamma)-f'(\alpha)}\ \cdots(i)$$

仮定から f'' は恒等的に 0 でないため, $f''(\alpha)\neq 0$ となる $\alpha\in I$ が存在する. $\mathrm{C'A'}=c\,\mathrm{C'P'}=c(\mathrm{C'A'}-\mathrm{P'A'})$ より

$(c-1)\mathrm{C'A'} = c\,\mathrm{P'A'}$ だから, $(c-1)\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\mathrm{C'A'}}{\beta-\alpha} = c\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\mathrm{P'A'}}{\beta-\alpha}$ が成り立つ. (i) から, ロピタルの定理を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\mathrm{C'A'}}{\beta-\alpha} &= \lim_{\beta\to\alpha}\frac{(\beta-\alpha)f'(\beta)-f(\beta)+f(\alpha)}{(\beta-\alpha)^2}\frac{1}{\frac{f'(\beta)-f'(\alpha)}{\beta-\alpha}} = \lim_{\beta\to\alpha}\frac{(\beta-\alpha)f'(\beta)-f(\beta)+f(\alpha)}{(\beta-\alpha)^2}\lim_{\beta\to\alpha}\frac{1}{\frac{f'(\beta)-f'(\alpha)}{\beta-\alpha}}\\ &= \lim_{\beta\to\alpha}\frac{(\beta-\alpha)f''(\beta)}{2(\beta-\alpha)}\frac{1}{\lim\limits_{\beta\to\alpha}\frac{f'(\beta)-f'(\alpha)}{\beta-\alpha}} = \frac{f''(\alpha)}{2}\frac{1}{f''(\alpha)} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

であり, また γ を β の関数とみなせば, (i) と第 7 回の問題 4 の (2), (3) の結果から次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\mathrm{P'A'}}{\beta-\alpha} &= \lim_{\beta\to\alpha}\frac{(\gamma-\alpha)f'(\gamma)-f(\gamma)+f(\alpha)}{(\beta-\alpha)^2}\frac{1}{\frac{f'(\gamma)-f'(\alpha)}{\beta-\alpha}} = \lim_{\beta\to\alpha}\frac{(\gamma-\alpha)f'(\gamma)-f(\gamma)+f(\alpha)}{(\beta-\alpha)^2}\lim_{\beta\to\alpha}\frac{1}{\frac{f'(\gamma)-f'(\alpha)}{\beta-\alpha}}\\ &= \lim_{\beta\to\alpha}\frac{(\gamma-\alpha)\gamma' f''(\gamma)}{2(\beta-\alpha)}\frac{1}{\lim\limits_{\beta\to\alpha}\frac{f'(\gamma)-f'(\alpha)}{\beta-\alpha}} = \lim_{\beta\to\alpha}\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\gamma' f''(\gamma)}{2}\frac{1}{\frac{f''(\alpha)}{2}} = \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{2}\frac{1}{f''(\alpha)} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

従って $\dfrac{c-1}{2} = \dfrac{c}{4}$ だから $c=2$ となるため $\dfrac{S(\alpha,\beta)}{T(\alpha,\beta)} = \dfrac{(\mathrm{CA})^2}{(\mathrm{CP})^2} = \dfrac{(\mathrm{C'A'})^2}{(\mathrm{C'P'})^2} = 2^2 = 4$ である.

(2) (1) の結果より $\mathrm{C'A'} = 2\mathrm{P'A'}$ だから (i) より

$$\frac{(\beta-\alpha)f'(\beta)-f(\beta)+f(\alpha)}{f'(\beta)-f'(\alpha)} = \frac{2((\gamma-\alpha)f'(\gamma)-f(\gamma)+f(\alpha))}{f'(\gamma)-f'(\alpha)}\ \cdots(ii)$$

が任意の $\alpha,\beta\in I$ に対して成り立つ. 以下で γ を $f(x)-f(p) = f'(\gamma)(x-p)$ を満たす x の関数とみなす. (ii) において β を x, α を p で置き換えれば次の等式が得られる.

$$(f'(\gamma)-f'(p))((x-p)f'(x)-f(x)+f(p)) = 2(f'(x)-f'(p))((\gamma-p)f'(\gamma)-f(\gamma)+f(p))\ \cdots(iii)$$

$x,p\in I$ に対し, テイラーの定理から次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}f(x) &= f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{f''(p)}{2}(x-p)^2+\frac{f^{(3)}(p)}{6}(x-p)^3+\frac{f^{(4)}(p)}{24}(x-p)^4+o\big((x-p)^4\big)\\ f(\gamma) &= f(p)+f'(p)(\gamma-p)+\frac{f''(p)}{2}(\gamma-p)^2+\frac{f^{(3)}(p)}{6}(\gamma-p)^3+\frac{f^{(4)}(p)}{24}(\gamma-p)^4+o\big((\gamma-p)^4\big)\\ f'(x) &= f'(p)+f''(p)(x-p)+\frac{f^{(3)}(p)}{2}(x-p)^2+\frac{f^{(4)}(p)}{6}(x-p)^3+o\big((x-p)^3\big)\\ f'(\gamma) &= f'(p)+f''(p)(\gamma-p)+\frac{f^{(3)}(p)}{2}(\gamma-p)^2+\frac{f^{(4)}(p)}{6}(\gamma-p)^3+o\big((\gamma-p)^3\big)\end{aligned}$$

第 7 回の問題 4 の (2) より $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{\gamma-p}{x-p} = \frac{1}{2}\neq 0$ だから $o\big((\gamma-p)^4\big) = o\big((x-p)^4\big)$ であることに注意して上の 3 つの等式を (vi) に代入すれば, 次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}12f''(p)^2(2\gamma-x-p)&+2f''(p)f^{(3)}(p)(8(\gamma-p)^2-4(x-p)^2+3(x-p)(\gamma-p))\\ &+f''(p)f^{(4)}(p)(6(\gamma-p)^3-3(x-p)^3+4(x-p)^2(\gamma-p)-2(x-p)(\gamma-p)^2)\\ &+4f^{(3)}(p)^2(x-p)(\gamma-p)(2\gamma-x-p) = o\big((x-p)^3\big)\ \cdots(iv)\end{aligned}$$

第 7 回の問題 4 の (2) より

$$\begin{aligned}\lim_{x\to p}\frac{6(\gamma-p)^3-3(x-p)^3+4(x-p)^2(\gamma-p)-2(x-p)(\gamma-p)^2}{(x-p)^3} &= \lim_{x\to p}\frac{6(\gamma-p)^3}{(x-p)^3}-3+\lim_{x\to p}\frac{4(\gamma-p)}{x-p}\\ &\quad -\lim_{x\to p}\frac{2(\gamma-p)^2}{(x-p)^2} = -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

であり, 第 7 回の問題 4 の (5) とロピタルの定理より

$$\lim_{x\to p}\frac{(x-p)(\gamma-p)(2\gamma-x-p)}{(x-p)^3} = \lim_{x\to p}\frac{(\gamma-p)(2\gamma-x-p)}{(x-p)^2} = \lim_{x\to p}(\gamma-p)\lim_{x\to p}\frac{2\gamma'-1}{2(x-p)} = 0$$

だから, (iv) から

$$\lim_{x\to p}\frac{12f''(p)^2(2\gamma-x-p)+2f''(p)f^{(3)}(p)(8(\gamma-p)^2-4(x-p)^2+3(x-p)(\gamma-p))}{(x-p)^3}=\frac{3}{4}f''(p)f^{(4)}(p)\ \cdots(v)$$

が得られる. ロピタルの定理と第 7 回の問題 4 の (5), (6) より

$$\begin{aligned}((v)\text{ の左辺}) &= \lim_{x\to p}\frac{12f''(p)^2(2\gamma'-1)+2f''(p)f^{(3)}(p)((16\gamma'+3)(\gamma-p)+(3\gamma'-8)(x-p))}{3(x-p)^2}\\ &= \lim_{x\to p}\frac{24f''(p)^2\gamma''+2f''(p)f^{(3)}(p)(16\gamma''(\gamma-p)+16(\gamma')^2+6\gamma'+3\gamma''(x-p)-8)}{6(x-p)}\\ &= \lim_{x\to p}\frac{24f''(p)^2\gamma^{(3)}+2f''(p)f^{(3)}(p)(16\gamma^{(3)}(\gamma-p)+48\gamma'\gamma''+9\gamma''+3\gamma^{(3)}(x-p))}{6}\\ &= \lim_{x\to p}4f''(p)^2\gamma^{(3)}+\lim_{x\to p}11f''(p)f^{(3)}(p)\gamma''\\ &= \frac{f''(p)f^{(4)}(p)}{2}+\frac{5f^{(3)}(p)^2}{12}\end{aligned}$$

となるため, $3f''(p)f^{(4)}(p)=5f^{(3)}(p)^2$ が任意の $p\in I$ に対して成り立つ. 従って第 15 回の問題 4 から, 与えられた条件を満たす f は 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ であるか, $f(x)=\sqrt{ax+b}+cx+d$ または $f(x)=-\sqrt{ax+b}+cx+d$ という形の関数である.

11. (1) A と B を通る直線の方程式は $y=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+f(\alpha)$ だから $T(\alpha,\beta)$ は以下で与えられる.

$$T(\alpha,\beta)=\left|\int_\alpha^\beta\left(\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+f(\alpha)-f(x)\right)dx\right|=\left|\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(f(\beta)+f(\alpha))-\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|$$

ℓ_α, ℓ_β の方程式は, それぞれ $y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$, $y=f'(\beta)(x-\beta)+f(\beta)$ で与えられる. ℓ_α と ℓ_β の交点を C とすれば, C の座標は

$$\left(\frac{\beta f'(\beta)-\alpha f'(\alpha)-f(\beta)+f(\alpha)}{f'(\beta)-f'(\alpha)},\ \frac{(\beta-\alpha)f'(\alpha)f'(\beta)-f'(\alpha)f(\beta)+f(\alpha)f'(\beta)}{f'(\beta)-f'(\alpha)}\right)$$

である. 従って $\triangle$ABC の面積を $U(\alpha,\beta)$ とおけば $U(\alpha,\beta)$ は次で与えられる.

$$U(\alpha,\beta)=\left|\frac{(\beta-\alpha)(f'(\alpha)+f'(\beta))(f(\beta)-f(\alpha))-(f(\beta)-f(\alpha))^2-(\beta-\alpha)^2f'(\alpha)f'(\beta)}{f'(\beta)-f'(\alpha)}\right|$$

$U(\alpha,\beta)=S(\alpha,\beta)+T(\alpha,\beta)$ であり $\dfrac{S(\alpha,\beta)}{T(\alpha,\beta)}$ は α, β によらない一定の値だから $\dfrac{U(\alpha,\beta)}{T(\alpha,\beta)}$ も α, β によらない一定の値である. 従って上の結果から任意の $\alpha,\beta\in I$ に対して次の等式を満たす定数 k が存在する.

$$\begin{aligned}&\frac{k(\beta-\alpha)(f(\beta)+f(\alpha))}{2}-k\int_\alpha^\beta f(x)dx\\ &\qquad=\frac{(\beta-\alpha)(f'(\alpha)+f'(\beta))(f(\beta)-f(\alpha))-(f(\beta)-f(\alpha))^2-(\beta-\alpha)^2f'(\alpha)f'(\beta)}{f'(\beta)-f'(\alpha)}\end{aligned}$$

g を f の原始関数とすれば, g は 3 回微分可能で, 3 次導関数は連続である. このとき上式から次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}&k(\beta-\alpha)(g''(\beta)-g''(\alpha))(g'(\beta)+g'(\alpha))-2k(g''(\beta)-g''(\alpha))(g(\beta)-g(\alpha))\\ &\quad=2(\beta-\alpha)(g''(\alpha)+g''(\beta))(g'(\beta)-g'(\alpha))-2(g'(\beta)-g'(\alpha))^2-2(\beta-\alpha)^2g''(\alpha)g''(\beta)\ \cdots\ (i)\end{aligned}$$

この両辺を $(\beta-\alpha)^4$ で割り, β を α に近づければ

$$\begin{aligned}&\lim_{\beta\to\alpha}\frac{k(\beta-\alpha)(g''(\beta)-g''(\alpha))(g'(\beta)+g'(\alpha))-2k(g''(\beta)-g''(\alpha))(g(\beta)-g(\alpha))}{(\beta-\alpha)^4}\\ &\quad=\lim_{\beta\to\alpha}\frac{2(\beta-\alpha)(g''(\alpha)+g''(\beta))(g'(\beta)-g'(\alpha))-2(g'(\beta)-g'(\alpha))^2-2(\beta-\alpha)^2g''(\alpha)g''(\beta)}{(\beta-\alpha)^4}\ \cdots\ (ii)\end{aligned}$$

が成り立つ. ロピタルの定理を用いて (ii) の左辺を計算すると,

$$
\begin{aligned}
&k\lim_{\beta\to\alpha}\frac{g^{(3)}(\beta)((\beta-\alpha)(g'(\beta)+g'(\alpha))-2(g(\beta)-g(\alpha)))+((\beta-\alpha)g''(\beta)-g'(\beta)+g'(\alpha))(g''(\beta)-g''(\alpha))}{4(\beta-\alpha)^3}\\
&=k\lim_{\beta\to\alpha}\left(g^{(3)}(\beta)\frac{(\beta-\alpha)(g'(\beta)+g'(\alpha))-2(g(\beta)-g(\alpha))}{4(\beta-\alpha)^3}+\frac{((\beta-\alpha)g''(\beta)-g'(\beta)+g'(\alpha))(g''(\beta)-g''(\alpha))}{4(\beta-\alpha)^3}\right)\\
&=kg^{(3)}(\alpha)\lim_{\beta\to\alpha}\frac{(\beta-\alpha)g''(\beta)-g'(\beta)+g'(\alpha)}{12(\beta-\alpha)^2}\\
&\quad+k\lim_{\beta\to\alpha}\frac{(\beta-\alpha)g^{(3)}(\beta)(g''(\beta)-g''(\alpha))+g^{(3)}(\beta)((\beta-\alpha)g''(\beta)-g'(\beta)+g'(\alpha))}{12(\beta-\alpha)^2}\\
&=kg^{(3)}(\alpha)\lim_{\beta\to\alpha}\frac{(\beta-\alpha)g''(\beta)-g'(\beta)+g'(\alpha)}{6(\beta-\alpha)^2}+k\lim_{\beta\to\alpha}\frac{g^{(3)}(\beta)(g''(\beta)-g''(\alpha))}{12(\beta-\alpha)}\\
&=kg^{(3)}(\alpha)\lim_{\beta\to\alpha}\frac{(\beta-\alpha)g^{(3)}(\beta)}{12(\beta-\alpha)}+k\frac{g^{(3)}(\alpha)^2}{12}=\frac{kg^{(3)}(\alpha)^2}{6}=\frac{kf''(\alpha)^2}{6}
\end{aligned}
$$

となり, 同様に (ii) の右辺を計算すると, 以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\beta\to\alpha}\frac{(g''(\alpha)-g''(\beta))(g'(\beta)-g'(\alpha))+(\beta-\alpha)(g^{(3)}(\beta)(g'(\beta)-g'(\alpha))+g''(\beta)(g''(\beta)-g''(\alpha)))-(\beta-\alpha)^2g''(\alpha)g^{(3)}(\beta)}{2(\beta-\alpha)^3}\\
&=\lim_{\beta\to\alpha}\left(\frac{(g''(\alpha)-g''(\beta))(g'(\beta)-g'(\alpha))+(\beta-\alpha)g''(\beta)(g''(\beta)-g''(\alpha))}{2(\beta-\alpha)^3}+\frac{g^{(3)}(\beta)(g'(\beta)-g'(\alpha)-(\beta-\alpha)g''(\alpha))}{2(\beta-\alpha)^2}\right)\\
&=\lim_{\beta\to\alpha}g^{(3)}(\beta)\frac{(\beta-\alpha)(2g''(\beta)-g''(\alpha))-(g'(\beta)-g'(\alpha))}{6(\beta-\alpha)^2}+g^{(3)}(\alpha)\lim_{\beta\to\alpha}\frac{g''(\beta)-g''(\alpha)}{4(\beta-\alpha)}\\
&=g^{(3)}(\alpha)\lim_{\beta\to\alpha}\frac{g''(\beta)-g''(\alpha)+2(\beta-\alpha)g^{(3)}(\beta)}{12(\beta-\alpha)}+\frac{g^{(3)}(\alpha)^2}{4}=g^{(3)}(\alpha)\lim_{\beta\to\alpha}\left(\frac{g''(\beta)-g''(\alpha)}{12(\beta-\alpha)}+\frac{g^{(3)}(\beta)}{6}\right)+\frac{g^{(3)}(\alpha)^2}{4}\\
&=\frac{g^{(3)}(\alpha)^2}{2}
\end{aligned}
$$

従って $\dfrac{kf''(\alpha)^2}{6}=\dfrac{f''(\alpha)^2}{2}$ であり, 仮定から $f''(\alpha)\neq 0$ となる $\alpha\in I$ が存在するため $k=3$ である. 故に $\dfrac{U(\alpha,\beta)}{T(\alpha,\beta)}=3$ で, $U(\alpha,\beta)=S(\alpha,\beta)+T(\alpha,\beta)$ だから, $\dfrac{S(\alpha,\beta)}{T(\alpha,\beta)}=2$ である.

(2) 上の結果から (i) の k に 3 を代入して整理すれば次の等式が得られる.

$$
\begin{aligned}
2(\beta-\alpha)^2g''(\alpha)g''(\beta)+(\beta-\alpha)(g'(\beta)g''(\beta)-5g'(\beta)g''(\alpha)+5g'(\alpha)g''(\beta)-g'(\alpha)g''(\alpha))&\\
-6(g(\beta)-g(\alpha))(g''(\beta)-g''(\alpha))+2(g'(\beta)-g'(\alpha))^2=0\ \cdots\ (iii)&
\end{aligned}
$$

仮定から g は 5 回微分可能で, 5 次導関数は連続であることに注意する. そこで, 一般に 5 回微分可能で, 5 次導関数が連続である関数 $g:I\to\boldsymbol{R}$ と $p\in I$ に対して関数 $F:I\to\boldsymbol{R}$ を以下のように定義する.

$$
\begin{aligned}
F(x)=2(x-p)^2g''(p)g''(x)+(x-p)(g'(x)g''(x)-5g'(x)g''(p)+5g'(p)g''(x)-g'(p)g''(p))&\\
-6(g(x)-g(p))(g''(x)-g''(p))+2(g'(x)-g'(p))^2&
\end{aligned}
$$

このとき以下の等式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
F'(x)&=2(x-p)^2g''(p)g^{(3)}(x)+(x-p)(g''(x)^2-g''(p)g''(x)+g'(x)g^{(3)}(x)+5g'(p)g^{(3)}(x))\\
&\quad-g'(x)g''(x)+g'(x)g''(p)+g'(p)g''(x)-g'(p)g''(p)-6g(x)g^{(3)}(x)+6g(p)g^{(3)}(x)\\
F''(x)&=2(x-p)^2g''(p)g^{(4)}(x)+(x-p)(3g''(x)g^{(3)}(x)+3g''(p)g^{(3)}(x)+g'(x)g^{(4)}(x)+5g'(p)g^{(4)}(x))\\
&\quad-6g'(x)g^{(3)}(x)+6g'(p)g^{(3)}(x)-6g(x)g^{(4)}(x)+6g(p)g^{(4)}(x)\\
F^{(3)}(x)&=g^{(5)}(x)(2(x-p)^2g''(p)+(x-p)(g'(x)+5g'(p))-6g(x)+6g(p))\\
&\quad+(x-p)(3g^{(3)}(x)^2+(4g''(x)+7g''(p))g^{(4)}(x))-3(g''(x)-g''(p))g^{(3)}(x)-11(g'(x)-g'(p))g^{(4)}(x)
\end{aligned}
$$

$F(p)=F'(p)=F''(p)=0$ だからロピタルの定理から次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to p}\frac{F(x)}{(x-p)^6}=\lim_{x\to p}\frac{F'(x)}{6(x-p)^5}=\lim_{x\to p}\frac{F''(x)}{30(x-p)^4}=\lim_{x\to p}\frac{F^{(3)}(x)}{120(x-p)^3}\\
&\quad=\lim_{x\to p}g^{(5)}(x)\frac{2(x-p)^2g''(p)+(x-p)(g'(x)+5g'(p))-6g(x)+6g(p)}{120(x-p)^3}\\
&\qquad+\lim_{x\to p}\frac{(x-p)(3g^{(3)}(x)^2+(4g''(x)+7g''(p))g^{(4)}(x))-3(g''(x)-g''(p))g^{(3)}(x)-11(g'(x)-g'(p))g^{(4)}(x)}{120(x-p)^3}\\
&\quad=g^{(5)}(p)\lim_{x\to p}\frac{(x-p)(g''(x)+4g''(p))-5g'(x)+5g'(p)}{360(x-p)^2}\\
&\qquad+\lim_{x\to p}\frac{g^{(5)}(x)((x-p)(4g''(x)+7g''(p))-11g'(x)+11g'(p))+10g^{(4)}(x)((x-p)g^{(3)}(x)-g''(x)+g''(p))}{360(x-p)^2}\\
&\quad=g^{(5)}(p)\lim_{x\to p}\frac{(x-p)g^{(3)}(x)-4g''(x)+4g''(p)}{720(x-p)}+g^{(5)}(p)\lim_{x\to p}\frac{(x-p)(4g''(x)+7g''(p))-11g'(x)+11g'(p)}{360(x-p)^2}\\
&\qquad+g^{(4)}(p)\lim_{x\to p}\frac{(x-p)g^{(3)}(x)-g''(x)+g''(p)}{36(x-p)^2}\\
&\quad=-\frac{g^{(3)}(p)g^{(5)}(p)}{240}+g^{(5)}(p)\lim_{x\to p}\frac{4(x-p)g^{(3)}(x)-7g''(x)+7g''(p)}{720(x-p)}+g^{(4)}(p)\lim_{x\to p}\frac{(x-p)g^{(4)}(x)}{72(x-p)}\\
&\quad=-\frac{g^{(3)}(p)g^{(5)}(p)}{240}-\frac{g^{(3)}(p)g^{(5)}(p)}{240}+\frac{g^{(4)}(p)^2}{72}=-\frac{g^{(3)}(p)g^{(5)}(p)}{120}+\frac{g^{(4)}(p)^2}{72}=-\frac{f''(p)f^{(4)}(p)}{120}+\frac{f^{(3)}(p)^2}{72}
\end{aligned}$$

g が (iii) を満たすとき, F はつねに値が 0 である定数値関数だから, 上の結果から $-\dfrac{f''(p)f^{(4)}(p)}{120}+\dfrac{f^{(3)}(p)^2}{72}=0$ である. 従って $3f''(p)f^{(4)}(p)=5f^{(3)}(p)^2$ が任意の $p\in I$ に対して成り立つため, 第 15 回の問題 4 から, 与えられた条件を満たす f は 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ であるか, $f(x)=\sqrt{ax+b}+cx+d$ または $f(x)=-\sqrt{ax+b}+cx+d$ という形の関数である.

微積分学 II 演習問題　第 17 回　2 変数関数の極限と連続性

1. 次の極限が存在する場合はその値を求め, 存在しない場合はその理由を答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{2}{1}} \frac{\cos(\pi xy)}{1+2xy}$　(2) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{e^y\sin(xy)}{xy}$　(3) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^3-3xy}{x^2+y^2}$　(5) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{2x^3-y^3}{4x^2+y^2}$　(6) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

(7) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{\sqrt{x^4+2y^4}}{x^2+y^2}$　(8) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^3+y^4}{x^2+4y^2}$　(9) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2}$

(10) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy}{x^2+y^4}$　(11) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy^3}{x^2+y^4}$　(12) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(13) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$　(14) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$　(15) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$

(16) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^2y}{x^2+y^4}$　(17) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(18) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} (x^2+y^2)\log(x^2+y^2)$

2. 前問の問 (n) $(n=3,4,\ldots,18)$ で極限を考えた, $\boldsymbol{R}^2$ から原点を除いた集合で定義される関数を f_n とする. (例えば, f_3 は $f_3\binom{x}{y}=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ で与えられる関数.) 関数 $\bar{f}_n:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を

$$\bar{f}_n\binom{x}{y}=\begin{cases} f_n\binom{x}{y} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y}=\binom{0}{0} \end{cases}$$

で定めるとき, 各 $n=3,4,\ldots,18$ について, $\bar{f}_n$ の原点における連続性について調べよ.

3. (発展問題) (1) $\boldsymbol{R}^2$ で定義される関数 $\bar{f}_2$ を

$$\bar{f}_2\binom{x}{y}=\begin{cases} \dfrac{e^y\sin(xy)}{xy} & xy\neq 0 \\ e^y & xy=0 \end{cases}$$

で定義するとき, 集合 $\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, xy=0\right\}$ の各点における $\bar{f}_2$ の連続性について調べよ.

(2) $\boldsymbol{R}^2$ で定義される関数 $\bar{f}_1$ を

$$\bar{f}_1\binom{x}{y}=\begin{cases} \dfrac{\cos(\pi xy)}{1+2xy} & xy\neq -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} & xy=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

で定義するとき, 集合 $\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, xy=-\frac{1}{2}\right\}$ の各点における $\bar{f}_1$ の連続性について調べよ.

4. (発展問題) a, b, m, n, p, q を正の実数とする. $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{|x|^m|y|^n}{a|x|^p+b|y|^q}=0$ であるための必要十分条件を求めよ.

5. (発展問題) m, n, p, q, r を正の実数とし, 関数 $f:\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x>0,\, y>0\right\}\to\boldsymbol{R}$ を

$$f\binom{x}{y}=mx+ny-r\min\{px,qy\}-\min\{x,y\}$$

で定める. このとき, f が負の値をとるための必要十分条件を求めよ.

6. (発展問題) m, n, p, q, r を正の実数とする. $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{|x|^m|y|^n}{(|x|^p+|y|^q)^r\sqrt{x^2+y^2}}=0$ であるための必要十分条件を求めよ.

第 17 回の演習問題の解答

1. (1) $f: \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \, xy \neq -\frac{1}{2} \right\} \to \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$, $g: \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \to \boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = xy$, $g(t) = \dfrac{\cos(\pi t)}{1+2t}$ で定めれば, f, g はともに連続関数 だから, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} \frac{\cos(\pi xy)}{1+2xy} = \lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} g\left(f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = g\left(\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = g\left(f\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = g(2) = \frac{1}{5}$.

(2) $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = xy$, $g(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$ で定めれば, 明らかに f は連続関数であり, $\displaystyle\lim_{t \to 0} g(t) = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 = g(0)$ より, g は 0 で連続である．従って $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{\sin(xy)}{xy} = \lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} g\left(f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = g\left(\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = g(0) = 1$ となるため, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{e^y \sin(xy)}{xy} = \lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} e^y \lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$.

(3) $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ が存在すると仮定して, この値を c とおき, 関数 $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ c & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \end{cases}$ で定めると, f は $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で連続である．従って, $\displaystyle\lim_{t \to 0} g(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ を満たす任意の写像 $g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ に対して, $\displaystyle\lim_{t \to 0} f(g(t)) = f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = c$ となるはずである．ところが, 実数 k に対し, g を $g(t) = \left(\begin{smallmatrix} t \\ kt \end{smallmatrix}\right)$ で定めれば, $\displaystyle\lim_{t \to 0} f(g(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2-k^2t^2}{t^2+k^2t^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}$ となり, $\displaystyle\lim_{t \to 0} f(g(t))$ が $\displaystyle\lim_{t \to 0} g(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ を満たす写像 g に依存しない値 c であることと矛盾する．故に, 極限値 $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ は存在しない.

(4) $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{x^3-3xy}{x^2+y^2}$ が存在すると仮定して, この値を c とおき, 関数 $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \frac{x^3-3xy}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ c & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \end{cases}$ で定めると, f は $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で連続である．従って, $\displaystyle\lim_{t \to 0} g(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ を満たす任意の写像 $g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ に対して, $\displaystyle\lim_{t \to 0} f(g(t)) = f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = c$ となるはずである．ところが, 実数 k に対し, g を $g(t) = \left(\begin{smallmatrix} t \\ kt \end{smallmatrix}\right)$ で定めれば, $\displaystyle\lim_{t \to 0} f(g(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{t^3-3kt^2}{t^2+k^2t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{t-3k}{1+k^2} = \frac{-3k}{1+k^2}$ となり, $\displaystyle\lim_{t \to 0} f(g(t))$ が $\displaystyle\lim_{t \to 0} g(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ を満たす写像 g に依存しない値 c であることと矛盾する．故に, 極限値 $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{x^3-xy}{x^2+y^2}$ は存在しない.

(5) $x^2 \leqq 4x^2+y^2$, $y^2 \leqq 4x^2+y^2$ より, $|2x^3| \leqq 2|x|(4x^2+y^2)$, $|y^3| \leqq |y|(4x^2+y^2)$ である．よって $|2x^3-y^3| \leqq |2x^3|+|y^3| \leqq (2|x|+|y|)(4x^2+y^2)$ となるため, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ならば $\left|\dfrac{2x^3-y^3}{4x^2+y^2}\right| \leqq 2|x|+|y|$ が成り立つ．ここで, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ のとき, $2|x|+|y| \to 0$ だから, 上の不等式から, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{2x^3-y^3}{4x^2+y^2} = 0$ である.

(6) $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ が存在すると仮定して, この値を c とおき, 関数 $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ c & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \end{cases}$ で定めると, f は $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で連続である．従って, $\displaystyle\lim_{t \to 0} g(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ を満たす任意の写像 $g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ に対して $\displaystyle\lim_{t \to 0} f(g(t)) = f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = c$ となるはずである．ところが, 実数 k に対し, g を $g(t) = \left(\begin{smallmatrix} kt^2 \\ t \end{smallmatrix}\right)$ で定めれば, $\displaystyle\lim_{t \to 0} f(g(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{kt^4}{k^2t^4+t^4} = \frac{k}{k^2+1}$ となり, $\displaystyle\lim_{t \to 0} f(g(t))$ が $\displaystyle\lim_{t \to 0} g(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ を満たす写像 g に依存しない値 c であることと矛盾する．故に, 極限値 $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ は存在しない.

(7) $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{\sqrt{x^4+2y^4}}{x^2+y^2}$ が存在すると仮定して, この値を c とおき, 関数 $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を

$f\binom{x}{y} = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^4+2y^4}}{x^2+y^2} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ c & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$ で定めると，f は $\binom{0}{0}$ で連続である．従って，$\lim_{t\to 0} g(t) = \binom{0}{0}$ を満たす任意の写像 $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ に対して，$\lim_{t\to 0} f(g(t)) = f\binom{0}{0} = c$ となるはずである．ところが，実数 k に対し，g を $g(t) = \binom{t}{kt}$ で定めれば，$\lim_{t\to 0} f(g(t)) = \lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t^4 + 2k^4t^4}}{t^2 + k^2t^2} = \dfrac{\sqrt{1+2k^4}}{1+k^2}$ となり，$\lim_{t\to 0} f(g(t))$ が $\lim_{t\to 0} g(t) = \binom{0}{0}$ を満たす写像 g に依存しない値 c であることと矛盾する．故に，極限値 $\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \dfrac{\sqrt{x^4+2y^4}}{x^2+y^2}$ は存在しない．

(8) $x^2 \leqq x^2 + 4y^2$, $y^2 \leqq x^2 + 4y^2$ より，$|x^3| \leqq |x|(x^2+4y^2)$, $|y^4| \leqq y^2(x^2+4y^2)$ である．よって $|x^3+y^4| \leqq |x^3|+|y^4| \leqq (|x|+y^2)(x^2+4y^2)$ となるため，$\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$ ならば $\left|\dfrac{x^3+y^4}{x^2+4y^2}\right| \leqq |x|+y^2$ が成り立つ．ここで，$\binom{x}{y} \to \binom{0}{0}$ のとき，$|x|+y^2 \to 0$ だから，上の不等式から，$\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \dfrac{x^3+y^4}{x^2+4y^2} = 0$ である．

(9) $\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \dfrac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2}$ が存在すると仮定して，この値を c とおき，関数 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y} = \begin{cases} \frac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ c & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$ で定めると，g は $\binom{0}{0}$ で連続である．従って，$\lim_{t\to 0} g(t) = \binom{0}{0}$ を満たす任意の写像 $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ に対して，$\lim_{t\to 0} f(g(t)) = f\binom{0}{0} = c$ となるはずである．ところが，実数 k に対し，g を $g(t) = \binom{t}{kt}$ で定めれば，$\lim_{t\to 0} f(g(t)) = \lim_{t\to 0} \dfrac{t^2 - 2k^2t^2}{3t^2 + k^2t^2} = \dfrac{1-2k^2}{3+k^2}$ となり，$\lim_{t\to 0} f(g(t))$ が $\lim_{t\to 0} g(t) = \binom{0}{0}$ を満たす写像 g に依存しない値 c であることと矛盾する．故に，極限値 $\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \dfrac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2}$ は存在しない．

(10) $\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \dfrac{xy}{x^2+y^4}$ が存在すると仮定して，この値を c とおき，関数 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y} = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^4} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ c & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$ で定めると，f は $\binom{0}{0}$ で連続である．従って，$\lim_{t\to 0} g(t) = \binom{0}{0}$ を満たす任意の写像 $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ に対して，$\lim_{t\to 0} f(g(t)) = f\binom{0}{0} = c$ となるはずである．ところが，実数 k に対し，g を $g(t) = \binom{t}{kt}$ で定めれば，$\lim_{t\to 0} f(g(t)) = \lim_{t\to 0} \dfrac{kt^2}{t^2 + k^2t^4} = \lim_{t\to 0} \dfrac{k}{1+k^2t^2} = k$ となり，$\lim_{t\to 0} f(g(t))$ が $\lim_{t\to 0} g(t) = \binom{0}{0}$ を満たす写像 g に依存しない値 c であることと矛盾する．故に，極限値 $\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \dfrac{xy}{x^2+y^4}$ は存在しない．

(11) (相加平均) $\geqq$ (相乗平均) より $\dfrac{x^2+y^4}{2} \geqq \sqrt{x^2y^4} = |x|y^2$．よって $\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$ ならば $\dfrac{|x|y^2}{x^2+y^4} \leqq \dfrac{1}{2}$ となるため，$\left|\dfrac{2xy^3}{x^2+y^4}\right| \leqq \dfrac{|y|}{2}$ が成り立つ．ここで，$\binom{x}{y} \to \binom{0}{0}$ のとき，$|y| \to 0$ だから，上の不等式から，$\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4} = 0$ である．

(12) $\left|\sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqq 1$ だから $\left|xy \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqq |xy|$ である．ここで，$\binom{x}{y} \to \binom{0}{0}$ のとき，$|xy| \to 0$ だから，上の不等式から，$\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} xy \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ である．

(13) $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y} = x^2 + y^2$, $g(t) = \begin{cases} \frac{e^t-1}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$ で定めれば，明らかに f は連続関数であり，$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} \dfrac{e^t-1}{t} = 1 = g(0)$ より，g は 0 で連続である．従って $\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} g(f\binom{x}{y}) = g\left(\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f\binom{x}{y}\right) = g(0) = 1$ である．

(14) $\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \dfrac{\sin xy}{x^2+y^2}$ が存在すると仮定して，この値を c とおき，関数 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を

$f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ c & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \end{cases}$ で定めると, f は $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で連続である. 従って, $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ を満たす任意の写像 $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ に対して, $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(g(t)) = f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = c$ となるはずである. ところが, 0 でない実数 k に対し, g を $g(t) = \left(\begin{smallmatrix} t \\ kt \end{smallmatrix}\right)$ で定めれば, $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(g(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(kt^2)}{t^2+k^2t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(kt^2)}{kt^2}\frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}$ となり, $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(g(t))$ が $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ を満たす写像 g に依存しない値 c であることと矛盾する. 故に, 極限値 $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$ は存在しない.

(15) $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \sqrt{x^2+y^2}$, $g(t) = \begin{cases} \frac{1-\cos t}{t^2} & t \neq 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \end{cases}$ で定めれば, 明らかに f は連続関数であり, 教科書の例題 1.8 の (2) により, $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2} = g(0)$ より, g は 0 で連続である. 従って $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} g\left(f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = g\left(\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = g(0) = \frac{1}{2}$ である.

(16) $0 \leqq x^2 \leqq x^2 + y^4$ だから $\dfrac{x^2}{x^2+y^4} \leqq 1$ である. この両辺に $|y|$ をかければ $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^4}\right| \leqq |y|$ が成り立つ. ここで, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ のとき, $|y| \to 0$ だから, 上の不等式から, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{x^2y}{x^2+y^4} = 0$ である.

(17) $x^2 \leqq x^2+y^2$, $y^2 \leqq x^2+y^2$ より, 両辺の平方根をとれば $|x| \leqq \sqrt{x^2+y^2}$, $|y| \leqq \sqrt{x^2+y^2}$ である. これらの両辺はともに 0 以上だから辺々かけあわせて $|xy| \leqq x^2+y^2$ が得られる. さらにこの両辺を $\sqrt{x^2+y^2}$ で割れば, $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqq \sqrt{x^2+y^2}$ を得る. ここで, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ のとき, $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$ だから, 上の不等式から, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ である.

(18) $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^2+y^2$, $g(t) = \begin{cases} t\log|t| & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$ で定めれば, 明らかに f 連続関数であり, 教科書の問 1.18 より $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} t\log|t| = 0 = g(0)$ だから, g は 0 で連続である. 従って $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} (x^2+y^2)\log(x^2+y^2) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} g\left(f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = g\left(\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = g(0) = 0$ である.

2. (3) 前問の (3) より, 極限値 $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \bar{f}_3\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} f_3\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ は存在しないため, $\bar{f}_3$ は原点で連続ではない.

(4) 前問の (4) より, 極限値 $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \bar{f}_4\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} f_4\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{x^3-xy}{x^2+y^2}$ は存在しないため, $\bar{f}_4$ は原点で連続ではない.

(5) 前問の (5) より, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \bar{f}_5\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} f_5\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{2x^3-y^3}{4x^2+y^2} = 0 = \bar{f}_5\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ となるため, $\bar{f}_5$ は原点で連続である.

(6) 前問の (6) より, 極限値 $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \bar{f}_6\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} f_6\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ は存在しないため, $\bar{f}_6$ は原点で連続ではない.

(7) 前問の (7) より, 極限値 $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \bar{f}_7\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} f_7\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{\sqrt{x^4+2y^4}}{x^2+y^2}$ は存在しないため, $\bar{f}_7$ は原点で連続ではない.

(8) 前問の (8) より, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \bar{f}_8\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} f_8\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{x^3+y^4}{x^2+4y^2} = 0 = \bar{f}_8\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ となるため, $\bar{f}_8$ は原点で連続である.

(9) 前問の (9) より, 極限値 $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \bar{f}_9\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} f_9\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2}$ は存在しないため, $\bar{f}_9$ は原点で連続ではない.

(10) 前問の (10) より, 極限値 $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\bar{f}_{10}\binom{x}{y}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}f_{10}\binom{x}{y}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{xy}{x^2+y^4}$ は存在しないため, $\bar{f}_{10}$ は原点で連続ではない.

(11) 前問の (11) より, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\bar{f}_{11}\binom{x}{y}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}f_{11}\binom{x}{y}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{xy^3}{x^2+y^4}=0=\bar{f}_{11}\binom{0}{0}$ となるため, $\bar{f}_{11}$ は原点で連続である.

(12) 前問の (12) より, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\bar{f}_{12}\binom{x}{y}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}f_{12}\binom{x}{y}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=\bar{f}_{12}\binom{0}{0}$ となるため, $\bar{f}_{12}$ は原点で連続である.

(13) 前問の (13) より, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\bar{f}_{13}\binom{x}{y}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}f_{13}\binom{x}{y}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}=1\neq 0=\bar{f}_{13}\binom{0}{0}$ となるため, $\bar{f}_{13}$ は原点で連続ではない.

(14) 前問の (14) より, 極限値 $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\bar{f}_{14}\binom{x}{y}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}f_{14}\binom{x}{y}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{\sin xy}{x^2+y^2}$ は存在しないため, $\bar{f}_{14}$ は原点で連続ではない.

(15) 前問の (15) より, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\bar{f}_{15}\binom{x}{y}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}f_{15}\binom{x}{y}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\neq 0=\bar{f}_{15}\binom{0}{0}$ となるため, $\bar{f}_{15}$ は原点で連続ではない.

(16) 前問の (16) より, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\bar{f}_{16}\binom{x}{y}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}f_{16}\binom{x}{y}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^4}=0=\bar{f}_{16}\binom{0}{0}$ となるため, $\bar{f}_{16}$ は原点で連続である.

(17) 前問の (17) より, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\bar{f}_{17}\binom{x}{y}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}f_{17}\binom{x}{y}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=\bar{f}_{17}\binom{0}{0}$ となるため, $\bar{f}_{17}$ は原点で連続である.

(18) 前問の (18) より, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\bar{f}_{18}\binom{x}{y}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}f_{18}\binom{x}{y}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}(x^2+y^2)\log(x^2+y^2)=0=\bar{f}_{18}\binom{0}{0}$ となるため, $\bar{f}_{18}$ は原点で連続である.

3. (1) 関数 f, g を 1 の (2) のように定めれば, これらは連続関数だから, 合成関数 $g\circ f$ も連続関数である. また, 関数 $p:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$, $h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ をそれぞれ $p\binom{x}{y}=y$, $h(t)=e^t$ で定めれば, p, h はともに連続関数であるため, 合成関数 $h\circ p$ も連続関数である. さらに, 任意の $\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2$ に対して $\bar{f}_2\binom{x}{y}=(h\circ p)\binom{x}{y}(g\circ f)\binom{x}{y}$ が成り立ち, $\bar{f}_2$ は連続関数の $h\circ p$ と $g\circ f$ の積であるため, $\bar{f}_2$ は連続関数ある. 従って $\bar{f}_2$ は $\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\, xy=0\right\}$ の各点で連続である.

(2) $s=1+2t$ とおくと, $t=\dfrac{s-1}{2}$ であり, $t\to-\dfrac{1}{2}$ のとき $s\to 0$ だから $\displaystyle\lim_{t\to-\frac{1}{2}}\frac{\cos(\pi t)}{1+2t}=\lim_{s\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi(s-1)}{2}\right)}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{\pi}{2}\frac{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{\frac{\pi s}{2}}=\frac{\pi}{2}$ が成り立つ. 従って $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $g(t)=\begin{cases}\frac{\cos(\pi t)}{1+2t} & t\neq-\frac{1}{2}\\ \frac{\pi}{2} & t=-\frac{1}{2}\end{cases}$ で定めれば, g は連続関数である. さらに $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y}=xy$ で定めれば, f は連続関数であり, $\bar{f}_1=g\circ f$ が成り立つ. 従って $\bar{f}_1$ は連続関数の合成だから連続関数になるため, $\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\, xy=-\frac{1}{2}\right\}$ の各点で連続である.

4. $t,\alpha,\beta>0$, $x=(\alpha t)^{\frac{1}{p}}$, $y=(\beta t)^{\frac{1}{q}}$ とすれば $\dfrac{|x|^m|y|^n}{a|x|^p+b|y|^q}=\dfrac{\alpha^{\frac{m}{p}}\beta^{\frac{n}{q}}t^{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}-1}}{a\alpha+b\beta}$ である. ここで $\dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{q}<1$ ならば $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{\alpha^{\frac{m}{p}}\beta^{\frac{n}{q}}t^{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}-1}}{a\alpha+b\beta}=\infty$ であり, $\dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{q}=1$ ならば $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{\alpha^{\frac{m}{p}}\beta^{\frac{n}{q}}t^{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}-1}}{a\alpha+b\beta}=\frac{\alpha^{\frac{m}{p}}\beta^{\frac{n}{q}}}{a\alpha+b\beta}$ となって, この場合の極限値は α, β に依存するため, $\dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{q}\leqq 1$ ならば $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{|x|^m|y|^n}{a|x|^p+b|y|^q}$ は収束しない. $x\neq 0$ かつ $|x|^p\geqq|y|^q$ ならば $\dfrac{|y|^q}{|x|^p}\leqq 1$ だから $\dfrac{|x|^m|y|^n}{a|x|^p+b|y|^q}=\dfrac{|x|^{p\left(\frac{m}{p}+\frac{n}{q}\right)}}{a|x|^p+b|y|^q}\left(\dfrac{|y|^q}{|x|^p}\right)^{\frac{n}{q}}\leqq\dfrac{|x|^{p\left(\frac{m}{p}+\frac{n}{q}\right)}}{a|x|^p+b|y|^q}=\dfrac{|x|^{p\left(\frac{m}{p}+\frac{n}{q}-1\right)}}{a+b\frac{|y|^q}{|x|^p}}\leqq\dfrac{|x|^{p\left(\frac{m}{p}+\frac{n}{q}-1\right)}}{a}$ であり, $y\neq 0$ かつ $|x|^p\leqq|y|^q$ ならば $\dfrac{|x|^p}{|y|^q}\leqq 1$ だから $\dfrac{|x|^m|y|^n}{a|x|^p+b|y|^q}=\dfrac{|y|^{q\left(\frac{m}{p}+\frac{n}{q}\right)}}{a|x|^p+b|y|^q}\left(\dfrac{|x|^p}{|y|^q}\right)^{\frac{m}{p}}\leqq\dfrac{|y|^{q\left(\frac{m}{p}+\frac{n}{q}\right)}}{a|x|^p+b|y|^q}=\dfrac{|y|^{q\left(\frac{m}{p}+\frac{n}{q}-1\right)}}{a\frac{|x|^p}{|y|^q}+b}\leqq\dfrac{|y|^{q\left(\frac{m}{p}+\frac{n}{q}-1\right)}}{b}$ が成り立つ. 従って, $c=\min\{a,b\}$ とおけば, $x\neq 0$ または $y\neq 0$ ならば, 不等

式 $\dfrac{|x|^m|y|^n}{a|x|^p+b|y|^q} \leqq \dfrac{1}{c}(\max\{|x|^p,|y|^q\})^{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}-1}$ が成り立ち, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \max\{|x|^p,|y|^q\}=0$ だから $\dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{q}>1$ ならば $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{|x|^m|y|^n}{a|x|^p+b|y|^q}=0$ である. 以上から, $\dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{q}>1$ が求める条件である.

5. まず $p \geqq q$ の場合について考える. X, Y, Z を $X=\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}|\ 0<y\leqq x\}$, $Y=\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}|\ 0<x\leqq y,\ px\geqq qy\}$, $Z=\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}|\ 0<px\leqq qy\}$ によって定めると, 次の等式が成り立つ.

$$f\binom{x}{y}=\begin{cases} mx+(n-qr-1)y & \binom{x}{y}\in X \\ (m-1)x+(n-qr)y & \binom{x}{y}\in Y \\ (m-pr-1)x+ny & \binom{x}{y}\in Z \end{cases}$$

$\binom{x}{y}\in X$ ならば $f\binom{x}{y}\geqq f\binom{y}{y}=(m+n-qr-1)y$ だから X の点で f が 0 以下の値をとるためには $\dfrac{m}{q}+\dfrac{n}{q}-\dfrac{1}{q}\leqq r$ であることが必要十分である.

$n\leqq qr$ の場合, $\binom{x}{y}\in Y$ ならば $f\binom{x}{y}\geqq f\binom{x}{\frac{px}{q}}=\left(m+\dfrac{np}{q}-pr-1\right)x$ だから Y の点で f が 0 以下の値をとるためには $\dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{q}-\dfrac{1}{p}\leqq r$ であることが必要十分である.

$m\leqq 1$ の場合, $\binom{x}{y}\in Y$ ならば $f\binom{x}{y}\geqq f\binom{y}{y}=(m+n-qr-1)y$ だから Y の点で f が 0 以下の値をとるためには $\dfrac{m}{q}+\dfrac{n}{q}-\dfrac{1}{q}\leqq r$ であることが必要十分である.

$n>qr$ かつ $m>1$ の場合は Y において f は常に正の値をとる.

$\binom{x}{y}\in Z$ ならば $f\binom{x}{y}\geqq f\binom{x}{\frac{px}{q}}=\left(m+\dfrac{np}{q}-pr-1\right)x$ だから Z の点で f が 0 以下の値をとるためには $\dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{q}-\dfrac{1}{p}\leqq r$ であることが必要十分である.

以上から, $p\geqq q$ の場合, $\min\left\{\dfrac{m}{q}+\dfrac{n}{q}-\dfrac{1}{q},\ \dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{q}-\dfrac{1}{p}\right\}\leqq r$ であることが, f が負の値をとるための必要十分条件である. 同様に, $p\leqq q$ の場合, $\min\left\{\dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{p}-\dfrac{1}{p},\ \dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{q}-\dfrac{1}{q}\right\}\leqq r$ であることが, f が負の値をとるための必要十分条件である.

6. $t>0$, $x=t^{\frac{1}{p}}$, $y=t^{\frac{1}{q}}$ とすれば

$$\frac{|x|^m|y|^n}{(|x|^p+|y|^q)^r\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{t^{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}-r}}{2^r\sqrt{t^{\frac{2}{p}}+t^{\frac{2}{q}}}}=\frac{t^{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}-\frac{1}{p}-r}}{2^r\sqrt{1+t^{\frac{2}{q}-\frac{2}{p}}}}=\frac{t^{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}-\frac{1}{q}-r}}{2^r\sqrt{t^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}}+1}}$$

が成り立つため「$p\geqq q$ かつ $\dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{q}-\dfrac{1}{p}\leqq r$」または「$p\leqq q$ かつ $\dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{q}-\dfrac{1}{q}\leqq r$」ならば $t\to+0$ のとき, $\dfrac{t^{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}-r}}{2^r\sqrt{t^{\frac{2}{p}}+t^{\frac{2}{q}}}}$ は 0 に収束しない. また, $t>0$, $x=y=t$ とすれば

$$\frac{|x|^m|y|^n}{(|x|^p+|y|^q)^r\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{t^{m+n-1}}{\sqrt{2}(t^p+t^q)^r}=\frac{t^{m+n-qr-1}}{\sqrt{2}(t^{p-q}+1)^r}=\frac{t^{m+n-pr-1}}{\sqrt{2}(1+t^{q-p})^r}$$

が成り立つため「$p\geqq q$ かつ $\dfrac{m}{q}+\dfrac{n}{q}-\dfrac{1}{q}\leqq r$」または「$p\leqq q$ かつ $\dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{p}-\dfrac{1}{p}\leqq r$」ならば $t\to+0$ のとき, $\dfrac{t^{m+n-1}}{\sqrt{2}(t^p+t^q)^r}$ は 0 に収束しない. 以上から,「$p\geqq q$ かつ $\min\left\{\dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{q}-\dfrac{1}{p},\ \dfrac{m}{q}+\dfrac{n}{q}-\dfrac{1}{q}\right\}\leqq r$」または「$p\leqq q$ かつ $\min\left\{\dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{q}-\dfrac{1}{q},\ \dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{p}-\dfrac{1}{p}\right\}\leqq r$」ならば $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{|x|^m|y|^n}{(|x|^p+|y|^q)^r\sqrt{x^2+y^2}}\neq 0$ である.

$\max\{|x|,|y|\}\leqq\sqrt{x^2+y^2}$ と $\max\{|x|^{pr},|y|^{qr}\}\leqq(|x|^p+|y|^q)^r$ から, $\binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}$ ならば, 次の不等式が成り立つ.

$$0\leqq\frac{|x|^m|y|^n}{(|x|^p+|y|^q)^r\sqrt{x^2+y^2}}\leqq\frac{|x|^m|y|^n}{\max\{|x|,|y|\}\max\{|x|^{pr},|y|^{qr}\}}\quad\cdots(i)$$

$p \geqq q$ の場合, $x, y \in (-1, 1)$ ならば

$$\max\{|x|, |y|\} \max\{|x|^{pr}, |y|^{qr}\} = \begin{cases} |x|^{pr+1} & |x|^p \geqq |y|^q \\ |x||y|^{qr} & |x| \geqq |y|,\ |x|^p \leqq |y|^q \\ |y|^{qr+1} & |x| \leqq |y| \end{cases}$$

であるため, $\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$ かつ $x, y \in (-1, 1)$ ならば, 次の不等式が成り立つ.

$$\frac{|x|^m |y|^n}{\max\{|x|, |y|\} \max\{|x|^{pr}, |y|^{qr}\}} \leqq \begin{cases} |x|^{m - \frac{np}{q} - pr - 1} & |x|^p \geqq |y|^q \\ |y|^{m+n-qr-1} & |x| \geqq |y|,\ |x|^p \leqq |y|^q,\ m \leqq 1 \\ |x|^{m + \frac{np}{q} - pr - 1} & |x| \geqq |y|,\ |x|^p \leqq |y|^q,\ n \leqq qr \\ |x|^{m-1}|y|^{n-qr} & |x| \geqq |y|,\ |x|^p \leqq |y|^q,\ m > 1,\ n > qr \\ |y|^{m+n-qr-1} & |x| \leqq |y| \end{cases}$$

故に, $\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$ かつ $x, y \in (-1, 1)$ を満たす x, y に対し, $m \leqq 1$ または $n \leqq qr$ ならば

$$0 \leqq \frac{|x|^m |y|^n}{\max\{|x|, |y|\} \max\{|x|^{pr}, |y|^{qr}\}} \leqq |x|^{m - \frac{np}{q} - pr - 1} + |y|^{m+n-qr-1} \quad \cdots (ii)$$

が成り立ち, $m > 1$ かつ $n > qr$ ならば次の不等式が成り立つ.

$$0 \leqq \frac{|x|^m |y|^n}{\max\{|x|, |y|\} \max\{|x|^{pr}, |y|^{qr}\}} \leqq |x|^{m - \frac{np}{q} - pr - 1} + |x|^{m-1}|y|^{n-qr} + |y|^{m+n-qr-1} \quad \cdots (iii)$$

$\min\left\{\dfrac{m}{p} + \dfrac{n}{q} - \dfrac{1}{p}, \dfrac{m}{q} + \dfrac{n}{q} - \dfrac{1}{q}\right\} > r$ ならば $m - \dfrac{np}{q} - pr - 1 > 0$ かつ $m + n - qr - 1 > 0$ だから, $\binom{x}{y} \to \binom{0}{0}$ のとき, (ii) と (iii) の不等式の右辺は 0 に近づくため, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y} \to \binom{0}{0}} \frac{|x|^m |y|^n}{\max\{|x|, |y|\} \max\{|x|^{pr}, |y|^{qr}\}} = 0$ である. 従って (i) から $p \geqq q$ の場合, $\min\left\{\dfrac{m}{p} + \dfrac{n}{q} - \dfrac{1}{p}, \dfrac{m}{q} + \dfrac{n}{q} - \dfrac{1}{q}\right\} > r$ ならば $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y} \to \binom{0}{0}} \frac{|x|^m |y|^n}{(|x|^p + |y|^q)^r \sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ が成り立つ. $p \leqq q$ の場合も同様に, $\min\left\{\dfrac{m}{p} + \dfrac{n}{q} - \dfrac{1}{q}, \dfrac{m}{p} + \dfrac{n}{p} - \dfrac{1}{p}\right\} > r$ ならば $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y} \to \binom{0}{0}} \frac{|x|^m |y|^n}{(|x|^p + |y|^q)^r \sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ が成り立つことが示される.

以上から, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y} \to \binom{0}{0}} \frac{|x|^m |y|^n}{(|x|^p + |y|^q)^r \sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ が成り立つための必要十分条件は以下で与えられる.

「$p \geqq q$ かつ $\min\left\{\dfrac{m}{p} + \dfrac{n}{q} - \dfrac{1}{p}, \dfrac{m}{q} + \dfrac{n}{q} - \dfrac{1}{q}\right\} > r$」または「$p \leqq q$ かつ $\min\left\{\dfrac{m}{p} + \dfrac{n}{q} - \dfrac{1}{q}, \dfrac{m}{p} + \dfrac{n}{p} - \dfrac{1}{p}\right\} > r$」

微積分学 II 演習問題　第 18 回　偏微分と微分可能性

1. 次で定められる関数 f の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(1) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \sin(xy)\cos y$　(2) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \log(x^3y^4)$　(3) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \sin^{-1}(x+y)$

(4) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = xy(ax^2+by^2-1)$　(5) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = (3x^2+y^2)e^{-(x^2+2y^2)}$　(6) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \tan^{-1}(xy^2)$

(7) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$　(8) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = e^{x-2y}\cos(x^2+4xy)$　(9) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \log(x^2-2xy+3y^2)$

2. 下の式で定義される $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x>0, x+y>0\right\}$ 上の関数 f に対し $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}1\\y\end{smallmatrix}\right)$ を求めよ.

$$f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = x^{x^{x^{x^y}}} + (\log x)\tan^{-1}(\tan^{-1}(\tan^{-1}(\sin(\cos(xy)) - \log(x+y))))$$

3. $\boldsymbol{v} = \left(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right)$ を零でない $\boldsymbol{R}^2$ のベクトルとする. 以下の各問で与えられる関数 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分を求めよ. また, 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求め, それらが原点でも定義されている場合は, 原点における連続性を調べよ. さらに, f の原点での微分可能性を調べて, f が原点で微分可能ならば, 原点における微分 $f'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ を求めよ.

(1) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^4+y^2} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$　(2) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^4+2y^4}}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$

(3) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{2x^3-y^3}{4x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$　(4) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$

(5) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$　(6) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$

(7) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^4}{x^2+4y^2} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$　(8) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ 1 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$

(9) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$　(10) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$

(11) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$　(12) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$

(13) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$　(14) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ \dfrac{1}{2} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$

(15) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$　(16) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{x^3-3xy}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$

(17) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$　(18) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} (x^2+y^2)\log(x^2+y^2) & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$

(19) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$　(20) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$

(21) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{e^y\sin(xy)}{xy} & xy \neq 0 \\ e^y & xy = 0 \end{cases}$　(22) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2$

4. 以下で定められる関数 f の 2 次偏導関数をすべて求め, それぞれの場合に, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ と $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ が一致することを確か

めよ. ただし, a, b は定数とする.

(1) $xy^3(1+x^2-y)$ (2) e^{x+y} (3) $\sqrt{x^2+y^2}$ (4) $\log(x^2+y^2)$ (5) $\sqrt{y^2-x}$
(6) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (7) $\sin x^2y$ (8) $\dfrac{x+y}{x-y}$ (9) $\log(x^2+2xy-y^2)$ (10) $\log(x^2+y^4)$
(11) $\cos(x^2+xy^3)$ (12) $e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}$ (13) $\sin^{-1}x^2y$ (14) $e^{ax}\sin by$ (15) $\log(e^x+e^{2y})$
(16) $\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ (17) $e^{3x}\cos(x+2y)$ (18) $\tan^{-1}\dfrac{x-y}{x+y}$ (19) x^y

5. $X=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,x>0\right\}$, $Y=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x>0\right\}$, $Z=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,x,y>0\right\}$, $W=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,x+y>0\right\}$ とする. f が (1)〜(9) で与えられるとき, f の定義域の各点 ((1), (2), (4) では $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$, (3), (5)〜(9) では $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)$) における微分を求めよ.

(1) $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\sin(x\sin y)$. (2) $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\sin(xy)$.
(3) $f:X\to\boldsymbol{R}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=x^y$. (4) $f:Y\to\boldsymbol{R}^3$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\sin(xy)\\\sin(x\sin y)\\x^y\end{pmatrix}$.
(5) $f:X\to\boldsymbol{R}^2$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x^y\\z\end{smallmatrix}\right)$. (6) $f:Z\to\boldsymbol{R}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=x^{y^z}$.
(7) $f:X\to\boldsymbol{R}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=x^{y+z}$. (8) $f:W\to\boldsymbol{R}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=(x+y)^z$.
(9) $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\sin(x\sin(y\sin z))$.

6. $g,h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ が微分可能なとき, (1) から (4) で与えられる $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を g, h を用いて表せ. ただし, (5) では g は常に正の値をとるとする.

(1) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=g(x)$ (2) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=g(y)$ (3) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=g(x+y)$ (4) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=g(x)h(y)$ (5) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=g(x)^{h(y)}$

7. (発展問題) a, b を実数, m, n, p, q, r を正の実数とする. $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を

$$f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{cases}ax+by+\dfrac{|x|^m|y|^n}{(|x|^p+|y|^q)^r} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\end{cases}$$

で定義される関数とするとき f が $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で微分可能であるための必要十分条件を求めよ.

8. (発展問題) 関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\end{cases}$ で定める. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求め, さらに, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ であることを示せ.

9. (発展問題) 関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\end{cases}$ で定める. f の 2 次偏導関数をすべて求め, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ であることを示せ. さらに f の各 2 次偏導関数の原点における連続性を調べよ.

10. (発展問題) $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を連続関数とするとき, (1) から (4) で与えられる $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を g を用いて表せ. また, $X=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,x>0\right\}$ として $f:X\to\boldsymbol{R}$ が (5) で与えられるとき, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ を g を用いて表せ.

(1) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\displaystyle\int_a^{x+y}g(t)dt$ (2) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\displaystyle\int_x^{y}g(t)dt$ (3) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\displaystyle\int_a^{xy}g(t)dt$
(4) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\displaystyle\int_a^{\left(\int_x^y g(s)ds\right)}g(t)dt$ (5) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\displaystyle\int_{x^y}^{\sin(x\sin(y\sin z))}g(t)dt$

第 18 回の演習問題の解答

1. (1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy)\cos y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy)\cos y - \sin(xy)\sin y$.

(2) $f\binom{x}{y} = \log(x^3y^4) = 3\log x + 4\log|y|$ に注意すれば $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{3}{x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{4}{y}$.

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}$.

(4) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y(3ax^2+by^2-1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x(ax^2+3by^2-1)$.

(5) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x(3-3x^2-y^2)e^{-(x^2+2y^2)}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y(1-6x^2-2y^2)e^{-(x^2+2y^2)}$.

(6) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^2}{1+x^2y^4}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2xy}{1+x^2y^4}$.

(7) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

(8) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{x-2y}(\cos(x^2+4xy)-(2x+4y)\sin(x^2+4xy))$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2e^{x-2y}(\cos(x^2+4xy)+2x\sin(x^2+4xy))$.

(9) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x-2y}{x^2-2xy+3y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-2x+6y}{x^2-2xy+3y^2}$.

2. 任意の $\binom{1}{y} \in \left\{\binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x>0, x+y>0\right\}$ に対して $f\binom{1}{y} = 1$ だから $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{1}{y} = \displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f\binom{1}{y+t} - f\binom{1}{y}}{t} = 0$.

3. (1) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f\binom{at}{bt} - f\binom{0}{0}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{ab}{t(a^4t^2+b^2)}$ だから, a と b が両方とも 0 でなければ f は原点において $\boldsymbol{v}$ 方向に方向微分不可能であり, a または b が 0 ならば f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 である.

$\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = \dfrac{-3x^4y+y^3}{(x^4+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} = \dfrac{x^5-xy^2}{(x^4+y^2)^2}$ であり, $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$ の場合は, 上で $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0} = \dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0} = 0$ である. また, $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{t} = \lim_{t\to+0}\frac{1}{t} = \infty \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}$, $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{\partial f}{\partial y}\binom{t}{0} = \lim_{t\to+0}\frac{1}{t^3} = \infty \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}$ となるため, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに原点で連続ではない.

第 17 回演習問題 2 の (10) により, f は原点で連続ではないため, f は原点で微分不可能である.

(2) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f\binom{at}{bt} - f\binom{0}{0}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t\sqrt{a^4+2b^4}}{a^2+b^2} = 0$ だから, f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 である.

$\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = \dfrac{2x^3y^2-4xy^4}{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^4+2y^4}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} = \dfrac{4x^2y^3-2x^4y}{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^4+2y^4}}$ であり, $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$ の場合は, 上で $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0} = \dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0} = 0$ である. また, $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{\partial f}{\partial x}\binom{t}{t} = \lim_{t\to+0}\frac{-2}{2\sqrt{3}t} = -\infty \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}$, $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{\partial f}{\partial y}\binom{t}{t} = \lim_{x\to+0}\frac{2}{2\sqrt{3}t} = \infty \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}$ となるため, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに原点で連続ではない.

第 17 回演習問題 2 の (7) により, f は原点で連続ではないため, f は原点で微分不可能である.

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f\binom{at}{bt} - f\binom{0}{0}}{t} = \frac{2a^3-b^3}{4a^2+b^2}$ だから, f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は $\dfrac{2a^3-b^3}{4a^2+b^2}$ である.

$\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = \dfrac{8x^4+6x^2y^2+8xy^3}{(4x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} = \dfrac{-4x^3y-12x^2y^2-y^4}{(4x^2+y^2)^2}$ であり, $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$ の場合は, 上で $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0} = -1$ である. また, $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{t} = 0 \neq \frac{1}{2} = \frac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}$, $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\partial f}{\partial y}\binom{t}{0} = 0 \neq -1 = \frac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}$ となるため, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに原点で連続ではない.

f が原点で微分可能ならば $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{f\binom{x}{y} - f\binom{0}{0} - f'\binom{0}{0}\left(\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right)}{\left\|\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right\|} = 0$ が成り立ち, 上の結果から $f'\binom{0}{0} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\ -1\right)$ だから $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{f\binom{x}{y} - f\binom{0}{0} - f'\binom{0}{0}\left(\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right)}{\left\|\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right\|} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{8x^2y-xy^2}{(8x^2+2y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ が成り立つ. 従って, もし $f'\binom{0}{0}$ が存在すれば, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{8x^2y-xy^2}{(8x^2+2y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ が成り立つため, 関数 $g : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$

を $g\binom{x}{y}=\begin{cases}\frac{8x^2y-xy^2}{(8x^2+2y^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}\\ 0 & \binom{x}{y}=\binom{0}{0}\end{cases}$ で定めると, g は原点で連続である. ところが, $h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ を $h(t)=\binom{t}{t}$ で定めれば, $\lim_{t\to+0}h(t)=\binom{0}{0}$ だから, g の原点における連続性から, $\lim_{t\to+0}g(h(t))=g\binom{0}{0}=0$ である一方, $t>0$ ならば $g(h(t))=\dfrac{7}{10\sqrt{2}}$ だから $\lim_{t\to+0}g(h(t))=\dfrac{7}{10\sqrt{2}}$ となって矛盾が生じる. 故に f は原点で微分不可能である.

(4) $\lim_{t\to0}\dfrac{f\binom{at}{bt}-f\binom{0}{0}}{t}=\lim_{t\to0}abt\sin\dfrac{1}{t^2(a^2+b^2)}$ であり, 0 でない任意の実数 t に対して $\left|abt\sin\dfrac{1}{t^2(a^2+b^2)}\right|\leqq|abt|$ が成り立つため, $\lim_{t\to0}abt\sin\dfrac{1}{t^2(a^2+b^2)}=0$ だから, f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 である.

$\binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y}=y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y}=x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$ であり, $\binom{x}{y}=\binom{0}{0}$ の場合は, 上で $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}=\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}=0$ である. また, $\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\\ \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\end{pmatrix}=\binom{0}{0}$ であるが, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\\ \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\end{pmatrix}=\lim_{n\to\infty}(-\sqrt{\pi n})=-\infty\neq 0=\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}$, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\\ \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\end{pmatrix}=\lim_{n\to\infty}(-\sqrt{\pi n})=-\infty\neq0=\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}$ となるため, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに原点で連続ではない.

f が原点で微分可能ならば, 上の結果から $f'\binom{0}{0}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$ が成り立つため, f が原点で微分可能であるためには $\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\dfrac{f\binom{x}{y}-f\binom{0}{0}-(0\ 0)\left(\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right)}{\left\|\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right\|}=0$ が成り立つことが必要十分である. ここで, $|x|=\sqrt{x^2}\leqq\sqrt{x^2+y^2}$ であることに注意すれば, $\binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}$ ならば $\left|\dfrac{f\binom{x}{y}-f\binom{0}{0}-(0\ 0)\left(\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right)}{\left\|\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right\|}\right|=\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\leqq\dfrac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqq|y|$ であり, $\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}$ のとき, $|y|\to0$ だから $\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\dfrac{f\binom{x}{y}-f\binom{0}{0}-(0\ 0)\left(\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right)}{\left\|\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right\|}=0$ が成り立つことがわかる. 従って f は原点で微分可能であり, $f'\binom{0}{0}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$.

(5) $\lim_{t\to0}\dfrac{f\binom{at}{bt}-f\binom{0}{0}}{t}=\lim_{t\to0}\dfrac{a^2-2b^2}{t(3a^2+b^2)}$ だから, $a\neq\pm\sqrt{2}b$ ならば, 原点において f は $\boldsymbol{v}$ 方向には方向微分不可能であり, $a=\pm\sqrt{2}b$ ならば, f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 である.

$\binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y}=\dfrac{14xy^2}{(3x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y}=-\dfrac{14x^2y}{(3x^2+y^2)^2}$ であり, 原点において f は $\boldsymbol{e}_1$ 方向と $\boldsymbol{e}_1$ 方向には方向微分不可能だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}$ は存在しない.

第 17 回演習問題 2 の (9) により, f は原点で連続ではないため, f は原点で微分不可能である.

(6) $\lim_{t\to0}\dfrac{f\binom{at}{bt}-f\binom{0}{0}}{t}=\lim_{t\to0}abt\sin\dfrac{1}{|t|\sqrt{a^2+b^2}}$ であり, 0 でない任意の実数 t に対して $\left|abt\sin\dfrac{1}{|t|\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leqq|abt|$ が成り立つため, $\lim_{t\to0}abt\sin\dfrac{1}{|t|\sqrt{a^2+b^2}}=0$ だから, f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 である.

$\binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y}=y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y}=x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ であり, $\binom{x}{y}=\binom{0}{0}$ の場合は, 上で $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}=\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}=0$ である. また, $\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}\pi n}\\ \frac{1}{2\sqrt{2}\pi n}\end{pmatrix}=\binom{0}{0}$ であるが, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}\pi n}\\ \frac{1}{2\sqrt{2}\pi n}\end{pmatrix}=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\neq0=\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}$, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}\pi n}\\ \frac{1}{2\sqrt{2}\pi n}\end{pmatrix}=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\neq0=\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}$ となるため, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに原点で連続ではない.

f が原点で微分可能ならば, 上の結果から $f'\binom{0}{0}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$ が成り立つため, f が原点で微分可能であるためには $\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\dfrac{f\binom{x}{y}-f\binom{0}{0}-(0\ 0)\left(\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right)}{\left\|\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right\|}=0$ が成り立つことが必要十分である. ここ

で, $|x| = \sqrt{x^2} \leqq \sqrt{x^2+y^2}$ であることに注意すれば, $\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$ ならば $\left|\dfrac{f\binom{x}{y} - f\binom{0}{0} - (0\ \ 0)\left(\binom{x}{y} - \binom{0}{0}\right)}{\left\|\binom{x}{y} - \binom{0}{0}\right\|}\right| = \left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqq \dfrac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqq |y|$ であり, $\binom{x}{y} \to \binom{0}{0}$ のとき, $|y| \to 0$ だから $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{f\binom{x}{y} - f\binom{0}{0} - (0\ \ 0)\left(\binom{x}{y} - \binom{0}{0}\right)}{\left\|\binom{x}{y} - \binom{0}{0}\right\|} = 0$ が成り立つことがわかる. 従って f は原点で微分可能であり, $f'\binom{0}{0} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$.

(7) $\displaystyle\lim_{t\to0} \frac{f\binom{at}{bt} - f\binom{0}{0}}{t} = \lim_{t\to0} \frac{a^3+b^4t}{a^2+4b^2} = \frac{a^3}{a^2+4b^2}$ だから, f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は $\dfrac{a^3}{a^2+4b^2}$ である.

$\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = \dfrac{x^4+12x^2y^2-2xy^4}{(x^2+4y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} = \dfrac{-8x^3y+4x^2y^3+8y^5}{(x^2+4y^2)^2}$ であり, $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$ の場合は, 上で $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0} = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0} = 0$ である. また, $\displaystyle\lim_{t\to0} \frac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{t} = 0 \neq 1 = \frac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}$, $\displaystyle\lim_{t\to0} \frac{\partial f}{\partial y}\binom{t}{t} = \lim_{t\to0} \frac{-8+12t}{25} = -\frac{8}{25} \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}$ となるため, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに原点で連続ではない.

f が原点で微分可能ならば $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{f\binom{x}{y} - f\binom{0}{0} - f'\binom{0}{0}\left(\binom{x}{y} - \binom{0}{0}\right)}{\left\|\binom{x}{y} - \binom{0}{0}\right\|} = 0$ が成り立ち, 上の結果から $f'\binom{0}{0} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}\ \ \dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}\right) = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$ だから $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{f\binom{x}{y} - f\binom{0}{0} - f'\binom{0}{0}\left(\binom{x}{y} - \binom{0}{0}\right)}{\left\|\binom{x}{y} - \binom{0}{0}\right\|} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^3+y^4}{(x^2+4y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ が成り立つ. 従って, もし $f'\binom{0}{0}$ が存在すれば, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^3+y^4}{(x^2+4y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ が成り立つため, 関数 $g : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を $g\binom{x}{y} = \begin{cases} \frac{x^3+y^4}{(x^2+4y^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$ で定めると, g は原点で連続である. ところが, $h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ を $h(t) = \binom{t}{0}$ で定めれば, $\displaystyle\lim_{t\to+0} h(t) = \binom{0}{0}$ だから, g の原点における連続性から, $\displaystyle\lim_{t\to+0} g(h(t)) = g\binom{0}{0} = 0$ である一方, $t > 0$ ならば $g(h(t)) = 1$ だから $\displaystyle\lim_{t\to+0} g(h(t)) = 1$ となって矛盾が生じる. 故に f は原点で微分不可能である.

(8) $\displaystyle\lim_{t\to0} \frac{f\binom{at}{bt} - f\binom{0}{0}}{t} = \lim_{t\to0} \frac{e^{t^2(a^2+b^2)} - 1 - t^2(a^2+b^2)}{t^3(a^2+b^2)}$ であり, $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ であることに注意すれば, 上式の右辺は $\displaystyle\lim_{t\to0} \frac{\frac{1}{2}t^4(a^2+b^2)^2 + o(t^4(a^2+b^2)^2)}{t^3(a^2+b^2)} = 0$ に等しいため, f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 である.

$\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = \dfrac{2x\left(1+(x^2+y^2-1)e^{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} = \dfrac{2y\left(1+(x^2+y^2-1)e^{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^2}$ であり, $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$ の場合は, 上で $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0} = \dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0} = 0$ である. また, $\displaystyle\lim_{z\to0} \frac{1+(z-1)e^z}{z^2} = \lim_{z\to0} \frac{1+(z-1)\left(1+z+\frac{z^2}{2}+o(z^2)\right)}{z^2} = \lim_{z\to0}\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{2} + (z-1)\frac{o(z^2)}{z^2}\right) = \frac{1}{2}$ だから $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $h : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を $g(z) = \begin{cases} \frac{1+(z-1)e^z}{z^2} & z \neq 0 \\ \frac{1}{2} & z = 0 \end{cases}$, $h\binom{x}{y} = x^2 + y^2$ で定めれば, g は 0 で連続, h は $\binom{0}{0}$ で連続であるため, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{\left(1+(x^2+y^2-1)e^{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} g\left(h\binom{x}{y}\right) = g(0) = \frac{1}{2}$ が成り立つ. よって, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = 2xg\left(h\binom{x}{y}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} = 2yg\left(h\binom{x}{y}\right)$ が成り立つことに注意すれば, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}$, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}$ であることがわかる. 従って $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに原点で連続である.

f が原点で微分可能ならば, 上の結果から $f'\binom{0}{0} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}\ \ \dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}\right) = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$ が成り立つため, f が原点で微分可能であるためには $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{f\binom{x}{y} - f\binom{0}{0} - (0\ \ 0)\left(\binom{x}{y} - \binom{0}{0}\right)}{\left\|\binom{x}{y} - \binom{0}{0}\right\|} = 0$ が成り立つことが必要十分である. ここ

で，$\dfrac{f\binom{x}{y}-f\binom{0}{0}-(0\ 0)\left(\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right)}{\left\|\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right\|}=\dfrac{e^{x^2+y^2}-1-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ であり，$\displaystyle\lim_{z\to0}\frac{e^z-1-z}{z^{\frac{3}{2}}}=\lim_{z\to0}\frac{\sqrt{z}\left(\frac{z^2}{2}+o(z^2)\right)}{z^2}=$ $\displaystyle\left(\lim_{z\to0}\sqrt{z}\right)\left(\lim_{z\to0}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{o(z^2)}{z^2}\right)\right)=0\cdot\frac{1}{2}=0$ が成り立つため，関数 $p:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $p(z)=\begin{cases}\frac{e^z-1-z}{z^{\frac{3}{2}}} & z\neq0\\ 0 & z=0\end{cases}$ で定めれば p は 0 で連続だから，$\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{f\binom{x}{y}-f\binom{0}{0}-(0\ 0)\left(\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right)}{\left\|\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right\|}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}p\left(h\binom{x}{y}\right)=p(0)=0$ が成り立つ．従って f は原点で微分可能であり，$f'\binom{0}{0}=\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}$．

(9) $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{f\binom{at}{bt}-f\binom{0}{0}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{ab^3t}{a^2+b^4t^2}=0$ だから，f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 である．

$\binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y}=\dfrac{-x^2y^3+y^7}{(x^2+y^4)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y}=\dfrac{3x^3y^2-xy^6}{(x^2+y^4)^2}$ であり，$\binom{x}{y}=\binom{0}{0}$ の場合は，上で $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}=\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}=0$ である．また，$\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{\partial f}{\partial x}\binom{t^3}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{-t^{12}+t^{14}}{(t^6+t^8)^2}=\lim_{t\to0}\frac{-1+t^2}{(1+t^2)^2}=-1\neq0=$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}$, $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{\partial f}{\partial y}\binom{t^2}{t}=\lim_{t\to0}\frac{2t^8}{4t^8}=\frac{1}{2}\neq0=\frac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}$ となるため，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに原点で連続ではない．

f が原点で微分可能ならば $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{f\binom{x}{y}-f\binom{0}{0}-f'\binom{0}{0}\left(\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right)}{\left\|\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right\|}=0$ が成り立ち，上の結果から $f'\binom{0}{0}=$ $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}\right)=\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}$ だから $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{f\binom{x}{y}-f\binom{0}{0}-f'\binom{0}{0}\left(\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right)}{\left\|\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right\|}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{xy^3}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$ が成り立つ．従って，もし f が原点で微分可能ならば，$\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{xy^3}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}=0$ が成り立つため，関数 $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $g\binom{x}{y}=\begin{cases}\frac{xy^3}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}\\ 0 & \binom{x}{y}=\binom{0}{0}\end{cases}$ で定めると，g は原点で連続である．ところが，$h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ を $h(t)=\binom{t^2}{t}$ で定めれば，$\displaystyle\lim_{t\to+0}h(t)=\binom{0}{0}$ だから，g の原点における連続性から，$\displaystyle\lim_{t\to+0}g(h(t))=g\binom{0}{0}=0$ である一方，$t>0$ ならば $g(h(t))=\dfrac{1}{2\sqrt{t^2+1}}$ だから $\displaystyle\lim_{t\to+0}g(h(t))=\frac{1}{2}$ となって矛盾が生じる．故に f は原点で微分不可能である．

(10) $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{f\binom{at}{bt}-f\binom{0}{0}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{a^2b^2t}{a^2+b^2}=0$ となるため，f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 である．

$\binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y}=\dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y}=\dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$ であり，$\binom{x}{y}=\binom{0}{0}$ の場合は，上で $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}=\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}=0$ である．また，$y^4=(y^2)^2, x^4=(x^2)^2\leqq(x^2+y^2)^2$ だから $\left|\dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right|\leqq2|x|$, $\left|\dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}\right|\leqq2|y|$ であり，$\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}$ のとき，$2|x|,2|y|\to0$ だから，$\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}=$ $0=\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}$, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}=0=\frac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}$ である．従って $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに原点で連続である．

f が原点で微分可能ならば，上の結果から $f'\binom{0}{0}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}\right)=\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}$ が成り立つため，f が原点で微分可能であるためには $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{f\binom{x}{y}-f\binom{0}{0}-(0\ 0)\left(\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right)}{\left\|\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right\|}=0$ が成り立つことが必要十分である．ここで，$\dfrac{f\binom{x}{y}-f\binom{0}{0}-(0\ 0)\left(\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right)}{\left\|\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right\|}=\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ であり，$x^2y^2\leqq x^4+2x^2y^2+y^4=(x^2+y^2)^2$ から $0\leqq\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\leqq\sqrt{x^2+y^2}$ が得られる．$\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}$ のとき，$\sqrt{x^2+y^2}\to0$ だから，左の不等式から $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{f\binom{x}{y}-f\binom{0}{0}-(0\ 0)\left(\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right)}{\left\|\binom{x}{y}-\binom{0}{0}\right\|}=0$ が成り立つ．従って f は原点で微分可能であり，$f'\binom{0}{0}=\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}$．

(11) $ab\neq0$ ならば $\dfrac{f\binom{at}{bt}-f\binom{0}{0}}{t}=\dfrac{\sin(abt^2)}{t^3(a^2+b^2)}=\dfrac{\sin(abt^2)}{abt^2}\dfrac{ab}{t(a^2+b^2)}$ であり，$\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{\sin(abt^2)}{abt^2}=1$ であ

るが, $\lim_{t\to 0}\dfrac{ab}{t(a^2+b^2)}$ は存在しないため, f は原点において $\boldsymbol{v}$ 方向に方向微分不可能である. $ab=0$ ならば $\lim_{t\to 0}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}at\\bt\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=0$ だから, f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 である.

$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{y(\cos xy)(x^2+y^2)-2x\sin xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{x(\cos xy)(x^2+y^2)-2y\sin xy}{(x^2+y^2)^2}$ であり, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ の場合は, 上で $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=0$ である.

また, $\lim_{t\to+0}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\t\end{smallmatrix}\right)=\lim_{t\to+0}\dfrac{1}{t}=\infty\neq 0=\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\lim_{t\to+0}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}t\\0\end{smallmatrix}\right)=\lim_{x\to+0}\dfrac{1}{t}=\infty\neq 0=\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ となるため, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに原点で連続ではない.

第 17 回演習問題 2 の (14) により, f は原点で連続ではないため, f は原点で微分不可能である.

(12) $\lim_{t\to 0}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}at\\bt\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\dfrac{ab^2}{a^2+b^4t^2}=\begin{cases}\frac{b^2}{a} & a\neq 0\\ 0 & a=0\end{cases}$ だから, f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は $a\neq 0$ ならば $\dfrac{b^2}{a}$, $a=0$ ならば 0 である.

$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{2x^3y-2xy^5}{(x^2+y^4)^2}$ であり, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ の場合は, 上で $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=0$ である. また, $\lim_{t\to 0}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}t^2\\t\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{1}{2}\neq 0=\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\lim_{t\to 0}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}t\\t\end{smallmatrix}\right)=\lim_{t\to 0}\dfrac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}=2\neq 0=\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ となるため, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに原点で連続ではない.

第 17 回演習問題 2 の (6) により, f は原点で連続ではないため, f は原点で微分不可能である.

(13) $\lim_{t\to 0}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}at\\bt\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\dfrac{a^2b^2t}{a^2+b^4t^2}=0$ だから, f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 である.

$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{2x^4y-2x^2y^5}{(x^2+y^4)^2}$ であり, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ の場合は, 上で $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=0$ である. また, $\lim_{t\to 0}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}t^2\\t\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{1}{2}\neq 0=\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ となるため, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ は原点で連続ではない. 一方, $x^4, 2x^2y^4\leqq x^4+2x^2y^4+y^8=(x^2+y^4)^2$ だから $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ ならば $\left|\dfrac{2x^4y}{(x^2+y^4)^2}\right|\leqq 2|y|$, $\left|\dfrac{2x^2y^5}{(x^2+y^4)^2}\right|\leqq|y|$ が成り立ち, 三角不等式により $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right|=\left|\dfrac{2x^4y-2x^2y^5}{(x^2+y^4)^2}\right|\leqq\left|\dfrac{2x^4y}{(x^2+y^4)^2}\right|+\left|\dfrac{2x^2y^5}{(x^2+y^4)^2}\right|\leqq 3|y|$ が得られる. 故に $\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0=\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ となるため, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ は原点で連続である.

f が原点で微分可能ならば, 上の結果から $f'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) & \frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$ が成り立つため, f が原点で微分可能であるためには $\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)-(0\ \ 0)\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)}{\left\|\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\|}=0$ が成り立つことが必要十分である. ここで, $\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)-(0\ \ 0)\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)}{\left\|\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\|}=\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$ であり, $x^2\leqq x^2+y^4$, $|y|=\sqrt{y^2}\leqq\sqrt{x^2+y^2}$ だから $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ ならば $\dfrac{x^2}{x^2+y^4}\leqq 1$ かつ $\dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqq|y|$ が成り立つ. 従って $0\leqq\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}\leqq|y|$ が得られ, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ のとき, $|y|\to 0$ だから, 上の不等式から $\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)-(0\ \ 0)\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)}{\left\|\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\|}=0$ が成り立つ. 従って f は原点で微分可能であり, $f'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$.

(14) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ が成り立つため, $\lim_{t\to 0}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}at\\bt\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\dfrac{1-\cos\left(t\sqrt{a^2+b^2}\right)-\frac{t^2(a^2+b^2)}{2}}{t^2(a^2+b^2)}=\lim_{t\to 0}\dfrac{o(t^2(a^2+b^2))}{t^2(a^2+b^2)}=0$ だから, f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 である.

$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{x\sqrt{x^2+y^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}-2x\left(1-\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^2}$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=\dfrac{y\sqrt{x^2+y^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}-2y\left(1-\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^2}$ であり, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ の場合は, 上で $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)=0$ である. $r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおけば, $\sin r=r-\dfrac{r^3}{6}+o(r^3)$, $\cos r=1-\dfrac{r^2}{2}+\dfrac{r^4}{24}+o(r^4)$ より, 上の結果から $r\neq 0$ ならば

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=\frac{xr\sin r-2x(1-\cos r)}{r^4}=\frac{xr\left(r-\frac{r^3}{6}+o(r^3)\right)-2x\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{24}-o(r^4)\right)}{r^4}=-\frac{x}{12}+\frac{xo(r^3)}{r^3}+\frac{xo(r^4)}{r^4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=\frac{yr\sin r-2y(1-\cos r)}{r^4}=\frac{yr\left(r-\frac{r^3}{6}+o(r^3)\right)-2y\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{24}-o(r^4)\right)}{r^4}=-\frac{y}{12}+\frac{yo(r^3)}{r^3}+\frac{yo(r^4)}{r^4}$$

が得られ, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ のとき, $x,y,r\to 0$ だから上式より, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=0=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=0=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ である. 従って $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに原点で連続である.

f が原点で微分可能ならば, 上の結果から $f'\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$ が成り立つため, f が原点で微分可能であるためには $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}\frac{f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)-(0\ \ 0)\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)}{\left\|\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right\|}=0$ が成り立つことが必要十分である. ここで, $r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおけば $\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)-(0\ \ 0)\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)}{\left\|\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right\|}=\dfrac{1-\cos r-\frac{r^2}{2}}{r^3}$ であり, $\cos r=1-\dfrac{r^2}{2}+o(r^3)$ かつ $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ のとき, $r\to 0$ であることに注意すれば $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}\frac{f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)-(0\ \ 0)\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)}{\left\|\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right\|}=\lim_{r\to 0}\frac{o(r^3)}{r^3}=0$ が成り立つ. 従って f は原点で微分可能であり, $f'\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$.

(15) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\begin{smallmatrix} at \\ bt \end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{a^2-b^2}{t(a^2+b^2)}$ だから, $a\neq\pm b$ ならば, 原点において f は $\boldsymbol{v}$ 方向には方向微分不可能であり, $a=\pm b$ ならば, f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 である.

$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=\dfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=-\dfrac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$ であり, 原点において f は $\boldsymbol{e}_1$ 方向と $\boldsymbol{e}_1$ 方向には方向微分不可能だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ は存在しない.

第 17 回演習問題 2 の (3) により, f は原点で連続ではないため, f は原点で微分不可能である.

(16) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\begin{smallmatrix} at \\ bt \end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{a^3t-3ab}{t(a^2+b^2)}$ だから, $ab\neq 0$ ならば, 原点において f は $\boldsymbol{v}$ 方向には方向微分不可能であり, $ab=0$ ならば, f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 である.

$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=\dfrac{x^4+3x^2y+3x^2y^2-3y^3}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=\dfrac{-3x^3-2x^3y+3xy^2}{(x^2+y^2)^2}$ であり, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ の場合は, 上で $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)=0$ である. また, $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix}\right)=1\neq 0=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} t \\ t \end{smallmatrix}\right)=-\frac{1}{2}\neq 0=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ となるため, $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに原点で連続ではない.

第 17 回演習問題 2 の (4) により, f は原点で連続ではないため, f は原点で微分不可能である.

(17) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\begin{smallmatrix} at \\ bt \end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{abt}{|t|\sqrt{a^2+b^2}}$ だから, $ab\neq 0$ ならば, 原点において f は $\boldsymbol{v}$ 方向には方向微分不可能であり, $ab=0$ ならば, f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 である.

$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=\dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=\dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ であり, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ の場合は, 上で $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)=0$ である. また, $\displaystyle\lim_{t\to +0}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ t \end{smallmatrix}\right)=1\neq 0=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\displaystyle\lim_{t\to +0}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix}\right)=1\neq 0=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ となるため, $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに原点で連続ではない.

原点において f が $\boldsymbol{v}$ 方向に方向微分不可能であるようなベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在するため, f は原点で微分不可能である.

(18) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\begin{smallmatrix} at \\ bt \end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}(a^2+b^2)(2t\log t+t\log(a^2+b^2))=0$ だから f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 である.

$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=2x(\log(x^2+y^2)+1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=2y(\log(x^2+y^2)+1)$ であり, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ の場合は,

上で $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=0$ である．また, $x^2,y^2\leqq x^2+y^2$ より $x^{\frac{2}{3}},y^{\frac{2}{3}}\leqq(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$ だから, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ ならば $\left|\dfrac{3x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}}\right|\leqq 3|x|^{\frac{1}{3}}$, $\left|\dfrac{3y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}}\right|\leqq 3|y|^{\frac{1}{3}}$ が成り立つ．そこで $s=(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}$ とおけば, 次の不等式が得られる．

$$\begin{aligned}\left|x\log(x^2+y^2)\right|&=\left|\frac{3x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}}\right|\left|(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}\log(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}\right|\leqq 3|x|^{\frac{1}{3}}|s\log s|\\ \left|y\log(x^2+y^2)\right|&=\left|\frac{3y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}}\right|\left|(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}\log(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}\right|\leqq 3|y|^{\frac{1}{3}}|s\log s|\end{aligned}$$

$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ ならば $3|x|^{\frac{1}{3}},3|y|^{\frac{1}{3}},s\to+0$ だから, 上の不等式から, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}x\log(x^2+y^2)=\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}y\log(x^2+y^2)=0$ となるため, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ である．従って $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに原点で連続である．

f が原点で微分可能ならば, 上の結果から $f'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)=\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}$ が成り立つため, f が原点で微分可能であるためには $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)-(0\ \ 0)\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)}{\left\|\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\|}=0$ が成り立つことが必要十分である．ここで, $r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおけば $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ ならば $r\to+0$ だから, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)-(0\ \ 0)\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)}{\left\|\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\|}=\lim_{r\to+0}2r\log r$ が成り立つ．従って f は原点で微分可能であり, $f'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}$.

(19) $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{f\left(\begin{smallmatrix}at\\bt\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{ab}{t(a^2+b^2)}$ だから, $ab\neq0$ ならば, 原点において f は $\boldsymbol{v}$ 方向には方向微分不可能であり, $ab=0$ ならば, f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 である．

$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{-x^2y+y^3}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$ であり, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ の場合は, 上で $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=0$ である．また, $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\t\end{smallmatrix}\right)=\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}=\infty\neq0=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}t\\0\end{smallmatrix}\right)=\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}=\infty\neq0=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ となるため, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに原点で連続ではない．

教科書の例題 5.6 の (1) により, f は原点で連続ではないため, f は原点で微分不可能である．

(20) $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{f\left(\begin{smallmatrix}at\\bt\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=\lim_{t\to0}t(a^2+b^2)\sin\frac{1}{|t|\sqrt{a^2+b^2}}$ であり, 0 でない任意の実数 t に対して $\left|t(a^2+b^2)\sin\dfrac{1}{|t|\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leqq|t|(a^2+b^2)$ が成り立つため, $\displaystyle\lim_{t\to0}t(a^2+b^2)\sin\frac{1}{|t|\sqrt{a^2+b^2}}=0$ だから, f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 である．

$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=2y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ であり, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ の場合は, 上で $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=0$ である．また, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}\pi n}\\ \frac{1}{2\sqrt{2}\pi n}\end{pmatrix}=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ であるが, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}\pi n}\\ \frac{1}{2\sqrt{2}\pi n}\end{pmatrix}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\neq0=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}\pi n}\\ \frac{1}{2\sqrt{2}\pi n}\end{pmatrix}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\neq0=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ となるため, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに原点で連続ではない．

f が原点で微分可能ならば, 上の結果から $f'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)=\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}$ が成り立つため, f が原点で微分可能であるためには $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)-(0\ \ 0)\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)}{\left\|\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\|}=0$ が成り立つことが必要十分である．$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ ならば $\left|\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)-(0\ \ 0)\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)}{\left\|\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\|}\right|=\left|\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqq\sqrt{x^2+y^2}$ であり, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ のとき, $\sqrt{x^2+y^2}\to0$ だから, 上の不等式から $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)-(0\ \ 0)\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)}{\left\|\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\|}=0$ が成り立つことがわかる．従って f は原点で微分可能であり, $f'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}$.

(21) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, $e^x = 1 + x + o(x)$ だから, $ab \neq 0$ の場合, $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f\left(\begin{smallmatrix} at \\ bt \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{bt}\sin(abt^2) - abt^2}{abt^3}$ $\displaystyle = \lim_{t\to 0} \frac{e^{bt}(\sin(abt^2) - abt^2) + abt^2(e^{bt} - 1)}{abt^3} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{bt}\left(-\frac{a^3b^3t^6}{6} + o(a^3b^3t^6)\right) + abt^2(bt + o(bt))}{abt^3} =$ $\displaystyle \lim_{t\to 0} e^{bt}\left(-\frac{a^2b^2t^3}{6} + \frac{o(a^3b^3t^6)}{abt^3}\right) + \lim_{t\to 0} b\left(1 + \frac{o(bt)}{bt}\right) = b$ である. $a \neq 0$, $b = 0$ の場合は $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f\left(\begin{smallmatrix} at \\ 0 \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}{t} = 0$, $a = 0$, $b \neq 0$ の場合は $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ bt \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}{t} = \lim_{t\to 0} b\frac{e^{bt} - 1}{bt} = b$ である. 故に, f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は b である.

$xy \neq 0$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \dfrac{e^y(xy\cos(xy) - \sin(xy))}{x^2y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \dfrac{e^y(xy\cos(xy) + (y-1)\sin(xy))}{xy^2}$ であり, $x \neq 0$, $y = 0$ の場合は $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\begin{smallmatrix} x+t \\ 0 \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}{t} = 0$, $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\begin{smallmatrix} x \\ t \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t\sin(tx) - tx}{t^2x} =$ $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{e^t(\sin(tx) - tx) + tx(e^t - 1)}{t^2x} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t\left(-\frac{t^3x^3}{6} + o(t^3x^3)\right) + tx(t + o(t))}{t^2x} = \lim_{t\to 0} e^t\left(-\frac{tx^2}{6} + \frac{o(t^3x^3)}{t^2x}\right) +$ $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(1 + \frac{o(t)}{t}\right) = 1$, $x = 0$, $y \neq 0$ の場合は $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y \end{smallmatrix}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\begin{smallmatrix} t \\ y \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y \end{smallmatrix}\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^y(\sin(ty) - ty)}{t^2y} =$ $\displaystyle\lim_{t\to 0} e^y\frac{-\frac{t^3y^3}{6} + o(t^3y^3)}{t^2y} = \lim_{t\to 0} e^y\left(-\frac{ty^2}{6} + \frac{o(t^3y^3)}{t^2y}\right) = 0$, $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y \end{smallmatrix}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y+t \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y \end{smallmatrix}\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{y+t} - e^y}{t} = e^y$ である. $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ の場合は, 上で $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1$ である. 従って, $xy = 0$ の場合は, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = e^y$ が成り立つ. また, $z = xy$ とおけば $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \frac{ye^y(z\cos z - \sin z)}{z^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \frac{xe^y(z\cos z - \sin z)}{z^2} + \frac{e^y\sin z}{z} & z \neq 0 \\ e^y & z = 0 \end{cases}$ であることから, 関数 $g, h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $g(z) = \begin{cases} \frac{z\cos z - \sin z}{z^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$, $h(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$ で定める. このとき h は 0 で連続であり,

$$z\cos z - \sin z = z\left(1 - \frac{z^2}{2} + o(z^2)\right) - \left(z - \frac{z^3}{6} + o(z^3)\right) = -\frac{z^2}{3} + zo(z^2) - o(z^3)$$

だから $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{z\cos z - \sin z}{z^2} = \lim_{z\to 0}\left(-\frac{z}{3} + \frac{o(z^2)}{z} - \frac{o(z^3)}{z^2}\right) = 0$ が成り立つため, g も 0 で連続である. さらに, 関数 $p, q, \varphi, \psi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を $p\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x$, $q\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = y$, $\varphi\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = xy$, $\psi\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = e^y$ で定めれば, これらはすべて連続関数であり, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = q\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\psi\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)g(\varphi\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right))$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = p\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\psi\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)g(\varphi\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) + \psi\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)h(\varphi\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right))$ が任意の $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}$ に対して成り立つ. 故に, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに連続関数の合成, 積, 和を用いて表されるため, 連続関数である.

f が原点で微分可能ならば, 上の結果から $f'\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つため, f が原点で微分可能であるためには $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) - (0\ \ 1)\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)}{\left\|\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right\|} = 0$ が成り立つことが必要十分である. 任意の $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}$ に対して $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = e^yh(xy)$ が成り立ち, $\sin z = z + o(z^2)$ より $h(z) = 1 + o(z)$ であることと, $e^y = 1 + y + \dfrac{y^2}{2} + o(y^2)$ であることを用いると, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ならば次の等式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) - (0\ \ 1)\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)}{\left\|\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right\|} &= \frac{e^yh(xy) - 1 - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{e^y(1 + o(xy)) - 1 - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\frac{y^2}{2} + o(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{e^yo(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{o(y^2)}{y^2} + e^y\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{o(xy)}{xy} \end{aligned}$$

$|y| = \sqrt{y^2} \leqq \sqrt{x^2+y^2}$ より, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ならば $\left|\dfrac{y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqq \dfrac{|y|}{2}$ かつ $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqq |x|$ が成り立った

め, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ である. さらに, $\binom{x}{y} \to \binom{0}{0}$ のとき $y^2, xy \to 0$ だから $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{o(y^2)}{y^2} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{o(xy)}{xy} = 0$ が成り立つため, 上の等式から $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{f\binom{x}{y} - f\binom{0}{0} - (0\ \ 1)\left(\binom{x}{y} - \binom{0}{0}\right)}{\left\|\binom{x}{y} - \binom{0}{0}\right\|} = 0$ が成り立つことがわかる. 従って f は原点で微分可能であり, $f'\binom{0}{0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(22) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f\binom{at}{bt} - f\binom{0}{0}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\left(|t|\sqrt{a^2+b^2} - 1\right)^2 - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \left(t(a^2+b^2) - \frac{2|t|}{t}\sqrt{a^2+b^2} \right)$ は存在しないため, 原点において f は $\boldsymbol{v}$ 方向には方向微分不可能である.

$\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$ の場合は $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = \frac{2x\left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = \frac{2y\left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ であり, 原点において f は $\boldsymbol{e}_1$ 方向と $\boldsymbol{e}_2$ 方向には方向微分不可能であるため, $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}$ と $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}$ はどちらも存在しない.

原点において f が $\boldsymbol{v}$ 方向に方向微分不可能であるようなベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在するため, f は原点で微分不可能である.

4. (1) $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x} = y^3 + 3x^2y^3 - y^4$, $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 + 3x^3y^2 - 4xy^3$ より

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(y^3 + 3x^2y^3 - y^4) = 6xy^3, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}(y^3 + 3x^2y^3 - y^4) = 3y^2 + 9x^2y^2 - 4y^3, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(3xy^2 + 3x^3y^2 - 4xy^3) = 3y^2 + 9x^2y^2 - 4y^3, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(3xy^2 + 3x^3y^2 - 4xy^3) = 6xy + 6x^3y - 12xy^2.
\end{aligned}
$$

(2) $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y}$, $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y}$ より,

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} e^{x+y} = e^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} e^{x+y} = e^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} e^{x+y} = e^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} e^{x+y} = e^{x+y}.
$$

(3) $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ より,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}
$$

(4) $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$ より

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}
$$

(5) $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{2(y^2-x)^{\frac{1}{2}}}$, $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{(y^2-x)^{\frac{1}{2}}}$ より

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{-1}{2(y^2-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-1}{4(y^2-x)^{\frac{3}{2}}}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{-1}{2(y^2-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y}{2(y^2-x)^{\frac{3}{2}}}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{(y^2-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y}{2(y^2-x)^{\frac{3}{2}}}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{(y^2-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y^2}{(y^2-x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(y^2-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-x}{(y^2-x)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}
$$

(6) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ より

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{-x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-(x^2+y^2)+3x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{-x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3xy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3xy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-(x^2+y^2)+3y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

(7) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy\cos x^2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2\cos x^2y$ より

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}2xy\cos x^2y = 2y\cos x^2y - 4x^2y^2\sin x^2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}2xy\cos x^2y = 2x\cos x^2y - 2x^3y\sin x^2y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}x^2\cos x^2y = 2x\cos x^2y - 2x^3y\sin x^2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}x^2\cos x^2y = -x^4\sin x^2y.$$

(8) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-2y}{(x-y)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2x}{(x-y)^2}$ より

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{-2y}{(x-y)^2} = \frac{4y}{(x-y)^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{-2y}{(x-y)^2} = \frac{-2(x-y)^2-4y(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{-2x-2y}{(x-y)^3},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{2(x-y)^2-4x(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{-2x-2y}{(x-y)^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{4x}{(x-y)^3}.$$

(9) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x+2y}{x^2+2xy-y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2x-2y}{x^2+2xy-y^2}$ より

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{2x+2y}{x^2+2xy-y^2} = \frac{2(x^2+2xy-y^2)-(2x+2y)^2}{(x^2+2xy-y^2)^2} = \frac{-2x^2-4xy-6y^2}{(x^2+2xy-y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{2x+2y}{x^2+2xy-y^2} = \frac{2(x^2+2xy-y^2)-(4x^2-4y^2)}{(x^2+2xy-y^2)^2} = \frac{-2x^2+2xy+y^2}{(x^2+2xy-y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{2x-2y}{x^2+2xy-y^2} = \frac{2(x^2+2xy-y^2)-(4x^2-4y^2)}{(x^2+2xy-y^2)^2} = \frac{-2x^2+2xy+y^2}{(x^2+2xy-y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{2x-2y}{x^2+2xy-y^2} = \frac{-2(x^2+2xy-y^2)-(2x-2y)^2}{(x^2+2xy-y^2)^2} = \frac{-6x^2+4xy-2y^2}{(x^2+2xy-y^2)^2}.$$

(10) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2+y^4}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{4y^3}{x^2+y^4}$ より

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{2x}{x^2+y^4} = \frac{2(x^2+y^4)-4x^2}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2(-x^2+y^4)}{(x^2+y^4)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{2x}{x^2+y^4} = \frac{-8xy^3}{(x^2+y^4)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{4y^3}{x^2+y^4} = \frac{-8xy^3}{(x^2+y^4)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{4y^3}{x^2+y^4} = \frac{12y^2(x^2+y^4)-16y^6}{(x^2+y^4)^2} = \frac{4y^2(3x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2}.$$

(11) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -(2x+y^3)\sin(x^2+xy^3)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -3xy^2\sin(x^2+xy^3)$ より

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(-(2x+y^3)\sin(x^2+xy^3)) = -2\sin(x^2+xy^3) - (2x+y^3)^2\cos(x^2+xy^3),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(-(2x+y^3)\sin(x^2+xy^3)) = -3y^2\sin(x^2+xy^3) - 3xy^2(2x+y^3)\cos(x^2+xy^3),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-3xy^2\sin(x^2+xy^3)) = -3y^2\sin(x^2+xy^3) - 3xy^2(2x+y^3)\cos(x^2+xy^3),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(-3xy^2\sin(x^2+xy^3)) = -6xy\sin(x^2+xy^3) - 9x^2y^4\cos(x^2+xy^3).$$

(12) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2(ax+by)e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2(bx+cy)e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}$ より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-2(ax+by)e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\right) = (4(ax+by)^2-2a)e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-2(ax+by)e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\right) = (4(ax+by)(bx+cy)-2b)e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-2e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\right) = (4(ax+by)(bx+cy)-2b)e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-2(bx+cy)e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\right) = (4(bx+cy)^2-2c)e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}.
\end{aligned}$$

(13) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2xy}{(1-x^4y^2)^{\frac{1}{2}}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^2}{(1-x^4y^2)^{\frac{1}{2}}}$ より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{2xy}{(1-x^4y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2y}{(1-x^4y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{4x^4y^3}{(1-x^4y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2y+2x^4y^3}{(1-x^4y^2)^{\frac{3}{2}}},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{2xy}{(1-x^4y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2x}{(1-x^4y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2x^5y^2}{(1-x^4y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x}{(1-x^4y^2)^{\frac{3}{2}}},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2}{(1-x^4y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2x}{(1-x^4y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2x^5y^2}{(1-x^4y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x}{(1-x^4y^2)^{\frac{3}{2}}},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{x^2}{(1-x^4y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^6y}{(1-x^4y^2)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

(14) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = ae^{ax}\sin by$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = be^{ax}\cos by$ より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}ae^{ax}\sin by = a^2e^{ax}\sin by, &\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}ae^{ax}\sin by = abe^{ax}\cos by,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}be^{ax}\cos by = abe^{ax}\cos by, &\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}be^{ax}\cos by = -b^2e^{ax}\sin by.
\end{aligned}$$

(15) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{e^x}{e^x+e^{2y}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2e^{2y}}{e^x+e^{2y}}$ より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{e^x}{e^x+e^{2y}} = \frac{e^x(e^x+e^{2y})-e^{2x}}{(e^x+e^{2y})^2} = \frac{e^{x+2y}}{(e^x+e^{2y})^2}, &\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{e^x}{e^x+e^{2y}} = \frac{-2e^{x+2y}}{(e^x+e^{2y})^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{2e^{2y}}{e^x+e^{2y}} = \frac{-2e^{x+2y}}{(e^x+e^{2y})^2}, &\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{2e^{2y}}{e^x+e^{2y}} = \frac{4e^{2y}(e^x+e^{2y})-4e^{4y}}{(e^x+e^{2y})^2} = \frac{4e^{x+2y}}{(e^x+e^{2y})^2}.
\end{aligned}$$

(16) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2}\dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, &\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, &\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

(17) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{3x}(3\cos(x+2y)-\sin(x+2y))$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2e^{3x}\sin(x+2y)$ より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}e^{3x}(3\cos(x+2y)-\sin(x+2y)) = e^{3x}(9\cos(x+2y)-6\sin(x+2y)-\cos(x+2y)),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}e^{3x}(3\cos(x+2y)-\sin(x+2y)) = e^{3x}(-6\sin(x+2y)-2\cos(x+2y)),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(-2e^{3x}\sin(x+2y)) = e^{3x}(-6\sin(x+2y)-2\cos(x+2y)),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(-2e^{3x}\sin(x+2y)) - 6e^{3x}\cos(x+2y).
\end{aligned}$$

(18) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$ より

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{-x}{x^2+y^2}=\frac{-(x^2+y^2)+2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{-x}{x^2+y^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

(19) $x^y=e^y\log x$ だから, $\dfrac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=e^{y\log x}\log x=x^y\log x$ より,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}yx^{y-1}=y(y-1)x^{y-2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}yx^{y-1}=x^{y-1}+yx^{y-1}\log x,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}x^y\log x=x^{y-1}+yx^{y-1}\log x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}x^y\log x=x^y(\log x)^2.$$

5. (1) $\dfrac{\partial}{\partial x}\sin(x\sin y)=\sin y\cos(x\sin y)$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\sin(x\sin y)=x\cos y\cos(x\sin y)$ より
$f'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\sin y\cos(x\sin y) & x\cos y\cos(x\sin y)\end{pmatrix}$.

(2) $\dfrac{\partial}{\partial x}\sin(xy)=y\cos(xy)$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\sin(xy)=x\cos(xy)$ より $f'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}y\cos(xy) & x\cos(xy)\end{pmatrix}$.

(3) $\dfrac{\partial}{\partial x}x^y=yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}x^y=x^y\log x$, $\dfrac{\partial}{\partial z}x^y=0$ より $f'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}yx^{y-1} & x^y\log x & 0\end{pmatrix}$.

(4) (1), (2), (3) の結果から $f'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}y\cos(xy) & x\cos(xy)\\ \sin y\cos(x\sin y) & x\cos y\cos(x\sin y)\\ yx^{y-1} & x^y\log x\end{pmatrix}$.

(5) (3) の結果と $\dfrac{\partial}{\partial z}x^y=\dfrac{\partial}{\partial x}z=\dfrac{\partial}{\partial y}z=0$, $\dfrac{\partial}{\partial z}z=1$ より $f'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}yx^{y-1} & x^y\log x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(6) $\dfrac{\partial}{\partial x}x^{y^z}=y^zx^{y^z-1}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}x^{y^z}=\dfrac{\partial}{\partial y}e^{y^z\log x}=zy^{z-1}(\log x)e^{y^z\log x}=zy^{z-1}x^{y^z}\log x$,
$\dfrac{\partial}{\partial z}x^{y^z}=\dfrac{\partial}{\partial z}e^{y^z\log x}=y^z(\log x\log y)e^{y^z\log x}=y^zx^{y^z}\log x\log y$ より
$f'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}y^zx^{y^z-1} & zy^{z-1}x^{y^z}\log x & y^zx^{y^z}\log x\log y\end{pmatrix}$.

(7) $\dfrac{\partial}{\partial x}x^{y+z}=(y+z)x^{y+z-1}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}x^{y+z}=\dfrac{\partial}{\partial z}x^{y+z}=x^{y+z}\log x$ より $f'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}(y+z)x^{y+z-1} & x^{y+z} & x^{y+z}\end{pmatrix}$.

(8) $\dfrac{\partial}{\partial x}(x+y)^z=\dfrac{\partial}{\partial y}(x+y)^z=z(x+y)^{z-1}$, $\dfrac{\partial}{\partial z}(x+y)^z=(x+y)^z\log(x+y)$ より
$f'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}z(x+y)^{z-1} & z(x+y)^{z-1} & (x+y)^z\log(x+y)\end{pmatrix}$.

(9) $\dfrac{\partial}{\partial x}\sin(x\sin(y\sin z))=\sin(y\sin z)\cos(x\sin(y\sin z))$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\sin(x\sin(y\sin z))=$
$x\sin z\cos(y\sin z)\cos(x\sin(y\sin z))$, $\dfrac{\partial}{\partial z}\sin(x\sin(y\sin z))=xy\cos z\cos(y\sin z)\cos(x\sin(y\sin z))$ より
$f'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\sin(y\sin z)\cos(x\sin(y\sin z)) & x\sin z\cos(y\sin z)\cos(x\sin(y\sin z)) & xy\cos z\cos(y\sin z)\cos(x\sin(y\sin z))\end{pmatrix}$.

6. (1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=g'(x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=g'(y)$

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=g'(x+y)$

(4) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=g'(x)h(y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=g(x)h'(y)$.

(5) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=g'(x)h(y)g(x)^{h(y)-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=g(x)^{h(y)}h'(y)\log g(x)$.

7. f の定義から $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}t\\0\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=a$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}0\\t\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=b$ だから, f が $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で微分可能ならば, $f'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}a & b\end{smallmatrix}\right)$ となる. 故に f が $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で微分可能であるためには $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}}\dfrac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{0})-\left(\begin{smallmatrix}a & b\end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}=0$ が成り立つことが必要十分である. ここで, $\boldsymbol{x}=\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\boldsymbol{0}$ に対して, $\dfrac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{0})-\left(\begin{smallmatrix}a & b\end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}=\dfrac{|x|^m|y|^n}{(|x|^p+|y|^q)^r\sqrt{x^2+y^2}}$ だから, f が $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で微分可能であるためには $\lim\limits_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\dfrac{|x|^m|y|^n}{(|x|^p+|y|^q)^r\sqrt{x^2+y^2}}=0$ が成り立つことが必要十分である. 従って, 第17回演習問題5の結果から, f が $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で微分可能であるための必要十分条件は

「$p\geqq q$ かつ $\min\left\{\dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{q}-\dfrac{1}{p},\ \dfrac{m}{q}+\dfrac{n}{q}-\dfrac{1}{q}\right\}>r$」または「$p\leqq q$ かつ $\min\left\{\dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{q}-\dfrac{1}{q},\ \dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{p}-\dfrac{1}{p}\right\}>r$」

である.

8. $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ の場合, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{x^4y-y^5+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{x^5-xy^4-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$. また $f\left(\begin{smallmatrix}x\\0\end{smallmatrix}\right)=f\left(\begin{smallmatrix}0\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}x\\0\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{x}=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}0\\y\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{y}=0$. 従って $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\y\end{smallmatrix}\right)-\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-y^4}{y^4}=-1$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\0\end{smallmatrix}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^4}=1$ だから $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ である.

9. $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ の場合, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=-\dfrac{2(3x^2y^4-y^6)}{(x^2+y^2)^3}$, $\dfrac{\partial f^2}{\partial y\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial f^2}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{2(x^6-3x^4y^2)}{(x^2+y^2)^3}$. $f\left(\begin{smallmatrix}x\\0\end{smallmatrix}\right)=f\left(\begin{smallmatrix}0\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}x\\0\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{x}=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}0\\y\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{y}=0$. 故に $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\0\end{smallmatrix}\right)-\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{x}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\y\end{smallmatrix}\right)-\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{y}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\0\end{smallmatrix}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{x}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\y\end{smallmatrix}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{x}=0$ である. 従って $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\t\end{smallmatrix}\right)=2\neq 0=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(\begin{smallmatrix}t\\t\end{smallmatrix}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}t\\t\end{smallmatrix}\right)=1\neq 0=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}t\\0\end{smallmatrix}\right)=2\neq 0=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ となるため, f の2次偏導関数はすべて原点で連続ではない.

10. (1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=g(x+y)$

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-g(x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=g(y)$

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=yg(xy)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=xg(xy)$

(4) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_x^y g(s)ds\right)g\left(\displaystyle\int_x^y g(s)ds\right)=-g(x)g\left(\displaystyle\int_x^y g(s)ds\right)$,
$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_x^y g(s)ds\right)g\left(\displaystyle\int_x^y g(s)ds\right)=g(y)g\left(\displaystyle\int_x^y g(s)ds\right)$

(5) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\sin(x\sin(y\sin z))\right)g(\sin(x\sin(y\sin z)))-\left(\dfrac{\partial}{\partial x}x^y\right)g(x^y)=$
$\sin(y\sin z)\cos(x\sin(y\sin z))g(\sin(x\sin(y\sin z)))-yx^{y-1}g(x^y)$,
$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\sin(x\sin(y\sin z))\right)g(\sin(x\sin(y\sin z)))-\left(\dfrac{\partial}{\partial y}x^y\right)g(x^y)=$
$x\sin z\cos(y\sin z)\cos(x\sin(y\sin z))g(\sin(x\sin(y\sin z)))-x^y\log xg(x^y)$,
$\dfrac{\partial f}{\partial z}=\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\sin(x\sin(y\sin z))\right)g(\sin(x\sin(y\sin z)))-\left(\dfrac{\partial}{\partial z}x^y\right)g(x^y)=$
$xy\cos z\cos(y\sin z)\cos(x\sin(y\sin z))g(\sin(x\sin(y\sin z)))$

微積分学 II 演習問題　第 19 回　合成写像の微分

1. $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$, $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=ye^{\sqrt{x^2+y^2}}$, $g\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}u\cos v\\u\sin v\end{smallmatrix}\right)$ により定める.
   (1) f の $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2$ における微分と g の $\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2$ における微分を求めよ.
   (2) 合成写像 $f\circ g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ の $\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)$ における微分と $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)$ を求めよ.

2. $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$, $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x^2y^2-2y^3\\x^2+xy-y^2\end{smallmatrix}\right)$, $g\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}u^3-u^2v+v^2\\u^2-uv^3\end{smallmatrix}\right)$ により定める.
   (1) f の $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2$ における微分と g の $\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2$ における微分を求めよ.
   (2) 合成写像 $f\circ g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ の $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ における微分を求めよ.
   (3) $f_1:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f_1\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^2y^2-2y^3$ で定義される関数とするとき, $\dfrac{\partial f_1\circ g}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial f_1\circ g}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ を求めよ.

3. $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$, $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x^3+y^2\\x^2y+xy-2y^2\end{smallmatrix}\right)$, $g\left(\begin{smallmatrix}z\\w\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}e^z\cos w\\e^z\sin w\end{smallmatrix}\right)$ により定める.
(1) f, g のそれぞれ $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}z\\w\end{smallmatrix}\right)$ における微分を求めよ.
(2) 合成写像 $f\circ g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ の $\left(\begin{smallmatrix}z\\w\end{smallmatrix}\right)$ における微分を求めよ.

4. $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$, $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$, $h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ を $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\log(x^2+xy+y^2+1)$, $g\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)$, $h(t)=\left(\begin{smallmatrix}e^t+e^{-t}\\e^t-e^{-t}\end{smallmatrix}\right)$ により定める.
(1) f, g, h のそれぞれ $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)$, t における微分を求めよ.
(2) 合成写像 $f\circ g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ の $\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)$ における微分を求め, $f\circ g$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial r}$, $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial \theta}$ を求めよ.
(3) 合成写像 $f\circ h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ の導関数を求めよ.

5. 写像 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ と関数 $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}3x^3-2x^2y+y^3\\x^2y-2xy^2\end{smallmatrix}\right)$, $g\left(\begin{smallmatrix}z\\w\end{smallmatrix}\right)=z^2w^4-4zw^3-5z^2w^2$ で定める.
(1) f の $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ における微分 $f'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ と g の $\left(\begin{smallmatrix}z\\w\end{smallmatrix}\right)$ における微分 $g'\left(\begin{smallmatrix}z\\w\end{smallmatrix}\right)$ を求めよ.
(2) $\left(\begin{smallmatrix}2\\-1\end{smallmatrix}\right)$ における g の $\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)$ 方向の方向微分を求めよ.
(3) 合成写像 $g\circ f$ の $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ における微分 $(g\circ f)'\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ を求めよ.

6. 写像 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ と関数 $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}2x^3-y^3\\x^2y-2xy^2\end{smallmatrix}\right)$, $g\left(\begin{smallmatrix}z\\w\end{smallmatrix}\right)=z^3w^3+zw^2-z^2w$ で定める.
(1) f の $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ における微分 $f'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ と g の $\left(\begin{smallmatrix}z\\w\end{smallmatrix}\right)$ における微分 $g'\left(\begin{smallmatrix}z\\w\end{smallmatrix}\right)$ を求めよ.
(2) $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ における g の $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)$ 方向の方向微分を求めよ.
(3) 合成写像 $g\circ f$ の $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ における微分 $(g\circ f)'\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ を求め, さらに $\dfrac{\partial g\circ f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ と $\dfrac{\partial g\circ f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ の値を求めよ.

7. $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$, $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\tan^{-1}(x^2+xy+2y^2)$, $g\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)$ により定める. 合成写像 $f\circ g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ の $\left(\begin{smallmatrix}1\\\pi\end{smallmatrix}\right)$ における微分を求め, $f\circ g$ の $\left(\begin{smallmatrix}1\\\pi\end{smallmatrix}\right)$ における偏微分 $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial r}\left(\begin{smallmatrix}1\\\pi\end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial \theta}\left(\begin{smallmatrix}1\\\pi\end{smallmatrix}\right)$ を求めよ.

8. 関数 $f_1,f_2:\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\}\to\boldsymbol{R}$, $f_3:\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x\neq 0\right\}\to\boldsymbol{R}$, $f_4,f_5:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ が, それぞれ $f_1\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\log(x^2+y^2)$, $f_2\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2$, $f_3\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$, $f_4\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\tan^{-1}xy$, $f_5\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=ye^{\sqrt{x^2+y^2}}$ で与えられているとする.
   (1) $\omega_1,\omega_2,\omega_3:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ をそれぞれ $\omega_1(t)=\left(\begin{smallmatrix}e^t+e^{-t}\\e^t-e^{-t}\end{smallmatrix}\right)$, $\omega_2(t)=\left(\begin{smallmatrix}t^2-1\\2t\end{smallmatrix}\right)$, $\omega_3(t)=\left(\begin{smallmatrix}e^t\cos t\\e^t\sin t\end{smallmatrix}\right)$ で定めるとき, $(f_i\circ\omega_j)'(t)$ $(i=1,2,3,4,5,\ j=1,2,3)$ を求めよ. ただし $(i,j)=(3,2)$ のときは $t\neq\pm1$, $(i,j)=(3,3)$ のときは $\dfrac{t}{\pi}-\dfrac{1}{2}\notin\boldsymbol{Z}$ とする.
   (2) $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ をそれぞれ $\varphi_1\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}u+v\\uv-1\end{smallmatrix}\right)$, $\varphi_2\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\sin(u+v)\\\cos(u-v)\end{smallmatrix}\right)$, $\varphi_3\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}u\cos v\\u\sin v\end{smallmatrix}\right)$ で定めるとき, $(f_i\circ\varphi_j)'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial f_i\circ\varphi_j}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial f_i\circ\varphi_j}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)$ $(i=1,2,3,4,\ j=1,2,3)$ を求めよ. ただし $(i,j)=(1,2),(2,2)$ のときは $\dfrac{u+v}{\pi}\notin\boldsymbol{Z}$ または $\dfrac{u-v}{\pi}-\dfrac{1}{2}\notin\boldsymbol{Z}$, $(i,j)=(1,3),(2,3)$ のときは $u\neq 0$, $(i,j)=(3,1)$ のときは $u+v\neq 0$, $(i,j)=(3,2)$ のときは $\dfrac{u+v}{\pi}\notin\boldsymbol{Z}$, $(i,j)=(3,3)$ のときは $u\neq 0$ かつ $\dfrac{v}{\pi}-\dfrac{1}{2}\notin\boldsymbol{Z}$ とする.

9. (発展問題) $g, h, k : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $G : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ が微分可能なとき, (1), (2) で与えられる $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を g, h, k, F, G を用いて表せ. また (3) で与えられる $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, (4) で与えられる $f : X \to \boldsymbol{R}$ (ただし $X = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x, y, z > 0 \right\}$) に対して $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ を g, h, k, F, G を用いて表せ.

(1) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) = F\left(\begin{smallmatrix} g(x)k(y) \\ g(x)+h(y) \end{smallmatrix} \right)$ (2) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) = G\left(\begin{smallmatrix} x \\ g(x) \\ F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \end{smallmatrix} \right)$ (3) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) = F\left(\begin{smallmatrix} g(x+y) \\ h(y+z) \end{smallmatrix} \right)$ (4) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) = G\left(\begin{smallmatrix} x^y \\ y^z \\ z^x \end{smallmatrix} \right)$

第 19 回の演習問題の解答

1. (1) $f'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{xye^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} & e^{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+1\right) \end{pmatrix}$, $g'\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}$

(2) (1) より $f'(g\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)) = f'\left(\begin{smallmatrix} u\cos v \\ u\sin v \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} |u|e^{|u|}\cos v\sin v & e^{|u|}\left(|u|\sin^2 v+1\right) \end{pmatrix}$ であり, 合成写像の微分法から

$$\begin{aligned}(f\circ g)'\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) &= f'(g\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right))\,g'\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} |u|e^{|u|}\cos v\sin v & e^{|u|}\left(|u|\sin^2 v+1\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (|u|+1)e^{|u|}\sin v & ue^{|u|}\cos v \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$(f\circ g)'\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f\circ g}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) & \frac{\partial f\circ g}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix}$ だから, $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = (|u|+1)e^{|u|}\sin v$, $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = ue^{|u|}\cos v$.

2. (1) $f'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2xy^2 & 2x^2y-6y^2 \\ 2x+y & x-2y \end{pmatrix}$, $g'\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3u^2-2uv & -u^2+2v \\ 2u-v^3 & -3uv^2 \end{pmatrix}$

(2) (1) より $f'(g\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)) = f'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $g'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ であり, 合成写像の微分法から

$$(f\circ g)'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = f'(g\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right))\,g'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

(3) $\dfrac{\partial f_1\circ g}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial f_1\circ g}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ は $f'(g\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right))$ のそれぞれ $(1,1)$ 成分, $(1,2)$ 成分だから, (2) の結果から $\dfrac{\partial f_1\circ g}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = -2$, $\dfrac{\partial f_1\circ g}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = -2$ である.

3. (1) $f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$, $g(\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} g_1(\boldsymbol{z}) \\ g_2(\boldsymbol{z}) \end{pmatrix}$ のとき, f, g の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}$ における微分 $f'(\boldsymbol{x})$, $g'(\boldsymbol{z})$ は

$$f'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \qquad g'(\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z}(\boldsymbol{z}) & \frac{\partial g_1}{\partial w}(\boldsymbol{z}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial z}(\boldsymbol{z}) & \frac{\partial g_2}{\partial w}(\boldsymbol{z}) \end{pmatrix}$$

で与えられる. ここで, $f_1\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^3+y^2$, $f_2\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^2y+xy-2y^2$, $g_1\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) = e^z\cos w$, $g_2\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) = e^z\sin w$ だから

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f_1}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 3x^2, && \frac{\partial f_1}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 2y, && \frac{\partial f_2}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 2xy+y, && \frac{\partial f_2}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^2+x-4y, \\ &\frac{\partial g_1}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) = e^z\cos w, && \frac{\partial g_1}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) = -e^z\sin w, && \frac{\partial g_2}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) = e^z\sin w, && \frac{\partial g_2}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) = e^z\cos w\end{aligned}$$

である. 従って $f'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$, $g'\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)$ は以下で与えられる.

$$f'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 2y \\ 2xy+y & x^2+x-4y \end{pmatrix}, \qquad g'\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^z\cos w & -e^z\sin w \\ e^z\sin w & e^z\cos w \end{pmatrix}$$

(2) 合成写像 $f\circ g : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ の $\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)$ における微分 $(f\circ g)'\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)$ は合成写像の微分法と (1) の結果から

$$\begin{aligned}(f\circ g)'\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) &= f'(g\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right))\,g'\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) = f'\left(\begin{smallmatrix} e^z\cos w \\ e^z\sin w \end{smallmatrix}\right)g'\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 3e^{2z}\cos^2 w & 2e^z\sin w \\ 2e^{2z}\cos w\sin w + e^z\sin w & e^{2z}\cos^2 w + e^z\cos w - 4e^z\sin w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^z\cos w & -e^z\sin w \\ e^z\sin w & e^z\cos w \end{pmatrix} \\ &= e^{2z}\begin{pmatrix} 3e^z\cos^2 w & 2\sin w \\ 2e^z\cos w\sin w + \sin w & e^z\cos^2 w + \cos w - 4\sin w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos w & -\sin w \\ \sin w & \cos w \end{pmatrix} \\ &= e^{2z}\begin{pmatrix} 3e^z\cos^3 w + 2\sin^2 w & -3e^z\cos^2 w\sin w + \sin 2w \\ 3e^z\cos^2 w\sin w + \sin 2w - 4\sin^2 w & e^z\cos w(3\cos^2 w - 2) + \cos 2w - 2\sin 2w \end{pmatrix}\end{aligned}$$

で与えられる.

4. (1) $g(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} g_1(\boldsymbol{r}) \\ g_2(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix}$, $h(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}$ のとき, f, g, h のそれぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{r}$, t における微分 $f'(\boldsymbol{x})$, $g'(\boldsymbol{r})$, $h'(t)$ は

$$f'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \quad g'(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r}(\boldsymbol{r}) & \frac{\partial g_1}{\partial \theta}(\boldsymbol{r}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial r}(\boldsymbol{r}) & \frac{\partial g_2}{\partial \theta}(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix}, \quad h'(t) = \begin{pmatrix} \frac{dh_1}{dt}(t) \\ \frac{dh_2}{dt}(t) \end{pmatrix}$$

で与えられる. ここで,

$$f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\log(x^2+xy+y^2+1),\ \ g_1\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=r\cos\theta,\ \ g_2\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=r\sin\theta,\ \ h_1(t)=e^t+e^{-t},\ \ h_2(t)=e^t-e^{-t}$$

だから

$$\begin{array}{llll}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{2x+y}{x^2+xy+y^2+1}, & \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{x+2y}{x^2+xy+y^2+1}, & \dfrac{\partial g_1}{\partial r}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=\cos\theta, & \dfrac{\partial g_1}{\partial\theta}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=-r\sin\theta,\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial r}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=\sin\theta, & \dfrac{\partial g_2}{\partial\theta}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=r\cos\theta, & \dfrac{dh_1}{dt}(t)=e^t-e^{-t}, & \dfrac{dh_2}{dt}(t)=e^t+e^{-t}\end{array}$$

である. 従って $f'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$, $g'\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)$, $h'(t)$ は次のようになる.

$$f'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2+1} & \frac{x+2y}{x^2+xy+y^2+1}\end{pmatrix},\ \ g'\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix},\ \ h'(t)=\begin{pmatrix}e^t-e^{-t}\\ e^t+e^{-t}\end{pmatrix}$$

(2) 合成写像 $f\circ g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ の $\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)$ における微分 $(f\circ g)'\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)$ は合成写像の微分法と (1) の結果から

$$\begin{aligned}(f\circ g)'\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)&=f'(g\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right))\,g'\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=f'\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)g'\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\\&=\begin{pmatrix}\frac{2r\cos\theta+r\sin\theta}{r^2+r^2\cos\theta\sin\theta+1} & \frac{r\cos\theta+2r\sin\theta}{r^2+r^2\cos\theta\sin\theta+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{2r+2r\cos\theta\sin\theta}{r^2+r^2\cos\theta\sin\theta+1} & \frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2+r^2\cos\theta\sin\theta+1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

で与えられる. 従って $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial r}=\dfrac{2r+2r\cos\theta\sin\theta}{r^2+r^2\cos\theta\sin\theta+1}$, $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial\theta}=\dfrac{r^2}{r^2+r^2\cos\theta\sin\theta+1}$ である.

(3) 合成写像 $f\circ h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ の t における微分 $(f\circ h)'(t)$ は合成写像の微分法と (1) の結果から

$$\begin{aligned}(f\circ h)'(t)&=f'(h(t))h'(t)=f'\begin{pmatrix}e^t+e^{-t}\\ e^t-e^{-t}\end{pmatrix}h'(t)\\&=\begin{pmatrix}\frac{3e^t+e^{-t}}{3e^{2t}+e^{-2t}+1} & \frac{3e^t-e^{-t}}{3e^{2t}+e^{-2t}+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t-e^{-t}\\ e^t+e^{-t}\end{pmatrix}=\frac{6e^{2t}-2e^{-2t}}{3e^{2t}+e^{-2t}+1}\end{aligned}$$

で与えられる. よって $f\circ h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ の導関数は $\dfrac{d(f\circ h)}{dt}=\dfrac{6e^{2t}-2e^{-2t}}{3e^{2t}+e^{-2t}+1}$ である.

5. (1) $f'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}9x^2-4xy & -2x^2+3y^2\\ 2xy-2y^2 & x^2-4xy\end{pmatrix}$, $g'\left(\begin{smallmatrix}z\\w\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2zw^4-4w^3-10zw^2 & 4z^2w^3-12zw^2-10z^2w\end{pmatrix}$

(2) $\left(\begin{smallmatrix}2\\-1\end{smallmatrix}\right)$ における g の $\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)$ 方向の方向微分は $g'\left(\begin{smallmatrix}2\\-1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)$ で与えられる. (1) の結果より, 求める値は $g'\left(\begin{smallmatrix}2\\-1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}-12 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)=12$ である.

(3) 合成写像の微分法から $(g\circ f)'\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)=g'(f\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right))\,f'\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)=g'\left(\begin{smallmatrix}2\\-1\end{smallmatrix}\right)f'\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}-12 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}5 & 1\\0 & -3\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}-60 & -12\end{smallmatrix}\right)$.

6. (1) $f'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}6x^2 & -3y^2\\ 2xy-2y^2 & x^2-4xy\end{pmatrix}$, $g'\left(\begin{smallmatrix}z\\w\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3z^2w^3+w^2-2zw & 3z^3w^2+2zw-z^2\end{pmatrix}$

(2) $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ における g の $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)$ 方向の方向微分は $g'\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)$ で与えられる. (1) の結果より, 求める値は $g'\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}2 & 4\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)=10$ である.

(3) 合成写像の微分法から $(g\circ f)'\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)=g'(f\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right))\,f'\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)=g'\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)f'\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}6 & -3\\0 & -3\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\end{smallmatrix}\right)$.

$(g\circ f)'\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial g\circ f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) & \frac{\partial g\circ f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix}$ だから, 上の結果から $\dfrac{\partial g\circ f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial g\circ f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)=0$ である.

7. $g_1\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=r\cos\theta$, $g_2\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=r\sin\theta$ とおけば, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{2x+y}{1+(x^2+xy+2y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{x+4y}{1+(x^2+xy+2y^2)^2}$, $\dfrac{\partial g_1}{\partial r}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=\cos\theta$, $\dfrac{\partial g_1}{\partial\theta}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=-r\sin\theta$, $\dfrac{\partial g_2}{\partial r}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=\sin\theta$, $\dfrac{\partial g_2}{\partial\theta}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=r\cos\theta$ である. また, $g\left(\begin{smallmatrix}1\\\pi\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}-1\\0\end{smallmatrix}\right)$ だから,
$f'(g\left(\begin{smallmatrix}1\\\pi\end{smallmatrix}\right))=f'\left(\begin{smallmatrix}-1\\0\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}-1\\0\end{smallmatrix}\right) & \frac{\partial f_1}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}-1\\0\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $g'\left(\begin{smallmatrix}1\\\pi\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial r}\left(\begin{smallmatrix}1\\\pi\end{smallmatrix}\right) & \frac{\partial g_1}{\partial\theta}\left(\begin{smallmatrix}1\\\pi\end{smallmatrix}\right)\\ \frac{\partial g_2}{\partial r}\left(\begin{smallmatrix}1\\\pi\end{smallmatrix}\right) & \frac{\partial g_2}{\partial\theta}\left(\begin{smallmatrix}1\\\pi\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ である.
合成写像 $f\circ g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ の $\left(\begin{smallmatrix}1\\\pi\end{smallmatrix}\right)$ における微分 $(f\circ g)'\left(\begin{smallmatrix}1\\\pi\end{smallmatrix}\right)$ は, 合成写像の微分法から

$$(f\circ g)'\left(\begin{smallmatrix}1\\\pi\end{smallmatrix}\right)=f'(g\left(\begin{smallmatrix}1\\\pi\end{smallmatrix}\right))\,g'\left(\begin{smallmatrix}1\\\pi\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

で与えられる．従って $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial r}\left(\begin{smallmatrix}1\\ \pi\end{smallmatrix}\right)=1$, $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial \theta}\left(\begin{smallmatrix}1\\ \pi\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{1}{2}$ である．

8. $f_i'\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_i}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right) & \frac{\partial f_i}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix}$ だから，$f_1'\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2}\end{pmatrix}$，$f_2'\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2x-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & 2y-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{pmatrix}$，$f_3'\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2}\end{pmatrix}$，$f_4'\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{y}{1+x^2y^2} & \frac{x}{1+x^2y^2}\end{pmatrix}$，$f_5'\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{xye^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} & e^{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+1\right)\end{pmatrix}$ が成り立つ．

(1) $\omega_1'(t)=\begin{pmatrix}e^t-e^{-t}\\ e^t+e^{-t}\end{pmatrix}$，$\omega_2'(t)=\begin{pmatrix}2t\\ 2\end{pmatrix}$，$\omega_3'(t)=\begin{pmatrix}e^t(\cos t-\sin t)\\ e^t(\sin t+\cos t)\end{pmatrix}$ であり，合成写像の微分法から $(f_i\circ\omega_j)'(t)=f_i'(\omega_j(t))\omega_j'(t)$ だから

$$(f_1\circ\omega_1)'(t)=f_1'\left(\begin{smallmatrix}e^t+e^{-t}\\ e^t-e^{-t}\end{smallmatrix}\right)\omega_1'(t)=\begin{pmatrix}\frac{e^t+e^{-t}}{e^{2t}+e^{-2t}} & \frac{e^t-e^{-t}}{e^{2t}+e^{-2t}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t-e^{-t}\\ e^t+e^{-t}\end{pmatrix}=\frac{2(e^{2t}-e^{-2t})}{e^{2t}+e^{-2t}}$$

$$(f_1\circ\omega_2)'(t)=f_1'\left(\begin{smallmatrix}t^2-1\\ 2t\end{smallmatrix}\right)\omega_2'(t)=\begin{pmatrix}\frac{2(t^2-1)}{(t^2+1)^2} & \frac{4t}{(t^2+1)^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2t\\ 2\end{pmatrix}=\frac{4t}{t^2+1}$$

$$(f_1\circ\omega_3)'(t)=f_1'\left(\begin{smallmatrix}e^t\cos t\\ e^t\sin t\end{smallmatrix}\right)\omega_3'(t)=\begin{pmatrix}2e^{-t}\cos t & 2e^{-t}\sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t(\cos t-\sin t)\\ e^t(\sin t+\cos t)\end{pmatrix}=2$$

$$\begin{aligned}(f_2\circ\omega_1)'(t)&=f_2'\left(\begin{smallmatrix}e^t+e^{-t}\\ e^t-e^{-t}\end{smallmatrix}\right)\omega_1'(t)=\begin{pmatrix}2(e^t+e^{-t})-\frac{1}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}} & 2(e^t-e^{-t})-\frac{1}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t-e^{-t}\\ e^t+e^{-t}\end{pmatrix}\\&=4(e^{2t}+e^{-2t})-\frac{2e^t}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}}\end{aligned}$$

$$(f_2\circ\omega_2)'(t)=f_2'\left(\begin{smallmatrix}t^2-1\\ 2t\end{smallmatrix}\right)\omega_2'(t)=\begin{pmatrix}2(t^2-1)-\frac{1}{t^2+1} & 4t-\frac{1}{t^2+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2t\\ 2\end{pmatrix}=4t(t^2+1)-\frac{2(t+1)}{t^2+1}$$

$$(f_2\circ\omega_3)'(t)=f_2'\left(\begin{smallmatrix}e^t\cos t\\ e^t\sin t\end{smallmatrix}\right)\omega_3'(t)=\begin{pmatrix}2e^t\cos t-e^{-t} & 2e^t\sin t-e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t(\cos t-\sin t)\\ e^t(\sin t+\cos t)\end{pmatrix}=2e^{2t}-2\cos t$$

$$(f_3\circ\omega_1)'(t)=f_3'\left(\begin{smallmatrix}e^t+e^{-t}\\ e^t-e^{-t}\end{smallmatrix}\right)\omega_1'(t)=\begin{pmatrix}-\frac{e^t-e^{-t}}{2(e^{2t}+e^{-2t})} & \frac{e^t+e^{-t}}{2(e^{2t}+e^{-2t})}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t-e^{-t}\\ e^t+e^{-t}\end{pmatrix}=\frac{2}{e^{2t}+e^{-2t}}$$

$$(f_3\circ\omega_2)'(t)=f_3'\left(\begin{smallmatrix}t^2-1\\ 2t\end{smallmatrix}\right)\omega_2'(t)=\begin{pmatrix}-\frac{2t}{(t^2+1)^2} & \frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2t\\ 2\end{pmatrix}=-\frac{2}{t^2+1}$$

$$(f_3\circ\omega_3)'(t)=f_3'\left(\begin{smallmatrix}e^t\cos t\\ e^t\sin t\end{smallmatrix}\right)\omega_3'(t)=\begin{pmatrix}e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t(\cos t-\sin t)\\ e^t(\sin t+\cos t)\end{pmatrix}=\cos 2t+\sin 2t$$

$$(f_4\circ\omega_1)'(t)=f_4'\left(\begin{smallmatrix}e^t+e^{-t}\\ e^t-e^{-t}\end{smallmatrix}\right)\omega_1'(t)=\begin{pmatrix}-\frac{e^t-e^{-t}}{1+(e^{2t}-e^{-2t})^2} & \frac{e^t+e^{-t}}{1+(e^{2t}-e^{-2t})^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t-e^{-t}\\ e^t+e^{-t}\end{pmatrix}=\frac{4}{1+(e^{2t}-e^{-2t})^2}$$

$$(f_4\circ\omega_2)'(t)=f_4'\left(\begin{smallmatrix}t^2-1\\ 2t\end{smallmatrix}\right)\omega_2'(t)=\begin{pmatrix}-\frac{2t}{1+4t^2(t^2-1)^2} & \frac{t^2-1}{1+4t^2(t^2-1)2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2t\\ 2\end{pmatrix}=-\frac{2(t^2+1))}{1+4t^2(t^2-1)2}$$

$$\begin{aligned}(f_4\circ\omega_3)'(t)&=f_4'\left(\begin{smallmatrix}e^t\cos t\\ e^t\sin t\end{smallmatrix}\right)\omega_3'(t)=\begin{pmatrix}-\frac{e^t\sin t}{1+e^{4t}\cos^2 t\sin^2 t} & \frac{e^t\cos t}{1+e^{4t}\cos^2 t\sin^2 t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t(\cos t-\sin t)\\ e^t(\sin t+\cos t)\end{pmatrix}\\&=\frac{e^{2t}}{1+e^{4t}\cos^2 t\sin^2 t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f_5\circ\omega_1)'(t)&=f_5'\left(\begin{smallmatrix}e^t+e^{-t}\\ e^t-e^{-t}\end{smallmatrix}\right)\omega_1'(t)=\begin{pmatrix}\frac{e^{\sqrt{2(e^{2t}+e^{-2t})}}(e^{2t}-e^{-2t})}{\sqrt{2(e^{2t}+e^{-2t})}} & e^{\sqrt{2(e^{2t}+e^{-2t})}}\left(\frac{(e^t-e^{-t})^2}{\sqrt{2(e^{2t}+e^{-2t})}}+1\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t-e^{-t}\\ e^t+e^{-t}\end{pmatrix}\\&=e^{\sqrt{2(e^{2t}+e^{-2t})}}(e^t+e^{-t})\left(\frac{\sqrt{2}(e^t-e^{-t})^2}{\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}}+1\right)\end{aligned}$$

$$(f_5\circ\omega_2)'(t)=f_5'\left(\begin{smallmatrix}t^2-1\\ 2t\end{smallmatrix}\right)\omega_2'(t)=\begin{pmatrix}\frac{2te^{t^2+1}(t^2-1)}{t^2+1} & e^{t^2+1}\left(\frac{4t^2}{t^2+1}+1\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2t\\ 2\end{pmatrix}=2(2t^2+1)e^{t^2+1}$$

$$\begin{aligned}(f_5\circ\omega_3)'(t)&=f_5'\left(\begin{smallmatrix}e^t\cos t\\ e^t\sin t\end{smallmatrix}\right)\omega_3'(t)=\begin{pmatrix}e^{e^t+t}\cos t\sin t & e^{e^t+t}\sin^2 t+e^{e^t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t(\cos t-\sin t)\\ e^t(\sin t+\cos t)\end{pmatrix}\\&=e^{e^t+t}\left(e^t\sin t+\sin t+\cos t\right)\end{aligned}$$

(2) $\varphi_1'\left(\begin{smallmatrix}u\\ v\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ v & u\end{pmatrix}$，$\varphi_2'\left(\begin{smallmatrix}u\\ v\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\cos(u+v) & \cos(u+v)\\ -\sin(u-v) & \sin(u-v)\end{pmatrix}$，$\varphi_3'\left(\begin{smallmatrix}u\\ v\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{pmatrix}$ であり，合成写像の

微分法から $(f_i\circ\varphi_j)'(t) = f_i'(\varphi_j(t))\varphi_j'(t)$ だから

$$(f_1\circ\varphi_1)'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) = f_1'\left(\begin{smallmatrix}u+v\\uv-1\end{smallmatrix}\right)\varphi_1'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\frac{2(u+v)}{(u^2+1)(v^2+1)} & \frac{2(uv-1)}{(u^2+1)(v^2+1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ v & u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2u}{u^2+1} & \frac{2v}{v^2+1}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}(f_1\circ\varphi_2)'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) &= f_1'\begin{pmatrix}\sin(u+v)\\ \cos(u-v)\end{pmatrix}\varphi_2'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\frac{2\sin(u+v)}{1+\sin 2u\cos 2v} & \frac{2\cos(u-v)}{1+\sin 2u\cos 2v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(u+v) & \cos(u+v)\\ -\sin(u-v) & \sin(u-v)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-\frac{2\cos 2u\sin 2v}{1+\sin 2u\cos 2v} & \frac{2\sin 2u\cos 2v}{1+\sin 2u\cos 2v}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$(f_1\circ\varphi_3)'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) = f_1'\left(\begin{smallmatrix}u\cos v\\u\sin v\end{smallmatrix}\right)\varphi_3'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\frac{2\cos v}{u} & \frac{2\sin v}{u}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{u} & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}(f_2\circ\varphi_1)'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) &= f_2'\left(\begin{smallmatrix}u+v\\uv-1\end{smallmatrix}\right)\varphi_1'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2(u+v) - \frac{1}{\sqrt{(u^2+1)(v^2+1)}} & 2(uv-1) - \frac{1}{\sqrt{(u^2+1)(v^2+1)}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ v & u\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2u(v^2+1) - \frac{v+1}{\sqrt{(u^2+1)(v^2+1)}} & 2v(u^2+1) - \frac{1}{\sqrt{(u^2+1)(v^2+1)}}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f_2\circ\varphi_2)'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) &= f_2'\begin{pmatrix}\sin(u+v)\\ \cos(u-v)\end{pmatrix}\varphi_2'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}2\sin(u+v) - \frac{1}{\sqrt{1+\sin 2u\cos 2v}} & 2\cos(u-v) - \frac{1}{\sqrt{1+\sin 2u\cos 2v}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(u+v) & \cos(u+v)\\ -\sin(u-v) & \sin(u-v)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2\cos 2u\sin 2v - \frac{\cos(u+v)-\sin(u-v)}{\sqrt{1+\sin 2u\cos 2v}} & 2\sin 2u\cos 2v - \frac{\cos(u+v)-\sin(u-v)}{\sqrt{1+\sin 2u\cos 2v}}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f_2\circ\varphi_3)'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) &= f_2'\left(\begin{smallmatrix}u\cos v\\u\sin v\end{smallmatrix}\right)\varphi_3'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2u\cos v - \frac{1}{|u|} & 2u\sin v - \frac{1}{|u|}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2u - \frac{\cos v+\sin v}{|u|} & \frac{u(\sin v-\cos v)}{|u|}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$(f_3\circ\varphi_1)'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) = f_3'\left(\begin{smallmatrix}u+v\\uv-1\end{smallmatrix}\right)\varphi_1'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-\frac{uv-1}{(u^2+1)(v^2+1)} & \frac{u+v}{(u^2+1)(v^2+1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ v & u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{u^2+1} & \frac{1}{v^2+1}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}(f_3\circ\varphi_2)'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) &= f_3'\begin{pmatrix}\sin(u+v)\\ \cos(u-v)\end{pmatrix}\varphi_2'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-\frac{\cos(u-v)}{1+\sin 2u\cos 2v} & \frac{\sin(u+v)}{1+\sin 2u\cos 2v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(u+v) & \cos(u+v)\\ -\sin(u-v) & \sin(u-v)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-\frac{\cos 2v}{1+\sin 2u\cos 2v} & -\frac{\cos 2u}{1+\sin 2u\cos 2v}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$(f_3\circ\varphi_3)'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) = f_3'\left(\begin{smallmatrix}u\cos v\\u\sin v\end{smallmatrix}\right)\varphi_3'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-\frac{\sin v}{u} & \frac{\cos v}{u}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}(f_4\circ\varphi_1)'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) &= f_4'\left(\begin{smallmatrix}u+v\\uv-1\end{smallmatrix}\right)\varphi_1'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\frac{uv-1}{1+(u+v)^2(uv-1)^2} & \frac{u+v}{1+(u+v)^2(uv-1)^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ v & u\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{2uv+v^2-1}{1+(u+v)^2(uv-1)^2} & \frac{2uv+u^2-1}{1+(u+v)^2(uv-1)^2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f_4\circ\varphi_2)'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) &= f_4'\begin{pmatrix}\sin(u+v)\\ \cos(u-v)\end{pmatrix}\varphi_2'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\frac{\cos(u-v)}{1+\sin^2(u+v)\cos^2(u-v)} & \frac{\sin(u+v)}{1+\sin^2(u+v)\cos^2(u-v)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(u+v) & \cos(u+v)\\ -\sin(u-v) & \sin(u-v)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{\cos 2u}{1+\sin^2(u+v)\cos^2(u-v)} & \frac{\cos 2v}{1+\sin^2(u+v)\cos^2(u-v)}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f_4\circ\varphi_3)'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) &= f_4'\left(\begin{smallmatrix}u\cos v\\u\sin v\end{smallmatrix}\right)\varphi_3'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\frac{u\sin v}{1+u^4\cos^2 v\sin^2 v} & \frac{u\cos v}{1+u^4\cos^2 v\sin^2 v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{u\sin 2v}{1+u^4\cos^2 v\sin^2 v} & \frac{u^2\cos 2v}{1+u^4\cos^2 v\sin^2 v}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$(f_i\circ\varphi_j)'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\frac{\partial f_i\circ\varphi_j}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) & \frac{\partial f_i\circ\varphi_j}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix}$ だから, 上の結果から $\dfrac{\partial f_i\circ\varphi_j}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial f_i\circ\varphi_j}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)$ は以下で与えられる.

$$\frac{\partial f_1\circ\varphi_1}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=\frac{2u}{u^2+1}$$
$$\frac{\partial f_1\circ\varphi_2}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=-\frac{2\cos 2u\sin 2v}{1+\sin 2u\cos 2v}$$
$$\frac{\partial f_1\circ\varphi_3}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=\frac{2}{u}$$
$$\frac{\partial f_2\circ\varphi_1}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=2u(v^2+1)-\frac{v+1}{\sqrt{(u^2+1)(v^2+1)}}$$
$$\frac{\partial f_2\circ\varphi_2}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=2\cos 2u\sin 2v-\frac{\cos(u+v)-\sin(u-v)}{\sqrt{1+\sin 2u\cos 2v}}$$
$$\frac{\partial f_2\circ\varphi_3}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=2u-\frac{\cos v+\sin v}{|u|}$$
$$\frac{\partial f_3\circ\varphi_1}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=\frac{1}{u^2+1}$$
$$\frac{\partial f_3\circ\varphi_2}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=-\frac{\cos 2v}{1+\sin 2u\cos 2v}$$
$$\frac{\partial f_3\circ\varphi_3}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=0$$
$$\frac{\partial f_4\circ\varphi_1}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=\frac{2uv+v^2-1}{1+(u+v)^2(uv-1)^2}$$
$$\frac{\partial f_4\circ\varphi_2}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=\frac{\cos 2u}{1+\sin^2(u+v)\cos^2(u-v)}$$
$$\frac{\partial f_4\circ\varphi_3}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=\frac{u\sin 2v}{1+u^4\cos^2 v\sin^2 v}$$

$$\frac{\partial f_1\circ\varphi_1}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=\frac{2v}{v^2+1}$$
$$\frac{\partial f_1\circ\varphi_2}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=\frac{2\sin 2u\cos 2v}{1+\sin 2u\cos 2v}$$
$$\frac{\partial f_1\circ\varphi_3}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=0$$
$$\frac{\partial f_2\circ\varphi_1}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=2v(u^2+1)-\frac{1}{\sqrt{(u^2+1)(v^2+1)}}$$
$$\frac{\partial f_2\circ\varphi_2}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=2\sin 2u\cos 2v-\frac{\cos(u+v)-\sin(u-v)}{\sqrt{1+\sin 2u\cos 2v}}$$
$$\frac{\partial f_2\circ\varphi_3}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=\frac{u(\sin v-\cos v)}{|u|}$$
$$\frac{\partial f_3\circ\varphi_1}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=\frac{1}{v^2+1}$$
$$\frac{\partial f_3\circ\varphi_2}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=-\frac{\cos 2u}{1+\sin 2u\cos 2v}$$
$$\frac{\partial f_3\circ\varphi_3}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=1$$
$$\frac{\partial f_4\circ\varphi_1}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=\frac{2uv+u^2-1}{1+(u+v)^2(uv-1)^2}$$
$$\frac{\partial f_4\circ\varphi_2}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=\frac{\cos 2v}{1+\sin^2(u+v)\cos^2(u-v)}$$
$$\frac{\partial f_4\circ\varphi_3}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=\frac{u^2\cos 2v}{1+u^4\cos^2 v\sin^2 v}$$

9. (1) $\varphi\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}g(x)k(y)\\g(x)+h(y)\end{pmatrix}$ で $\varphi:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を定義すれば $\varphi'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}g'(x)k(y) & g(x)k'(y)\\ g'(x) & h'(y)\end{pmatrix}$, $f=F\circ\varphi$ より
$f'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=F'\left(\varphi\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right)\varphi'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\frac{\partial F}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}g(x)k(y)\\g(x)+h(y)\end{smallmatrix}\right)\quad\frac{\partial F}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}g(x)k(y)\\g(x)+h(y)\end{smallmatrix}\right)\right)\begin{pmatrix}g'(x)k(y) & g(x)k'(y)\\ g'(x) & h'(y)\end{pmatrix}=$
$\left(g'(x)k(y)\frac{\partial F}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}g(x)k(y)\\g(x)+h(y)\end{smallmatrix}\right)+g'(x)\frac{\partial F}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}g(x)k(y)\\g(x)+h(y)\end{smallmatrix}\right)\quad g(x)k'(y)\frac{\partial F}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}g(x)k(y)\\g(x)+h(y)\end{smallmatrix}\right)+h'(y)\frac{\partial F}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}g(x)k(y)\\g(x)+h(y)\end{smallmatrix}\right)\right)$. 故に
$\dfrac{\partial f}{\partial x}=g'(x)k(y)\dfrac{\partial F}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}g(x)k(y)\\g(x)+h(y)\end{smallmatrix}\right)+g'(x)\dfrac{\partial F}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}g(x)k(y)\\g(x)+h(y)\end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=g(x)k'(y)\dfrac{\partial F}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}g(x)k(y)\\g(x)+h(y)\end{smallmatrix}\right)+h'(y)\dfrac{\partial F}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}g(x)k(y)\\g(x)+h(y)\end{smallmatrix}\right)$.

(2) $\psi\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x\\g(x)\\F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right)$ によって $\psi:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^3$ を定義すれば $f=G\circ\psi$, $\psi'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ g'(x) & 0\\ \frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) & \frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right)$ より
$f'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=G'\left(\psi\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right)\psi'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\frac{\partial G}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}x\\g(x)\\F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right)\quad\frac{\partial G}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}x\\g(x)\\F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right)\quad\frac{\partial G}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix}x\\g(x)\\F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right)\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ g'(x) & 0\\ \frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) & \frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right)=$
$\left(\frac{\partial G}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}x\\g(x)\\F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right)+g'(x)\frac{\partial G}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}x\\g(x)\\F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right)+\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial G}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix}x\\g(x)\\F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right)\quad\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial G}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix}x\\g(x)\\F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right)\right)$. 故に
$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial G}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}x\\g(x)\\F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right)+g'(x)\dfrac{\partial G}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}x\\g(x)\\F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right)+\dfrac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\dfrac{\partial G}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix}x\\g(x)\\F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\dfrac{\partial G}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix}x\\g(x)\\F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right)$.

(3) $\lambda\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}g(x+y)\\h(y+z)\end{pmatrix}$ で $\lambda:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^2$ を定義すれば $f=F\circ\lambda$, $\lambda'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}g'(x+y) & g'(x+y) & 0\\ 0 & h'(y+z) & h'(y+z)\end{pmatrix}$
より $f'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=F'\left(\lambda\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\right)\lambda'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\left(\frac{\partial F}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}g(x+y)\\h(y+z)\end{smallmatrix}\right)\quad\frac{\partial F}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}g(x+y)\\h(y+z)\end{smallmatrix}\right)\right)\begin{pmatrix}g'(x+y) & g'(x+y) & 0\\ 0 & h'(y+z) & h'(y+z)\end{pmatrix}=$
$\left(g'(x+y)\frac{\partial F}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}g(x+y)\\h(y+z)\end{smallmatrix}\right)\quad g'(x+y)\frac{\partial F}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}g(x+y)\\h(y+z)\end{smallmatrix}\right)+h'(y+z)\frac{\partial F}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}g(x+y)\\h(y+z)\end{smallmatrix}\right)\quad h'(y+z)\frac{\partial F}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}g(x+y)\\h(y+z)\end{smallmatrix}\right)\right)$. 故に
$\dfrac{\partial f}{\partial x}=g'(x+y)\dfrac{\partial F}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}g(x+y)\\h(y+z)\end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=g'(x+y)\dfrac{\partial F}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}g(x+y)\\h(y+z)\end{smallmatrix}\right)+h'(y+z)\dfrac{\partial F}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}g(x+y)\\h(y+z)\end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}=h'(y+z)\dfrac{\partial F}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}g(x+y)\\h(y+z)\end{smallmatrix}\right)$.

(4) $\mu\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x^y\\y^z\\z^x\end{smallmatrix}\right)$ で $\mu:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ を定義すれば $f=G\circ\mu$, $\mu'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}yx^{y-1} & x^y\log x & 0\\ 0 & zy^{z-1} & y^z\log y\\ z^x\log z & 0 & xz^{x-1}\end{smallmatrix}\right)$ より
$f'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=G'\left(\mu\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\right)\mu'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\left(\frac{\partial G}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}x^y\\y^z\\z^x\end{smallmatrix}\right)\quad\frac{\partial G}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}x^y\\y^z\\z^x\end{smallmatrix}\right)\quad\frac{\partial G}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix}x^y\\y^z\\z^x\end{smallmatrix}\right)\right)\left(\begin{smallmatrix}yx^{y-1} & x^y\log x & 0\\ 0 & zy^{z-1} & y^z\log y\\ z^x\log z & 0 & xz^{x-1}\end{smallmatrix}\right)=$
$\left(yx^{y-1}\frac{\partial G}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}x^y\\y^z\\z^x\end{smallmatrix}\right)+z^x\log z\frac{\partial G}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix}x^y\\y^z\\z^x\end{smallmatrix}\right)\quad x^y\log x\frac{\partial G}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}x^y\\y^z\\z^x\end{smallmatrix}\right)+zy^{z-1}\frac{\partial G}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}x^y\\y^z\\z^x\end{smallmatrix}\right)\quad y^z\log y\frac{\partial G}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}x^y\\y^z\\z^x\end{smallmatrix}\right)+xz^{x-1}\frac{\partial G}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix}x^y\\y^z\\z^x\end{smallmatrix}\right)\right)$.
故に $\dfrac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}\dfrac{\partial G}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}x^y\\y^z\\z^x\end{smallmatrix}\right)+z^x\log z\dfrac{\partial G}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix}x^y\\y^z\\z^x\end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^y\log x\dfrac{\partial G}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}x^y\\y^z\\z^x\end{smallmatrix}\right)+zy^{z-1}\dfrac{\partial G}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}x^y\\y^z\\z^x\end{smallmatrix}\right)$,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y^z \log y \frac{\partial G}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} x^y \\ y^z \\ z^x \end{smallmatrix}\right) + x z^{x-1} \frac{\partial G}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix} x^y \\ y^z \\ z^x \end{smallmatrix}\right).$$

微積分学 II 演習問題　第 20 回　高次偏導関数とテイラーの定理

1. 以下で定められる関数 f に対し, $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ と $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ においてテイラーの定理を用いた場合に f を近似する x, y の 2 次以下の多項式をそれぞれ求めよ.

(1) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \log(x^2+y^2)$　(2) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(3) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

2. 以下で定められる関数 f に対し, $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ においてテイラーの定理を用いた場合に f を近似する x, y の 3 次以下の多項式をそれぞれ求めよ.

(1) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = e^{-x}\log(1+2y)$　(2) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \log(1+3x+y^2)$

3. $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = e^{x-y}\sin x$ で与えられる関数 f に対し, $\dfrac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i \partial y^j}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ を求め, さらに $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ においてテイラーの定理を用いた場合に f を近似する x, y の 4 次以下の多項式を求めよ.

4. (発展問題) 写像 $\varphi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を $\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ で定める. 関数 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ は連続な 2 次以下の偏導関数をもつとする.

(1) $\dfrac{\partial f\circ\varphi}{\partial r}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial f\circ\varphi}{\partial \theta}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)$ を, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ および r, θ を用いて表せ.

(2) $\dfrac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial^2 r}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial r\partial \theta}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial^2 \theta}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)$ を f の 2 次以下の偏導関数および r, θ を用いて表せ.

(3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\varphi + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\varphi$ を $\dfrac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial^2 r}$, $\dfrac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial \theta^2}$, $\dfrac{\partial f\circ\varphi}{\partial r}$ と r, θ を用いて表せ.

5. (発展問題) 写像 $\psi : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を $\psi\begin{pmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$ で定める. 関数 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ は連続な 2 次以下の偏導関数をもつとする.

(1) $\dfrac{\partial f\circ\psi}{\partial r}\begin{pmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial f\circ\psi}{\partial \theta}\begin{pmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial f\circ\psi}{\partial \varphi}\begin{pmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{pmatrix}$ を, f の偏導関数および r, θ, φ を用いて表せ.

(2) $\dfrac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial^2 r}\begin{pmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial^2 \theta}\begin{pmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial^2 \varphi}\begin{pmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial r\partial \theta}\begin{pmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial r\partial \varphi}\begin{pmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial \theta\partial \varphi}\begin{pmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{pmatrix}$ を f の 2 次以下の偏導関数および r, θ, φ を用いて表せ.

(3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\circ\psi$ を $\dfrac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial^2 r}$, $\dfrac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial^2 \theta}$, $\dfrac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial^2 \varphi}$, $\dfrac{\partial f\circ\psi}{\partial r}$, $\dfrac{\partial f\circ\psi}{\partial \theta}$ と r, θ, φ を用いて表せ.

第 20 回の演習問題の解答

1. 一般に $\binom{p}{q}$ において f を近似する 2 次の多項式は

$$f\binom{p}{q} + \frac{\partial f}{\partial x}\binom{p}{q}(x-p) + \frac{\partial f}{\partial y}\binom{p}{q}(y-q) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{p}{q}(x-p)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{p}{q}(x-p)(y-q) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{p}{q}(y-q)^2$$

で与えられるため, (1), (2), (3) で与えられた f に対して, 上式の p, q にそれぞれ「$p=1,\, q=0$」,「$p=q=1$」を代入すればよい.

(1) 第 18 回の演習問題 4 の (4) の結果から $f\binom{1}{0} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}\binom{1}{0} = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{1}{0} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{0} = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{1}{0} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{1}{0} = 2$ より, $\binom{1}{0}$ において f を近似する 2 次の多項式は $2(x-1)-(x-1)^2+y^2 = -3+4x-x^2+y^2$ である.

$f\binom{1}{1} = \log 2$, $\frac{\partial f}{\partial x}\binom{1}{1} = \frac{\partial f}{\partial y}\binom{1}{1} = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{1} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{1}{1} = -1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{1}{1} = 0$ より, $\binom{1}{1}$ において f を近似する 2 次の多項式は $\log 2 + (x-1) + (y-1) - (x-1)(y-1) = \log 2 - 3 + 2x + 2y - xy$ である.

(2) 第 18 回の演習問題 4 の (6) の結果から $f\binom{1}{0} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}\binom{1}{0} = -1$, $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{1}{0} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{0} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{1}{0} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{1}{0} = -1$ より, $\binom{1}{0}$ において f を近似する 2 次の多項式は $1-(x-1)+(x-1)^2-\frac{1}{2}y^2 = 3-3x+x^2-\frac{1}{2}y^2$ である.

$f\binom{1}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\partial f}{\partial x}\binom{1}{1} = \frac{\partial f}{\partial y}\binom{1}{1} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{1}{1} = \frac{3}{4\sqrt{2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{1}{1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ より, $\binom{1}{1}$ において f を近似する 2 次の多項式は
$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(y-1) + \frac{1}{8\sqrt{2}}(x-1)^2 + \frac{3}{4\sqrt{2}}(x-1)(y-1) + \frac{1}{8\sqrt{2}}(y-1)^2 =$
$\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}}x - \frac{3}{2\sqrt{2}}y + \frac{1}{8\sqrt{2}}x^2 + \frac{3}{4\sqrt{2}}xy + \frac{1}{8\sqrt{2}}y^2$ である.

(3) 第 18 回の演習問題 4 の (17) の結果から $f\binom{1}{0} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}\binom{1}{0} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{1}{0} = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{0} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{1}{0} = -1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{1}{0} = 0$ より, $\binom{1}{0}$ において f を近似する 2 次の多項式は $y-(x-1)y = 2y-xy$ である.

$f\binom{1}{1} = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\partial f}{\partial x}\binom{1}{1} = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{1}{1} = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{1} = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{1}{1} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{1}{1} = -\frac{1}{2}$ より, $\binom{1}{1}$ において f を近似する 2 次の多項式は $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(y-1)^2 = \frac{\pi}{4} - x + y + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2$ である.

2. 一般に $\binom{0}{0}$ において f を近似する 3 次の多項式は次のように与えられる.

$$\begin{aligned} &f\binom{0}{0} + \frac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}x + \frac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0}x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{0}{0}xy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{0}y^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\binom{0}{0}x^3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\binom{0}{0}x^2 y + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\binom{0}{0}xy^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\binom{0}{0}y^3 \end{aligned}$$

(1) $f\binom{x}{y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x}\log(1+2y)$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -e^{-x}\log(1+2y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{2e^{-x}}{1+2y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2e^{-x}}{1+2y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-4e^{-x}}{(1+2y)^2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{4e^{-x}}{(1+2y)^2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{16e^{-x}}{(1+2y)^3}$ より $f\binom{0}{0} = \frac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\binom{0}{0} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\binom{0}{0} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{0}{0} = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{0} = -4$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\binom{0}{0} = 4$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\binom{0}{0} = 16$ となる. 従って求める多項式は $2y - 2xy - 2y^2 + x^2 y + 2xy^2 + \frac{8}{3}y^3$ である.

(2) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3}{1+3x+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{1+3x+y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-9}{(1+3x+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-6y}{(1+3x+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2+6x-2y^2}{(1+3x+y^2)^2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{54}{(1+3x+y^2)^3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{36y}{(1+3x+y^2)^3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{18y^2-18x-6}{(1+3x+y^2)^3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{-12y-36xy+4y^3}{(1+3x+y^2)^3}$ より $f\binom{0}{0} = \frac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{0}{0} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\binom{0}{0} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\binom{0}{0} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0} = 3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0} = -9$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{0} = 2$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\binom{0}{0} = 54$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\binom{0}{0} = -6$ となる. 従って求める多項式は $3x - \frac{9}{2}x^2 y + y^2 + 9x^3 - 3xy^2$ である.

3. $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=(e^x\sin x)e^{-y}$ だから, $\dfrac{\partial^j f}{\partial y^j}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=(e^x\sin x)\dfrac{\partial^j}{\partial y^j}e^{-y}=(-1)^j(e^x\sin x)e^{-y}$ である. さらに, 第 6 回の演習問題 1 の (12) から $\dfrac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i\partial y^j}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=(-1)^je^{-y}\dfrac{\partial^i}{\partial x^i}(e^x\sin x)=(-1)^j\left(\sqrt{2}\right)^ie^{x-y}\sin\left(x+\dfrac{\pi i}{4}\right)$ が得られる.

一般に $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ において f を近似する 4 次の多項式は次のように与えられる.

$$\begin{aligned}
&f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)+\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)x+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)y+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)x^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)xy+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)y^2\\
&\quad+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)x^3+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)x^2y+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)xy^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)y^3\\
&\quad+\frac{1}{24}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)x^4+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)x^3y+\frac{1}{4}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)x^2y^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^3}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)xy^3+\frac{1}{24}\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)y^4
\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i\partial y^j}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=(-1)^j\left(\sqrt{2}\right)^i\sin\dfrac{\pi i}{4}$ だから $j=0,1,2,\dots$ に対して $\dfrac{\partial^j f}{\partial y^j}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial^{j+4} f}{\partial x^4\partial y^j}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=0$, $\dfrac{\partial^{j+1} f}{\partial x\partial y^j}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=(-1)^j$, $\dfrac{\partial^{j+2} f}{\partial x^2\partial y^j}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial^{j+3} f}{\partial x^3\partial y^j}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=2(-1)^j$ が成り立つため, 上式から, 求める 4 次の多項式は次のようになる.

$$x+x^2-xy+\frac{1}{3}x^3-x^2y+\frac{1}{2}xy^2-\frac{1}{3}x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{1}{6}xy^3$$

4. (1) $\left(\frac{\partial f\circ\varphi}{\partial r}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\quad\frac{\partial f\circ\varphi}{\partial\theta}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\right)=(f\circ\varphi)'\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=f'\left(\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\right)\varphi'\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)\quad\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)\right)\begin{pmatrix}\cos\theta&-r\sin\theta\\\sin\theta&r\cos\theta\end{pmatrix}=$ $\left(\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)+\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)\quad-r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)+r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)\right)$. 従って

$$\frac{\partial f\circ\varphi}{\partial r}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right),\quad\frac{\partial f\circ\varphi}{\partial\theta}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)$$

(2) 上の結果は $\dfrac{\partial f\circ\varphi}{\partial r}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)+\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial f\circ\varphi}{\partial\theta}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=-r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)+r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)$ とも表せるため, これらの両辺を r, θ で偏微分すれば,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial r^2}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)&=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi\right)\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)+\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi\right)\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\\
\frac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial r\partial\theta}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)&=-\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi\right)\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)+\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi\right)\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\\
\frac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial\theta^2}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)&=-r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi\right)\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi\right)\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)
\end{aligned}$$

を得る. 一方, (1) の結果から f を $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ で置き換えれば

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi\right)\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)&=\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)+\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right),\\
\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi\right)\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)&=-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)+r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right),\\
\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi\right)\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)&=\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)+\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right),\\
\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi\right)\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)&=-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)+r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)
\end{aligned}$$

が得られる．これらを上の 3 つの式に代入して

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial r^2}\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) &= \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right) + \sin 2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right) + \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right) \\
\frac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial r\partial\theta}\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) &= -r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right) + r\cos 2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right) + r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right) \\
&\quad - \sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right) + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right) \\
\frac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial \theta^2}\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) &= r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right) - r^2\sin 2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right) + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right) \\
&\quad - r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right) - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right)
\end{aligned}$$

(3) (1), (2) の結果から,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f\circ\varphi}{\partial r} &= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi && \cdots(i) \\
\frac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial r^2} &= \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\varphi + \sin 2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\varphi + \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\varphi && \cdots(ii) \\
\frac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial \theta^2} &= r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\varphi - r^2\sin 2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\varphi + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\varphi - r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi && \cdots(iii)
\end{aligned}$$

であるが, (ii) に (iii) の両辺を $\dfrac{1}{r^2}$ 倍したものを加えて, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\varphi$ を含む項を消去すれば

$$\frac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial^2 r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\varphi - \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi$$

が得られる．この等式に (i) の両辺を $\dfrac{1}{r}$ 倍したものを加えて, 左辺と右辺を入れ換えれば, 次の結果が得られる．

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\varphi = \frac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial^2 r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f\circ\varphi}{\partial r}$$

5. (1) $\left(\frac{\partial f\circ\psi}{\partial r}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \frac{\partial f\circ\psi}{\partial \theta}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \frac{\partial f\circ\psi}{\partial \varphi}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}\right) = (f\circ\psi)'\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = f'\left(\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}\right)\psi'\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} =$
$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial z}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$ だから, 行列の積を計算して, 成分を比較すれば次の結果が得られる．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f\circ\psi}{\partial r}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} &= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial z}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \\
\frac{\partial f\circ\psi}{\partial \theta}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} &= r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial z}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \\
\frac{\partial f\circ\psi}{\partial \varphi}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} &= -r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} + r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(2) 上の結果は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f\circ\psi}{\partial r}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} &= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \\
\frac{\partial f\circ\psi}{\partial \theta}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} &= r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \\
\frac{\partial f\circ\psi}{\partial \varphi}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} &= -r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} + r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

とも表せるため, これらの両辺を r, θ, φ で偏微分すれば,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial r^2}\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} &= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\right)\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\right)\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi\right)\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial \theta^2}\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} &= -r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} - r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} - r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
&\quad + r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\right)\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\right)\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi\right)\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial \varphi^2}\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} &= -r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} - r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} - r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\right)\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
&\quad + r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\right)\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial r\partial\theta}\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} &= \cos\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} + \cos\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} - \sin\theta\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
&\quad + r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\right)\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\right)\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi\right)\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial r\partial\varphi}\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} &= -\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} + \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} - r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\right)\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
&\quad + r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\right)\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial \theta\partial\varphi}\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} &= -r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} + r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} - r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\right)\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
&\quad + r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\right)\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

を得る. 一方, (1) の結果から f を $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ で置き換えれば

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\right)\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} &= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} + \cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\right)\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} &= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} + \cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi\right)\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} &= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} + \cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\right)\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} &= r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} - r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\right)\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} &= r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} - r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi\right)\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} &= r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} - r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\right)\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} &= -r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} + r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\right)\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} &= -r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} + r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

が得られる. これらを上の 6 つの式に代入して

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial r^2}\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} &= \sin\theta\cos\varphi\left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} + \cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\right)\\
&\quad + \sin\theta\sin\varphi\left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} + \cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\cos\theta\left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\right)\\
&=\sin^2\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+\sin^2\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
&+\sin^2\theta\sin 2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+\sin 2\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+\sin 2\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial\theta^2}\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}&=-r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}-r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}-r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
&+r\cos\theta\cos\varphi\left(r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\right)\\
&+r\cos\theta\sin\varphi\left(r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\right)\\
&-r\sin\theta\left(r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\right)\\
&=-r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}-r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}-r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
&+r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
&+r^2\cos^2\theta\sin 2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}-r^2\sin 2\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}-r^2\sin 2\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial\varphi^2}\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}&=-r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}-r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
&-r\sin\theta\sin\varphi\left(-r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\right)\\
&+r\sin\theta\cos\varphi\left(-r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\right)\\
&=-r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}-r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
&+r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}-r^2\sin^2\theta\sin 2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial r\partial\theta}\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}&=\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}-\sin\theta\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
&+r\cos\theta\cos\varphi\left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\right)\\
&+r\cos\theta\sin\varphi\left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\right)\\
&-r\sin\theta\left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\right)\\
&=\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}-\sin\theta\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
&+r\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+r\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}-r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
&+\frac{r}{2}\sin 2\theta\sin 2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+r\cos 2\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+r\cos 2\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial r\partial\varphi}\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}&=-\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\\
&-r\sin\theta\sin\varphi\left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}+\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + r\sin\theta\cos\varphi\left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} + \cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}\right) \\
&= -\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} + \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \\
&\quad - r\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} + r\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \\
&\quad + r\sin^2\theta\cos 2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} - r\cos\theta\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} + r\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial\theta\partial\varphi}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} &= -r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} + r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \\
&\quad - r\sin\theta\sin\varphi\left(r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} - r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}\right) \\
&\quad + r\sin\theta\cos\varphi\left(r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} - r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}\right) \\
&= -r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} + r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \\
&\quad - r^2\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} + r^2\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \\
&\quad + r^2\cos\theta\sin\theta\cos 2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} + r^2\sin^2\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} - r^2\sin^2\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\circ\psi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

以上から, 求める結果は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial r^2}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} &= \sin^2\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} + \sin^2\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \\
&\quad + \sin^2\theta\sin 2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} + \sin 2\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} + \sin 2\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \\
\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial\theta^2}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} &= -r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} - r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} - r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial z}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \\
&\quad + r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} + r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \\
&\quad + r^2\cos^2\theta\sin 2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} - r^2\sin 2\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \\
&\quad - r^2\sin 2\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \\
\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial\varphi^2}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} &= -r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} - r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \\
&\quad + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} - r^2\sin^2\theta\sin 2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \\
\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial r\partial\theta}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} &= \cos\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} + \cos\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} - \sin\theta\frac{\partial f}{\partial z}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \\
&\quad + r\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} + r\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \\
&\quad - r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} + \frac{r}{2}\sin 2\theta\sin 2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \\
&\quad + r\cos 2\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} + r\cos 2\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial r\partial\varphi}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} &= -r\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} + r\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \\ &\quad + r\sin^2\theta\cos 2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} - r\cos\theta\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \\ &\quad + r\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} - \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} + \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial\theta\partial\varphi}\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} &= -r^2\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} + r^2\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \\ &\quad + r^2\cos\theta\sin\theta\cos 2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} + r^2\sin^2\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \\ &\quad - r^2\sin^2\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} - r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} + r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(3) (1), (2) の結果から,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f\circ\psi}{\partial r} &= \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi && \cdots(i) \\ \frac{\partial f\circ\psi}{\partial\theta} &= r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi && \cdots(ii) \\ \frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial r^2} &= \sin^2\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi + \sin^2\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi + \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\circ\psi \\ &\quad + \sin^2\theta\sin 2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi + \sin 2\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\circ\psi + \sin 2\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\circ\psi && \cdots(iii)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial\theta^2} &= r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi + r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\circ\psi \\ &\quad + r^2\cos^2\theta\sin 2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi - r^2\sin 2\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\circ\psi - r^2\sin 2\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\circ\psi \\ &\quad - r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi - r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi - r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi && \cdots(iv) \\ \frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial\varphi^2} &= r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi - r^2\sin^2\theta\sin 2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi \\ &\quad - r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi - r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi && \cdots(v)\end{aligned}$$

であるが, (iii) に (iv) の両辺を $\frac{1}{r^2}$ 倍したものを加えて, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\circ\varphi$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\circ\varphi$ を含む項を消去すれば

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial\theta^2} &= \cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi + \sin^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\circ\psi + \sin 2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi \\ &\quad - \frac{1}{r}\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi - \frac{1}{r}\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi - \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi\end{aligned}$$

が得られる. この等式に (v) の両辺を $\frac{1}{r^2\sin\theta}$ 倍したものを加えて, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\varphi$ を含む項を消去すれば

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial\varphi^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\circ\psi - \frac{(\sin^2\theta+1)\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi \\ &\quad - \frac{(\sin^2\theta+1)\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi && \cdots(iv)\end{aligned}$$

が得られる. そこで

$$\frac{(\sin^2\theta+1)\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi + \frac{(\sin^2\theta+1)\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi = X\frac{\partial f\circ\psi}{\partial r} + Y\frac{\partial f\circ\psi}{\partial\theta}$$

が成り立つように X と Y を定める. (i), (ii) から上式の右辺は

$$\cos\varphi((\sin\theta)X+r(\cos\theta)Y)\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi+\sin\varphi((\sin\theta)X+r(\cos\theta)Y)\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi+((\cos\theta)X-r(\sin\theta)Y)\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi$$

に等しいため, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\circ\psi$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\circ\psi$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}\circ\psi$ の係数を比較して, 連立 1 次方程式 $\begin{cases}(\sin\theta)X+r(\cos\theta)Y=\frac{\sin^2\theta+1}{r\sin\theta}\\(\cos\theta)X-r(\sin\theta)Y=\frac{\cos\theta}{r}\end{cases}$ を得る.

この解は $\begin{cases}X=\frac{2}{r}\\Y=\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\end{cases}$ で与えられるため, (vi) より

$$\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial\varphi^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\circ\psi-\frac{2}{r}\frac{\partial f\circ\psi}{\partial r}-\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial f\circ\psi}{\partial\theta}$$

が得られる. この右辺の最後の 2 つの項を左辺に移項して, 左辺と右辺を入れ換えれば, 次の結果が得られる.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\circ\psi=\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial^2 r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial^2\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial^2\varphi}+\frac{2}{r}\frac{\partial f\circ\psi}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial f\circ\psi}{\partial\theta}$$

微積分学 II 演習問題　第 21 回　2 変数関数の極大・極小

1. 関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ が以下で与えられるとき，f の極値を求めよ．ただし (11) の $a,\,b$ は同時に 0 ではなく, (9) の n は 3 以上の整数とする．また, (14) では $a\neq 0, b$ とする．

(1) $f\binom{x}{y}=x^4+y^4-4xy$　(2) $f\binom{x}{y}=x^2-2x^3+y^2-2y^4$　(3) $f\binom{x}{y}=x^4-2x^2y^2+y^3-\dfrac{13}{2}y^2+14y$

(4) $f\binom{x}{y}=x^4-4xy+2y^2$　(5) $f\binom{x}{y}=x^4+2x^2-8xy+4y^2$　(6) $f\binom{x}{y}=x^4+y^4-6x^2-8xy-6y^2$

(7) $f\binom{x}{y}=x^3y+xy^3-xy$　(8) $f\binom{x}{y}=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)$　(9) $f\binom{x}{y}=nx^{n-2}e^y-(n-2)x^n-e^{ny}$

(10) $f\binom{x}{y}=(x+y)e^{-xy}$　(11) $f\binom{x}{y}=(ax+by)e^{-x^2-y^2}$　(12) $f\binom{x}{y}=x^2y^2+4x^2y-4xy^2-16xy$

(13) $f\binom{x}{y}=(x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$　(14) $f\binom{x}{y}=e^{-x^2-y^2}(ax^2+by^2)$　(15) $f\binom{x}{y}=\cos(x+y)+\cos x+\cos y$

(16) $f\binom{x}{y}=xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$　(17) $f\binom{x}{y}=\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin(x+y)$　(18) $f\binom{x}{y}=\sin y\cos(x+y)(\cos x-\sin x)$

(19) $f\binom{x}{y}=\sin^2 x+\sin^2 y-2\sin x\sin y\sin(x+y)$

2. $X\subset\boldsymbol{R}^2$ と関数 $f:X\to\boldsymbol{R}$ が以下で与えられるとき，f の極値を求めよ．

(1) $X=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,xy\neq 0\right\}$,　$f\binom{x}{y}=x^2+y^2+xy-\dfrac{3}{x}-\dfrac{3}{y}$

(2) $X=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,xy\neq 0\right\}$,　$f\binom{x}{y}=xy^2+x^2-3\log|x|-2\log|y|$

(3) $X=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x+2y\neq 0\right\}$,　$f\binom{x}{y}=xy^2+\dfrac{9}{x+2y}$

(4) $X=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,|xy|\leqq 1\right\}$,　$f\binom{x}{y}=\sin^{-1}xy$

(5) $X=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2\leqq 1\right\}$,　$f\binom{x}{y}=\sin^{-1}\sqrt{1-x^2-y^2}$

3. (発展問題) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0)$ に内接する三角形の面積の最大値を求めよ．

4. (発展問題) 関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ が以下で与えられるとき，f の極値を求めよ．

(1) $f\binom{x}{y}=y^2+2x^2y-x^4$　(2) $f\binom{x}{y}=x^4-y^4+x^3y-xy^3$　(3) $f\binom{x}{y}=x^2-2xy^2+y^4-y^5$

(4) $f\binom{x}{y}=x^2y^2+2x^2y$　(5) $f\binom{x}{y}=\left(x^2+y^2+r^2\right)\log\left(x^2+y^2+r^2\right)$　(6) $f\binom{x}{y}=\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2$

(7) $f\binom{x}{y}=x^5-x^2y+y^2$　(8) $f\binom{x}{y}=x^3-y^3+3x^2-6xy+3y^2$　(9) $f\binom{x}{y}=2x^3-3ax^2y-3bx^2$

(10) $f\binom{x}{y}=x^2e^{-x^2-y^2}$　(11) $f\binom{x}{y}=2x^2+y^2\sin 2x$　(12) $f\binom{x}{y}=xy^2-ax^2$

5. (発展問題) 関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ が以下で与えられるとき，f を定義する式に含まれる定数の値によって場合分けして f の極値を求めよ．ただし, (14) では $bc\geqq 0$, (15) では $b\neq 0$, (16) では $a\neq 0,\,b\neq 0,\pm c$, (17) では $a\neq 0$ とする．

(1) $f\binom{x}{y}=x^2y+axy^2+3bxy$　(2) $f\binom{x}{y}=x^2y+axy^2+3bx^2$　(3) $f\binom{x}{y}=ax^3+3xy^2-6bxy-3cx$

(4) $f\binom{x}{y}=x^3+a^3y^3+3bxy$　(5) $f\binom{x}{y}=x^3-3xy-3ax+3by$　(6) $f\binom{x}{y}=x^4+y^4-2a(x+b^3y)^2$

(7) $f\binom{x}{y}=y^2+2x^2y+ax^4$　(8) $f\binom{x}{y}=(ax^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$　(9) $f\binom{x}{y}=x^3-6bxy+3y^2+3\left(b^4-a\right)x$

(10) $f\binom{x}{y}=3ax^3+bxy^2+xy$　(11) $f\binom{x}{y}=8ax^3+24a^2xy+24ay^2+3(b^2-a^4)y$

(12) $f\binom{x}{y}=2x^3-3ax^2y+2b^2y^3-3cx^2-3b(\alpha+\beta)y^2+6\alpha\beta y$

(13) $f\binom{x}{y}=12(2a-1)x^2y+12(2a-1)xy^2+2(3a-1)y^3-12(2a-1)xy-3(3a-1)y^2$

(14) $f\binom{x}{y}=2x^2y+2xy^2+2(3a-2)y^3-2x^2-6xy-(27a-20)y^2+4x+4(9a-8)y$

(15) $f\binom{x}{y}=12x^2y+12axy^2+(3a^2-b^2+c^2)y^3-12(\alpha+\beta)xy-3(2a(\alpha+\beta)-b(\alpha-\beta))y^2+12\alpha\beta y$

(16) $f\binom{x}{y}=2x^3+3(a^2b-\alpha-\beta)x^2+6abxy+3by^2+6(abc+\alpha\beta)x+6bcy$

(17) $f\binom{x}{y}=2x^3-6a^2(b^2-c^2)^2xy^2+2a(d^2-2a^2(b^2-c^2)^2(b^2+c^2))y^3-6ad(b^2-c^2)y^2+6a(b^2-c^2)^2y$

(18) $f\binom{x}{y}=2axy^2-8a^2by^3-x^2-8acxy+2a^2dy^2-2a(3\alpha^2-6(b+c)\alpha-9(b+c)^2+8c^2+d+r^2)x$
$\quad -8a^2(\alpha^3-3(2b+c)\alpha^2+(9b^2+12bc+3c^2-r^2)\alpha-9b^2c-18bc^2-c^3+cd+cr^2)y$

6. (発展問題) $a,\,b,\,c,\,n$ は実数の定数で, $(a,b)\neq(0,0)$, $n\neq 0$ とする．関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y}=\dfrac{ax+by+c}{(x^2+y^2+1)^n}$ で定めるとき, f の極値と最大値・最小値を求めよ．

7. (発展問題) $a,\,b,\,c,\,d,\,p,\,q,\,r$ は実数の定数で, $(a,b,c,d)\neq(0,0,0,0)$ かつ $q^2-pr=0$ とする．関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y}=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3+px^2+2qxy+ry^2$ で定めるとき, f が原点で極値をとるための条件を求めよ．

第 21 回の演習問題の解答

1. (1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 & \cdots (i) \\ 4y^3 - 4x = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(i) から $y = x^3$ だから (ii) に代入して $x^9 - x = 0$. よって $x = 0$ または $x = \pm 1$. $x = 0, 1, -1$ の場合, (ii) よりそれぞれ $y = 0, 1, -1$ である. 従って, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性がある.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^2 = 144x^2y^2 - 16$.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の場合, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^2 = -16 < 0$ より $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で f は極値をとらない.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の場合, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)^2 = 128 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 12 > 0$ より $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で f は極小値 $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2$ をとる.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の場合, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)^2 = 128 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 12 > 0$ より $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ で f は極小値 $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2$ をとる.

(2) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 6x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 8y^3$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} 2x(1 - 3x) = 0 & \cdots (i) \\ 2y(1 - 4y^2) = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(i) から $x = 0, \frac{1}{3}$ であり, (ii) から $y = 0, \pm\frac{1}{2}$ だから, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性がある.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - 12x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 - 24y^2$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^2 = 4(6x - 1)(12y^2 - 1)$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^2 = 4 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 > 0$ より $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で f は極小値 0 をとる.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} 0 \\ \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} 0 \\ \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} 0 \\ \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)^2 = -8 < 0$ より $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ で f は極値をとらない.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}\right)^2 = -4 < 0$ より $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ で f は極値をとらない.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)^2 = 8 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -2 < 0$ より $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ で f は極大値 $\frac{35}{216}$ をとる.

(3) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4xy^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -4x^2y + 3y^2 - 13y + 14$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} x(x - y)(x + y) = 0 & \cdots (i) \\ -4x^2y + 3y^2 - 13y + 14 = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(i) から $x = 0$ または $x = y$ または $x = -y$. $x = 0$ の場合, (ii) より $y = 2$ または $y = \frac{7}{3}$. $x = y$ の場合, (ii) より $y = 1$. $x = -y$ の場合, (ii) より $y = 1$. 従って $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性がある.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4y^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -8xy$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4x^2 + 6y - 13$ だから

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^2 = 4((3x^2 - y^2)(-4x^2 + 6y - 13) - 16x^2y^2)$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)^2 = 16 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -16 < 0$ より $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ で f は極大値 10 をとる.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}\right)^2 = -\frac{252}{9} < 0$ より $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$ で f は極値をとらない.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)^2 = -152 < 0$ より $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で f は極値をとらない.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)^2 = -152 < 0$ より $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で f は極値をとらない.

(4) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 4y$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} x^3 - y = 0 & \cdots (i) \\ y = x & \cdots (ii) \end{cases}$$

(ii) を (i) に代入すれば $x^3-x=0$ だから $x=0,\pm1$. 従って, $\binom{0}{0}$, $\binom{1}{1}$, $\binom{-1}{-1}$ で f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2=48x^2-16$ である.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{0}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{0}{0}\right)^2=-16<0$ より f は $\binom{0}{0}$ で極値をとらない.
$\binom{x}{y}=\binom{1}{1},\binom{-1}{-1}$ ならば $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2=32>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}=12>0$ より f は $\binom{1}{1}$, $\binom{-1}{-1}$ で極小値 -1 をとる.

(5) $\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3+4x-8y$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-8x+8y$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases} x^3+x-2y=0 & \cdots(i) \\ x-y=0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(ii) から $x=y$. (i) より $x^3-x=0$ だから $x=0$ または $x=\pm1$. 従って $\binom{0}{0}$, $\binom{1}{1}$, $\binom{-1}{-1}$ で f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2+4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-8$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=8$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2=64(2x^2-1)$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{0}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{0}{0}\right)^2=-64<0$ より $\binom{0}{0}$ で f は極値をとらない.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{1}{1}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{1}{1}\right)^2=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{-1}{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{-1}{-1}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{-1}{-1}\right)^2=64>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{1}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{-1}{-1}=16>0$ より $\binom{1}{1}$, $\binom{-1}{-1}$ で f は極小値 -1 をとる.

(6) $\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3-12x-8y$, $\frac{\partial f}{\partial y}=4y^3-8x-12y$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases} x^3-3x-2y=0 & \cdots(i) \\ y^3-2x-3y=0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(i) から $y=\frac{x^3-3x}{2}$ であり, (ii) に代入すれば, $x(x^2-1)(x^2-5)(x^4-3x^2-4)=0$ が得られるため, $x=0,\pm1,\pm\sqrt{5}$ である. 従って, $\binom{0}{0}$, $\pm\binom{1}{-1}$, $\pm\binom{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ で f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2-12$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-8$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y^2-12$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2=16(9(x^2-1)(y^2-1)-4)$.
$\binom{x}{y}=\binom{0}{0},\pm\binom{1}{-1}$ の場合は, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2=-64<0$ となるため, これらの点では, f は極値をとらない.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{0}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{0}{0}\right)^2=80>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0}=-12<0$ より $\binom{0}{0}$ で f は極大値 0 をとる.
$\binom{x}{y}=\pm\binom{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ の場合, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2=2240>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}=48>0$ より $\pm\binom{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ で f は極小値 -50 をとる.

(7) $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y+y^3-y$, $\frac{\partial f}{\partial y}=x^3+3xy^2-x$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases} y(3x^2+y^2-1)=0 & \cdots(i) \\ x(x^2+3y^2-1)=0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(i) から $y=0$ または $y^2=1-3x^2$ である. $y=0$ の場合, (ii) より $x(x^2-1)=0$ だから $x=0$ または $x=\pm1$. $y^2=1-3x^2$ の場合, (ii) より $x(2-8x^2)=0$ だから $x=0$ または $x=\pm\frac{1}{2}$. 従って, $\binom{0}{0}$, $\binom{\pm1}{0}$, $\binom{0}{\pm1}$, $\begin{pmatrix}\pm\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\pm\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性がある. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6xy$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=3x^2+3y^2-1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6xy$ だから
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2=36x^2y^2-(3x^2+3y^2-1)^2$.
従って, $\binom{x}{y}=\binom{0}{0},\binom{\pm1}{0},\binom{0}{\pm1}$ の場合は $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2<0$ となるため, これらの点では f は極値をとらない.
$\binom{x}{y}=\begin{pmatrix}\pm\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\pm\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ の場合, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2=2>0$ であり, $\binom{x}{y}=\pm\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ の場合は $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}=\frac{3}{2}>0$ より $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ で f は極小値 $f\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=-\frac{1}{8}$ をとる. $\binom{x}{y}=\pm\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ の場合は $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}=-\frac{3}{2}<0$ より $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ で f は極大値 $f\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{8}$ をとる.

(8) $\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3+4xy^2-4x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=4x^2y+4y^3+4y$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases}4x(x^2+y^2-1)=0 & \cdots(i)\\ 4y(x^2+y^2+1)=0 & \cdots(ii)\end{cases}$$

(ii) から $y=0$ であり, (i) より $4x(x^2-1)=0$ だから $x=0$ または $x=\pm1$. 従って, $\binom{0}{0}$, $\binom{\pm1}{0}$ で f は極値をとる可能性がある. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2+4y^2-4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=8xy$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4x^2+12y^2+4$ だから
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2=16(3x^2+y^2-1)(x^2+3y^2+1)-64x^2y^2$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{0}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{0}{0}\right)^2=-16<0$ より $\binom{0}{0}$ で f は極値をとらない.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{\pm1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{\pm1}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{0}{\pm1}\right)^2=64>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{\pm1}=8>0$ より $\binom{\pm1}{0}$ で f は極小値 -1 をとる.

(9) $\frac{\partial f}{\partial x}=n(n-2)x^{n-3}(e^y-x^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=ne^y(x^{n-2}-e^{(n-1)y})$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases}x^{n-3}(e^y-x^2)=0 & \cdots(i)\\ x^{n-2}-e^{(n-1)y}=0 & \cdots(ii)\end{cases}$$

(ii) より $x^{n-2}=e^{(n-1)y}\neq0$ だから, (i) より $y=\log x^2$ が得られる. 従って (ii) から $x^{n-2}=x^{2(n-1)}$ であり, $x\neq0$ だから, n が偶数ならば $x=\pm1$, n が奇数ならば $x=1$ である. このとき $y=0$ だから, n が偶数ならば $\binom{\pm1}{0}$ で f は極値をとり, n が奇数ならば $\binom{1}{0}$ f は極値をとる可能性がある. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=n(n-2)x^{n-4}((n-3)e^y-(n-1)x^2)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=n(n-2)x^{n-3}e^y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=ne^y(x^{n-2}-ne^{(n-1)y})$ だから n が偶数の場合は $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{\pm1}{0}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{\pm1}{0}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{\pm1}{0}\right)^2=n^3(n-2)>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{\pm1}{0}=-n(n-2)<0$ だから, f は $\binom{\pm1}{0}$ において極大値 1 をとる. n が奇数の場合は $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{0}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{1}{0}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{1}{0}\right)^2=n^3(n-2)>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{0}=-n(n-2)<0$ だから, f は $\binom{1}{0}$ において極大値 1 をとる.

(10) $\frac{\partial f}{\partial x}=\left(1-xy-y^2\right)e^{-xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\left(1-xy-x^2\right)e^{-xy}$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases}1-xy-y^2=0 & \cdots(i)\\ 1-xy-x^2=0 & \cdots(ii)\end{cases}$$

(i) から (ii) を辺々引けば $x^2-y^2=0$ だから $y=\pm x$. $y=x$ ならば (i) から $x=\pm\frac{1}{\sqrt2}$. $y=-x$ ならば (i) を満たす x は存在しない. 従って, $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y\left(xy+y^2-2\right)e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(x+y)(xy-2)e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x\left(xy+x^2-2\right)e^{-xy}$ だから $\binom{x}{y}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$ ならば
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2=-\frac{4}{\sqrt e}<0$ となるため, $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$ で f は極値をとらない.

(11) $\frac{\partial f}{\partial x}=(a-2ax^2-2bxy)e^{-x^2-y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=(b-2axy-2by^2)e^{-x^2-y^2}$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases}2ax^2+2bxy=a & \cdots(i)\\ 2axy+2by^2=b & \cdots(ii)\end{cases}$$

$(i)\times b-(ii)\times a$ から $2abx^2-2(a^2-b^2)xy-2aby^2=0$ であり, この左辺は $2(ax+by)(bx-ay)$ と因数分解されるため, $by=-ax$ または $ay=bx$ である. $by=-ax$ の場合, $a\neq0$ ならば (i) を満たす x は存在せず, $b\neq0$ ならば (ii) を満たす y は存在しないため, $ay=bx$ である. $ay=bx$ の場合, (i) より $2a(x^2+y^2)=a$, (ii) より $2b(x^2+y^2)=b$ だから $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ である. $a=r\cos\alpha$, $b=r\sin\alpha$ $(r>0,\ 0\leqq\alpha<2\pi)$ とおけば, 直線 $bx-ay=0$ と円 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ の交点は $\pm\begin{pmatrix}\frac{\cos\alpha}{\sqrt2}\\ \frac{\sin\alpha}{\sqrt2}\end{pmatrix}$ だから, f はこの 2 点で極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2(2ax^3+2bx^2y-3ax-by)e^{-x^2-y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2(2ax^2y+2bxy^2-ay-bx)e^{-x^2-y^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2(2axy^2+2by^3-ax-3by)e^{-x^2-y^2}$ だから

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2=-4e^{-2(x^2+y^2)}(2(ax+by)^2(x^2+y^2)-(3a^2-b^2)x^2-8abxy+(a^2-3b^2)y^2).$$

従って, $\binom{x}{y} = \pm\begin{pmatrix} \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ の場合は, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2 = \frac{4r^2}{e} > 0$ である.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{2}r(\cos^2\alpha+1)}{\sqrt{e}} < 0$ より $\begin{pmatrix} \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ で f は極大値 $\frac{r}{\sqrt{2e}}$ をとり, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} -\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}r(\cos^2\alpha+1)}{\sqrt{e}} > 0$ より $\begin{pmatrix} -\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ で f は極小値 $-\frac{r}{\sqrt{2e}}$ をとる.

(12) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 + 8xy - 4y^2 - 16y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + 4x^2 - 8xy - 16x$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} y(xy + 4x - 2y - 8) = 0 & \cdots(i) \\ x(xy + 2x - 4y - 8) = 0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(i) から $y = 0$ または $xy + 4x - 2y - 8 = 0$. $y = 0$ の場合 (ii) より $x = 0$ または $x = 4$. $xy + 4x - 2y - 8 = 0$ の場合 (ii) より $x = 0$ または $xy + 2x - 4y - 8 = 0$. 後者の場合, $xy + 4x - 2y - 8 = 0$ と辺々引けば $y = -x$ が得られるため, これを $xy + 4x - 2y - 8 = 0$ に代入して $x = 2$ または $x = 4$. 従って, $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}, \binom{4}{0}, \binom{0}{-4}, \binom{2}{-2}, \binom{4}{-4}$ で f は極値をとる可能性がある. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2 + 8y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 4xy + 8x - 8y - 16$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 8x$ だから
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2 = 4(xy(x-4)(y+4) - 4(x-2)^2(y+2)^2)$.
$\binom{x}{y} = \binom{0}{0}, \binom{4}{0}, \binom{0}{-4}$ の場合, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2 = -256 < 0$ より $\binom{0}{0}$, $\binom{4}{0}$, $\binom{0}{-4}$ で f は極値をとらない.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{2}{-2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{2}{-2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{2}{-2}\right)^2 = 64 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{2}{-2} = -8 < 0$ より $\binom{2}{-2}$ で f は極大値 16 をとる.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{4}{-4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{4}{-4} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{4}{-4}\right)^2 = -256 < 0$ より $\binom{4}{-4}$ で f は極値をとらない.

(13) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x + x^3 + xy^2)e^{x^2-y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y - x^2y - y^3)e^{x^2-y^2}$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} x(1 + x^2 + y^2) = 0 & \cdots(i) \\ y(1 - x^2 - y^2) = 0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(i) から $x = 0$ だから (ii) より $y = 0, \pm 1$. 従って, $\binom{0}{0}$, $\binom{0}{\pm 1}$ で f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(1 + 5x^2 + y^2 + 2x^4 + 2x^2y^2)e^{x^2-y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -4(x^3y + xy^3)e^{x^2-y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(1 - x^2 - 5y^2 + 2x^2y^2 + 2y^4)e^{x^2-y^2}$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{y} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{0}{y}\right)^2 = 4(1 + y^2)(1 - 5y^2 + 2y^4)e^{-2y^2}$.
従って $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{\pm 1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{\pm 1} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{0}{\pm 1}\right)^2 = -\frac{16}{e^2} < 0$ となるため, $\binom{0}{\pm 1}$ では, f は極値をとらない.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{0} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{0}{0}\right)^2 = 4 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0} = 2 > 0$ より $\binom{0}{0}$ で f は極小値 0 をとる.

(14) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(ax - ax^3 - bxy^2)e^{-x^2-y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(by - ax^2y - by^3)e^{-x^2-y^2}$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} x(a - ax^2 - by^2) = 0 & \cdots(i) \\ y(b - ax^2 - by^2) = 0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(i) から $x = 0$ または $ax^2 + by^2 = a$ である. $x = 0$ の場合, (ii) から $y = 0$ または $y = \pm 1$ であり, $ax^2 + by^2 = a$ の場合は仮定 $a \neq b$ より (ii) から $y = 0$ である. 従って, $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}, \pm\binom{0}{1}, \pm\binom{1}{0}$ で f は極値をとる可能性がある. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(a - 5ax^2 - by^2 + 2ax^4 + 2bx^2y^2)e^{-x^2-y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 4xy(-b - a + ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(b - ax^2 - 5by^2 + 2ax^2y^2 + 2by^4)e^{-x^2-y^2}$ だから $xy = 0$ ならば $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2 = 4(a - 5ax^2 - by^2 + 2ax^4)(b - ax^2 - 5by^2 + 2by^4)e^{-2x^2-2y^2}$ である. 従って $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{0} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{0}{0}\right)^2 = 4ab > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0} = 2a > 0$ となるため $\binom{0}{0}$ で f は極小値 $f\binom{0}{0} = 0$ をとる.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{0} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{0}{0}\right)^2 = 2ab > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0} = 2a > 0$ である. 従って, $\binom{0}{0}$ で f は極小値 $f\binom{0}{0} = 0$ をとる.
$\binom{x}{y} = \binom{0}{\pm 1}$ の場合, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2 = 8b(b-a)e^{-2} > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(a-b)e^{-1} < 0$ だから $\binom{0}{\pm 1}$ で f は極大値 $f\binom{0}{1} = f\binom{0}{-1} = \frac{b}{e}$ をとる.
$\binom{x}{y} = \binom{\pm 1}{0}$ の場合, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2 = -8a(b-a)e^{-2} < 0$ だから, f は $\binom{\pm 1}{0}$ で極値をとらない.

(15) $\frac{\partial f}{\partial x}=-\sin(x+y)-\sin x,\ \frac{\partial f}{\partial y}=-\sin(x+y)-\sin y$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases}\sin\frac{2x+y}{2}\cos\frac{y}{2}=0 & \cdots(i)\\ \sin\frac{x+2y}{2}\cos\frac{x}{2}=0 & \cdots(ii)\end{cases}$$

(i) から $y=2n\pi-2x$ または $y=(2n+1)\pi$ (n は任意の整数). $y=2n\pi-2x$ の場合, (ii) より $\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$ だから $x=\frac{2m\pi}{3}$ または $x=(2m+1)\pi$ (m は任意の整数). $y=(2n+1)\pi$ の場合, (ii) より $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$ だから $x=m\pi$ (m は任意の整数). 従って $\begin{pmatrix}\frac{2m\pi}{3}\\ \frac{2(3n-2m)\pi}{3}\end{pmatrix}$, $\binom{(2m+1)\pi}{2n\pi}$, $\binom{m\pi}{(2n+1)\pi}$ (m, n は任意の整数) で f は極値をとる可能性がある. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\cos(x+y)-\cos x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\cos(x+y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\cos(x+y)-\cos y$ だから

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2=\cos(x+y)\cos y+\cos(x+y)\cos x+\cos x\cos y.$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{(2m+1)\pi}{2n\pi}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{(2m+1)\pi}{2n\pi}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{(2m+1)\pi}{2n\pi}\right)^2=-1<0$ だから, f は $\binom{(2m+1)\pi}{2n\pi}$ で極値をとらない.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{m\pi}{(2n+1)\pi}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{m\pi}{(2n+1)\pi}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{m\pi}{(2n+1)\pi}\right)^2=-(-1)^{m+1}+(-1)^{2m+1}-(-1)^m=1$ だから, f は $\binom{m\pi}{(2n+1)\pi}$ で極値をとらない.

$\binom{x}{y}=\begin{pmatrix}\frac{2m\pi}{3}\\ \frac{2(3n-2m)\pi}{3}\end{pmatrix}$ の場合, m が 3 の倍数ならば $\cos x=\cos y=\cos(x+y)=1$ だから

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{2m\pi}{3}\\ \frac{2(3n-2m)\pi}{3}\end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix}\frac{2m\pi}{3}\\ \frac{2(3n-2m)\pi}{3}\end{pmatrix}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}\frac{2m\pi}{3}\\ \frac{2(3n-2m)\pi}{3}\end{pmatrix}\right)^2=3>0$ であり, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{2m\pi}{3}\\ \frac{2(3n-2m)\pi}{3}\end{pmatrix}=-2<0$ だから f は $\begin{pmatrix}\frac{2m\pi}{3}\\ \frac{2(3n-2m)\pi}{3}\end{pmatrix}$ において極大値 3 をとる. m が 3 の倍数でなければ $\cos x=\cos y=\cos(x+y)=-\frac{1}{2}$ だから

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{2m\pi}{3}\\ \frac{2(3n-2m)\pi}{3}\end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix}\frac{2m\pi}{3}\\ \frac{2(3n-2m)\pi}{3}\end{pmatrix}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}\frac{2m\pi}{3}\\ \frac{2(3n-2m)\pi}{3}\end{pmatrix}\right)^2=\frac{1}{4}>0$ であり, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{2m\pi}{3}\\ \frac{2(3n-2m)\pi}{3}\end{pmatrix}=1>0$ だから f は $\begin{pmatrix}\frac{2m\pi}{3}\\ \frac{2(3n-2m)\pi}{3}\end{pmatrix}$ において極小値 $-\frac{3}{2}$ をとる.

m が 3 の倍数の場合は m を $3m$ で, n を $n+2m$ で置き換え, m が 3 の倍数でない場合は n を $n+m$ で置き換えて上の結果をまとめると f は $\binom{2m\pi}{2n\pi}$ (m, n は任意の整数) で極大値 3 をとり, $\begin{pmatrix}\frac{2m\pi}{3}\\ 2n\pi+\frac{2m\pi}{3}\end{pmatrix}$ (m は 3 の倍数でない整数, n は任意の整数) で極小値 $-\frac{3}{2}$ をとる.

(16) $\frac{\partial f}{\partial x}=-y(x+1)(x-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\ \frac{\partial f}{\partial y}=-x(y+1)(y-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases}y(x+1)(x-1)=0 & \cdots(i)\\ x(y+1)(y-1)=0 & \cdots(ii)\end{cases}$$

(i), (ii) から「$x=0$ または $y=\pm1$」かつ「$x=\pm1$ または $y=0$」だから $\binom{0}{0}$, $\binom{\pm1}{\pm1}$ (複号任意) で f は極値をとる可能性がある. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=xy(x^2-3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(x^2-1)(y^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=xy(y^2-3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ だから

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2=\left(x^2y^2(x^2-3)(y^2-3)-(x^2-1)^2(y^2-1)^2\right)e^{-x^2-y^2}.$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{0}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{0}{0}\right)^2=-1<0$ だから, f は $\binom{0}{0}$ で極値をとらない.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{\pm1}{\pm1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{\pm1}{\pm1}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{\pm1}{\pm1}\right)^2=4>0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{1}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{-1}{-1}=-\dfrac{2}{e}<0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{-1}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{-1}{1}=\dfrac{2}{e}>0$ だから, f は f は $\binom{1}{1}$, $\binom{-1}{-1}$ において極大値 $\dfrac{1}{e}$ をとり, $\binom{1}{-1}$, $\binom{-1}{1}$ において極小値 $-\dfrac{1}{e}$ をとる.

(17) $\frac{\partial f}{\partial x}=\sin(x+y)+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos(x+y),\ \frac{\partial f}{\partial y}=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos(x+y)$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases}\sin(x+y)+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos(x+y)=0 & \cdots(i)\\ \left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos(x+y)=0 & \cdots(ii)\end{cases}$$

(ii) から $x=\frac{\pi}{4}$ または $x=\frac{(2n+1)\pi}{2}-y$ (n は任意の整数). $x=\frac{\pi}{4}$ の場合, (i) より $y=n\pi-\frac{\pi}{4}$ (n は任意の整数). $x=\frac{(2n+1)\pi}{2}-y$ の場合 (i) は成立しない. 従って, $\begin{pmatrix}\frac{\pi}{4}\\ n\pi-\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}$ (n は任意の整数) で f は極値をとる可能性がある. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\cos(x+y)-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin(x+y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\cos(x+y)-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin(x+y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin(x+y)$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{\pi}{4}\\ n\pi-\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix}\frac{\pi}{4}\\ n\pi-\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}\frac{\pi}{4}\\ n\pi-\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\right)^2=-1<0$ となるため, f は極値をとらない.

(18) $\frac{\partial f}{\partial x}=-\sin y(\sin(2x+y)+\cos(2x+y))=-\sqrt{2}\sin y\sin\left(2x+y+\frac{\pi}{4}\right),\ \frac{\partial f}{\partial y}=\sqrt{2}\cos(x+2y)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ より

$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases}\sin y\sin\left(2x+y+\frac{\pi}{4}\right)=0 & \cdots(i)\\ \cos(x+2y)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 & \cdots(ii)\end{cases}$$

(i) から $y=n\pi$ または $y=n\pi-\frac{\pi}{4}-2x$ (n は任意の整数) である. $y=n\pi$ の場合, (ii) より $x=m\pi+\frac{\pi}{2}$ または $x=m\pi+\frac{\pi}{4}$ (m は任意の整数) である. $y=n\pi-\frac{\pi}{4}-2x$ の場合, (ii) より $x=\frac{m\pi}{3}$ または $x=m\pi+\frac{\pi}{4}$ (m は任意の整数) である. 以上から $\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{\pi}{2}\\ n\pi\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{\pi}{4}\\ n\pi\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}\frac{m\pi}{3}\\ n\pi-\frac{2m\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{\pi}{4}\\ n\pi+\frac{\pi}{4}\end{smallmatrix}\right)$ (m, n は任意の整数) で f は極値をとる可能性がある. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2\sin y(\cos(2x+y)-\sin(2x+y))$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\cos y(\sin(2x+y)+\cos(2x+y))-\sin y(\cos(2x+y)-\sin(2x+y))=-\sin(2x+2y)-\cos(2x+2y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2\sin(x+2y)(\cos x-\sin x)$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{\pi}{2}\\ n\pi\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{\pi}{2}\\ n\pi\end{smallmatrix}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{\pi}{2}\\ n\pi\end{smallmatrix}\right)\right)^2=-1<0$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{\pi}{4}\\ n\pi\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{\pi}{4}\\ n\pi\end{smallmatrix}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{\pi}{4}\\ n\pi\end{smallmatrix}\right)\right)^2=-1<0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{\pi}{4}\\ n\pi+\frac{\pi}{4}\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{\pi}{4}\\ n\pi+\frac{\pi}{4}\end{smallmatrix}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{\pi}{4}\\ n\pi+\frac{\pi}{4}\end{smallmatrix}\right)\right)^2=-1<0$
となり, f は $\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{\pi}{2}\\ n\pi\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{\pi}{4}\\ n\pi\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{\pi}{4}\\ n\pi+\frac{\pi}{4}\end{smallmatrix}\right)$ で極値をとらない.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}\frac{m\pi}{3}\\ n\pi-\frac{2m\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}\frac{m\pi}{3}\\ n\pi-\frac{2m\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\end{smallmatrix}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}\frac{m\pi}{3}\\ n\pi-\frac{2m\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\end{smallmatrix}\right)\right)^2=8(-1)^m\sin\left(\frac{2m\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{m\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)-2\sin^2\left(\frac{2m\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$
$=4(-1)^m\left(\sin\left(m\pi+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\frac{m\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{4m\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)-1=3+3(-1)^m\sin\frac{m\pi}{3}>0$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}\frac{m\pi}{3}\\ n\pi-\frac{2m\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\end{smallmatrix}\right)=2\sqrt{2}\sin\left(\frac{2m\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\begin{cases}2>0 & m\text{ を 3 で割った余りが 0}\\ \sqrt{3}-1>0 & m\text{ を 3 で割った余りが 1}\\ -\sqrt{3}-1<0 & m\text{ を 3 で割った余りが 2}\end{cases}$$

だから f は $\left(\begin{smallmatrix}m\pi\\ n\pi+\frac{3\pi}{4}\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{\pi}{3}\\ n\pi+\frac{\pi}{12}\end{smallmatrix}\right)$ においてそれぞれ極小値 $-\frac{1}{2}, \frac{5-3\sqrt{3}}{8}$ をとり, $\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{2\pi}{3}\\ n\pi+\frac{5\pi}{12}\end{smallmatrix}\right)$ において極大値 $\frac{5+3\sqrt{3}}{8}$ をとる.

(19) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)=\sin^2 x+\sin^2 y-2\sin x\sin y(\sin x\cos y+\cos x\sin y)=\sin^2 x(1-2\cos y\sin y)+\sin^2 y(1-2\cos x\sin x)=\frac{1}{2}((1-\cos 2x)(1-\sin 2y)+(1-\cos 2y)(1-\sin 2x))=\frac{1}{2}(\sin(2x+2y)-\cos 2x-\sin 2y-\cos 2y-\sin 2x+2)$ だから $\frac{\partial f}{\partial x}=\cos(2x+2y)+\sin 2x-\cos 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\cos(2x+2y)-\cos 2y+\sin 2y$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases}\cos(2x+2y)+\sin 2x-\cos 2x=0 & \cdots(i)\\ \cos(2x+2y)-\cos 2y+\sin 2y=0 & \cdots(ii)\end{cases}$$

$(i)-(ii)$ から $\sin 2x-\cos 2x=\sin 2y-\cos 2y$ であり, この左辺は $\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ に等しく, 右辺は $\sqrt{2}\sin\left(2y-\frac{\pi}{4}\right)$ に等しいため, $2y-\frac{\pi}{4}=2x-\frac{\pi}{4}+2n\pi$ または $2y-\frac{\pi}{4}=(2n+1)\pi-2x+\frac{\pi}{4}$ (n は任意の整数) である. 前者の場合, $y=x+n\pi$ だから, (i) に代入すれば $\cos(4x)+\sin 2x-\cos 2x=0$ が得られる. この左辺は $2\cos x\sin x-2\sin 3x\sin x=2\sin x\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin 3x\right)=-4\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ に等しいため, $x=m\pi, m\pi+\frac{\pi}{4}, \frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ (m は任意の整数) である. 後者の場合, $2x+2y=2n\pi+\frac{3\pi}{2}$ だから, (i) に代入すれば $\sin 2x-\cos 2x=0$ が得られる. この左辺は $\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ に等しいため, $x=\frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ (m は任意の整数) である. 以上から $\left(\begin{smallmatrix}m\pi\\ n\pi\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{\pi}{4}\\ n\pi+\frac{\pi}{4}\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}\frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\\ \frac{m\pi}{2}+n\pi+\frac{\pi}{8}\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}\frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\\ n\pi-\frac{m\pi}{2}+\frac{5\pi}{8}\end{smallmatrix}\right)$ (m, n は任意の整数) で f は極値をとる可能性がある. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2(\cos 2x+\sin 2x-\sin(2x+2y))$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2\sin(2x+2y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2(\cos 2y+\sin 2y-\sin(2x+2y))$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}m\pi\\ n\pi\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}m\pi\\ n\pi\end{smallmatrix}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}m\pi\\ n\pi\end{smallmatrix}\right)\right)^2=4>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}m\pi\\ n\pi\end{smallmatrix}\right)=2>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{\pi}{4}\\ n\pi+\frac{\pi}{4}\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{\pi}{4}\\ n\pi+\frac{\pi}{4}\end{smallmatrix}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{\pi}{4}\\ n\pi+\frac{\pi}{4}\end{smallmatrix}\right)\right)^2=4>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{\pi}{4}\\ n\pi+\frac{\pi}{4}\end{smallmatrix}\right)=2>0$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}\frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\\ \frac{m\pi}{2}+n\pi+\frac{\pi}{8}\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}\frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\\ \frac{m\pi}{2}+n\pi+\frac{\pi}{8}\end{smallmatrix}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}\frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\\ \frac{m\pi}{2}+n\pi+\frac{\pi}{8}\end{smallmatrix}\right)\right)^2=4\left((-1)^m\sqrt{2}-1\right)^2-4=\begin{cases}2-4\sqrt{2}<0 & m\text{ は偶数}\\ 2+4\sqrt{2}>0 & m\text{ は奇数}\end{cases}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}\frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\\ \frac{m\pi}{2}+n\pi+\frac{\pi}{8}\end{smallmatrix}\right)=-2\sqrt{2}-2<0$ (m は奇数), $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}\frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\\ n\pi-\frac{m\pi}{2}+\frac{5\pi}{8}\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}\frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\\ n\pi-\frac{m\pi}{2}+\frac{5\pi}{8}\end{smallmatrix}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}\frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\\ n\pi-\frac{m\pi}{2}+\frac{5\pi}{8}\end{smallmatrix}\right)\right)^2=-4<0$ だから, f は $\left(\begin{smallmatrix}m\pi\\ n\pi\end{smallmatrix}\right)$ と $\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{\pi}{4}\\ n\pi+\frac{\pi}{4}\end{smallmatrix}\right)$ (m, n は任意の整数) で極小値 0 をとり, $\left(\begin{smallmatrix}m\pi+\frac{5\pi}{8}\\ n\pi+\frac{5\pi}{8}\end{smallmatrix}\right)$ (m, n は任意の整数) で極大値 $\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$ をとる.

2. (1) $\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y+\frac{3}{x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=x+2y+\frac{3}{y^2}$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases} 2x+y+\frac{3}{x^2}=0 & \cdots(i) \\ x+2y+\frac{3}{y^2}=0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(i) から $y=-2x-\frac{3}{x^2}$ であり, (ii) より $xy^2+2y^3+3=0$ だから, この式の y に $-2x-\frac{3}{x^2}$ を代入して, 両辺に x^6 をかければ $x^3(2x^3+3)^2-2(2x^3+3)^3+3=0$ となる. $X=2x^3+3$ とおいて, x^3 に $\frac{X-3}{2}$ を代入すると $\frac{X^2(X-3)}{2}-2X^3+3=0$ だから X についての 3 次方程式 $X^3+X^2-2=0$ が得られ, この左辺は $(X-1)(X^2+2X+2)$ と因数分解するため, 実数解は $X=1$ のみである. 故に $2x^3+3=1$ で, x は実数だから $x=-1$ となるため, $y=-1$ である. 従って, $\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ で f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2-\frac{6}{x^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2-\frac{6}{y^3}$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right)\right)^2=63>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right)=8>0$.
よって f は $\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ において極小値 9 をとる.

(2) $\frac{\partial f}{\partial x}=y^2+2x-\frac{3}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2xy-\frac{2}{y}$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases} y^2+2x-\frac{3}{x}=0 & \cdots(i) \\ xy-\frac{1}{y}=0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(ii) から $x=\frac{1}{y^2}$ であり, これを (i) に代入して両辺に y^2 をかければ $y^4-1=0$ が得られるため, $y=\pm1$ である. 従って, $\left(\begin{smallmatrix}1\\\pm1\end{smallmatrix}\right)$ で f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2+\frac{3}{x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x+\frac{2}{y^2}$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}1\\\pm1\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}1\\\pm1\end{smallmatrix}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}1\\\pm1\end{smallmatrix}\right)\right)^2=16>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}1\\\pm1\end{smallmatrix}\right)=5>0$.
よって f は $\left(\begin{smallmatrix}1\\\pm1\end{smallmatrix}\right)$ において極小値 2 をとる.

(3) $\frac{\partial f}{\partial x}=y^2-\frac{9}{(x+2y)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2xy-\frac{18}{(x+2y)^2}$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases} y^2-\frac{9}{(x+2y)^2}=0 & \cdots(i) \\ xy-\frac{9}{(x+2y)^2}=0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

$(i)-(ii)$ から $y(y-x)=0$ だから $y=0$ または $y=x$. $y=0$ の場合は (i) を満たす x は存在しない. $y=x$ の場合は (i) $x^2-\frac{1}{x^2}=0$ だから $x=\pm1$ である. 従って, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\pm\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ で f は極値をとる可能性がある. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{18}{(x+2y)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2y+\frac{36}{(x+2y)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x+\frac{72}{(x+2y)^3}$ だから $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\pm\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ のとき $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right)^2=-\frac{78}{9}<0$ となるため, f は極値をとらない.

(4) $|xy|<1$ の場合, $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと $x=y=0$ である. 従って, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で f は極値をとる可能性がある. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{xy^3}{(1-x^2y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{1}{(1-x^2y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{x^3y}{(1-x^2y^2)^{\frac{3}{2}}}$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)^2=-1<0$ となるため, $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, |xy|<1\right\}$ の範囲では f は極値をとらない.
任意の $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in X$ に対し, $-\frac{\pi}{2}\leqq f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\leqq\frac{\pi}{2}$ であり, t を 0 でない任意の実数とするとき, $f\begin{pmatrix}t\\\frac{1}{t}\end{pmatrix}=\frac{\pi}{2}$, $f\begin{pmatrix}t\\-\frac{1}{t}\end{pmatrix}=-\frac{\pi}{2}$ となるため, f は $\begin{pmatrix}t\\\frac{1}{t}\end{pmatrix}$ で最大値 $\frac{\pi}{2}$ をとり, $\begin{pmatrix}t\\-\frac{1}{t}\end{pmatrix}$ で最小値 $-\frac{\pi}{2}$ をとる.

(5) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1-x^2-y^2}}$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ を満たす x, y は存在しないため, $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0<x^2+y^2<1\right\}$ において, f は極値をとらない. 任意の $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in X$ に対し, $0\leqq\sqrt{1-x^2-y^2}\leqq1$ だから $0\leqq f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\leqq\frac{\pi}{2}$ であり, 任意の $0\leqq\theta<2\pi$ に対して $f\left(\begin{smallmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{smallmatrix}\right)=0$, $f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\frac{\pi}{2}$ だから f は $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で最大値 $\frac{\pi}{2}$ をとり, $f\left(\begin{smallmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{smallmatrix}\right)$ で最小値 0 をとる.

3. 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に内接する三角形の頂点を $\left(\begin{smallmatrix}a\cos\alpha\\b\sin\alpha\end{smallmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix}a\cos\beta\\b\sin\beta\end{pmatrix}$, $\left(\begin{smallmatrix}a\cos\gamma\\b\sin\gamma\end{smallmatrix}\right)$ $(0\leqq\alpha<\beta<\gamma<2\pi)$ とすれば, その面積は $\frac{1}{2}((a\cos\alpha-a\cos\gamma)(b\sin\beta-b\sin\gamma)-(a\cos\beta-a\cos\gamma)(b\sin\alpha-b\sin\gamma))=\frac{ab}{2}(\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma-\beta)-\sin(\gamma-\alpha))$ である. 関数 $f:\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)|\ x,y\geqq0,\ x+y\leqq2\pi\}\to\boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$ で定めれば, 上記の三角形の面積は $\frac{ab}{2}f\begin{pmatrix}\beta-\alpha\\\gamma-\beta\end{pmatrix}$ である.

$x, y > 0$ かつ $x+y < 2\pi$ の場合, $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x - \cos(x+y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \cos y - \cos(x+y)$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} \sin\frac{2x+y}{2}\sin\frac{y}{2} = 0 & \cdots (i) \\ \sin\frac{x+2y}{2}\sin\frac{x}{2} = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

$x, y > 0$, $x+y < 2\pi$ より $0 < \frac{2x+y}{2} < \frac{x+2\pi}{2} < 2\pi$ であることに注意すれば (i) から「$y = 2\pi - 2x$ かつ $0 < x < \pi$」である．このとき (ii) より $\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0$ だから $x = \frac{2\pi}{3}$．従って $\begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性がある．$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \sin(x+y) - \sin x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sin(x+y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin(x+y) - \sin y$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}\right)^2 = \frac{9}{4} > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = -\sqrt{3} < 0$ となり, f は $\begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$ で極大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる．f の定義域は $\boldsymbol{R}^2$ の有界閉集合だから f は最大値をとるが, $f\binom{x}{0} = f\binom{0}{y} = f\binom{x}{2\pi - x} = 0 < \frac{3\sqrt{3}}{2} = f\begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$ となるため, f は定義域の境界で最大値をとらない．故に f は $\begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$ で最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとるため, 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ に内接する三角形の面積が最大になるのは, 頂点が $\binom{a\cos\alpha}{b\sin\alpha}$, $\begin{pmatrix} a\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \\ b\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a\cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) \\ b\sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$ $(0 < \alpha < \frac{2\pi}{3})$ の場合で, 面積の最大値は $\frac{3\sqrt{3}ab}{4}$ である．

4. (1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy - 4x^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2x^2$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} 4x(y - x^2) = 0 & \cdots (i) \\ y + x^2 = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(i) から $x = 0$ または $y = x^2$．$x = 0$ の場合, (ii) より $y = 0$．$y = x^2$ の場合, (ii) より $x = 0$．従って, $\binom{0}{0}$ のみで f は極値をとる可能性がある．t を 0 でない実数とすれば, $f\binom{t}{0} = -t^4 < 0$, $f\binom{0}{t} = t^2 > 0$ だから, f は原点にいくらでも近いところで, 正の値と負の値をとるため, f は原点で極値をとらない．故に f は極値をとらない．

(2) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 3x^2y - y^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -4y^3 + x^3 - 3xy^2$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} 4x^3 + 3x^2y - y^3 = 0 & \cdots (i) \\ -4y^3 + x^3 - 3xy^2 = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(i) から (ii) を引けば $3x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3y^3 = 0$ が得られ, この左辺は因数分解できるため, $3(x+y)(x^2+y^2) = 0$ である．従って, $y = -x$ であり, (i) に代入すれば $x = 0$ が得られるため, f が極値をとる可能性があるのは原点のみである．t を 0 でない実数とすれば, $f\binom{t}{0} = t^4 > 0$, $f\binom{0}{t} = -t^4 < 0$ だから, f は原点にいくらでも近いところで, 正の値と負の値をとるため, f は原点で極値をとらない．故に f は極値をとらない．

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -4xy + 4y^3 - 5y^4$ より $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} x = y^2 & \cdots (i) \\ y(5y^3 - 4y^2 + 4x) = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(i) を (ii) に代入すれば $y^4 = 0$．従って, f は $\binom{0}{0}$ で極値をとる可能性がある．
$f\binom{t^2}{t} = -t^5$ だから, 点 $\binom{x}{y}$ が放物線 $x = y^2$ の上を動きながら原点を通過するとき, $f\binom{x}{y}$ の符号が変わるため, f は原点で極値をとらない．

(4) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 + 4xy$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + 2x^2$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} xy(y+2) = 0 & \cdots (i) \\ x^2(y+1) = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(ii) から $x = 0$ または $y = -1$ であり, $x = 0$ の場合は (i) も成立し, $y = -1$ の場合は (i) より $x = 0$ である．従って, $\binom{0}{c}$ (c は任意) で f は極値をとる可能性がある．c を任意の定数とすれば, 実数 s と t に対し $f\binom{s}{c+t} = s^2((t+c+1)^2 - 1)$ が成り立つ．
$c < -2$ の場合は $t < -c-2$ ならば $t + c + 1 < -1$ より $f\binom{s}{c+t} \geqq 0 = f\binom{0}{c}$ であり, $c > 0$ の場合は $t > -c$ ならば

$t+c+1>1$ より $f\left(\begin{smallmatrix} s \\ c+t \end{smallmatrix}\right) \geqq 0 = f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ c \end{smallmatrix}\right)$ が成り立つため, $c<-2$ または $c>0$ の場合は, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ c \end{smallmatrix}\right)$ で f は極小値を 0 をとる. $-2<c<0$ の場合は $-c-2<t<-c$ ならば $|t+c+1|<1$ より $f\left(\begin{smallmatrix} s \\ c+t \end{smallmatrix}\right) \leqq 0 = f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ c \end{smallmatrix}\right)$ が成り立つため, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ c \end{smallmatrix}\right)$ で f は極大値を 0 をとる.
$c=-2$ の場合, $f\left(\begin{smallmatrix} s \\ t-2 \end{smallmatrix}\right) = s^2t(t-2)$ だから $t=0$ の前後で $f\left(\begin{smallmatrix} s \\ t-2 \end{smallmatrix}\right)$ の符号が変わるため, f は $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ で極値をとらない. $c=0$ の場合, $f\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) = s^2t(t+2)$ だから $t=0$ の前後で $f\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)$ の符号が変わるため, f は $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で極値をとらない.

(5) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\log\left(x^2+y^2+r^2\right)+2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\log\left(x^2+y^2+r^2\right)+2y$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} x\left(\log\left(x^2+y^2+r^2\right)+1\right) = 0 & \cdots(i) \\ y\left(\log\left(x^2+y^2+r^2\right)+1\right) = 0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(i) から $x=0$ または $x^2+y^2 = \dfrac{1}{e}-r^2$. 後者の場合は (ii) も成り立つ. $x=0$ かつ $x^2+y^2 \neq \dfrac{1}{e}-r^2$ の場合は (ii) より $y=0$. 従って, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{e}-r^2}\cos\theta \\ \sqrt{\frac{1}{e}-r^2}\sin\theta \end{pmatrix}$ (ただし $r^2 \leqq \frac{1}{e}$, θ は任意) で f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\log\left(x^2+y^2+r^2\right) + \frac{4x^2}{x^2+y^2+r^2} + 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{4xy}{x^2+y^2+r^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\log\left(x^2+y^2+r^2\right) + \frac{4y^2}{x^2+y^2+r^2} + 2$ だから, $r^2 \neq \frac{1}{e}$ ならば $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)^2 = 4(2\log|r|+1)^2 > 0$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 2(2\log|r|+1)$ となるため, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で f は極値 $2r^2\log|r|$ をとり, この値は $r^2 < \frac{1}{e}$ ならば極大値, $r^2 > \frac{1}{e}$ ならば極小値である.
関数 $g:(0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ を $g(t) = t\log t$ で定めれば, $g'(t) = \log t + 1$ だから g は $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ で単調に減少し, $\left[\frac{1}{e}, \infty\right)$ で単調に増加するため, g は $\frac{1}{e}$ で最小値をとる. 従って $r^2 \leqq \frac{1}{e}$ の場合, 任意の $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2$ に対して, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = g\left(x^2+y^2+r^2\right) \geqq g\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} = f\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{e}-r^2}\cos\theta \\ \sqrt{\frac{1}{e}-r^2}\sin\theta \end{pmatrix}$ が成り立つため, f は $\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{e}-r^2}\cos\theta \\ \sqrt{\frac{1}{e}-r^2}\sin\theta \end{pmatrix}$ において最小値 $-\frac{1}{e}$ をとる. 従って, これは極小値でもある.

(6) $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ の場合は $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{2x\left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{2y\left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} x\left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right) = 0 & \cdots(i) \\ y\left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right) = 0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

上の方程式は $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ であるという仮定のもとで考えているため, x と y の一方は 0 でない. 従って, (i), (ii) より $x^2+y^2=1$ であるため, f が原点以外で極値をとる可能性があるのは $\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ (θ は任意) のみである. 任意の $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2$ に対して $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \geqq 0 = f\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ が成り立つため, f は $\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ で最小である. 故に f は $\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ において極小値 0 をとる. 一方, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in U_1(\mathbf{0})$ かつ $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, すなわち $0 < x^2+y^2 < 1$ ならば $-1 < \sqrt{x^2+y^2}-1 < 0$ だから $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) < 1 = f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ が成り立つ. よって f は原点で極大値 1 をとる.

(7) $\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4-2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2+2y$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} 5x^4-2xy = 0 & \cdots(i) \\ -x^2+2y = 0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(ii) より $y = \frac{x^2}{2}$. (i) に代入すれば $5x^4-x^3=0$ だから $x = 0, \frac{1}{5}$. 従って, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{50} \end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 20x^3-2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{50} \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{50} \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{50} \end{pmatrix}\right)^2 = \frac{2}{25} > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{50} \end{pmatrix} = \frac{3}{25} > 0$ となるため, f は $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{50} \end{pmatrix}$ で f は極小値 $-\frac{1}{12500}$ をとる.
$f\left(\begin{smallmatrix} t \\ t^2 \end{smallmatrix}\right) = t^5$ だから, f は原点にいくらでも近いところで, 正の値と負の値をとるため, f は原点で極値をとらない.

(8) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2+6x-6y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2-6x+6y$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} x^2+2x-2y = 0 & \cdots(i) \\ -y^2-2x+2y = 0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

$(i)+(ii)$ から $3(x^2-y^2)=0$ だから $y=\pm x$. $y=x$ の場合, (i) より $x=0$. $y=-x$ の場合, (i) より $x=0$ または $x=-4$. 従って, $\binom{0}{0}$, $\binom{-4}{4}$ で f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x+6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-6y+6$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2=36((1+x)(1-y)-1)$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{-4}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{-4}{4}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{-4}{4}\right)^2=288>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{-4}{4}=-18<0$ より $\binom{-4}{4}$ で f は極大値 64 をとる.
r を 0 でない任意の実数の定数とすれば $f\binom{rt+r}{r}=r^2(rt^3+3(r+1)t^2+3rt)$ であり, t の 3 次関数 g_r を $g_r(t)=rt^3+3(r+1)t^2+3rt$ で定義すれば, g_r は 0 で極値をとらず, $g_r(0)=0$ だから $g_r(t)$ は 0 の前後で符号が変わる. 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $|r|<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{5}}$, $|t|<1$ ならば $\binom{rt+r}{r}$ は原点を中心とした半径 ε の円内に入っており, $f\binom{rt+r}{r}=r^2g_r(t)$ だから, f はこの円内で正と負の値をとるため, f は原点では極値をとらない.

(9) $a=0$ の場合は f は x のみの関数 $2x^3-3bx^2$ となり, この関数は $b<0$ ならば b で極大値 $-b^3$, 0 で極小値 0 をとり, $b>0$ ならば 0 で極大値 0, b で極小値 $-b^3$ をとる. また $b=0$ ならばこの関数は x の単調増加関数である. 従って $b=0$ の場合, f は極値をもたず, 任意の実数 p に対して $b<0$ ならば $\binom{b}{p}$ で極大値 $-b^3$, $\binom{0}{p}$ で極小値 0 をとり, $b>0$ ならば $\binom{0}{p}$ で極大値 0, $\binom{b}{p}$ で極小値 $-b^3$ をとる.
$a\neq 0$ の場合, $\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2-6axy-6bx$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-3ax^2$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases} x(x-ay-b)=0 & \cdots(i) \\ x^2=0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(ii) から $x=0$ であり, 任意の y に対して (i) が成り立つ. 従って, 任意の実数 p に対して $\binom{0}{p}$ で f は極値をとる可能性がある.
$f\binom{s}{p+t}-f\binom{0}{p}=s^2(2s-3at-3ap-3b)$ であり, $ap+d\neq 0$ のとき, $s^2+t^2<\frac{9(ap+d)^2}{4+9a^2}$ を満たす s, t に対して $9(ap+d)^2-(-2s+3at)^2>(4+9a^2)(s^2+t^2)-(-2s+3at)^2=(2t+3as)^2\geqq 0$ より $|-2s+3at|<3|ap+d|$ が成り立つことに注意する. p が $ap+b<0$ を満たす場合, $s^2+t^2<\frac{9(ap+d)^2}{4+9a^2}$ ならば $-2s+3at\leqq|-2s+3at|<-3(ap+d)$ だから $f\binom{s}{p+t}-f\binom{0}{p}\geqq 0$ となるため f は $\binom{0}{p}$ で極小値 0 をとる. p が $ap+b>0$ を満たす場合, $s^2+t^2<\frac{9(ap+d)^2}{4+9a^2}$ ならば $2s-3at\leqq|-2s+3at|<3(ap+d)$ だから $f\binom{s}{p+t}-f\binom{0}{p}\leqq 0$ となるため f は $\binom{0}{p}$ で極大値 0 をとる.
$p=-\frac{b}{a}$ の場合, $f\begin{pmatrix}s\\-\frac{b}{a}\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}0\\-\frac{b}{a}\end{pmatrix}=2s^3$ だから, $\binom{x}{y}$ が $\begin{pmatrix}0\\-\frac{b}{a}\end{pmatrix}$ を通り, 方向ベクトルが $\binom{1}{0}$ である直線上を動くとき, $\begin{pmatrix}0\\-\frac{b}{a}\end{pmatrix}$ の前後で $f\binom{x}{y}-f\begin{pmatrix}0\\-\frac{b}{a}\end{pmatrix}$ の符号が変わるため, f は $\begin{pmatrix}0\\-\frac{b}{a}\end{pmatrix}$ で極値をとらない.

(10) $\frac{\partial f}{\partial x}=(2x-2x^3)e^{-x^2-y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-2x^2ye^{-x^2-y^2}$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases} 2x-2x^3=0 & \cdots(i) \\ 2x^2y=0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(i) より $x=0,\pm1$, (ii) より $x=0$ または $y=0$ である. 任意の $\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2$ に対し $f\binom{x}{y}\geqq 0=f\binom{0}{y}$ だから f は y 軸上で最小値 0 をとる. 上の計算から, f は $\binom{1}{0}$ と $\binom{-1}{0}$ でも極値をとる可能性がある. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2(2x^4-5x^2-1)e^{-x^2-y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4xy(x^2-1)e^{-x^2-y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x^2(2y^2-1)e^{-x^2-y^2}$ だから
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2=-4x^2e^{-2(x^2+y^2)}(2x^4+2x^2y^2-5x^2+2y^2+1)$.
故に $\binom{x}{y}=\binom{\pm1}{0}$ ならば $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2=\frac{8}{e^2}>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}=-\frac{4}{e}<0$ より $\binom{\pm1}{0}$ で f は極大値 $\frac{1}{e}$ をとる.

(11) $\frac{\partial f}{\partial x}=4x+2y^2\cos 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2y\sin 2x$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases} 2x+y^2\cos 2x=0 & \cdots(i) \\ y\sin 2x=0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(ii) から $y=0$ または $x=\dfrac{n\pi}{2}$ (n は任意の整数). $y=0$ の場合は (i) より $x=0$. $x=\dfrac{n\pi}{2}$ (n は任意の整数) の場合は (i) より $y^2=(-1)^{n-1}n\pi$ だから n が 0 以下の偶数で $y=\pm\sqrt{-n\pi}$ または n が正の奇数で $y=\pm\sqrt{n\pi}$ である. 従って, $\binom{0}{0}$, $\begin{pmatrix}-m\pi\\\pm\sqrt{2m\pi}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{(2m-1)\pi}{2}\\\pm\sqrt{(2m-1)\pi}\end{pmatrix}$ (m は正の整数) で f は極値をとる可能性がある. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4-4y^2\sin 2x$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4y\cos 2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\sin 2x$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right)^2 = 8(\sin 2x - 2y^2 + y^2\sin^2 2x)$.
m が正の整数の場合, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} -m\pi \\ \pm\sqrt{2m\pi} \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} -m\pi \\ \pm\sqrt{2m\pi} \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} -m\pi \\ \pm\sqrt{2m\pi} \end{pmatrix}\right)^2 = -32m\pi < 0$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{(2m-1)\pi}{2} \\ \pm\sqrt{(2m-1)\pi} \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} \frac{(2m-1)\pi}{2} \\ \pm\sqrt{(2m-1)\pi} \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} \frac{(2m-1)\pi}{2} \\ \pm\sqrt{(2m-1)\pi} \end{pmatrix}\right)^2 = -16(2m-1)\pi < 0$ となるため, f は $\begin{pmatrix} -m\pi \\ \pm\sqrt{2m\pi} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{(2m-1)\pi}{2} \\ \pm\sqrt{(2m-1)\pi} \end{pmatrix}$ (m は正の整数) で f は極値をとらない.

$s \neq 0$ ならば $f\left(\begin{smallmatrix} s \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 2s^2 > 0$ である. 一方, $\lim_{s \to -0}\sqrt{-s}\sqrt{\dfrac{2s}{\sin 2s}} = 0$ だから任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $0 < \delta < \dfrac{\pi}{2}$ で, $-\delta < s < 0$ ならば $\sqrt{-s}\sqrt{\dfrac{2s}{\sin 2s}} < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ となるものがあるため, $-\delta < s < 0$ かつ $-\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < s < 0$ かつ $\sqrt{-s}\sqrt{\dfrac{2s}{\sin 2s}} < |t| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ を満たすような s, t がとれる. このとき, $\sqrt{s^2+t^2} < \varepsilon$ であり, $f\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) = 2s^2 + t^2\sin 2s < 0$ が成り立つため, 原点にいくらでも近い所で, f は正の値と負の値をとる. 故に f は原点では極値をとらない.

(12) $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - 2ax$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xy$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} y^2 - 2ax = 0 & \cdots(i) \\ xy = 0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(ii) から $x = 0$ または $y = 0$. $x = 0$ の場合は (i) より $y = 0$. $y = 0$ の場合は (i) より $a \neq 0$ ならば $x = 0$, $a = 0$ ならば x は任意の実数. 従って, $a \neq 0$ ならば $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で f は極値をとる可能性があり, $a = 0$ ならば任意の実数 p に対し, $\left(\begin{smallmatrix} p \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で f は極値をとる可能性がある.
$a \neq 0$ の場合, $f\left(\begin{smallmatrix} t^3 \\ t \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = t^5(1-at)$ だから, $-\frac{1}{|a|} < t < 0$ ならば $f\left(\begin{smallmatrix} t^3 \\ t \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) < 0$ であり, $0 < t < \frac{1}{|a|}$ ならば $f\left(\begin{smallmatrix} t^3 \\ t \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) > 0$ である. 従って, 点 $\boldsymbol{x}$ が曲線 $x = y^3$ の上を動くとき, 原点を通過する前後で $f(\boldsymbol{x}) - f(\mathbf{0})$ の符号が変わるため, f は原点で極値をとらない.
$a = 0$ の場合, $f\left(\begin{smallmatrix} t \\ t \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = t^3$ だから, 点 $\boldsymbol{x}$ が直線 $y = x$ の上を動くとき, 原点を通過する前後で $f(\boldsymbol{x}) - f(\mathbf{0})$ の符号が変わるため, f は原点で極値をとらない.

5. (1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + ay^2 + 3by$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2axy + 3bx$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} y(2x + ay + 3b) = 0 & \cdots(i) \\ x(x + 2ay + 3b) = 0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(ii) から $x = 0$ または $x = -2ay - 3b$. $x = 0$ の場合, (i) より $y = 0$ または $y = -\frac{3b}{a}$ ($a \neq 0$ の場合) であり, $x = -2ay - 3b$ の場合, (i) に代入して $y(-3ay - 3b) = 0$ を得るため, $y = 0$ または $y = -\frac{b}{a}$ ($a \neq 0$ の場合) である. 従って, $a \neq 0$ ならば $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3b}{a} \end{pmatrix}$, $\left(\begin{smallmatrix} -3b \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix} -b \\ -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性があり, $a = 0$ ならば $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} -3b \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + 2ay + 3b$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2ax$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right)^2 = 4axy - (2x + 2ay + 3b)^2$.
$b \neq 0$ の場合, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3b}{a} \end{pmatrix}, \left(\begin{smallmatrix} -3b \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ のとき $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right)^2 = -9b^2 < 0$ となるため, これらの点では f は極値をとらない. また, $a \neq 0$ ならば $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} -b \\ -\frac{b}{a} \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} -b \\ -\frac{b}{a} \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} -b \\ -\frac{b}{a} \end{pmatrix}\right)^2 = 3b^2 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} -b \\ -\frac{b}{a} \end{pmatrix} = -\frac{2b}{a}$ だから, a と b が同符号ならば $\begin{pmatrix} -b \\ -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$ において f は極大値 $\frac{b^3}{a}$ をとり, a と b が異符号ならば $\begin{pmatrix} -b \\ -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$ において f は極小値 $\frac{b^3}{a}$ をとる. $b = 0$ の場合, $c \neq 0, -a$ である実数 c をとれば, 任意の実数 t に対して $f\left(\begin{smallmatrix} ct \\ t \end{smallmatrix}\right) = ct^3(a+c)$ だから f は $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で極値をとらない. 以上から $a = 0$ または $b = 0$ ならば f は極値をとらず, $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ の場合, a と b が同符号ならば $\begin{pmatrix} -b \\ -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$ において f は極大値 $\frac{b^3}{a}$ をとり, a と b が異符号ならば $\begin{pmatrix} -b \\ -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$ において f は極小値 $\frac{b^3}{a}$ をとる.

(2) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + ay^2 + 6bx$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2axy$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} 2xy + ay^2 + 6bx = 0 & \cdots(i) \\ x(x + 2ay) = 0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(ii) から $x=0$ または $x=-2ay$. $x=0$ の場合, $a\neq 0$ ならば (i) より $y=0$ であり, $a\neq 0$ かつ $x=-2ay$ の場合, (i) に代入して $y(y+4b)=0$ を得るため, $y=0$ または $y=-4b$ である. 従って, $a\neq 0$ ならば $\binom{0}{0}$, $\binom{6ab}{-4b}$ で f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2y+6b$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2x+2ay$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2ax$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{6ab}{-4b}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{6ab}{-4b}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{6ab}{-4b}\right)^2=-40a^2b^2$ となるため, $ab\neq 0$ ならば $\binom{6ab}{-4b}$ で f は極値をとらない.
$f\binom{t^3}{t}=t^5\left(t^2+3bt+a\right)$ であり, $a\neq 0$ の場合は, $|t|$ が十分小さければ $t^2+3bt+a$ は a と同符号だから, t が 0 の前後で $f\binom{t^3}{t}$ の符号が変わる. 故に $a\neq 0$ の場合, f は $\binom{0}{0}$ で極値をとらない.
$a=0$ の場合, $\frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y}=\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y}=0$ であるためには $x=0$ であることが必要十分である. 実数 p に対し, $|y-p|<|p+3b|$ ならば $p<-3b$ の場合は $y+3b<0$, $p>-3b$ の場合は $y+3b>0$ が成り立つ. 従って, $\boldsymbol{x}=\binom{x}{y}$, $\boldsymbol{p}=\binom{0}{p}$ とおけば, $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|<|p+3b|$ ならば $p<-3b$ の場合, $f\binom{x}{y}=x^2(y+3b)\leqq 0=f\binom{0}{p}$ となるため f は $\binom{0}{p}$ で極大値 0 をとり, $p>-3b$ の場合, $f\binom{x}{y}=x^2(y+3b)\geqq 0=f\binom{0}{p}$ となるため f は $\binom{0}{p}$ で極小値 0 をとる.
$f\binom{s}{t-3b}=s^2t$ だから, $s\neq 0$ ならば $f\binom{s}{t-3b}$ の符号は t の符号と一致する. 故に f は $\binom{0}{-3b}$ にいくらでも近いところで, $f\binom{0}{-3b}=0$ より大きな値も小さな値もとるため, f は $\binom{0}{-3b}$ で極値をとらない.
以上から, $a\neq 0$ の場合には f は極値をとらず, $a=0$ の場合は, $p<-3b$ である任意の実数 p に対して f は $\binom{0}{p}$ で極小値 0 をとり, $p>-3b$ である任意の実数 p に対して f は $\binom{0}{p}$ で極大値 0 をとる.

(3) $\frac{\partial f}{\partial x}=3ax^2+3y^2-6by-3c$, $\frac{\partial f}{\partial y}=6xy-6bx$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases} ax^2+y^2-2by-c=0 & \cdots(i) \\ xy-bx=0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(ii) より $x=0$ または $y=b$ である. $x=0$ ならば (i) より $y^2-2by-c=0$ だから, $b^2+c<0$ ならば (i) を満たす実数 y は存在せず, $b^2+c\geqq 0$ ならば $y=b\pm\sqrt{b^2+c}$ である. $y=b$ ならば (i) より $ax^2=b^2+c$ だから「$a=0$ かつ $b^2+c\neq 0$」または $a(b^2+c)<0$ ならば (ii) を満たす実数 x は存在せず, $a\neq 0$ かつ $a(b^2+c)\geqq 0$ ならば $x=\pm\sqrt{\frac{b^2+c}{a}}$ であり, $a=0$ かつ $c=-b^2$ ならば任意の x に対して (i) が成り立つ. 従って, $a>0$ かつ $b^2+c\geqq 0$ ならば $\binom{0}{b\pm\sqrt{b^2+c}}$, $\binom{\pm\sqrt{\frac{b^2+c}{a}}}{b}$ で f は極値をとる可能性があり, $a\leqq 0$ かつ $b^2+c\geqq 0$ かつ $(a,b^2+c)\neq(0,0)$ ならば $\binom{0}{b\pm\sqrt{b^2+c}}$ のみで f は極値をとる可能性がある. また, $a<0$ かつ $b^2+c<0$ ならば $\binom{\pm\sqrt{\frac{b^2+c}{a}}}{b}$ のみで f は極値をとる可能性があり, $a=0$ かつ $c=-b^2$ ならば任意の実数 p に対して $\binom{p}{b}$ で f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6ax$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=6y-6b$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6x$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2=36\left(ax^2-(y-b)^2\right)$ である.
従って $x=0$ かつ $y\neq b$ ならば $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2=-36(y-b)^2<0$ だから $b^2+c>0$ の場合に f は $\binom{0}{b\pm\sqrt{b^2+c}}$ では極値をとらない. $a(b^2+c)>0$ の場合は $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{\pm\sqrt{\frac{b^2+c}{a}}}{b}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{\pm\sqrt{\frac{b^2+c}{a}}}{b}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{\pm\sqrt{\frac{b^2+c}{a}}}{b}\right)^2=36(b^2+c)$ より $b^2+c<0$ ならば f は $\binom{\pm\sqrt{\frac{b^2+c}{a}}}{b}$ では極値をとらず, $b^2+c>0$ ならば $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{\pm\sqrt{\frac{b^2+c}{a}}}{b}=\pm 6\sqrt{a(b^2+c)}$ (複号同順) より, $\binom{\sqrt{\frac{b^2+c}{a}}}{b}$ で f は極小値 $-\frac{2(b^2+c)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$ をとり, $\binom{-\sqrt{\frac{b^2+c}{a}}}{b}$ で f は極大値 $\frac{2(b^2+c)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$ をとる. $c=-b^2$ の場合, $a+3k^2>0$ となる実数 k を選べば $f\binom{t}{kt+b}=(a+3k^2)t^3$ だから, 実数 t の符号が変われば $f\binom{t}{b+kt}$ の符号も変わる. 従って, f は $\binom{0}{b}$ では極値をとらない. $a=0$ かつ $c=-b^2$ の場合, 0 でない実数 p に対し, $f\binom{x}{y}-f\binom{p}{b}=3x(y-b)^2$ だから, $x\geqq 0$ ならば $f\binom{x}{y}\geqq f\binom{p}{b}$, $x\leqq 0$ ならば $f\binom{x}{y}\leqq f\binom{p}{b}$ である. 従って $p>0$ のとき, f は $\binom{p}{b}$ で極小値 0 をとり, $p<0$ のとき, f は $\binom{p}{b}$ で極大値 0 をとる.
以上から $a>0$ かつ $b^2+c>0$ ならば $\binom{\sqrt{\frac{b^2+c}{a}}}{b}$ で f は極小値 $-\frac{2(b^2+c)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$ をとり, $\binom{-\sqrt{\frac{b^2+c}{a}}}{b}$ で f は極大値 $\frac{2(b^2+c)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$ をとる. 「$a\leqq 0$ または $b^2+c\leqq 0$」かつ $(a,b^2+c)\neq(0,0)$ ならば f は極値をとらない. $(a,b^2+c)=(0,0)$ ならば, $p>0$ に対し, f は $\binom{p}{b}$ で極小値 0 をとり, $p<0$ に対し, f は $\binom{p}{b}$ で極大値 0 をとる.

(4) $a=b=0$ の場合は $f\binom{x}{y}=x^3$ だから, 明らかに f は極値をとらない. $a\neq 0, b=0$ の場合は $\frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y}=\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y}=0$ を満たす点は原点に限るが, 実数 t に対して $f\binom{t}{0}=t^3$ だから, $\binom{x}{y}$ が x 軸上を動くとき, 原点の前後で $f\binom{x}{y}$ の符号が変わるため, f は原点では極値をとらない.

$b \neq 0$ の場合を考える. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3by$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3a^3y^2 + 3bx$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} x^2 + by = 0 & \cdots (i) \\ a^3y^2 + bx = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(i) より $y = -\frac{x^2}{b}$ だから (ii) に代入すれば $x = 0$ または $x = -\frac{b}{a}$ ($a \neq 0$ の場合) である. 従って, $a \neq 0$ ならば $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}, \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ -\frac{b}{a^2} \end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性があり, $a = 0$ ならば $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$ のみで f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3b$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6a^3y$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{x}{y}\right)^2 = 36a^3xy - 9b^2$ である.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{0} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{0}{0}\right)^2 = -9b^2 < 0$ となるため, f は原点では極値をとらない. また, $a \neq 0$ ならば $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ -\frac{b}{a^2} \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ -\frac{b}{a^2} \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ -\frac{b}{a^2} \end{pmatrix}\right)^2 = 27b^2 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ -\frac{b}{a^2} \end{pmatrix} = -\frac{6b}{a}$ だから, $ab > 0$ ならば $\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ -\frac{b}{a^2} \end{pmatrix}$ において f は極大値 $\frac{b^3}{a^3}$ をとり, $ab < 0$ ならば $\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ -\frac{b}{a^2} \end{pmatrix}$ において f は極小値 $\frac{b^3}{a^3}$ をとる. 以上から $a = 0$ または $b = 0$ ならば f は極値をとらず, $ab > 0$ ならば $\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ -\frac{b}{a^2} \end{pmatrix}$ において f は極大値 $\frac{b^3}{a^3}$ をとり, $ab < 0$ ならば $\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ -\frac{b}{a^2} \end{pmatrix}$ において f は極小値 $\frac{b^3}{a^3}$ をとる.

(5) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y - 3a$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 3b$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} x^2 - y - a = 0 & \cdots (i) \\ x - b = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(ii) より $x = b$, (i) より $y = b^2 - a$ である. 従って, f が極値をとる可能性があるのは $\begin{pmatrix} b \\ b^2-a \end{pmatrix}$ のみである.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ だから $a \neq b^2$ の場合は, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} b \\ b^2-a \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} b \\ b^2-a \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} b \\ b^2-a \end{pmatrix}\right)^2 = -9\left(b^2 - a\right) < 0$ となるため, f は $\begin{pmatrix} b \\ b-a^2 \end{pmatrix}$ で極値をとらない. $a = b^2$ の場合は, $f\binom{t+b}{bt} - f\binom{b}{0} = t^3$ だから, 点 $\binom{x}{y}$ が直線 $y = bx - b^2$ の上を動くとき, $\binom{b}{0}$ の前後で $f\binom{x}{y} - f\binom{b}{0}$ の符号がかわるため, f は $\binom{b}{0}$ で極値をとらない. 以上から f はいかなる a, b に対しても極値をもたない.

(6) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4a(x + b^3y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4ab^3(x + b^3y)$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} x^3 - a(x + b^3y) = 0 & \cdots (i) \\ y^3 - ab^3(x + b^3y) = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(ii) から (i) の両辺を b^3 倍したものを引けば, $y^3 - b^3x^3 = 0$ が得られるため $y = bx$ である. これを (i) に代入すれば $x^3 - (ab^4 + a)x = 0$ となるため, $a \leqq 0$ ならば $x = 0$, $a > 0$ ならば $x = 0, \pm\sqrt{ab^4 + a}$ である. 従って $a \leqq 0$ ならば $\binom{0}{0}$ のみで, $a > 0$ ならば $\binom{0}{0}$, $\pm\begin{pmatrix} \sqrt{ab^4+a} \\ b\sqrt{ab^4+a} \end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性がある.
$a \leqq 0$ の場合, 任意の $\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$ に対して $f\binom{x}{y} = x^4 + y^4 - 2a(x + b^3y)^2 > 0$ だから f は原点で最小値 0 をとる.
$a > 0$ の場合, $0 < |t| < \sqrt{2a}$ ならば $f\binom{b^3t}{-t} = (b^{12} + 1)t^4 > 0$, $f\binom{t}{0} = t^2(t^2 - 2a) < 0$ が成り立ち, f は原点にいくらでも近いところで正の値と負の値をとるため, f は原点で極値をとらない. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4a$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4ab^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4ab^6$ だから, $b \neq 0$ のとき $\binom{x}{y} = \pm\begin{pmatrix} \sqrt{ab^4+a} \\ b\sqrt{ab^4+a} \end{pmatrix}$ ならば $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{x}{y}\right)^2 = 96a^2b^2(b^4+1)^2 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y} = 4a(3b^4 + 2) > 0$ より $\begin{pmatrix} \sqrt{ab^4+a} \\ b\sqrt{ab^4+a} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\sqrt{ab^4+a} \\ -b\sqrt{ab^4+a} \end{pmatrix}$ で f は極小値 $-a^2(b^4 + 1)^3$ をとる. $b = 0$ のときは, $f\binom{x}{y} = \left(x^4 - a\right)^2 + y^4 - a^2$ だから $\begin{pmatrix} \sqrt{a} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\sqrt{a} \\ 0 \end{pmatrix}$ で f は最小値 $-a^2$ をとる.

(7) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 4ax^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2x^2$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} x(y + ax^2) = 0 & \cdots (i) \\ y + x^2 = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(ii) から $y = -x^2$ だから (1) に代入して $(a - 1)x^3 = 0$ を得るため, $a \neq 1$ ならば $x = 0$, $a = 1$ ならば x は任意である. 従って, $a \neq 1$ ならば $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$ で f は極値をとる可能性があり, $a = 1$ ならば $\binom{x}{y} = \binom{t}{-t^2}$ (t は任意の実数) で

f は極値をとる可能性がある.

$a<1$ の場合, $t\neq 0$ ならば $f\left(\begin{smallmatrix} t \\ -t^2 \end{smallmatrix}\right)=(a-1)t^4<0$, $f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ t \end{smallmatrix}\right)=t^2>0$ だから, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で f は極値をとらない. $a>1$ の場合, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=(y+x^2)^2+(a-1)x^4\geqq 0$ だから $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で f は最小値 0 をとる. $a=1$ の場合, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=(y+x^2)^2\geqq 0$ だから $\left(\begin{smallmatrix} t \\ -t^2 \end{smallmatrix}\right)$ で f は最小値 0 をとる.

(8) $\frac{\partial f}{\partial x}=(2ax-2ax^3-2xy^2)e^{-x^2-y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=(2y-2ax^2y-2y^3)e^{-x^2-y^2}$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases} x(a-ax^2-y^2)=0 & \cdots(i) \\ y(1-ax^2-y^2)=0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(i) から $x=0$ または $y^2=a-ax^2$. $x=0$ の場合, (ii) より $y=0,\pm 1$ であり, $y^2=a-ax^2$ の場合, (ii) に代入して $y(1-a)=0$ を得るため, $a\neq 1$ ならば $y=0$ となる. このとき, $a\neq 0$ ならば $x=\pm 1$ であり $a=0$ ならば x は任意である. $a=1$ ならば y は $|y|\leqq 1$ を満たす任意の実数である. 従って, $a\neq 0,1$ ならば $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で f は極値をとる可能性があり, $a=0$ ならば $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ (t は任意の実数) で f は極値をとる可能性があり, $a=1$ ならば $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix} \cos t \\ \sin t \end{smallmatrix}\right)$ (t は任意の実数) で f は極値をとる可能性がある.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2(a-5ax^2-y^2+2ax^4+2x^2y^2)e^{-x^2-y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4xy(-1-a+ax^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2(1-ax^2-5y^2+2ax^2y^2+2y^4)e^{-x^2-y^2}$ だから $xy=0$ のとき

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right)^2=4(a-5ax^2-y^2+2ax^4)(1-ax^2-5y^2+2y^4)e^{-x^2-y^2}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)^2=4a$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)=2a$ より $a>0$ ならば $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で f は極小値 $f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)=0$ をとり, $a<0$ ならば $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で f は極値をとらない.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{smallmatrix}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{smallmatrix}\right)\right)^2=-8(a-1)e^{-1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{smallmatrix}\right)=2(a-1)$ より $a>1$ ならば $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{smallmatrix}\right)$ で f は極値をとらず, $a<1$ ならば $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{smallmatrix}\right)$ で f は極大値 $f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{smallmatrix}\right)=\dfrac{1}{e}$ をとる.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)^2=8a(a-1)e^{-1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{smallmatrix}\right)=-4a$ より $a<0$ ならば $\left(\begin{smallmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で f は極小値 $f\left(\begin{smallmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)=\dfrac{a}{e}$ をとり, $0<a<1$ ならば $\left(\begin{smallmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で f は極値をとらず, $a>1$ ならば $\left(\begin{smallmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で f は極大値 $f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{smallmatrix}\right)=\dfrac{a}{e}$ をとる.

$a=0$ の場合, 任意の実数 t に対して $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\geqq 0=f\left(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ だから $\left(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で f は最小値 0 をとる.

$a=1$ の場合, 関数 $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $g(t)=te^{-t}$ で定めれば, $g'(t)=(1-t)e^{-t}$ より, g は $(-\infty,1]$ で単調に増加し, $[1,\infty)$ で単調に減少するため, g は 1 で最大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる. $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=g(x^2+y^2)\leqq g(1)=f\left(\begin{smallmatrix} \cos t \\ \sin t \end{smallmatrix}\right)$ だから, $\left(\begin{smallmatrix} \cos t \\ \sin t \end{smallmatrix}\right)$ で f は最大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる.

以上の結果をまとめると, $a<0$ の場合, f は $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{smallmatrix}\right)$ で 極大値 $\dfrac{1}{e}$ をとり, $\left(\begin{smallmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で極小値 $\dfrac{a}{e}$ をとる.

$a=0$ の場合, f は $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{smallmatrix}\right)$ で極大値 $\dfrac{1}{e}$ をとり, 任意の実数 t に対して $\left(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で最小値 0 をとる.

$0<a<1$ の場合, f は $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で極小値 0 をとり, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{smallmatrix}\right)$ で極大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる.

$a=1$ の場合, f は $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で極小値 0 をとり, 任意の実数 t に対して $\left(\begin{smallmatrix} \cos t \\ \sin t \end{smallmatrix}\right)$ で最大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる.

$a>1$ の場合, f は $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で極小値 0 をとり, $\left(\begin{smallmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で極大値 $\dfrac{a}{e}$ をとる.

(9) $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-6by+3\left(b^4-a\right)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-6bx+6y$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases} x^2-2by+b^4-a=0 & \cdots(i) \\ y=bx & \cdots(ii) \end{cases}$$

(ii) を (i) に代入すれば $\left(x-b^2\right)^2-a=0$ だから $a<0$ ならば (i) と (ii) を満たす実数 x,y は存在しない. $a\geqq$ の場合は, $x=b^2\pm\sqrt{a}$ である. 従って, $\left(\begin{smallmatrix} b^2-\sqrt{a} \\ b^3-b\sqrt{a} \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} b^2+\sqrt{a} \\ b^3+b\sqrt{a} \end{smallmatrix}\right)$ で f は極値をとる可能性がある.

$a=0$ の場合, $f\left(\begin{smallmatrix} t+b^2 \\ bt+b^3 \end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix} b^2 \\ b^3 \end{smallmatrix}\right)=t^3$ だから, 点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ が $\left(\begin{smallmatrix} b^2 \\ b^3 \end{smallmatrix}\right)$ を通り, 傾きが b の直線上を動くとき, $\left(\begin{smallmatrix} b^2 \\ b^3 \end{smallmatrix}\right)$ の前後で $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix} a^2 \\ a^3 \end{smallmatrix}\right)$ の符号は変わる. 従って, f は $\left(\begin{smallmatrix} b^2 \\ b^3 \end{smallmatrix}\right)$ で極値をとらない.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6b$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$ より $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^2 = 36\left(x - b^2\right)$ だから $a > 0$ の場合, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} b^2-\sqrt{a} \\ b^3-b\sqrt{a} \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} b^2-\sqrt{a} \\ b^3-b\sqrt{a} \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} b^2-\sqrt{a} \\ b^3-b\sqrt{a} \end{pmatrix}\right)^2 = -36\sqrt{a} < 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} b^2+\sqrt{a} \\ b^3+b\sqrt{a} \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} b^2+\sqrt{a} \\ b^3+b\sqrt{a} \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} b^2+\sqrt{a} \\ b^3+b\sqrt{a} \end{pmatrix}\right)^2 = 36\sqrt{a} > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} b^2+\sqrt{a} \\ b^3+b\sqrt{a} \end{pmatrix} = 6\left(b^2+\sqrt{a}\right) > 0$ だから f は $\begin{pmatrix} b^2+\sqrt{a} \\ b^3+b\sqrt{a} \end{pmatrix}$ で極小値 $\left(b^2 - 2\sqrt{a}\right)\left(b^2+\sqrt{a}\right)^2$ をとり, $\begin{pmatrix} b^2-\sqrt{a} \\ b^3-b\sqrt{a} \end{pmatrix}$ では極値をとらない.

(10) $\frac{\partial f}{\partial x} = 9ax^2 + by^2 + y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2bxy + x$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} 9ax^2 + by^2 + y = 0 & \cdots (i) \\ x(2by+1) = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(ii) より $x = 0$ または $y = -\frac{1}{2b}$ ($b \neq 0$ の場合) である. $x = 0$ ならば (i) より $y = 0$ または $y = -\frac{1}{b}$ ($b \neq 0$ の場合) である. $y = -\frac{1}{2b}$ ならば (i) より $9ax^2 = \frac{1}{4b}$ だから $a = 0$ または $ab < 0$ ならば (i) を満たす実数 x は存在せず, $ab > 0$ ならば $x = \pm\frac{1}{6\sqrt{ab}}$ である. 従って, $ab > 0$ ならば $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{b} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \pm\frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性があり, $b \neq 0$ かつ $ab \leqq 0$ ならば $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{b} \end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性があり, $b = 0$ ならば $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のみで f は極値をとる可能性がある.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 9ax$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2by + 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2bx$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^2 = 18abx^2 - (2by+1)^2$ である.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{b} \end{pmatrix}$ ならば $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^2 = -1 < 0$ だから f は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{b} \end{pmatrix}$ では極値をとらない. $ab > 0$ の場合, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \pm\frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} \pm\frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} \pm\frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}\right)^2 = \frac{1}{2} > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \pm\frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix} = \pm\frac{3a}{2\sqrt{ab}}$ (複号同順) である. 故に $a > 0$ ならば $\begin{pmatrix} \frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}$ において f は極小値 $-\frac{1}{36b\sqrt{ab}}$ をとり, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}$ において f は極大値 $\frac{1}{36b\sqrt{ab}}$ をとり, $a < 0$ ならば $\begin{pmatrix} \frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}$ において f は極大値 $-\frac{1}{36b\sqrt{ab}}$ をとり, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}$ において f は極小値 $\frac{1}{36b\sqrt{ab}}$ をとる. 以上から $ab \leqq 0$ ならば f は極値をとらず, $a > 0$ かつ $b > 0$ ならば $\begin{pmatrix} \frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}$ において f は極小値 $-\frac{1}{36b\sqrt{ab}}$ をとり, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}$ において f は極大値 $\frac{1}{36b\sqrt{ab}}$ をとり, $a < 0$ かつ $b < 0$ ならば $\begin{pmatrix} \frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}$ において f は極大値 $-\frac{1}{36b\sqrt{ab}}$ をとり, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}$ において f は極小値 $\frac{1}{36b\sqrt{ab}}$ をとる.

(11) $a = 0$ ならば, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3b^2y$ だから, $b \neq 0$ の場合は f は極値をとらず, $b = 0$ の場合は f はつねに値が 0 である. 以下 $a \neq 0$ の場合を考える. $\frac{\partial f}{\partial x} = 24ax^2 + 24a^2y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 24a^2x + 48ay + 3(b^2 - a^4)$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} x^2 + ay = 0 & \cdots (i) \\ 8a^2x + 16ay + b^2 - a^4 = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(ii) から $y = -\frac{ax}{2} - \frac{b^2-a^4}{16a}$ だから, (i) に代入して $2x^2 - a^2x - \frac{b^2-a^4}{8} = 0$ を得るため, $(4x - a^2 - b)(4x - a^2 + b) = 0$, 従って $x = \frac{a^2 \pm |b|}{4}$ である. 故に $\begin{pmatrix} \frac{a^2+|b|}{4} \\ -\frac{(a^2+|b|)^2}{16a} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{a^2-|b|}{4} \\ -\frac{(a^2-|b|)^2}{16a} \end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性がある. $b \neq 0$ の場合,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 48ax$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 24a^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 48a$ より $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^2 = 24^2a^2(4x - a^2)$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{a^2+|b|}{4} \\ -\frac{(a^2+|b|)^2}{16a} \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} \frac{a^2+|b|}{4} \\ -\frac{(a^2+|b|)^2}{16a} \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} \frac{a^2+|b|}{4} \\ -\frac{(a^2+|b|)^2}{16a} \end{pmatrix}\right)^2 = 24^2a^2|b| > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{a^2+|b|}{4} \\ -\frac{(a^2+|b|)^2}{16a} \end{pmatrix} = 12a(a^2 + |b|)$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{a^2-|b|}{4} \\ -\frac{(a^2-|b|)^2}{16a} \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} \frac{a^2-|b|}{4} \\ -\frac{(a^2-|b|)^2}{16a} \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} \frac{a^2-|b|}{4} \\ -\frac{(a^2-|b|)^2}{16a} \end{pmatrix}\right)^2 = -24^2a^2|b| < 0$ となるため, $\begin{pmatrix} \frac{a^2+|b|}{4} \\ -\frac{(a^2+|b|)^2}{16a} \end{pmatrix}$ において f は極値 $\frac{(a^2+|b|)^3(a^2-3|b|)}{32a}$ をとり, この値は $a > 0$ ならば極小値であり, $a < 0$ ならば極大値である. また, f は $\begin{pmatrix} \frac{a^2-|b|}{4} \\ -\frac{(a^2-|b|)^2}{16a} \end{pmatrix}$ で極値をとらない. $b = 0$ の場合は $f\begin{pmatrix} x \\ -\frac{ax}{2} + \frac{a^3}{16} \end{pmatrix} = \frac{a}{8}(4x - a^2)^3 + \frac{a^7}{32}$ だから, 点 $\begin{pmatrix} \frac{a^2}{4} \\ -\frac{a^3}{16} \end{pmatrix}$ を通り, 傾きが $-\frac{a}{2}$ である直線上を点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が動けば $x = \frac{a^2}{4}$ の前後で $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{a^7}{32}$ の符号が変わるため, f は $\begin{pmatrix} \frac{a^2}{4} \\ -\frac{a^3}{16} \end{pmatrix}$ で極値をとらない.

(12) $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6axy - 6cx$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -3ax^2 + 6b^2y^2 - 6b(\alpha+\beta)y + 6\alpha\beta$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} x(x - ay - c) = 0 & \cdots (i) \\ -ax^2 + 2b^2y^2 - 2b(\alpha+\beta)y + 2\alpha\beta = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(i) から $x=0$ または $x=ay+c$. $x=0$ の場合, (ii) より $(by-\alpha)(by-\beta)=0$ だから $b\neq 0$ ならば $y=\frac{\alpha}{b}$ または $y=\frac{\beta}{b}$. $b=0$ かつ $\alpha\beta\neq 0$ ならば (ii) を満たす y は存在せず, $b=\alpha\beta=0$ ならば任意の y は (ii) を満たす. $x=ay+c$ の場合, (ii) より $(2b^2-a^3)y^2-2(a^2c+\alpha b+\beta b)y-ac^2+2\alpha\beta=0$ である. $a^3\neq 2b^2$ のとき $D=b^2(\alpha-\beta)^2+2a(a\alpha+bc)(a\beta+bc)$ とおくと, $D<0$ ならば (ii) を満たす実数 y は存在せず, $D\geqq 0$ ならば $y=\frac{b(\alpha+\beta)+a^2c\pm\sqrt{D}}{2b^2-a^3}$ である. $a^3=2b^2$ かつ $a^2c\neq -b(\alpha+\beta)$ のとき $y=\frac{2\alpha\beta-ac^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)}$ であり, $a^3=2b^2$ かつ $a^2c=-b(\alpha+\beta)$ かつ $ac^2\neq 2\alpha\beta$ ならば (ii) を満たす y は存在せず, $a^3=2b^2$ かつ $a^2c=-b(\alpha+\beta)=2\alpha\beta$ ならば任意の y は (ii) を満たす. 故に f は $b\neq 0$ ならば $\begin{pmatrix}0\\ \frac{\alpha}{b}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\ \frac{\beta}{b}\end{pmatrix}$ で極値をとる可能性があり, $b=\alpha\beta=0$ ならば任意の実数 p に対して f は $\begin{pmatrix}0\\ p\end{pmatrix}$ で極値をとる可能性がある. また $a^3\neq 2b^2$ かつ $D\geqq 0$ ならば $\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c\pm a\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\\ \frac{b(\alpha+\beta)+a^2c\pm\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\end{pmatrix}$ で極値をとる可能性があり, $a^3=2b^2$ かつ $a^2c\neq -b(\alpha+\beta)$ ならば $\begin{pmatrix}\frac{2a\alpha\beta+2bc(\alpha+\beta)+a^2c^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)}\\ \frac{2\alpha\beta-ac^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)}\end{pmatrix}$ で極値をとる可能性がある. $a^3=2b^2$ かつ $a^2c=-b(\alpha+\beta)$ かつ $ac^2=2\alpha\beta$ ならば任意の実数 p に対して f は $\begin{pmatrix}ap+c\\ p\end{pmatrix}$ で極値をとる可能性がある. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6(2x-ay-c)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-6ax$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6b(2by-\alpha-\beta)$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)^2=36((2x-ay-c)(2b^2y-b(\alpha+\beta))-a^2x^2)$.

$b\neq 0$ の場合, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}0\\ \frac{\alpha}{b}\end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix}0\\ \frac{\alpha}{b}\end{pmatrix}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}0\\ \frac{\alpha}{b}\end{pmatrix}\right)^2=36(a\alpha+bc)(\beta-\alpha)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}0\\ \frac{\alpha}{b}\end{pmatrix}=6\left(-\frac{a\alpha}{b}-c\right)$ より $(a\alpha+bc)(\beta-\alpha)>0$ かつ $b(a\alpha+bc)<0$ ならば f は $\begin{pmatrix}0\\ \frac{\alpha}{b}\end{pmatrix}$ において極小値 $\frac{3\alpha^2\beta-\alpha^3}{b}$ をとり, $(a\alpha+bc)(\beta-\alpha)>0$ かつ $b(a\alpha+bc)>0$ ならば f は $\begin{pmatrix}0\\ \frac{\alpha}{b}\end{pmatrix}$ において極大値 $\frac{3\alpha^2\beta-\alpha^3}{b}$ をとる. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}0\\ \frac{\beta}{b}\end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix}0\\ \frac{\beta}{b}\end{pmatrix}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}0\\ \frac{\beta}{b}\end{pmatrix}\right)^2=36(a\beta+bc)(\alpha-\beta)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}0\\ \frac{\beta}{b}\end{pmatrix}=6\left(-\frac{a\beta}{b}-c\right)$ より $(a\beta+bc)(\alpha-\beta)>0$ かつ $b(a\beta+bc)<0$ ならば f は $\begin{pmatrix}0\\ \frac{\alpha}{b}\end{pmatrix}$ において極小値 $\frac{3\alpha\beta^2-\beta^3}{b}$ をとり, $(a\beta+bc)(\alpha-\beta)>0$ かつ $b(a\beta+bc)>0$ ならば f は $\begin{pmatrix}0\\ \frac{\alpha}{b}\end{pmatrix}$ において極大値 $\frac{3\alpha\beta^2-\beta^3}{b}$ をとる. $\alpha=\beta$ のとき, $f\begin{pmatrix}0\\ \frac{\alpha}{b}+t\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}0\\ \frac{\alpha}{b}\end{pmatrix}=2b^2t^3$ だから, $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix}0\\ \frac{\alpha}{b}\end{pmatrix}$ を通り, 方向ベクトルが $\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ である直線上を動くとき, $\begin{pmatrix}0\\ \frac{\alpha}{b}\end{pmatrix}$ の前後で $f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}0\\ \frac{\alpha}{b}\end{pmatrix}$ の符号が変わるため, f は $\begin{pmatrix}0\\ \frac{\alpha}{b}\end{pmatrix}$ で極値をとらない. $a\alpha+bc=0$ のとき, $f\begin{pmatrix}t\\ \frac{\alpha}{b}\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}0\\ \frac{\alpha}{b}\end{pmatrix}=2t^3$ だから, $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix}0\\ \frac{\alpha}{b}\end{pmatrix}$ を通り, 方向ベクトルが $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ である直線上を動くとき, $\begin{pmatrix}0\\ \frac{\alpha}{b}\end{pmatrix}$ の前後で $f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}0\\ \frac{\alpha}{b}\end{pmatrix}$ の符号が変わるため, f は $\begin{pmatrix}0\\ \frac{\alpha}{b}\end{pmatrix}$ で極値をとらない. $a\beta+bc=0$ のとき, $f\begin{pmatrix}t\\ \frac{\beta}{b}\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}0\\ \frac{\beta}{b}\end{pmatrix}=2t^3$ だから, $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix}0\\ \frac{\beta}{b}\end{pmatrix}$ を通り, 方向ベクトルが $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ である直線上を動くとき, $\begin{pmatrix}0\\ \frac{\beta}{b}\end{pmatrix}$ の前後で $f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}0\\ \frac{\beta}{b}\end{pmatrix}$ の符号が変わるため, f は $\begin{pmatrix}0\\ \frac{\beta}{b}\end{pmatrix}$ で極値をとらない.
$b=\alpha\beta=0$ の場合, $f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=2x^3-3ax^2y-3cx^2$ だから, f は問題 4.(9) の f の a を a, b を c としたものである.
$a^3\neq 2b^2$ かつ $D>0$ の場合, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c+a\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\\ \frac{b(\alpha+\beta)+a^2c+\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c+a\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\\ \frac{b(\alpha+\beta)+a^2c+\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\end{pmatrix}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c+a\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\\ \frac{b(\alpha+\beta)+a^2c+\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\end{pmatrix}\right)^2=\frac{36\sqrt{D}\left(ab(\alpha+\beta)+2b^2c+a\sqrt{D}\right)}{2b^2-a^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c+a\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\\ \frac{b(\alpha+\beta)+a^2c+\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\end{pmatrix}=\frac{6\left(ab(\alpha+\beta)+2b^2c+a\sqrt{D}\right)}{2b^2-a^3}$ だから $ab(\alpha+\beta)+2b^2c+a\sqrt{D}$ が $2b^2-a^3$ と同符号ならば f は $\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c+a\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\\ \frac{b(\alpha+\beta)+a^2c+\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\end{pmatrix}$ において極小値

$$\frac{2\alpha\beta(b(\alpha+\beta)+a^2c)-c^2(ab(\alpha+\beta)+2b^2c)}{2b^2-a^3}-\frac{2D\left(b(\alpha+\beta)+a^2c+\sqrt{D}\right)}{(2b^2-a^3)^2}$$

をとり, $ab(\alpha+\beta)+2b^2c+a\sqrt{D}$ が $2b^2-a^3$ と異符号ならば f は $\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c+a\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\\ \frac{b(\alpha+\beta)+a^2c+\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\end{pmatrix}$ において極値をとらない. また, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c-a\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\\ \frac{b(\alpha+\beta)+a^2c-\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c-a\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\\ \frac{b(\alpha+\beta)+a^2c-\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\end{pmatrix}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c-a\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\\ \frac{b(\alpha+\beta)+a^2c-\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\end{pmatrix}\right)^2=-\frac{36\sqrt{D}\left(ab(\alpha+\beta)+2b^2c-a\sqrt{D}\right)}{2b^2-a^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c-a\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\\ \frac{b(\alpha+\beta)+a^2c-\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\end{pmatrix}=\frac{6\left(ab(\alpha+\beta)+2b^2c-a\sqrt{D}\right)}{2b^2-a^3}$ だから $ab(\alpha+\beta)+2b^2c-a\sqrt{D}$ が $2b^2-a^3$ と異符号ならば f は $\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c-a\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\\ \frac{b(\alpha+\beta)+a^2c-\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\end{pmatrix}$ において極大値

$$\frac{2\alpha\beta(b(\alpha+\beta)+a^2c)-c^2(ab(\alpha+\beta)+2b^2c)}{2b^2-a^3}-\frac{2D\left(b(\alpha+\beta)+a^2c-\sqrt{D}\right)}{(2b^2-a^3)^2}$$

をとり, $ab(\alpha+\beta)+2b^2c-a\sqrt{D}$ が $2b^2-a^3$ と同符号ならば f は $\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c-a\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\\\frac{b(\alpha+\beta)+a^2c-\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\end{pmatrix}$ において極値をとらない.
$ab(\alpha+\beta)+2b^2c+a\sqrt{D}=0$ かつ $a\neq 0$ ならば $\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c+a\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\\\frac{b(\alpha+\beta)+a^2c+\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{c}{a}\end{pmatrix}$ が成り立ち, $ab(\alpha+\beta)+2b^2c-a\sqrt{D}=0$ かつ $a\neq 0$ ならば $\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c-a\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\\\frac{b(\alpha+\beta)+a^2c-\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{c}{a}\end{pmatrix}$ が成り立つ. 一方, $f\begin{pmatrix}t\\-\frac{c}{a}\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}0\\-\frac{c}{a}\end{pmatrix}=2t^3$ だから $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix}0\\-\frac{c}{a}\end{pmatrix}$ を通り, 方向ベクトルが $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ である直線上を動くとき, $\begin{pmatrix}0\\-\frac{c}{a}\end{pmatrix}$ の前後で $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}0\\-\frac{c}{a}\end{pmatrix}$ の符号が変わるため, f は $\begin{pmatrix}0\\-\frac{c}{a}\end{pmatrix}$ で極値をとらない. 従って, $ab(\alpha+\beta)+2b^2c\pm a\sqrt{D}=0$ かつ $a\neq 0$ ならば f は $\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c\pm a\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\\\frac{b(\alpha+\beta)+a^2c\pm\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\end{pmatrix}$ で極値をとらない. $a=c=0$ ならば $\sqrt{D}=|b(\alpha-\beta)|$ だから $\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c\pm a\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\\\frac{b(\alpha+\beta)+a^2c\pm\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}0\\\frac{\alpha}{b}\end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix}0\\\frac{\beta}{b}\end{pmatrix}$ に等しいが, $a\alpha+bc=a\beta+bc=0$ だから, 上の結果から f は $\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c\pm a\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\\\frac{b(\alpha+\beta)+a^2c\pm\sqrt{D}}{2b^2-a^3}\end{pmatrix}$ では極値をとらない.
$a^3\neq 2b^2$ かつ $D=0$ の場合, $f\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c}{2b^2-a^3}+at\\\frac{b(\alpha+\beta)+a^2c}{2b^2-a^3}+t\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c}{2b^2-a^3}\\\frac{b(\alpha+\beta)+a^2c}{2b^2-a^3}\end{pmatrix}=t^3(2b^2-a^3)$ だから $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c}{2b^2-a^3}\\\frac{b(\alpha+\beta)+a^2c}{2b^2-a^3}\end{pmatrix}$ を通り, 方向ベクトルが $\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}$ である直線上を動くとき, $\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c}{2b^2-a^3}\\\frac{b(\alpha+\beta)+a^2c}{2b^2-a^3}\end{pmatrix}$ の前後で $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c}{2b^2-a^3}\\\frac{b(\alpha+\beta)+a^2c}{2b^2-a^3}\end{pmatrix}$ の符号が変わるため, f は $\begin{pmatrix}\frac{ab(\alpha+\beta)+2b^2c}{2b^2-a^3}\\\frac{b(\alpha+\beta)+a^2c}{2b^2-a^3}\end{pmatrix}$ で極値をとらない.
$a^3=2b^2$ かつ $a^2c\neq -b(\alpha+\beta)$ の場合, $b=2k^3$ とおけば $a=2k^2>0$ だから
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{2a\alpha\beta+2bc(\alpha+\beta)+a^2c^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)}\\\frac{2\alpha\beta-ac^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)}\end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix}\frac{2a\alpha\beta+2bc(\alpha+\beta)+a^2c^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)}\\\frac{2\alpha\beta-ac^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)}\end{pmatrix}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}\frac{2a\alpha\beta+2bc(\alpha+\beta)+a^2c^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)}\\\frac{2\alpha\beta-ac^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)}\end{pmatrix}\right)^2=-72k^2(\alpha+kc)(\beta+kc)=-\frac{36(a\alpha+bc)(a\beta+bc)}{a}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{2a\alpha\beta+2bc(\alpha+\beta)+a^2c^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)}\\\frac{2\alpha\beta-ac^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)}\end{pmatrix}=\frac{6(\alpha+kc)(\beta+kc)}{k(\alpha+\beta+2kc)}=\frac{6(a\alpha+bc)(a\beta+bc)}{a(b(\alpha+\beta)+a^2c)}$ が得られる. $(a\alpha+bc)(a\beta+bc)<0$ かつ $b(\alpha+\beta)+a^2c<0$ ならば f は $\begin{pmatrix}\frac{2a\alpha\beta+2bc(\alpha+\beta)+a^2c^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)}\\\frac{2\alpha\beta-ac^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)}\end{pmatrix}$ において極小値 $\frac{12\alpha^2\beta^2-12ac^2\alpha\beta-4bc^3(\alpha+\beta)-a^2c^4}{4(b(\alpha+\beta)+a^2c)}$ をとり, $(a\alpha+bc)(a\beta+bc)<0$ かつ $b(\alpha+\beta)+a^2c>0$ ならば f は $\begin{pmatrix}\frac{2a\alpha\beta+2bc(\alpha+\beta)+a^2c^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)}\\\frac{2\alpha\beta-ac^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)}\end{pmatrix}$ において極大値 $\frac{12\alpha^2\beta^2-12ac^2\alpha\beta-4bc^3(\alpha+\beta)-a^2c^4}{4(b(\alpha+\beta)+a^2c)}$ をとる. $(a\alpha+bc)(a\beta+bc)=0$ ならば $2a\alpha\beta+2bc(\alpha+\beta)+a^2c^2=\frac{2(a\alpha+bc)(a\beta+bc)}{a}=0$ であり, $\frac{2\alpha\beta-ac^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)}=-\frac{c}{a}$ だから $\begin{pmatrix}\frac{2a\alpha\beta+2bc(\alpha+\beta)+a^2c^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)}\\\frac{2\alpha\beta-ac^2}{2(b(\alpha+\beta)+a^2c)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{c}{a}\end{pmatrix}$ が成り立つが, 上でみたように, f は $\begin{pmatrix}0\\-\frac{c}{a}\end{pmatrix}$ において極値をとらない.
$a^3=2b^2$ かつ $a^2c=-b(\alpha+\beta)$ かつ $ac^2=2\alpha\beta$ の場合, $f\begin{pmatrix}ap+c+s\\p+t\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}ap+c\\p\end{pmatrix}=(2s+at+3ap+3c)(s-at)^2$ が成り立つ. $ap+c\neq 0$ ならば $s^2+t^2<\frac{9(ap+c)^2}{(2+|a|)^2}$ を満たす s, t に対して $|2s+at|\leqq 2|s|+|a||t|<3|ap+c|$ だから $2s+at+3ap+3c$ は $ap+c$ と同符号である. 従って $ap+c>0$ ならば f は $\begin{pmatrix}ap+c\\p\end{pmatrix}$ において極小値 $p^3(a^2-a^3)-c^3$ をとり, $ap+c<0$ ならば f は $\begin{pmatrix}ap+c\\p\end{pmatrix}$ において極大値 $p^3(a^2-a^3)-c^3$ をとる. $a\neq 0$ かつ $p=-\frac{c}{a}$ ならば, 上でみたように f は $\begin{pmatrix}0\\-\frac{c}{a}\end{pmatrix}$ において極値をとらない. $a=c=0$ ならば $b=2\alpha\beta=0$ だから $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=2x^3$ となるため, f は極値をとらない.

(13) $a=\frac{1}{2}$ の場合, $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=y^3-\frac{3}{2}y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}=3y(y-1)$ より, t を任意の実数とするとき, $\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}$ で f は極大値 0 をとり, $\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$ で f は極小値 $-\frac{1}{2}$ をとる. 以下では $a\neq\frac{1}{2}$ の場合を考える.
$\frac{\partial f}{\partial x}=12(2a-1)y(2x+y-1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=6(2(2a-1)x^2+4(2a-1)xy+(3a-1)y^2-2(2a-1)x-(3a-1)y)$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases}y(2x+y-1)=0 & \cdots(i)\\2(2a-1)x^2+4(2a-1)xy+(3a-1)y^2-2(2a-1)x-(3a-1)y=0 & \cdots(ii)\end{cases}$$

(i) より $y=0$ または $y=1-2x$ である. $y=0$ の場合, (ii) より $2(2a-1)x^2-2(2a-1)=0$ だから $x=0$ または

$x=1$ である．$y=1-2x$ の場合, (ii) より $12x(x-a)=0$ となるため $x=0$ または $x=a$ である．従って f は $\binom{0}{0}$, $\binom{1}{0}$, $\binom{0}{1}$, $\binom{a}{1-2a}$ で極値をとる可能性がある．
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=24(2a-1)y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=12(2a-1)(2x+2y-1)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6(4(2a-1)x+2(3a-1)y-(3a-1))$ だから, x が 0 または 1 ならば $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{0}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{0}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{0}\right)^2=144(2a-1)^2<0$ となり, $\binom{0}{0}$, $\binom{1}{0}$ では f は極値をとらない．
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{1}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{0}{1}\right)^2=144a(2a-1)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{1}=24(2a-1)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{a}{1-2a}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{a}{1-2a}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{a}{1-2a}\right)^2=144a(2a-1)^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{a}{1-2a}=-24(2a-1)^2$ だから $a<0$ の場合, f は $\binom{0}{1}$ で極大値 $1-3a$ をとり, $\binom{a}{1-2a}$ では極値をとらない．$a=0$ の場合, $f\left(\binom{t}{1-2t}\right)-f\left(\binom{0}{1}\right)=-8t^3$ だから, 点 $\binom{x}{y}$ が直線 $y=1-2x$ 上を動くとき, この直線上の点 $\binom{0}{1}$ の前後で $f\left(\binom{x}{y}\right)-f\left(\binom{0}{1}\right)$ の符号が変わるため, f は $\binom{0}{1}$ で極値をとらない．$0<a<\frac{1}{2}$ の場合, f は $\binom{a}{1-2a}$ で極大値 $(a+1)(2a-1)^2$ をとり, $\binom{0}{1}$ では極値をとらない．$a>\frac{1}{2}$ の場合, f は $\binom{0}{1}$ で 極小値 $1-3a$ をとり, $\binom{a}{1-2a}$ で極大値 $(a+1)(2a-1)^2$ をとる．

(14) $\frac{\partial f}{\partial x}=4xy+2y^2-4x-6y+4$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2x^2+4xy+6(3a-2)y^2-6x-2(27a-20)y+4(9a-8)$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases}(y-1)(2x+y-2)=0 & \cdots(i)\\ x^2+2xy+3(3a-2)y^2-3x-(27a-20)y+2(9a-8)=0 & \cdots(ii)\end{cases}$$

(i) から $y=1$ または $y=2-2x$．$y=1$ の場合, (ii) より $x^2-x-2=0$ だから $x=-1$ または $x=2$．$y=2-2x$ の場合, (ii) より $(4a-3)x^2-(2a-1)x=0$ だから $x=0$ または $x=\frac{2a-1}{4a-3}$ ($a\neq\frac{3}{4}$ の場合)．従って, f は $\binom{-1}{1}$, $\binom{2}{1}$, $\binom{0}{2}$ で極値をとる可能性があり, さらに $a\neq\frac{3}{4}$ の場合は $\begin{pmatrix}\frac{2a-1}{4a-3}\\ \frac{4a-4}{4a-3}\end{pmatrix}$ で極値をとる可能性がある．
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4y-4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4x+4y-6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4x+12(3a-2)y-2(27a-20)$ だから
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2=8(y-1)(2x+6(3a-2)y-27a+20)-4(2x+2y-3)^2$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{-1}{1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{-1}{1}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{-1}{1}\right)^2=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{2}{1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{2}{1}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{2}{1}\right)^2=-36<0$ となるため f は $\binom{-1}{1}$, $\binom{2}{1}$ で極値をとらない．
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{0}{2}\right)^2=36(2a-1)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{2}=4>0$ より, $a<\frac{1}{2}$ ならば $\binom{0}{2}$ で f は極値をとらず, $a>\frac{1}{2}$ ならば極小値 $12a-16$ をとる．
$a\neq\frac{3}{4}$ の場合は $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{2a-1}{4a-3}\\ \frac{4a-4}{4a-3}\end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix}\frac{2a-1}{4a-3}\\ \frac{4a-4}{4a-3}\end{pmatrix}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}\frac{2a-1}{4a-3}\\ \frac{4a-4}{4a-3}\end{pmatrix}\right)^2=\frac{36(2a-1)}{4a-3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{2a-1}{4a-3}\\ \frac{4a-4}{4a-3}\end{pmatrix}=-\frac{4}{4a-3}$ より, $\frac{1}{2}<a<\frac{3}{4}$ ならば $\begin{pmatrix}\frac{2a-1}{4a-3}\\ \frac{4a-4}{4a-3}\end{pmatrix}$ で f は極値をとらず, $a<\frac{1}{2}$ ならば極小値 $\frac{240a^3-616a^2+528a-150}{(4a-3)^2}$ をとり, $a>\frac{3}{4}$ ならば極大値 $\frac{240a^3-616a^2+528a-150}{(4a-3)^2}$ をとる．
$a=\frac{1}{2}$ の場合, $f\left(\binom{t}{2-2t}\right)-f\left(\binom{0}{2}\right)=12t^3$ だから, 点 $\binom{x}{y}$ が直線 $y=2-2x$ 上を動くとき, この直線上の点 $\binom{0}{2}$ の前後で $f\left(\binom{x}{y}\right)-f\left(\binom{0}{2}\right)$ の符号が変わるため, f は $\binom{0}{2}$ で極値をとらない．
以上から, $a<\frac{1}{2}$ の場合は, $\begin{pmatrix}\frac{2a-1}{4a-3}\\ \frac{4a-4}{4a-3}\end{pmatrix}$ で f は極小値 $\frac{240a^3-616a^2+528a-150}{(4a-3)^2}$ をとり, $a=\frac{1}{2}$ の場合は f は極値をとらない．$\frac{1}{2}<a\leqq\frac{3}{4}$ の場合は, $\binom{0}{2}$ で極小値 $12a-16$ をとり, $a>\frac{3}{4}$ の場合は $\binom{0}{2}$ で f は極小値 $12a-16$ をとり, $\begin{pmatrix}\frac{2a-1}{4a-3}\\ \frac{4a-4}{4a-3}\end{pmatrix}$ で極大値 $\frac{240a^3-616a^2+528a-150}{(4a-3)^2}$ をとる．

(15) $\frac{\partial f}{\partial x}=24xy+12ay^2-12(\alpha+\beta)y$, $\frac{\partial f}{\partial y}=12x^2+24axy+3(3a^2-b^2+c^2)y^2-12(\alpha+\beta)x-6(2a(\alpha+\beta)-b(\alpha-\beta))y+12\alpha\beta$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases}y(2x+ay-\alpha-\beta)=0 & \cdots(i)\\ 4x^2+8axy+(3a^2-b^2+c^2)y^2-4(\alpha+\beta)x-2(2a(\alpha+\beta)-b(\alpha-\beta))y+4\alpha\beta=0 & \cdots(ii)\end{cases}$$

(i) から $y=0$ または $x=\frac{1}{2}(\alpha+\beta-ay)$．$y=0$ の場合, (ii) より $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ だから $x=\alpha$ または $x=\beta$．故に, f は $\binom{\alpha}{0}$, $\binom{\beta}{0}$ で極値をとる可能性がある．$x=\frac{1}{2}(\alpha+\beta-ay)$ の場合, $bc\geqq 0$ だから $b\neq c$ ならば $b+c$ と $b-c$ はともに 0 でないことに注意すれば, (ii) より $((b+c)y-\alpha+\beta)((b-c)y-\alpha+\beta)=0$ だから, $y=\frac{\alpha-\beta}{b+c}$ または $y=\frac{\alpha-\beta}{b-c}$ である．$b=c\neq 0$ ならば $y=\frac{\alpha-\beta}{2b}$ であり, $b=c=0$ かつ $\alpha\neq\beta$ ならば上式を満たす y は存在しな

い. また, $b=c=0$ かつ $\alpha=\beta$ ならば任意の y に対して上式が成り立つ. 以上から $b\neq c$ の場合は $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2(b+c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b+c} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2(b-c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b-c} \end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性があり, $b=c\neq 0$ ならば $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2b} \\ \frac{\alpha-\beta}{2b} \end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性がある. $b=c=0$ かつ $\alpha=\beta$ ならば任意の p に対して $\binom{\alpha-ap}{2p}$ で f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=24y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=24x+24ay-12(\alpha+\beta)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=24ax+6(3a^2-b^2+c^2)y-6(2a(\alpha+\beta)-b(\alpha-\beta))$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2=-144(4x^2+4axy+(a^2+b^2-c^2)y^2-4(\alpha+\beta)x-(2a(\alpha+\beta)+b(\alpha-\beta))y+(\alpha+\beta)^2$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{\alpha}{0}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{\alpha}{0}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{\alpha}{0}\right)^2=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{\beta}{0}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{\beta}{0}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{\beta}{0}\right)^2=-144(\alpha-\beta)^2$ だから, $\alpha\neq\beta$ ならば, f は $\binom{\alpha}{0}$, $\binom{\beta}{0}$ では極値をとらない. $\alpha=\beta$ かつ $b^2\neq c^2$ ならば $f\binom{\alpha+at}{-2t}-f\binom{\alpha}{0}=8t^3(b^3-c^3)$ だから, $\binom{x}{y}$ が $\binom{\alpha}{0}$ を通り, 方向ベクトルが $\binom{a}{-2}$ である直線上を動くとき, $\binom{\alpha}{0}$ の前後で $f\binom{x}{y}-f\binom{\alpha}{0}$ の符号が変わるため, f は $\binom{\alpha}{0}$ で極値をとらない. $\alpha=\beta$ かつ $b^2=c^2$ ならば $f\binom{\alpha-(a+1)t}{2t}-f\binom{\alpha}{0}=24t^3$ だから, $\binom{x}{y}$ が $\binom{\alpha}{0}$ を通り, 方向ベクトルが $\binom{-a-1}{2}$ である直線上を動くとき, $\binom{\alpha}{0}$ の前後で $f\binom{x}{y}-f\binom{\alpha}{0}$ の符号が変わるため, f は $\binom{\alpha}{0}$ で極値をとらない.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2(b+c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b+c} \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2(b+c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b+c} \end{pmatrix}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2(b+c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b+c} \end{pmatrix}\right)^2=\frac{144c(\alpha-\beta)^2}{b+c}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2(b+c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b+c} \end{pmatrix}=\frac{24(\alpha-\beta)}{b+c}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2(b-c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b-c} \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2(b-c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b-c} \end{pmatrix}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2(b-c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b-c} \end{pmatrix}\right)^2=-\frac{144c(\alpha-\beta)^2}{b-c}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2(b-c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b-c} \end{pmatrix}=\frac{24(\alpha-\beta)}{b-c}$
だから, $c(b+c)>0$ かつ $c(\alpha-\beta)>0$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2(b+c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b+c} \end{pmatrix}$ において極小値 $-\frac{(\alpha-\beta)^3(b+2c)}{(b+c)^2}$ をとり, $c(b+c)>0$ かつ $c(\alpha-\beta)<0$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2(b+c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b+c} \end{pmatrix}$ において極大値 $-\frac{(\alpha-\beta)^3(b+2c)}{(b+c)^2}$ をとる. $c(b+c)<0$ かつ $\alpha\neq\beta$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2(b+c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b+c} \end{pmatrix}$ において極値をとらない. また, $c(b-c)<0$ かつ $c(\alpha-\beta)<0$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2(b-c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b-c} \end{pmatrix}$ において極小値 $-\frac{(\alpha-\beta)^3(b-2c)}{(b-c)^2}$ をとり, $c(b-c)<0$ かつ $c(\alpha-\beta)>0$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2(b-c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b-c} \end{pmatrix}$ において極大値 $-\frac{(\alpha-\beta)^3(b-2c)}{(b-c)^2}$ をとる. $c(b-c)>0$ かつ $\alpha\neq\beta$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2(b-c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b-c} \end{pmatrix}$ において極値をとらない. $\alpha=\beta$ の場合は $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2(b+c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b+c} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2(b-c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b-c} \end{pmatrix}=\binom{\alpha}{0}$ となり, 上でみたように, f は $\binom{\alpha}{0}$ において極値をとらない. $b\neq c=0$ の場合, $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2(b+c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b+c} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2(b-c)} \\ \frac{\alpha-\beta}{b-c} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2b} \\ \frac{\alpha-\beta}{b} \end{pmatrix}$ であり, $f\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2b}+at \\ \frac{\alpha-\beta}{b}-2t \end{pmatrix}-f\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2b} \\ \frac{\alpha-\beta}{b} \end{pmatrix}=8b^2t^3$ だから, $\binom{x}{y}$ が $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2b} \\ \frac{\alpha-\beta}{b} \end{pmatrix}$ を通り, 方向ベクトルが $\binom{a}{-2}$ である直線上を動くとき, $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2b} \\ \frac{\alpha-\beta}{b} \end{pmatrix}$ の前後で $f\binom{x}{y}-f\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2b} \\ \frac{\alpha-\beta}{b} \end{pmatrix}$ の符号が変わるため, f は $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{a(\alpha-\beta)}{2b} \\ \frac{\alpha-\beta}{b} \end{pmatrix}$ で極値をとらない.

$b=c=0$ かつ $\alpha=\beta$ の場合, $f\binom{\alpha-ap+s}{2p+t}-f\binom{\alpha-ap}{2p}=3(2s+at)^2(t+2p)$ だから, $p\neq 0$ のとき, $s^2+t^2<4p^2$ ならば $|t|<|2p|$ であるため $t+2p$ は p と同符号である. 従って $p>0$ ならば f は $\binom{\alpha-ap}{2p}$ において極小値 0 をとり, $p<0$ ならば f は $\binom{\alpha-ap}{2p}$ において極大値 0 をとる. $p=0$ の場合は $\binom{\alpha-ap}{2p}=\binom{\alpha}{0}$ であり, 上でみたように, f は $\binom{\alpha}{0}$ において極値をとらない.

(16) $\frac{\partial f}{\partial x}=6(x^2+(a^2b-\alpha-\beta)x+aby+abc+\alpha\beta)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=6b(ax+y+c)$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases} x^2+(a^2b-\alpha-\beta)x+aby+abc+\alpha\beta=0 & \cdots(i) \\ ax+y+c=0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(i) から (ii) の両辺を ab 倍した式を引けば, $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ が得られるため, $x=\alpha$ または $x=\beta$ である. 従って, (ii) より $\binom{\alpha}{-a\alpha-c}$, $\begin{pmatrix}\beta \\ -a\beta-c\end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6(2x+a^2b-\alpha-\beta)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=6ab$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6b$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{x}{y}\right)^2=36b(2x-\alpha-\beta)$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{\alpha}{-a\alpha-c}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{\alpha}{-a\alpha-c}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{\alpha}{-a\alpha-c}\right)^2=36b(\alpha-\beta)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{\alpha}{-a\alpha-c}=36a^2b^2+36b(\alpha-\beta)$ より $b(\alpha-\beta)>0$ ならば $\binom{\alpha}{-a\alpha-c}$ で f は極小値 $-\alpha^3+3\alpha^2\beta-3bc^2$ をとり, $b(\alpha-\beta)<0$ ならば $\binom{\alpha}{-a\alpha-c}$ で f は極値をとらない.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\beta \\ -a\beta-c\end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix}\beta \\ -a\beta-c\end{pmatrix}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}\beta \\ -a\beta-c\end{pmatrix}\right)^2=36b(\beta-\alpha)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\beta \\ -a\beta-c\end{pmatrix}=36a^2b^2+36b(\beta-\alpha)$ より $b(\alpha-\beta)<0$ ならば $\begin{pmatrix}\beta \\ -a\beta-c\end{pmatrix}$ で f は極小値 $-\beta^3+3\alpha\beta^2-3bc^2$ をとり, $b(\alpha-\beta)>0$ ならば $\begin{pmatrix}\beta \\ -a\beta-c\end{pmatrix}$ で f は極値をとらない.

$\alpha=\beta$ の場合, $f\begin{pmatrix}\alpha+t\\ -a\alpha-c-at\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}\alpha\\ -a\alpha-c\end{pmatrix}=2t^3$ だから, $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix}\alpha\\ -a\alpha-c\end{pmatrix}$ を通り, 方向ベクトルが $\begin{pmatrix}1\\ -a\end{pmatrix}$ である直線上を動くとき, $\begin{pmatrix}\alpha\\ -a\alpha-c\end{pmatrix}$ の前後で $f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}\alpha\\ -a\alpha-c\end{pmatrix}$ の符号が変わるため, f は $\begin{pmatrix}\alpha\\ -a\alpha-c\end{pmatrix}$ で極値をとらない.

(17) $\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2-6a^2(b^2-c^2)^2y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-12a^2(b^2-c^2)^2xy+6a(d^2-2a^2(b^2-c^2)^2(b^2+c^2))y^2-12ad(b^2-c^2)y+6a(b^2-c^2)^2$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases}(x-a(b^2-c^2)y)(x+a(b^2-c^2)y)=0 & \cdots(i)\\ 2a(b^2-c^2)^2xy-(d^2-2a^2(b^2-c^2)^2(b^2+c^2))y^2+2d(b^2-c^2)y-(b^2-c^2)^2=0 & \cdots(ii)\end{cases}$$

(i) から $x=\pm a(b^2-c^2)y$. $x=a(b^2-c^2)y$ の場合, (ii) より

$$((d+2ab(b^2-c^2))y-b^2+c^2)((d-2ab(b^2-c^2))y-b^2+c^2)=0$$

だから $d\neq\pm 2ab(b^2-c^2)$ ならば $y=\frac{b^2-c^2}{d\pm 2ab(b^2-c^2)}$ であり, $d=\pm 2ab(b^2-c^2)$ ならば $y=\pm\frac{1}{4ab}$ (複号同順) である. $x=a(b^2-c^2)y$ の場合, (ii) より

$$((d+2ac(b^2-c^2))y-b^2+c^2)((d-2ac(b^2-c^2))y-b^2+c^2)=0$$

だから $d\neq\pm 2ac(b^2-c^2)$ ならば $y=\frac{b^2-c^2}{d\pm 2ac(b^2-c^2)}$ であり, $d=\pm 2ac(b^2-c^2)$ ならば $y=\pm\frac{1}{4ac}$ (複号同順) である. 従って, $d\neq -2ab(b^2-c^2)$ ならば $\begin{pmatrix}\frac{a(b^2-c^2)^2}{d+2ab(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d+2ab(b^2-c^2)}\end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性があり, $d\neq 2ab(b^2-c^2)$ ならば $\begin{pmatrix}\frac{a(b^2-c^2)^2}{d-2ab(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d-2ab(b^2-c^2)}\end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性がある. また, $d\neq -2ac(b^2-c^2)$ ならば $\begin{pmatrix}\frac{-a(b^2-c^2)^2}{d+2ac(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d+2ac(b^2-c^2)}\end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性があり, $d\neq 2ac(b^2-c^2)$ ならば $\begin{pmatrix}\frac{-a(b^2-c^2)^2}{d-2ac(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d-2ac(b^2-c^2)}\end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性がある.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-12a^2(b^2-c^2)^2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-12a(a(b^2-c^2)^2x-(d^2-2a^2(b^2-c^2)^2(b^2+c^2))y+d(b^2-c^2))$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)^2=144a(-x(a(b^2-c^2)^2x-(d^2-2a^2(b^2-c^2)^2(b^2+c^2))y+d(b^2-c^2))-a^3(b^2-c^2)^4y^2)$.

$d\neq -2ab(b^2-c^2)$ の場合, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{a(b^2-c^2)^2}{d+2ab(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d+2ab(b^2-c^2)}\end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix}\frac{a(b^2-c^2)^2}{d+2ab(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d+2ab(b^2-c^2)}\end{pmatrix}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}\frac{a(b^2-c^2)^2}{d+2ab(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d+2ab(b^2-c^2)}\end{pmatrix}\right)^2=-\frac{288a^3b(b^2-c^2)^4}{d+2ab(b^2-c^2)}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{a(b^2-c^2)^2}{d+2ab(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d+2ab(b^2-c^2)}\end{pmatrix}=\frac{12a(b^2-c^2)^2}{d+2ab(b^2-c^2)}$ だから, $a(d+2ab(b^2-c^2))<0$ かつ $b>0$ ならば f は $\begin{pmatrix}\frac{a(b^2-c^2)^2}{d+2ab(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d+2ab(b^2-c^2)}\end{pmatrix}$ において極大値をとり, $a(d+2ab(b^2-c^2))>0$ かつ $b<0$ ならば f は $\begin{pmatrix}\frac{a(b^2-c^2)^2}{d+2ab(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d+2ab(b^2-c^2)}\end{pmatrix}$ において極小値をとる. ここで $f\begin{pmatrix}\frac{a(b^2-c^2)^2}{d+2ab(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d+2ab(b^2-c^2)}\end{pmatrix}=\frac{2a(b^2-c^2)^3(d+4ab(b^2-c^2))}{(d+2ab(b^2-c^2))^2}$ である. $ab(d+2ab(b^2-c^2))>0$ ならば f は $\begin{pmatrix}\frac{a(b^2-c^2)^2}{d+2ab(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d+2ab(b^2-c^2)}\end{pmatrix}$ において極値をとらない.

$d\neq 2ab(b^2-c^2)$ の場合, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{a(b^2-c^2)^2}{d-2ab(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d-2ab(b^2-c^2)}\end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix}\frac{a(b^2-c^2)^2}{d-2ab(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d+2ab(b^2-c^2)}\end{pmatrix}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}\frac{a(b^2-c^2)^2}{d-2ab(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d-2ab(b^2-c^2)}\end{pmatrix}\right)^2=\frac{288a^3b(b^2-c^2)^4}{d-2ab(b^2-c^2)}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{a(b^2-c^2)^2}{d-2ab(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d-2ab(b^2-c^2)}\end{pmatrix}=\frac{12a(b^2-c^2)^2}{d-2ab(b^2-c^2)}$ だから, $a(d-2ab(b^2-c^2))<0$ かつ $b<0$ ならば f は $\begin{pmatrix}\frac{a(b^2-c^2)^2}{d-2ab(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d-2ab(b^2-c^2)}\end{pmatrix}$ において極大値をとり, $a(d-2ab(b^2-c^2))>0$ かつ $b>0$ ならば f は $\begin{pmatrix}\frac{a(b^2-c^2)^2}{d-2ab(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d-2ab(b^2-c^2)}\end{pmatrix}$ において極小値をとる. ここで $f\begin{pmatrix}\frac{a(b^2-c^2)^2}{d-2ab(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d-2ab(b^2-c^2)}\end{pmatrix}=\frac{2a(b^2-c^2)^3(d-4ab(b^2-c^2))}{(d-2ab(b^2-c^2))^2}$ である. $ab(d-2ab(b^2-c^2))<0$ ならば f は $\begin{pmatrix}\frac{a(b^2-c^2)^2}{d-2ab(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d-2ab(b^2-c^2)}\end{pmatrix}$ において極値をとらない.

$d\neq -2ac(b^2-c^2)$ の場合, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{-a(b^2-c^2)^2}{d+2ac(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d+2ac(b^2-c^2)}\end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix}\frac{-a(b^2-c^2)^2}{d+2ac(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d+2ac(b^2-c^2)}\end{pmatrix}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix}\frac{-a(b^2-c^2)^2}{d+2ac(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d+2ac(b^2-c^2)}\end{pmatrix}\right)^2=\frac{288a^3c(b^2-c^2)^4}{d+2ac(b^2-c^2)}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{-a(b^2-c^2)^2}{d+2ac(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d+2ac(b^2-c^2)}\end{pmatrix}=\frac{-12a(b^2-c^2)^2}{d+2ac(b^2-c^2)}$ だから, $a(d+2ac(b^2-c^2))>0$ かつ $c>0$ ならば f は $\begin{pmatrix}\frac{-a(b^2-c^2)^2}{d+2ab(b^2-c^2)}\\ \frac{b^2-c^2}{d+2ab(b^2-c^2)}\end{pmatrix}$ に

おいて極大値をとり, $a(d+2ac(b^2-c^2))<0$ かつ $c<0$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{-a(b^2-c^2)^2}{d+2ac(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d+2ac(b^2-c^2)} \end{pmatrix}$ において極小値をとる. ここで $f\begin{pmatrix} \frac{-a(b^2-c^2)^2}{d+2ac(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d+2ac(b^2-c^2)} \end{pmatrix} = \frac{2a(b^2-c^2)^3(d+4ac(b^2-c^2))}{(d+2ac(b^2-c^2))^2}$ である. $ac(d+2ac(b^2-c^2))<0$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{-a(b^2-c^2)^2}{d+2ac(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d+2ac(b^2-c^2)} \end{pmatrix}$ において極値をとらない.

$d \neq 2ac(b^2-c^2)$ の場合, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{-a(b^2-c^2)^2}{d-2ac(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d-2ac(b^2-c^2)} \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} \frac{-a(b^2-c^2)^2}{d-2ac(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d-2ac(b^2-c^2)} \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\begin{pmatrix} \frac{-a(b^2-c^2)^2}{d-2ac(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d-2ac(b^2-c^2)} \end{pmatrix}\right)^2 = -\frac{288a^3c(b^2-c^2)^4}{d-2ac(b^2-c^2)}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{-a(b^2-c^2)^2}{d-2ac(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d-2ac(b^2-c^2)} \end{pmatrix} = \frac{-12a(b^2-c^2)^2}{d-2ac(b^2-c^2)}$ だから, $a(d-2ac(b^2-c^2))>0$ かつ $c<0$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{-a(b^2-c^2)^2}{d+2ab(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d+2ab(b^2-c^2)} \end{pmatrix}$ において極大値をとり, $a(d-2ac(b^2-c^2))<0$ かつ $c>0$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{-a(b^2-c^2)^2}{d-2ac(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d-2ac(b^2-c^2)} \end{pmatrix}$ において極小値をとる. ここで $f\begin{pmatrix} \frac{-a(b^2-c^2)^2}{d-2ac(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d-2ac(b^2-c^2)} \end{pmatrix} = \frac{2a(b^2-c^2)^3(d+4ac(b^2-c^2))}{(d-2ac(b^2-c^2))^2}$ である. $ac(d-2ac(b^2-c^2))>0$ ならば f は $\begin{pmatrix} \frac{-a(b^2-c^2)^2}{d-2ac(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d-2ac(b^2-c^2)} \end{pmatrix}$ において極値をとらない.

$d \neq 0$ かつ $c=0$ ならば $\begin{pmatrix} \frac{-a(b^2-c^2)^2}{d\pm 2ac(b^2-c^2)} \\ \frac{b^2-c^2}{d\pm 2ac(b^2-c^2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{ab^4}{d} \\ \frac{b^2}{d} \end{pmatrix}$ であり, $f\begin{pmatrix} -\frac{ab^4}{d}-ab^2t \\ \frac{b^2}{d}+t \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} -\frac{ab^4}{d} \\ \frac{b^2}{d} \end{pmatrix} = 2ad^2t^3$ だから, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ が $\begin{pmatrix} -\frac{ab^4}{d} \\ \frac{b^2}{d} \end{pmatrix}$ を通り, 方向ベクトルが $\left(\begin{smallmatrix} -ab^2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ である直線上を動くとき, $\begin{pmatrix} -\frac{ab^4}{d} \\ \frac{b^2}{d} \end{pmatrix}$ の前後で $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - f\begin{pmatrix} -\frac{ab^4}{d} \\ \frac{b^2}{d} \end{pmatrix}$ の符号が変わるため, f は $\begin{pmatrix} -\frac{ab^4}{d} \\ \frac{b^2}{d} \end{pmatrix}$ で極値をとらない.

(18) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2ay^2-2x-8acy-2a(3\alpha^2-6(b+c)\alpha-9(b+c)^2+8c^2+d+r^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4axy-24a^2by^2-8acx+4a^2dy-8a^2(\alpha^3-3(2b+c)\alpha^2+(9b^2+12bc+3c^2-r^2)\alpha-9b^2c-18bc^2-c^3+cd+cr^2)$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} x = a(y^2-4cy-3\alpha^2+6(b+c)\alpha+9(b+c)^2-8c^2-d-r^2) \\ xy-6aby^2-2cx+ady-2a(\alpha^3-3(2b+c)\alpha^2+(9b^2+12bc+3c^2-r^2)\alpha-9b^2c-18bc^2-c^3+cd+cr^2) = 0 \end{cases}$$

1 つ目の式を 2 つ目の式に代入して左辺を因数分解すれば $a(y-2\alpha)(y-3b-3c+\alpha-r)(y-3b-3c+\alpha+r)=0$ が得られるため, $y=2\alpha, 3b+3c-\alpha\pm r$ だから $\left(\begin{smallmatrix} -a(2\alpha^2-4c\alpha-18b^2-24bc+2c^2+d\pm 2r(\alpha-3b-c)) \\ 3b+3c-\alpha\pm r \end{smallmatrix}\right)$ (複号同順) と $\left(\begin{smallmatrix} a(\alpha^2+2(3b-c)\alpha+9b^2+18bc+c^2-d-r^2) \\ 2\alpha \end{smallmatrix}\right)$ で f は極値をとる可能性がある.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 4a(y-2c)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4a(x-12aby+ad)$ だから, 任意の $\left(\begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2$ に対して $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix}\right) < 0$ であり, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right)^2 = -8a(2ay^2-4a(3b+2c)y+x+8ac^2+ad)$.

ここで, $\boldsymbol{p}_0 = \left(\begin{smallmatrix} a(\alpha^2+2(3b-c)\alpha+9b^2+18bc+c^2-d-r^2) \\ 2\alpha \end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{p}_1 = \left(\begin{smallmatrix} -a(2\alpha^2-4c\alpha-18b^2-24bc+2c^2+d+2r(\alpha-3b-c)) \\ 3b+3c-\alpha+r \end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{p}_2 = \left(\begin{smallmatrix} -a(2\alpha^2-4c\alpha-18b^2-24bc+2c^2+d-2r(\alpha-3b-c)) \\ 3b+3c-\alpha-r \end{smallmatrix}\right)$ とおけば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{p}_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{p}_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\boldsymbol{p}_0)\right)^2 &= 8a^2(r-3b-3c+3\alpha)(r+3b+3c-3\alpha) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{p}_1)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{p}_1) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\boldsymbol{p}_1)\right)^2 &= -16a^2r(r+3b+3c-3\alpha) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{p}_2)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{p}_2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\boldsymbol{p}_2)\right)^2 &= -16a^2r(r-3b-3c+3\alpha) \end{aligned}$$

が成り立ち, $r=0$ ならば $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2$ であることに注意する.

$|r| > 3|b+c-\alpha|$ ならば f は $\boldsymbol{p}_0$ で極大値 $-a^2(15\alpha^4-44(b+c)\alpha^3+(90b^2+180bc+42c^2-6d-14r^2)\alpha^2-12(b+c)(9b^2+18bc+c^2-d-r^2)\alpha-(9b^2+18bc+c^2-d-r^2)^2)$ をとり, $|r| < 3|b+c-\alpha|$ ならば f は $\boldsymbol{p}_0$ で極値をとらない. $\alpha \neq b+c$ かつ $r = \pm 3(b+c-\alpha)$ の場合, $\boldsymbol{v}_0 = \left(\begin{smallmatrix} 4a(\alpha-c) \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ とおけば $f(\boldsymbol{p}_0+t\boldsymbol{v}_0) - f(\boldsymbol{p}_0) = 8a^2t^3(\alpha-b-c)$ だから, 点 $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{p}_0$ を通り, 方向ベクトルが $\boldsymbol{v}_0$ である直線上を動くとき, $\boldsymbol{p}_0$ の前後で $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}_0)$ の符号が変わるため, f は $\boldsymbol{p}_0$ で極値をとらない. $\alpha = b+c$ かつ $r=0$ の場合, $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{p}_0 + \left(\begin{smallmatrix} 4abt+t^3 \\ t \end{smallmatrix}\right)$ によって写像 $\boldsymbol{v}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ を定義する. $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{p}_0$ であり, $f(\boldsymbol{v}(t)) - f(\boldsymbol{p}_0) = t^5(2a-t)$ だから, 点 $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{v}$ でパラメータ表示される曲線上を動きながら $\boldsymbol{p}_0$ を通過する前後で $f(\boldsymbol{v}(t)) - f(\boldsymbol{p}_0)$ の符号がかわるため, f は $\boldsymbol{p}_0$ で極値をとらない.

$r(r+3b+3c-3\alpha)<0$ ならば f は $\boldsymbol{p}_1$ で極大値 $a^2(12\alpha^4-64(b+c)\alpha^3+(72b^2+144bc+120c^2-4r^2+6d)\alpha^2-12(b+c)(8c^2+d-2r^2)\alpha+108b^4+432b^3c+504b^2c^2+144bc^3+28c^4-4r^2(3b+c)(3b+5c)-2d(9b^2+18bc+c^2-r^2)+d^2+8r^3(\alpha-b-c))$ をとり, $r(r+3b+3c-3\alpha)>0$ ならば f は $\boldsymbol{p}_1$ で極値をとらない. $\alpha\neq b+c$ かつ $r=-3(b+c-\alpha)$ の場合, $\boldsymbol{v}_0=\left(\begin{smallmatrix}4a(\alpha-c)\\1\end{smallmatrix}\right)$ とおけば $f(\boldsymbol{p}_1+t\boldsymbol{v}_0)-f(\boldsymbol{p}_1)=8a^2t^3(\alpha-b-c)$ だから, 点 $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{p}_1$ を通り, 方向ベクトルが $\boldsymbol{v}_0$ である直線上を動くとき, $\boldsymbol{p}_1$ の前後で $f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p}_1)$ の符号が変わるため, f は $\boldsymbol{p}_1$ で極値をとらない. $\alpha\neq b+c$ かつ $r=0$ の場合, $\boldsymbol{v}_1=\left(\begin{smallmatrix}2a(c+3b-\alpha)\\1\end{smallmatrix}\right)$ とおけば $f(\boldsymbol{p}_1+t\boldsymbol{v}_1)-f(\boldsymbol{p}_1)=-4a^2t^3(\alpha-b-c)$ だから, 点 $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{p}_1$ を通り, 方向ベクトルが $\boldsymbol{v}_1$ である直線上を動くとき, $\boldsymbol{p}_1$ の前後で $f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p}_1)$ の符号が変わるため, f は $\boldsymbol{p}_1$ で極値をとらない. $\alpha=b+c$ かつ $r=0$ の場合, $\boldsymbol{w}(t)=\boldsymbol{p}_1+\left(\begin{smallmatrix}4abt+t^3\\t\end{smallmatrix}\right)$ によって写像 $\boldsymbol{w}:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ を定義する. $\boldsymbol{w}(0)=\boldsymbol{p}_1$ であり, $f(\boldsymbol{w}(t))-f(\boldsymbol{p}_1)=t^5(2a-t)$ だから, 点 $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{w}$ でパラメータ表示される曲線上を動きながら $\boldsymbol{p}_1$ を通過する前後で $f(\boldsymbol{w}(t))-f(\boldsymbol{p}_1)$ の符号がかわるため, f は $\boldsymbol{p}_1$ で極値をとらない.
$r(r-3b-3c+3\alpha)<0$ ならば f は $\boldsymbol{p}_2$ で極大値 $a^2(12\alpha^4-64(b+c)\alpha^3+(72b^2+144bc+120c^2-4r^2+6d)\alpha^2-12(b+c)(8c^2+d-2r^2)\alpha+108b^4+432b^3c+504b^2c^2+144bc^3+28c^4-4r^2(3b+c)(3b+5c)-2d(9b^2+18bc+c^2-r^2)+d^2-8r^3(\alpha-b-c))$ をとり, $r(r-3b-3c+3\alpha)>0$ ならば f は $\boldsymbol{p}_2$ で極値をとらない. $\alpha\neq b+c$ かつ $r=3(b+c-\alpha)$ の場合, $\boldsymbol{v}_0=\left(\begin{smallmatrix}4a(\alpha-c)\\1\end{smallmatrix}\right)$ とおけば $f(\boldsymbol{p}_2+t\boldsymbol{v}_0)-f(\boldsymbol{p}_2)=8a^2t^3(\alpha-b-c)$ だから, 点 $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{p}_1$ を通り, 方向ベクトルが $\boldsymbol{v}_0$ である直線上を動くとき, $\boldsymbol{p}_2$ の前後で $f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p}_2)$ の符号が変わるため, f は $\boldsymbol{p}_2$ で極値をとらない.

6. f の偏導関数は

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{a(x^2+y^2+1)-2nx(ax+by+c)}{(x^2+y^2+1)^{n+1}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{b(x^2+y^2+1)-2ny(ax+by+c)}{(x^2+y^2+1)^{n+1}}$$

で与えられるため, 実数 x, y が $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ を満たせば

$$\begin{pmatrix}a & -2nx\\ b & -2ny\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^2+y^2+1\\ ax+by+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\ \cdots(i)$$

が成り立つ. $x^2+y^2+1\neq 0$ だから $\begin{pmatrix}a & -2nx\\ b & -2ny\end{pmatrix}$ は正則ではないため, $-ay+bx=0$ である. 従って $x=at$, $y=bt$ を満たす $t\in\boldsymbol{R}$ が存在して, (i) より t は次の等式を満たす.

$$(1-2n)(a^2+b^2)t^2-2cnt+1=0\ \cdots(ii)$$

$n=\frac{1}{2}$ の場合, $ct=1$ だから $c=0$ ならば $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ を満たす x, y は存在せず, $c\neq 0$ ならば $\left(\begin{smallmatrix}\frac{a}{c}\\ \frac{b}{c}\end{smallmatrix}\right)$ で f は極値をとる可能性がある.

$n\neq\frac{1}{2}$ の場合, $c^2n^2+(2n-1)(a^2+b^2)<0$ ならば (ii) を満たす実数 t は存在しないため, $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ を満たす x, y は存在しない. $c^2n^2+(2n-1)(a^2+b^2)=0$ ならば $c\neq 0$ であり, (ii) を満たす t は $\frac{1}{cn}$ だけで, $\left(\begin{smallmatrix}\frac{a}{cn}\\ \frac{b}{cn}\end{smallmatrix}\right)$ で f は極値をとる可能性がある. $c^2n^2+(2n-1)(a^2+b^2)>0$ ならば $\alpha=\frac{-cn-\sqrt{c^2n^2+(2n-1)(a^2+b^2)}}{(2n-1)(a^2+b^2)}$, $\beta=\frac{-cn+\sqrt{c^2n^2+(2n-1)(a^2+b^2)}}{(2n-1)(a^2+b^2)}$ とおけば, $\left(\begin{smallmatrix}a\alpha\\ b\alpha\end{smallmatrix}\right)$ と $\left(\begin{smallmatrix}a\beta\\ b\beta\end{smallmatrix}\right)$ で f は極値をとる可能性がある.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)&=\frac{2n((ax+by+c)((2n+1)x^2-y^2-1)-2ax(x^2+y^2+1))}{(x^2+y^2+1)^{n+2}}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)&=\frac{2n((2n+1)xy(ax+by+c)-bx(x^2+1)-ay(y^2+1)+cxy)}{(x^2+y^2+1)^{n+2}}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)&=\frac{2n((ax+by+c)(-x^2+(2n+1)y^2-1)-2by(x^2+y^2+1))}{(x^2+y^2+1)^{n+2}}\end{aligned}$$

だから

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} at \\ bt \end{smallmatrix}\right) &= \frac{2n((a^2+b^2)(a^2(2n-1)-b^2)t^3+c(a^2(2n+1)-b^2)t^2-(3a^2+b^2)t-c)}{((a^2+b^2)t^2+1)^{n+2}} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\begin{smallmatrix} at \\ bt \end{smallmatrix}\right) &= \frac{4abnt(n(a^2+b^2)t^2+c(n+1)t-1)}{((a^2+b^2)t^2+1)^{n+2}} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix} at \\ bt \end{smallmatrix}\right) &= \frac{2n((a^2+b^2)(-a^2+b^2(2n-1))t^3+c(-a^2+b^2(2n+1))t^2-(a^2+3b^2)t-c)}{((a^2+b^2)t^2+1)^{n+2}}
\end{aligned}
$$

が得られる. 従って $H\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right)^2$ とおけば, $H\left(\begin{smallmatrix} at \\ bt \end{smallmatrix}\right)$ は以下で与えられる.

$$
H\left(\begin{smallmatrix} at \\ bt \end{smallmatrix}\right) = \frac{-4n^2((a^2+b^2)t+c)((2n-1)(a^2+b^2)^2t^3+c(2n+1)(a^2+b^2)t^2-3(a^2+b^2)t-c)}{((a^2+b^2)t^2+1)^{2n+3}} \quad \cdots (iii)
$$

$n=\frac{1}{2}$, $c \neq 0$ の場合, (iii) より $H\left(\begin{smallmatrix} \frac{a}{c} \\ \frac{b}{c} \end{smallmatrix}\right) = \frac{c^6}{(a^2+b^2+c^2)^2} > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} \frac{a}{c} \\ \frac{b}{c} \end{smallmatrix}\right) = -\frac{c|c|(b^2+c^2)}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}$ だから, $c<0$ ならば f は $\left(\begin{smallmatrix} \frac{a}{c} \\ \frac{b}{c} \end{smallmatrix}\right)$ で極小値 $-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ をとり, $c>0$ ならば f は $\left(\begin{smallmatrix} \frac{a}{c} \\ \frac{b}{c} \end{smallmatrix}\right)$ で極大値 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ をとる.

$n \neq \frac{1}{2}$, $c^2n^2+(2n-1)(a^2+b^2)=0$ の場合, $\frac{a^2}{c^2n^2}+\frac{b^2}{c^2n^2}=\frac{1}{1-2n}$, $n<\frac{1}{2}$ であることに注意すれば

$$
\begin{aligned}
f\left(\begin{smallmatrix} \frac{a}{cn}+at \\ \frac{b}{cn}+bt \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} \frac{a}{cn} \\ \frac{b}{cn} \end{smallmatrix}\right) &= \frac{\frac{a^2}{cn}+\frac{b^2}{cn}+(a^2+b^2)t+c}{\left(\frac{a^2}{c^2n^2}+\frac{b^2}{c^2n^2}+\frac{2(a^2+b^2)t}{cn}+(a^2+b^2)t^2+1\right)^n} - \frac{\frac{a^2}{cn}+\frac{b^2}{cn}+c}{\left(\frac{a^2}{c^2n^2}+\frac{b^2}{c^2n^2}+1\right)^n} \\
&= \frac{c(1-2n)^{n-1}\left(1+\frac{cn^2t}{1-n}-\left(1+\frac{cnt}{1-n}+\frac{c^2n^2t^2}{2(1-n)}\right)^n\right)}{2^n(1-n)^{n-1}\left(1+\frac{cnt}{1-n}+\frac{c^2n^2t^2}{2(1-n)}\right)^n}
\end{aligned}
$$

が成り立つ. $\left|\frac{cnt}{1-n}+\frac{c^2n^2t^2}{2(1-n)}\right|<1$ のとき, すなわち $|1+cnt|<\sqrt{3-2n}$ を満たす t に対して

$$
\left(1+\frac{cnt}{1-n}+\frac{c^2n^2t^2}{2(1-n)}\right)^n = 1+\sum_{i=1}^{\infty}\binom{n}{i}\left(\frac{cnt}{1-n}+\frac{c^2n^2t^2}{2(1-n)}\right)^i
$$

と展開されるため, 上式より次の等式が得られる.

$$
\begin{aligned}
f\left(\begin{smallmatrix} \frac{a}{cn}+at \\ \frac{b}{cn}+bt \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} \frac{a}{cn} \\ \frac{b}{cn} \end{smallmatrix}\right) &= \frac{c(1-2n)^{n-1}\left(1+\frac{cn^2t}{1-n}-\left(1+\sum\limits_{i=1}^{\infty}\binom{n}{i}\left(\frac{cnt}{1-n}+\frac{c^2n^2t^2}{2(1-n)}\right)^i\right)\right)}{2^n(1-n)^{n-1}\left(1+\frac{cnt}{1-n}+\frac{c^2n^2t^2}{2(1-n)}\right)^n} \\
&= \frac{c^4n^4t^3(1-2n)^n\left(1+\frac{cnt(6(n-3)+cn(n-2)t(6+cnt))}{8(1-2n)}-\sum\limits_{i=4}^{\infty}\binom{n}{i}\frac{6c^{i-3}n^{i-4}t^{i-3}}{(1-2n)(1-n)^{i-2}}\left(1+\frac{cnt}{2}\right)^i\right)}{3\cdot 2^{n+1}(1-n)^{n+1}\left(1+\frac{cnt}{1-n}+\frac{c^2n^2t^2}{2(1-n)}\right)^n}
\end{aligned}
$$

$\varphi : \left(-\frac{\sqrt{3-2n}-1}{|cn|}, \frac{\sqrt{3-2n}-1}{|cn|}\right) \to \boldsymbol{R}$ を

$$
\varphi(t) = \frac{cnt(6(n-3)+cn(n-2)t(6+cnt))}{8(1-2n)} - \sum_{i=4}^{\infty}\binom{n}{i}\frac{6c^{i-3}n^{i-4}t^{i-3}}{(1-2n)(1-n)^{i-2}}\left(1+\frac{cnt}{2}\right)^i
$$

で定めれば, φ は連続関数で, $\varphi(0)=0$ である. 従って, $\rho>0$ で条件「$t \in (-\rho,\rho)$ ならば $|\varphi(t)|<1$」を満たすものが存在する. このとき, 上の結果から $t \in (-\rho,\rho)$ ならば

$$
f\left(\begin{smallmatrix} \frac{a}{cn}+at \\ \frac{b}{cn}+bt \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} \frac{a}{cn} \\ \frac{b}{cn} \end{smallmatrix}\right) = \frac{c^4n^4t^3(1-2n)^n(1+\varphi(t))}{3\cdot 2^{n+1}(1-n)^{n+1}\left(1+\frac{cnt}{1-n}+\frac{c^2n^2t^2}{2(1-n)}\right)^n}
$$

だから $t \in (-\rho,0)$ ならば $f\left(\begin{smallmatrix} \frac{a}{cn}+at \\ \frac{b}{cn}+bt \end{smallmatrix}\right) < f\left(\begin{smallmatrix} \frac{a}{cn} \\ \frac{b}{cn} \end{smallmatrix}\right)$ であり, $t \in (0,\rho)$ ならば $f\left(\begin{smallmatrix} \frac{a}{cn}+at \\ \frac{b}{cn}+bt \end{smallmatrix}\right) > f\left(\begin{smallmatrix} \frac{a}{cn} \\ \frac{b}{cn} \end{smallmatrix}\right)$ が成り立つ. 故に, $n \neq \frac{1}{2}$, $c^2n^2+(2n-1)(a^2+b^2)=0$ ならば f は $\left(\begin{smallmatrix} \frac{a}{cn} \\ \frac{b}{cn} \end{smallmatrix}\right)$ で極値をとらない.

$n \neq \frac{1}{2}$, $c^2n^2+(2n-1)(a^2+b^2)>0$ の場合, $R=\sqrt{c^2n^2+(2n-1)(a^2+b^2)}$ とおけば, $\alpha=\frac{1}{cn-R}$, $\beta=\frac{1}{R+cn}$ だから, (iii) より次の等式が得られる.

$$H\left(\begin{smallmatrix} a\alpha \\ b\alpha \end{smallmatrix}\right)=2R(R-cn)\left(\frac{(2n-1)(R-cn)}{2n(R-cn+c)}\right)^{2n+1}, \quad H\left(\begin{smallmatrix} a\beta \\ b\beta \end{smallmatrix}\right)=2R(R+cn)\left(\frac{(2n-1)(R+cn)}{2n(R+cn-c)}\right)^{2n+1}$$

$a^2+b^2=\frac{R^2-c^2n^2}{2n-1}$ より $(a^2+b^2)\alpha^2+1=\frac{2n(R-cn+c)}{(2n-1)(R-cn)}$, $(a^2+b^2)\beta^2+1=\frac{2n(R+cn-c)}{(2n-1)(R+cn)}$ が得られ, これらの左辺はともに正の実数だから, 上式より $H\left(\begin{smallmatrix} a\alpha \\ b\alpha \end{smallmatrix}\right)$, $H\left(\begin{smallmatrix} a\beta \\ b\beta \end{smallmatrix}\right)$ の符号はそれぞれ $R-cn$, $R+cn$ の符号に一致する. 従って, $n>\frac{1}{2}$ の場合は $R>|cn|$ だから $H\left(\begin{smallmatrix} a\alpha \\ b\alpha \end{smallmatrix}\right)$ と $H\left(\begin{smallmatrix} a\beta \\ b\beta \end{smallmatrix}\right)$ はともに正であり, $n<\frac{1}{2}$ の場合は $R<|cn|$ だから, $cn>0$ ならば $H\left(\begin{smallmatrix} a\alpha \\ b\alpha \end{smallmatrix}\right)<0$, $H\left(\begin{smallmatrix} a\beta \\ b\beta \end{smallmatrix}\right)>0$ で, $cn<0$ ならば $H\left(\begin{smallmatrix} a\alpha \\ b\alpha \end{smallmatrix}\right)>0$, $H\left(\begin{smallmatrix} a\beta \\ b\beta \end{smallmatrix}\right)<0$ である. $H\left(\begin{smallmatrix} at \\ bt \end{smallmatrix}\right)>0$ の場合, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} at \\ bt \end{smallmatrix}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix} at \\ bt \end{smallmatrix}\right)=H\left(\begin{smallmatrix} at \\ bt \end{smallmatrix}\right)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix} at \\ bt \end{smallmatrix}\right)\right)^2>0$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} at \\ bt \end{smallmatrix}\right)$ と $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} at \\ bt \end{smallmatrix}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix} at \\ bt \end{smallmatrix}\right)$ は同符号である.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} at \\ bt \end{smallmatrix}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix} at \\ bt \end{smallmatrix}\right)=\frac{4n((n-1)(a^2+b^2)^2t^3+cn(a^2+b^2)t^2-2(a^2+b^2)t-c)}{((a^2+b^2)t^2+1)^{n+2}}$$

だから, 次の等式が得られる.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} a\alpha \\ b\alpha \end{smallmatrix}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix} a\alpha \\ b\alpha \end{smallmatrix}\right)=\frac{4n(R-cn+c)((2n-1)R+n(R-cn+c))}{(2n-1)^2(R-cn)\left(\frac{2n(R-cn+c)}{(2n-1)(R-cn)}\right)^{n+2}} \cdots (iv)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} a\beta \\ b\beta \end{smallmatrix}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix} a\beta \\ b\beta \end{smallmatrix}\right)=\frac{4n(R+cn-c)((1-2n)R-n(R+cn-c))}{(2n-1)^2(R+cn)\left(\frac{2n(R+cn-c)}{(2n-1)(R+cn)}\right)^{n+2}} \cdots (v)$$

$n>\frac{1}{2}$ の場合, $c \geqq 0$ ならば $R>cn \geqq cn-c$ かつ $R>cn \geqq -cn+c$ であり, $c<0$ ならば $R>-cn>-cn+c$ かつ $R>-cn>cn-c$ だから, いずれにしても $R-cn+c>0$ かつ $R+cn-n>0$ である. 従って $(2n-1)R+n(R-cn+c)>0$, $(1-2n)R-n(R+cn-c)<0$ だから (iv) の右辺は正で, (v) 右辺は負になり, f は $\left(\begin{smallmatrix} a\alpha \\ b\alpha \end{smallmatrix}\right)$ で極小値 $-\frac{(2n-1)^{n-1}(R-cn)^n}{(2n)^n(R-cn+c)^{n-1}}$ をとり, $\left(\begin{smallmatrix} a\beta \\ b\beta \end{smallmatrix}\right)$ で極大値 $\frac{(2n-1)^{n-1}(R+cn)^n}{(2n)^n(R+cn-c)^{n-1}}$ をとる.

$n<0$ かつ $c<0$ の場合, $R+cn-c>0$ だから

$$4n(R+cn-c)(-(3n-1)R-cn^2+cn)=4n(R+cn-c)((1-2n)R-n(R+cn-c))<0$$

であり, $0<n<\frac{1}{2}$ かつ $c>0$ の場合, $R<cn$ より $R+cn-c<c(2n-1)<0$ だから次の不等式が成り立つ.

$$4n(R+cn-c)(-(3n-1)R-cn^2+cn)=4n(R+cn-c)((1-2n)R-n(R+cn-c))<0$$

故に $n<\frac{1}{2}$ かつ $cn>0$ の場合, (v) の右辺は負だから, f は $\left(\begin{smallmatrix} a\beta \\ b\beta \end{smallmatrix}\right)$ で極大値 $\frac{R+cn-c}{2n-1}\left(\frac{(2n-1)(R+cn)}{2n(R+cn-c)}\right)^n$ をとる.

$n<0$ かつ $c>0$ の場合, $R-cn+c>0$ だから

$$4n(R-cn+c)((3n-1)R-cn^2+cn)=4n(R-cn+c)((2n-1)R+n(R-cn+c))>0$$

であり, $0<n<\frac{1}{2}$ かつ $c<0$ の場合, $R<-cn$ より $R-cn+c<c(1-2n)<0$ だから次の不等式が成り立つ.

$$4n(R-cn+c)((3n-1)R-cn^2+cn)=4n(R-cn+c)((2n-1)R+n(R-cn+c))>0$$

故に $n<\frac{1}{2}$ かつ $cn<0$ の場合, (iv) の右辺は負だから, f は $\left(\begin{smallmatrix} a\alpha \\ b\alpha \end{smallmatrix}\right)$ で極小値 $-\frac{R-cn+c}{2n-1}\left(\frac{(2n-1)(R-cn)}{2n(R-cn+c)}\right)^n$ をとる.

3 次元数ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ に関するシュワルツの不等式から $|ax+by+c| \leqq \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x^2+y^2+1}$ が成り立つため $\left|f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right| \leqq \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{(x^2+y^2+1)^{n-\frac{1}{2}}}$ である. 従って $n=\frac{1}{2}$ ならば, すべての $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2$ に対して $\left|f\left(\begin{smallmatrix} \frac{a}{c} \\ \frac{b}{c} \end{smallmatrix}\right)\right| \leqq \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ が成り立ち, $c<0$ ならば $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $c>0$ ならば $f\left(\begin{smallmatrix} \frac{a}{c} \\ \frac{b}{c} \end{smallmatrix}\right)=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ が成り立つことから, $n=\frac{1}{2}$ かつ $c<0$ の場合, f は $\left(\begin{smallmatrix} \frac{a}{c} \\ \frac{b}{c} \end{smallmatrix}\right)$ で最小値 $-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ をとるが最大値は存在せず, $n=\frac{1}{2}$ かつ $c>0$ の場合, f は $\left(\begin{smallmatrix} \frac{a}{c} \\ \frac{b}{c} \end{smallmatrix}\right)$ で最大値 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ をとるが最小値は存在しない. また, $n=\frac{1}{2}$ かつ $c=0$ の場合には f の最大値と最小値は存在しない.

$n>\frac{1}{2}$ ならば, $\binom{x}{y}$ が原点から遠ざかれば $|f\binom{x}{y}|$ は 0 に近づくため, $\rho>0$ で条件,「$x^2+y^2>\rho^2$ ならば $f\binom{a\alpha}{b\alpha}<f\binom{x}{y}<f\begin{pmatrix}a\beta\\b\beta\end{pmatrix}$」を満たすものがある. $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\middle|\,x^2+y^2\leqq 4\rho^2\right\}$, $E=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\middle|\,x^2+y^2>\rho^2\right\}$ とおけば $\boldsymbol{R}^2$ は D と E の合併であり, E は $\binom{a\alpha}{b\alpha}$ と $\begin{pmatrix}a\beta\\b\beta\end{pmatrix}$ を含まないため, $\binom{a\alpha}{b\alpha}$ と $\begin{pmatrix}a\beta\\b\beta\end{pmatrix}$ は D の内点である. f は D において最大値と最小値をとり, $x^2+y^2=4\rho^2$ ならば $f\binom{a\alpha}{b\alpha}<f\binom{x}{y}<f\begin{pmatrix}a\beta\\b\beta\end{pmatrix}$ だから f は D の境界上では最大にも最小にもならない. 従って f が最大値と最小値をとるのは D の内部だから, f の最大値, 最小値はそれぞれ f の極大値, 極小値である. $n>\frac{1}{2}$ の場合, f が極大になる点は $\begin{pmatrix}a\beta\\b\beta\end{pmatrix}$ のみで, 極小になる点は $\binom{a\alpha}{b\alpha}$ のみだから f は $\begin{pmatrix}a\beta\\b\beta\end{pmatrix}$ で最大値 $\frac{(2n-1)^{n-1}(R+cn)^n}{(2n)^n(R+cn-c)^{n-1}}$ をとり, $\binom{a\alpha}{b\alpha}$ で最小値 $-\frac{(2n-1)^{n-1}(R-cn)^n}{(2n)^n(R-cn+c)^{n-1}}$ をとる.

$n<\frac{1}{2}$ の場合, $t>0$ に対し

$$f\binom{at}{bt}=\frac{(a^2+b^2)t+c}{((a^2+b^2)t^2+c)^n}=t^{1-2n}\frac{a^2+b^2+\frac{c}{t}}{\left(a^2+b^2+\frac{c}{t^2}\right)^n},\quad f\binom{-at}{-bt}=\frac{-(a^2+b^2)t+c}{((a^2+b^2)t^2+c)^n}=t^{1-2n}\frac{-a^2-b^2+\frac{c}{t}}{\left(a^2+b^2+\frac{c}{t^2}\right)^n}$$

だから $\lim\limits_{t\to\infty}f\binom{at}{bt}=\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty}f\binom{-at}{-bt}=-\infty$ となるため, f の最大値と最小値は存在しない.

7. $q^2-pr=0$ より以下の等式が成り立つ.

$$f\binom{qt}{-pt}=(aq^3-bpq^2+cp^2q-dp^3)t^3\ \cdots(i)\qquad f\binom{rt}{-qt}=(ar^3-bqr^2+cq^2r-dq^3)t^3\ \cdots(ii)$$

$p\neq 0$ かつ $d\neq\dfrac{aq^3-bpq^2+cp^2q}{p^3}$ ならば t の符号が負から正に変わるとき, 点 $\binom{qt}{-pt}$ は原点を通過し, (i) より, 原点の前後で $f\binom{qt}{-pt}$ の符号がかわるため, f は原点で極値をとらない.

$r\neq 0$ かつ $a\neq\dfrac{bqr^2-cq^2r+dq^3}{r^3}$ ならば t の符号が負から正に変わるとき, 点 $\binom{rt}{-qt}$ は原点を通過し, (ii) より, 原点の前後で $f\binom{rt}{-qt}$ の符号がかわるため, f は原点で極値をとらない.

$p\neq 0$ かつ $d=\dfrac{aq^3-bpq^2+cp^2q}{p^3}$ かつ $c\neq\dfrac{-3aq^2+2bpq}{p^2}$ の場合,

$$f\begin{pmatrix}\frac{1}{p}(t^3-qt)\\t\end{pmatrix}=\frac{t^5}{p^3}(3aq^2-2bpq+cp^2+p^2t-(3aq-bp)t^2+at^4)$$

であり, $|t|<\dfrac{|3aq^2-2bpq+cp^2|}{|3aq^2-2bpq+cp^2|+p^2+|3aq-bp|+|a|}$ ならば $|t|<1$ であることに注意すれば,

$$\begin{aligned}|p^2t-(3aq-bp)t^2+at^4|&\leqq|t|(p^2+|3aq-bp||t|^2+|a||t|^4)\\&\leqq|t|(|3aq^2-2bpq+cp^2|+p^2+|3aq-bp|+|a|)\\&<|3aq^2-2bpq+cp^2|\end{aligned}$$

だから $|t|<\dfrac{|3aq^2-2bpq+cp^2|}{|3aq^2-2bpq+cp^2|+p^2+|3aq-bp|+|a|}$ ならば $3aq^2-2bpq+cp^2+p^2t-(3aq-bp)t^2+at^4$ の符号は変わらない. 従って t の符号が変わるとき, 0 の前後で $f\begin{pmatrix}\frac{1}{p}(t^3-qt)\\t\end{pmatrix}$ の符号が変わるため, f は原点において極値をとらない.

$r\neq 0$ かつ $a=\dfrac{bqr^2-cq^2r+dq^3}{r^3}$ かつ $b\neq\dfrac{2cqr-3dq^2}{r^2}$ の場合,

$$f\begin{pmatrix}t\\\frac{1}{r}(t^3-qt)\end{pmatrix}=\frac{t^5}{r^3}(br^2-2cqr+3dq^2+r^2t+(cr-3dq)t^2+dt^4)$$

であり, $|t|<\dfrac{|br^2-2cqr+3dq^2|}{|br^2-2cqr+3dq^2|+r^2+|cr-3dq|+|d|}$ ならば $|t|<1$ であることに注意すれば,

$$\begin{aligned}|r^2t+(cr-3dq)t^2+dt^4|&\leqq|t|(r^2+|cr-3dq||t|^2+|d||t|^4)\\&\leqq|t|(|br^2-2cqr+3dq^2|+r^2+|cr-3dq|+|d|)\\&<|br^2-2cqr+3dq^2|\end{aligned}$$

だから $|t| < \dfrac{|br^2-2cqr+3dq^2|}{|br^2-2cqr+3dq^2|+r^2+|cr-3dq|+|d|}$ ならば $br^2-2cqr+3dq^2+r^2t+(cr-3dq)t^2+dt^4$ の符号は変わらない. 従って t の符号が変わるとき, 0 の前後で $f\begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{r}(t^3-qt)\end{pmatrix}$ の符号が変わるため, f は原点において極値をとらない.

$p \neq 0$ かつ $d = \dfrac{aq^3-bpq^2+cp^2q}{p^3}$ かつ $c = \dfrac{-3aq^2+2bpq}{p^2}$ の場合,

$$f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{p^3}(px+qy)^2(apx-(2aq-bp)y+p^2)$$

であり, シュワルツの不等式から $|apx-(2aq-bp)y| \leqq |ap||x|+|2aq-bp||y| \leqq \sqrt{a^2p^2+(2aq-bp)^2}\sqrt{x^2+y^2}$ が成り立つ. 従って $\sqrt{x^2+y^2} < \dfrac{p^2}{\sqrt{a^2p^2+(2aq-bp)^2}+1}$ ならば $|apx-(2aq-bp)y| < p^2$ だから, $apx-(2aq-bp)y+p^2 > 0$ である. 故に $\sqrt{x^2+y^2} < \dfrac{p^2}{\sqrt{a^2p^2+(2aq-bp)^2}+1}$ ならば $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ は 0 または p と同符号であるため, $p > 0$ ならば f は原点で極小になり, $p < 0$ ならば f は原点で極大になる.

$r \neq 0$ かつ $a = \dfrac{bqr^2-cq^2r+dq^3}{r^3}$ かつ $b = \dfrac{2cqr-3dq^2}{r^2}$ の場合,

$$f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{r^3}(qx+ry)^2((cr-2dq)x+dry+r^2)$$

であり, シュワルツの不等式から $|(cr-2dq)x+dry| \leqq |cr-2dq||x|+|dr||y| \leqq \sqrt{(cr-2dq)^2+d^2r^2}\sqrt{x^2+y^2}$ が成り立つ. 従って $\sqrt{x^2+y^2} < \dfrac{r^2}{\sqrt{(cr-2dq)^2+d^2r^2}+1}$ ならば $|(cr-2dq)x+dry| < r^2$ だから, $(cr-2dq)x+dry+r^2 > 0$ である. 故に $\sqrt{x^2+y^2} < \dfrac{r^2}{\sqrt{(cr-2dq)^2+d^2r^2}+1}$ ならば $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ は 0 または r と同符号であるため, $r > 0$ ならば f は原点で極小になり, $r < 0$ ならば f は原点で極大になる.

$p = r = 0$ の場合, $q = 0$ であり, a, b, c, d のうちの少なくとも 1 つは 0 でないため, $a, d, a+b+c+d, a-b+c-d$ うちの少なくとも 1 つは 0 ではない. ここで, $f\left(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = at^3$, $f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ t \end{smallmatrix}\right) = dt^3$, $f\left(\begin{smallmatrix} t \\ t \end{smallmatrix}\right) = (a+b+c+d)t^3$, $f\left(\begin{smallmatrix} t \\ -t \end{smallmatrix}\right) = (a-b+c-d)t^3$ だから, f は原点において極値をとらないことがわかる.

以上から, f が原点で極値をとるための条件は 「$p \neq 0$ かつ $d = \dfrac{aq^3-bpq^2+cp^2q}{p^3}$ かつ $c = \dfrac{-3aq^2+2bpq}{p^2}$」または「$r \neq 0$ かつ $a = \dfrac{bqr^2-cq^2r+dq^3}{r^3}$ かつ $b = \dfrac{2cqr-3dq^2}{r^2}$」が成り立つことである.

微積分学 II 演習問題　第 22 回　陰関数の極値・条件付き極値

1. y を x の関数とみなしたとき, 次の方程式で与えられる陰関数 $y=f(x)$ の極値を求めよ. ただし (7) では $a\neq -1$, $b\neq c(a-1)$, $c\neq 0, -\dfrac{b}{2}$ とし, (10) では $c\neq -ad$, $d\neq 0$, (13) では $b\neq 0, -a$, $(c,d)\neq(0,0)$, (14) では $a,b>0$ として f はつねに正の値をとるものとし, (15) では $c\neq 3ab^2$, $p\neq q$, $pq\neq 0$, $ap, aq\neq 1$ とする.

(1) $x^2-2xy^2+6xy+16=0$
(2) $2xy^2+x^2y-8=0$
(3) $x^3-2y^3+3x^2y+2=0$
(4) $\log(x^2+y^2)-2\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=0$
(5) $x+2\log y-e^xy^3=0$
(6) $x^3+y^3-3x^2y-1=0$
(7) $ax^2y-(b+c)y^3+x^2+by^2+cy=0$
(8) $x^3y^3-x+y=0$
(9) $x^3-3xy+2y^2-4y=0$
(10) $3ay(x-by)^2-3(x-by)^2+cy^2+dy=0$
(11) $x^4+4xy^3-3y=0$
(12) $x^4+2x^2+y^3-y=0$
(13) $x^2(ay+b)-2xy(y-1)-y(y-1)(cy+d)=0$
(14) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^3=x^4+y^4$
(15) $3ax^2y-6abxy^2+cy^3-3x^2+6bxy-(3b^2+(p+q)(c-3ab^2))y^2+pq(c-3ab^2)y=0$

2. 以下の各問で与えられた $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 X で定義された関数 f の最大値と最小値を求めよ.

(1) $X=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^2-4\leqq y\leqq x+2\right\}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^3-3xy+3y$
(2) $X=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,2x^2+y^2\leqq 2\right\}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=xy+\sqrt{2}x$
(3) $X=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq y\leqq 3-2x^2\right\}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=y^2+2x^2y+2x^4-2y$
(4) $X=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2\leqq 5\right\}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^4+y^4-(x+y)^2$
(5) $X=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2\leqq 6\right\}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^4+y^4+4xy$
(6) $X=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^2+2y^2\leqq 3\right\}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^3+3xy^2-3x$
(7) $X=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^4+y^4\leqq 2\right\}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^2+2y$
(8) $X=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^2+2y^2+4y\leqq 7\right\}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^3+3x(y+3)(y-1)$
(9) $X=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,2x^2+y^2\leqq 10\right\}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=2x^2+4xy+y^2-4x$
(10) $X=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^2-4x+y^2+4y\leqq 10\right\}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=xy(x-4)(y+4)$
(11) $X=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2\leqq 12\right\}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^3-y^3+3(x-y)^2$
(12) $X=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^4+y^4\leqq 4\right\}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=xy(x^4+y^4-6)$
(13) $X=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\leqq 2,\ y\geqq 0\right\}$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x-3y^{\frac{1}{3}}$

3. (発展問題) 以下の各問で与えられた条件のもとで, 関数 f の極値を求めよ.

(1) $2xy^2+x^2y=8$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x+2y$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.
(2) $y^4-y^2+x^2=0$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=xy$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.
(3) $x^2-2xy^2+4xy+1=0$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x+2y$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.
(4) $2x^4-2xy+y^2+6y+5=0$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x-y$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.
(5) $2x^3+y^3-3x^2y+2=0$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^2+y$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.
(6) $x^3+x^2-y^2=0$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=xy$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.
(7) $x^4+y^4=2$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^2+2y$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.
(8) $x^4+y^4=4$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=xy(x^4+y^4-6)$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.
(9) $2xy+z^2=1$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}$.
(10) $xy+yz+xz=3a^2\ (a>0)$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=xyz$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}$.

4. (発展問題) (1) r を正の実数, n を 3 以上の自然数とする. $x^2+y^2=r^2$ の条件の下で, $(x+y)^n+(x-y)^n$ の最大値と最小値を求めよ.

(2) x, y が 0 でない実数ならば $\cosh x\cosh y>\cosh\sqrt{x^2+y^2}$ が成り立つことを示せ.

第 22 回の演習問題の解答

1. (1) $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^2-2xy^2+6xy+16$ によって $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x}=2x-2y^2+6y$ だから $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ とおくと, $\begin{cases}x^2-2xy^2+6xy+16=0 & \cdots(i)\\ x-y^2+3y=0 & \cdots(ii)\end{cases}$. (ii) から $x=y^2-3y$ より (i) に代入して $-y^4+6y^3-9y^2+16=0$ より $(y+1)(y-4)(y^2-3y+4)=0$ を得るため, $y=-1,4$ である. 従って $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ が成り立つのは $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}4\\-1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}4\\4\end{smallmatrix}\right)$ の場合である.

$\frac{\partial F}{\partial y}=-4xy+6x$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=2$ より f が $f(4)=-1$ を満たす場合, $f''(4)=-\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}4\\-1\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}4\\-1\end{smallmatrix}\right)}=-\dfrac{1}{20}<0$ となるため, f は 4 で極大値 -1 をとり, f が $f(4)=4$ を満たす場合, $f''(4)=-\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}4\\4\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}4\\4\end{smallmatrix}\right)}=\dfrac{1}{20}>0$ となるため, f は 4 で極小値 4 をとる.

(2) $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=2xy^2+x^2y-8$ によって $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x}=2y^2+2xy$ だから $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ とおくと, $\begin{cases}2xy^2+x^2y-8=0 & \cdots(i)\\ y(y+x)=0 & \cdots(ii)\end{cases}$. (ii) から $y=0$ または $y=-x$. $y=0$ の場合, (i) を満たす x は存在しない. $y=-x$ の場合, (i) より $x=2$ である. 従って, $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ が成り立つのは $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}2\\-2\end{smallmatrix}\right)$ の場合である.

$\frac{\partial F}{\partial y}=4xy+x^2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=2y$ より f が $f(2)=-2$ を満たす場合, $f''(2)=-\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}2\\-2\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}2\\-2\end{smallmatrix}\right)}=-\dfrac{1}{3}<0$ となるため, f は 2 で極大値 -2 をとる.

(3) $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^3-2y^3+3x^2y+2$ によって $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2+6xy$ だから $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ とおくと, $\begin{cases}x^3-2y^3+3x^2y+2=0 & \cdots(i)\\ x(x+2y)=0 & \cdots(ii)\end{cases}$. (ii) から $x=0$ または $x=-2y$. $x=0$ の場合, (i) より $y=1$ であり, $x=-2y$ の場合, (i) より $y=-1$ である. 従って, $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ が成り立つのは $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}2\\-1\end{smallmatrix}\right)$ の場合である.

$\frac{\partial F}{\partial y}=-6y^2+3x^2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=6x+6y$ より f が $f(0)=1$ を満たす場合, $f''(0)=-\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)}=1>0$ となるため, f は 0 で極小値 1 をとり, f が $f(2)=-1$ を満たす場合, $f''(2)=-\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}2\\-1\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}2\\-1\end{smallmatrix}\right)}=-1<0$ となるため, f は 2 で極大値 -1 をとる.

(4) $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\log(x^2+y^2)-2\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ によって $F:\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x\neq 0\right\}\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2(x+y)}{x^2+y^2}$ だから $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ とおくと, $\begin{cases}\log(x^2+y^2)-2\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=0 & \cdots(i)\\ x+y=0 & \cdots(ii)\end{cases}$. (ii) から $y=-x$. (i) に代入すれば, $2\log|x|+\log 2+\frac{\pi}{2}=0$ だから, $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$ である. 従って, $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ が成り立つのは $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\pm\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}\end{pmatrix}$ の場合である. $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2(-x+y)}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{2(-x^2-2xy+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ より f が $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$ を満たす場合, $f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}\right)=-\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}\end{pmatrix}}{\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}\end{pmatrix}}=\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}>0$ となるため, f は $\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$ で極小値 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$ をとり, f が $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$ を満たす場合, $f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}\right)=-\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}\end{pmatrix}}{\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}\end{pmatrix}}=-\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}<0$ となるため, f は $-\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$ で極大

値 $\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$ をとる.

(5) $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x+2\log y-e^xy^3$ によって $F:\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x\in\boldsymbol{R},\ y>0\right\}\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x}=1-e^xy^3$ だから $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ とおくと, $\begin{cases}x+2\log y-e^xy^3=0 & \cdots(i)\\ 1-e^xy^3=0 & \cdots(ii)\end{cases}$. (ii) から $y=e^{-\frac{x}{3}}$. (i) に代入すれば, $\frac{x}{3}-1=0$ だから, $x=3$ である. 従って, $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ が成り立つのは $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}3\\\frac{1}{e}\end{smallmatrix}\right)$ の場合である. $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2}{y}-3e^xy^2$, $\frac{\partial^2F}{\partial x^2}=-e^xy^3$ より f が $f(3)=\frac{1}{e}$ を満たす場合, $f''(3)=-\dfrac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}3\\\frac{1}{e}\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}3\\\frac{1}{e}\end{smallmatrix}\right)}=-\dfrac{1}{e}<0$ となるため, f は 3 で極大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる.

(6) $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^3+y^3-3x^2y-1$ によって $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2-6xy$ だから $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ とおくと, $\begin{cases}x^3+y^3-3x^2y-1=0 & \cdots(i)\\ x(x-2y)=0 & \cdots(ii)\end{cases}$. (ii) から $x=0$ または $x=2y$. $x=0$ の場合, (i) より $y=1$ であり, $x=2y$ の場合, (i) より $-3y^3-1=0$ だから $y=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ である. 従って, $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ が成り立つのは $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}\\-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\end{smallmatrix}\right)$ の場合である.

$\frac{\partial F}{\partial y}=3y^2-3x^2$, $\frac{\partial^2F}{\partial x^2}=6x-6y$ より f が $f(0)=1$ を満たす場合, $f''(0)=-\dfrac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)}=2>0$ となるため, f は 0 で極小値 1 をとり, f が $f\left(-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ を満たす場合, $f''\left(-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}\right)=-\dfrac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}\\-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}\\-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\end{smallmatrix}\right)}=-\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}}<0$ となるため, f は $-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$ で極大値 $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ をとる.

(7) $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=ax^2y-(b+c)y^3+x^2+by^2+cy$ によって $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x}=2axy+2x$ だから $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ とおくと, $\begin{cases}ax^2y-(b+c)y^3+x^2+by^2+cy=0 & \cdots(i)\\ x(ay+1)=0 & \cdots(ii)\end{cases}$. (ii) から $x=0$ または, $a\neq0$ の場合, $y=-\dfrac{1}{a}$. $x=0$ の場合は (i) から $y(y-1)((b+c)y+c)=0$ だから $y=0,1$ で, $c\neq-b$ の場合は $y=-\dfrac{c}{b+c}$ である. $y=-\dfrac{1}{a}$ の場合は $a\neq-1$ かつ $b\neq c(a-1)$ だから (i) を満たす x は存在しない. 従って, $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ が成り立つのは $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0\\-\frac{c}{b+c}\end{smallmatrix}\right)$ の場合である.

$\frac{\partial F}{\partial y}=ax^2-3(b+c)y^2+2by+c$ より $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=c\neq0$, $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)=-b-2c\neq0$, $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\-\frac{c}{b+c}\end{smallmatrix}\right)=-\dfrac{c(b+2c)}{b+c}\neq0$ だから, 方程式 $ax^2y-(b+c)y^3+x^2+by^2+cy=0$ により定まる陰関数 f_0, f_1, $f_{-\frac{c}{b+c}}$ で, $f_0(0)=0$, $f_1(0)=1$, $f_{-\frac{c}{b+c}}(0)=-\dfrac{c}{b+c}$ を満たすものがある.

$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}=2ay+2$ より $f_0''(0)=-\dfrac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}=-\dfrac{2}{c}$ となるため, f_0 は 0 で, $c<0$ の場合は極小値 0, $c>0$ の場合は極大値 0 をとる.

$f_1''(0)=-\dfrac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)}=\dfrac{2a+2}{b+2c}$ となるため, f_1 は 0 で, $(a+1)(b+2c)>0$ の場合は極小値 1, $(a+1)(b+2c)<0$ の場合は極大値 1 をとる.

$f_{-\frac{c}{b+c}}''(0)=-\dfrac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\-\frac{c}{b+c}\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\-\frac{c}{b+c}\end{smallmatrix}\right)}=\dfrac{2b+2c-2ac}{c(b+2c)}$ となるため, $c\neq-b$ ならば, $f_{-\frac{c}{b+c}}$ は 0 で, $c(b+2c)(b+c-ac)>0$ の場合は極小値 $-\dfrac{c}{b+c}$, $c(b+2c)(b+c-ac)<0$ の場合は極大値 $-\dfrac{c}{b+c}$ をとる.

(8) $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^3y^3-x+y$ によって $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2y^3-1$ だから $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ とお

くと, $\begin{cases} x^3y^3 - x + y = 0 & \cdots(i) \\ 3x^2y^3 - 1 = 0 & \cdots(ii) \end{cases}$. (ii) より $x^3y^3 = \dfrac{x}{3}$ だから, (i) に代入して $y = \dfrac{2x}{3}$ を得る. (ii) に代入すれば, $\dfrac{8x^5}{9} = 1$ より $x = 2^{-\frac{3}{5}}3^{\frac{2}{5}}$ である. 従って, $F\binom{x}{y} = \frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y} = 0$ が成り立つのは $\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} 2^{-\frac{3}{5}}3^{\frac{2}{5}} \\ 2^{\frac{2}{5}}3^{-\frac{3}{5}} \end{pmatrix}$ の場合である. $\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^3y^2 + 1$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6xy^3$ より f が $f\left(2^{-\frac{3}{5}}3^{\frac{2}{5}}\right) = 2^{\frac{2}{5}}3^{-\frac{3}{5}}$ を満たす場合, $f''\left(2^{-\frac{3}{5}}3^{\frac{2}{5}}\right) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix} 2^{-\frac{3}{5}}3^{\frac{2}{5}} \\ 2^{\frac{2}{5}}3^{-\frac{3}{5}} \end{pmatrix}}{\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} 2^{-\frac{3}{5}}3^{\frac{2}{5}} \\ 2^{\frac{2}{5}}3^{-\frac{3}{5}} \end{pmatrix}} = -\frac{4\sqrt[5]{8}}{5\sqrt[5]{9}} < 0$ となるため, f は $2^{-\frac{3}{5}}3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\frac{9}{8}}$ で極大値 $2^{\frac{2}{5}}3^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{\frac{4}{27}}$ をとる.

(9) $F\binom{x}{y} = x^3 - 3xy + 2y^2 - 4y$ によって $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3y$ だから $F\binom{x}{y} = \frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y} = 0$ とおくと, $\begin{cases} x^3 - 3xy + 2y^2 - 4y = 0 & \cdots(i) \\ x^2 - y = 0 & \cdots(ii) \end{cases}$. (ii) から $y = x^2$ より (i) に代入して $2x^4 - 2x^3 - 4x^2 = 0$ より $x^2(x+1)(x-2) = 0$ を得るため, $x = -1, 0, 2$ である. 従って, $F\binom{x}{y} = \frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y} = 0$ が成り立つのは $\binom{x}{y} = \binom{-1}{1}, \binom{0}{0}, \binom{2}{4}$ の場合である.

$\frac{\partial F}{\partial y} = -3x + 4y - 4$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x$ より f が $f(-1) = 1$ を満たす場合, $f''(-1) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\binom{-1}{1}}{\frac{\partial F}{\partial y}\binom{-1}{1}} = 2 > 0$ となるため, f は 4 で極小値 1 をとる. f が $f(0) = 0$ を満たす場合, $f''(0) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\binom{0}{0}}{\frac{\partial F}{\partial y}\binom{0}{0}} = 0$ となるため, f の 0 における高次の微分係数を調べる. $x^3 - 3xf(x) + 2f(x)^2 - 4f(x) = 0$ の両辺を 3 回 x で微分すれば, ライプニッツの公式から $3 - 3xf'''(x) - 9f''(x) + 4f'(x)^2 + 4f(x)f''(x) - 4f'''(x) = 0$ だから $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ より $f'''(0) = \dfrac{3}{4} > 0$ を得る. 従って f'' は 0 の付近で単調に増加するため, 0 の前後で負から正に符号が変わる. 故に f' は 0 で極小値 0 をとるため, f' は 0 を除いた 0 の付近では正の値をとり, f は 0 の付近では単調に増加する. よって, $f(0) = 0$ を満たす場合の f は 0 で極値をとらない. f が $f(2) = 4$ を満たす場合, $f''(2) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\binom{2}{4}}{\frac{\partial F}{\partial y}\binom{2}{4}} = -2 < 0$ となるため, f は 2 で極大値 4 をとる.

(10) $F\binom{x}{y} = 3ay(x - by)^2 - 3(x - by)^2 + cy^2 + dy$ によって $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x} = 6(x - by)(ay - 1)$ だから $F\binom{x}{y} = \frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y} = 0$ とおくと, $\begin{cases} 3ay(x - by)^2 - 3(x - by)^2 + cy^2 + dy = 0 & \cdots(i) \\ (x - by)(ay - 1) = 0 & \cdots(ii) \end{cases}$. (ii) から $x = by$ または, $a \neq 0$ の場合, $y = \dfrac{1}{a}$ である. $x = by$ の場合, (i) から $y(cy + d) = 0$ だから $y = 0$ または, $c \neq 0$ の場合, $y = -\dfrac{d}{c}$ である. $y = \dfrac{1}{a}$ の場合, $c \neq -ad$ だから (i) を満たす x は存在しない. 従って, $F\binom{x}{y} = \frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y} = 0$ が成り立つのは $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}, \begin{pmatrix} -\frac{bd}{c} \\ -\frac{d}{c} \end{pmatrix}$ の場合である.

$\frac{\partial F}{\partial y} = 3ax^2 - 12abxy + 9ab^2y^2 + 6bx - 2(3b^2 - c)y + d$ より $\frac{\partial F}{\partial y}\binom{0}{0} = d \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} -\frac{bd}{c} \\ -\frac{d}{c} \end{pmatrix} = -d \neq 0$ だから, 方程式 $3ay(x - by)^2 - 3(x - by)^2 + cy^2 + dy = 0$ により定まる陰関数 f_0, f_1 で, $f_0(0) = 0$, $f_1\left(-\frac{bd}{c}\right) = -\dfrac{d}{c}$ を満たすものがある. $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6(ay - 1)$ より $f_0''(0) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\binom{0}{0}}{\frac{\partial F}{\partial y}\binom{0}{0}} = \dfrac{6}{d}$ となるため, f_0 は, $d < 0$ ならば 0 で極大値 0 をとり, $d > 0$ ならば 0 で極小値 0 をとる.

$f_1''\left(-\frac{d}{c}\right) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix} -\frac{bd}{c} \\ -\frac{d}{c} \end{pmatrix}}{\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} -\frac{bd}{c} \\ -\frac{d}{c} \end{pmatrix}} = \dfrac{-6(ad + c)}{cd}$ となるため, $c \neq 0$ ならば, f_1 は $-\dfrac{bd}{c}$ で, $cd(ad + c) < 0$ の場合は極小値 $-\dfrac{d}{c}$ をとり, $cd(ad + c) > 0$ の場合は極大値 $-\dfrac{d}{c}$ をとる.

(11) $F\binom{x}{y} = x^4 + 4xy^3 - 3y$ によって $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 + 4y^3$ だから $F\binom{x}{y} = \frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y} = 0$ とおくと, $\begin{cases} x^4 + 4xy^3 - 3y = 0 & \cdots(i) \\ x^3 + y^3 = 0 & \cdots(ii) \end{cases}$. (ii) から $y = -x$. (i) に代入すれば, $-3x^4 + 3x = 0$ だから $x = 0, 1$ である. 従って, $F\binom{x}{y} = \frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y} = 0$ が成り立つのは $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}, \binom{1}{-1}$ の場合である.

$\frac{\partial F}{\partial y} = 12xy^2-3$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 12x^2$ より f が $f(1)=-1$ を満たす場合, $f''(1) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)} = -\frac{4}{3} < 0$ となるため, f は 1 で極大値 -1 をとる. f が $f(0)=0$ を満たす場合, $f''(0) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} = 0$ となるため, f の 0 における高次の微分係数を調べる. $x^4+4xf(x)^3-3f(x)=0$ の両辺を 3 回 x で微分すれば, ライプニッツの公式から $24x+4x(f(x)^3)'''+12(f(x)^3)''-3f'''(x)=0$ であり, $(f(x)^3)''=3f''(x)f(x)^2+6f'(x)^2f(x)$ かつ $f(0)=0$ だから $f'''(0)=0$ となることがわかる. さらにもう 1 回微分すれば $24+4x(f(x)^3)^{(4)}+16(f(x)^3)'''-3f^{(4)}(x)=0$ であり, $(f(x)^3)'''=3f'''(x)f(x)^2+18f''(x)f'(x)f(x)+6f'(x)^3$ かつ $f(0)=f'(0)=0$ だから $f^{(4)}(0)=8>0$ となることがわかる. 従って f''' は 0 の付近で単調に増加し, $f'''(0)=0$ より, 0 の前後で f''' の値の符号は負から正に変わる. 故に f'' は 0 で極小値 0 をとるため, f'' は 0 を除いた 0 の付近では正の値をとる. よって, f' は 0 の付近では単調に増加し, $f'(0)=0$ より f' の値の符号は負から正に変わるため, f は 0 で極小値 0 をとる.

(12) $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^4+2x^2+y^3-y$ によって $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x}=4x^3+4x$ だから $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ とおくと, $\begin{cases}x^4+2x^2+y^3-y=0 & \cdots(i)\\ x(x^2+1)=0 & \cdots(ii)\end{cases}$. (ii) から $x=0$ だから (i) から $y=0,\pm1$ である. 従って, $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ が成り立つのは $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right),\pm\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ の場合である.

$\frac{\partial F}{\partial y}=3y^2-1$ より $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=-1\neq0$, $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)=2\neq0$, $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right)=2\neq0$ だから, 方程式 $x^4+2x^2+y^3-y=0$ により定まる陰関数 f_0, f_1, f_{-1} で, $f_0(0)=0$, $f_1(0)=1$, $f_{-1}(0)=-1$ を満たすものがある.

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=12x^2+4$ より $f_0''(0)=-\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}=4>0$ となるため, f_0 は 0 で極小値 0 をとる.

$f_1''(0)=-\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)}=-2<0$ となるため, f_1 は 0 で極大値 1 をとる.

$f_{-1}''(0)=-\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right)}=-2<0$ となるため, f_{-1} は 0 で極大値 -1 をとる.

(13) $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^2(ay+b)-2xy(y-1)-y(y-1)(cy+d)$ によって $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x}=2(ay+b)x-2y(y-1)$ だから $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ とおくと, $\begin{cases}(ay+b)x^2-2y(y-1)x-y(y-1)(cy+d)=0 & \cdots(i)\\ 2(ay+b)x-2y(y-1)=0 & \cdots(ii)\end{cases}$. $a\neq0$ かつ $y=-\dfrac{b}{a}$ ならば, 仮定 $b\neq0,-a$ によって (ii) は成立しないため, (ii) より $x=\dfrac{y(y-1)}{ay+b}$ である. これを (i) に代入して両辺に $-ay-b$ をかけて左辺を因数分解すれば $y(y-1)((ac+1)y^2+(ad+bc-1)y+bd)=0$ が得られる.

(I) $ac\neq-1$ かつ $(ad+bc-1)^2\geqq4bd(ac+1)$ の場合 : $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ を満たす $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ は $D=(ad+bc-1)^2-4bd(ac+1)$ とおけば $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix}\frac{\left(-ad-bc+1\pm\sqrt{D}\right)\left(-ab-bc-2ac-1\pm\sqrt{D}\right)}{2(ac+1)\left(-a^2d+abc+a+2b\pm a\sqrt{D}\right)}\\ \frac{-ad-bc+1\pm\sqrt{D}}{2(ac+1)}\end{pmatrix}$ (複号同順) である.

(Ⅱ) $ac=-1$ かつ $ad+bc\neq1$ の場合 : $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ を満たす $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ は $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix}-\frac{ad(ad-1)}{a^2d-a-b}\\ -\frac{abd}{a^2d-a-b}\end{pmatrix}$ である.

(Ⅲ)「$ac=-1$ かつ $ad+bc=1$」または「$ac\neq-1$ かつ $(ad+bc-1)^2<4bd(ac+1)$」の場合 : $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ を満たす $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ は $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ である.

$\frac{\partial F}{\partial y}=ax^2-2x(2y-1)-3cy^2+2(c-d)y+d$ より $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=d$, $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)=-c-d$ であり, 上の (I) の場合は, $\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}\frac{\left(-ad-bc+1+\sqrt{D}\right)\left(-ab-bc-2ac-1+\sqrt{D}\right)}{2(ac+1)\left(-a^2d+abc+a+2b+a\sqrt{D}\right)}\\ \frac{-ad-bc+1+\sqrt{D}}{2(ac+1)}\end{pmatrix}$, $\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}\frac{\left(-ad-bc+1-\sqrt{D}\right)\left(-ab-bc-2ac-1-\sqrt{D}\right)}{2(ac+1)\left(-a^2d+abc+a+2b-a\sqrt{D}\right)}\\ \frac{-ad-bc+1-\sqrt{D}}{2(ac+1)}\end{pmatrix}$ はそれぞれ

$$\frac{(a^2d-abc-a-2b)(ad+bc+2bd-1)\sqrt{D}}{\left(a^2d-abc-a-2b-a\sqrt{D}\right)^2}+\frac{2(c(a+b)^2-ad(a^2c+a^2d-a-2b))D+(2a^2d+a^2c-a-2b)D^{\frac{3}{2}}}{(ac+1)\left(a^2d-abc-a-2b-a\sqrt{D}\right)^2}$$

$$\frac{(a^2d-abc-a-2b)(ad+bc+2bd-1)\sqrt{D}}{-\left(a^2d-abc-a-2b+a\sqrt{D}\right)^2}+\frac{2(c(a+b)^2-ad(a^2c+a^2d-a-2b))D-(2a^2d+a^2c-a-2b)D^{\frac{3}{2}}}{(ac+1)\left(a^2d-abc-a-2b+a\sqrt{D}\right)^2}$$

で与えられ, 上の (Ⅱ) の場合は $\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} -\frac{ad(ad-1)}{a^2d-a-b} \\ -\frac{abd}{a^2d-a-b} \end{pmatrix} = d(ad-1)$ である.

以上から, $d \neq 0$ の場合は, 与えられた方程式から定まる陰関数 f_0 で, $f_0(0) = 0$ を満たすものが存在し, $d \neq -c$ の場合は, 与えられた方程式から定まる陰関数 f_1 で, $f_1(0) = 1$ を満たすものが存在する. また, $ac \neq -1$ かつ $(ad+bc-1)^2 > 4bd(ac+1)$ の場合,

$$(a^2d-abc-a-2b)(ad+bc+2bd-1) + \frac{2(c(a+b)^2 - ad(a^2c+a^2d-a-2b))\sqrt{D} + (2a^2d+a^2c-a-2b)D}{ac+1} \neq 0$$

ならば, 与えられた方程式から定まる陰関数 f_+ で, $f_+\left(\frac{\left(-ad-bc+1+\sqrt{D}\right)\left(-ab-bc-2ac-1+\sqrt{D}\right)}{2(ac+1)\left(-a^2d+abc+a+2b+a\sqrt{D}\right)}\right) = \frac{-ad-bc+1+\sqrt{D}}{2(ac+1)}$ を満たすものが存在し,

$$(a^2d-abc-a-2b)(ad+bc+2bd-1) - \frac{2(c(a+b)^2 - ad(a^2c+a^2d-a-2b))\sqrt{D} - (2a^2d+a^2c-a-2b)D}{ac+1} \neq 0$$

ならば, 与えられた方程式から定まる陰関数 f_- で, $f_-\left(\frac{\left(-ad-bc+1-\sqrt{D}\right)\left(-ab-bc-2ac-1-\sqrt{D}\right)}{2(ac+1)\left(-a^2d+abc+a+2b-a\sqrt{D}\right)}\right) = \frac{-ad-bc+1-\sqrt{D}}{2(ac+1)}$ を満たすものが存在する. $ac = -1$, $d \neq 0$, $ad \neq 1$ かつ $a^2d-a-b \neq 0$ の場合は, 与えられた方程式から定まる陰関数 f_* で, $f_*\left(-\frac{ad(ad-1)}{a^2d-a-b}\right) = -\frac{abd}{a^2d-a-b}$ を満たすものが存在する.

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2(ay+b)$ より, $d \neq 0$ の場合は $f_0''(0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\binom{0}{0}}{\frac{\partial F}{\partial y}\binom{0}{0}} = -\frac{2b}{d}$ となるため, $bd < 0$ ならば f_0 は 0 で極小値 0 をとり, $bd > 0$ ならば f_0 は 0 で極大値 0 をとる. $d \neq -c$ の場合は $f_1''(0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\binom{0}{1}}{\frac{\partial F}{\partial y}\binom{0}{1}} = \frac{2(a+b)}{c+d}$ となるため, $(a+b)(c+d) > 0$ ならば f_0 は 0 で極小値 1 をとり, $(a+b)(c+d) < 0$ ならば f_0 は 0 で極大値 1 をとる.
$ac \neq -1$ かつ $(ad+bc-1)^2 > 4bd(ac+1)$ かつ

$$(a^2d-abc-a-2b)(ad+bc+2bd-1) + \frac{2(c(a+b)^2 - ad(a^2c+a^2d-a-2b))\sqrt{D} + (2a^2d+a^2c-a-2b)D}{ac+1} \neq 0$$

の場合は $f_+''\left(\frac{\left(-ad-bc+1+\sqrt{D}\right)\left(-ab-bc-2ac-1+\sqrt{D}\right)}{2(ac+1)\left(-a^2d+abc+a+2b+a\sqrt{D}\right)}\right) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{\left(-ad-bc+1+\sqrt{D}\right)\left(-ab-bc-2ac-1+\sqrt{D}\right)}{2(ac+1)\left(-a^2d+abc+a+2b+a\sqrt{D}\right)} \\ \frac{-ad-bc+1+\sqrt{D}}{2(ac+1)} \end{pmatrix}}{\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} \frac{\left(-ad-bc+1+\sqrt{D}\right)\left(-ab-bc-2ac-1+\sqrt{D}\right)}{2(ac+1)\left(-a^2d+abc+a+2b+a\sqrt{D}\right)} \\ \frac{-ad-bc+1+\sqrt{D}}{2(ac+1)} \end{pmatrix}} =$
$\frac{\left(a^2d-a-b-a\sqrt{D}\right)\left(a^2d-abc-a-2b-a\sqrt{D}\right)^2}{(ac+1)(a^2d-abc-a-2b)(ad+bc+2bd-1)\sqrt{D}+2(c(a+b)^2-ad(a^2c+a^2d-a-2b))D+(2a^2d+a^2c-a-2b)D^{\frac{3}{2}}}$ となり, この値が正ならば f_+ は $\frac{\left(-ad-bc+1+\sqrt{D}\right)\left(-ab-bc-2ac-1+\sqrt{D}\right)}{2(ac+1)\left(-a^2d+abc+a+2b+a\sqrt{D}\right)}$ で極小値 $\frac{-ad-bc+1+\sqrt{D}}{2(ac+1)}$ をとり, この値が負ならば f_+ は $\frac{\left(-ad-bc+1+\sqrt{D}\right)\left(-ab-bc-2ac-1+\sqrt{D}\right)}{2(ac+1)\left(-a^2d+abc+a+2b+a\sqrt{D}\right)}$ で極大値 $\frac{-ad-bc+1+\sqrt{D}}{2(ac+1)}$ をとる.
$ac \neq -1$ かつ $(ad+bc-1)^2 > 4bd(ac+1)$ かつ

$$(a^2d-abc-a-2b)(ad+bc+2bd-1) - \frac{2(c(a+b)^2 - ad(a^2c+a^2d-a-2b))\sqrt{D} - (2a^2d+a^2c-a-2b)D}{ac+1} \neq 0$$

の場合は $f_-''\left(\frac{\left(-ad-bc+1-\sqrt{D}\right)\left(-ab-bc-2ac-1-\sqrt{D}\right)}{2(ac+1)\left(-a^2d+abc+a+2b-a\sqrt{D}\right)}\right) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{\left(-ad-bc+1-\sqrt{D}\right)\left(-ab-bc-2ac-1-\sqrt{D}\right)}{2(ac+1)\left(-a^2d+abc+a+2b-a\sqrt{D}\right)} \\ \frac{-ad-bc+1-\sqrt{D}}{2(ac+1)} \end{pmatrix}}{\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} \frac{\left(-ad-bc+1-\sqrt{D}\right)\left(-ab-bc-2ac-1-\sqrt{D}\right)}{2(ac+1)\left(-a^2d+abc+a+2b-a\sqrt{D}\right)} \\ \frac{-ad-bc+1-\sqrt{D}}{2(ac+1)} \end{pmatrix}} =$
$\frac{\left(a^2d-a-b+a\sqrt{D}\right)\left(a^2d-abc-a-2b+a\sqrt{D}\right)^2}{-(ac+1)(a^2d-abc-a-2b)(ad+bc+2bd-1)\sqrt{D}+2(c(a+b)^2-ad(a^2c+a^2d-a-2b))D-(2a^2d+a^2c-a-2b)D^{\frac{3}{2}}}$ となり, この値が正ならば f_- は $\frac{\left(-ad-bc+1-\sqrt{D}\right)\left(-ab-bc-2ac-1-\sqrt{D}\right)}{2(ac+1)\left(-a^2d+abc+a+2b-a\sqrt{D}\right)}$ で極小値 $\frac{-ad-bc+1-\sqrt{D}}{2(ac+1)}$ をとり, この値が負ならば

f_- は $\dfrac{\left(-ad-bc+1-\sqrt{D}\right)\left(-ab-bc-2ac-1-\sqrt{D}\right)}{2(ac+1)\left(-a^2d+abc+a+2b-a\sqrt{D}\right)}$ で極大値 $\dfrac{-ad-bc+1-\sqrt{D}}{2(ac+1)}$ をとる. $ac=-1$, $d\neq 0$, $ad\neq 1$ かつ $a^2d-a-b\neq 0$ の場合は, $f_*''\left(-\frac{ad(ad-1)}{a^2d-a-b}\right)=-\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix} -\frac{ad(ad-1)}{a^2d-a-b} \\ -\frac{abd}{a^2d-a-b}\end{pmatrix}}{\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} -\frac{ad(ad-1)}{a^2d-a-b} \\ -\frac{abd}{a^2d-a-b}\end{pmatrix}}=\dfrac{2b(a+b)}{d(ad-1)(a^2d-a-b)}$ となり, この値が正ならば f_* は $-\dfrac{ad(ad-1)}{a^2d-a-b}$ で極小値 $-\dfrac{abd}{a^2d-a-b}$ をとり, この値が負ならば f_* は $-\dfrac{ad(ad-1)}{a^2d-a-b}$ で極大値 $-\dfrac{abd}{a^2d-a-b}$ をとる.

$f_1''(0)=-\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}}{\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}}=-2<0$ となるため, f_1 は 0 で極大値 1 をとる.

$f''_{-\frac{1}{3}}(0)=-\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}}{\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}}=-\dfrac{2}{3}<0$ となるため, $f_{-\frac{1}{3}}$ は $\dfrac{2}{3}$ で極大値 $-\dfrac{1}{3}$ をとる.

(14) $F\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^3-x^4-y^4$ によって $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数 F を定める. $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{2x(3(b^2x^2+a^2y^2)^2-2a^6b^4x^2)}{a^6b^4}$ だから $F\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\dfrac{\partial F}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=0$ とおけば $\begin{cases}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^3-x^4-y^4=0 & \cdots(i) \\ x(3(b^2x^2+a^2y^2)^2-2a^6b^4x^2)=0 & \cdots(ii)\end{cases}$ が成り立つ. (ii) より $x=0$ または $y^2=-\dfrac{b^2x^2}{a^2}\pm\dfrac{\sqrt{6}ab^2x}{3}$ である. $x=0$ の場合は (i) と $f(0)>0$ から $y=b^3$ である.

$x\neq 0$ かつ $y^2=-\dfrac{b^2x^2}{a^2}+\dfrac{\sqrt{6}ab^2x}{3}$ の場合, この式を (i) に代入して $x^2\left(9(a^4+b^4)x^2-2\sqrt{6}a^3(a^4+3b^4)x+6a^6b^4\right)=0$ が得られるため $x=\dfrac{\sqrt{6}a^3\left(a^4+3b^4\pm a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}$ である.

$x\neq 0$ かつ $y^2=-\dfrac{b^2x^2}{a^2}-\dfrac{\sqrt{6}ab^2x}{3}$ の場合, この式を (i) に代入して $x^2\left(9(a^4+b^4)x^2+2\sqrt{6}a^3(a^4+3b^4)x+6a^6b^4\right)=0$ が得られるため $x=\dfrac{\sqrt{6}a^3\left(-a^4-3b^4\pm a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}$ である.

以上から $F\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\dfrac{\partial F}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=0$ が成り立つのは $a<\sqrt[4]{3}b$ ならば $\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ b^3\end{pmatrix}$ のみで, $a\geqq\sqrt[4]{3}b$ ならば $y=f(x)>0$ より $\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ b^3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}a^3\left(a^4+3b^4+a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)} \\ \frac{\sqrt{6}a^3b\sqrt{a^2(a^4+9b^4)+(a^4-3b^4)^{\frac{3}{2}}}}{9(a^4+b^4)}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}a^3\left(a^4+3b^4-a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)} \\ \frac{\sqrt{6}a^3b\sqrt{a^2(a^4+9b^4)-(a^4-3b^4)^{\frac{3}{2}}}}{9(a^4+b^4)}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}a^3\left(-a^4-3b^4-a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)} \\ \frac{\sqrt{6}a^3b\sqrt{a^2(a^4+9b^4)+(a^4-3b^4)^{\frac{3}{2}}}}{9(a^4+b^4)}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}a^3\left(-a^4-3b^4+a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)} \\ \frac{\sqrt{6}a^3b\sqrt{a^2(a^4+9b^4)-(a^4-3b^4)^{\frac{3}{2}}}}{9(a^4+b^4)}\end{pmatrix}$ である.

$\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{2y(3(b^2x^2+a^2y^2)^2-2a^4b^6y^2)}{a^4b^6}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\dfrac{6(5b^4x^4+6a^2b^2x^2y^2+a^4y^4-2a^6b^4x^2)}{a^6b^4}$ だから, $\dfrac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} 0 \\ b^3\end{pmatrix}=2b^9>0$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix} 0 \\ b^3\end{pmatrix}=\dfrac{6b^8}{a^2}>0$ であり, 以下の等式が成り立つ.

$\dfrac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ \sqrt{-\frac{b^2x^2}{a^2}+\frac{\sqrt{6}ab^2x}{3}}\end{pmatrix}=-\dfrac{4x^2\left(3x-\sqrt{6}a^3\right)\left(3(a^4+b^4)x-\sqrt{6}a^3b^4\right)}{9a^4}$, $\quad\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix} x \\ \sqrt{-\frac{b^2x^2}{a^2}+\frac{\sqrt{6}ab^2x}{3}}\end{pmatrix}=\dfrac{8x^2\left(\sqrt{6}x-a^3\right)}{a^3}$

$\dfrac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ \sqrt{-\frac{b^2x^2}{a^2}-\frac{\sqrt{6}ab^2x}{3}}\end{pmatrix}=-\dfrac{4x^2\left(3x+\sqrt{6}a^3\right)\left(3(a^4+b^4)x+\sqrt{6}a^3b^4\right)}{9a^4}$, $\quad\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix} x \\ \sqrt{-\frac{b^2x^2}{a^2}-\frac{\sqrt{6}ab^2x}{3}}\end{pmatrix}=-\dfrac{8x^2\left(\sqrt{6}x+a^3\right)}{a^3}$

また $a\geqq\sqrt[4]{3}b$ ならば

$$3\left(\frac{\sqrt{6}a^3\left(a^4+3b^4+a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}\right)-\sqrt{6}a^3=-\frac{\sqrt{6}a^5}{2a^2+\sqrt{a^4-3b^4}}<0$$

$$3(a^4+b^4)\left(\frac{\sqrt{6}a^3\left(a^4+3b^4+a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}\right)-\sqrt{6}a^3b^4=\frac{\sqrt{6}a^5}{3}\left(a^2+\sqrt{a^4-3b^4}\right)>0$$

$$\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{6}a^3\left(a^4+3b^4+a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}\right)-a^3=\frac{a^3\sqrt{a^4-3b^4}}{2a^2+\sqrt{a^4-3b^4}}\geqq 0$$

$$3\left(\frac{\sqrt{6}a^3\left(a^4+3b^4-a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}\right)-\sqrt{6}a^3=-\frac{\sqrt{6}a^5\left(2a^2+\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{3(a^4+b^4)}<0$$

$$3(a^4+b^4)\left(\frac{\sqrt{6}a^3\left(a^4+3b^4-a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}\right)-\sqrt{6}a^3b^4=\frac{\sqrt{6}a^5}{3}\left(a^2-\sqrt{a^4-3b^4}\right)>0$$

$$\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{6}a^3\left(a^4+3b^4-a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}\right)-a^3=-\frac{a^3\sqrt{a^4-3b^4}\left(2a^2+\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{3(a^4+b^4)}\leqq 0$$

$$3\left(\frac{\sqrt{6}a^3\left(-a^4-3b^4-a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}\right)+\sqrt{6}a^3=\frac{\sqrt{6}a^5}{2a^2+\sqrt{a^4-3b^4}}>0$$

$$3(a^4+b^4)\left(\frac{\sqrt{6}a^3\left(-a^4-3b^4-a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}\right)+\sqrt{6}a^3b^4=-\frac{\sqrt{6}a^5}{3}\left(a^2+\sqrt{a^4-3b^4}\right)<0$$

$$\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{6}a^3\left(-a^4-3b^4-a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}\right)+a^3=-\frac{a^3\sqrt{a^4-3b^4}}{2a^2+\sqrt{a^4-3b^4}}\leqq 0$$

$$3\left(\frac{\sqrt{6}a^3\left(-a^4-3b^4+a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}\right)+\sqrt{6}a^3=\frac{\sqrt{6}a^5\left(2a^2+\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{3(a^4+b^4)}>0$$

$$3(a^4+b^4)\left(\frac{\sqrt{6}a^3\left(-a^4-3b^4+a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}\right)+\sqrt{6}a^3b^4=-\frac{\sqrt{6}a^5}{3}\left(a^2-\sqrt{a^4-3b^4}\right)<0$$

$$\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{6}a^3\left(-a^4-3b^4+a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}\right)+a^3=\frac{a^3\sqrt{a^4-3b^4}\left(2a^2+\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{3(a^4+b^4)}\geqq 0$$

より, $\dfrac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}a^3\left(a^4+3b^4+a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}\\ \frac{\sqrt{6}a^3b\sqrt{a^2(a^4+9b^4)+(a^4-3b^4)^{\frac{3}{2}}}}{9(a^4+b^4)}\end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}a^3\left(a^4+3b^4-a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}\\ \frac{\sqrt{6}a^3b\sqrt{a^2(a^4+9b^4)-(a^4-3b^4)^{\frac{3}{2}}}}{9(a^4+b^4)}\end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}a^3\left(-a^4-3b^4-a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}\\ \frac{\sqrt{6}a^3b\sqrt{a^2(a^4+9b^4)+(a^4-3b^4)^{\frac{3}{2}}}}{9(a^4+b^4)}\end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}a^3\left(-a^4-3b^4+a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}\\ \frac{\sqrt{6}a^3b\sqrt{a^2(a^4+9b^4)-(a^4-3b^4)^{\frac{3}{2}}}}{9(a^4+b^4)}\end{pmatrix}$ はすべて正であり, $a>\sqrt[4]{3}b$ ならば $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}a^3\left(a^4+3b^4+a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}\\ \frac{\sqrt{6}a^3b\sqrt{a^2(a^4+9b^4)+(a^4-3b^4)^{\frac{3}{2}}}}{9(a^4+b^4)}\end{pmatrix}$ と $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}a^3\left(-a^4-3b^4-a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}\\ \frac{\sqrt{6}a^3b\sqrt{a^2(a^4+9b^4)-(a^4-3b^4)^{\frac{3}{2}}}}{9(a^4+b^4)}\end{pmatrix}$ が正, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}a^3\left(a^4+3b^4-a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}\\ \frac{\sqrt{6}a^3b\sqrt{a^2(a^4+9b^4)-(a^4-3b^4)^{\frac{3}{2}}}}{9(a^4+b^4)}\end{pmatrix}$ と $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}a^3\left(-a^4-3b^4+a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}\\ \frac{\sqrt{6}a^3b\sqrt{a^2(a^4+9b^4)+(a^4-3b^4)^{\frac{3}{2}}}}{9(a^4+b^4)}\end{pmatrix}$ が負である. 以上から与えられた関係式から定まる関数 f は 0 で極大値 b^3 をとり, $a<\sqrt[4]{3}b$ ならば 0 以外の点で極値をとらない.

$a>\sqrt[4]{3}b$ ならば f は 0 で極大値 b^3, $\pm\dfrac{\sqrt{6}a^3\left(a^4+3b^4+a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}$ で極大値 $\dfrac{\sqrt{6}a^3b\sqrt{a^2(a^4+9b^4)+(a^4-3b^4)^{\frac{3}{2}}}}{9(a^4+b^4)}$ をとり, $\pm\dfrac{\sqrt{6}a^3\left(a^4+3b^4-a^2\sqrt{a^4-3b^4}\right)}{9(a^4+b^4)}$ で極小値 $\dfrac{\sqrt{6}a^3b\sqrt{a^2(a^4+9b^4)-(a^4-3b^4)^{\frac{3}{2}}}}{9(a^4+b^4)}$ をとる. $a=\sqrt[4]{3}b$ の場合, f が極値をとる可能性があるのは 0 以外に $\pm\dfrac{\sqrt{6}a^3}{6}$ である. f は 0 で極大であるため, もし f が $\pm\dfrac{\sqrt{6}a^3}{6}$ で極値をとるとすれば, 極小値であり, 極小値は $\dfrac{a^3}{\sqrt{2}3^{\frac{3}{4}}}0$ である. 従って f は $x\leqq-\dfrac{\sqrt{6}a^3}{6}$ の範囲の減少し, $x\geqq\dfrac{\sqrt{6}a^3}{6}$ の範囲で増加するため, $|x|\geqq\dfrac{\sqrt{6}a^3}{6}$ ならば $f(x)\geqq\dfrac{a^3}{\sqrt{2}3^{\frac{3}{4}}}>0$ である. 一方, $F(x,0)=0$ を満たす x は $\pm a^3$ に限るため, x が

$\pm a^3$ に近づけば $f(x)$ は 0 に近づくため, 上で述べたことと矛盾する. 故に $a = \sqrt[4]{3}b$ の場合, f は 0 以外で極値をとらない.

(15) $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 3ax^2y - 6abxy^2 + cy^3 - 3x^2 + 6bxy - (3b^2 + (p+q)(c - 3ab^2))y^2 + pq(c - 3ab^2)y$ によって $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x} = 6(x - by)(ay - 1)$ だから $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0$ とおくと,

$$\begin{cases} 3ax^2y - 6abxy^2 + cy^3 - 3x^2 + 6bxy - (3b^2 + (p+q)(c - 3ab^2))y^2 + pq(c - 3ab^2)y = 0 & \cdots (i) \\ (x - by)(ay - 1) = 0 & \cdots (ii) \end{cases}.$$

(ii) から $x = by$ または, $a \neq 0$ の場合, $y = \dfrac{1}{a}$ である. $x = by$ の場合, (i) から $(c - 3ab^2)y(y - p)(y - q) = 0$ だから, $c \neq 3ab^2$ より $y = 0, p, q$ である. $y = \dfrac{1}{a}$ の場合, $c \neq 3ab^2$ かつ $ap, aq \neq 1$ だから (i) を満たす x は存在しない. 従って, $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0$ が成り立つのは $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} bp \\ p \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} bq \\ q \end{smallmatrix}\right)$ の場合である.
$\frac{\partial F}{\partial y} = 3ax^2 - 12abxy + 3cy^2 + 6bx + 2((3ab^2 - c)(p+q) - 3b^2)y - pq(3ab^2 - c)$ より $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = -pq(3ab^2 - c) \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} bp \\ p \end{smallmatrix}\right) = -p(p - q)(3ab^2 - c) \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} bq \\ q \end{smallmatrix}\right) = q(p - q)(3ab^2 - c) \neq 0$, だから, 方程式 $3ax^2y - 6abxy^2 + cy^3 - 3x^2 + 6bxy - (3b^2 + (p+q)(c - 3ab^2))y^2 + pq(c - 3ab^2)y = 0$ により定まる陰関数 f_0, f_p, f_q で, $f_0(0) = 0$, $f_p(bp) = p$, $f_q(bq) = q$ を満たすものがある. $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6(ay - 1)$ より $f_0''(0) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} = -\dfrac{6}{pq(3ab^2 - c)}$ となるため, f_0 は, $pq(3ab^2 - c) < 0$ ならば 0 で極小値 0 をとり, $pq(3ab^2 - c) > 0$ ならば 0 で極大値 0 をとる.
$f_p''(bp) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} bp \\ p \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} bp \\ p \end{smallmatrix}\right)} = \dfrac{6(ap - 1)}{p(p - q)(3ab^2 - c)}$ となるため, f_p は bp で, $p(p - q)(ap - 1)(3ab^2 - c) < 0$ の場合は極大値 p をとり, $p(p - q)(ap - 1)(3ab^2 - c) > 0$ の場合は極小値 p をとる.
$f_q''(bq) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} bq \\ q \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} bq \\ q \end{smallmatrix}\right)} = -\dfrac{6(aq - 1)}{q(p - q)(3ab^2 - c)}$ となるため, f_q は bq で, $q(p - q)(aq - 1)(3ab^2 - c) < 0$ の場合は極小値 q をとり, $q(p - q)(aq - 1)(3ab^2 - c) > 0$ の場合は極大値 q をとる.

2. f の最大値, 最小値はそれぞれ f の極大値, 極小値であるため, f が極値をとる候補の点をすべて求め, それらの点における f の値のうちで最大のものが f の最大値であり, 最小のものが f の最小値である. f が極値をとる候補の点を求めるには, f の定義域 X を内部と境界に分けて考え, それぞれにおいて極値の候補になる点を求める.

(1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 3$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 & \cdots (i) \\ -3x + 3 = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(i) から $x = 1$ であり, (ii) に代入すれば $y = 1$ が得られるため, X の内部に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ のみである.

X の境界は $\left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, y = x^2 - 4,\ -2 \leqq x \leqq 3\right\}$ と $\left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, y = x + 2,\ -2 \leqq x \leqq 3\right\}$ の合併集合だから, X の境界に f の定義域を制限した関数の極値は, $f_1(t) = f\left(\begin{smallmatrix} t \\ t^2 - 4 \end{smallmatrix}\right)$, $f_2(t) = f\left(\begin{smallmatrix} t \\ t + 2 \end{smallmatrix}\right)$ によって定められる関数 $f_1, f_2 : [-2, 3] \to \boldsymbol{R}$ の極値になっている. $f_1(t) = -2t^3 + 3t^2 + 12t - 12$ だから $f_1'(t) = -6(t + 1)(t - 2)$ となるため, f_1 は $[-2, -1]$, $[2, 3]$ で減少, $[-1, 2]$ で増加する. $f_2(t) = t^3 - 3t^2 - 3t + 6$ だから $f_2'(t) = 3(t^2 - 2t - 1)$ となるため, f_2 は $\left[-2, 1 - \sqrt{2}\right]$, $\left[1 + \sqrt{2}, 3\right]$ で増加, $\left[1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right]$ で減少する. 故に, X の境界に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 3 - \sqrt{2} \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 3 + \sqrt{2} \end{smallmatrix}\right)$ のみである.

$f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 1$, $f\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = -8$, $f\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right) = -19$, $f\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 8$, $f\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) = 3$, $f\left(\begin{smallmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 3 - \sqrt{2} \end{smallmatrix}\right) = 1 + 4\sqrt{2}$, $f\left(\begin{smallmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 3 + \sqrt{2} \end{smallmatrix}\right) = 1 - 4\sqrt{2}$, であるため, f は $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ において最大値 2 をとり, $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$ において最小値 -19 をとる.

(2) $\frac{\partial f}{\partial x} = y + \sqrt{2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと $x = 0$, $y = -\sqrt{2}$ であるが, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{smallmatrix}\right)$ は X の内部の点ではない. 従って f は X の内部では極値をとらない.

$F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 2x^2 + y^2 - 2$ で $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定義する. $\frac{\partial F}{\partial x} = 4x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$ だから $\frac{\partial F}{\partial x}$ と $\frac{\partial F}{\partial y}$ は原点以外では同時に 0 にはならないが, 原点は X 上にはない. また, $\frac{\partial f}{\partial x} = y + \sqrt{2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$ より f が点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ において極値をとるならば,

$\lambda \in \boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases} 2x^2+y^2-2=0 & \cdots(i) \\ y+\sqrt{2}=4\lambda x & \cdots(ii) \\ x=2\lambda y & \cdots(iii) \end{cases}$$

(ii) の両辺に y をかけた式から (iii) の両辺に $2x$ をかけた式を辺々引くと $y^2+\sqrt{2}y-2x^2=0$ だから, この等式と (i) を辺々加えれば $2y^2+\sqrt{2}y-2=0$ が得られる. 2 次方程式の解の公式から $y=-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ がこの方程式の解である. (i) から, $y=-\sqrt{2}$ の場合は $x=0$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ の場合は, $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ である. 故に, f が極値をとる可能性があるのは $\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ のみである.

$f\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}=0$, $f\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}=\frac{3\sqrt{6}}{4}$, $f\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}=-\frac{3\sqrt{6}}{4}$ であるため, f は $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ において最大値 $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ をとり, $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ において最小値 $-\frac{3\sqrt{6}}{4}$ をとる.

(3) $\frac{\partial f}{\partial x}=8x^3+4xy$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2x^2+2y-2$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases} 8x^3+4xy=0 & \cdots(i) \\ 2x^2+2y-2=0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(ii) から $y=1-x^2$ であり, (i) に代入すれば $4x(x^2+1)=0$ が得られるため, $x=0$ である. よって X の内部に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ のみである.

X の境界は $\left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, y=0,\ -\frac{\sqrt{6}}{2} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$ と $\left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, y=3-2x^2,\ -\frac{\sqrt{6}}{2} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$ の合併集合だから, X の境界に f の定義域を制限した関数の極値は, $f_1(t)=f\left(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $f_2(t)=f\left(\begin{smallmatrix} t \\ 3-2t^2 \end{smallmatrix}\right)$ によって定められる関数 $f_1, f_2 : \left[-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right] \to \boldsymbol{R}$ の極値になっている. $f_1(t)=2t^4$ だから f_1 は $\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ で最大になり, 0 で最小である. $f_2(t)=2t^4-2t^2+3$ だから $f_2'(t)=4t(2t^2-1)$ となるため, f_2 は $\left[-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ で減少, $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]$, $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ で増加する. 故に, X の境界に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix} \pm\frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ のみである.

$f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)=-1$, $f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)=0$, $f\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}=f\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{9}{2}$, $f\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}=f\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \end{pmatrix}=\frac{3}{2}$, $f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)=3$ であるため, f は $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ において最大値 $\frac{9}{2}$ をとり, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ において最小値 -1 をとる.

(4) $\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3-2x-2y$, $\frac{\partial f}{\partial y}=4y^3-2x-2y$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases} 4x^3-2x-2y=0 & \cdots(i) \\ 4y^3-2x-2y=0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

$(i)-(ii)$ から $4(x^3-y^3)=0$ だから, $x=y$ である. よって (i) から $x^3-x=0$ だから, $x=0,\pm1$ が得られ, X の内部に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ のみである.

$F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=x^2+y^2-5$ で $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定義する. $\frac{\partial F}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}=2y$ だから $\frac{\partial F}{\partial x}$ と $\frac{\partial F}{\partial y}$ は原点以外では同時に 0 にはならないが, 原点は X の境界上にはない. 従って, X の境界に f の定義域をを制限した関数が点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ において極値をとるならば, $\lambda \in \boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases} x^2+y^2-5=0 & \cdots(i) \\ 4x^3-2x-2y=2\lambda x & \cdots(ii) \\ 4y^3-2x-2y=2\lambda y & \cdots(iii) \end{cases}$$

$(ii)-(iii)$ より $2(x-y)(2x^2+2xy+2y^2-\lambda)=0$ が得られるため, $x=y$ または $\lambda=2x^2+2xy+2y^2$ である. $x=y$ の場合は (i) から $x=y=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$ である. $\lambda=2x^2+2xy+2y^2$ の場合, (ii) に代入すれば $(x+y)(2xy+1)=0$ が得られるため, $x=-y$ または $y=-\frac{1}{2x}$ である. $x=-y$ の場合は (i) から $x=-y=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$ である. $y=-\frac{1}{2x}$ の場合は (i) から $4x^4-20x^2+1=0$ だから $x^2=\frac{10\pm4\sqrt{6}}{4}=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\pm1\right)^2$, 従って $x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\pm1$ (複号任意) である. 故に, X の

境界に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\pm\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{10}}{2}\\ \frac{\sqrt{10}}{2}\end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{10}}{2}\\ -\frac{\sqrt{10}}{2}\end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{2}+1\\ -\frac{\sqrt{6}}{2}+1\end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{2}-1\\ -\frac{\sqrt{6}}{2}-1\end{pmatrix}$ のみである.

$f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=0$, $f\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)=f\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right)=-2$, $f\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{10}}{2}\\ \frac{\sqrt{10}}{2}\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{10}}{2}\\ -\frac{\sqrt{10}}{2}\end{pmatrix}=\frac{5}{2}$, $f\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{10}}{2}\\ -\frac{\sqrt{10}}{2}\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{10}}{2}\\ \frac{\sqrt{10}}{2}\end{pmatrix}=\frac{25}{2}$, $f\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{2}+1\\ -\frac{\sqrt{6}}{2}+1\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{2}-1\\ \frac{\sqrt{6}}{2}-1\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{2}-1\\ -\frac{\sqrt{6}}{2}-1\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{2}+1\\ \frac{\sqrt{6}}{2}+1\end{pmatrix}=\frac{41}{2}$ であるため, f は $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{2}+1\\ -\frac{\sqrt{6}}{2}+1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{2}-1\\ \frac{\sqrt{6}}{2}-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{2}-1\\ -\frac{\sqrt{6}}{2}-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{2}+1\\ \frac{\sqrt{6}}{2}+1\end{pmatrix}$ において最大値 $\frac{41}{2}$ をとり, $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ において最小値 -2 をとる.

(5) $\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3+4y$, $\frac{\partial f}{\partial y}=4y^3+4x$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases}x^3+y=0 & \cdots(i)\\ y^3+x=0 & \cdots(ii)\end{cases}$$

(i) から $y=-x^3$ だから (ii) に代入すれば $x(x^8-1)=0$ を得る. 従って $x=0$ または $x=\pm1$ となるため, X の内部に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\pm\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$, $\pm\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)$ のみである. このとき, $f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=0$, $f\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)=f\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)=-2$ である.

$F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^2+y^2-6$ で $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定義する. $\frac{\partial F}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}=2y$ だから $\frac{\partial F}{\partial x}$ と $\frac{\partial F}{\partial y}$ は原点以外では同時に 0 にはならないが, 原点は X 上にはない. また, $\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3+4y$, $\frac{\partial f}{\partial y}=4y^3+4x$ より f が点 $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ において極値をとるならば, $\lambda\in\boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases}x^2+y^2-6=0 & \cdots(i)\\ 4x^3+4y=2\lambda x & \cdots(ii)\\ 4y^3+4x=2\lambda y & \cdots(iii)\end{cases}$$

(ii) から (iii) を辺々引くと $4(x-y)(x^2+xy+y^2-1)=2\lambda(x-y)$ だから $y=x$ または $2\lambda=4(x^2+xy+y^2-1)$ である. $y=x$ の場合は, (i) から $x=\pm\sqrt{3}$, $2\lambda=4(x^2+xy+y^2-1)$ の場合は, (ii) に代入すれば $(x+y)(xy-1)=0$ が得られるため, $y=-x$ または $y=\frac{1}{x}$ である. 従って (i) から, $y=-x$ ならば $x=\pm\sqrt{3}$, $y=\frac{1}{x}$ ならば $x^4-6x^2+1=0$ だから $x^2=3\pm2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}\pm1\right)^2$ となるため, $x=\pm\sqrt{2}\pm1$ (複号任意) である. 故に, f が極値をとる可能性があるのは $\pm\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\ \sqrt{2}-1\end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\ \sqrt{2}+1\end{pmatrix}$ のみである.

$f\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}=30$, $f\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=6$, $f\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\ \sqrt{2}-1\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-\sqrt{2}+1\\ -\sqrt{2}+1\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\ \sqrt{2}+1\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-\sqrt{2}+1\\ -\sqrt{2}-1\end{pmatrix}=38$ であるため, f は $\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\ \sqrt{2}-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\sqrt{2}+1\\ -\sqrt{2}+1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\ \sqrt{2}+1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\sqrt{2}+1\\ -\sqrt{2}-1\end{pmatrix}$ において最大値 38 をとり, $\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)$ において最小値 -2 をとる.

(6) $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+3y^2-3$, $\frac{\partial f}{\partial y}=6xy$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases}3x^2+3y^2-3=0 & \cdots(i)\\ 6xy=0 & \cdots(ii)\end{cases}$$

(ii) から $x=0$ または $y=0$ である. (i) から $x=0$ の場合は $y=\pm1$, $y=0$ の場合は $x=\pm1$ である. よって X の内部に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\pm\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\pm\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ のみである.

$F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^2+2y^2-3$ で $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定義する. $\frac{\partial F}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}=4y$ だから $\frac{\partial F}{\partial x}$ と $\frac{\partial F}{\partial y}$ は原点以外では同時に 0 にはならないが, 原点は X の境界上にはない. 従って, X の境界に f の定義域を制限した関数が点 $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ において極値をとるならば, $\lambda\in\boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases}x^2+2y^2-3=0 & \cdots(i)\\ 3x^2+3y^2-3=2\lambda x & \cdots(ii)\\ 6xy=4\lambda y & \cdots(iii)\end{cases}$$

(iii) より $y=0$ または $\lambda=\frac{3}{2}x$ である. $y=0$ の場合は (i) から $x=\pm\sqrt{3}$ である. $\lambda=\frac{3}{2}x$ の場合, (ii) に代入すれば $y=\pm1$ が得られるため, (i) から $x=\pm1$ である. 故に, X の境界に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\pm\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix}$, $\pm\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\pm\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ のみである.

$f\binom{0}{1}=f\binom{0}{-1}=0$, $f\binom{1}{0}=-2$, $f\binom{-1}{0}=2$, $f\binom{\sqrt{3}}{0}=f\binom{-\sqrt{3}}{0}=0$, $f\binom{1}{1}=f\binom{1}{-1}=1$, $f\binom{-1}{1}=f\binom{-1}{-1}=-1$ であるため, f は $\binom{-1}{0}$ において最大値 2 をとり, $\binom{1}{0}$ において最小値 -2 をとる.

(7) $\frac{\partial f}{\partial y}=2\neq 0$ より X の内部に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性がある点は存在しない. $F\binom{x}{y}=x^4+y^4-2$ で $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定義する. $\frac{\partial F}{\partial x}=4x^3$, $\frac{\partial F}{\partial y}=4y^3$ だから $\frac{\partial F}{\partial x}$ と $\frac{\partial F}{\partial y}$ は原点以外では同時に 0 にはならないが, 原点は X の境界上にはない. 従って, X の境界に f の定義域を制限した関数が点 $\binom{x}{y}$ において極値をとるならば, $\lambda\in\boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases} x^4+y^4-2=0 & \cdots(i) \\ 2x=4\lambda x^3 & \cdots(ii) \\ 2=4\lambda y^3 & \cdots(iii) \end{cases}$$

(ii) より $x=0$ または $\lambda=\frac{1}{2x^2}$ である. $x=0$ の場合, (i) より $y=\pm\sqrt[4]{2}$. $\lambda=\frac{1}{2x^2}$ の場合, (iii) より $x^2=y^3$ だから $y\geqq 0$ であり, (i) に代入すれば $y^6+y^4-2=0$ となり, この左辺は $(y+1)(y-1)(y^4+2y^2+2)$ と因数分解されるため $y=1$ である. 故に, X の境界に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\binom{0}{\sqrt[4]{2}}$, $\binom{0}{-\sqrt[4]{2}}$, $\binom{1}{1}$, $\binom{-1}{1}$ のみである. $f\binom{0}{\sqrt[4]{2}}=2\sqrt[4]{2}$, $f\binom{0}{-\sqrt[4]{2}}=-2\sqrt[4]{2}$, $f\binom{1}{1}=f\binom{-1}{1}=3$ であるため, f は $\binom{1}{1}$, $\binom{-1}{1}$ において最大値 3 をとり, $\binom{0}{-\sqrt[4]{2}}$ において最小値 $-2\sqrt[4]{2}$ をとる.

(8) $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+3(y+3)(y-1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=6x(y+1)$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases} 3x^2+3(y+3)(y-1)=0 & \cdots(i) \\ 6x(y+1)=0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(ii) から $x=0$ または $y=-1$ である. (i) から $x=0$ の場合は $y=-3$ または $y=1$, $y=-1$ の場合は $x=\pm 2$ である. よって X の内部に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\binom{0}{-3}$, $\binom{0}{1}$, $\binom{\pm 2}{-1}$ のみである.

$F\binom{x}{y}=x^2+2y^2+4y-7$ で $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定義する. $\frac{\partial F}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}=4y+4$ だから $\frac{\partial F}{\partial x}$ と $\frac{\partial F}{\partial y}$ は $\binom{0}{-1}$ 以外では同時に 0 にはならないが, この点は X の境界上にはない. 従って, X の境界に f の定義域を制限した関数が点 $\binom{x}{y}$ において極値をとるならば, $\lambda\in\boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases} x^2+2y^2+4y-7=0 & \cdots(i) \\ 3x^2+3(y+3)(y-1)=2\lambda x & \cdots(ii) \\ 6x(y+1)=4\lambda(y+1) & \cdots(iii) \end{cases}$$

(iii) より $2\lambda=3x$ または $y=-1$ である. $2\lambda=3x$ の場合, (ii) より $3(y+3)(y-1)=$ だから $y=-3$ または $y=1$ であり, (i) より y がいずれの場合も $x=\pm 1$ である. $y=-1$ の場合は (i) より $x=\pm 3$ である. 故に, X の境界に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\binom{\pm 1}{-3}$, $\binom{\pm 1}{1}$, $\binom{\pm 3}{-1}$ のみである.

$f\binom{0}{-3}=f\binom{0}{1}=0$, $f\binom{2}{-1}=-16$, $f\binom{-2}{-1}=16$, $f\binom{1}{-3}=f\binom{1}{1}=1$, $f\binom{-1}{-3}=f\binom{-1}{1}=-1$, $f\binom{3}{-1}=-9$ $f\binom{-3}{-1}=9$ であるため, f は $\binom{-2}{-1}$ において最大値 16 をとり, $\binom{2}{-1}$ において最小値 -16 をとる.

(9) $\frac{\partial f}{\partial x}=4x+4y-4$, $\frac{\partial f}{\partial y}=4x+2y$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases} 4x+4y-4=0 & \cdots(i) \\ 4x+2y=0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(ii) から $y=-2x$ であり, (i) に代入すれば $x=-1$ が得られる. よって X の内部に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\binom{-1}{2}$ のみであるが, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2=-8<0$ だから, $\binom{-1}{2}$ では f は極値をとらない.

$F\binom{x}{y}=2x^2+y^2-10$ で $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定義する. $\frac{\partial F}{\partial x}=4x$, $\frac{\partial F}{\partial y}=2y$ だから $\frac{\partial F}{\partial x}$ と $\frac{\partial F}{\partial y}$ は原点以外では同時に 0 にはならないが, 原点は X の境界上にはない. 従って, X の境界に f の定義域を制限した関数が点 $\binom{x}{y}$ において極値をとるならば, $\lambda\in\boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases} 2x^2+y^2-10=0 & \cdots(i) \\ 4x+4y-4=4\lambda x & \cdots(ii) \\ 4x+2y=2\lambda y & \cdots(iii) \end{cases}$$

(ii), (iii) を x, y に関する連立 1 次方程式 $\begin{cases}(1-\lambda)x+y=1\\ 2x+(1-\lambda)y=0\end{cases}$ とみれば, $\lambda\neq 1\pm\sqrt{2}$ のとき, $x=-\frac{\lambda-1}{(\lambda-1)^2-2}$, $y=-\frac{2}{(\lambda-1)^2-2}$ である. (i) に代入すれば $(5(\lambda-1)^2-6)((\lambda-1)^2-3)=0$ が得られるため, $\lambda-1=\pm\frac{\sqrt{30}}{5}$, $\pm\sqrt{3}$ である. 故に, X の境界に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\begin{pmatrix}\pm\frac{\sqrt{30}}{4}\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\pm\sqrt{3}\\ -2\end{pmatrix}$ のみである.

$f\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{30}}{4}\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix}=10+\frac{3\sqrt{30}}{2}$, $f\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{30}}{4}\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix}=10-\frac{3\sqrt{30}}{2}$, $f\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ -2\end{pmatrix}=10-12\sqrt{3}$, $f\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ -2\end{pmatrix}=10+12\sqrt{3}$ であるため, f は $\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ -2\end{pmatrix}$ において最大値 $10+12\sqrt{3}$ をとり, $\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ -2\end{pmatrix}$ において最小値 $10-12\sqrt{3}$ をとる.

(10) $\frac{\partial f}{\partial x}=2y(x-2)(y+4)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2x(x-4)(y+2)$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases}2y(x-2)(y+4)=0 & \cdots(i)\\ 2x(x-4)(y+2)=0 & \cdots(ii)\end{cases}$$

(i) から $x=2$ または $y=0$ または $y=-4$ である. (ii) から $x=2$ ならば $y=-2$ であり, $y=0$ または $y=-4$ ならば $x=0$ または $x=4$ である. よって X の内部に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\binom{2}{-2}$, $\binom{0}{0}$, $\binom{0}{-4}$, $\binom{4}{0}$, $\binom{4}{-4}$ のみである.

$F\binom{x}{y}=x^2-4x+y^2+4y-10$ で $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定義する. $\frac{\partial F}{\partial x}=2x-4$, $\frac{\partial F}{\partial y}=2y+4$ だから $\frac{\partial F}{\partial x}$ と $\frac{\partial F}{\partial y}$ は $\binom{2}{-2}$ 以外では同時に 0 にはならないが, この点は X の境界上にはない. 従って, X の境界に f の定義域を制限した関数が点 $\binom{x}{y}$ において極値をとるならば, $\lambda\in\boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases}x^2-4x+y^2+4y-10=0 & \cdots(i)\\ 2y(x-2)(y+4)=2\lambda(x-2) & \cdots(ii)\\ 2x(x-4)(y+2)=2\lambda(y+2) & \cdots(iii)\end{cases}$$

(ii) より $x=2$ または $\lambda=y(y+4)$ である. $x=2$ の場合, (i) より $y=-2\pm3\sqrt{2}$ であり, $\lambda=y(y+4)$ の場合, (iii) より $(x^2-4x-y^2-4y)(y+2)=$ だから $x^2-4x-y^2-4y=0$ または $y=-2$ である. $x^2-4x-y^2-4y=0$ のときは (i) からこの式を辺々引けば $2y^2+8y-10=0$ が得られるため, $y=1$ または $y=-5$ であり, (i) より y がいずれの場合も $x=-1$ または $x=5$ である. $y=-2$ のときは (i) から $x=2\pm3\sqrt{2}$ である. 故に, X の境界に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\begin{pmatrix}2\\ -2\pm3\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\binom{-1}{1}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{-1}{-5}$, $\binom{5}{-5}$, $\begin{pmatrix}2\pm3\sqrt{2}\\ -2\end{pmatrix}$ のみである.

$f\binom{2}{-2}=8$, $f\binom{0}{0}=f\binom{0}{-4}=f\binom{4}{0}=f\binom{4}{-4}=0$, $f\binom{-1}{1}=f\binom{5}{1}=f\binom{-1}{-5}=f\binom{5}{-5}=25$, $f\begin{pmatrix}2\\ -2\pm3\sqrt{2}\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}2\pm3\sqrt{2}\\ -2\end{pmatrix}=-56$ であるため, f は $\binom{-1}{1}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{-1}{-5}$, $\binom{5}{-5}$ において最大値 25 をとり, $\begin{pmatrix}2\\ -2+3\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\ -2-3\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2+3\sqrt{2}\\ -2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2-3\sqrt{2}\\ -2\end{pmatrix}$ において最小値 -56 をとる.

(11) $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+6(x-y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-3y^2-6(x-y)$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases}3x^2+6(x-y)=0 & \cdots(i)\\ -3y^2-6(x-y)=0 & \cdots(ii)\end{cases}$$

(i) から $y=\frac{1}{2}(x^2+2x)$ であり, (ii) に代入して $\frac{x^4}{4}+x^3=0$ を得る. 従って $x=0$ または $x=-4$ であり, $x=0$ ならば $y=0$, $x=-4$ ならば $y=4$ であるが, $\binom{-4}{4}$ は X に属さない. よって X の内部に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\binom{0}{0}$ のみである.

$F\binom{x}{y}=x^2+y^2-12$ で $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定義する. $\frac{\partial F}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}=2y$ だから $\frac{\partial F}{\partial x}$ と $\frac{\partial F}{\partial y}$ は原点以外では同時に 0 にはならないが, 原点は X の境界上にはない. 従って, X の境界に f の定義域を制限した関数が点 $\binom{x}{y}$ において極値をとるならば, $\lambda\in\boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases}x^2+y^2-12=0 & \cdots(i)\\ 3x^2+6(x-y)=2\lambda x & \cdots(ii)\\ -3y^2-6(x-y)=2\lambda y & \cdots(iii)\end{cases}$$

(ii) と (iii) を辺々加えると $3(x-y)(x+y)=2\lambda(x+y)$ だから $y=-x$ または $2\lambda=3(x-y)$ である. $y=-x$ の場合は, (i) から $x=\pm\sqrt{6}$, $2\lambda=3(x-y)$ の場合は, (ii) に代入すれば $2x-2y=-xy$ が得られるため, $y=-\frac{2x}{x-2}$ であ

る．これを (i) に代入して $x^4-4x^3-4x^2+48x-48=0$ を得る．実数係数の x の多項式は実数係数の 2 次以下の多項式の積に因数分解できるため, $x^4-4x^3-4x^2+48x-48=(x^2+ax+b)\left(x^2-(a+4)x-\frac{48}{b}\right)$ 満たす実数 a, b がある．この両辺の x^2 と x の係数を比較すれば,

$$\begin{cases} b-\frac{48}{b}-a(a+4)=-4 & \cdots(iv) \\ -\frac{48a}{b}-b(a+4)=48 & \cdots(v) \end{cases}$$

が得られる．(v) より $a=-\frac{4b^2+48b}{b^2+48}$ だから, (iv) に代入して整理すれば $\frac{b^6+4b^5-144b^4-1152b^3+6912b^2+9216b-110592}{b(b^2+48)^2}=0$ である．$110592=2^{12}3^3$ と素因数分解され, b が奇数ならば上式の左辺の分子は 0 にならないため, 上式の左辺の分子の b に ± 2, ± 4 を順に代入すれば, $b=-4$ の場合に, この分子は 0 になり, 上式は成り立つ．このとき $a=2$ だから $x^4-4x^3-4x^2+48x-48$ は $(x^2+2x-4)(x^2-6x+12)$ と因数分解される．従って $x^2+2x-4=0$ または $x^2-6x+12=0$ であり, 前者の解は $x=-1\pm\sqrt{5}$, 後者は実数解をもたない．$y=-\frac{2x}{x-2}$ だから $x=-1-\sqrt{5}$ ならば $y=1-\sqrt{5}$ であり, $x=-1+\sqrt{5}$ ならば $y=1+\sqrt{5}$ である．

故に, X の境界に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\pm\begin{pmatrix}\sqrt{6}\\-\sqrt{6}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1-\sqrt{5}\\1-\sqrt{5}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1+\sqrt{5}\\1+\sqrt{5}\end{pmatrix}$ のみである．

$f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=0$, $f\begin{pmatrix}\sqrt{6}\\-\sqrt{6}\end{pmatrix}=72+12\sqrt{6}$, $f\begin{pmatrix}-\sqrt{6}\\\sqrt{6}\end{pmatrix}=72-12\sqrt{6}$, $f\begin{pmatrix}-1-\sqrt{5}\\1-\sqrt{5}\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-1+\sqrt{5}\\1+\sqrt{5}\end{pmatrix}=-20$ であるため, f は $\begin{pmatrix}\sqrt{6}\\-\sqrt{6}\end{pmatrix}$ において最大値 $72+12\sqrt{6}$ をとり, $\begin{pmatrix}-1-\sqrt{5}\\1-\sqrt{5}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1+\sqrt{5}\\1+\sqrt{5}\end{pmatrix}$ において最小値 -20 をとる．

(12) $\frac{\partial f}{\partial x}=5x^4y+y^5-6y$, $\frac{\partial f}{\partial y}=x^5+5xy^4-6x$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases} y(5x^4+y^4-6)=0 & \cdots(i) \\ x(x^4+5y^4-6)=0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(i) から $y=0$ または $5x^4+y^4=6$ である．$y=0$ の場合は, (ii) より $x=0$ または $x^4=6$ であるが, 後者の場合は $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ は X に属さない．$5x^4+y^4=6$ の場合は, (ii) より $x=0$ または $x^4+5y^4=6$ である．$x=0$ ならば $y^4=6$ であるが, この場合も $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ は X に属さない．$x^4+5y^4=6$ ならば $x^4=y^4=1$ だから $x=\pm 1$, $y=\pm 1$ である．よって X の内部に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\pm\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\pm\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ のみである．このとき, $f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=0$, $f\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)=f\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right)=-4$, $f\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)=f\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)=4$ である．

一方, 下の 2 の (8) の解答より, X の境界に f の定義域を制限した関数は $\begin{pmatrix}\sqrt[4]{2}\\-\sqrt[4]{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\sqrt[4]{2}\\\sqrt[4]{2}\end{pmatrix}$ において極大値 $2\sqrt{2}$ をとり, $\begin{pmatrix}\sqrt[4]{2}\\\sqrt[4]{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\sqrt[4]{2}\\-\sqrt[4]{2}\end{pmatrix}$ において極小値 $-2\sqrt{2}$ をとるため, f は $\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)$ において最大値 4 をとり, $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ において最小値 -4 をとる．

(13) $\frac{\partial f}{\partial x}=1\neq 0$ より X の内部に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性がある点は存在しない．

X の境界は $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\, y=0,\ -2\sqrt{2}\leqq x\leqq 2\sqrt{2}\right\}$ と $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\, x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=2,\ y\geqq 0\right\}$ の合併集合であり, 前者を Y, 後者を Z とおく．

関数 $f_1:\left[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right]\to\boldsymbol{R}$ を $f_1(x)=f\left(\begin{smallmatrix}x\\0\end{smallmatrix}\right)$ で定義すれば, $f_1(x)=x$ だから f_1 は単調増加関数である．よって X の境界に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性がある Y の点は, $\begin{pmatrix}\pm 2\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ のみである．

$F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-2$ で $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定義する．$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$, $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}$ だから, F は $\boldsymbol{R}^2$ から座標軸を除いた集合上では C^1 級関数であり, F の偏導関数は 0 にならない．従って, Z に f の定義域を制限した関数が座標軸上にある Z の点以外の点 $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ において極値をとるならば, $\lambda\in\boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ．

$$\begin{cases} x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-2=0 & \cdots(i) \\ 1=\frac{2}{3}\lambda x^{-\frac{1}{3}} & \cdots(ii) \\ -y^{-\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\lambda y^{-\frac{1}{3}} & \cdots(iii) \end{cases}$$

(ii) より $x^{\frac{1}{3}}=\frac{2\lambda}{3}$, (iii) より $y^{\frac{1}{3}}=-\frac{3}{2\lambda}$ だから, (i) に代入して $\frac{4\lambda^2}{9}+\frac{9}{4\lambda^2}-2=0$ を得る．この左辺は $\left(\frac{2\lambda}{3}-\frac{3}{2\lambda}\right)^2$ に等しいため, $4\lambda^2=9$ が得られる．従って $\lambda=\pm\frac{3}{2}$ だから, $y\geqq 0$ であることに注意すれば, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)$ である．故に, Z から座標軸上にある Z の点 $\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}\pm 2\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ を除いた集合に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)$ のみである．

$f\begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = -3\sqrt{2}$, $f\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 2\sqrt{2}$, $f\begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = -2\sqrt{2}$, $f\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -4$ であるため, f は $\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ において最大値 $2\sqrt{2}$ をとり, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ において最小値 $-3\sqrt{2}$ をとる.

3. (1) $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 2xy^2 + x^2y - 8$ で $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定義する. $\frac{\partial F}{\partial x} = 2y^2 + 2xy$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 4xy + x^2$ だから $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ を満たす点は原点のみであるが, 原点は条件 $2xy^2 + x^2y = 8$ を満たさない. 故に f が条件 $2xy^2 + x^2y = 8$ のもとで, 点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ において極値をとるならば, $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2$ より $\lambda \in \boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases} 2xy^2 + x^2y = 8 & \cdots (i) \\ 1 = \lambda(2y^2 + 2xy) & \cdots (ii) \\ 2 = \lambda(4xy + x^2) & \cdots (iii) \end{cases}$$

(iii) を (ii) で辺々割ると $\frac{4xy+x^2}{2y^2+2xy} = 2$ が得られるため, $x^2 - 4y^2 = 0$ である. 従って $x = \pm 2y$ となり, (i) より $x = 2y$ の場合は $y = 1$ で, $x = -2y$ の場合は (i) は成り立たない. 故に f が条件 $2xy^2 + x^2y = 8$ のもとで極値をとる可能性があるのは $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ のみである.

$f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = z$ とおけば $x = z - 2y$ だから, 点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ が条件 $2xy^2 + x^2y = 8$ を満たすならば $yz^2 - 2y^2z = 8$ が成り立つ. $G\left(\begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix}\right) = yz^2 - 2y^2z - 8$ によって $G : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial G}{\partial z} = 2yz - 2y^2$ であり, $f\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 4$ であることに注意すれば $\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) = 6 \neq 0$ である. 従って, 陰関数定理により z を $yz^2 - 2y^2z = 8$ から定まる, 1 を含む開区間で定義され, $g(1) = 4$ を満たす陰関数 g とみなして, 1 で g が極値 4 をとるかどうかを以下で判定する.

$\frac{\partial G}{\partial y} = z^2 - 4yz$, $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -4z$ だから $g'(1) = -\dfrac{\frac{\partial G}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)} = 0$, $g''(1) = -\dfrac{\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)} = \frac{8}{3} > 0$ となるため, g は 1 で極小値 4 をとる. 故に f は与えられた条件のもとで, $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ において極小値 4 をとる.

(2) $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = y^4 - y^2 + x^2$ で $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定義する. $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 4y^3 - 2y$ だから $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ とおくと, $x = 0, 2y^3 - y = 0$ である. よって $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ において $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ であるが, これらのうち条件 $y^4 - y^2 + x^2 = 0$ を満たすものは原点 $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ のみである.

点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ が曲線 $y^4 - y^2 + x^2 = 0$ 上で x 座標が正の部分にあるとき, $x = |y|\sqrt{1 - y^2}$ $(y \in [-1, 1])$ と表される. このとき $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = y|y|\sqrt{1 - y^2}$ だから, 点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ が曲線 $y^4 - y^2 + x^2 = 0$ 上で x 座標が正の部分を動きながら y が負から正に増大するとき, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ は負から正に符号を変えるため, 条件 $y^4 - y^2 + x^2 = 0$ のもとで, f は原点において極値をとらない.

原点以外の点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ で f が条件 $y^4 - y^2 + x^2 = 0$ のもとで極値をとるならば, $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$ より $\lambda \in \boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases} y^4 - y^2 + x^2 = 0 & \cdots (i) \\ y = 2\lambda x & \cdots (ii) \\ x = \lambda(4y^3 - 2y) & \cdots (iii) \end{cases}$$

$x = 0$ ならば (ii) より $y = 0$ となるため $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ が原点と異なるという仮定に反する. よって $x \neq 0$ だから (ii) を (iii) で辺々割ると $\frac{y}{x} = \frac{x}{2y^3 - y}$ である. この両辺に $x(2y^3 - y)$ をかけて移項すれば $y(2y^3 - y) = x^2$ となるため, (i) に代入して $y^2(3y^2 - 2) = 0$ を得る. $y = 0$ ならば (iii) より $y = 0$ となり, 仮定に反するため, $y \neq 0$ である. 従って $y = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ であり, (i) より $x = \pm y\sqrt{1 - y^2}$ だから $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}$ である. よって f が条件 $y^4 - y^2 + x^2 = 0$ のもとで極値をとる可能性がある点は $\begin{pmatrix} \pm\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \pm\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$ (複号任意) のみである.

曲線 $y^4 - y^2 + x^2 = 0$ の $x = y\sqrt{1 - y^2}$ で表される部分を C_+, $x = -y\sqrt{1 - y^2}$ で表される部分を C_- とする.

点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ が C_+ 上にある場合, $g_+ : [-1, 1] \to \boldsymbol{R}$ を $g_+(y) = f\begin{pmatrix} y\sqrt{1-y^2} \\ y \end{pmatrix} = y^2\sqrt{1 - y^2}$ で定めれば, $g_+'(y) = \frac{y(\sqrt{2} - \sqrt{3}y)(\sqrt{2} + \sqrt{3}y)}{\sqrt{1 - y^2}}$ だから g_+ の増減表は次のようになる.

y	-1		$-\frac{\sqrt{6}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{6}}{3}$		1
g_+'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
g_+	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

従って g_+ は $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ において最大になるため, f は条件 $y^4-y^2+x^2=0$ のもとで, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$ において最大値 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ をとる.

点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ が C_- 上にある場合, $g_- : [-1,1] \to \boldsymbol{R}$ を $g_-(y) = f\begin{pmatrix} -y\sqrt{1-y^2} \\ y \end{pmatrix} = -y^2\sqrt{1-y^2}$ で定めれば, $g_-'(y) = -\frac{y(\sqrt{2}-\sqrt{3}y)(\sqrt{2}+\sqrt{3}y)}{\sqrt{1-y^2}}$ だから g_- の増減表は次のようになる.

y	-1		$-\frac{\sqrt{6}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{6}}{3}$		1
g_-'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g_-	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	0

従って g_- は $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ において最小になるため, f は条件 $y^4-y^2+x^2=0$ のもとで, $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$ において最小値 $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ をとる.

(3) $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^2-2xy^2+4xy+1$ で $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定義する. $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x-2y^2+4y$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -4xy+4x$ より $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0$ とおくと, 次の連立方程式を得る.

$$\begin{cases} x^2-2xy^2+4xy+1=0 & \cdots(i) \\ x-y^2+2y=0 & \cdots(ii) \\ x(y-1)=0 & \cdots(iii) \end{cases}$$

(iii) より $x=0$ または $y=1$ であるが, $x=0$ のときは (i) は成立しないため $y=1$ である. 故に (ii) から $x=-1$ となり, $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0$ を満たす点は $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ のみである. 従って, $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ 以外の点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ で f が条件 $x^2-2xy^2+4xy+1=0$ のもとで極値をとるならば, $\frac{\partial f}{\partial x}=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2$ より $\lambda \in \boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases} x^2-2xy^2+4xy+1=0 & \cdots(iv) \\ 1=\lambda(2x-2y^2+4y) & \cdots(v) \\ 2=\lambda(-4xy+4x) & \cdots(vi) \end{cases}$$

(vi) を (v) で辺々割ると $\frac{-xy+x}{x-y^2+2y} = 1$ が得られるため, $y(y-x-2)=0$ である. よって $y=0$ または $y=x+2$ であるが, $y=0$ の場合は (iv) を満たす実数 x は存在しないため, $y=x+2$ である. (iv) に代入して整理すれば $(x+1)^2(2x-1)=0$ となるため $x=-1$ または $x=\dfrac{1}{2}$ である. ここで, $x=-1$ ならば $y=1$ となるが, この場合は (v) を満たす λ は存在しない. 故に, 条件 $x^2-2xy^2+4xy+1=0$ のもとで f が極値をとる $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ 以外の候補の点は $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ のみである.

$f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = z$ とおけば $x = z-2y$ だから, 点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ が条件 $x^2-2xy^2+4xy+1=0$ を満たすならば $4y^3-2y^2z-4y^2+z^2+1=0$ が成り立つ. $G\left(\begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix}\right) = 4y^3-2y^2z-4y^2+z^2+1$ によって $G : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial G}{\partial z} = -2y^2+2z$ であり, $f\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \frac{11}{2}$ であることに注意すれば $\frac{\partial G}{\partial z}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \neq 0$ である. 従って, 陰関数定理により z を $4y^3-2y^2z-4y^2+z^2+1=0$ から定まる, $\frac{5}{2}$ を含む開区間で定義され, $g\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{11}{2}$ を満たす陰関数 g とみなして, $\frac{5}{2}$ で g が極値 $\frac{11}{2}$ をとるかどうかを以下で判定する. $\frac{\partial G}{\partial y} = 12y^2-4yz-8y$, $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 24y-4z-8$ だから $g'\left(\frac{5}{2}\right) = -\dfrac{\frac{\partial G}{\partial y}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}}{\frac{\partial G}{\partial z}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}} = 0$, $g''\left(\frac{5}{2}\right) = -\dfrac{\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}}{\frac{\partial G}{\partial z}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}} = 20 > 0$ となるため, g は $\frac{5}{2}$ で極小値 $\frac{11}{2}$ をとる. 故に f は与えられた条件のもとで, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ において極小値 $\frac{11}{2}$ をとる.

$x^2-2xy^2+4xy+1=0$ を x についての 2 次方程式とみると, その判別式は

$$4(y-1)^2\left(y-1-\sqrt{2}\right)\left(y-1+\sqrt{2}\right)$$

と因数分解されるため, $1-\sqrt{2} < y < 1$ または $1 < y < 1+\sqrt{2}$ ならば $x^2-2xy^2+4xy+1=0$ を満たす実数 x は存在しない. 故に, 開集合 $\left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| 1-\sqrt{2} < y < 1+\sqrt{2}\right\}$ に含まれ, 条件 $x^2-2xy^2+4xy+1=0$ を満たす点は

$\binom{-1}{1}$ だけであるので, $x^2-2xy^2+4xy+1=0$ を満たす $\boldsymbol{R}^2$ の点 $\binom{x}{y}$ 全体からなる集合の中で $\binom{-1}{1}$ は孤立した点である．従って f はこの点では極値をとらない．

(4) $F\binom{x}{y}=2x^4-2xy+y^2+6y+5$ で $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定義する．$\frac{\partial F}{\partial x}=8x^3-2y$, $\frac{\partial F}{\partial y}=-2x+2y+6$ だから $F\binom{x}{y}=\frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y}=\frac{\partial F}{\partial y}\binom{x}{y}=0$ とおくと, 次の連立方程式を得る．

$$\begin{cases}2x^4-2xy+y^2+6y+5=0 & \cdots(i)\\ 4x^3-y=0 & \cdots(ii)\\ -x+y+3=0 & \cdots(iii)\end{cases}$$

(iii) より $y=x-3$ であり, (ii) に代入して $(x+1)((2x-1)^2+2)=0$ を得る．従って $x=-1$ だから $y=-4$ であるが, このとき (i) は成り立たない．故に f が条件 $2x^4-2xy+y^2+6y+5=0$ のもとで, 点 $\binom{x}{y}$ において極値をとるならば, $\frac{\partial f}{\partial x}=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-1$ より $\lambda\in\boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ．

$$\begin{cases}2x^4-2xy+y^2+6y+5=0 & \cdots(iv)\\ 1=\lambda(8x^3-2y) & \cdots(v)\\ -1=\lambda(-2x+2y+6) & \cdots(vi)\end{cases}$$

(v) を (vi) で辺々割ると $\frac{-x+y+3}{4x^3-y}=-1$ が得られるため, $4x^3-x+3=0$ である．従って $(x+1)((2x-1)^2+2)=0$ となるため, $x=-1$ である．(iv) より $y=-1$ または $y=-7$ である．故に f が条件 $2x^4-2xy+y^2+6y+5=0$ のもとで極値をとる可能性があるのは $\binom{-1}{-1}$, $\binom{-1}{-7}$ のみである．

$f\binom{x}{y}=z$ とおけば $y=x-z$ だから, 点 $\binom{x}{y}$ が条件 $2x^4-2xy+y^2+6y+5=0$ を満たすならば $2x^4-x^2+6x+z^2-6z+5=0$ が成り立つ．$G\binom{y}{z}=2x^4-x^2+6x+z^2-6z+5$ によって $G:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial G}{\partial z}=2z-6$ であり, $f\binom{-1}{-1}=0$, $f\binom{-1}{-7}=6$ であることに注意すれば $\frac{\partial G}{\partial z}\binom{-1}{0}=-6\neq 0$, $\frac{\partial G}{\partial z}\binom{-1}{6}=6\neq 0$ である．従って, 陰関数定理により, $2x^4-x^2+6x+z^2-6z+5=0$ から定まる, -1 を含む開区間で定義され, $g_1(-1)=0$ を満たす陰関数 g_1 と, -1 を含む開区間で定義され, $g_2(-1)=6$ を満たす陰関数 g_2 が存在する．

$\frac{\partial G}{\partial x}=8x^3-2x+6$, $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=24x^2-2$ だから $g_1'(-1)=-\frac{\frac{\partial G}{\partial x}\binom{-1}{0}}{\frac{\partial G}{\partial z}\binom{-1}{0}}=0$, $g_1''(-1)=-\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\binom{-1}{0}}{\frac{\partial G}{\partial z}\binom{-1}{0}}=\frac{10}{3}>0$ となるため, g_1 は -1 で極小値 0 をとる．また $g_2'(-1)=-\frac{\frac{\partial G}{\partial x}\binom{-1}{6}}{\frac{\partial G}{\partial z}\binom{-1}{6}}=0$, $g_2''(-1)=-\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\binom{-1}{6}}{\frac{\partial G}{\partial z}\binom{-1}{6}}=-\frac{10}{3}<0$ となるため, g_2 は -1 で極大値 6 をとる．故に f は与えられた条件のもとで, $\binom{-1}{-1}$ において極小値 0 をとり, $\binom{-1}{-7}$ において極大値 6 をとる．

(5) $F\binom{x}{y}=2x^3+y^3-3x^2y+2$ で $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定義する．$\frac{\partial F}{\partial x}=6x^2-6xy$, $\frac{\partial F}{\partial y}=3y^2-3x^2$ だから $F\binom{x}{y}=\frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y}=\frac{\partial F}{\partial y}\binom{x}{y}=0$ とおくと, 次の連立方程式を得る．

$$\begin{cases}2x^3+y^3-3x^2y+2=0 & \cdots(i)\\ x(x-y)=0 & \cdots(ii)\\ (x+y)(x-y)=0 & \cdots(iii)\end{cases}$$

(ii) より $x=0$ または $x=y$ である．$x=0$ の場合は (iii) より $y=0$ であるが, このときは (i) は成り立たない．$x=y$ の場合も (i) は成り立たない．故に f が条件 $2x^3+y^3-3x^2y+2=0$ のもとで, 点 $\binom{x}{y}$ において極値をとるならば, $\frac{\partial f}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=1$ より $\lambda\in\boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ．

$$\begin{cases}2x^3+y^3-3x^2y+2=0 & \cdots(iv)\\ 2x=\lambda(6x^2-6xy) & \cdots(v)\\ 1=\lambda(3y^2-3x^2) & \cdots(vi)\end{cases}$$

(vi) を (v) で辺々割ると $\frac{2x}{-x-y}=2x$ が得られるため, $x(x+y+1)=0$ である．従って $x=0$ または $x=-y-1$ であり, (iv) から $x=0$ の場合は $y=-\sqrt[3]{2}$, $x=-y-1$ の場合は $y(2y+3)^2=0$, すなわち $y=0$ または $y=-\frac{3}{2}$ である．故に f が条件 $2x^3+y^3-3x^2y+2=0$ のもとで極値をとる可能性があるのは $\begin{pmatrix}0\\-\sqrt[3]{2}\end{pmatrix}$, $\binom{-1}{0}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ である．

$f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = z$ とおけば $y = z - x^2$ だから, 点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ が条件 $2x^3 + y^3 - 3x^2y + 2 = 0$ を満たすことと, 点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right)$ が条件 $z^3 - 3x^2z^2 + 3x^4z - 3x^2z - x^6 + 3x^4 + 2x^3 + 2 = 0$ を満たすことは同値である. そこで $G : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を $G\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right) = z^3 - 3x^2z^2 + 3x^4z - 3x^2z - x^6 + 3x^4 + 2x^3 + 2$ によって定めれば $\frac{\partial G}{\partial z} = 3(x^2 - x - z)(x^2 + x - z)$ であり, $f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -\sqrt[3]{2} \end{smallmatrix}\right) = -\sqrt[3]{2}$, $f\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1$, $f\left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{smallmatrix}\right) = -\frac{5}{4}$ であることに注意すれば $\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -\sqrt[3]{2} \end{smallmatrix}\right) = 3\sqrt[3]{4} \neq 0$, $\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = -3 \neq 0$, $\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} \end{smallmatrix}\right) = 6 \neq 0$ である. 従って, 陰関数定理により, $z^3 - 3x^2z^2 + 3x^4z - 3x^2z - x^6 + 3x^4 + 2x^3 + 2 = 0$ から定まる, 0 を含む開区間で定義され, $g_1(0) = -\sqrt[3]{2}$ を満たす陰関数 g_1, -1 を含む開区間で定義され, $g_2(-1) = 1$ を満たす陰関数 g_2, $\frac{1}{2}$ を含む開区間で定義され, $g_3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$ を満たす陰関数 g_3 が存在する.

ここで $\frac{\partial G}{\partial x} = -6xz^2 + 12x^3z - 6xz - 6x^5 + 12x^3 + 6x^2$, $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -6z^2 + 36x^2z - 6z - 30x^4 + 36x^2 + 12x$ より

$$g_1'(0) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -\sqrt[3]{2} \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -\sqrt[3]{2} \end{smallmatrix}\right)} = 0,\ g_1''(0) = -\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \sqrt[3]{2} \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \sqrt[3]{2} \end{smallmatrix}\right)} = 2 > 0,\ g_2'(-1) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} = 0,\ g_2''(-1) = -\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} = 6 > 0$$

となるため, g_1 は 0 で極小値 $-\sqrt[3]{2}$ をとり, g_2 は -1 で極小値 1 をとる.

一方, $\frac{\partial G}{\partial x} = -6x(x^2 - x - z - 1)(x^2 + x - z)$ だから $z' = g_3'(x) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right)} = 2x - \dfrac{2x}{x^2 - x - z}$ である. 従って次の等式が得られる.

$$\begin{aligned} g_3''(x) &= 2 + \frac{2x^2 - 2xz' + 2z}{(x^2 - x - z)^2} = 2 + \frac{2(x^2 - 2x - z)(x^2 + x - z)}{(x^2 - x - z)^3} \\ g_3'''(x) &= \frac{4(x-1)z^2 - 4x(2x^2 - 2x + 3)z - 2(z^2 - 2x^2z + x^4 - 7x^2)z' + 4x^2(x^3 - x^2 - 4x + 1)}{(x^2 - x - z)^4} \\ &= -\frac{4(x^2 + x - z)(x^2 - 4x - z)(x^2 - 2x - z)}{(x^2 - x - z)^4} \end{aligned}$$

$x = \frac{1}{2}$ のとき, $z = -\frac{5}{4}$ だから, 上式より $g_3'\left(\frac{1}{2}\right) = g_3''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $g_3'''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \neq 0$ となるため, g_3 は $\frac{1}{2}$ で極値をとらない. 故に f は与えられた条件のもとで, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -\sqrt[3]{2} \end{smallmatrix}\right)$ において極小値 $-\sqrt[3]{2}$, $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ において極小値 1 をとり, $\left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{smallmatrix}\right)$ において極値をとらない.

(6) $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^3 + x^2 - y^2$ で $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定義する. $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y$ だから F, $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ が同時に 0 になるのは原点のみである. $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ であることは $y = \pm|x|\sqrt{x+1}$ であることと同値であり, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ |x|\sqrt{x+1} \end{smallmatrix}\right) = x|x|\sqrt{x+1}$ だから, 点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ が曲線 $y = |x|\sqrt{x+1}$ 上を動くとき, x 座標の符号が変わると, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ の符号も変わるため, f は与えられた条件のもとで, 原点では極値をとらない. 故に与えられた条件のもとで, 点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ において f が極値をとるならば, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ であり, $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$ より $\lambda \in \boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases} x^3 + x^2 - y^2 = 0 & \cdots(i) \\ y = \lambda(3x^2 + 2x) & \cdots(ii) \\ x = -2\lambda y & \cdots(iii) \end{cases}$$

もし $x = 0$ ならば $y = 0$ となるため矛盾が生じるため, $x \neq 0$ である. (ii) を (iii) で辺々割ると $\frac{y}{x} = -\frac{3x^2+2x}{2y}$ が得られるため, $3x^3 + 2x^2 + 2y^2 = 0$ である. この方程式の両辺に (i) の両辺を 2 倍したものを加えれば, $x^2(5x+4) = 0$ が得られる. $x \neq 0$ だから $x = -\frac{4}{5}$ であり, (i) から $y = \pm\frac{4}{5\sqrt{5}}$ である. 従って, 与えられた条件のもとで f が極値をとる可能性があるのは $\left(\begin{smallmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5\sqrt{5}} \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5\sqrt{5}} \end{smallmatrix}\right)$ である. $\left(\begin{smallmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5\sqrt{5}} \end{smallmatrix}\right)$ は曲線 $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ のうちの $y = -x\sqrt{x+1}$ を満たす部分にあり, $g_- : [-1, \infty) \to \boldsymbol{R}$ を $g_-(x) = f\left(\begin{smallmatrix} x \\ -x\sqrt{x+1} \end{smallmatrix}\right) = -x^2\sqrt{x+1}$ で定めれば $g_-'(x) = -\frac{x(5x+4)}{2\sqrt{x+1}}$ である. よって $g_-'(x)$ は $x = -\frac{4}{5}$ 前後で符号が負から正に変わるため, g_- は $-\frac{4}{5}$ において極小値 $-\frac{16}{25\sqrt{5}}$ をとる. 故に与えられた条件のもとで, $\left(\begin{smallmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5\sqrt{5}} \end{smallmatrix}\right)$ において f は極小値 $-\frac{16}{25\sqrt{5}}$ をとる. $\left(\begin{smallmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5\sqrt{5}} \end{smallmatrix}\right)$ は曲線 $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ のうちの $y = x\sqrt{x+1}$ を満たす部分にあり, $g_+ : [-1, \infty) \to \boldsymbol{R}$ を $g_+(x) = f\left(\begin{smallmatrix} x \\ x\sqrt{x+1} \end{smallmatrix}\right) = x^2\sqrt{x+1}$ で定めれば $g_+'(x) = \frac{x(5x+4)}{2\sqrt{x+1}}$ である. よって $g_+'(x)$ は $x = -\frac{4}{5}$ 前後で符号が正から負に変わるため, g_+ は $-\frac{4}{5}$ において極大値 $\frac{16}{25\sqrt{5}}$ をとる. 故に与えられた条件のもとで, $\left(\begin{smallmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5\sqrt{5}} \end{smallmatrix}\right)$ において f は極大値 $\frac{16}{25\sqrt{5}}$ をとる.

(7) $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^4 + y^4 - 2$ で $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定義する. $\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 4y^3$ だから $\frac{\partial F}{\partial x}$ と $\frac{\partial F}{\partial y}$ は原点以外では同時に 0 にはならないが, 原点は $x^4 + y^4 = 2$ で定まる曲線上にない. 従って, 点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ において f が条件 $x^4 + y^4 = 2$ のもと

で極値をとるならば, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2$ より $\lambda \in \boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases} x^4 + y^4 - 2 = 0 & \cdots (i) \\ 2x = 4\lambda x^3 & \cdots (ii) \\ 2 = 4\lambda y^3 & \cdots (iii) \end{cases}$$

(ii) より $x = 0$ または $2\lambda x^2 = 1$ である. $x = 0$ の場合は (i) から $y = \pm\sqrt[4]{2}$ である. $2\lambda x^2 = 1$ の場合, (iii) の両辺に x^2 をかけると $2x^2 = 2y^3$ だから $y = x^{\frac{2}{3}}$ である. よって (i) から $x^4 + x^{\frac{8}{3}} = 2$ だから $\left(x^{\frac{4}{3}} - 1\right)\left(x^{\frac{8}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}} + 2\right) = 0$ が成り立つ. $x^{\frac{4}{3}} \geqq 0$ であるため, $x^{\frac{4}{3}} = 1$. 従って $x = \pm 1$ である. 故に, 条件 $x^4 + y^4 = 2$ のもとで f が極値をとる候補の点は $\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt[4]{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt[4]{2} \end{pmatrix}$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ である.

$f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = z$ とおけば, $y = \dfrac{1}{2}(z - x^2)$ だから, 条件 $x^4 + y^4 = 2$ のもとでは $16x^4 + (z - x^2)^4 - 32 = 0$ が成り立つ. そこで $G : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を $G\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right) = 16x^4 + (z - x^2)^4 - 32$ で定めて z を $G\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right) = 0$ から定まる x の陰関数とみなす. $\frac{\partial G}{\partial x} = 64x^3 - 8x(z - x^2)^3$, $\frac{\partial G}{\partial z} = 4(z - x^2)^3$, $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 8(24x^2 - (z - x^2)^3 + 6x^2(z - x^2)^2)$ だから次の表が得られる.

$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$	$\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt[4]{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt[4]{2} \end{pmatrix}$	$\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$
$\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right)$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt[4]{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt[4]{2} \end{pmatrix}$	$\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$
$\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right)$	$32\sqrt[4]{8}$	$-32\sqrt[4]{8}$	32	32
$\frac{\partial G}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right)$	0	0	0	0
$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right)$	$-64\sqrt[4]{8}$	$64\sqrt[4]{8}$	40	40
$-\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right)}$	2	2	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$

上の表から条件 $x^4 + y^4 = 2$ のもとで f は $\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt[4]{2} \end{pmatrix}$ において極小値 $2\sqrt[4]{2}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt[4]{2} \end{pmatrix}$ において極小値 $-2\sqrt[4]{2}$ をとり, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ において極大値 3 をとる.

(8) $g : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を $g\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = -2xy$ で定義すれば, $x^4 + y^4 = 4$ を満たす任意の x, y に対して $g\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ が成り立つため, 条件 $x^4 + y^4 = 4$ のもとで g の極値を求めればよい.

$F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^4 + y^4 - 4$ で $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定義する. $\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 4y^3$ だから $\frac{\partial F}{\partial x}$ と $\frac{\partial F}{\partial y}$ は原点以外では同時に 0 にはならないが, 原点は $x^4 + y^4 = 1$ で定まる曲線上にない. 従って, 点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ において g が条件 $x^4 + y^4 = 4$ のもとで極値をとるならば, $\frac{\partial g}{\partial x} = -2y$, $\frac{\partial g}{\partial y} = -2x$ より $\lambda \in \boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases} x^4 + y^4 - 4 = 0 & \cdots (i) \\ -2y = 4\lambda x^3 & \cdots (ii) \\ -2x = 4\lambda y^3 & \cdots (iii) \end{cases}$$

(ii) より $y = -2\lambda x^3$ だから (iii) に代入して $x(16\lambda^4 x^8 - 1) = 0$ を得る. $x = 0$ の場合は (ii) から $y = 0$ であるが, このとき (i) は成り立たないので, $x \neq 0$ である. 故に, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2|\lambda|}}$ だから, $y = -2\lambda x^3$ より $\lambda > 0$ ならば $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \pm\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \end{pmatrix}$, $\lambda < 0$ ならば $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \pm\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{-2\lambda}} \\ \frac{1}{\sqrt{-2\lambda}} \end{pmatrix}$ である. これらを (i) に代入すれば, $\lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$ が得られるため, 条件 $x^4 + y^4 = 4$ のもとで g が極値をとる候補の点は $\pm\begin{pmatrix} \sqrt[4]{2} \\ -\sqrt[4]{2} \end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix} \sqrt[4]{2} \\ \sqrt[4]{2} \end{pmatrix}$ である.

[最大値・最小値の定理を使う解法] $X = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^4 + y^4 = 4\right\}$ とおくと, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in X$ ならば $|x|, |y| \leqq \sqrt{2}$ だから X は有界であり, X は連続関数 F による 0 の逆像だから閉集合である. 従って X は $\boldsymbol{R}^2$ の有界閉集合だから最大値・最小値の定理によって, g は X 上で最大値と最小値をとる. g が X 上で最大値または最小値をとる点では g は極値をとり, g が極値をとる候補の点は $\pm\begin{pmatrix} \sqrt[4]{2} \\ -\sqrt[4]{2} \end{pmatrix}$ と $\pm\begin{pmatrix} \sqrt[4]{2} \\ \sqrt[4]{2} \end{pmatrix}$ の 4 つに限られるため, これらの点のいずれかで g は X 上での最大値または最小値をとる. ここで, $g\begin{pmatrix} \sqrt[4]{2} \\ -\sqrt[4]{2} \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} -\sqrt[4]{2} \\ \sqrt[4]{2} \end{pmatrix} = 2\sqrt{2}$, $g\begin{pmatrix} \sqrt[4]{2} \\ \sqrt[4]{2} \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} -\sqrt[4]{2} \\ -\sqrt[4]{2} \end{pmatrix} = -2\sqrt{2}$ だから, g, 従って f は $\begin{pmatrix} \sqrt[4]{2} \\ -\sqrt[4]{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\sqrt[4]{2} \\ \sqrt[4]{2} \end{pmatrix}$ において極大値 $2\sqrt{2}$ をとり, $\begin{pmatrix} \sqrt[4]{2} \\ \sqrt[4]{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\sqrt[4]{2} \\ -\sqrt[4]{2} \end{pmatrix}$ において極小値 $-2\sqrt{2}$ をとる.

[最大値・最小値の定理を使わない解法] $g\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = z$ とおけば, $y = -\dfrac{z}{2x}$ だから, 条件 $x^4 + y^4 = 4$ のもとでは

$16x^8-64x^4+z^4=0$ が成り立つ．そこで $G:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $G\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)=16x^8-64x^4+z^4$ で定めて z を $G\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)=0$ から定まる x の陰関数とみなす．$\frac{\partial G}{\partial x}=128x^7-256x^3$, $\frac{\partial G}{\partial z}=4z^3$, $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=896x^6-768x^2$ だから次の表が得られる．

$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$	$\begin{pmatrix}\sqrt[4]{2}\\-\sqrt[4]{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\sqrt[4]{2}\\\sqrt[4]{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\sqrt[4]{2}\\\sqrt[4]{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\sqrt[4]{2}\\-\sqrt[4]{2}\end{pmatrix}$
$\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)$	$\begin{pmatrix}\sqrt[4]{2}\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\sqrt[4]{2}\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\sqrt[4]{2}\\-2\sqrt{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\sqrt[4]{2}\\-2\sqrt{2}\end{pmatrix}$
$\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)$	$64\sqrt{2}$	$64\sqrt{2}$	$-64\sqrt{2}$	$-64\sqrt{2}$
$\frac{\partial G}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)$	0	0	0	0
$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)$	$256\left(7\sqrt{2}-6\right)$	$256\left(7\sqrt{2}-6\right)$	$256\left(7\sqrt{2}-6\right)$	$256\left(7\sqrt{2}-6\right)$
$-\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)}$	$-28+12\sqrt{2}$	$-28+12\sqrt{2}$	$28-12\sqrt{2}$	$28-12\sqrt{2}$

上の表から条件 $x^4+y^4=4$ のもとで g, 従って f は $\begin{pmatrix}\sqrt[4]{2}\\-\sqrt[4]{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\sqrt[4]{2}\\\sqrt[4]{2}\end{pmatrix}$ において極大値 $2\sqrt{2}$ をとり，$\begin{pmatrix}\sqrt[4]{2}\\\sqrt[4]{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\sqrt[4]{2}\\-\sqrt[4]{2}\end{pmatrix}$ において極小値 $-2\sqrt{2}$ をとる．

(9) $F\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2xy+z^2-1$ で $F:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}$ を定義する．$\frac{\partial F}{\partial x}=2y$, $\frac{\partial F}{\partial y}=2x$, $\frac{\partial F}{\partial z}=2z$ だから $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}=0$ を満たす点は原点のみであるが，原点は条件 $2xy+z^2=1$ を満たさない．故に点 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ で f が条件 $2xy+z^2=1$ のもとで極値をとれば，$\frac{\partial f}{\partial x}=2(x-1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2(y-1)$, $\frac{\partial f}{\partial z}=2(z-2)$ より $\lambda\in\boldsymbol{R}$ が存在して，次の関係式が成り立つ．

$$\begin{cases}2xy+z^2=1 & \cdots(i)\\ x-1=\lambda y & \cdots(ii)\\ y-1=\lambda x & \cdots(iii)\\ z-2=\lambda z & \cdots(iv)\end{cases}$$

(iv) より $\lambda\neq 1$ であり，$z=\frac{2}{1-\lambda}$．(ii), (iii) を x, y に関する連立 1 次方程式とみれば，$\lambda\neq\pm1$ の場合 $x=y=\frac{1}{1-\lambda}$ がその唯一の解である．従って (i) より $\lambda=1\pm\sqrt{6}$ が得られるため，$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$ である．$\lambda=-1$ の場合，$z=1$, $y=1-x$ だから (i) より $x=0,1$ が得られるため，$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ である．故に，条件 $2xy+z^2=1$ のもとで f が極値をとる候補の点は $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ である．

点 $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ の z 座標は正であるため，これらは $2xy+z^2=1$ で与えられる曲面のうち $z=\sqrt{1-2xy}$ で与えられる曲面上にある．また $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$ の z 座標は負であるため，これらは $2xy+z^2=1$ で与えられる曲面のうち $z=-\sqrt{1-2xy}$ で与えられる曲面上にある．そこで関数 $g_+,g_-:\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,xy<\frac12\right\}\to\boldsymbol{R}$ を

$$g_+\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}x\\y\\\sqrt{1-2xy}\end{pmatrix}=(x-1)^2+(y-1)^2+5-2xy-4\sqrt{1-2xy}$$
$$g_-\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}x\\y\\-\sqrt{1-2xy}\end{pmatrix}=(x-1)^2+(y-1)^2+5-2xy+4\sqrt{1-2xy}$$

で定めれば $\frac{\partial g_+}{\partial x}=2(x-y-1)+\frac{4y}{\sqrt{1-2xy}}$, $\frac{\partial g_+}{\partial y}=2(-x+y-1)+\frac{4x}{\sqrt{1-2xy}}$, $\frac{\partial g_-}{\partial x}=2(x-y-1)-\frac{4y}{\sqrt{1-2xy}}$, $\frac{\partial g_-}{\partial y}=2(-x+y-1)-\frac{4x}{\sqrt{1-2xy}}$, $\frac{\partial^2 g_+}{\partial x^2}=2+\frac{4y^2}{(1-2xy)^{\frac32}}$, $\frac{\partial^2 g_+}{\partial x\partial y}=-2+\frac{4}{\sqrt{1-2xy}}+\frac{4xy}{(1-2xy)^{\frac32}}$, $\frac{\partial^2 g_+}{\partial y^2}=2+\frac{4x^2}{(1-2xy)^{\frac32}}$, $\frac{\partial^2 g_-}{\partial x^2}=2-\frac{4y^2}{(1-2xy)^{\frac32}}$, $\frac{\partial^2 g_-}{\partial x\partial y}=-2-\frac{4}{\sqrt{1-2xy}}-\frac{4xy}{(1-2xy)^{\frac32}}$, $\frac{\partial^2 g_-}{\partial y^2}=2-\frac{4x^2}{(1-2xy)^{\frac32}}$ である．故に $\frac{\partial g_+}{\partial x}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}=\frac{\partial g_+}{\partial y}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}=\frac{\partial g_+}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial g_+}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial g_+}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial g_+}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial g_-}{\partial x}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}=\frac{\partial g_-}{\partial y}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}=0$, $\left|g_+''\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}\right|=12\left(\sqrt6-3\right)<0$, $\left|g_-''\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}\right|=-12(\sqrt6+3)<0$, $\left|g_+''\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\right|=\left|g_+''\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\right|=8>0$, $\frac{\partial^2 g_+}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)=2>0$, $\frac{\partial^2 g_+}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)=8>0$ だから g_+ は $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$ で極値をとらず，g_- は $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$ で極値をとらないが，g_+ は $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ で極小値 2 をとる．以上から，条件

$2xy+z^2=1$ のもとで f は $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ において極小値 2 をとる.

(10) $F\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=xy+yz+xz-3a^2$ で $F:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}$ を定義する. $\frac{\partial F}{\partial x}=y+z$, $\frac{\partial F}{\partial y}=x+z$, $\frac{\partial F}{\partial z}=x+y$ だから $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}=0$ を満たす点は原点のみであるが, 原点は条件 $xy+yz+xz=3a^2$ を満たさない. 故に点 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ で f が条件 $xy+yz+xz=3a^2$ のもとで極値をとるならば, $\frac{\partial f}{\partial x}=yz$, $\frac{\partial f}{\partial y}=xz$, $\frac{\partial f}{\partial z}=xy$ より $\lambda\in\boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ. $\begin{cases}xy+yz+xz=3a^2 & \cdots(i)\\ yz=\lambda(y+z) & \cdots(ii)\\ xz=\lambda(x+z) & \cdots(iii)\\ xy=\lambda(x+y) & \cdots(iv)\end{cases}$

(ii), (iii), (vi) を (i) に代入すれば $2\lambda(x+y+z)=3a^2$ で $a\neq 0$ だから $\lambda\neq 0$ である. $xy=0$ ならば (iv) と $\lambda\neq 0$ から $y=-x$ であるため, $x=y=0$ となる. このとき (i) の左辺は 0 になるため $a\neq 0$ と矛盾する. 従って $xy\neq 0$ である. (ii), (iii) を (vi) で辺々割ると $\frac{z}{x}=\frac{y+z}{x+y}$, $\frac{z}{y}=\frac{x+z}{x+y}$ が得られ, これらを整理すれば $y(z-x)=0$, $x(z-y)=0$ となる. $y\neq 0$ だから 1 つ目の式から $z=x$ であり, $x\neq 0$ だから 2 つ目の式から $z=y$ である. 故に (i) から $x=y=z=\pm a$ となるため f が条件 $xy+yz+xz=3a^2$ のもとで極値をとる可能性があるのは $\begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix}-a\\-a\\-a\end{pmatrix}$ のみである.

$U=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,x,y,z>0\right\}$, $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,x,y,z<0\right\}$ とおくと, U, V は $\boldsymbol{R}^3$ の開集合であり, $\begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix}\in U$, $\begin{pmatrix}-a\\-a\\-a\end{pmatrix}\in V$ である. x, y, z が条件 $xy+yz+xz=3a^2$ を満たし, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in U$ であるとき (相乗平均) $\leqq$ (相加平均) より $(xyz)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\leqq\frac{xy+yz+xz}{3}=a^2$ すなわち $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=xyz\leqq a^3=f\begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix}$ である. 故に f は条件 $xy+yz+xz=3a^2$ のもとで, $\begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix}$ において U における最大値をとるため f は条件 $xy+yz+xz=3a^2$ のもとで, $\begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix}$ において極大値をとる. x, y, z が条件 $xy+yz+xz=3a^2$ を満たし, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in V$ であるとき $\begin{pmatrix}-x\\-y\\-z\end{pmatrix}\in U$ だから, 今示したことから $-f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-xyz=f\begin{pmatrix}-x\\-y\\-z\end{pmatrix}\leqq f\begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix}=a^3=-f\begin{pmatrix}-a\\-a\\-a\end{pmatrix}$, すなわち $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\geqq f\begin{pmatrix}-a\\-a\\-a\end{pmatrix}$ が成り立つ. 故に f は条件 $xy+yz+xz=3a^2$ のもとで, $\begin{pmatrix}-a\\-a\\-a\end{pmatrix}$ において V における最小値をとるため f は条件 $xy+yz+xz=3a^2$ のもとで, $\begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix}$ において極小値をとる.

4. (1) $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数 f, F を $f\binom{x}{y}=(x+y)^n+(x-y)^n$, $F\binom{x}{y}=x^2+y^2-r^2$ で定義する. $\dfrac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y}=2x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}\binom{x}{y}=2y$ だから, $F\binom{x}{y}=\dfrac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y}=\dfrac{\partial F}{\partial y}\binom{x}{y}=0$ をみたす点 $\binom{x}{y}$ は存在しない. また, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y}=n((x+y)^{n-1}+(x-y)^{n-1})$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y}=n((x+y)^{n-1}-(x-y)^{n-1})$ が成り立つため, f が条件 $x^2+y^2=r^2$ の下で点 $\binom{x}{y}$ において極値をとれば,

$$\begin{cases}x^2+y^2=r^2 & \cdots(i)\\ n((x+y)^{n-1}+(x-y)^{n-1})=2\lambda x & \cdots(ii)\\ n((x+y)^{n-1}-(x-y)^{n-1})=2\lambda y & \cdots(iii)\end{cases}$$

を満たす λ がある. $(ii)+(iii)$ と $(ii)-(iii)$ を考えれば, 上の連立方程式は

$$\begin{cases}x^2+y^2=r^2 & \cdots(i)\\ 2n(x+y)^{n-1}=2\lambda(x+y) & \cdots(ii')\\ 2n(x-y)^{n-1}=2\lambda(x-y) & \cdots(iii')\end{cases}$$

と同値であり, (ii') と (iii') から λ を消去すれば $(x^2-y^2)((x+y)^{n-2}-(x-y)^{n-2})=0$ が得られるため, $y=\pm x$ または $(x+y)^{n-2}=(x-y)^{n-2}$ である. (i) から, $y=\pm x$ ならば $\binom{x}{y}=\begin{pmatrix}\frac{r}{\sqrt2}\\\frac{r}{\sqrt2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{r}{\sqrt2}\\-\frac{r}{\sqrt2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{r}{\sqrt2}\\\frac{r}{\sqrt2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{r}{\sqrt2}\\-\frac{r}{\sqrt2}\end{pmatrix}$ である. n が奇数で $(x+y)^{n-2}=(x-y)^{n-2}$ の場合, $y=0$ だから (i) より $\binom{x}{y}=\binom{\pm r}{0}$. n が偶数で $(x+y)^{n-2}=(x-y)^{n-2}$ の場合, $x=0$ または $y=0$ だから (i) より $\binom{x}{y}=\binom{\pm r}{0},\binom{0}{\pm r}$. 以上から, 条件 $x^2+y^2=r^2$ のもとで f が極値をとる可能性がある点は, $\begin{pmatrix}\frac{r}{\sqrt2}\\\frac{r}{\sqrt2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{r}{\sqrt2}\\-\frac{r}{\sqrt2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{r}{\sqrt2}\\-\frac{r}{\sqrt2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{r}{\sqrt2}\\\frac{r}{\sqrt2}\end{pmatrix},\binom{\pm r}{0}$ で, n が偶数の場合はさらに $\binom{0}{\pm r}$ も条件 $x^2+y^2=r^2$ のもとで f が極値をとる可能性がある点である. また, $x^2+y^2=r^2$ を満たす点全体は有界閉集合だから f は条件

$x^2+y^2=r^2$ のもとで最大値と最小値をとるため, 上記の点のいずれかで f は条件 $x^2+y^2=r^2$ のもとで最大値と最小値をとる.

n が奇数の場合, $f\begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{2}} \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{2}} \\ -\frac{r}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 2^{\frac{n}{2}} r^n$, $f\begin{pmatrix} -\frac{r}{\sqrt{2}} \\ -\frac{r}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} -\frac{r}{\sqrt{2}} \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -2^{\frac{n}{2}} r^n$, $f\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = 2r^n$, $f\begin{pmatrix} -r \\ 0 \end{pmatrix} = -2r^n$ で, n が偶数の場合は $f\begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{2}} \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{2}} \\ -\frac{r}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} -\frac{r}{\sqrt{2}} \\ -\frac{r}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} -\frac{r}{\sqrt{2}} \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 2^{\frac{n}{2}} r^n$, $f\begin{pmatrix} \pm r \\ 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 \\ \pm r \end{pmatrix} = 2r^n$ である. 従って n が奇数の場合, f は条件 $x^2+y^2=r^2$ のもとで $\begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{2}} \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{2}} \\ -\frac{r}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ において最大値 $2^{\frac{n}{2}} r^n$ をとり, $\begin{pmatrix} -\frac{r}{\sqrt{2}} \\ -\frac{r}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -\frac{r}{\sqrt{2}} \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ において最小値 $-2^{\frac{n}{2}} r^n$ をとる. n が偶数の場合, f は条件 $x^2+y^2=r^2$ のもとで $\begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{2}} \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{r}{\sqrt{2}} \\ -\frac{r}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{2}} \\ -\frac{r}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{r}{\sqrt{2}} \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ において最大値 $2^{\frac{n}{2}} r^n$ をとり, $\begin{pmatrix} \pm r \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm r \end{pmatrix}$ において最小値 $2r^n$ をとる.

(2) $r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおけば, $x,y\neq 0$ のとき (1) の結果から 2 以上の自然数に対して $(x+y)^{2n}+(x-y)^{2n} > 2r^{2n}$ が成り立ち, $n=0,1$ に対して $(x+y)^{2n}+(x-y)^{2n}=2r^{2n}$ が成り立つため, cosh のマクローリン展開を考えると,

$$\cosh x \cosh y = \frac{1}{2}(\cosh(x+y)+\cosh(x-y)) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^{2n}+(x-y)^{2n}}{(2n)!} > \sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{2n}}{(2n)!} = \cosh r = \cosh\sqrt{x^2+y^2}$$

が得られる.

微積分学 II 演習問題　第 23 回　長方形の領域での重積分

1. 次の積分を求めよ．ただし α は正の実数, $a<b$ とし, (10) では $n \geqq \dfrac{1}{2}$, $m \geqq 0$, (11) と (12) では $n \neq 0$, (17) では $a>-1$, (22) と (24) では $a>0$ とする．

(1) $I=[0,1]\times[0,2]$, $\displaystyle\iint_I (x+y)dxdy$　(2) $I=[0,a]\times[0,b]$, $\displaystyle\iint_I (x^2+y^2)dxdy$

(3) $I=[0,1]\times[0,1]$, $\displaystyle\iint_I x^3y^2dxdy$　(4) $I=[0,1]\times[a,b]$, $\displaystyle\iint_I xy^2dxdy$

(5) $I=[-1,1]\times[0,1]$, $\displaystyle\iint_I 12x^2y^3dxdy$　(6) $I=[0,1]\times[0,\alpha]$, $\displaystyle\iint_I e^x\sin ydxdy$

(7) $I=\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$, $\displaystyle\iint_I \sin x\cos ydxdy$　(8) $I=[1,2]\times[2,3]$, $\displaystyle\iint_I \frac{1}{x+y}dxdy$

(9) $I=[0,a]\times[0,b]$, $\displaystyle\iint_I \sin(x+y)dxdy$　(10) $I=[0,1]\times[0,1]$, $\displaystyle\iint_I x^{2n-1}y^me^{x^ny^{m+1}}dxdy$

(11) $I=[0,1]\times[0,a]$, $\displaystyle\iint_I \frac{y^{2n-1}}{xy^n+1}dxdy$　(12) $I=[0,1]\times[0,1]$, $\displaystyle\iint_I \frac{y^{2n-1}}{xy^{2n}+1}dxdy$

(13) $I=[0,1]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\displaystyle\iint_I y\cos(xy)dxdy$　(14) $I=[0,1]\times\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $\displaystyle\iint_I \frac{x}{\cos^2(xy)}dxdy$

(15) $I=[0,1]\times[0,1]$, $\displaystyle\iint_I y(x+y)^\alpha dxdy$　(16) $I=[0,2]\times[0,3]\times[0,4]$, $\displaystyle\iiint_I xy^2z^3dxdydz$

(17) $I=[0,1]\times[a,b]$, $\displaystyle\iint_I x^ydxdy$　(18) $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2]$, $\displaystyle\iint_I x^2y\sin(xy^2)dxdy$

(19) $I=[0,1]\times[0,1]$, $\displaystyle\iint_I (x+y^2)^2dxdy$　(20) $I=[0,\pi]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\displaystyle\iint_I x\sin(x+y)dxdy$

(21) $I=[0,1]\times[0,1]$, $\displaystyle\iint_I xydxdy$　(22) $I=[0,1]\times[0,1]$, $\displaystyle\iint_I \frac{1}{(x+y+a)^2}dxdy$

(23) $I=[0,1]\times[0,1]$, $\displaystyle\iint_I e^{x+y}dxdy$　(24) $I=[0,1]\times[0,1]$, $\displaystyle\iint_I \frac{1}{x+y+a}dxdy$

(25) $I=[0,1]\times[0,1]$, $\displaystyle\iint_I \frac{y^2}{x^2y^2+1}dxdy$　(26) $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\displaystyle\iiint_I \sin(x+y+z)dxdydz$

2. (1) $m,n\neq 0$ とし, f を C^2 級関数とする．a, b, c, d, m, n, f を用いて重積分 $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} x^{2m-1}y^{n-1}f''(x^my^n)\,dxdy$ の値を表せ．

(2) $I=[a,b]\times[c,d]\times[p,q]$ とし, $l,m,n\neq 0$, f を C^3 級関数とする．a, b, c, d, p, q, l, m, n, f を用いて 3 重積分 $\displaystyle\iiint_I x^{3l-1}y^{2m-1}z^{n-1}f'''(x^ly^mz^n)\,dxdydz$ の値を表せ．

3. (発展問題) すべての成分が 0 以上 1 以下である n 次元数ベクトル全体からなる領域を $[0,1]^n$ で表す．

(1) $k>0$ とするとき, n 重積分 $\displaystyle\iint\cdots\int_{[0,1]^n}\left(x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k\right)dx_1dx_2\cdots dx_n$ の値を求めよ．

(2) 次の等式が成り立つことを示せ．ただし, $\dbinom{n}{j}$ は二項係数 ${}_nC_j=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!}$ を表す．

$$\iint\cdots\int_{[0,1]^n}\frac{1}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}dx_1dx_2\cdots dx_n=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}(j+1)^{n-1}\log(j+1)$$

(3) $a>0$, $k>-1$ とするとき n 重積分 $\displaystyle\iint\cdots\int_{[0,1]^n}\frac{1}{(x_1+x_2+\cdots+x_n+a)^{n+k}}dx_1dx_2\cdots dx_n$ の値を求めよ．

(4) $a>0$ とするとき n 重積分 $\displaystyle\iint\cdots\int_{[0,1]^n}\frac{1}{(x_1+x_2+\cdots+x_n+a)^{n-1}}dx_1dx_2\cdots dx_n$ の値を求めよ．

第 23 回の演習問題の解答

1. (1) $\iint_I (x+y)dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^1 (x+y)dx\right) dy = \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2}+xy\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^2 \left(y+\frac{1}{2}\right) dy = \left[\frac{y^2}{2}+\frac{y}{2}\right]_0^2 = 3$

(2) $\iint_I (x^2+y^2)dxdy = \int_0^b\left(\int_0^a (x^2+y^2)dx\right)dy = \int_0^b \left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_{x=0}^{x=a} dy = \int_0^b\left(\frac{a^3}{3}+ay^2\right)dy = \left[\frac{a^3y}{3}+\frac{ay^3}{3}\right]_0^b = \frac{ab(a^2+b^2)}{3}$

(3) $\iint_I x^3y^2dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^3y^2dx\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^4y^2}{4}\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{y^2}{4}dy = \left[\frac{y^3}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$

(4) $\iint_I xy^2dxdy = \int_a^b \left(\int_0^1 xy^2dx\right) dy = \int_a^b \left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_a^b \frac{y^2}{2}dy = \left[\frac{y^3}{6}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{6}$

(5) $\iint_I 12x^2y^3dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 12x^2y^3dx\right) dy = \int_0^1 [4x^3y^3]_{x=-1}^{x=1}dy = \int_0^1 8y^3dy = [2y^4]_0^1 = 2$

(6) $\iint_I e^x\sin y\,dxdy = \int_0^\alpha\left(\int_0^1 e^x\sin ydx\right)dy = \int_0^\alpha [e^x\sin y]_{x=0}^{x=1}\,dy = \int_0^\alpha (e-1)\sin y\,dy = [(1-e)\cos y]_0^\alpha = (e-1)(1-\cos\alpha)$

(7) $\iint_I \sin x\cos ydxdy = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos ydx\right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{6}} [-\cos x\cos y]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{3}}\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos y}{2}dy = \left[\frac{\sin y}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{4}$

(8) $\iint_I \frac{1}{x+y}dxdy = \int_2^3 \left(\int_1^2 \frac{1}{x+y}dx\right) dy = \int_2^3 [\log(x+y)]_{x=1}^{x=2}dy = \int_0^1 (\log(y+2)-\log(y+1))dy = [(y+2)\log(y+2)-(y+1)\log(y+1)]_2^3 = 5\log 5 - 16\log 2 + 3\log 3$

(9) $\iint_I \sin(x+y)dxdy = \int_0^b \left(\int_0^a \sin(x+y)dx\right) dy = \int_0^b [-\cos(x+y)]_{x=0}^{x=a}\,dy = \int_0^b (-\cos(y+a)+\cos y)\,dy = [-\sin(y+a)+\sin y]_0^b = -\sin(a+b)+\sin a+\sin b = 4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$

(10) $\iint_I x^{2n-1}y^m e^{x^ny^{m+1}}dxdy = \int_0^1\left(\int_0^1 x^{2n-1}y^m e^{x^ny^{m+1}}dy\right)dx = \int_0^1 \left[\frac{x^{n-1}e^{x^ny^{m+1}}}{m+1}\right]_{y=0}^{y=1} dx = \frac{1}{m+1}\int_0^1\left(x^{n-1}e^{x^n}-x^{n-1}\right)dx = \frac{1}{n(m+1)}[e^{x^n}-x^n]_0^1 = \frac{e-2}{n(m+1)}$

(11) $\iint_I \frac{y^{2n-1}}{xy^n+1}dxdy = \int_0^a \left(\int_0^1 \frac{y^{2n-1}}{xy^n+1}dx\right) dy = \int_0^a [y^{n-1}\log(xy^n+1)]_{x=0}^{x=1}\,dy = \int_0^a y^{n-1}\log(y^n+1)dy = \left[\frac{y^n+1}{n}\log(y^n+1)\right]_0^a - \int_0^a y^{n-1}\,dy = \frac{(a^n+1)\log(a^n+1)-a^n}{n}$

(12) $\iint_I \frac{y^{2n-1}}{x^2y^{2n}+1}dxdy = \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{y^{2n-1}}{(xy^n)^2+1}dx\right)dy = \int_0^1 [y^{n-1}\tan^{-1}(xy^n)]_{x=0}^{x=1}\,dy = \int_0^1 y^{n-1}\tan^{-1}(y^n)\,dy = \left[\frac{y^n\tan^{-1}(y^n)}{n}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^{2n-1}}{1+y^{2n}}dy = \frac{\pi}{4n} - \left[\frac{\log(1+y^{2n})}{2n}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4n}-\frac{\log 2}{2n}$

(13) $\iint_I y\cos(xy)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 y\cos(xy)dx\right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(xy)]_{x=0}^{x=1}dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin ydy = [-\cos y]_0^1 = 1$

(14) $\iint_I \frac{x}{\cos^2(xy)}dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(xy)}dy\right) dx = \int_0^1 [\tan(xy)]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{4}}\,dy = \int_0^1 \tan\frac{\pi x}{4}dy = \left[-\frac{4}{\pi}\log\left(\cos\frac{\pi x}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\log 2}{\pi}$

(15) $\iint_I y(x+y)^\alpha dxdy = \int_0^1\left(\int_0^1 y(x+y)^\alpha dx\right)dy = \int_0^1 \left[\frac{y(x+y)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{y\left((1+y)^{\alpha+1}-y^{\alpha+1}\right)}{\alpha+1}dy = \left[\frac{y\left((1+y)^{\alpha+2}-y^{\alpha+2}\right)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(1+y)^{\alpha+2}-y^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}dy = \frac{2^{\alpha+2}-1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \left[\frac{(1+y)^{\alpha+3}-y^{\alpha+3}}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\right]_0^1 = \frac{2^{\alpha+2}-1}{(\alpha+2)(\alpha+3)}$

(16) $\iiint_I xy^2z^3dxdydz = \int_0^4 \left(\int_0^3 \left(\int_0^2 xy^2z^3dx\right) dy\right) dz = \int_0^4 \left(\int_0^3 \left[\frac{1}{2}x^2y^2z^3\right]_{x=0}^{x=2} dy\right) dz = \int_0^4 \left(\int_0^3 2y^2z^3dy\right) dz = \int_0^4 \left[\frac{2}{3}y^3z^3\right]_{y=0}^{y=3} dz = \int_0^4 18z^3dz = \left[\frac{9}{2}z^4\right]_0^4 = 1152$

(17) $\displaystyle\iint_I x^y dxdy = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx\right) dy = \int_a^b \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = [\log(y+1)]_a^b = \log(b+1) - \log(a+1)$

(18) $\displaystyle\iint_I x^2 y \sin(xy^2) dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 x^2 y \sin(xy^2) dy\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{x}{2}\cos(xy^2)\right]_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2}(1-\cos(4x)) dx =$
$\displaystyle\left[\frac{x}{2}\left(x - \frac{\sin(4x)}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(4x)}{4}\right) dx = \frac{\pi^2}{8} - \left[\frac{x^2}{4} + \frac{\cos(4x)}{32}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16}$

(19) $\displaystyle\iint_I (x+y^2)^2 dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y^2)^2 dx\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{(x+y^2)^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2 + y^4\right) dy = \frac{13}{15}$

(20) $\displaystyle\iint_I x\sin(x+y) dxdy = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x+y) dy\right) dx = \int_0^{\pi} [-x\cos(x+y)]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} dx =$
$\displaystyle\int_0^{\pi} \left(-x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + x\cos x\right) dx = \int_0^{\pi} x(\sin x + \cos x) dx = [x(-\cos x + \sin x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x + \sin x) dx =$
$\pi - [-\sin x - \cos x]_0^{\pi} = \pi - 2$

(21) $\displaystyle\iint_I xy dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy dx\right) dy = \int_0^1 \frac{y}{2} dy = \frac{1}{4}$

(22) $\displaystyle\iint_I \frac{1}{(x+y+a)^2} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{(x+y+a)^2} dx\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{-1}{x+y+a}\right]_{x=0}^{x=1} dy =$
$\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{y+a} - \frac{1}{y+a+1}\right) dy = [\log(y+a) - \log(y+a+1)]_0^1 = -\log a + 2\log(a+1) - \log(a+2)$

(23) $\displaystyle\iint_I e^{x+y} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 e^{x+y} dx\right) dy = \int_0^1 (e^{y+1} - e^y) dy = (e-1)^2$

(24) $\displaystyle\iint_I \frac{1}{x+y+a} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{x+y+a} dx\right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 [\log(x+y+a)]_{x=0}^{x=1}\right) dy =$
$\displaystyle\int_0^1 (\log(y+a+1) - \log(y+a)) dy = [(y+a+1)\log(y+a+1) - (y+a)\log(y+a)]_0^1 =$
$a\log a - 2(a+1)\log(a+1) + (a+2)\log(a+2)$

(25) $\displaystyle\iint_I \frac{y^2}{x^2y^2+1} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y^2}{x^2y^2+1} dx\right) dy = \int_0^1 [y\tan^{-1}(xy)]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 y\tan^{-1} y dy = \left[\frac{y^2}{2}\tan^{-1} y\right]_0^1 -$
$\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right) dy = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[y - \tan^{-1} y]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

(26) $\displaystyle\iiint_I \sin(x+y+z) dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y+z) dx\right) dy\right) dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos(x+y+z)]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} dy\right) dz =$
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(y+z) + \cos(y+z)) dy\right) dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(y+z) - \cos(y+z)]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos z dz = 2$

2. (1) $c, d \neq 0$ の場合
$\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} x^{2m-1} y^{n-1} f''(x^m y^n)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d x^{2m-1} y^{n-1} f''(x^m y^n)\, dy\right) dx = \int_a^b \left[\frac{x^{m-1}}{n} f'(x^m y^n)\right]_{y=c}^{y=d} dx =$
$\displaystyle\int_a^b \frac{x^{m-1}}{n} (f'(d^n x^m) - f'(c^n x^m))\, dx = \left[\frac{f(d^n x^m)}{d^n mn} - \frac{f(c^n x^m)}{c^n mn}\right]_a^b = \frac{f(b^m d^n)}{d^n mn} - \frac{f(b^m c^n)}{c^n mn} - \frac{f(a^m d^n)}{d^n mn} + \frac{f(a^m c^n)}{c^n mn}$
$c = 0,\ d \neq 0$ の場合
$\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} x^{2m-1} y^{n-1} f''(x^m y^n)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_0^d x^{2m-1} y^{n-1} f''(x^m y^n)\, dy\right) dx = \int_a^b \left[\frac{x^{m-1}}{n} f'(x^m y^n)\right]_{y=0}^{y=d} dx =$
$\displaystyle\int_a^b \frac{x^{m-1}}{n} (f'(d^n x^m) - f'(0))\, dx = \left[\frac{f(d^n x^m)}{d^n mn} - \frac{f'(0) x^m}{mn}\right]_a^b = \frac{f(b^m d^n)}{d^n mn} - \frac{f'(0) b^m}{mn} - \frac{f(a^m d^n)}{d^n mn} + \frac{f'(0) a^m}{mn}$
$c \neq 0,\ d = 0$ の場合は, 上の場合で c と d を入れ替えて符号を変えたものである.
$\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} x^{2m-1} y^{n-1} f''(x^m y^n)\, dxdy = \frac{f'(0) b^m}{mn} - \frac{f(b^m c^n)}{c^n mn} - \frac{f'(0) a^m}{mn} + \frac{f(a^m c^n)}{c^n mn}$

(2) $c, d, p, q \neq 0$ の場合 $\displaystyle\iiint_I x^{3l-1} y^{2m-1} z^{n-1} f'''(x^l y^m z^n)\, dxdy =$
$\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_p^q x^{3l-1} y^{2m-1} z^{n-1} f'''(x^l y^m z^n)\, dz\right) dy\right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d \left[\frac{x^{2l-1} y^{m-1}}{n} f''(x^l y^m z^n)\right]_{z=p}^{z=q} dy\right) dx =$

$$\int_a^b\left(\int_c^d \frac{x^{2l-1}y^{m-1}}{n}\big(f''(q^nx^ly^m)-f''(p^nx^ly^m)\big)dy\right)dx=\int_a^b\left[\frac{x^{l-1}}{q^nmn}f'(q^nx^ly^m)-\frac{x^{l-1}}{p^nmn}f'(p^nx^ly^m)\right]_{y=c}^{y=d}dx=$$
$$\int_a^b\left(\frac{x^{l-1}}{q^nmn}f'(d^mq^nx^l)-\frac{x^{l-1}}{p^nmn}f'(d^mp^nx^l)-\frac{x^{l-1}}{q^nmn}f'(c^mq^nx^l)+\frac{x^{l-1}}{p^nmn}f'(c^mp^nx^l)\right)dx=$$
$$\left[\frac{f(d^mq^nx^l)}{d^mq^{2n}lmn}-\frac{f(d^mp^nx^l)}{d^mp^{2n}lmn}-\frac{f(c^mq^nx^l)}{c^mq^{2n}lmn}+\frac{f(c^mp^nx^l)}{c^mp^{2n}lmn}\right]_a^b=$$
$$\frac{f(b^ld^mq^n)}{d^mq^{2n}lmn}-\frac{f(b^ld^mp^n)}{d^mp^{2n}lmn}-\frac{f(b^lc^mq^n)}{c^mq^{2n}lmn}+\frac{f(b^lc^mp^n)}{c^mp^{2n}lmn}-\frac{f(a^ld^mq^n)}{d^mq^{2n}lmn}+\frac{f(a^ld^mp^n)}{d^mp^{2n}lmn}+\frac{f(a^lc^mq^n)}{c^mq^{2n}lmn}-\frac{f(a^lc^mp^n)}{c^mp^{2n}lmn}$$
$c,d,q\neq 0,\ p=0$ の場合 $\iiint_I x^{3l-1}y^{2m-1}z^{n-1}f'''(x^ly^mz^n)\,dxdy=$
$$\int_a^b\left(\int_c^d\left(\int_0^q x^{3l-1}y^{2m-1}z^{n-1}f'''(x^ly^mz^n)\,dz\right)dy\right)dx=\int_a^b\left(\int_c^d\left[\frac{x^{2l-1}y^{m-1}}{n}f''(x^ly^mz^n)\right]_{z=0}^{z=q}dy\right)dx=$$
$$\int_a^b\left(\int_c^d \frac{x^{2l-1}y^{m-1}}{n}\big(f''(q^nx^ly^m)-f''(0)\big)dy\right)dx=\int_a^b\left[\frac{x^{l-1}}{q^nmn}f'(q^nx^ly^m)-\frac{x^{2l-1}y^m}{mn}f''(0)\right]_{y=c}^{y=d}dx=$$
$$\int_a^b\left(\frac{x^{l-1}}{q^nmn}f'(d^mq^nx^l)-\frac{d^mx^{2l-1}}{mn}f''(0)-\frac{x^{l-1}}{q^nmn}f'(c^mq^nx^l)+\frac{c^mx^{2l-1}}{mn}f''(0)\right)dx=$$
$$\left[\frac{f(d^mq^nx^l)}{d^mq^{2n}lmn}-\frac{d^mf''(0)x^{2l}}{2lmn}-\frac{f(c^mq^nx^l)}{c^mq^{2n}lmn}+\frac{c^mf''(0)x^{2l}}{2lmn}\right]_a^b=$$
$$\frac{f(b^ld^mq^n)}{d^mq^{2n}lmn}-\frac{b^{2l}d^mf''(0)}{2lmn}-\frac{f(b^lc^mq^n)}{c^mq^{2n}lmn}+\frac{b^{2l}c^mf''(0)}{2lmn}-\frac{f(a^ld^mq^n)}{d^mq^{2n}lmn}+\frac{a^{2l}d^mf''(0)}{2lmn}+\frac{f(a^lc^mq^n)}{c^mq^{2n}lmn}-\frac{a^{2l}c^mf''(0)}{2lmn}$$
$c,d,p\neq 0,\ q=0$ の場合は上の場合で, p と q を入れ替えて符号を変えたものである.
$$\iiint_I x^{3l-1}y^{2m-1}z^{n-1}f'''(x^ly^mz^n)\,dxdy=$$
$$\frac{b^{2l}d^mf''(0)}{2lmn}-\frac{f(b^ld^mp^n)}{d^mp^{2n}lmn}-\frac{b^{2l}c^mf''(0)}{2lmn}+\frac{f(b^lc^mp^n)}{c^mp^{2n}lmn}-\frac{a^{2l}d^mf''(0)}{2lmn}+\frac{f(a^ld^mp^n)}{d^mp^{2n}lmn}+\frac{a^{2l}c^mf''(0)}{2lmn}-\frac{f(a^lc^mp^n)}{c^mp^{2n}lmn}$$
$d,p,q\neq 0,\ c=0$ の場合 $\iiint_I x^{3l-1}y^{2m-1}z^{n-1}f'''(x^ly^mz^n)\,dxdy=$
$$\int_a^b\left(\int_0^d\left(\int_p^q x^{3l-1}y^{2m-1}z^{n-1}f'''(x^ly^mz^n)\,dz\right)dy\right)dx=\int_a^b\left(\int_0^d\left[\frac{x^{2l-1}y^{m-1}}{n}f''(x^ly^mz^n)\right]_{z=p}^{z=q}dy\right)dx=$$
$$\int_a^b\left(\int_0^d \frac{x^{2l-1}y^{m-1}}{n}\big(f''(q^nx^ly^m)-f''(p^nx^ly^m)\big)dy\right)dx=\int_a^b\left[\frac{x^{l-1}}{q^nmn}f'(q^nx^ly^m)-\frac{x^{l-1}}{p^nmn}f'(p^nx^ly^m)\right]_{y=0}^{y=d}dx=$$
$$\int_a^b\left(\frac{x^{l-1}}{q^nmn}f'(d^mq^nx^l)-\frac{x^{l-1}}{p^nmn}f'(d^mp^nx^l)-\frac{x^{l-1}}{q^nmn}f'(0)+\frac{x^{l-1}}{p^nmn}f'(0)\right)dx=$$
$$\left[\frac{f(d^mq^nx^l)}{d^mq^{2n}lmn}-\frac{f(d^mp^nx^l)}{d^mp^{2n}lmn}-\frac{f'(0)x^l}{q^nlmn}+\frac{f'(0)x^l}{p^nlmn}\right]_a^b=$$
$$\frac{f(b^ld^mq^n)}{d^mq^{2n}lmn}-\frac{f(b^ld^mp^n)}{d^mp^{2n}lmn}-\frac{b^lf'(0)}{q^nlmn}+\frac{b^lf'(0)}{p^nlmn}-\frac{f(a^ld^mq^n)}{d^mq^{2n}lmn}+\frac{f(a^ld^mp^n)}{d^mp^{2n}lmn}+\frac{a^lf'(0)}{q^nlmn}-\frac{a^lf(0)}{p^nlmn}$$
$d=0,\ c,p,q\neq 0$ の場合は, 上の場合で c と d を入れ替えて符号を変えたものである.
$$\iiint_I x^{3l-1}y^{2m-1}z^{n-1}f'''(x^ly^mz^n)\,dxdy=$$
$$\frac{b^lf'(0)}{q^nlmn}-\frac{b^lf'(0)}{p^nlmn}-\frac{f(b^lc^mq^n)}{c^mq^{2n}lmn}+\frac{f(b^lc^mp^n)}{c^mp^{2n}lmn}-\frac{a^lf'(0)}{q^nlmn}+\frac{a^lf(0)}{p^nlmn}+\frac{f(a^lc^mq^n)}{c^mq^{2n}lmn}-\frac{f(a^lc^mp^n)}{c^mp^{2n}lmn}$$
$c=p=0,\ d,q\neq 0$ の場合 $\iiint_I x^{3l-1}y^{2m-1}z^{n-1}f'''(x^ly^mz^n)\,dxdy=$
$$\int_a^b\left(\int_0^d\left(\int_0^q x^{3l-1}y^{2m-1}z^{n-1}f'''(x^ly^mz^n)\,dz\right)dy\right)dx=\int_a^b\left(\int_0^d\left[\frac{x^{2l-1}y^{m-1}}{n}f''(x^ly^mz^n)\right]_{z=0}^{z=q}dy\right)dx=$$
$$\int_a^b\left(\int_0^d \frac{x^{2l-1}y^{m-1}}{n}\big(f''(q^nx^ly^m)-f''(0)\big)dy\right)dx=\int_a^b\left[\frac{x^{l-1}}{q^nmn}f'(q^nx^ly^m)-\frac{x^{2l-1}y^m}{mn}f''(0)\right]_{y=0}^{y=d}dx=$$
$$\int_a^b\left(\frac{x^{l-1}}{q^nmn}f'(d^mq^nx^l)-\frac{d^mx^{2l-1}}{mn}f''(0)-\frac{x^{l-1}}{q^nmn}f'(0)\right)dx=\left[\frac{f(d^mq^nx^l)}{d^mq^{2n}lmn}-\frac{d^mf''(0)x^{2l}}{2lmn}-\frac{f'(0)x^l}{q^nlmn}\right]_a^b=$$
$$\frac{f(b^ld^mq^n)}{d^mq^{2n}lmn}-\frac{b^{2l}d^mf''(0)}{2lmn}-\frac{b^lf'(0)}{q^nlmn}-\frac{f(a^ld^mq^n)}{d^mq^{2n}lmn}+\frac{a^{2l}d^mf''(0)}{2lmn}+\frac{a^lf'(0)}{q^nlmn}$$
$c=q=0,\ d,p\neq 0$ の場合は上の場合で, p と q を入れ替えて符号を変えたものである.

$$\iiint_I x^{3l-1}y^{2m-1}z^{n-1}f'''(x^ly^mz^n)\,dxdy =$$
$$\frac{b^{2l}d^mf''(0)}{2lmn}-\frac{f(b^ld^mp^n)}{d^mp^{2n}lmn}+\frac{b^lf'(0)}{p^nlmn}-\frac{a^{2l}d^mf''(0)}{2lmn}+\frac{f(a^ld^mp^n)}{d^mp^{2n}lmn}-\frac{a^lf'(0)}{p^nlmn}$$
$d=q=0,\ c,p\neq 0$ の場合は上の場合で, c と d を入れ替えて符号を変えたものである.
$$\iiint_I x^{3l-1}y^{2m-1}z^{n-1}f'''(x^ly^mz^n)\,dxdy =$$
$$-\frac{b^lf'(0)}{p^nlmn}-\frac{b^{2l}c^mf''(0)}{2lmn}+\frac{f(b^lc^mp^n)}{c^mp^{2n}lmn}+\frac{a^lf'(0)}{p^nlmn}+\frac{a^{2l}c^mf''(0)}{2lmn}-\frac{f(a^lc^mp^n)}{c^mp^{2n}lmn}$$
$d=p=0,\ c,q\neq 0$ の場合は上の場合で, p と q を入れ替えて符号を変えたものである.
$$\iiint_I x^{3l-1}y^{2m-1}z^{n-1}f'''(x^ly^mz^n)\,dxdy =$$
$$\frac{b^lf'(0)}{q^nlmn}-\frac{f(b^lc^mq^n)}{c^mq^{2n}lmn}+\frac{b^{2l}c^mf''(0)}{2lmn}-\frac{a^lf'(0)}{q^nlmn}+\frac{f(a^lc^mq^n)}{c^mq^{2n}lmn}-\frac{a^{2l}c^mf''(0)}{2lmn}$$

3. (1) $I_n=\iint\cdots\int_{[0,1]^n}\left(x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k\right)dx_1dx_2\cdots dx_n$ とおくと, $I_1=\int_0^1 x_1^k\,dx_1=\dfrac{1}{k+1}$ であり,

$$\begin{aligned}I_n&=\iint\cdots\int_{[0,1]^{n-1}}\left(\int_0^1\left(x_1^k+x_2^k+\cdots+x_{n-1}^k+x_n^k\right)dx_n\right)dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}\\&=\iint\cdots\int_{[0,1]^{n-1}}\left(x_1^k+x_2^k+\cdots+x_{n-1}^k+\frac{1}{k+1}\right)dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}\\&=I_{n-1}+\frac{1}{k+1}\iint\cdots\int_{[0,1]^{n-1}}dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}=I_{n-1}+\frac{1}{k+1}\end{aligned}$$

だから, 数列 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ は初項と公差がともに $\dfrac{1}{k+1}$ の等差数列である. 故に $I_n=\dfrac{n}{k+1}$ である.

(2) $f_m:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ を, $m=1,2,\ldots,n-1$ に対して

$$f_m(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{(m-1)!}\binom{m}{k}\left(m+1-k+\sum_{i=1}^{n-m-1}x_i+x\right)^{m-1}\left(\log\left(m+1-k+\sum_{i=1}^{n-m-1}x_i+x\right)-\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{i}\right)$$

によって定め, $f_n:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ は, 常に $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(n-1)!}\binom{n}{k}(n+1-k)^{n-1}\left(\log(n+1-k)-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\right)$ を値にとる定数値関数であるとする.

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_m(x)dx&=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{(m-1)!}\binom{m}{k}\left(m+1-k+\sum_{i=1}^{n-m}x_i\right)^{m-1}\left(\log\left(m+1-k+\sum_{i=1}^{n-m}x_i\right)-\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{i}\right)\right)dx_{n-m}\\&=\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{m!}\binom{m}{k}\left(m+1-k+\sum_{i=1}^{n-m}x_i\right)^{m}\left(\log\left(m+1-k+\sum_{i=1}^{n-m}x_i\right)-\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{i}\right)\right]_{x_{n-m}=0}^{x_{n-m}=1}\\&\quad-\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{m!}\binom{m}{k}\left(m+1-k+\sum_{i=1}^{n-m}x_i\right)^{m-1}\right)dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{m!} \binom{m}{k} \left(m+2-k+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right)^m \left(\log\left(m+2-k+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i} \right) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{m!} \binom{m}{k} \left(m+1-k+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right)^m \left(\log\left(m+1-k+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i} \right) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{m!m} \binom{m}{k} \left(m+2-k+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right)^m + \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{m!m} \binom{m}{k} \left(m+1-k+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right)^m \\
&= \frac{1}{m!} \left(m+2+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right)^m \left(\log\left(m+2+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i} \right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k}{m!} \binom{m}{k} \left(m+2-k+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right)^m \left(\log\left(m+2-k+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i} \right) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{m!} \binom{m}{k} \left(m+1-k+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right)^m \left(\log\left(m+1-k+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i} \right) \\
&\quad - \frac{(-1)^m}{m!} \left(1+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right)^m \left(\log\left(1+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i} \right) \\
&\quad - \frac{1}{m!m} \left(m+2+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right)^m - \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k}{m!m} \binom{m}{k} \left(m+2-k+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right)^m \\
&\quad + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{m!m} \binom{m}{k} \left(m+1-k+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right)^m + \frac{(-1)^m}{m!m} \left(1+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right)^m \\
&= \frac{1}{m!} \left(m+2+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right)^m \left(\log\left(m+2+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i} \right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k}{m!} \binom{m}{k} \left(m+2-k+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right)^m \left(\log\left(m+2-k+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i} \right) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{m!} \binom{m}{k-1} \left(m+2-k+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right)^m \left(\log\left(m+2-k+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i} \right) \\
&\quad - \frac{(-1)^m}{m!} \left(1+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right)^m \left(\log\left(1+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i} \right) \\
&\quad - \frac{1}{m!m} \left(m+2+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right)^m - \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k}{m!m} \binom{m}{k} \left(m+2-k+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right)^m \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{m!m} \binom{m}{k-1} \left(m+2-k+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right)^m + \frac{(-1)^m}{m!m} \left(1+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right)^m \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \frac{(-1)^k}{m!} \binom{m+1}{k} \left(m+2-k+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right)^m \left(\log\left(m+2-k+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i} \right) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{m+1} \frac{(-1)^k}{m!m} \binom{m+1}{k} \left(m+2-k+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right)^m \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \frac{(-1)^k}{m!} \binom{m+1}{k} \left(m+2-k+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right)^m \left(\log\left(m+2-k+\sum_{i=1}^{n-m-1} x_i \right) - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} \right) \\
&= f_{m+1}(x_{n-m-1})
\end{aligned}
$$

だから, $1 \leqq m \leqq n-1$ のとき, $\displaystyle\int_0^1 f_m(x_{n-m})dx_{n-m} = \int_0^1 f_m(x)dx = f_{m+1}(x_{n-m-1})$ である. このことから,

$$
\begin{aligned}
\iint\cdots\int_{[0,1]^n} \frac{1}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}dx_1dx_2\cdots dx_n &= \int_0^1\left(\int_0^1\left(\cdots\left(\int_0^1 \frac{1}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}dx_n\right)\cdots\right)dx_2\right)dx_1 \\
&= \int_0^1\left(\int_0^1\left(\cdots\left(\int_0^1 \left[\log\left(1+\sum_{i=1}^n x_i\right)\right]_{x_n=0}^{x_n=1} dx_{n-1}\right)\cdots\right)dx_2\right)dx_1 \\
&= \int_0^1\left(\int_0^1\left(\cdots\left(\int_0^1 f_1(x_{n-1})dx_{n-1}\right)\cdots\right)dx_2\right)dx_1 \\
&\cdots \\
&= \int_0^1\left(\int_0^1\left(\cdots\left(\int_0^1 f_m(x_{n-m})dx_{n-m}\right)\cdots\right)dx_2\right)dx_1 \\
&= \int_0^1\left(\int_0^1\left(\cdots\left(\int_0^1 f_{m+1}(x_{n-m-1})dx_{n-m-1}\right)\cdots\right)dx_2\right)dx_1 \\
&\cdots \\
&= \int_0^1 f_{n-1}(x_1)dx_1 = f_n(x) \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(n-1)!}\binom{n}{k}(n+1-k)^{n-1}\left(\log(n+1-k)-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\right) \\
&= \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{n-j}}{(n-1)!}\binom{n}{n-j}(j+1)^{n-1}\left(\log(j+1)-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\right) \\
&= \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{n-j}}{(n-1)!}\binom{n}{j}(j+1)^{n-1}\left(\log(j+1)-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\right)
\end{aligned}
$$

となるため, 次の等式が示された.

$$
\iint\cdots\int_{[0,1]^n} \frac{1}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}dx_1dx_2\cdots dx_n = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{n-j}}{(n-1)!}\binom{n}{j}(j+1)^{n-1}\left(\log(j+1)-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\right) \quad \cdots(*)
$$

次に, $p(x)$ が $n-1$ 次以下の多項式ならば $\sum_{j=0}^n(-1)^j\binom{n}{j}p(j)=0$ が成り立つことを n による帰納法で示す. $n=1$ の場合には, この主張は明らかに成り立つ. $n-1$ 次以下の任意の多項式 $q(x)$ に対して $\sum_{j=0}^n(-1)^j\binom{n}{j}q(j)=0$ が成り立つと仮定し, $p(x)$ を n 次以下の任意の多項式とする. このとき, $q(x)=p(x+1)-p(x)$ とおけば, $q(x)$ は $n-1$ 次以下の多項式であるため, 帰納法の仮定により

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}p(k) &= 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k}p(k)+(-1)^{n+1}p(n+1) \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}p(k)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k-1}p(k)+(-1)^{n+1}p(n+1) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}p(k)-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}p(k+1) = -\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}q(k) = 0
\end{aligned}
$$

となって, 主張が成り立つことがわかる. とくに $p(x)=(x+1)^{n-1}$ とすれば, $\sum_{j=0}^n(-1)^j\binom{n}{j}(j+1)^{n-1}=0$ が得られるため, $(*)$ の右辺は $\displaystyle\frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^n(-1)^{n-j}\binom{n}{j}(j+1)^{n-1}\log(j+1)$ に等しいことがわかる.

(3) $I_n^k(a)=\iint\cdots\int_{[0,1]^n}\dfrac{1}{(x_1+x_2+\cdots+x_n+a)^{n+k}}dx_1dx_2\cdots dx_n$ とおくとき, $n\geqq 2$ ならば

$$\begin{aligned}
I_n^k(a)&=\iint\cdots\int_{[0,1]^{n-1}}\left(\int_0^1\frac{1}{(x_1+x_2+\cdots+x_n+a)^{n+k}}dx_n\right)dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}\\
&=\iint\cdots\int_{[0,1]^{n-1}}\left[-\frac{1}{(n+k-1)(x_1+x_2+\cdots+x_n+a)^{n+k-1}}\right]_{x_n=0}^{x_n=1}dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}\\
&=\frac{1}{n+k-1}\iint\cdots\int_{[0,1]^{n-1}}\left(\frac{1}{(x_1+\cdots+x_{n-1}+a)^{n+k-1}}-\frac{1}{(x_1+\cdots+x_{n-1}+a+1)^{n+k-1}}\right)dx_1\cdots dx_{n-1}\\
&=\frac{1}{n+k-1}(I_{n-1}^k(a)-I_{n-1}^k(a+1))
\end{aligned}$$

より $I_n^k(a)=\dfrac{1}{n+k-1}(I_{n-1}^k(a)-I_{n-1}^k(a+1))$ である. この等式の両辺に $\prod_{j=1}^{n-1}(k+j)$ をかけて $J_n^k(a)=\prod_{j=1}^{n-1}(k+j)I_n^k(a)$ とおけば, $J_n^k(a)=J_{n-1}^k(a)-J_{n-1}^k(a+1)$ が得られる. ここで,

$$J_1^k(a)=I_1^k(a)=\int_0^1\frac{1}{(x_1+a)^{k+1}}dx_1=\begin{cases}\log(a+1)-\log a & k=0\\ \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{a^k}-\dfrac{1}{(a+1)^k}\right) & k\neq 0\end{cases}$$

だから, $J_2^0(a)=J_1^0(a)-J_1^0(a+1)=-\log a+2\log(a+1)-\log(a+2)=\sum_{i=0}^{2}(-1)^{i+1}\binom{2}{i}\log(a+i)$ が成り立ち, $k\neq 0$ ならば $J_2^k(a)=J_1^k(a)-J_1^k(a+1)=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{a^k}-\dfrac{2}{(a+1)^k}+\dfrac{1}{(a+2)^k}\right)=\dfrac{1}{k}\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\binom{2}{i}\dfrac{1}{(a+i)^k}$ が成り立つ. そこで, 数学的帰納法で次の等式が成り立つことを示す.

$$J_n^0(a)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\log(a+i),\quad J_n^k(a)=\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\frac{1}{(a+i)^k}\quad(k\neq 0)$$

上でみたように, $n=1,2$ のときは主張が成り立つ. $n\geqq 2$ に対して $J_{n-1}^0(a)=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}\binom{n-1}{i}\log(a+i)$, $J_{n-1}^k(a)=\dfrac{1}{k}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}\dfrac{1}{(a+i)^k}$ $(k\neq 0)$ が成り立つと仮定する.

$$\begin{aligned}
J_n^0(a)&=J_{n-1}^0(a)-J_{n-1}^0(a+1)=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}\binom{n-1}{i}\log(a+i)-\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}\binom{n-1}{i}\log(a+i+1)\\
&=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}\binom{n-1}{i}\log(a+i)+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n-1}{i-1}\log(a+i)\\
&=-\log a+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\left(\binom{n-1}{i}+\binom{n-1}{i-1}\right)\log(a+i)+(-1)^{n+1}\log(a+n)\\
&=-\log a+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\log(a+i)+(-1)^{n+1}\log(a+n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\log(a+i)\\
J_n^k(a)&=J_{n-1}^k(a)-J_{n-1}^k(a+1)=\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}\frac{1}{(a+i)^k}-\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}\frac{1}{(a+i+1)^k}\\
&=\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}\frac{1}{(a+i)^k}+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n-1}{i-1}\frac{1}{(a+i)^k}\\
&=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{a^k}+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\left(\binom{n-1}{i}+\binom{n-1}{i-1}\right)\frac{1}{(a+i)^k}+(-1)^n\frac{1}{(a+n)^k}\right)\\
&=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{a^k}+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\binom{n}{i}\frac{1}{(a+i)^k}+(-1)^n\frac{1}{(a+n)^k}\right)=\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\frac{1}{(a+i)^k}
\end{aligned}$$

が得られ, n のときも主張が成り立つことがわかる. (上で $\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}$ が成り立つことを用いた.) 故に $I_n^0(a)=\dfrac{J_n^0(a)}{(n-1)!}=\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{(-1)^{i+1}}{(n-1)!}\binom{n}{i}\log(a+i)$ であり, $k\neq 0$ ならば $I_n^k(a)$ は次のようになる.

$$I_n^k(a)=J_n^k(a)\left(\prod_{i=1}^{n-1}(k+i)\right)^{-1}=\prod_{i=1}^{n-1}\frac{1}{k+i}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\frac{1}{(a+i)^k}$$

(4) $I_n(a)=\displaystyle\iint\cdots\int_{[0,1]^n}\frac{1}{(x_1+x_2+\cdots+x_n+a)^{n-1}}dx_1dx_2\cdots dx_n$ とおくとき, $n\geqq 3$ ならば

$$\begin{aligned}
I_n(a)&=\iint\cdots\int_{[0,1]^{n-1}}\left(\int_0^1\frac{1}{(x_1+x_2+\cdots+x_n+a)^{n-1}}dx_n\right)dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}\\
&=\iint\cdots\int_{[0,1]^{n-1}}\left[-\frac{1}{(n-2)(x_1+x_2+\cdots+x_n+a)^{n-2}}\right]_{x_n=0}^{x_n=1}dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}\\
&=\frac{1}{n-2}\iint\cdots\int_{[0,1]^{n-1}}\left(\frac{1}{(x_1+\cdots+x_{n-1}+a)^{n-2}}-\frac{1}{(x_1+\cdots+x_{n-1}+a+1)^{n-2}}\right)dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}\\
&=\frac{1}{n-2}(I_{n-1}(a)-I_{n-1}(a+1))
\end{aligned}$$

だから $I_n(a)=\dfrac{1}{n-2}(I_{n-1}(a)-I_{n-1}(a+1))$ が成り立つ. この等式の両辺に $(n-2)!$ をかけて $J_n(a)=(n-2)!I_n(a)$ とおけば, $J_n(a)=J_{n-1}(a)-J_{n-1}(a+1)$ が得られる. 問題 1 の (24) の結果から

$$J_2(a)=I_2(a)=\iint_{[0,1]^n}\frac{1}{x_1+x_2+a}dx_1dx_2=\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\binom{2}{k}(a+i)\log(a+i)$$

だから, $J_n(a)=\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(a+i)\log(a+k)$ が成り立つことを数学的帰納法で示す. 上でみたように, $n=2$ のときは主張が成り立つ. $n\geqq 3$ に対して $J_{n-1}(a)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}(a+i)\log(a+i)$ が成り立つと仮定する.

$$\begin{aligned}
J_n(a)=J_{n-1}(a)-J_{n-1}(a+1)&=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}(a+i)\log(a+i)-\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}(a+i+1)\log(a+i+1)\\
&=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}(a+i)\log(a+i)+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n-1}{i-1}(a+i)\log(a+i)\\
&=a\log a+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\left(\binom{n-1}{i}+\binom{n-1}{i-1}\right)(a+i)\log(a+i)+(-1)^n(a+n)\log(a+n)\\
&=a\log a+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\binom{n}{i}(a+i)\log(a+i)+(-1)^n(a+n)\log(a+n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(a+i)\log(a+i)
\end{aligned}$$

が得られ, n のときも主張が成り立つ. 故に $n\geqq 2$ ならば $I_n(a)=\dfrac{J_n(a)}{(n-2)!}=\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{(-1)^i}{(n-2)!}\binom{n}{i}(a+i)\log(a+i)$ である.

微積分学 II 演習問題　第 24 回　縦線図形における重積分

1. 以下の積分を計算せよ. ただし (3) では $d > 1$, (18) では $a, b > 0$, (29) では $l > 1$, $p, q > 0$ であり, m, n は 0 以上の整数

(1) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \leqq y \leqq 2 - x^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$

(2) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq 2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$

(3) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ (a+d)x^2 + (b-d)x + c \leqq y \leqq ax^2 + bx + c \right\}$, $\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$

(4) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \geqq 0,\ x^3 - x \leqq y \leqq 3x \right\}$, $\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$

(5) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x^2 \leqq y \leqq x + 2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D (2x+3y)dxdy$

(6) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x^2 \leqq y \leqq x \right\}$, $\displaystyle\iint_D xydxdy$

(7) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \geqq y^2,\ y \geqq x^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D xydxdy$

(8) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x^2 \leqq y \leqq 2 - x \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(24x^2 + 84y^2\right) dxdy$

(9) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq x \leqq 2,\ -3x \leqq y \leqq x - x^3 \right\}$, $\displaystyle\iint_D 6x^2ydxdy$

(10) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq y \leqq 1 - x^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D 12x^2ydxdy$

(11) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \leqq y \leqq 2x - x^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D 12x^2ydxdy$

(12) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq x \leqq 1,\ x^2 \leqq y \leqq 2 - x \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(x^3 - 2xy\right) dxdy$

(13) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \geqq y^2,\ y \geqq x^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D (xy+y)dxdy$

(14) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \geqq y^2,\ y \geqq x^3 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(xy + y^2\right) dxdy$

(15) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \leqq y \leqq 3x - x^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D (x+xy)dxdy$

(16) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 2x \leqq y \leqq x - x^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(x^2 - y^2\right) dxdy$

(17) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ \frac{1}{2}x^2 \leqq y \leqq 6 - x^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(x^2 - y\right) dxdy$

(18) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ (a^2-1)x^2 \leqq y \leqq a^2b^2 - x^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(x^2 - xy\right) dxdy$

(19) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 11x^2 \leqq y \leqq 3 - x^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(x^2 + xy\right) dxdy$

(20) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 3x + x^2 \leqq y \leqq -x \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(xy - y^2\right) dxdy$

(21) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \leqq y \leqq 3x,\ x + y \leqq 4 \right\}$, $\displaystyle\iint_D (2x+y)dxdy$

(22) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \leqq y \leqq 2x,\ x + y \leqq 3 \right\}$, $\displaystyle\iint_D (2x - xy)dxdy$

(23) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| 1 \leqq x \leqq 2,\ \frac{1}{x} \leqq y \leqq 2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(x^3 - 3xy\right) dxdy$

(24) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq x \leqq -y^4 + y^2 + 12 \right\}$, $\displaystyle\iint_D y^2dxdy$

(25) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ y^2 - 4 \leqq x \leqq -y^4 + 2y^2 + 8 \right\}$, $\displaystyle\iint_D (x+2y)dxdy$

(26) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x^2 - x \leqq y \leqq -2x \right\}$, $\displaystyle\iint_D (x^2+3y^2)dxdy$

(27) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ -2x + 2 \leqq y \leqq x - x^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D (2xy - 3y^2)dxdy$

(28) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,y\geqq-1,\ y-2\leqq x\leqq-y^3+4y\right\}$, $\displaystyle\iint_D(2x-y)dxdy$

(29) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x\geqq0,\ x^l-x\leqq y\leqq-x^l+x\right\}$, $\displaystyle\iint_D\left(x^p+x^qy^{2m+1}+y^{2n+1}\right)dxdy$

(30) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4},\ 0\leqq y\leqq x\right\}$, $\displaystyle\iint_D\sin(x+3y)dxdy$

(31) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x\geqq0,\ y\geqq0,\ x+y\leqq\pi\right\}$, $\displaystyle\iint_D\sin(x+y)dxdy$

(32) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq2,\ -x\leqq y\leqq x\right\}$, $\displaystyle\iint_D xe^{2y}dxdy$

(33) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq1,\ 0\leqq y\leqq3x^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{2y}{1+x}dxdy$

(34) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,1\leqq x\leqq2,\ x\leqq y\leqq\sqrt{3}x\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{1}{x^2+y^2}dxdy$

(35) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq y\leqq2-x\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{y}{(x+1)^2}dxdy$

(36) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq1,\ x^2\leqq y\leqq1\right\}$, $\displaystyle\iint_D y^3e^{xy}dxdy$

(37) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,1\leqq x\leqq\sqrt{2},\ x\leqq y\leqq x^3\right\}$, $\displaystyle\iint_D x^4e^{xy}dxdy$

(38) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2\leqq1\right\}$, $\displaystyle\iint_D\sqrt{1-x^2}dxdy$

(39) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq y\leqq\frac{x}{2}\leqq1\right\}$, $\displaystyle\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}dxdy$

(40) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq1,\ 0\leqq y\leqq x^3\right\}$, $\displaystyle\iint_D e^{x^2}dxdy$

(41) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq1,\ 1\leqq y\leqq e^x\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{xe^x}{y}dxdy$

(42) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq1,\ x^2\leqq y\leqq1\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{4x}{1+y^4}dxdy$

(43) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq1,\ x^3\leqq y\leqq x\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{3y^2}{x^4+1}dxdy$

(44) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq1,\ 0\leqq y\leqq x\right\}$, $\displaystyle\iint_D x^2\sqrt{x^2+y^2}dxdy$

(45) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,y\geqq x^2,\ x\geqq0,\ 1\leqq y\leqq3\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{2x}{x^2+y^2}dxdy$

(46) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq\sqrt[3]{\pi},\ 0\leqq y\leqq3x^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D\sin\left(x^3\right)dxdy$

(47) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq1,\ 0\leqq y\leqq x^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D\frac{x^7}{\sqrt{1+x^3y}}dxdy$

(48) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq1,\ 0\leqq y\leqq1,\ x^2\leqq y^{n-1}\leqq1\right\}$ $(n\geqq1)$, $\displaystyle\iint_D 6x\sqrt{1+y^n}\,dxdy$

(49) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq y\leqq3,\ \sqrt{\frac{y}{3}}\leqq x\leqq1\right\}$, $\displaystyle\iint_D x\sqrt{x^2+y}\,dxdy$

(50) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq y\leqq3x,\ y\leqq4x-x^3\right\}$, $\displaystyle\iint_D\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dxdy$

(51) $D=[0,\pi]\times[0,\pi]$, $\displaystyle\iint_D|\cos(x+y)|dxdy$

2. (1) $c>0$, $k>1$ とし, f を 0 と c を含む開区間で定義された C^1 級関数とする. このとき, 累次積分 $\displaystyle\int_0^c\left(\int_{(c-x)^{\frac{1}{k-1}}}^{c^{\frac{1}{k-1}}}f'(y^k)dy\right)dx$ の値を k, m, c, r および f を用いて表せ.

(2) r を自然数, $k,c>0$, $m>\dfrac{1}{r}$ とし, f を 0 と c^{km} を含む開区間で定義された C^r 級関数とする. このとき, 累次積分 $\displaystyle\int_0^c\left(\int_{x^k}^{c^k}x^{k(mr-1)-1}f^{(r)}(y^m)dy\right)dx$ の値を k, m, c, r および f を用いて表せ.

(3) r, s を自然数, k, n, c を正の実数とし, m は $m+n>0$ を満たす実数であるとする. 0 と $c^{k(m+n)}$ を含む開区間

で定義された C^{r+s} 級関数 f に対し, 累次積分 $\displaystyle\int_0^c\left(\int_{x^k}^{c^k} x^{knr-1}y^{m(r+s)+ns-1}f^{(r+s)}(x^{kn}y^m)dy\right)dx$ の値を k, m, n, c, r, s および f を用いて表せ.

第 24 回の演習問題の解答

1. (1) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ -2\leqq x\leqq 1,\ x\leqq y\leqq 2-x^2\right\}$ より $\displaystyle\iint_D(x+y)dxdy=\int_{-2}^{1}\left(\int_x^{2-x^2}(x+y)dy\right)dx=$

$\displaystyle\int_{-2}^{1}\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=x}^{y=2-x^2}dx=\int_{-2}^{1}\left(\frac{x^4}{2}-x^3-\frac{7x^2}{2}+2x+2\right)dx=\left[\frac{x^5}{10}-\frac{x^4}{4}-\frac{7x^3}{6}+x^2+2x\right]_{-2}^{1}=-\frac{9}{20}$

(2) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ 0\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq 2-x\right\}$ より $\displaystyle\iint_D(x+y)dxdy=\int_0^2\left(\int_0^{2-x}(x+y)\,dy\right)dx=$

$\displaystyle\int_0^2\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2-x}dx=\int_0^2\left(2-\frac{x^2}{2}\right)dx=\left[2x-\frac{x^3}{6}\right]_0^2=\frac{8}{3}$

(3) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ 0\leqq x\leqq 1,\ (a+d)x^2+(b-d)x+c\leqq y\leqq ax^2+bx+c\right\}$ より $\displaystyle\iint_D(x+y)dxdy=$

$\displaystyle\int_0^1\left(\int_{(a+d)x^2+(b-d)x+c}^{ax^2+bx+c}(x+y)dy\right)dx=\int_0^1\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=(a+d)x^2+(b-d)x+c}^{y=ax^2+bx+c}dx=$

$\displaystyle\int_0^1\frac{d}{2}\left(-(2a+d)x^4+2(a-b+d-1)x^3+(2b-2c-d+2)x^2+2cx\right)dx=\frac{d}{60}(3a+5b+10c-d+5)$

(4) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ 0\leqq x\leqq 2,\ x^3-x\leqq y\leqq 3x\right\}$ より $\displaystyle\iint_D(x+y)dxdy=\int_0^2\left(\int_{x^3-x}^{3x}(x+y)\,dy\right)dx=$

$\displaystyle\int_0^2\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^3-x}^{y=3x}dx=\int_0^2\left(8x^2-\frac{x^6}{2}\right)dx=\left[\frac{8}{3}x^3-\frac{x^7}{14}\right]_0^2=\frac{256}{21}$

(5) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ -1\leqq x\leqq 2,\ x^2\leqq y\leqq x+2\right\}$ だから $\displaystyle\iint_D(2x+3y)dxdy=\int_{-1}^{2}\left(\int_{x^2}^{x+2}(2x+3y)dy\right)dx=$

$\displaystyle\int_{-1}^{2}\left[2xy+\frac{3y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=x+2}dx=\int_{-1}^{2}\left(6+10x+\frac{7x^2}{2}-2x^3-\frac{3x^4}{2}\right)dx=\left[6x+5x^2+\frac{7x^3}{6}-\frac{x^4}{2}-\frac{3x^5}{10}\right]_{-1}^{2}=\frac{261}{10}$

(6) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ 0\leqq x\leqq 1,\ x^2\leqq y\leqq x\right\}$ より

$\displaystyle\iint_D xydxdy=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{x}xydy\right)dx=\int_0^1\left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=x}dx=\int_0^1\left(\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{2}\right)dx=\left[\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{12}\right]_0^1=\frac{1}{24}$

(7) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ 0\leqq x\leqq 1,\ x^2\leqq y\leqq\sqrt{x}\right\}$ より

$\displaystyle\iint_D xydxdy=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}}xydy\right)dx=\int_0^1\left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}dx=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{2}\right)dx=\left[\frac{x^3}{6}-\frac{x^6}{12}\right]_0^1=\frac{1}{12}$

(8) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ -2\leqq x\leqq 1,\ x^2\leqq y\leqq 2-x\right\}$ だから $\displaystyle\iint_D\left(24x^2+84y^2\right)dxdy=$

$\displaystyle\int_{-2}^{1}\left(\int_{x^2}^{2-x}\left(24x^2+84y^2\right)dy\right)dx=\int_{-2}^{1}\left[24x^2y+28y^3\right]_{y=x^2}^{y=2-x}dx=\int_{-1}^{2}\left(48x^2-24x^3+28(2-x)^3-24x^4-28x^6\right)dx$

$\displaystyle=\left[16x^3-6x^4-7(2-x)^4-\frac{24x^5}{5}-4x^7\right]_{-2}^{1}=\frac{6723}{5}$

(9) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ 0\leqq x\leqq 2,\ -3x\leqq y\leqq x-x^3\right\}$ より $\displaystyle\iint_D 6x^2ydxdy=\int_0^2\left(\int_{-3x}^{x-x^3}6x^2ydy\right)dx=$

$\displaystyle\int_0^2[3x^2y^2]_{-3x}^{x-x^3}dx=\int_0^2\left(3x^8-6x^6-24x^4\right)dx=\left[\frac{x^9}{3}-\frac{6}{7}x^7-\frac{24}{5}x^5\right]_0^2=-\frac{9728}{105}$

(10) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ -1\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1-x^2\right\}$ より $\displaystyle\iint_D 12x^2ydxdy=\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{1-x^2}12x^2ydy\right)dx=$

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\left[6x^2y^2\right]_{y=0}^{y=1-x^2}dx=\int_{-1}^{1}6x^2\left(1-x^2\right)^2dx=12\int_0^1\left(x^2-2x^4+x^6\right)dx=12\left[\frac{x^2}{3}-\frac{2x^5}{5}+\frac{x^7}{7}\right]_0^1=\frac{32}{35}$

(11) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ 0\leqq x\leqq 1,\ x\leqq y\leqq 2x-x^2\right\}$ より $\displaystyle\iint_D 12x^2ydxdy=\int_0^1\left(\int_x^{2x-x^2}12x^2ydy\right)dx=$

$\displaystyle\int_0^1\left[6x^2y^2\right]_{y=x}^{y=2x-x^2}dx=\int_0^1\left(18x^4-24x^5+6x^6\right)dx=\left[\frac{18x^5}{5}-4x^5+\frac{6x^7}{7}\right]_0^1=\frac{16}{35}$

(12) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 1,\ x^2\leqq y\leqq 2-x\right\}$ より $\displaystyle\iint_D\left(x^3-2xy\right)dxdy=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{2-x}\left(x^3-2xy\right)dy\right)dx=$ $\displaystyle\int_0^1\left[x^3y-xy^2\right]_{y=x^2}^{y=2-x}dx=\int_0^1\left(x^3-x^4-4x+4x^2\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-2x^2+\frac{4x^3}{3}\right]_0^1=-\frac{37}{60}$

(13) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 1,\ x^2\leqq y\leqq \sqrt{x}\right\}$ より $\displaystyle\iint_D(xy+y)dxdy=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(xy+y)dy\right)dx=$ $\displaystyle\int_0^1\left[\frac{xy^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}dx=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-\frac{x^5}{2}-\frac{x^4}{2}\right)dx=\left[\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^6}{12}-\frac{x^5}{10}\right]_0^1=\frac{7}{30}$

(14) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 1,\ x^3\leqq y\leqq \sqrt{x}\right\}$ より $\displaystyle\iint_D\left(xy+y^2\right)dxdy=\int_0^1\left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}}\left(xy+y^2\right)dy\right)dx=$ $\displaystyle\int_0^1\left[\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right]_{y=x^3}^{y=\sqrt{x}}dx=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x^7}{2}-\frac{x^9}{3}\right)dx=\left[\frac{x^3}{6}+\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{15}-\frac{x^8}{16}-\frac{x^{10}}{30}\right]_0^1=\frac{49}{240}$

(15) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 2,\ x\leqq y\leqq 3x-x^2\right\}$ より $\displaystyle\iint_D(x+xy)dxdy=\int_0^2\left(\int_x^{3x-x^2}(x+xy)dy\right)dx=$ $\displaystyle\int_0^2\left[xy+\frac{xy^2}{2}\right]_{y=x}^{y=3x-x^2}dx=\int_0^2\left(\frac{x^5}{2}-3x^4+3x^3+2x^2\right)dx=\left[\frac{x^6}{12}-\frac{3}{5}x^5+\frac{3}{4}x^3+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2=\frac{52}{15}$

(16) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,-1\leqq x\leqq 0,\ 2x\leqq y\leqq x-x^2\right\}$ より $\displaystyle\iint_D\left(x^2-y^2\right)dxdy=\int_{-1}^0\left(\int_{2x}^{x-x^2}\left(x^2-y^2\right)dy\right)dx=$ $\displaystyle\int_{-1}^0\left[x^2y-\frac{y^3}{3}\right]_{y=2x}^{y=x-x^2}dx=\int_{-1}^0\left(\frac{x^6}{3}-x^5+\frac{4x^3}{3}\right)dx=\left[\frac{x^7}{21}-\frac{x^6}{6}+\frac{2x^4}{6}\right]_{-1}^0=-\frac{5}{42}$

(17) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,-2\leqq x\leqq 2,\ \frac{1}{2}x^2\leqq y\leqq 6-x^2\right\}$ より $\displaystyle\iint_D\left(x^2-y\right)dxdy=\int_{-2}^2\left(\int_{\frac{1}{2}x^2}^{6-x^2}\left(x^2-y\right)dy\right)dx=$ $\displaystyle\int_{-2}^2\left[x^2y-\frac{y^2}{2}\right]_{y=\frac{1}{2}x^2}^{y=6-x^2}dx=\int_{-2}^2\left(12x^2-18-\frac{15x^4}{8}\right)dx=\left[4x^3-18x-\frac{3x^5}{8}\right]_{-2}^2=-32$

(18) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,-b\leqq x\leqq b,\ (a^2-1)x^2\leqq y\leqq a^2b^2-x^2\right\}$ より $\displaystyle\iint_D\left(x^2-xy\right)dxdy=$ $\displaystyle\int_{-b}^b\left(\int_{(a^2-1)x^2}^{a^2b^2-x^2}\left(x^2-xy\right)dy\right)dx=\int_{-b}^b\left[x^2y-\frac{xy^2}{2}\right]_{y=(a^2-1)x^2}^{y=a^2b^2-x^2}dx=$ $\displaystyle\int_{-b}^b\left(\frac{a^4-2a^2}{2}x^5-a^2x^4+a^2b^2x^3+a^2b^2x^2-\frac{a^4b^4}{2}x\right)dx=2\int_0^b\left(a^2b^2x^2\right)dx=2\left[\frac{a^2b^2}{3}x^3-\frac{a^2}{5}x^5\right]_0^b=\frac{4a^2b^5}{15}$

(19) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,-\frac{1}{2}\leqq x\leqq \frac{1}{2},\ 11x^2\leqq y\leqq 3-x^2\right\}$ より $\displaystyle\iint_D\left(x^2+xy\right)dxdy=$ $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\int_{11x^2}^{3-x^2}\left(x^2+xy\right)dy\right)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[x^2y+\frac{xy^2}{2}\right]_{y=11x^2}^{y=3-x^2}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(x^2\left(3-12x^2\right)+\frac{x}{2}\left(\left(3-x^2\right)-121x^4\right)\right)dx=$ $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(3x^2-12x^4\right)dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x}{2}\left(\left(3-x^2\right)-121x^4\right)dx=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(3x^2-12x^4\right)dx=2\left[x^3-\frac{12}{5}x^5\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{10}$
($3x^2-12x^4$ は偶関数, $\dfrac{x}{2}\left(\left(3-x^2\right)-121x^4\right)$ は奇関数であることを用いた.)

(20) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,-4\leqq x\leqq 0,\ 3x+x^2\leqq y\leqq -x\right\}$ より $\displaystyle\iint_D\left(xy-y^2\right)dxdy=\int_{-4}^0\left(\int_{3x+x^2}^{-x}\left(xy-y^2\right)dy\right)dx=$ $\displaystyle\int_{-4}^0\left[\frac{xy^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_{y=3x+x^2}^{y=-x}dx=\int_{-4}^0\left(\frac{16x^3}{3}+6x^4+\frac{5x^5}{2}+\frac{x^6}{3}\right)dx=\left[\frac{4x^4}{3}+\frac{6x^5}{5}+\frac{5x^6}{12}+\frac{x^7}{21}\right]_{-4}^0=-\frac{4096}{105}$

(21) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 1,\ x\leqq y\leqq 3x\right\}\cup\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,1\leqq x\leqq 2,\ x\leqq y\leqq 4-x\right\}$ より $\displaystyle\iint_D(2x+y)dxdy=$ $\displaystyle\int_0^1\left(\int_x^{3x}(2x+y)dy\right)dx+\int_1^2\left(\int_x^{4-x}(2x+y)dy\right)dx=\int_0^1\left[2xy+\frac{y^2}{2}\right]_x^{3x}dx+\int_1^2\left[2xy+\frac{y^2}{2}\right]_x^{4-x}dx=$ $\displaystyle\int_0^1 8x^2dx+\int_1^2\left(4x-4x^2+8\right)dx=\left[\frac{8x^3}{3}\right]_0^1+\left[2x^2-\frac{4x^3}{3}+8x\right]_1^2=\frac{22}{3}$

(22) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\ x\leqq y\leqq 2x\right\}\cup\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 1\leqq x\leqq \frac{3}{2},\ x\leqq y\leqq 3-x\right\}$ より $\displaystyle\iint_D(2x-xy)dxdy=$
$\displaystyle\int_0^1\left(\int_x^{2x}(2x-xy)dy\right)dx+\int_1^{\frac{3}{2}}\left(\int_x^{3-x}(2x-xy)dy\right)dx=\int_0^1\left[2xy-\frac{xy^2}{2}\right]_x^{2x}dx+\int_1^{\frac{3}{2}}\left[2xy-\frac{xy^2}{2}\right]_x^{3-x}dx=$
$\displaystyle\int_0^1\left(2x^2-\frac{3x^3}{2}\right)dx+\int_1^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3x}{2}-x^2\right)dx=\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{3x^4}{8}\right]_0^1+\left[\frac{3x^2}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_1^{\frac{3}{2}}=\frac{7}{16}$

(23) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 1\leqq x\leqq 2,\ \frac{1}{x}\leqq y\leqq 2\right\}$ より $\displaystyle\iint_D\left(x^3-3xy\right)dxdy=\int_1^2\left(\int_{\frac{1}{x}}^2\left(x^3-3xy\right)dy\right)dx=$
$\displaystyle\int_1^2\left[x^3y-\frac{3xy^2}{2}\right]_{y=\frac{1}{x}}^{y=2}dx=\int_1^2\left(2x^3-6x-x^2+\frac{3}{2x}\right)dx=\left[\frac{x^4}{2}-3x^2-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}\log x\right]_1^2=\frac{3}{2}\log 2-\frac{23}{6}$

(24) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, -2\leqq y\leqq 2,\ 0\leqq x\leqq -y^4+y^2+12\right\}$ より $\displaystyle\iint_D y^2dxdy=$
$\displaystyle\int_{-2}^2\left(\int_0^{-y^4+y^2+12}y^2dx\right)dy=\int_{-2}^2[xy^2]_{x=0}^{x=-y^4+y^2+12}dy=\int_{-2}^2(-y^6+y^4+12y^2)dy=\left[-\frac{y^7}{7}+\frac{y^5}{5}+4y^3\right]_{-2}^2=\frac{1408}{35}$

(25) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, -2\leqq y\leqq 2,\ y^2-4\leqq x\leqq -y^4+2y^2+8\right\}$ より $\displaystyle\iint_D(x+2y)dxdy=$
$\displaystyle\int_{-2}^2\left(\int_{y^2-4}^{-y^4+2y^2+8}(x+2y)dx\right)dy=\int_{-2}^2\left[\frac{x^2}{2}+2xy\right]_{x=y^2-4}^{x=-y^4+2y^2+8}dy=$
$\displaystyle\int_{-2}^2\left(\frac{y^8}{2}-2y^6-2y^5-\frac{13y^4}{2}+2y^3+20y^2+24y+24\right)dy=$
$\displaystyle\left[\frac{y^9}{18}-\frac{2y^7}{7}-\frac{y^6}{3}-\frac{13y^5}{10}+\frac{y^4}{2}+\frac{20y^3}{3}+12y^2+24y\right]_{-2}^2=\frac{32512}{315}$

(26) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, -1\leqq x\leqq 0,\ x^2-x\leqq y\leqq -2x\right\}$ より $\displaystyle\iint_D(x^2+3y^2)dxdy=\int_{-1}^0\left(\int_{x^2-x}^{-2x}(x^2+3y^2)\,dy\right)dx=$
$\displaystyle\int_{-1}^0[x^2y+y^3]_{y=x^2-x}^{y=-2x}dx=\int_{-1}^0\left(-8x^3-4x^4+3x^5-x^6\right)dx=\left[-2x^4-\frac{4}{5}x^5+\frac{1}{2}x^6-\frac{1}{7}x^7\right]_{-1}^0=\frac{39}{70}$

(27) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 1\leqq x\leqq 2,\ -2x+2\leqq y\leqq x-x^2\right\}$ より $\displaystyle\iint_D(2xy-3y^2)\,dxdy=$
$\displaystyle\int_1^2\left(\int_{x-x^2}^{-2x+2}(2xy-3y^2)\,dy\right)dx=\int_1^2[xy^2-y^3]_{y=x-x^2}^{y=-2x+2}dx=\int_1^2\left(-8+28x-32x^2+12x^3-x^4+2x^5-x^6\right)dx=$
$\displaystyle\left[-8x+14x^2-\frac{32x^3}{3}+3x^4-\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^7}{7}\right]_1^2=\frac{104}{105}$

(28) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, -1\leqq y\leqq 2,\ y-2\leqq x\leqq -y^3+4y\right\}$, $\displaystyle\iint_D(2x-y)dxdy=\int_{-1}^2\left(\int_{y-2}^{-y^3+4y}(2x-y)\,dx\right)dy=$
$\displaystyle\int_{-1}^2\left[x^2-xy\right]_{x=y-2}^{x=-y^3+4y}dy=\int_{-1}^2\left(y^6-7y^4+10y^2+6y-4\right)dy=\left[\frac{y^7}{7}-\frac{7y^5}{5}+\frac{10y^3}{3}+3y^2-4y\right]_{-1}^2=-\frac{27}{35}$

(29) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\ x^l-x\leqq y\leqq -x^l+x\right\}$ であり, $x^qy^{2m+1}+y^{2n+1}$ は y に関して奇関数だから,
$\displaystyle\iint_D\left(x^p+x^qy^{2m+1}+y^{2n+1}\right)dxdy=\int_0^1\left(\int_{x^l-x}^{-x^l+x}\left(x^p+x^qy^{2m+1}+y^{2n+1}\right)dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_{x^l-x}^{-x^l+x}x^p\,dy\right)dx=$
$\displaystyle\int_0^1 2(x^{p+1}-x^{l+p})dx=2\left[\frac{x^{p+2}}{p+2}-\frac{x^{l+p+1}}{l+p+1}\right]_0^1=\frac{2(l-1)}{(p+2)(l+p+1)}.$

(30) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq \frac{\pi}{4},\ 0\leqq y\leqq x\right\}$ より $\displaystyle\iint_D\sin(x+3y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^x\sin(x+3y)dy\right)dx=$
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[-\frac{1}{3}\cos(x+3y)\right]_{y=0}^{y=x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{3}\cos x-\frac{1}{3}\cos 4x\right)dx=\left[\frac{1}{3}\sin x-\frac{1}{12}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$

(31) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq \pi,\ 0\leqq y\leqq \pi-x\right\}$ より $\displaystyle\iint_D\sin(x+y)dxdy=\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\pi-x}\sin(x+y)dy\right)dx=$
$\displaystyle\int_0^{\pi}[-\cos(x+y)]_{y=0}^{y=\pi-x}dx=\int_0^{\pi}(1+\cos x)dx=[x+\sin x]_0^{\pi}=\pi$

(32) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 2,\ -x\leqq y\leqq x\right\}$ より $\iint_D xe^{2y}dxdy=\int_0^2\left(\int_{-x}^{x}xe^{2y}dy\right)dx=\int_0^2\left[\frac{xe^{2y}}{2}\right]_{y=-x}^{y=x}dx=$
$\int_0^2\left(\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{xe^{-2x}}{2}\right)dx=\left[\frac{xe^{2x}}{4}+\frac{xe^{-2x}}{4}\right]_0^2-\int_0^2\left(\frac{e^{2x}}{4}+\frac{e^{-2x}}{4}\right)dx=\frac{e^4+e^{-4}}{2}-\left[\frac{e^{2x}}{8}-\frac{e^{-2x}}{8}\right]_0^2=\frac{3e^4+5e^{-4}}{8}$

(33) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 3x^2\right\}$ より $\iint_D\frac{2y}{1+x}dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{3x^2}\frac{2y}{1+x}dy\right)dx=$
$\int_0^1\left[\frac{y^2}{1+x}\right]_{y=0}^{y=3x^2}dx=\int_0^1\frac{9x^4}{1+x}dx=\int_0^1 9\left(x^3-x^2+x-1+\frac{1}{1+x}\right)dx=$
$\left[\frac{9x^4}{4}-3x^3+\frac{9x^2}{2}-9x+9\log(1+x)\right]_0^1=9\log2-\frac{21}{4}$

(34) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,1\leqq x\leqq 2,\ x\leqq y\leqq \sqrt{3}x\right\}$ より $\iint_D\frac{1}{x^2+y^2}dxdy=\int_1^2\left(\int_x^{\sqrt3x}\frac{1}{x^2+y^2}dy\right)dx=$
$\int_1^2\left[\frac1x\tan^{-1}\frac yx\right]_{y=x}^{y=\sqrt3x}dx=\int_1^2\frac{\pi}{12x}dx=\left[\frac{\pi}{12}\log x\right]_1^2=\frac{\pi\log2}{12}$

(35) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 1,\ x\leqq y\leqq 2-x\right\}$ より $\iint_D\frac{y}{(x+1)^2}dxdy=\int_0^1\left(\int_x^{2-x}\frac{y}{(x+1)^2}dy\right)dx=$
$\int_0^1\left[\frac{y^2}{2(x+1)^2}\right]_{y=x}^{y=2-x}dx=\int_0^1\frac{2-2x}{(x+1)^2}dx=\int_0^1\left(\frac{4}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}\right)dx=\left[-\frac{4}{x+1}-2\log(x+1)\right]_0^1=2-2\log2$

(36) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq \sqrt{y}\right\}$ より $\iint_D y^3e^{xy}dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt y}y^3e^{xy}dx\right)dy=$
$\int_0^1\left[y^2e^{xy}\right]_{x=0}^{x=\sqrt y}dy=\int_0^1\left(y^2e^{y^{\frac32}}-y^2\right)dy=\int_0^1y^2e^{y^{\frac32}}dy-\int_0^1y^2dy$ である．$t=y^{\frac32}$ とおけば $y=t^{\frac23}$, $dy=\frac{2}{3t^{\frac13}}dt$
であり, y が 0 から 1 まで動くとき, t も 0 から 1 まで動くため, $\int_0^1y^2e^{y^{\frac32}}dy=\int_0^1\frac{2te^t}{3}dt=\left[\frac{2te^t}{3}\right]_0^1-\int_0^1\frac{2e^t}{3}dt=$
$\frac{2e}{3}-\left[\frac{2e^t}{3}\right]_0^1=\frac23$ である．従って $\iint_D y^3e^{xy}dxdy=\frac23-\int_0^1y^2dy=\frac13$

(37) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,1\leqq x\leqq \sqrt{2},\ x\leqq y\leqq x^3\right\}$ より $\iint_D x^4e^{xy}dxdy=\int_1^{\sqrt2}\left(\int_x^{x^3}x^4e^{xy}dy\right)dy=$
$\int_1^{\sqrt2}\left[x^3e^{xy}\right]_{y=x}^{y=x^3}dx=\int_1^{\sqrt2}\left(x^3e^{x^4}-x^3e^{x^2}\right)dy=\int_1^{\sqrt2}x^3e^{x^4}dx-\int_1^{\sqrt2}x^3e^{x^2}dy$ である．$s=x^4$ とおけば $x^3dx=$
$\frac14ds$ であり, x が 1 から $\sqrt2$ まで動くとき, s は 1 から 4 まで動くため, $\int_1^{\sqrt2}x^3e^{x^4}dx=\int_1^4\frac14e^sds=\frac{e^4}{4}-\frac e4$
である．$t=x^2$ とおけば $x^3dx=\frac t2dt$ であり, x が 1 から $\sqrt2$ まで動くとき, t は 1 から 2 まで動くため,
$\int_1^{\sqrt2}x^3e^{x^2}dx=\int_1^2\frac{te^t}{2}dt=\left[\frac{te^t}{2}\right]_1^2-\int_1^2\frac{e^t}{2}dt=\frac{e^2}{2}$ である．従って $\iint_D x^4e^{xy}dxdy=\frac{e^4}{4}-\frac{e^2}{2}-\frac e4$.

(38) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,-1\leqq x\leqq 1,\ -\sqrt{1-x^2}\leqq y\leqq \sqrt{1-x^2}\right\}$ より
$\iint_D\sqrt{1-x^2}dxdy=\int_{-1}^1\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}dy\right)dx=\int_{-1}^1 2\left(1-x^2\right)dx=\left[2x-\frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^1=\frac83$

(39) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq \frac{x}{2}\right\}$ より $\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^2\left(\int_0^{\frac x2}y\sqrt{x^2+y^2}dy\right)dx=$
$\int_0^2\left[\frac13\left(x^2+y^2\right)^{\frac32}\right]_{y=0}^{y=\frac x2}dx=\int_0^2\left(\frac{5\sqrt5}{24}-\frac13\right)x^3dx=\left[\left(\frac{5\sqrt5}{24}-\frac13\right)\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\frac{5\sqrt5}{6}-\frac43$

(40) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x^3\right\}$ より $\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{x^3}e^{x^2}dy\right)dx=\int_0^1x^3e^{x^2}dx$ である．
$t=x^2$ とおけば $x^3dx=\frac t2dt$ であり, x が 0 から 1 まで動くとき, t も 0 から 1 まで動くため,

$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1 x^3e^{x^2}dx=\int_0^1\frac{te^t}{2}dt=\left[\frac{te^t}{2}\right]_0^1-\int_0^1\frac{e^t}{2}dt=\frac{1}{2}$ である.

(41) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ 0\leqq x\leqq 1,\ 1\leqq y\leqq e^x\right\}$ より $\iint_D\frac{xe^x}{y}dxdy=\int_0^1\left(\int_1^{e^x}\frac{xe^x}{y}dy\right)dx=\int_0^1\left[xe^x\log y\right]_{y=1}^{y=e^x}dx$
$=\int_0^1 x^2e^xdx=\left[x^2e^x\right]_0^1-\int_0^1 2xe^xdx=e-\left[2xe^x\right]_0^1+\int_0^1 2e^xdx=-e+\left[2e^x\right]_0^1=e-2$

(42) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ 0\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq\sqrt{y}\right\}$ より
$\iint_D\frac{4x}{1+y^4}dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{y}}\frac{4x}{1+y^4}dx\right)dy=\int_0^1\left[\frac{2x^2}{1+y^4}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}}dy=\int_0^1\frac{2y}{1+y^4}dy=\left[\tan^{-1}\left(y^2\right)\right]_0^1=\frac{\pi}{4}$

(43) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ 0\leqq x\leqq 1,\ x^3\leqq y\leqq x\right\}$ より $\iint_D\frac{3y^2}{x^4+1}dxdy=\int_0^1\left(\int_{x^3}^{x}\frac{3y^2}{x^4+1}dy\right)dx=$
$\int_0^1\left[\frac{y^3}{x^4+1}\right]_{y=x^3}^{y=x}dx=\int_0^1\left(\frac{x^3}{x^4+1}-\frac{x^9}{x^4+1}\right)dx=\int_0^1\frac{x^3}{x^4+1}dx-\int_0^1\frac{x^9}{x^4+1}dx$ である. $s=x^4+1$ とおけば $x^3dx=\frac{1}{4}ds$ であり, x が 0 から 1 まで動くとき, s は 1 から 2 まで動くため, $\int_0^1\frac{x^3}{x^4+1}dx=\int_1^2\frac{1}{4s}ds=\left[\frac{\log s}{4}\right]_1^2=\frac{\log 2}{4}$ である. $t=x^2$ とおけば $xdx=\frac{1}{2}dt$ であり, x が 0 から 1 まで動くとき, t も 0 から 1 まで動くため, $\int_0^1\frac{x^9}{x^4+1}dx=\int_0^1\frac{t^4}{2(t^2+1)}dt=\int_0^1\frac{1}{2}\left(t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}-t+\tan^{-1}t\right]_0^1=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}$ である. 従って $\iint_D\frac{3y^2}{x^4+1}dxdy=\frac{\log 2}{4}-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{3}$.

(44) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x\right\}$ より $\iint_D x^2\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^1\left(\int_0^x x^2\sqrt{x^2+y^2}dy\right)dx=$
$\int_0^1\left[\frac{x^2y}{2}\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x^4}{2}\log\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]_{y=0}^{y=x}dx=\int_0^1\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right)x^4dx=\frac{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})}{10}$
(教科書の 104 ページの結果を用いた.)

(45) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ 1\leqq y\leqq 3,\ 0\leqq x\leqq\sqrt{y},\right\}$ より $\iint_D\frac{2x}{x^2+y^2}dxdy=\int_1^3\left(\int_0^{\sqrt{y}}\frac{2x}{x^2+y^2}dx\right)dy=$
$\int_1^3\left[\log\left(x^2+y^2\right)\right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}}dx=\int_1^3(\log(1+y)-\log y)dx=\left[(1+y)\log(1+y)-y\log y\right]_1^3=6\log 2-3\log 3$

(46) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ 0\leqq x\leqq\sqrt[3]{\pi},\ 0\leqq y\leqq 3x^2\right\}$ より
$\iint_D\sin\left(x^3\right)dxdy=\int_0^{\sqrt[3]{\pi}}\left(\int_0^{3x^2}\sin\left(x^3\right)dy\right)dx=\int_0^{\sqrt[3]{\pi}}3x^2\sin\left(x^3\right)dx=\left[-\cos\left(x^3\right)\right]_0^{\sqrt[3]{\pi}}=2$

(47) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x^2\right\}$ より $\iint_D\frac{x^7}{\sqrt{1+x^3y}}dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{x^2}\frac{x^7}{\sqrt{1+x^3y}}dy\right)dx=$
$\int_0^1\left[2x^4\sqrt{1+x^3y}\right]_{y=0}^{y=x^2}dx=\int_0^1\left(2x^4\sqrt{1+x^5}-2x^4\right)dx=\left[\frac{4}{15}\left(1+x^5\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{2x^5}{5}\right]_0^1=\frac{8\sqrt{2}}{15}-\frac{2}{3}$

(48) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ 0\leqq y\leqq 1,0\leqq x\leqq\sqrt{y^{n-1}}\right\}$ より $\iint_D 6x\sqrt{1+y^n}dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{y^{n-1}}}6x\sqrt{1+y^n}\,dx\right)dy=$
$\int_0^1\left[3x^2\sqrt{1+y^n}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{y^{n-1}}}dy=\int_0^1 3y^{n-1}\sqrt{1+y^n}dy=\left[\frac{2}{n}\left(1+y^n\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{n}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

(49) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ 0\leqq y\leqq 3,\ \sqrt{\frac{y}{3}}\leqq x\leqq 1\right\}$ より $\iint_D x\sqrt{x^2+y}dxdy=\int_0^3\left(\int_{\sqrt{\frac{y}{3}}}^1 x\sqrt{x^2+y}dx\right)dy=$
$\int_0^3\left[\frac{1}{3}\left(x^2+y\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=\sqrt{\frac{y}{3}}}^{x=1}dy=\int_0^3\left(\frac{1}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}}-\frac{8}{9\sqrt{3}}y^{\frac{3}{2}}\right)dy=\left[\frac{2}{15}(1+y)^{\frac{5}{2}}-\frac{16}{45\sqrt{3}}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^3=\frac{14}{15}$

(50) $D=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 3x\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ 1\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq 4x-x^3\right\}$ より
$\iint_D\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{3x}\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dy\right)dx+\int_1^2\left(\int_0^{4x-x^3}\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dy\right)dx=\int_0^1 3x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx+$

$\displaystyle\int_1^2 (4x-x^3)\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx = \int_0^1 3x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx + \int_1^2 4x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx - \int_1^2 x^3\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx$ である.
$\displaystyle\int_0^1 3x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx = \left[\frac{3}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\right]_0^1 = \frac{3}{\pi}$, $\displaystyle\int_1^2 4x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx = \left[\frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\right]_1^2 = -\frac{4}{\pi}$ であり, $t=x^2$ とおけば $x^3dx = \dfrac{t}{2}dt$ であり, x が 1 から 2 まで動くとき, t は 1 から 4 まで動くため, $\displaystyle\int_1^2 x^3\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx =$
$\displaystyle\int_1^4 \frac{t}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt = \left[\frac{t}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]_1^4 - \int_1^4 \frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt = -\frac{1}{\pi} + \left[\frac{2}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]_1^4 = -\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi^2}$ である. 以上から $\displaystyle\iint_D \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dxdy = \frac{3}{\pi} - \frac{4}{\pi} - \left(-\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi^2}\right) = -\frac{2}{\pi^2}$.
(51) D の部分集合 $D_1 = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2},\, 0\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}-x\right\}$, $D_2 = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}-x\leqq y\leqq\pi\right\}$, $D_3 = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi,\, 0\leqq y\leqq\frac{3\pi}{2}-x\right\}$, $D_4 = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi,\, \frac{3\pi}{2}-x\leqq y\leqq\pi\right\}$ を考える. $i\neq j$ ならば $D_i\cap D_j$ は線分, 点, 空集合のいずれかであり, $D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4$ が成り立つ. また, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in D_1\cup D_4$ ならば $\cos(x+y)\geqq 0$ であり, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in D_2\cup D_3$ ならば $\cos(x+y)\leqq 0$ だから $\displaystyle\iint_D |\cos(x+y)|dxdy =$
$\displaystyle\iint_{D_1}\cos(x+y)dxdy - \iint_{D_2}\cos(x+y)dxdy - \iint_{D_3}\cos(x+y)dxdy + \iint_{D_4}\cos(x+y)dxdy =$
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)dy\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi}\cos(x+y)dy\right)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_0^{\frac{3\pi}{2}-x}\cos(x+y)dy\right)dx +$
$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_{\frac{3\pi}{2}-x}^{\pi}\cos(x+y)dy\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin(x+y)]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}-x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin(x+y)]_{y=\frac{\pi}{2}-x}^{y=\pi}dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[\sin(x+y)]_{y=0}^{\frac{3\pi}{2}-x}dx +$
$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[\sin(x+y)]_{y=\frac{3\pi}{2}-x}^{y=\pi}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+1)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\sin x+1)dx =$
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+1)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\sin x+1)dx = 2\pi$

2. (1) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle| 0\leqq x\leqq c, (c-x)^{\frac{1}{k-1}}\leqq y\leqq c^{\frac{1}{k-1}}\right\}$ とおけば $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle| 0\leqq y\leqq c^{\frac{1}{k-1}}, c-y^{k-1}\leqq x\leqq c\right\}$ でもあるから, $\displaystyle\int_0^c\left(\int_{(c-x)^{\frac{1}{k-1}}}^{c^{\frac{1}{k-1}}} f'(y^k)dy\right)dx = \iint_D f'(y^k)dxdy = \int_0^{c^{\frac{1}{k-1}}}\left(\int_{c-y^{k-1}}^{c} f'(y^k)dx\right)dy =$
$\displaystyle\int_0^{c^{\frac{1}{k-1}}}\left[xf'(y^k)\right]_{x=c-y^{k-1}}^{x=c}dy = \int_0^{c^{\frac{1}{k-1}}} y^{k-1}f'(y^k)\,dy = \left[\frac{1}{k}f(y^k)\right]_0^{c^{\frac{1}{k-1}}} = \frac{1}{k}\left(f\left(c^{\frac{1}{k-1}}\right)-f(0)\right)$.
(2) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq c,\, x^k\leqq y\leqq c^k\right\}$ とおけば $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq y\leqq c^k,\, 0\leqq x\leqq y^{\frac{1}{k}}\right\}$ でもあるから, 第 10 回の演習問題 5 の結果を用いると $\displaystyle\int_0^c\left(\int_{x^k}^{c^k} x^{k(mr-1)-1}f^{(r)}(y^m)dy\right)dx = \iint_D x^{k(mr-1)-1}f^{(r)}(y^m)dxdy =$
$\displaystyle\int_0^{c^k}\left(\int_0^{y^{\frac{1}{k}}} x^{k(mr-1)-1}f^{(r)}(y^m)dx\right)dy = \int_0^{c^k}\left[\frac{x^{k(mr-1)}f^{(r)}(y^m)}{k(mr-1)}\right]_{x=0}^{x=y^{\frac{1}{k}}}dy = \int_0^{c^k}\frac{y^{mr-1}f^{(r)}(y^m)}{k(mr-1)}dy =$
$\displaystyle\left[\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(-1)^{r-i-1}(r-1)!x^{im}}{i!km(mr-1)}f^{(i)}(x^m)\right]_0^{c^k} = \sum_{i=0}^{r-1}\frac{(-1)^{r-i-1}(r-1)!c^{ikm}}{i!km(mr-1)}f^{(i)}(c^{km}) - \frac{(-1)^{r-1}(r-1)!}{km(mr-1)}f(0)$.
(3) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq c,\, x^k\leqq y\leqq c^k\right\}$ とおけば $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq y\leqq c^k,\, 0\leqq x\leqq y^{\frac{1}{k}}\right\}$ でもあるから, 第 10 回の演習問題 5 の結果を用いると $\displaystyle\int_0^c\left(\int_{x^k}^{c^k} x^{knr-1}y^{m(r+s)+ns-1}f^{(r+s)}(x^{kn}y^m)dy\right)dx =$
$\displaystyle\iint_D x^{knr-1}y^{m(r+s)+ns-1}f^{(r+s)}(x^{kn}y^m)dxdy = \int_0^{c^k}\left(\int_0^{y^{\frac{1}{k}}} x^{knr-1}y^{m(r+s)+ns-1}f^{(r+s)}(x^{kn}y^m)dx\right)dy =$
$\displaystyle\int_0^{c^k}\left[\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(-1)^{r-i-1}(r-1)!x^{ikn}y^{(i+s)m+ns-1}}{i!kn}f^{(i+s)}(x^{kn}y^m)\right]_{x=0}^{x=y^{\frac{1}{k}}}dy =$

$$\int_0^{c^k}\left(\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(-1)^{r-i-1}(r-1)!y^{(i+s)(m+n)-1}}{i!kn}f^{(i+s)}(y^{m+n})-\frac{(-1)^{r-1}(r-1)!y^{(m+n)s-1}}{kn}f^{(s)}(0)\right)dy=$$

$$\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(-1)^{r-i-1}(r-1)!}{i!kn}\int_0^{c^k}y^{(i+s)(m+n)-1}f^{(i+s)}(y^{m+n})dy-\frac{(-1)^{r-1}(r-1)!f^{(s)}(0)}{kn}\int_0^{c^k}y^{(m+n)s-1}dy=$$

$$\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{i+s-1}\frac{(-1)^{r-i-1}(r-1)!}{i!kn}\left[\frac{(-1)^{i+s-j-1}(i+s-1)!y^{j(m+n)}}{j!(m+n)}f^{(j)}(y^{m+n})\right]_0^{c^k}-\frac{(-1)^{r-1}(r-1)!c^{ks(m+n)}f^{(s)}(0)}{kns(m+n)}=$$

$$\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{i+s-1}\left[\frac{(-1)^{r+s-j}(r-1)!(i+s-1)!y^{j(m+n)}}{i!j!kn(m+n)}f^{(j)}(y^{m+n})\right]_0^{c^k}-\frac{(-1)^{r-1}(r-1)!c^{ks(m+n)}f^{(s)}(0)}{kns(m+n)}=$$

$$\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{i+s-1}\frac{(-1)^{r+s-j}(r-1)!(i+s-1)!c^{jk(m+n)}}{i!j!kn(m+n)}f^{(j)}\left(c^{k(m+n)}\right)-\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(-1)^{r+s}(r-1)!(i+s-1)!}{i!kn(m+n)}f(0)-$$

$$\frac{(-1)^{r-1}(r-1)!c^{ks(m+n)}f^{(s)}(0)}{kns(m+n)}=$$

$$\frac{(r-1)!}{kn(m+n)}\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{i+s-1}\frac{(-1)^{r+s-j}(i+s-1)!c^{jk(m+n)}}{i!j!}f^{(j)}\left(c^{k(m+n)}\right)-\frac{(-1)^{r+s}(r-1)!f(0)}{kn(m+n)}\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(i+s-1)!}{i!}-$$

$$\frac{(-1)^{r-1}(r-1)!c^{ks(m+n)}f^{(s)}(0)}{kns(m+n)}.$$

微積分学 II 演習問題　第 25 回　重積分の変数変換

1. 以下の積分を計算せよ．ただし $0 < a < b$, mn n は 0 以上の整数とし, p は実数, q は分母が奇数で分子が偶数である正の有理数とする．

(1) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x^2 dxdy$

(2) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x^2 y^2 dxdy$

(3) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D (2x^2 + 3y^2)^2 dxdy$

(4) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D 16x^2 y^2 (x^2 + y^2) dxdy$

(5) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ y \geqq 0,\ 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 9 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x^4 dxdy$

(6) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D y^2 (4x^2 + y^2)^2 dxdy$

(7) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq 4 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x(x^2 + 4y^2)^2 dxdy$

(8) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ x \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq 1, \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} dxdy$

(9) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ a^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq b^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x^m y^n \left(x^2 + y^2\right)^p dxdy$

(10) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ y \geqq 0,\ a^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq b^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x^m y^n \left(x^2 + y^2\right)^p dxdy$

(11) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ y \geqq x,\ a^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq b^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x^m y^n (x^2 + y^2)^p dxdy$

(12) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ y \geqq x,\ x^2 + y^2 \leqq 4 \right\}$, $\displaystyle\iint_D (x^2 - y^2)^2 dxdy$

(13) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq x \leqq y,\ x^2 + y^2 \leqq 4 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x\sqrt{x^2 + y^2} dxdy$

(14) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ -y \leqq x \leqq y,\ x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D xy\sqrt{x^2 + y^2} dxdy$

(15) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq y \leqq x,\ x^2 + y^2 \leqq \pi \right\}$, $\displaystyle\iint_D \sin(x^2 + y^2) dxdy$

(16) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x,\ x^2 + y^2 \leqq \frac{\pi}{4} \right\}$, $\displaystyle\iint_D \tan(x^2 + y^2) dxdy$

(17) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ y \geqq \frac{x}{\sqrt{3}},\ y \geqq -\sqrt{3}x,\ x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \cos\left(\frac{\pi}{2}(x^2 + y^2)\right) dxdy$

(18) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x,\ x^2 + y^2 \leqq 4 \right\}$, $\displaystyle\iint_D e^{x^2 + y^2} dxdy$

(19) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x\log(x^2 + y^2) dxdy$

(20) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ -x \leqq y \leqq \sqrt{3}x,\ 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq e^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{\log(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$

(21) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D 2(x + y)^a (x - y)^q dxdy$

(22) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq 1 - 2y \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{(x - 2y)^4}{(x + 2y)^2 + 1} dxdy$

(23) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq x + 2y \leqq 1,\ 0 \leqq x - 4y \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x^a dxdy$

(24) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left((a + 1)(x + y)^a + (x - y)^{a+1}\right) dxdy$

(25) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq x + y \leqq 1,\ 1 \leqq x - y \leqq 2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x^2 e^{x-y} dxdy$

(26) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq x - 2y \leqq \pi,\ 0 \leqq x + 2y \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D (x - 2y)^2 \sin\left(x^2 - 4y^2\right) dxdy$

(27) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 3x \right\}$, $\displaystyle\iint_D (3x+y)(3x-y)^a dxdy$

(28) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq x \leqq 1,\ -x+1 \leqq 2y \leqq x+1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left((x+2y)^a - (x-2y)^q\right) dxdy$

(29) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x \right\}$, $\displaystyle\iint_D (x+y)^a (x-y) dxdy$

(30) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D (x+y)(x-y)^q dxdy$

(31) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ \sqrt{x} + \sqrt{2y} \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x^2 dxdy$

(32) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x^2 + y^2 - 2x \leqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dxdy$

(33) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqq 1,\ y \geqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(x^2 + y\right) dxdy$

(34) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 1 \leqq x^2 + 4y^2 \leqq 3 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{y^2}{\sqrt{4 - x^2 - 4y^2}} dxdy$

(35) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ y \geqq 0,\ x^2 + y^2 \leqq 2x \right\}$, $\displaystyle\iint_D xydxdy$

(36) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| x^2 + y^2 + x + y \leqq \frac{3}{2} \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(x^2 + y^2 + x + y\right) dxdy$

(37) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy$

(38) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ (x-2)^2 + y^2 \leqq 4 \right\}$, $\displaystyle\iint_D xdxdy$

(39) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x^2 + y^2 - 2x - 2y \leqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \sqrt{8 - x^2 - y^2} dxdy$

(40) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x \leqq x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$

(41) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x^2 + y^2 \leqq 2(x+y),\ x \leqq y \right\}$, $\displaystyle\iint_D xydxdy$

(42) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| 0 \leqq y \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} x,\ 0 \leqq \frac{x^2}{4} + y^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x(x^2 + 4y^2)^2 dxdy$

(43) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| -2x \leqq y \leqq 2\sqrt{3}x,\ 1 \leqq x^2 + \frac{y^2}{4} \leqq 4 \right\}$, $\displaystyle\iint_D y^2(4x^2 + y^2)^2 dxdy$

(44) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \geqq y,\ 5x^2 + 6xy + 5y^2 \leqq 4 \right\}$, $\displaystyle\iint_D (x-y)(x+y)^6 dxdy$

(45) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ y \geqq 0,\ x^2 + 2xy + 5y^2 \leqq 4 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(x^2 + 3y\right) dxdy$

(46) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}} dxdy$

(47) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} dxdy$

第 25 回の演習問題の解答

1. (1) から (20) と (32),(39),(40),(41),(47) では写像 $\varphi : [0,\infty)\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\to \boldsymbol{R}^2$ を $\varphi\begin{pmatrix} r \\ \theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta\end{pmatrix}$ により定めると, $\det\varphi'\begin{pmatrix} r \\ \theta\end{pmatrix} = r$ である.

(1) $\varphi\begin{pmatrix} r \\ \theta\end{pmatrix}\in D$ であるためには $0\leqq r\leqq 1$, $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{3\pi}{2}$ であることが必要十分である. 従って $E=[0,1]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ とおけば $\displaystyle\int_D x^2dxdy = \iint_E r^3\cos^2\theta drd\theta = \int_0^1\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{r^3}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta\right)dr = \int_0^1 \pi r^3 dr = \frac{\pi}{4}$.

(2) $\varphi\begin{pmatrix} r \\ \theta\end{pmatrix}\in D$ であるためには $0\leqq r\leqq 1$, $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{3\pi}{2}$ であることが必要十分である. 従って $E=[0,1]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ とおけば $\displaystyle\int_D x^2y^2dxdy = \iint_E r^5\cos^2\theta\sin^2\theta drd\theta = \int_0^1\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{r^5}{4}\sin^2 2\theta d\theta\right)dr = \int_0^1\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{r^5}{8}(1-\cos 4\theta)\,d\theta\right)dr =$ $\displaystyle\int_0^1\frac{\pi r^5}{4}dr = \frac{\pi}{24}$.

(3) $\varphi\begin{pmatrix} r \\ \theta\end{pmatrix}\in D$ であるためには $0\leqq r\leqq 1$, $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{3\pi}{2}$ であることが必要十分である. 従って $E=[0,1]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ とおけば $\displaystyle\int_D (2x^2+3y^2)^2dxdy = \iint_E\left(2r^2\cos^2\theta+3r^2\sin^2\theta\right)^2 rdrd\theta = \int_0^1\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} r^5\left(2+\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta\right)dr =$ $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} r^5\left(\frac{25}{4}-\frac{5\cos 2\theta}{2}+\frac{\cos^2 2\theta}{4}\right)d\theta\right)dr = \int_0^1\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} r^5\left(\frac{51}{8}-\frac{5\cos 2\theta}{2}+\frac{\cos 4\theta}{8}\right)d\theta\right)dr = \int_0^1\frac{51\pi r^5}{4}dr = \frac{17}{8}\pi$.

(4) $\varphi\begin{pmatrix} r \\ \theta\end{pmatrix}\in D$ であるためには $0\leqq r\leqq 1$, $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ であることが必要十分である. 従って $E=[0,1]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ とおけば $\displaystyle\int_D 16x^2y^2(x^2+y^2)dxdy = \iint_E 16r^7\cos^2\theta\sin^2\theta drd\theta = \int_0^1\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 4r^7\sin^2 2\theta d\theta\right)dr =$ $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2r^7(1-\cos 4\theta)d\theta\right)dr = \int_0^1 4\pi r^7 dr = \frac{\pi}{2}$.

(5) $\varphi\begin{pmatrix} r \\ \theta\end{pmatrix}\in D$ であるためには $1\leqq r\leqq 3$, $0\leqq\theta\leqq\pi$ であることが必要十分である. 従って $E=[1,3]\times[0,\pi]$ とおけば $\displaystyle\iint_D x^4dxdy = \iint_E r^5\cos^4\theta drd\theta = \int_1^3\left(\int_0^\pi r^5\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta\right)dr = \int_1^3\left(\int_0^\pi r^5\left(\frac{3}{8}+\cos 2\theta+\frac{\cos 4\theta}{8}\right)d\theta\right)dr$ $\displaystyle= \int_1^3\frac{3\pi r^5}{8}dr = \frac{91\pi}{2}$.

(6) $\varphi\begin{pmatrix} r \\ \theta\end{pmatrix}\in D$ であるためには $0\leqq r\leqq 1$, $0\leqq\theta\leqq\pi$ であることが必要十分である. 従って $E=[0,1]\times[0,\pi]$ とおけば $\displaystyle\int_D y^2\left(4x^2+y^2\right)^2 dxdy = \iint_E r^2\sin^2\theta\left(4r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta\right)^2 rdrd\theta = \int_0^\pi\left(\int_0^1 r^7\sin^2\theta\left(4-3\sin^2\theta\right)^2 dr\right)d\theta =$ $\displaystyle\int_0^\pi\frac{1}{8}\left(16\sin^2\theta-24\sin^4\theta+9\sin^6\theta\right)d\theta = 2\int_0^\pi\sin^2\theta d\theta - 3\int_0^\pi\sin^4\theta d\theta+\frac{9}{8}\int_0^\pi\sin^6\theta d\theta$ である. ここで $\psi=\theta-\dfrac{\pi}{2}$ とおくと, θ が $\dfrac{\pi}{2}$ から π まで動けば ψ は 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くため, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi\sin^{2n}\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\left(\psi+\frac{\pi}{2}\right)d\psi =$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\psi d\psi = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$ である. 従って $\displaystyle\int_0^\pi\sin^{2n}\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi\sin^{2n}\theta d\theta = \frac{(2n-1)!!\pi}{(2n)!!}$ が得られるため, 上の結果から $\displaystyle\int_D y^2\left(4x^2+y^2\right)^2 dxdy = 2\frac{1!!\pi}{2!!}-3\frac{3!!\pi}{4!!}+\frac{9}{8}\frac{5!!\pi}{6!!} = \frac{77\pi}{128}$.

(7) $\varphi\begin{pmatrix} r \\ \theta\end{pmatrix}\in D$ であるためには $0\leqq r\leqq 2$, $0\leqq\theta\leqq\pi$ であることが必要十分である. 従って $E=[0,2]\times[0,\pi]$ とおけば $\displaystyle\int_D x(x^2+4y^2)^2dxdy = \iint_E r\cos\theta\left(r^2\cos^2\theta+4r^2\sin^2\theta\right)^2 rdrd\theta = \int_0^2\left(\int_0^\pi r^6\cos\theta\left(1+3\sin^2\theta\right)^2 d\theta\right)dr =$ $\displaystyle\int_0^2\left[r^6\left(\sin\theta+2\sin^3\theta+\frac{9}{5}\sin^5\theta\right)\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}dr = 0$.

(8) $\varphi\begin{pmatrix} r \\ \theta\end{pmatrix}\in D$ であるためには $0\leqq r\leqq 1$, $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であることが必要十分である. 従って $E=[0,1]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_D\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy = \iint_E\frac{r^3\cos^2\theta}{\sqrt{1+r^2}}drd\theta = \int_0^1\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^3\cos^2\theta}{\sqrt{1+r^2}}d\theta\right)dr = \int_0^1\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^3(1+\cos 2\theta)}{2\sqrt{1+r^2}}d\theta\right)dr$ $\displaystyle= \int_0^1\left[\frac{r^3(2\theta+\sin 2\theta)}{4\sqrt{1+r^2}}\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}dr = \int_0^1\frac{\pi r^3}{2\sqrt{1+r^2}}dr$ である. $t=r^2$ とおけば $r^3dr=\dfrac{t}{2}dt$ であり, r が 0 から 1 まで

動くとき, t は 0 から 1 まで動くため, (上式) $= \displaystyle\int_0^1 \frac{\pi t}{4\sqrt{1+t}}dt = \left[\frac{\pi t}{2}\sqrt{1+t}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\pi}{2}\sqrt{1+t}dt =$ $\displaystyle\frac{\sqrt{2}\pi}{2} - \left[\frac{\pi}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi\left(2-\sqrt{2}\right)}{6}$.

(9) $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには $a \leqq r \leqq b$, $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ であることが必要十分である. 従って $E = [a,b] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_D x^m y^n \left(x^2+y^2\right)^p dxdy = \iint_E r^{m+n+2p+1}\cos^m\theta\sin^n\theta\, drd\theta = \int_a^b \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{m+n+2p+1}\cos^m\theta\sin^n\theta\, d\theta\right)dr \cdots (*)$

m と n がともに偶数ならば $(*) = \displaystyle\frac{\pi(m-1)!!(n-1)!!}{2(m+n)!!}\int_a^b r^{m+n+2p+1}dr$ であり, m と n の少なくとも一方が奇数ならば $(*) = \displaystyle\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\int_a^b r^{m+n+2p+1}dr$ である. また, $p \neq -\dfrac{m+n+2}{2}$ ならば $\displaystyle\int_a^b r^{m+n+2p+1}dr = \frac{b^{m+n+2p+2}-a^{m+n+2p+2}}{m+n+2p+2}$ であり, $p = -\dfrac{m+n+2}{2}$ ならば $\displaystyle\int_a^b r^{m+n+2p+1}dr = \log b - \log a$ である. 従って, 求める値は m と n がともに偶数で $p \neq -\dfrac{m+n+2}{2}$ ならば $\dfrac{\pi(m-1)!!(n-1)!!(b^{m+n+2p+2}-a^{m+n+2p+2})}{2(m+n)!!(m+n+2p+2)}$, m と n がともに偶数で $p = -\dfrac{m+n+2}{2}$ ならば $\dfrac{\pi(m-1)!!(n-1)!!(\log b-\log a)}{2(m+n)!!}$, m と n の少なくとも一方が奇数で $p \neq -\dfrac{m+n+2}{2}$ ならば $\dfrac{(m-1)!!(n-1)!!(b^{m+n+2p+2}-a^{m+n+2p+2})}{(m+n)!!(m+n+2p+2)}$, m と n の少なくとも一方が奇数で $p = -\dfrac{m+n+2}{2}$ ならば $\dfrac{(m-1)!!(n-1)!!(\log b-\log a)}{(m+n)!!}$ である.

(10) $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには $a \leqq r \leqq b$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$ であることが必要十分である. 従って $E = [a,b] \times [0,\pi]$ とおけば $\displaystyle\iint_D x^m y^n \left(x^2+y^2\right)^p dxdy = \iint_E r^{m+n+2p+1}\cos^m\theta\sin^n\theta\, drd\theta = \int_a^b \left(\int_0^{\pi} r^{m+n+2p+1}\cos^m\theta\sin^n\theta\, d\theta\right)dr \cdots (*)$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\cos^m\theta\sin^n\theta\, d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\theta\sin^n\theta\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^m\theta\sin^n\theta\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\theta\sin^n\theta\, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\sin^n\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\theta\sin^n\theta\, d\theta + (-1)^m\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m\theta\cos^n\theta\, d\theta
\end{aligned}$$

より, m が奇数ならば $(*) = 0$, m と n がともに偶数ならば $(*) = \displaystyle\frac{\pi(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\int_a^b r^{m+n+2p+1}dr$ であり, m が偶数で n が奇数ならば $(*) = \displaystyle\frac{2(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\int_a^b r^{m+n+2p+1}dr$ である. (9) の解答と同様にして, 求める値は m が奇数ならば 0, m と n がともに偶数で $p \neq -\dfrac{m+n+2}{2}$ ならば $\dfrac{\pi(m-1)!!(n-1)!!(b^{m+n+2p+2}-a^{m+n+2p+2})}{(m+n)!!(m+n+2p+2)}$, m と n がともに偶数で $p = -\dfrac{m+n+2}{2}$ ならば $\dfrac{\pi(m-1)!!(n-1)!!(\log b-\log a)}{(m+n)!!}$, m が偶数, n が奇数で $p \neq -\dfrac{m+n+2}{2}$ ならば $\dfrac{2(m-1)!!(n-1)!!(b^{m+n+2p+2}-a^{m+n+2p+2})}{(m+n)!!(m+n+2p+2)}$, m が偶数, n が奇数で $p = -\dfrac{m+n+2}{2}$ ならば $\dfrac{2(m-1)!!(n-1)!!(\log b-\log a)}{(m+n)!!}$ である.

(11) $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには $a \leqq r \leqq b$, $\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{5\pi}{4}$ であることが必要十分である. 従って $E = [a,b] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_D x^m y^n \left(x^2+y^2\right)^p dxdy = \iint_E r^{m+n+2p+1}\cos^m\theta\sin^n\theta\, drd\theta = \int_a^b \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} r^{m+n+2p+1}\cos^m\theta\sin^n\theta\, d\theta\right)dr \cdots (*)$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos^m\theta\sin^n\theta\,d\theta&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\cos^m\theta\sin^n\theta\,d\theta+\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\cos^m\theta\sin^n\theta\,d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\cos^m\theta\sin^n\theta\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^m(\theta+\pi)\sin^n(\theta+\pi)d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\cos^m\theta\sin^n\theta\,d\theta+(-1)^{m+n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^m\theta\sin^n\theta\,d\theta\end{aligned}$$

より, $m+n$ が偶数ならば上式は $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^m\theta\sin^n\theta\,d\theta$ に等しいため (10) の結果から, m と n がともに奇数ならば $(*)=0$, m と n がともに偶数ならば $(*)=\dfrac{\pi(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\displaystyle\int_a^b r^{m+n+2p+1}dr$ である. m が奇数, n が偶数の場合は $m=2k+1$, $n=2l$ とおき, m が偶数, n が奇数の場合は $m=2k$, $n=2l+1$ とおけば

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos^{2k+1}\theta\sin^{2l}\theta\,d\theta&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1-\sin^2\theta)^k\sin^{2l}\theta\cos\theta\,d\theta=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}(1-t^2)^kt^{2l}\,dt\\&=-2\sum_{i=0}^{k}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(-1)^i\binom{k}{i}t^{2i+2l}\,dt=\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^{i+1}}{\left(\sqrt{2}\right)^{2i+2l-1}(2i+2l+1)}\binom{k}{i}\\\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos^{2k}\theta\sin^{2l+1}\theta\,d\theta&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos^{2k}\theta(1-\cos^2\theta)^l\sin\theta\,d\theta=-\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}t^{2k}(1-t^2)^l\,dt\\&=2\sum_{i=0}^{l}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(-1)^i\binom{l}{i}t^{2i+2k}\,dt=\sum_{i=0}^{l}\frac{(-1)^i}{\left(\sqrt{2}\right)^{2i+2k-1}(2i+2k+1)}\binom{l}{i}\end{aligned}$$

である. 従って m が奇数, n が偶数ならば $(*)=\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^{i+1}}{\left(\sqrt{2}\right)^{2i+2l-1}(2i+2l+1)}\binom{k}{i}\right)\int_a^b r^{m+n+2p+1}dr$ であり, m が偶数, n が奇数ならば $(*)=\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{l}\frac{(-1)^i}{\left(\sqrt{2}\right)^{2i+2k-1}(2i+2k+1)}\binom{l}{i}\right)\int_a^b r^{m+n+2p+1}dr$ である. (9) の解答と同様にして, 求める値は m と n がともに奇数ならば 0, m と n がともに偶数で $p\neq-\dfrac{m+n+2}{2}$ ならば $\dfrac{\pi(m-1)!!(n-1)!!(b^{m+n+2p+2}-a^{m+n+2p+2})}{(m+n)!!(m+n+2p+2)}$, m と n がともに偶数で $p=-\dfrac{m+n+2}{2}$ ならば $\dfrac{\pi(m-1)!!(n-1)!!(\log b-\log a)}{(m+n)!!}$, m が奇数, n が偶数で $p\neq-\dfrac{m+n+2}{2}$ ならば $\dfrac{b^{m+n+2p+2}-a^{m+n+2p+2}}{m+n+2p+2}\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^{i+1}}{\left(\sqrt{2}\right)^{2i+2l-1}(2i+2l+1)}\binom{k}{i}\right)$, m が奇数, n が偶数で $p=-\dfrac{m+n+2}{2}$ ならば $(\log b-\log a)\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^{i+1}}{\left(\sqrt{2}\right)^{2i+2l-1}(2i+2l+1)}\binom{k}{i}\right)$, m が偶数, n が奇数で $p\neq-\dfrac{m+n+2}{2}$ ならば $\dfrac{b^{m+n+2p+2}-a^{m+n+2p+2}}{m+n+2p+2}\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{l}\frac{(-1)^i}{\left(\sqrt{2}\right)^{2i+2k-1}(2i+2k+1)}\binom{l}{i}\right)$, m が偶数, n が奇数で $p=-\dfrac{m+n+2}{2}$ ならば $(\log b-\log a)\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{l}\frac{(-1)^i}{\left(\sqrt{2}\right)^{2i+2k-1}(2i+2k+1)}\binom{l}{i}\right)$ である.

(12) $\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには $0\leqq r\leqq 2$, $\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{5\pi}{4}$ であることが必要十分である. 従って $E=[0,2]\times\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_D(x^2-y^2)^2dxdy=\iint_E r^5\cos^2 2\theta drd\theta=\int_0^2\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\frac{r^5(1+\cos4\theta)}{2}d\theta\right)dr=\int_0^2\left[\frac{r^5(4\theta+\sin4\theta)}{8}\right]_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{5\pi}{4}}dr=\int_0^2\frac{\pi r^5}{2}dr=\frac{16\pi}{3}$.

(13) $\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには $0\leqq r\leqq 2$, $\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であることが必要十分である. 従って $E=[0,2]\times\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\iint_E r^3\cos\theta drd\theta=\int_0^2\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}r^3\cos\theta d\theta\right)dr=\int_0^2\left[r^3\sin\theta\right]_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}dr=$

$\displaystyle\int_0^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)r^3dr=4-2\sqrt{2}.$

(14) $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには $0\leqq r\leqq 1,\ \frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{3\pi}{4}$ であることが必要十分である. 従って $E=[0,1]\times\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_D xy\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\iint_E r^4\cos\theta\sin\theta drd\theta=\int_0^1\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{r^2}{2}\sin 2\theta d\theta\right)dr=\int_0^1\left[-\frac{r^2}{4}\cos 2\theta\right]_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{3\pi}{4}}dr=0.$

(15) $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには $0\leqq r\leqq\sqrt{\pi},\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ であることが必要十分である. 従って $E=[0,\sqrt{\pi}]\times\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_D\sin\left(x^2+y^2\right)dxdy=\iint_E r\sin\left(r^2\right)drd\theta=\int_0^{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}r\sin\left(r^2\right)d\theta\right)dr=\int_0^{\sqrt{\pi}}\frac{r}{4}\sin\left(r^2\right)dr=$ $\displaystyle\left[-\frac{1}{8}\cos\left(r^2\right)\right]_0^{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{4}.$

(16) $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには $0\leqq r\leqq\frac{\sqrt{\pi}}{2},\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ であることが必要十分である. 従って $E=\left[0,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_D\tan\left(x^2+y^2\right)dxdy=\iint_E\tan\left(r^2\right)rdrd\theta=\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}r\tan\left(r^2\right)d\theta\right)dr=\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\frac{\pi}{3}r\tan\left(r^2\right)dr=$ $\displaystyle\left[-\frac{\pi}{6}\log\left|\cos\left(r^2\right)\right|\right]_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}=-\frac{\pi}{6}\log\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|=\frac{\pi}{12}\log 2.$

(17) $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには $0\leqq r\leqq 1,\ \frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{2\pi}{3}$ であることが必要十分である. 従って $E=[0,1]\times\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ とおけば $\displaystyle\int_D\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(x^2+y^2\right)\right)dxdy=\iint_E r\cos\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)drd\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\int_0^1 r\cos\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)dr\right)d\theta=$ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}}\left[\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)\right]_{r=0}^{r=1}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{\pi}d\theta=\frac{1}{2}.$

(18) $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには $0\leqq r\leqq 2,\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ であることが必要十分である. 従って $E=[0,2]\times\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy=\iint_E re^{r^2}drd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_0^2 re^{r^2}dr\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^2 d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\left(e^4-1\right)d\theta=\frac{\pi}{6}\left(e^4-1\right).$

(19) $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには $1\leqq r\leqq 2,\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であることが必要十分である. 従って $E=[1,2]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_D x\log(x^2+y^2)dxdy=\iint_E r\cos\theta\log(r^2)rdrd\theta=\int_1^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}2r^2\cos\theta\log rd\theta\right)dr=\int_1^2\left[2r^2\sin\theta\log r\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}dr$ $\displaystyle=\int_1^2 2r^2\log rdr=\left[\frac{2}{3}r^3\log r\right]_1^2-\int_1^2\frac{2}{3}r^2dr=\frac{16}{3}\log 2-\left[\frac{2}{9}r^3\right]_1^2=\frac{16}{3}\log 2-\frac{14}{9}.$

(20) $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには $1\leqq r\leqq e,\ -\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ であることが必要十分である. 従って $E=[1,e]\times\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_D\frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint_E 2\log rdrd\theta=\int_1^e\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}2\log rd\theta\right)dr=\int_1^e\frac{7\pi}{6}\log rdr=$ $\displaystyle\left[\frac{7\pi}{6}(r\log r-r)\right]_1^e=\frac{7\pi}{6}.$

(21) $z=x-y,\ w=x+y$ とおけば, $\begin{cases} x=\frac{z}{2}+\frac{w}{2} \\ y=-\frac{z}{2}+\frac{w}{2}\end{cases}$ である. 写像 $\psi:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} \frac{z}{2}+\frac{w}{2} \\ -\frac{z}{2}+\frac{w}{2} \end{smallmatrix}\right)$ により定めると, $\det\psi'\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)=\frac{1}{2}$ であり, $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには「$z+w\geqq 0$ かつ $-z+w\geqq 0$ かつ $w\leqq 1$」すなわち「$0\leqq w\leqq 1$ かつ $-w\leqq z\leqq w$」が成り立つことが必要十分である. 従って $E=\left\{\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ 0\leqq w\leqq 1,\ -w\leqq z\leqq w\right\}$ とおけば $\displaystyle\iint_D 2(x+y)^a(x-y)^q dxdy=\iint_E z^q w^a dzdw=\int_0^1\left(\int_{-w}^w z^q w^a dz\right)dw=\int_0^1\left[\frac{z^{q+1}w^a}{q+1}\right]_{z=-w}^{z=w}dw=$ $\displaystyle\int_0^1\frac{2w^{a+q+1}}{q+1}dw=\left[\frac{2w^{a+q+2}}{(q+1)(a+q+2)}\right]_0^1=\frac{2}{(q+1)(a+q+2)}.$

(22) $z=x-2y,\ w=x+2y$ とおけば, $\begin{cases} x=\frac{z}{2}+\frac{w}{2} \\ y=-\frac{z}{4}+\frac{w}{4}\end{cases}$ である. 写像 $\psi:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} \frac{z}{2}+\frac{w}{2} \\ -\frac{z}{4}+\frac{w}{4} \end{smallmatrix}\right)$ により定めると, $\det\psi'\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)=\frac{1}{4}$ であり, $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには「$0\leqq -z+w\leqq 4$ かつ $0\leqq z+w\leqq 2+z-w$」すなわち「$0\leqq$

$w \leqq 1$ かつ $-w \leqq z \leqq w$」が成り立つことが必要十分である．従って $E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \, 0 \leqq w \leqq 1, -w \leqq z \leqq w \right\}$ とおけば $\displaystyle\iint_D \frac{(x-2y)^4}{(x+2y)^2+1} dxdy = \iint_E \frac{z^4}{4(w^2+1)} dzdw = \int_0^1 \left(\int_{-w}^{w} \frac{z^4}{4(w^2+1)} dz \right) dw = \int_0^1 \left[\frac{z^5}{20(w^2+1)} \right]_{z=-w}^{z=w} dw$ $\displaystyle = \int_0^1 \frac{w^5}{10(w^2+1)} dw = \frac{1}{10} \int_0^1 \left(w^3 - w + \frac{w}{w^2+1} \right) dw = \frac{1}{10} \left[\frac{w^4}{4} - \frac{w^2}{2} + \frac{1}{2} \log(w^2+1) \right]_0^1 = \frac{\log 2}{20} - \frac{1}{40}.$

(23) $z = x - 4y$, $w = x + 2y$ とおけば, $\begin{cases} x = \frac{z}{2} + w \\ y = -\frac{z}{6} + \frac{w}{6} \end{cases}$ である．写像 $\psi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \frac{z}{2}+w \\ -\frac{z}{6}+\frac{w}{6} \end{smallmatrix}\right)$ により定めると, $\det \psi'\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{4}$ であり, $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには「$0 \leqq z \leqq 1$ かつ $0 \leqq w \leqq 1$」が成り立つことが必要十分である．従って $E = [0,1] \times [0,1]$ とおけば $\displaystyle\iint_D x^a dxdy = \iint_E \frac{1}{4} \left(\frac{z}{2} + w \right)^a dzdw = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{4} \left(\frac{z}{2} + w \right)^a dz \right) dw =$ $\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{1}{2(a+1)} \left(\frac{z}{2} + w \right)^{a+1} \right]_{z=0}^{z=1} dw = \int_0^1 \frac{1}{2(a+1)} \left(\left(\frac{1}{2} + w \right)^{a+1} - w^{a+1} \right) dw =$ $\displaystyle\frac{1}{2(a+1)(a+2)} \left[\left(\frac{1}{2} + w \right)^{a+2} - w^{a+2} \right]_0^1 = \frac{3^{a+2} - 2^{a+2} - 1}{2^{a+3}(a+1)(a+2)}.$

(24) 写像 $\psi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を (21) と同様に定めれば, $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには「$0 \leqq z + w \leqq 2$ かつ $0 \leqq -z + w \leqq z + w$」すなわち「$0 \leqq z \leqq 1$ かつ $z \leqq w \leqq 2 - z$」が成り立つことが必要十分である． 従って $E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \, 0 \leqq z \leqq 1, \, z \leqq w \leqq 2 - z \right\}$ とおけば $\displaystyle\iint_D \left((a+1)(x+y)^a + (x-y)^{a+1} \right) dxdy =$ $\displaystyle\iint_E \frac{1}{2} \left((a+1)w^a + z^{a+1} \right) dzdw = \int_0^1 \left(\int_z^{2-z} \frac{1}{2} \left((a+1)w^a + z^{a+1} \right) dw \right) dz = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \left(w^{a+1} + z^{a+1} w \right) \right]_{w=z}^{w=2-z} dz$ $\displaystyle = \int_0^1 \frac{1}{2} \left((2-z)^{a+1} - z^{a+1} + 2z^{a+1} - 2z^{a+2} \right) dz = \left[\frac{-(2-z)^{a+2} - z^{a+2}}{2(a+2)} + \frac{z^{a+2}}{a+2} - \frac{z^{a+3}}{a+3} \right]_0^1 = \frac{2^{a+1}}{a+2} - \frac{1}{a+3}.$

(25) 写像 $\psi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を (21) と同様に定めれば, $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには「$1 \leqq z \leqq 2$ かつ $0 \leqq w \leqq 1$」が成り立つことが必要十分である．従って $E = [1,2] \times [0,1]$ とおけば $\displaystyle\iint_D x^2 e^{x-y} dxdy = \iint_E \frac{1}{8}(z+w)^2 e^z dzdw =$ $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_0^1 \frac{1}{8}(z+w)^2 e^z dw \right) dz = \int_1^2 \left[\frac{1}{24}(z+w)^3 e^z \right]_{w=0}^{w=1} dz = \int_1^2 \frac{e^z}{24} \left(3z^2 + 3z + 1 \right) dz = \left[\frac{e^z}{24} \left(3z^2 + 3z + 1 \right) \right]_1^2 -$ $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^z}{8}(2z+1) dz = \frac{19e^2 - 7e}{24} - \left[\frac{e^z}{8}(2z+1) \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{e^z}{4} dz = \frac{19e^2 - 7e}{24} - \frac{5e^2 - 3e}{8} + \left[\frac{e^z}{4} \right]_1^2 = \frac{5e^2 - 2e}{12}.$

(26) 写像 $\psi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を (22) と同様に定めれば, $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには「$0 \leqq z \leqq \pi$ かつ $0 \leqq w \leqq 1$」が成り立つことが必要十分である．従って $E = [0,\pi] \times [0,1]$ とおけば $\displaystyle\iint_D (x-2y)^2 \sin\left(x^2 - 4y^2 \right) dxdy =$ $\displaystyle\iint_E \frac{z^2}{4} \sin(zw) dzdw = \int_0^\pi \left(\int_0^1 \frac{z^2}{4} \sin(zw) dw \right) dz = \int_0^\pi \left[-\frac{z}{4} \cos(zw) \right]_{w=0}^{w=1} dz = \int_0^\pi \frac{z}{4}(1 - \cos z) dz =$ $\displaystyle\left[\frac{z}{4}(z - \sin z) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{z - \sin z}{4} dz = \frac{\pi^2}{4} - \left[\frac{z^2 + 2\cos z}{8} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}.$

(27) $z = 3x - y$, $w = 3x + y$ とおけば, $\begin{cases} x = \frac{z}{6} + \frac{w}{6} \\ y = -\frac{z}{2} + \frac{w}{2} \end{cases}$ である．写像 $\psi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \frac{z}{6}+\frac{w}{6} \\ -\frac{z}{2}+\frac{w}{2} \end{smallmatrix}\right)$ により定めると, $\det \psi'\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{6}$ であり, $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには「$0 \leqq z+w \leqq 6$ かつ $0 \leqq -z+w \leqq z+w$」すなわち「$0 \leqq z \leqq 3$ かつ $z \leqq w \leqq 6 - z$」が成り立つことが必要十分である．従って $E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \, 0 \leqq z \leqq 1, \, z \leqq w \leqq 6 - z \right\}$ とおけば $\displaystyle\iint_D (3x+y)(3x-y)^a dxdy = \iint_E \frac{1}{6} z^a w dzdw = \int_0^3 \left(\int_z^{6-z} \frac{1}{6} z^a w dw \right) dz = \int_0^3 \left[\frac{1}{12} z^a w^2 \right]_{w=z}^{w=6-z} dz =$ $\displaystyle\int_0^3 \left(3z^a - z^{a+1} \right) dz = \left[\frac{3z^{a+1}}{a+1} - \frac{z^{a+2}}{a+2} \right]_0^3 = \frac{3^{a+2}}{(a+1)(a+2)}.$

(28) 写像 $\psi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を (22) と同様に定めれば, $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには「$0 \leqq z + w \leqq 2$ かつ $-z - w + 2 \leqq -z + w \leqq z + w + 2$」すなわち「$-1 \leqq z \leqq 1$ かつ $1 \leqq w \leqq 2 - z$」が成り立つことが必要十分である．従って $E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \, -1 \leqq z \leqq 1, \, 1 \leqq w \leqq 2 - z \right\}$ とおけば $\displaystyle\iint_D \left((x+2y)^a - (x-2y)^q \right) dxdy = \iint_E \frac{1}{4} \left(w^a - z^q \right) dzdw =$

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{1}^{2-z}\frac{1}{4}\left(w^a-z^q\right)dw\right)dz=\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{w^{a+1}}{a+1}-z^qw\right)\right]_{w=1}^{w=2-z}dz=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\left(\frac{(2-z)^{a+1}-1}{a+1}-z^q+z^{q+1}\right)dz$$
$$=\frac{1}{4}\left[-\frac{(2-z)^{a+2}}{(a+1)(a+2)}-\frac{z}{a+1}-\frac{z^{q+1}}{q+1}+\frac{z^{q+2}}{q+2}\right]_{-1}^{1}=\frac{3^{a+2}-1}{4(a+1)(a+2)}-\frac{1}{2(a+1)}-\frac{1}{2(q+1)}.$$

(29) 写像 $\psi:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を (21) と同様に定めれば, $\psi\left(\begin{smallmatrix}z\\w\end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには「$0\leqq z+w\leqq 2$ かつ $0\leqq -z+w\leqq z+w$」すなわち「$0\leqq z\leqq 1$ かつ $z\leqq w\leqq 2-z$」が成り立つことが必要十分である. 従って $E=\left\{\left(\begin{smallmatrix}z\\w\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\,0\leqq z\leqq 1,\,z\leqq w\leqq 2-z\right\}$ とおけば $\displaystyle\iint_D(x+y)^a(x-y)dxdy=\iint_E\frac{1}{2}zw^adzdw=$
$$\int_0^1\left(\int_z^{2-z}\frac{1}{2}zw^adw\right)dz=\int_0^1\left[\frac{zw^{a+1}}{2(a+1)}\right]_{w=z}^{w=2-z}dz=\int_0^1\frac{z\left((2-z)^{a+1}-z^{a+1}\right)}{2(a+1)}dz=\left[\frac{z\left(-(2-z)^{a+2}-z^{a+2}\right)}{2(a+1)(a+2)}\right]_0^1$$
$$+\int_0^1\frac{(2-z)^{a+2}+z^{a+2}}{2(a+1)(a+2)}dz=-\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\left[\frac{-(2-z)^{a+3}+z^{a+3}}{2(a+1)(a+2)(a+3)}\right]_0^1=\frac{2^{a+2}-a-3}{(a+1)(a+2)(a+3)}.$$

(30) 写像 $\psi:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を (21) と同様に定めれば, $\psi\left(\begin{smallmatrix}z\\w\end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには「$0\leqq z+w\leqq 2$ かつ $0\leqq -z+w\leqq 2$」すなわち「$-1\leqq z\leqq 0$ かつ $-z\leqq w\leqq z+2$」または「$0\leqq z\leqq 1$ かつ $z\leqq w\leqq 2-z$」が成り立つことが必要十分である. 従って $E=\left\{\left(\begin{smallmatrix}z\\w\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\,-1\leqq z\leqq 0,\,-z\leqq w\leqq z+2\right\}\cup\left\{\left(\begin{smallmatrix}z\\w\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\,0\leqq z\leqq 1,\,z\leqq w\leqq 2-z\right\}$ とおけば
$$\iint_D(x+y)(x-y)^qdxdy=\iint_E\frac{1}{2}z^qwdzdw=\int_{-1}^{0}\left(\int_{-z}^{2+z}\frac{1}{2}z^qwdw\right)dz+\int_0^1\left(\int_z^{2-z}\frac{1}{2}z^qwdw\right)dz=$$
$$\int_{-1}^{0}\left[\frac{1}{4}z^qw^2\right]_{w=-z}^{w=2+z}dz+\int_0^1\left[\frac{1}{4}z^qw^2\right]_{w=z}^{w=2-z}dz=\int_{-1}^{0}\left(z^q+z^{q+1}\right)dz+\int_0^1\left(z^q-z^{q+1}\right)dz=$$
$$\left[\frac{z^{q+1}}{q+1}+\frac{z^{q+2}}{q+2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{z^{q+1}}{q+1}-\frac{z^{q+2}}{q+2}\right]_0^1=\frac{2}{(q+1)(q+2)}.$$

(31) 写像 $\psi:[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)\times[0,\infty)$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix}z\\w\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}z^2\\\frac{w^2}{2}\end{smallmatrix}\right)$ により定めると, $\det\psi'\left(\begin{smallmatrix}z\\w\end{smallmatrix}\right)=2zw$ であり, $\psi\left(\begin{smallmatrix}z\\w\end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには「$z\geqq 0$ かつ $w\geqq 0$ かつ $z+w\leqq 1$」すなわち「$0\leqq z\leqq 1$ かつ $0\leqq w\leqq 1-z$」が成り立つことが必要十分である. 従って $E=\left\{\left(\begin{smallmatrix}z\\w\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\,0\leqq z\leqq 1,\,0\leqq w\leqq 1-z\right\}$ とおけば $\displaystyle\iint_D x^2dxdy=$
$$\iint_E 2z^5wdzdw=\int_0^1\left(\int_0^{1-z}2z^5wdw\right)dz=\int_0^1\left[z^5w^2\right]_{w=0}^{w=1-z}dz=\int_0^1\left(z^5-2z^6+z^7\right)dz=\frac{1}{168}.$$

(32) $\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$, $0\leqq r\leqq 2\cos\theta$ であることが必要十分である. 従って $E=\left\{\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\,-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2},\,0\leqq r\leqq 2\cos\theta\right\}$ とおけば, $\displaystyle\iint_D\sqrt{4-x^2-y^2}dxdy=\iint_E r\sqrt{4-r^2}drd\theta=$
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\cos\theta}r\sqrt{4-r^2}dr\right)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=2\cos\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\left(1-\left|\sin^3\theta\right|\right)d\theta=$$
$$\frac{8\pi}{3}-\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta=\frac{8\pi}{3}-\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta=\frac{8\pi}{3}-\frac{16}{3}\left[-\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8\pi}{3}-\frac{32}{9}.$$

(33) 写像 $\psi:[0,\infty)\times[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}2r\cos\theta\\3r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)$ により定めると, $\det\psi'\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=6r$ であり, $\psi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには $0\leqq r\leqq 1$, $0\leqq\theta\leqq\pi$ であることが必要十分である. 従って $E=[0,1]\times[0,\pi]$ とおけば,
$$\iint_D\left(x^2+y\right)dxdy=\iint_E 6r\left(4r^2\cos^2\theta+3r\sin\theta\right)drd\theta=\int_0^1\left(\int_0^\pi\left(12r^3(1+\cos 2\theta)+18r^2\sin\theta\right)d\theta\right)dr=$$
$$\int_0^1\left(12\pi r^3+36r^2\right)dr=3\pi+12.$$

(34) 写像 $\psi:[0,\infty)\times[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}2r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)$ により定めると, $\det\psi'\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=2r$ であり, $\psi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには $\frac{1}{2}\leqq r\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$, $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ であることが必要十分である. 従って $E=\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\times[0,2\pi]$ とおけば, $\displaystyle\iint_D\frac{y^2}{\sqrt{4-x^2-4y^2}}dxdy=\iint_E\frac{r^3\sin^2\theta}{\sqrt{1-r^2}}drd\theta=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\frac{r^3(1-\cos 2\theta)}{2\sqrt{1-r^2}}d\theta\right)dr=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\pi r^3}{\sqrt{1-r^2}}dr$ である. $r=\sin t$ とおけば $dr=\cos tdt$ であり t が $\frac{\pi}{6}$ から $\frac{\pi}{3}$ まで動けば r は $\frac{1}{2}$ から $\frac{\sqrt{3}}{2}$ まで動くため, (上式) $\displaystyle=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\pi\sin^3tdt$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\pi\left(1-\cos^2t\right)\sin tdt=\pi\left[-\cos t+\frac{1}{3}\cos^3t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\pi\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{11}{24}\right).$$

(35) 写像 $\psi : [0,\infty)\times[0,2\pi] \to \boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta+1 \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ により定めると，$\det\psi'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = r$ であり，$\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$ であることが必要十分である．従って $E = [0,1]\times[0,\pi]$ とおけば，
$\displaystyle\iint_D xydxdy = \iint_E r^2\sin\theta(r\cos\theta+1)drd\theta = \int_0^1\left(\int_0^\pi r^2(r\cos\theta+1)\sin\theta d\theta\right)dr =$
$\displaystyle\int_0^1\left[r^2\left(-\frac{1}{2}r\cos^2\theta-\cos\theta\right)\right]_0^\pi dr = \int_0^1 2r^2dr = \frac{2}{3}.$

(36) 写像 $\psi : [0,\infty)\times[0,2\pi] \to \boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta-\frac{1}{2} \\ r\sin\theta-\frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right)$ により定めると，$\det\psi'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = r$ であり，$\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには $0 \leqq r \leqq \sqrt{2}$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ であることが必要十分である．従って $E = \left[0,\sqrt{2}\right]\times[0,2\pi]$ とおけば，
$\displaystyle\iint_D \left(x^2+y^2+x+y\right)dxdy = \iint_E r\left(r^2-\frac{1}{2}\right)drd\theta = \int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left(r^3-\frac{r}{2}\right)d\theta\right)dr = \int_0^{\sqrt{2}}\pi\left(2r^3-r\right)dr = \pi.$

(37) 写像 $\psi : [0,\infty)\times[0,2\pi] \to \boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta+1 \\ r\sin\theta+1 \end{smallmatrix}\right)$ により定めると，$\det\psi'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = r$ であり，$\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ であることが必要十分である．従って $E = [0,1]\times[0,2\pi]$ とおけば，
$\displaystyle\iint_D \left(x^2+y^2\right)dxdy = \iint_E r\left(r^2+2r(\cos\theta+\sin\theta)+2\right)drd\theta = \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left(r^3+2r^2(\cos\theta+\sin\theta)+2r\right)d\theta\right)dr =$
$\displaystyle\int_0^1 2\pi\left(r^3+2r\right)dr = \frac{5\pi}{2}.$

(38) 写像 $\psi : [0,\infty)\times[0,2\pi] \to \boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta+2 \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ により定めると，$\det\psi'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = r$ であり，$\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには $0 \leqq r \leqq 2$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ であることが必要十分である．従って $E = [0,2]\times[0,2\pi]$ とおけば，
$\displaystyle\iint_D xdxdy = \iint_E r(r\cos\theta+2)drd\theta = \int_0^2\left(\int_0^{2\pi}\left(r^2\cos\theta+2r\right)d\theta\right)dr = \int_0^2 4\pi rdr = 8\pi.$

(39) $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには $-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{3\pi}{4}$, $0 \leqq r \leqq 2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ であることが必要十分である．従って $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, -\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{3\pi}{4},\ 0 \leqq r \leqq 2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$ とおけば，$\displaystyle\iint_D \sqrt{8-x^2-y^2}dxdy = \iint_E r\sqrt{8-r^2}drd\theta =$
$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\int_0^{2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} r\sqrt{8-r^2}dr\right)d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left[-\frac{1}{3}\left(8-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{2^{\frac{9}{2}}}{3}\left(1-\left|\cos^3\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)d\theta$
$\displaystyle= \frac{2^{\frac{9}{2}}\pi}{3} - \int_0^\pi\frac{2^{\frac{9}{2}}}{3}\left|\cos^3\theta\right|d\theta = \frac{2^{\frac{9}{2}}\pi}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2^{\frac{9}{2}}}{3}\left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi\frac{2^{\frac{9}{2}}}{3}\left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta d\theta =$
$\displaystyle\frac{2^{\frac{9}{2}}\pi}{3} - \frac{2^{\frac{9}{2}}}{3}\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2^{\frac{9}{2}}}{3}\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3} - \frac{64\sqrt{2}}{9}.$

(40) $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta \leqq r \leqq 1$ であることが必要十分である．従って $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ \cos\theta \leqq r \leqq 1\right\}$ とおけば，$\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \iint_E r^2drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\cos\theta}^1 r^2dr\right)d\theta =$
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{\cos\theta}^1 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^3\theta}{3}d\theta = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta d\theta = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}.$

(41) $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには $-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$, $0 \leqq r \leqq 2(\cos\theta+\sin\theta)$ であることが必要十分である．従って $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, -\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\ r \leqq 2(\cos\theta+\sin\theta)\right\}$ とおけば，$\displaystyle\iint_D xydxdy = \iint_E r^3\cos\theta\sin\theta drd\theta =$
$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)}\frac{r^3}{2}\sin 2\theta dr\right)d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{r^4}{8}\sin 2\theta\right]_{r=0}^{r=2(\cos\theta+\sin\theta)}d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}2(\cos\theta+\sin\theta)^4\sin 2\theta d\theta =$
$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}2\left(\sin 2\theta+2\sin^2 2\theta+\sin^3 2\theta\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}4(1-\cos 4\theta)d\theta = \left[4\theta-\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi.$

(42) 写像 $\psi : [0,\infty)\times[0,2\pi] \to \boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ により定めると，$\det\psi'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = 2r$ であり，$\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ であることが必要十分である．従って $E = [0,1]\times\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ とおけば，
$\displaystyle\int_D x(x^2+4y^2)^2dxdy = \iint_E 4r^2\cos\theta\left(4r^2\cos^2\theta+4r^2\sin^2\theta\right)^2drd\theta = \int_0^1\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}64r^6\cos\theta d\theta\right)dr =$
$\displaystyle\int_0^1\left[64r^6\sin\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{3}}dr = \int_0^1 32\sqrt{3}r^6dr = \frac{32\sqrt{3}}{7}.$

(43) 写像 $\psi : [0,\infty)\times[-\pi,\pi] \to \boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta \\ 2r\sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ により定めると，$\det\psi'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = 2r$ であり，$\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D$

であるためには $1 \leqq r \leqq 2$, $-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ であることが必要十分である．従って $E=[1,2]\times\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ とおけば，
$\int_D y^2\left(4x^2+y^2\right)^2dxdy = \iint_E 8r^3\sin^2\theta\left(4r^2\cos^2\theta+4r^2\sin^2\theta\right)^2drd\theta = \int_1^2\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}64r^7(1-\cos 2\theta)d\theta\right)dr =$
$\int_1^2\left[32r^7(2\theta-\sin 2\theta)\right]_{\theta=-\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{3}}dr = \int_1^2 32r^7\left(\frac{7\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)dr = 170\left(7\pi-3\sqrt{3}-6\right)$.

(44) 写像 $\psi:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を (21) と同様に定めれば，$\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには「$z\geqq 0$ かつ $\frac{z^2}{4}+w^2\leqq 1$」が成り立つことが必要十分である．従って $E=\left\{\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\, z\geqq 0,\ \frac{z^2}{4}+w^2\leqq 1\right\}$ とおけば $\iint_D(x-y)(x+y)^6dxdy=\iint_E\frac{zw^6}{2}dzdw$ が成り立つ．さらに写像 $\rho:[0,\infty)\times[-\pi,\pi]\to\boldsymbol{R}^2$ を $\rho\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} 2r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ により定めると，$\det\psi'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)=2r$ であり，$\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには $0\leqq r\leqq 1$, $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であることが必要十分である．従って $F=[0,1]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ とおけば，$\iint_E\frac{zw^6}{2}dzdw=\iint_F 2r^8\cos\theta\sin^6\theta drd\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 2r^8\cos\theta\sin^6\theta dr\right)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{9}\cos\theta\sin^6\theta d\theta=$
$\left[\frac{2\sin^7\theta}{63}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{63}$ が得られるため，$\iint_D(x-y)(x+y)^6dxdy=\frac{4}{63}$ である．

(45) 写像 $\psi:[0,\infty)\times[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} r(2\cos\theta-\sin\theta) \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ により定めると，$\det\psi'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)=2r$ であり，$\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには $0\leqq r\leqq 1$, $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ であることが必要十分である． 従って $E=[0,1]\times[0,\pi]$ とおけば，
$\iint_D\left(x^2+3y\right)dxdy=\iint_E 2r\left(r^2(2\cos\theta-\sin\theta)^2+3r\sin\theta\right)drd\theta=$
$\int_0^1\left(\int_0^\pi\left(r^3\left(3\cos 2\theta-4\sin 2\theta+5\right)+6r^2\sin\theta\right)d\theta\right)dr=\int_0^1\left(5\pi r^3+12r^2\right)dr=\frac{5\pi}{4}+4.$

(46) 極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を行うと，D は $E=[0,1]\times[0,2\pi]$ に対応する．さらに $t=r^2$ と変数変換して，教科書の問 3.26 の (1) より $\int\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt=\sin^{-1}t+\sqrt{1-t^2}$ が成り立つことに注意すれば，
$\iint_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy=\iint_E r\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}drd\theta=\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}r\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}d\theta\right)dr=\int_0^1\pi\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}2rdr=$
$\int_0^1\pi\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt=\pi\left[\sin^{-1}t+\sqrt{1-t^2}\right]_0^1=\frac{\pi^2}{2}-\pi.$

(47) $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには $r^2-2r(\cos\theta+\sin\theta)+1\leqq 0$ であることが必要十分である．この不等式を満たすための $r\geqq 0$ が存在するための条件は $(\cos\theta+\sin\theta)^2-1\geqq 0$ かつ $\cos\theta+\sin\theta\geqq 0$ だから $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\geqq 1$, すなわち θ の範囲は $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ である．この範囲の θ に対して $\alpha(\theta)=\cos\theta+\sin\theta-\sqrt{2\cos\theta\sin\theta}$, $\beta(\theta)=\cos\theta+\sin\theta+\sqrt{2\cos\theta\sin\theta}$ とおけば r の範囲は $\alpha(\theta)\leqq r\leqq\beta(\theta)$ だから，$E=\left\{\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\,0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2},\ \alpha(\theta)\leqq r\leqq\beta(\theta)\right\}$ とおけば，$\varphi:E\to D$ は全単射である．従って第 11 回の問題 1.(65) の結果より $\iint_D\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy=\iint_E\frac{r}{(1+r^2)^2}drd\theta=$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\alpha(\theta)}^{\beta(\theta)}\frac{r}{(1+r^2)^2}dr\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{2(1+r^2)}\right]_{\alpha(\theta)}^{\beta(\theta)}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\beta(\theta)^2-\alpha(\theta)^2}{2(1+\alpha(\theta)^2)(1+\beta(\theta)^2)}d\theta=$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos\theta\sin\theta}}{\sqrt{2}(\cos\theta+\sin\theta)}d\theta=\left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\sqrt{2\tan x}+1\right)+\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\sqrt{2\tan x}-1\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\sqrt{\tan x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\pi}{2\sqrt{2}}$

微積分学 II 演習問題　第 26 回　3 重積分

1. $a,\, b,\, c$ を正の実数とし, $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, z \geqq 0,\, \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} \leqq 1 \right\}$ とするとき, 次の積分を計算せよ. ただし (6) では $k \neq 0, \dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{b}$ とする.

(1) $\displaystyle\iiint_D dxdydz$　(2) $\displaystyle\iiint_D xzdxdydz$　(3) $\displaystyle\iiint_D y^2 dxdydz$

(4) $\displaystyle\iiint_D xyzdxdydz$　(5) $\displaystyle\iiint_D xyz\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) dxdydz$　(6) $\displaystyle\iiint_D e^{x+ky+z} dxdydz$

2. a を正の実数とし, $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, z \geqq 0,\, x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2 \right\}$ とするとき, 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iiint_D zdxdydz$　(2) $\displaystyle\iiint_D yzdxdydz$　(3) $\displaystyle\iiint_D xyzdxdydz$

3. $a,\, b,\, c$ を正の実数とし, $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqq 1 \right\}$ とするとき, 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iiint_D dxdydz$　(2) $\displaystyle\iiint_D x^2 dxdydz$　(3) $\displaystyle\iiint_D x^2 z^2 dxdydz$

(4) $\displaystyle\iiint_D y^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\,dxdydz$　(5) $\displaystyle\iiint_D z^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\,dxdydz$　(6) $\displaystyle\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$

4. $a > b > 0$ とし, $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, b^2 \leqq x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2 \right\}$ とするとき, 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dxdydz$　(2) $\displaystyle\iiint_D \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz$　(3) $\displaystyle\iiint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz$

5. $a,\, b,\, c$ を正の実数とし, $\boldsymbol{R}^3$ の領域 $D_1,\, D_2,\, D_3$ を $D_1 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1,\, 0 \leqq z \leqq c \right\}$, $D_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq \dfrac{z^2}{c^2},\, 0 \leqq z \leqq c \right\}$, $D_3 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq \dfrac{z}{c},\, 0 \leqq z \leqq c \right\}$ で定めるとき, 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iiint_{D_1} z^2 dxdydz$　(2) $\displaystyle\iiint_{D_1} x^2 z^2 dxdydz$　(3) $\displaystyle\iiint_{D_1} y^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\,dxdydz$

(4) $\displaystyle\iiint_{D_2} z^2 dxdydz$　(5) $\displaystyle\iiint_{D_2} x^2 z^2 dxdydz$　(6) $\displaystyle\iiint_{D_2} y^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\,dxdydz$

(7) $\displaystyle\iiint_{D_3} z^2 dxdydz$　(8) $\displaystyle\iiint_{D_3} x^2 z^2 dxdydz$　(9) $\displaystyle\iiint_{D_3} y^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\,dxdydz$

6. $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq z^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1,\ z \geqq 0 \right\}$ とするとき $\displaystyle\iiint_D z^2 dxdydz$ を計算せよ.

7. 体積を持つ $\boldsymbol{R}^3$ の領域 D に対し, 連続関数 $\rho : D \to [0, \infty)$ を D の密度関数という. $m,\, b_1,\, b_2,\, b_3$ を

$$m = \iiint_D \rho\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) dxdydz,\ b_1 = \iiint_D x\rho\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) dxdydz,\ b_2 = \iiint_D y\rho\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) dxdydz,\ b_3 = \iiint_D z\rho\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) dxdydz$$

で定め, m を D の質量といい, $\dfrac{b_i}{m}$ を第 i 成分とする $\boldsymbol{R}^3$ の点を D の重心という.

(1) $a,\, k,\, \rho_0$ は正の定数で, $ak \leqq \pi$ とする. $D = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 |\, \|\boldsymbol{x}\| \leqq a\}$ とし, D の密度関数 ρ を $\rho(\boldsymbol{0}) = \rho_0$, $\rho(\boldsymbol{x}) = \rho_0 \dfrac{\sin k\|\boldsymbol{x}\|}{k\|\boldsymbol{x}\|}$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$ で定めるとき, D の質量を求めよ.

(2) a を正の実数とし, $E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, z \geqq 0,\, x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2 \right\}$ とする. E の密度関数 ρ が常に一定の正の値 ρ_0 をとる定数値関数であるとき, E の重心を求めよ.

8. 体積を持つ $\boldsymbol{R}^3$ の領域 D に対し, 密度関数 ρ と $\boldsymbol{R}^3$ の直線 l が与えられているとする. $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して $r(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ から l までの距離とするとき, $I(D; l) = \displaystyle\iiint_D r\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)^2 \rho\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) dxdydz$ とおき, D の l に関する慣性能率という. l_0 が D の重心を通る直線 l に平行な直線で, l と l_0 との距離を a, D の質量を m とするとき, $I(D; l) = I(D; l_0) + a^2 m$ が成り立つことを示せ.

第 26 回の演習問題の解答

1. $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq b - \frac{b}{a}x,\ 0 \leqq z \leqq c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y \right\}$ だから

(1) $\iiint_D dxdydz = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left(\int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} dz \right) dy \right) dx = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left(c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y \right) dy \right) dx =$
$\int_0^a \left[cy - \frac{c}{a}xy - \frac{c}{2b}y^2 \right]_{y=0}^{y=b-\frac{b}{a}x} dx = \int_0^a \frac{bc}{2} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^2 dx = \left[-\frac{abc}{6} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^3 \right]_0^a = \frac{abc}{6}$

(2) $\iiint_D xzdxdydz = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left(\int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} xzdz \right) dy \right) dx = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \frac{x}{2} \left(c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y \right)^2 dy \right) dx =$
$\int_0^a \left[-\frac{bc^2x}{6} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^3 \right]_{y=0}^{y=b-\frac{b}{a}x} dx = \int_0^a \frac{bc^2x}{6} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^3 dx = \left[-\frac{abc^2x}{24} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^4 \right]_0^a + \int_0^a \frac{abc^2}{24} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^4 dx =$
$\left[-\frac{a^2bc^2}{120} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^5 \right]_0^a = \frac{a^2bc^2}{120}$

(3) $\iiint_D y^2dxdydz = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left(\int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} y^2dz \right) dy \right) dx = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} y^2 \left(c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y \right) dy \right) dx =$
$\int_0^a \left(\left[\frac{cy^3}{3} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \right]_{y=0}^{y=b-\frac{b}{a}x} + \int_0^{b-\frac{b}{a}x} \frac{cy^3}{3b} dy \right) dx = \int_0^a \frac{b^3c}{12} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^4 dx = \left[-\frac{ab^3c}{60} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^5 \right]_0^a = \frac{ab^3c}{60}$

(4) $\iiint_D xyzdxdydz = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left(\int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} xyzdz \right) dy \right) dx = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \frac{xy}{2} \left(c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y \right)^2 dy \right) dx =$
$\int_0^a \left(\left[-\frac{bc^2xy}{6} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^3 \right]_{y=0}^{y=b-\frac{b}{a}x} + \int_0^{b-\frac{b}{a}x} \frac{bc^2x}{6} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^3 dy \right) dx =$
$\int_0^a \left[-\frac{b^2c^2x}{24} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^4 \right]_{y=0}^{y=b-\frac{b}{a}x} dx = \int_0^a \frac{b^2c^2x}{24} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^4 dx =$
$\left[-\frac{ab^2c^2x}{120} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^5 \right]_0^a + \int_0^a \frac{ab^2c^2}{120} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^5 dx = \left[\frac{a^2b^2c^2}{720} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^6 \right]_0^a = \frac{a^2b^2c^2}{720}$

(5) $\iiint_D xyz \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} \right) dxdydz = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left(\int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} xyz \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} \right) dz \right) dy \right) dx =$
$\int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left(\left[-\frac{cxyz}{2} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} \right)^2 \right]_{z=0}^{z=c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} + \int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} \frac{cxy}{2} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} \right)^2 dz \right) dy \right) dx =$
$\int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left[-\frac{c^2xy}{6} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} \right)^3 \right]_{z=0}^{z=c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} dy \right) dx = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \frac{c^2xy}{6} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^3 dy \right) dx =$
$\int_0^a \left(\left[-\frac{bc^2xy}{24} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^4 \right]_{y=0}^{y=b-\frac{b}{a}x} + \int_0^{b-\frac{b}{a}x} \frac{bc^2x}{24} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^4 dy \right) dx =$
$\int_0^a \left[-\frac{b^2c^2x}{120} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^5 \right]_{y=0}^{y=b-\frac{b}{a}x} dx = \int_0^a \frac{b^2c^2x}{120} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^5 dx =$
$\left[-\frac{ab^2c^2x}{720} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^6 \right]_0^a + \int_0^a \frac{ab^2c^2}{720} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^6 dx = \left[-\frac{a^2b^2c^2}{5040} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^7 \right]_0^a = \frac{a^2b^2c^2}{5040}$

(6) $\iiint_D e^{x+ky+z}dxdydz = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left(\int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} e^{x+ky+z}dz \right) dy \right) dx =$
$\int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left[e^{x+ky+z} \right]_{z=0}^{z=c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} dy \right) dx = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left(e^{\frac{a-c}{a}x+\frac{bk-c}{b}y+c} - e^{x+ky} \right) dy \right) dx =$
$\int_0^a \left[\frac{be^{\frac{a-c}{a}x+\frac{bk-c}{b}y+c}}{bk-c} - \frac{e^{x+ky}}{k} \right]_{y=0}^{y=b-\frac{b}{a}x} dx = \int_0^a \left(\frac{be^{\frac{a-bk}{a}x+bk}}{bk-c} - \frac{e^{\frac{a-bk}{a}x+bk}}{k} - \frac{be^{\frac{a-c}{a}x+c}}{bk-c} + \frac{e^x}{k} \right) dx \ \cdots(*)$

$a \neq c$ の場合 $(*) = \left[\dfrac{abe^{\frac{a-bk}{a}x+bk}}{(a-bk)(bk-c)} - \dfrac{ae^{\frac{a-bk}{a}x+bk}}{k(a-bk)} - \dfrac{abe^{\frac{a-c}{a}x+c}}{(a-c)(bk-c)} + \dfrac{e^x}{k}\right]_0^a =$
$\dfrac{ac\left(e^a - e^{bk}\right)}{k(a-bk)(bk-c)} - \dfrac{ab\left(e^a - e^c\right)}{(a-c)(bk-c)} + \dfrac{e^a - 1}{k}$
$a = c$ の場合 $(*) = \left[\dfrac{abe^{\frac{a-bk}{a}x+bk}}{(a-bk)(bk-c)} - \dfrac{ae^{\frac{a-bk}{a}x+bk}}{k(a-bk)} - \dfrac{be^c x}{bk-c} + \dfrac{e^x}{k}\right]_0^a = \dfrac{a^2\left(e^{bk} - e^a\right)}{k(a-bk)^2} - \dfrac{abe^a}{bk-a} + \dfrac{e^a - 1}{k}$

2. 写像 $\rho : [0,\infty) \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \boldsymbol{R}^2$ を $\rho\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$ により定めると, $\det\rho'\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = r^2\sin\theta$ である. $\rho\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \in D$ であるためには $0 \leqq r \leqq a$, $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ であることが必要十分である. そこで $E = [0,a] \times \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \times \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ とおく.

(1) $\displaystyle\iiint_D z\,dxdydz = \iiint_E r^3\cos\theta\sin\theta\,drd\theta d\varphi = \int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^3}{2}\sin2\theta d\varphi\right)d\theta\right)dr =$
$\displaystyle\int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi r^3}{4}\sin2\theta d\theta\right)dr = \int_0^a\left[-\frac{\pi r^3}{8}\cos2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}dr = \int_0^a\frac{\pi r^3}{4}dr = \frac{\pi a^4}{16}$

(2) $\displaystyle\iiint_D yz\,dxdydz = \iiint_E r^4\cos\theta\sin^2\theta\sin\varphi\,drd\theta d\varphi = \int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^4\cos\theta\sin^2\theta\sin\varphi d\varphi\right)d\theta\right)dr =$
$\displaystyle\int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^4\cos\theta\sin^2\theta d\theta\right)dr = \int_0^a\left[\frac{r^4}{3}\sin^3\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}dr = \int_0^a\frac{r^4}{3}dr = \frac{a^5}{15}$

(3) $\displaystyle\iiint_D xyz\,dxdydz = \iiint_E r^5\cos\theta\sin^3\theta\cos\varphi\sin\varphi\,drd\theta d\varphi = \int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^5}{2}\cos\theta\sin^3\theta\sin2\varphi d\varphi\right)d\theta\right)dr =$
$\displaystyle\int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{r^5}{4}\cos\theta\sin^3\theta\cos2\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}d\theta\right)dr = \int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^5}{2}\cos\theta\sin^3\theta d\theta\right)dr = \int_0^a\left[\frac{r^5}{8}\sin^4\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}dr =$
$\displaystyle\int_0^a\frac{r^5}{8}dr = \frac{a^6}{48}$

3. 写像 $\rho : [0,\infty) \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \boldsymbol{R}^2$ を $\rho\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar\sin\theta\cos\varphi \\ br\sin\theta\sin\varphi \\ cr\cos\theta \end{pmatrix}$ により定めると, $\det\rho'\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = abcr^2\sin\theta$ である. $\rho\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \in D$ であるためには $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ であることが必要十分である. そこで $E = [0,1] \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$ とおく.

(1) $\displaystyle\iiint_D dxdydz = \iiint_E abcr^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi = \int_0^1\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}abcr^2\sin\theta d\varphi\right)d\theta\right)dr =$
$\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^{\pi}2\pi abcr^2\sin\theta d\theta\right)dr = \int_0^1 4\pi abcr^2dr = \frac{4\pi abc}{3}$

(2) $\displaystyle\iiint_D x^2dxdydz = \iiint_E a^3bcr^4\sin^3\theta\cos^2\varphi\,drd\theta d\varphi = \int_0^1\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{a^3bcr^4}{2}\sin^3\theta(1+\cos2\varphi)d\varphi\right)d\theta\right)dr =$
$\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^{\pi}\pi a^3bcr^4\left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta\right)dr = \int_0^1\left[\pi a^3bcr^4\left(-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}dr = \int_0^1\frac{4\pi a^3bcr^4}{3}dr = \frac{4\pi a^3bc}{15}$

(3) $\displaystyle\iiint_D x^2z^2dxdydz = \iiint_E a^3bc^3r^6\cos^2\theta\sin^3\theta\cos^2\varphi\,drd\theta d\varphi =$
$\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{a^3bc^3r^6}{2}\cos^2\theta\sin^3\theta(1+\cos2\varphi)d\varphi\right)d\theta\right)dr = \int_0^1\left(\int_0^{\pi}\pi a^3bc^3r^6\left(\cos^2\theta-\cos^4\theta\right)\sin\theta d\theta\right)dr =$
$\displaystyle\int_0^1\left[\pi a^3bc^3r^6\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}+\frac{\cos^5\theta}{5}\right)\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}dr = \int_0^1\frac{4\pi a^3bc^3r^6}{15}dr = \frac{4\pi a^3bc^3}{105}$

(4) $\displaystyle\iiint_D y^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}dxdydz = \iiint_E ab^3cr^5\sin^4\theta\sin^2\varphi\,drd\theta d\varphi =$
$\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{ab^3cr^5}{8}\left(1-2\cos2\theta+\cos^22\theta\right)(1-\cos2\varphi)d\varphi\right)d\theta\right)dr =$

$\int_0^1 \left(\int_0^\pi \frac{\pi ab^3cr^5}{8}(3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta)\,d\theta\right)dr = \int_0^1 \frac{3\pi^2ab^3cr^5}{8}dr = \frac{\pi^2ab^3c}{16}$

(5) $\iiint_D z^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}dxdydz = \iiint_E abc^3r^5\cos^2\theta\sin^2\theta drd\theta d\varphi = \int_0^1\left(\int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi}\frac{abc^3r^5}{4}\sin^2 2\theta d\varphi\right)d\theta\right)dr =$
$\int_0^1\left(\int_0^\pi \frac{\pi abc^3r^5}{4}(1-\cos 4\theta)\,d\theta\right)dr = \int_0^1 \frac{\pi^2abc^3r^5}{4}dr = \frac{\pi^2abc^3}{24}.$

(6) $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \iiint_E abcr^4(a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+b^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+c^2\cos^2\theta)\sin\theta drd\theta d\varphi =$
$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^\pi\left(\int_0^1 abcr^4(a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+b^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+c^2\cos^2\theta)\sin\theta dr\right)d\theta\right)d\varphi =$
$8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{abc}{5}(a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+b^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+c^2\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta\right)d\varphi =$
$8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 \frac{abc}{10}(a^2(1-t^2)(1+\cos 2\varphi)+b^2(1-t^2)(1-\cos 2\varphi)+2c^2t^2)\,dt\right)d\varphi =$
$8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{abc}{30}(2a^2(1+\cos 2\varphi)+2b^2(1-\cos 2\varphi)+2c^2)\,d\varphi = \frac{4\pi abc}{15}(a^2+b^2+c^2).$

4. 写像 $\rho : [0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi] \to \boldsymbol{R}^2$ を $\rho\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi\\ r\sin\theta\sin\varphi\\ r\cos\theta\end{pmatrix}$ により定めると, $\det\rho'\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} = r^2\sin\theta$ である. $\rho\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} \in D$ であるためには $b \leqq r \leqq a$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ であることが必要十分である. そこで $E=[b,a]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$ とおく.

(1) $\iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz = \iiint_E r\sin\theta drd\theta d\varphi = \int_b^a\left(\int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi} r\sin\theta d\varphi\right)d\theta\right)dr =$
$\int_b^a\left(\int_0^\pi 2\pi r\sin\theta d\theta\right)dr = \int_b^a 4\pi r dr = 2\pi\left(a^2-b^2\right)$

(2) $\iiint_D \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \iiint_E r^2\cos^2\theta\sin\theta drd\theta d\varphi = \int_b^a\left(\int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi} r^2\cos^2\theta\sin\theta d\varphi\right)d\theta\right)dr =$
$\int_b^a\left(\int_0^\pi 2\pi r^2\cos^2\theta\sin\theta d\theta\right)dr = \int_b^a\left[-\frac{2\pi r^2}{3}\cos^3\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}dr = \int_b^a \frac{4\pi r^2}{3}dr = \frac{4\pi\left(a^3-b^3\right)}{9}$

(3) $\iiint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \iiint_E r\sin^2\theta drd\theta d\varphi = \int_b^a\left(\int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi}\frac{r}{2}(1-\cos 2\theta)d\varphi\right)d\theta\right)dr =$
$\int_b^a\left(\int_0^\pi \pi r(1-\cos 2\theta)d\theta\right)dr = \int_b^a \pi^2 r dr = \frac{\pi^2\left(a^2-b^2\right)}{2}$

5. 写像 $\rho : [0,\infty)\times[0,2\pi]\times(-\infty,\infty) \to \boldsymbol{R}^2$ を $\rho\begin{pmatrix} r\\ \varphi\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar\cos\varphi\\ ar\sin\varphi\\ t\end{pmatrix}$ により定めると, $\det\rho'\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} = abr$ である. $\rho\begin{pmatrix} r\\ \varphi\\ t\end{pmatrix} \in D_1$ であるためには $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$, $0 \leqq t \leqq c$ であることが必要十分であり, $\rho\begin{pmatrix} r\\ \varphi\\ t\end{pmatrix} \in D_1$ であるためには $0 \leqq r \leqq \frac{t}{c}$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$, $0 \leqq t \leqq c$ であることが必要十分であり, $\rho\begin{pmatrix} r\\ \varphi\\ t\end{pmatrix} \in D_1$ であるためには $0 \leqq r \leqq \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{c}}$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$, $0 \leqq t \leqq c$ であることが必要十分である. そこで $E_1 = [0,1]\times[0,2\pi]\times[0,c]$, $E_2 = \left\{\begin{pmatrix} r\\ \varphi\\ t\end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, 0 \leqq t \leqq c, 0 \leqq r \leqq \frac{t}{c}\right\}$, $E_3 = \left\{\begin{pmatrix} r\\ \varphi\\ t\end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, 0 \leqq t \leqq c, 0 \leqq r \leqq \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{c}}\right\}$ とおく.

(1) $\iiint_{D_1} z^2dxdydz = \iiint_{E_1} abrt^2drd\varphi dt = \int_0^c\left(\int_0^1\left(\int_0^{2\pi} abrt^2d\varphi\right)dr\right)dt = \int_0^c\left(\int_0^1 2\pi abrt^2dr\right)dt =$
$\int_0^c \pi abt^2dt = \frac{\pi abc^3}{3}$

(2) $\iiint_{D_1} x^2z^2dxdydz = \iiint_{E_1} a^3br^3t^2\cos^2\varphi drd\varphi dt = \int_0^c\left(\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\frac{a^3br^3t^2}{2}(1+\cos 2\varphi)d\varphi\right)dr\right)dt =$
$\int_0^c\left(\int_0^1 \pi a^3br^3t^2dr\right)dt = \int_0^c \frac{\pi a^3bt^2}{4}dt = \frac{\pi a^3bc^3}{12}$

(3) $\iiint_{D_1} y^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}dxdydz = \iiint_{E_1} ab^3r^4\sin^2\varphi drd\varphi dt = \int_0^c\left(\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\frac{ab^3r^4}{2}(1-\cos 2\varphi)d\varphi\right)dr\right)dt =$
$\int_0^c\left(\int_0^1 \pi ab^3r^4dr\right)dt = \int_0^c\frac{\pi ab^3}{5}dt = \frac{\pi ab^3c}{5}$

(4) $\iiint_{D_2} z^2dxdydz = \iiint_{E_2} abrt^2drd\varphi dt = \int_0^c\left(\int_0^{\frac{t}{c}}\left(\int_0^{2\pi} abrt^2d\varphi\right)dr\right)dt = \int_0^c\left(\int_0^{\frac{t}{c}} 2\pi abrt^2dr\right)dt =$
$\int_0^c\left[\pi abr^2t^2\right]_{r=0}^{r=\frac{t}{c}}dt = \int_0^c\frac{\pi abt^4}{c^2}dt = \frac{\pi abc^3}{5}$

(5) $\iiint_{D_2} x^2z^2dxdydz = \iiint_{E_2} a^3br^3t^2\cos^2\varphi drd\varphi dt = \int_0^c\left(\int_0^{\frac{t}{c}}\left(\int_0^{2\pi}\frac{a^3br^3t^2}{2}(1+\cos 2\varphi)d\varphi\right)dr\right)dt =$
$\int_0^c\left(\int_0^{\frac{t}{c}}\pi a^3br^3t^2dr\right)dt = \int_0^c\frac{\pi a^3bt^6}{4c^4}dt = \frac{\pi a^3bc^3}{28}$

(6) $\iiint_{D_2} y^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}dxdydz = \iiint_{E_2} ab^3r^4\sin^2\varphi drd\varphi dt = \int_0^c\left(\int_0^{\frac{t}{c}}\left(\int_0^{2\pi}\frac{ab^3r^4}{2}(1-\cos 2\varphi)d\varphi\right)dr\right)dt =$
$\int_0^c\left(\int_0^{\frac{t}{c}}\pi ab^3r^4dr\right)dt = \int_0^c\frac{\pi ab^3t^5}{5c^5}dt = \frac{\pi ab^3c}{30}$

(7) $\iiint_{D_3} z^2dxdydz = \iiint_{E_3} abrt^2drd\varphi dt = \int_0^c\left(\int_0^{\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{c}}}\left(\int_0^{2\pi} abrt^2d\varphi\right)dr\right)dt = \int_0^c\left(\int_0^{\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{c}}} 2\pi abrt^2d\varphi dr\right)dt =$
$\int_0^c\left[\pi abr^2t^2\right]_{r=0}^{r=\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{c}}}dt = \int_0^c\frac{\pi abt^3}{c}dt = \frac{\pi abc^3}{4}$

(8) $\iiint_{D_3} x^2z^2dxdydz = \iiint_{E_3} a^3br^3t^2\cos^2\varphi drd\varphi dt = \int_0^c\left(\int_0^{\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{c}}}\left(\int_0^{2\pi}\frac{a^3br^3t^2}{2}(1+\cos 2\varphi)d\varphi\right)dr\right)dt =$
$\int_0^c\left(\int_0^{\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{c}}}\pi a^3br^3t^2dr\right)dt = \int_0^c\frac{\pi a^3bt^4}{4c^2}dt = \frac{\pi a^3bc^3}{20}$

(9) $\iiint_{D_3} y^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}dxdydz = \iiint_{E_3} ab^3r^4\sin^2\varphi drd\varphi dt = \int_0^c\left(\int_0^{\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{c}}}\left(\int_0^{2\pi}\frac{ab^3r^4}{2}(1-\cos 2\varphi)d\varphi\right)dr\right)dt =$
$\int_0^c\left(\int_0^{\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{c}}}\pi ab^3r^4dr\right)dt = \int_0^c\frac{\pi ab^3t^{\frac{5}{2}}}{5c^{\frac{5}{2}}}dt = \frac{2\pi ab^3c}{35}$

6. 極座標変換 $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ を行うと, D は $E = [0,1]\times\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\times[0,2\pi]$ に対応するため, $\iiint_D z^2dxdydz = \iiint_E r^4\sin\theta\cos^2\theta drd\theta d\varphi = \int_0^1\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{2\pi}r^4\sin\theta\cos^2\theta d\varphi\right)d\theta\right)dr =$
$\int_0^1\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\pi r^4\sin\theta\cos^2\theta d\theta\right)dr = \int_0^1\left[-\frac{2\pi r^4}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}dr = \int_0^1\frac{\pi\left(2\sqrt{2}-1\right)r^4}{3\sqrt{2}}dr = \frac{\pi\left(4-\sqrt{2}\right)}{30}.$

7. (1) 極座標変換 $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ を行うと, D は $F = [0,a]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$ に対応するため, D の質量は $\iiint_D \rho_0\frac{\sin k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz = \iiint_F \rho_0\frac{r\sin kr\sin\theta}{k}drd\theta d\varphi =$
$\int_0^a\left(\int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi}\rho_0\frac{r\sin kr\sin\theta}{k}d\varphi\right)d\theta\right)dr = \int_0^a\left(\int_0^\pi 2\pi\rho_0\frac{r\sin kr\sin\theta}{k}d\theta\right)dr = \int_0^a 4\pi\rho_0\frac{r\sin kr}{k}dr =$
$\left[-4\pi\rho_0\frac{r\cos kr}{k^2}\right]_0^a + \int_0^a 4\pi\rho_0\frac{\cos kr}{k^2}dr = -\frac{4\pi a\rho_0\cos ak}{k^2} + \left[\frac{4\pi\rho_0\sin kr}{k^3}\right]_0^a = \frac{4\pi\rho_0}{k^3}(\sin ak - ak\cos ak).$

(2) 極座標変換 $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ を行うと, E は $G = [0,a]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2\pi]$ に対応するため, E の質量は $\iiint_E \rho_0\,dxdydz = \iiint_G \rho_0r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi = \int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\rho_0r^2\sin\theta\,d\varphi\right)d\theta\right)dr =$
$\int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi\rho_0r^2\sin\theta\,d\theta\right)dr = \int_0^a 2\pi\rho_0r^2dr = \frac{2\pi\rho_0a^3}{3}$. また, $\iiint_E x\rho_0\,dxdydz = \iiint_G \rho_0r^3\sin^2\theta\cos\varphi\,drd\theta d\varphi =$

$\int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\rho_0 r^3\sin^2\theta\cos\varphi\,d\varphi\right)d\theta\right)dr=0,\ \iiint_E y\rho_0\,dxdydz=\iiint_G \rho_0 r^3\sin^2\theta\sin\varphi\,drd\theta d\varphi=$
$\int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\rho_0 r^3\sin^2\theta\sin\varphi\,d\varphi\right)d\theta\right)dr=0,\ \iiint_E z\rho_0\,dxdydz=\iiint_G \rho_0 r^3\sin\theta\cos\theta\,drd\theta d\varphi=$
$\int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\rho_0 r^3\sin\theta\cos\theta\,d\varphi\right)d\theta\right)dr=\int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi\rho_0 r^3\sin\theta\cos\theta\,d\theta\right)dr=\int_0^a[\pi\rho_0 r^3\sin^2\theta]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}dr=$
$\int_0^\pi a\rho_0 r^3\,dr=\dfrac{\pi\rho_0 a^4}{4}$ だから, E の重心の座標は $\left(0,0,\dfrac{3a}{8}\right)$ である.

8. l の方向ベクトルで単位ベクトルであるものを $\boldsymbol{v}$ とし, D の重心の位置ベクトルを $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{g}$ から l に下ろした垂線の足の位置ベクトルを $\boldsymbol{c}$ とすれば, l, l_0 はそれぞれ $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}+t\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}+t\boldsymbol{v}$ とパラメータ表示される. $\boldsymbol{x}\in D$ から l, l_0 に下ろした垂線の足の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ とすれば, $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{c}+s\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{g}+t\boldsymbol{v}$ を満たす実数 s, t があり, $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q},\boldsymbol{v})=0$ から $s=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})$, $t=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{g},\boldsymbol{v})$ である. 従って $\boldsymbol{x}\in D$ から l, l_0 までの距離をそれぞれ $r(\boldsymbol{x})$, $r_0(\boldsymbol{x})$ とすれば

$$\begin{aligned}r(\boldsymbol{x})^2&=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\|^2=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\|^2-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})^2\\ r_0(\boldsymbol{x})^2&=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}\|^2=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{g}-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{g},\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\|^2=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{g}\|^2-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{g},\boldsymbol{v})^2\end{aligned}$$

であり, $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{g}$ と $\boldsymbol{v}$ が垂直であることから $(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{g},\boldsymbol{v})$ だから, 上式より

$$r(\boldsymbol{x})^2-r_0(\boldsymbol{x})^2=2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}-\boldsymbol{c})+\|\boldsymbol{c}\|^2-\|\boldsymbol{g}\|^2\ \cdots(*)$$

が成り立つ. $b_1=\iiint_D x\rho\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)dxdydz$, $b_2=\iiint_D y\rho\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)dxdydz$, $b_3=\iiint_D z\rho\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)dxdydz$, $\boldsymbol{c}=\left(\begin{smallmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{smallmatrix}\right)$ とおけば, $\boldsymbol{g}=\dfrac{1}{m}\left(\begin{smallmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{smallmatrix}\right)$ より

$$\begin{aligned}\iiint_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}-\boldsymbol{c})\rho(\boldsymbol{x})\,dxdydz&=\iint_D\left(\left(\frac{b_1}{m}-c_1\right)x+\left(\frac{b_2}{m}-c_2\right)y+\left(\frac{b_2}{m}-c_3\right)z\right)\rho\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)dxdydz\\&=b_1\left(\frac{b_1}{m}-c_1\right)+b_2\left(\frac{b_2}{m}-c_2\right)+b_3\left(\frac{b_2}{m}-c_3\right)=m(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}-\boldsymbol{c})\end{aligned}$$

だから $(*)$ と $a=\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{g}\|$ より,

$$\begin{aligned}I(D;l)-I(D;l_0)&=\iiint_D(2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}-\boldsymbol{c})+\|\boldsymbol{c}\|^2-\|\boldsymbol{g}\|^2)\rho(\boldsymbol{x})\,dxdydz=2m(\boldsymbol{g},\boldsymbol{g}-\boldsymbol{c})+m(\|\boldsymbol{c}\|^2-\|\boldsymbol{g}\|^2)\\&=m(\|\boldsymbol{g}\|^2-2(\boldsymbol{g},\boldsymbol{c})+\|\boldsymbol{c}\|^2)=m\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{g}\|^2=a^2m\end{aligned}$$

が得られる.

微積分学 II 演習問題　第 27 回　重積分の広義積分

1. 以下の広義積分を計算せよ．ただし α, a, b, c は正の実数とし, (39) では $\alpha < \frac{9}{2}$, (40) では $\alpha > 2$, (44) では $\alpha < 3$ とする．

(1) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq x \leqq y \right\}$, $\displaystyle\iint_D e^{-y^2} dxdy$

(2) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 < x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{2y}{x^2+y^2} dxdy$

(3) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 < x \leqq 1,\ x \leqq y \leqq \sqrt{3}x \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2} dxdy$

(4) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq x \leqq 1,\ -x < y \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x+y}} dxdy$

(5) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 1 \leqq x \leqq y \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} dxdy$

(6) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 < x \leqq y \leqq 1 \right\}$, $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ |x| \leqq 1,\ |y| \leqq 1,\ x \neq 0 \text{ または } y \neq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$

(7) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x^2 \leqq y < x \right\}$, $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ |y| < x \leqq 1 \right\}$, $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq y < \min\{x, 1-x\} \right\}$,
$\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} dxdy$

(8) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq x < 1,\ x \leqq y \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dxdy$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} dxdy$

(9) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 0 < x+y \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy$, $\displaystyle\iint_D \cos\left(\frac{\pi(y-x)}{2(y+x)}\right) dxdy$

(10) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \geqq 1,\ 0 < y \leqq \frac{1}{x^2} \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{xy}} dxdy$

(11) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D (x+y)e^{-x-y} dxdy$, $\displaystyle\iint_D (x+y)e^{-x^2-y^2} dxdy$

(12) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ a < x+y \leqq b \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3} dxdy$

(13) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x \neq 0 \text{ または } y \neq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \log(x+y) dxdy$

(14) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x \neq 0 \text{ または } y \neq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dxdy$

(15) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x \neq 0 \text{ または } y \neq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dxdy$

(16) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x \neq 0 \text{ または } y \neq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{2y}{x^2+y^2} dxdy$

(17) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x \neq 0 \text{ または } y \neq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y)^\alpha} dxdy$

(18) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq y < x \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x-y)^\alpha} dxdy$

(19) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x^2+y^2 \geqq 1,\ -x \leqq y \leqq \sqrt{3}x \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$

(20) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 < x^2+y^2 \leqq b^2 \right\}$, $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x^2+y^2 \geqq a^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy$

(21) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 < x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$

(22) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 < x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{x\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dxdy$

(23) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x \neq 0 \text{ または } y \neq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(x^2+y^2\right)^{\alpha-1} e^{-(x^2+y^2)^\alpha} dxdy$

(24) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 < x^2+y^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2) dxdy$

(25) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \ \middle| \ x^2+y^2 < a^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(-\log\left(a - \sqrt{x^2+y^2}\right)\right) dxdy$

(26) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x > 0,\ 0 \leqq y \leqq x \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$

(27) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2+a^2)^\alpha}$

(28) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x^2+y^2 > 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2-1}} dxdy$

(29) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 < x^2+y^2 < 1,\ 0 \leqq x \leqq y \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy$

(30) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x^2+y^2 \geqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2+y^2}} dxdy$

(31) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x^2 e^{-x^2-y^2} dxdy$, $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)^2} dxdy$

(32) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2+a^2)\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$

(33) $D = \boldsymbol{R}^2$, $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2) e^{-x^2-y^2} dxdy$, $\displaystyle\iint_D x^2y^2 e^{-x^2-y^2} dxdy$, $\displaystyle\iint_D e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dxdy$ $(a > 0,\ b^2-ac < 0)$

(34) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x^2+y^2 < a^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(a^2-x^2-y^2)^\alpha} dxdy$

(35) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x^2+y^2 \leqq a^2,\ x > 0,\ y \geqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \tan^{-1} \frac{y}{x} dxdy$

(36) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 < y < 1,\ y^3 \leqq x < y^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{y^4-x^2}} dxdy$

(37) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq x \leqq 1,\ y > x^3 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{x^4+y^2} dxdy$

(38) $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \middle| \ x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0, x^2+y^2+z^2 < 1 \right\}$, $\displaystyle\iiint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}} dxdy$

(39) $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \middle| \ 0 < x^2+y^2+z^2 \leqq a^2 \right\}$, $\displaystyle\iiint_D \log(x^2+y^2+z^2) dxdydz$, $\displaystyle\iiint_D \frac{x^2y^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} dxdydz$

(40) $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \middle| \ x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iiint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(1+x^2+y^2+z^2)^\alpha} dxdydz$

(41) $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \middle| x^2+y^2+z^2 \leqq 1,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$, $\displaystyle\iiint_D \frac{1}{x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} dxdydz$

(42) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+x)(1+xy^2)} dxdy$

(43) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ 0 \leqq x \leqq a, 0 \leqq y \leqq x \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{y^2}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} dxdy$

(44) $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \middle| 0 < \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1, x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iiint_D \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} dxdydz$

2. (1) 関数 $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ $(0 \leqq a < b)$ は単調増加である C^1 級関数であり, $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ a < x^2+y^2 < b \right\}$ とする. 極限 $\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x \to b-0} f(x)$ が存在するとき, $\displaystyle\iint_D f'(x^2+y^2) dxdy$ を, $\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x \to b-0} f(x)$ を用いて表せ.

(2) 関数 $f : (a, \infty) \to \boldsymbol{R}$ $(a \geqq 0)$ は単調増加である C^1 級関数であり, $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x^2+y^2 > a \right\}$ とする. 極限 $\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x)$ が存在するとき, $\displaystyle\iint_D f'(x^2+y^2) dxdy$ を, $\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x)$ を用いて表せ.

3. (発展問題) ベータ関数を用いることによって, 次の広義積分の値を表せ.

(1) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x > 0, y > 0, x+y \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x^{p-1} y^{q-1} dxdy$ (ただし $p > 0$, $q > 0$)

(2) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{x^{m-1} y^{n-1}}{\left((1+x^2)^2+y^2\right)^\alpha} dxdy$ (ただし $m > 0$, $n > 0$, $\alpha > \max\left\{\frac{m}{4}+\frac{1}{2},\ \frac{n}{2}\right\}$)

(3) $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \middle| \ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iiint_D \frac{1}{1+x^\alpha+y^\alpha+z^\alpha} dxdy$ (ただし $\alpha > 3$)

第 27 回の演習問題の解答

1. (19) から (36) では写像 $\varphi : [0,\infty)\times\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to \boldsymbol{R}^2$ を $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ により定めると, $\det\varphi'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = r$ である.

(1) $D_n = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, 1 \leqq y \leqq n,\ 0 \leqq x \leqq y\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列であり, $\displaystyle\iint_{D_n} e^{-y^2}dxdy = \int_0^n\left(\int_0^y e^{-y^2}dx\right)dy = \int_0^n ye^{-y^2}dy = \left[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right]_0^n = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-n^2}$ だから $\displaystyle\iint_D e^{-y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} e^{-y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-n^2}\right) = \frac{1}{2}$.

(2) $D_n = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x^2\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=2}^{\infty}$ は D の近似増加列であり, $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{2y}{x^2+y^2}dxdy = \int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_0^{x^2}\frac{2y}{x^2+y^2}dy\right)dx = \int_{\frac{1}{n}}^1\left[\log(x^2+y^2)\right]_{y=0}^{y=x^2}dx = \int_{\frac{1}{n}}^1\log(1+x^2)\,dx = \left[x\log(1+x^2)\right]_{\frac{1}{n}}^1 - \int_{\frac{1}{n}}^1\left(2-\frac{2}{1+x^2}\right)dx = \log 2 - \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - \left[2x-2\tan^{-1}x\right]_{\frac{1}{n}}^1 = \log 2 - \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - 2 + \frac{\pi}{2} + \frac{2}{n} - 2\tan^{-1}\frac{1}{n}$ だから $\displaystyle\iint_D\frac{2y}{x^2+y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{2y}{x^2+y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\left(\log 2 - \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - 2 + \frac{\pi}{2} + \frac{2}{n} - 2\tan^{-1}\frac{1}{n}\right) = \log 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$.

(3) $D_n = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ \ x \leqq y \leqq \sqrt{3}x\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=2}^{\infty}$ は D の近似増加列であり, $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}dxdy = \int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_x^{\sqrt{3}x}\frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}dy\right)dx = \int_{\frac{1}{n}}^1\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\tan^{-1}\frac{y}{x}\right]_{y=x}^{y=\sqrt{3}x}dx = \int_{\frac{1}{n}}^1\frac{\pi}{12\sqrt{x}}dx = \left[\frac{\pi}{6}\sqrt{x}\right]_{\frac{1}{n}}^1 = \frac{\pi}{6}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ だから $\displaystyle\iint_D\frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{6}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

(4) $D_n = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 1,\ \frac{1}{n}-x < y \leqq 1\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列であり, $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{x+y}}dxdy = \int_0^1\left(\int_{\frac{1}{n}-x}^1\frac{1}{\sqrt{x+y}}dy\right)dx = \int_0^1\left[2\sqrt{x+y}\right]_{y=\frac{1}{n}-x}^{y=1}dx = \int_0^1\left(2\sqrt{x+1}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)dx = \left[\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2x}{\sqrt{n}}\right]_0^1 = \frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{4}{3}$ だから $\displaystyle\iint_D\frac{1}{\sqrt{x+y}}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{x+y}}dxdy = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{4}{3}\right) = \frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{3}$.

(5) $D_n = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 1 \leqq y \leqq n,\ 1 \leqq x \leqq y\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列であり, $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}dxdy = \int_1^n\left(\int_1^y\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy = \int_1^n\left[\frac{-1}{x^2+y^2}\right]_{x=1}^{x=y}dy = \int_1^n\left(\frac{1}{1+y^2}-\frac{1}{2y^2}\right)dy = \left[\tan^{-1}y + \frac{1}{2y}\right]_1^n = \tan^{-1}n + \frac{1}{2n} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ だから
$\displaystyle\iint_D\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\left(\tan^{-1}n + \frac{1}{2n} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

(6) $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 < x \leqq y \leqq 1\right\}$ の場合, $D_n = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{n} \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq y\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である. $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_0^y\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dy\right)dx = \int_{\frac{1}{n}}^1\left[\log\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]_{x=0}^{x=y}dx = \int_{\frac{1}{n}}^1\log\left(1+\sqrt{2}\right)dx = \log\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$ だから $\displaystyle\iint_D\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \lim_{n\to\infty}\log(1+\sqrt{2})\left(1-\frac{1}{n}\right) = \log(1+\sqrt{2})$.

$D = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, |x| \leqq 1,\ |y| \leqq 1, x \neq 0 \text{ または } y \neq 0\right\}$ の場合, $D_n = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{n} \leqq |x| \leqq 1,\ \frac{1}{n} \leqq |y| \leqq 1\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である. D_n の部分集合 $E_n = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x\right\}$ を考えれば, D_n が x 軸, y 軸, 直線 $y = x$, 直線 $y = -x$ に関して対称であり, 被積分関数を f とすれば $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = f\left(\begin{smallmatrix} -x \\ y \end{smallmatrix}\right) = f\left(\begin{smallmatrix} x \\ -y \end{smallmatrix}\right) =$

$f(\binom{y}{x})$ が成り立つことから, $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=8\iint_{E_n}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=8\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_0^x\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dy\right)dx=$ $\displaystyle 8\int_{\frac{1}{n}}^{1}\Big[\log\Big(y+\sqrt{x^2+y^2}\Big)\Big]_{y=0}^{y=x}dx=8\int_{\frac{1}{n}}^{1}\log\Big(1+\sqrt{2}\Big)dx=8\log\Big(1+\sqrt{2}\Big)\left(1-\frac{1}{n}\right)$. 従って $\displaystyle\iint_{D}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}8\log\Big(1+\sqrt{2}\Big)\left(1-\frac{1}{n}\right)=8\log\Big(1+\sqrt{2}\Big)$.

(7) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^2\leqq y<x\right\}$ の場合, $D_n=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{n}\leqq x\leqq 1,\ x^2\leqq y\leqq x-\frac{n-1}{n^2}\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列であり,
$\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}dxdy=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_{x^2}^{x-\frac{n-1}{n^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}dy\right)dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\sin^{-1}\frac{y}{x}\right]_{y=x^2}^{y=x-\frac{n-1}{n^2}}dx=$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\sin^{-1}\left(1-\frac{n-1}{n^2x}\right)-\sin^{-1}x\right)dx=\left[x\sin^{-1}\left(1-\frac{n-1}{n^2x}\right)-x\sin^{-1}x\right]_{\frac{1}{n}}^{1}-\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2n^2x-n+1}}dx+$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{\pi}{2}-\left[\frac{\sqrt{n-1}}{n^2}\sqrt{2n^2x-n+1}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}+\left[-\sqrt{1-x^2}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}=$ $\displaystyle\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$ だから $\displaystyle\iint_{D}\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}dxdy=$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\left(\sin^{-1}\Big(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)=1.$

$D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,|y|<x\leqq 1\right\}$ の場合, $D_n=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{n}\leqq x\leqq 1,\ -x+\frac{1}{n}\leqq y\leqq x-\frac{1}{n}\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列であり, $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}dxdy=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_{-x+\frac{1}{n}}^{x-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}dy\right)dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\sin^{-1}\frac{y}{x}\right]_{-x+\frac{1}{n}}^{x-\frac{1}{n}}dx=$ $\displaystyle 2\int_{\frac{1}{n}}^{1}\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{nx}\right)dx=2\left[x\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{nx}\right)\right]_{\frac{1}{n}}^{1}-\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{2}{\sqrt{n^2-x^2}}dx=2\sin^{-1}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)-2\left[\sin^{-1}\frac{x}{n}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}=$ $\displaystyle 2\sin^{-1}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)-2\sin^{-1}\frac{1}{n}+2\sin^{-1}\frac{1}{n^2}$ だから $\displaystyle\iint_{D}\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}dxdy=$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2\sin^{-1}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)-2\sin^{-1}\frac{1}{n}+2\sin^{-1}\frac{1}{n^2}\right)=\pi.$

$D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x<1,\,0\leqq y<\min\{x,1-x\}\right\}$ の場合, $\varphi:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を $\varphi\binom{z}{w}=\begin{pmatrix}\frac{z}{2}-\frac{w}{2}\\ \frac{z}{2}+\frac{w}{2}\end{pmatrix}$ で定めれば, $\varphi\binom{z}{w}\in D$ であるためには $0\leqq z-w<2$ かつ $0\leqq z+w<z-w$ かつ $z+w<2-z+w$ が成り立つことが必要十分だから, φ は $E=\left\{\binom{z}{w}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq z<1,\,-z\leqq w<0\right\}$ を D の上に 1 対 1 に写す. $E_n=\left\{\binom{z}{w}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{n}\leqq z\leqq 1-\frac{1}{n},\ -z\leqq w\leqq -\frac{1}{n}\right\}$ とおき, D_n を φ による E_n の像とすれば, $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である. $\det\varphi'\binom{z}{w}=\dfrac{1}{2}$ だから, $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}dxdy=\iint_{E_n}\frac{1}{2\sqrt{-zw}}dzdw=\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\left(\int_{-z}^{-\frac{1}{n}}\frac{1}{2\sqrt{-zw}}dw\right)dz=$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\left[-\frac{\sqrt{-w}}{\sqrt{z}}\right]_{w=-z}^{w=-\frac{1}{n}}dz=\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{nz}}\right)dz=\left[z-\frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{n}}\right]_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}=1-2\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}.$
従って $\displaystyle\iint_{D}\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\left(1-2\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)=1.$

(8) $D_n=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 1-\frac{1}{n},\ x\leqq y\leqq 1\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=2}^{\infty}$ は D の近似増加列である. $t=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ と変数変換すれば, $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}dt$ であり, x が 0 から $1-\dfrac{1}{n}$ まで動けば, t は 1 から $\sqrt{\dfrac{1}{2n-1}}$ まで動く.
$\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dxdy=\int_0^{1-\frac{1}{n}}\left(\int_x^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dy\right)dx=\int_0^{1-\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\int_{\sqrt{\frac{1}{2n-1}}}^{1}\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}dt=$ $\displaystyle 4\int_{\sqrt{\frac{1}{2n-1}}}^{1}\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(1+t^2)^2}\right)dt=4\left[\tan^{-1}t\right]_{\sqrt{\frac{1}{2n-1}}}^{1}-2\left[\frac{t}{1+t^2}+\tan^{-1}t\right]_{\sqrt{\frac{1}{2n-1}}}^{1}=$ $\displaystyle\frac{\pi}{2}-1+2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1}{2n-1}}-\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}$ だから

$\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dxdy = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - 1 + 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1}{2n-1}} - \sqrt{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$

$E_n = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 1 - \frac{1}{n},\ x \leqq y \leqq 1 - \frac{1}{n}\right\}$ とおけば $\{E_n\}_{n=2}^{\infty}$ は D の近似増加列である．
$\displaystyle\iint_{E_n} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}dxdy = \int_0^{1-\frac{1}{n}}\left(\int_x^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}dy\right)dx = \int_0^{1-\frac{1}{n}}\left[\frac{\sin^{-1} y}{\sqrt{1-x^2}}\right]_{y=x}^{y=1-\frac{1}{n}} dx =$
$\displaystyle\int_0^{1-\frac{1}{n}}\left(\frac{\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \left[\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\sin^{-1} x - \frac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2\right]_0^{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}\left(\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^2$ だから $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{E_n} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}dxdy = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}.$

(9) $\varphi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を $\varphi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{z}{2} - \frac{w}{2} \\ \frac{z}{2} + \frac{w}{2} \end{pmatrix}$ で定めれば，$\varphi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには $0 < z \leqq 1$ かつ $-z \leqq w \leqq z$ が成り立つことが必要十分だから，φ は $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \, 0 < z \leqq 1, -z \leqq w \leqq z\right\}$ を D の上に 1 対 1 に写す．$E_n = \left\{\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{n} \leqq z \leqq 1,\ -z \leqq w \leqq z\right\}$ とおき，D_n を φ による E_n の像とすれば，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である．$\det\varphi'\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) = \dfrac{1}{2}$ だから，$\displaystyle\iint_{D_n} e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy = \iint_{E_n} \frac{1}{2}e^{\frac{w}{z}}dzdw = \int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_{-z}^z \frac{1}{2}e^{\frac{w}{z}}dw\right)dz = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[\frac{z}{2}e^{\frac{w}{z}}\right]_{w=-z}^{w=z}dz =$
$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{z}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)dz = \left[\frac{z^2}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)\right]_{\frac{1}{n}}^1 = \frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$，$\displaystyle\iint_{D_n} \cos\left(\frac{\pi(y-x)}{2(y+x)}\right)dxdy =$
$\displaystyle\iint_{E_n} \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi w}{2z}\right)dzdw = \int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_{-z}^z \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi w}{2z}\right)dw\right)dz = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[\frac{z}{\pi}\sin\left(\frac{\pi w}{2z}\right)\right]_{w=-z}^{w=z}dz = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{2z}{\pi}dz = \left[\frac{z^2}{\pi}\right]_{\frac{1}{n}}^1 =$
$\displaystyle\frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$．従って $\displaystyle\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)$，
$\displaystyle\iint_D \cos\left(\frac{\pi(y-x)}{2(y+x)}\right)dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} \cos\left(\frac{\pi(y-x)}{2(y+x)}\right)dxdy = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{\pi}.$

(10) $D_n = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 1 \leqq x \leqq n,\ \frac{1}{n^2} \leqq y \leqq \frac{1}{x^2}\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列であり，
$\displaystyle\iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}dxdy = \int_1^n\left(\int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{x^2}} \frac{1}{\sqrt{xy}}dy\right)dx = \int_1^n\left[\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right]_{y=\frac{1}{n^2}}^{y=\frac{1}{x^2}}dx = \int_1^n\left(\frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{n\sqrt{x}}\right)dx =$
$\displaystyle\left[-\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{4\sqrt{x}}{n}\right]_1^n = 4 + \frac{4}{n} - \frac{8}{\sqrt{n}}$ だから $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{xy}}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{xy}}dxdy = \lim_{n\to\infty}\left(4 + \frac{4}{n} - \frac{8}{\sqrt{n}}\right) = 4.$

(11) $D_n = [0, n] \times [0, n]$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列であり，$\displaystyle\iint_{D_n}(x+y)e^{-x-y}dxdy =$
$\displaystyle\int_0^n\left(\int_0^n (x+y)e^{-x-y}dx\right)dy = \int_0^n\left(\left[-(x+y)e^{-x-y}\right]_{x=0}^{x=n} + \int_0^n e^{-x-y}dx\right)dy =$
$\displaystyle\int_0^n\left(ye^{-y} - (y+n)e^{-y-n} + \left[-e^{-x-y}\right]_{x=0}^{y=n}\right)dy = \left[-ye^{-y} + (y+n)e^{-y-n}\right]_0^n + 2\int_0^n\left(e^{-y} - e^{-y-n}\right)dy =$
$\displaystyle -2ne^{-n} + 2ne^{-2n} + 2\left[-e^{-y} + e^{-y-n}\right]_0^n = 2 - 2(n+2)e^{-n} + 2(n+1)e^{-2n}$ だから $\displaystyle\iint_D (x+y)e^{-x-y}dxdy =$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}(x+y)e^{-x-y}dxdy = \lim_{n\to\infty}\left(2 - 2(n+2)e^{-n} + 2(n+1)e^{-2n}\right) = 2.$ $\displaystyle\iint_{D_n}(x+y)e^{-x^2-y^2}dxdy =$
$\displaystyle\int_0^n\left(\int_0^n xe^{-x^2-y^2}dx\right)dy + \int_0^n\left(\int_0^n ye^{-x^2-y^2}dy\right)dx = \int_0^n\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2-y^2}\right]_{x=0}^{x=n}dy + \int_0^n\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2-y^2}\right]_{y=0}^{y=n}dx =$
$\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^n e^{-y^2}\left(1 - e^{-n^2}\right)dy + \frac{1}{2}\int_0^n e^{-x^2}\left(1 - e^{-n^2}\right)dx = \left(1 - e^{-n^2}\right)\int_0^n e^{-x^2}dx$ だから $\displaystyle\iint_D (x+y)e^{-x^2-y^2}dxdy =$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}(x+y)e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\left(1 - e^{-n^2}\right)\int_0^n e^{-x^2}dx = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

(12) 写像 $\varphi : \boldsymbol{R}\times(-1,\infty) \to \boldsymbol{R}^2$ を $\varphi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{z}{1+w} \\ \frac{zw}{1+w} \end{pmatrix}$ によって定めれば，φ は定義域 $\boldsymbol{R}\times(-1,\infty)$ から $\{0\}\times(-1,\infty)$ を除いた部分では単射であり，$\varphi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには，$\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in (a, b] \times [0, \infty)$ であることが必要十分である．$E_n = \left[a + \frac{1}{n}, b\right] \times [0, n]$ とおき，D_n を φ による E_n の像とすれば，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である．
$\det\varphi'\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) = \dfrac{z}{(1+w)^2}$ だから $\displaystyle\iint_{D_n} \frac{x^2 + y^2}{(x+y)^3}dxdy = \iint_{E_n} \frac{1 + w^2}{(1+w)^4}dzdw = \int_0^n\left(\int_{a+\frac{1}{n}}^b \frac{1 + w^2}{(1+w)^4}dz\right)dw =$

$\left(b-a-\dfrac{1}{n}\right)\displaystyle\int_0^n\left(\frac{1}{(1+w)^2}-\frac{2}{(1+w)^3}+\frac{2}{(1+w)^4}\right)dw=\left(b-a-\frac{1}{n}\right)\left[-\frac{1}{1+w}+\frac{1}{(1+w)^2}-\frac{2}{3(1+w)^3}\right]_0^n=$ $\left(b-a-\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{1+n}+\dfrac{1}{(1+n)^2}-\dfrac{2}{3(1+n)^3}\right)$. 従って $\displaystyle\iint_D\frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}dxdy=$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(b-a-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{1+n}+\frac{1}{(1+n)^2}-\frac{2}{3(1+n)^3}\right)=\frac{2}{3}(b-a)$.

(13) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{n}\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x\right\}\cup\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{n}\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq y\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ は D の近似増加列であり, $\displaystyle\iint_{D_n}\log(x+y)\,dxdy=\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_0^x\log(x+y)\,dy\right)dx+\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_0^y\log(x+y)\,dx\right)dy=$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1[(x+y)\log(x+y)-y]_{y=0}^{y=x}dx+\int_{\frac{1}{n}}^1[(x+y)\log(x+y)-x]_{x=0}^{x=y}dy=2\int_{\frac{1}{n}}^1((2\log 2-1)t+t\log t)\,dt=$ $\displaystyle\left[(2\log 2-1)t^2+t^2\log t-\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^1=2\log 2-\frac{3}{2}+\frac{\log n}{n^2}+\frac{3-4\log 2}{2n^2}$ だから $\displaystyle\iint_D\log(x+y)dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\log(x+y)dxdy=\lim_{n\to\infty}\left(2\log 2-\frac{3}{2}+\frac{\log n}{n^2}+\frac{3-4\log 2}{2n^2}\right)=2\log 2-\frac{3}{2}$.

(14) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{n}\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x\right\}\cup\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{n}\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq y\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ は D の近似増加列であり, $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy=\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_0^x\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy\right)dx+\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_0^y\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx\right)dy=$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1\left[\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{y=0}^{y=x}dx+\int_{\frac{1}{n}}^1\left[\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{x=0}^{x=y}dy=\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{2-\sqrt{2}}{2}\,dx+\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{2-\sqrt{2}}{2}\,dy=\left(2-\sqrt{2}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$ だから $\displaystyle\iint_D\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\left(2-\sqrt{2}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)=2-\sqrt{2}$.

(15) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{n}\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x\right\}\cup\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{n}\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq y\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ は D の近似増加列であり, $y=x\tan\theta$ と変数変換すれば, $dy=\dfrac{x}{\cos^2\theta}d\theta$ であり, θ が 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ まで動けば, y は 0 から x まで動くため, $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy=\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_0^x\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dy\right)dx+\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_0^y\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\right)dy=$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_0^x\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dy\right)dx+\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_0^x\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dy\right)dx=\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_0^x\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\right)dx=\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos\theta}\,d\theta\right)dx=$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)d\theta\right)dx=\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{1}{2}\left[\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\log\left(\sqrt{2}+1\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$ だから $\displaystyle\iint_D\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dxdy=\lim_{n\to\infty}\log\left(\sqrt{2}+1\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)=\log\left(\sqrt{2}+1\right)$.

(16) $D_n\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{n}\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x\right\}\cup\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{n}\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq y\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ は D の近似増加列であり, $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{2y}{x^2+y^2}\,dxdy=\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_0^x\frac{2y}{x^2+y^2}\,dy\right)dx+\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_0^y\frac{2y}{x^2+y^2}\,dx\right)dy=\int_{\frac{1}{n}}^1\left[\log(x^2+y^2)\right]_{y=0}^{y=x}dx+$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1\left[2\tan^{-1}\frac{x}{y}\right]_{x=0}^{x=y}dy=\int_{\frac{1}{n}}^1\log 2\,dx+\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{\pi}{2}\,dy=\left(\log 2+\frac{\pi}{2}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$ だから $\displaystyle\iint_D\frac{2y}{x^2+y^2}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{2y}{x^2+y^2}dxdy=\lim_{n\to\infty}\left(\log 2+\frac{\pi}{2}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)=\log 2+\frac{\pi}{2}$.

(17) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{n}\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x\right\}\cup\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{n}\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq y\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=2}^\infty$ は D の近似増加列であり, $\alpha\neq 1,2$ ならば $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{(x+y)^\alpha}dxdy=\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_0^x\frac{1}{(x+y)^\alpha}dy\right)dx+\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_0^y\frac{1}{(x+y)^\alpha}dx\right)dy=$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1\left[\frac{1}{(1-\alpha)(x+y)^{\alpha-1}}\right]_{y=0}^{y=x}dx+\int_{\frac{1}{n}}^1\left[\frac{1}{(1-\alpha)(x+y)^{\alpha-1}}\right]_{x=0}^{x=y}dy=\frac{1-2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}(1-\alpha)}\left(\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{1}{x^{\alpha-1}}dx+\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{1}{y^{\alpha-1}}dy\right)=$ $\displaystyle\frac{1-2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}(1-\alpha)}\left(\left[\frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_{\frac{1}{n}}^1+\left[\frac{y^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_{\frac{1}{n}}^1\right)=\frac{1-2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-2}(1-\alpha)(2-\alpha)}\left(1-\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right)$, $\alpha=1$ ならば $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{(x+y)^\alpha}dxdy=$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_0^x\frac{1}{x+y}dy\right)dx+\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_0^y\frac{1}{x+y}dx\right)dy=\int_{\frac{1}{n}}^1[\log(x+y)]_{y=0}^{y=x}dx+\int_{\frac{1}{n}}^1[\log(x+y)]_{x=0}^{x=y}dy=$

$(\log 2-1)\left(\int_{\frac{1}{n}}^{1}\log x dx+\int_{\frac{1}{n}}^{1}\log y dy\right)=(\log 2-1)\left([x\log x-x]_{\frac{1}{n}}^{1}+[y\log y-y]_{\frac{1}{n}}^{1}\right)=2(1-\log 2)\left(1-\frac{1}{n}-\frac{\log n}{n}\right)$,

$\alpha=2$ ならば $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{(x+y)^\alpha}dxdy=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_0^x\frac{1}{(x+y)^2}dy\right)dx+\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_0^y\frac{1}{(x+y)^2}dx\right)dy=$
$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\frac{-1}{x+y}\right]_{y=0}^{y=x}dx+\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\frac{-1}{x+y}\right]_{x=0}^{x=y}dy=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{1}{2x}dx+\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{1}{2y}dy=\frac{1}{2}\left([\log x]_{\frac{1}{n}}^{1}+[\log y]_{\frac{1}{n}}^{1}\right)=\log n$ である. 以上から,
$0<\alpha<1$ または $1<\alpha<2$ ならば $\displaystyle\iint_D\frac{dxdy}{(x+y)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-2}(1-\alpha)(2-\alpha)}\left(1-\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right)=\frac{1-2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-2}(1-\alpha)(2-\alpha)}$,
$\alpha=1$ ならば $\displaystyle\iint_D\frac{dxdy}{(x+y)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}2(1-\log 2)\left(1-\frac{1}{n}-\frac{\log n}{n}\right)=2(1-\log 2)$,
$\alpha=2$ ならば $\displaystyle\iint_D\frac{dxdy}{(x+y)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\log n=\infty$,
$\alpha>2$ ならば $\displaystyle\iint_D\frac{dxdy}{(x+y)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-2}(1-\alpha)(2-\alpha)}(1-n^{\alpha-2})=\infty$.

(18) $D_n=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{n}\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x-\frac{1}{n}\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=2}^{\infty}$ は D の近似増加列であり, $\alpha\neq 1,2$ ならば
$\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{(x-y)^\alpha}dxdy=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_0^{x-\frac{1}{n}}\frac{1}{(x-y)^\alpha}dy\right)dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\frac{1}{(\alpha-1)(x-y)^{\alpha-1}}\right]_{y=0}^{y=x-\frac{1}{n}}dx=$
$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{1}{\alpha-1}\left(n^{\alpha-1}-\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)dx=\frac{1}{\alpha-1}\left[n^{\alpha-1}x+\frac{1}{(\alpha-2)x^{\alpha-2}}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}=\frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)}+\frac{n^{\alpha-1}}{\alpha-1}\left(1-\frac{\alpha-1}{n(\alpha-2)}\right)$,
$\alpha=1$ ならば $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{(x-y)^\alpha}dxdy=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_0^{x-\frac{1}{n}}\frac{1}{x-y}dy\right)dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1}[-\log(x-y)]_{y=0}^{y=x-\frac{1}{n}}dx=$
$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}(\log n+\log x)dx=[x\log n+x\log x-x]_{\frac{1}{n}}^{1}=\log n+\frac{1}{n}-1$, $\alpha=2$ ならば $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{(x-y)^\alpha}dxdy=$
$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_0^{x-\frac{1}{n}}\frac{1}{(x-y)^2}dy\right)dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\frac{1}{x-y}\right]_{y=0}^{y=x-\frac{1}{n}}dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(n-\frac{1}{x}\right)dx=[nx-\log x]_{\frac{1}{n}}^{1}=n-\log n-1$ である. 以上から, $0<\alpha<1$ ならば $\displaystyle\iint_D\frac{1}{(x-y)^\alpha}dxdy=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)}+\frac{n^{\alpha-1}}{\alpha-1}\left(1-\frac{\alpha-1}{n(\alpha-2)}\right)\right)=\frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$,
$\alpha=1$ ならば $\displaystyle\iint_D\frac{1}{(x-y)^\alpha}dxdy=\lim_{n\to\infty}\left(\log n+\frac{1}{n}-1\right)=\infty$,
$1<\alpha<2$ または $\alpha>2$ ならば $\displaystyle\iint_D\frac{1}{(x-y)^\alpha}dxdy=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)}+\frac{n^{\alpha-1}}{\alpha-1}\left(1-\frac{\alpha-1}{n(\alpha-2)}\right)\right)=\infty$,
$\alpha=2$ ならば $\displaystyle\iint_D\frac{1}{(x-y)^\alpha}dxdy=\lim_{n\to\infty}(n-\log n-1)=\infty$.

(19) $D_n=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,1\leqq x^2+y^2\leqq n^2,\ -x\leqq y\leqq\sqrt{3}x\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ は D の近似増加列である. $\varphi\binom{r}{\theta}\in D_n$ であるためには $1\leqq r\leqq n$, $-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ であることが必要十分である. 従って $E_n=[1,n]\times\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ とおけば
$\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint_{E_n}\frac{1}{r^3\cos^2\theta}rdrd\theta=\int_1^n\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{r^2\cos^2\theta}d\theta\right)dr=\int_1^n\left[\frac{1}{r^2}\tan\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}dr=$
$\displaystyle\int_1^n\frac{\sqrt{3}+1}{r^2}dr=\left[-\frac{\sqrt{3}+1}{r}\right]_1^n=\left(\sqrt{3}+1\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$ である. 故に
$$\iint_D\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)=\sqrt{3}+1.$$

(20) $E[a,b]=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,a^2\leqq x^2+y^2\leqq b^2\right\}$ とおけば, $\displaystyle\iint_{E[a,b]}\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy$ の値は第 26 回の演習問題 1 の (12) で $p=-\alpha$ とした値を 4 倍したものだから $\displaystyle\iint_{E[a,b]}\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy=\begin{cases}\frac{\pi}{1-\alpha}\left(b^{2-2\alpha}-a^{2-2\alpha}\right) & \alpha\neq 1\\ 2\pi(\log b-\log a) & \alpha=1\end{cases}$ である.
ここで, $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0<x^2+y^2\leqq b^2\right\}$ の場合, $\left\{E\left[\frac{1}{n},b\right]\right\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列だから, $\alpha<1$ ならば
$\displaystyle\iint_D\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{E\left[\frac{1}{n},b\right]}\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{1-\alpha}\left(b^{2-2\alpha}-\frac{1}{n^{2-2\alpha}}\right)=\frac{\pi b^{2-2\alpha}}{1-\alpha}$, $\alpha=1$ ならば

$\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{E\left[\frac{1}{n},b\right]} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy = \lim_{n\to\infty} 2\pi(\log b + \log n) = \infty$ であり, $\alpha > 1$ ならば

$\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{E\left[\frac{1}{n},b\right]} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{\alpha-1}\left(n^{2\alpha-2} - b^{2\alpha-2}\right) = \infty$ となる.

$D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ x^2+y^2 \geqq a^2 \right\}$ の場合, $\{E[a,n]\}_{n=1}^\infty$ は D の近似増加列だから, $\alpha < 1$ ならば

$\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{E[a,n]} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{1-\alpha}\left(n^{2-2\alpha} - a^{2-2\alpha}\right) = \infty$, $\alpha = 1$ ならば

$\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{E\left[\frac{1}{n},b\right]} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy = \lim_{n\to\infty} 2\pi(\log n - \log a) = \infty$ であり, $\alpha > 1$ ならば

$\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{E\left[\frac{1}{n},b\right]} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{\alpha-1}\left(a^{2-2\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha-2}}\right) = \frac{\pi a^{2-2\alpha}}{\alpha-1}$ となる.

(21) $D_n = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{n^2} \leqq, x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0 \right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ は D の近似増加列である. $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D_n$ であるためには $\frac{1}{n} \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$ であることが必要十分である. 従って $E_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right] \times [0,\pi]$ とおけば $\displaystyle\iint_{D_n} \frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \iint_{E_n} \frac{\log(r^2)}{r} r dr d\theta = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_0^\pi 2\log r d\theta\right) dr = \int_{\frac{1}{n}}^1 2\pi \log r dr = 2\pi[r\log r - r]_{\frac{1}{n}}^1 =$ $\displaystyle 2\pi\left(\frac{\log n}{n} - 1 + \frac{1}{n}\right)$. 故に $\displaystyle\iint_D \frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} \frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \lim_{n\to\infty} 2\pi\left(\frac{\log n}{n} - 1 + \frac{1}{n}\right) = -2\pi$.

(22) $D_n = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ \frac{1}{n^2} \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ は D の近似増加列である. $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D_n$ であるためには $\frac{1}{n} \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ であることが必要十分である. 従って $E_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_{D_n} \frac{x\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy = \iint_{E_n} \frac{r\cos\theta\log(r^2)}{r^2} r dr d\theta = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta\log r d\theta\right) dr = \int_{\frac{1}{n}}^1 [2\sin\theta\log r]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} dr =$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 2\log r dr = [2r\log r - 2r]_{\frac{1}{n}}^1 = \frac{2\log n}{n} - 2 + \frac{2}{n}$ である. 故に

$\displaystyle\iint_D \frac{x\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} \frac{x\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\log n}{n} - 2 + \frac{2}{n}\right) = -2.$

(23) $D_n = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{n^2} \leqq x^2+y^2 \leqq n^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ は D の近似増加列である. $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D_n$ であるためには $\frac{1}{n} \leqq r \leqq n$, $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ であることが必要十分である. 従って $E_n = \left[\frac{1}{n}, n\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_{D_n} (x^2+y^2)^{\alpha-1}e^{-(x^2+y^2)^\alpha}dxdy = \iint_{E_n} r^{2\alpha-1}e^{-r^{2\alpha}} dr d\theta = \int_{\frac{1}{n}}^n \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{2\alpha-1}e^{-r^{2\alpha}} d\theta\right) dr = \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{\pi r^{2\alpha-1}}{2}e^{-r^{2\alpha}} dr =$ $\displaystyle\left[-\frac{\pi}{4\alpha}e^{-r^{2\alpha}}\right]_{\frac{1}{n}}^n = \frac{\pi}{4\alpha}\left(e^{-\frac{1}{n^{2\alpha}}} - e^{-n^{2\alpha}}\right)$ となるため,

$\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)^{\alpha-1}e^{-(x^2+y^2)^\alpha}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} (x^2+y^2)^{\alpha-1}e^{-(x^2+y^2)^\alpha}dxdy = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4\alpha}\left(e^{-\frac{1}{n^{2\alpha}}} - e^{-n^{2\alpha}}\right) = \frac{\pi}{4\alpha}.$

(24) $D_n = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{n^2} \leqq x^2+y^2 \leqq 1 \right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ は D の近似増加列である. $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D_n$ であるためには $\frac{1}{n} \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ であることが必要十分である. 従って $E_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right] \times [0, 2\pi]$ とおけば $\displaystyle\iint_{D_n} \log(x^2+y^2)dxdy = \iint_{E_n} r\log(r^2) dr d\theta = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_0^{2\pi} 2r\log r\right) dr = \int_{\frac{1}{n}}^1 4\pi r\log r dr =$

$\displaystyle\left[2\pi r^2\log r\right]_{\frac{1}{n}}^1 - \int_{\frac{1}{n}}^1 2\pi r dr = \frac{2\pi\log n}{n^2} - [\pi r^2]_{\frac{1}{n}}^1 = \frac{2\pi\log n}{n^2} + \frac{\pi}{n^2} - \pi$ となるため,

$\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} \log(x^2+y^2)dxdy = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\pi\log n}{n^2} + \frac{\pi}{n^2} - \pi\right) = -\pi.$

(25) $D_n = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leqq \left(a - \frac{1}{n}\right)^2 \right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ は D の近似増加列であり, $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D_n$ であるためには $0 \leqq r \leqq a - \dfrac{1}{n}$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{2}$ であることが必要十分である. 従って $E_n = \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ とおけば,

$\displaystyle\iint_{D_n} \left(-\log\left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right)\right) dxdy = \iint_{E_n} (-r\log(1-r))\, dr d\theta = \int_0^{a-\frac{1}{n}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-r\log(1-r))\, d\theta\right) dr =$

$\displaystyle\int_0^{a-\frac{1}{n}} (-2\pi r\log(1-r))\, dr = [\pi(1-r^2)\log(1-r)]_0^{a-\frac{1}{n}} + \int_0^{a-\frac{1}{n}} \pi(1+r)\, dr = \pi\left(1 - \left(a - \frac{1}{n}\right)^2\right)\log\left(1 - a + \frac{1}{n}\right) +$

$\pi\left(a-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{1}{n}\right)^2\right)$ より, $\displaystyle\iint_D\left(-\log\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\left(-\log\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dxdy=$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\pi\left(1-\left(a-\frac{1}{n}\right)^2\right)\log\left(1-a+\frac{1}{n}\right)+\pi\left(a-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{n}\right)^2\right)\right)=\pi\left((1-a^2)\log(1-a)+a+\frac{a^2}{2}\right).$

(26) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{n^2}\leqq x^2+y^2\leqq n^2,\ 0\leqq y\leqq x\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=2}^{\infty}$ は D の近似増加列である. $\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in D_n$ であるためには $\frac{1}{n}\leqq r\leqq n,\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ であることが必要十分である. 従って $E_n=\left[\frac{1}{n},n\right]\times\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{y}{x}e^{-\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint_{E_n}r\tan\theta e^{-r}drd\theta=\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}r\tan\theta e^{-r}d\theta\right)dr=\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left[-re^{-r}\log\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}dr=$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{r\log 2}{2}e^{-r}dr=\left[-\frac{r\log 2}{2}e^{-r}\right]_{\frac{1}{n}}^{n}+\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{\log 2}{2}e^{-r}dr=\frac{\log 2}{2}\left(\frac{1}{n}e^{-\frac{1}{n}}-(n+1)e^{-n}+e^{-\frac{1}{n}}\right)$ だから $\displaystyle\iint_D\frac{y}{x}e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{y}{x}e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\frac{\log 2}{2}\left(\frac{1}{n}e^{-\frac{1}{n}}-(n+1)e^{-n}+e^{-\frac{1}{n}}\right)=\frac{\log 2}{2}$

(27) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{n^2}\leqq x^2+y^2\leqq n^2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である. $\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in D_n$ であるためには $\frac{1}{n}\leqq r\leqq n,\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であることが必要十分である. 従って $E_n=\left[\frac{1}{n},n\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{dxdy}{(x^2+y^2+a^2)^\alpha}=\iint_{E_n}\frac{r}{(r^2+a^2)^\alpha}drd\theta=\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r}{(r^2+a^2)^\alpha}d\theta\right)dr=\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{\pi r}{2(r^2+a^2)^\alpha}dr$ が得られる. $\alpha\neq 1$ の場合は $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{\pi r}{2(r^2+a^2)^\alpha}dr=\left[\frac{\pi}{4(1-\alpha)(r^2+a^2)^{\alpha-1}}\right]_{\frac{1}{n}}^{n}=\frac{\pi}{4(\alpha-1)}\left(\frac{n^{2(\alpha-1)}}{(1+a^2n^2)^{\alpha-1}}-\frac{1}{(n^2+a^2)^{\alpha-1}}\right)$ であり, $\alpha=1$ の場合は $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{\pi r}{2(r^2+a^2)^\alpha}dr=\left[\frac{\pi}{4}\log\left(r^2+a^2\right)\right]_{\frac{1}{n}}^{n}=\frac{\pi}{4}\log\frac{n^4+a^2n^2}{1+a^2n^2}$ であるため, $\alpha>1$ かつ $a\neq 0$ ならば $\displaystyle\iint_D\frac{dxdy}{(x^2+y^2+a^2)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{dxdy}{(x^2+y^2+a^2)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4(\alpha-1)}\left(\frac{n^{2(\alpha-1)}}{(1+a^2n^2)^{\alpha-1}}-\frac{1}{(n^2+a^2)^{\alpha-1}}\right)=$ $\displaystyle\frac{\pi}{4a^{2(\alpha-1)}(\alpha-1)}$. $\alpha>1$ かつ $a=0$ ならば $\displaystyle\iint_D\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}=$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4(\alpha-1)}\left(n^{2(\alpha-1)}-\frac{1}{n^{2(\alpha-1)}}\right)=\infty$. $\alpha<1$ ならば $\displaystyle\iint_D\frac{dxdy}{(x^2+y^2+a^2)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{dxdy}{(x^2+y^2+a^2)^\alpha}=$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4(1-\alpha)}\left(\left(n^2+a^2\right)^{1-\alpha}-\frac{(1+a^2n^2)^{\alpha-1}}{n^{2(\alpha-1)}}\right)=\infty$.
$\alpha=1$ ならば $\displaystyle\iint_D\frac{dxdy}{(x^2+y^2+a^2)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{dxdy}{(x^2+y^2+a^2)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\log\frac{n^4+a^2n^2}{1+a^2n^2}=\infty$.

(28) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\leqq x^2+y^2\leqq n^2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=2}^{\infty}$ は D の近似増加列である. $\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in D_n$ であるためには $1+\frac{1}{n}\leqq r\leqq n,\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であることが必要十分である. 従って $E_n=\left[1+\frac{1}{n},n\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2-1}}dxdy=\iint_{E_n}\frac{r}{r^2\sqrt{r^2-1}}drd\theta=\int_{1+\frac{1}{n}}^{n}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r}{r^2\sqrt{r^2-1}}d\theta\right)dr=$ $\displaystyle\int_{1+\frac{1}{n}}^{n}\frac{\pi r}{2r^2\sqrt{r^2-1}}dr$. $t=\sqrt{r^2-1}$ と変数変換をすれば, r が $1+\dfrac{1}{n}$ から n まで動けば t は $\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$ から $\sqrt{n^2-1}$ まで動き, $\dfrac{r}{\sqrt{r^2-1}}dr=dt$, $r^2=t^2+1$ だから $\displaystyle\int_{1+\frac{1}{n}}^{n}\frac{\pi r}{2r^2\sqrt{r^2-1}}dr=\int_{\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}^{\sqrt{n^2-1}}\frac{\pi}{2(t^2+1)}dt=\left[\frac{\pi}{2}\tan^{-1}t\right]_{\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}^{\sqrt{n^2-1}}=$ $\displaystyle\frac{\pi}{2}\left(\tan^{-1}\sqrt{n^2-1}-\tan^{-1}\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)$ である. 故に $\displaystyle\iint_D\frac{1}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2-1}}dxdy=$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2-1}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\left(\tan^{-1}\sqrt{n^2-1}-\tan^{-1}\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)=\frac{\pi^2}{4}$ である.

(29) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{n^2}\leqq x^2+y^2\leqq\left(1-\frac{1}{n}\right)^2,\ 0\leqq x\leqq y\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=3}^{\infty}$ は D の近似増加列である. $\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in D_n$ であるためには $\frac{1}{n}\leqq r\leqq 1-\frac{1}{n},\ \frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であることが必要十分である. 従って $E_n=\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]\times\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{y\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=\iint_{E_n}\frac{1}{r\sin\theta\sqrt{1-r^2}}rdrd\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sin\theta\sqrt{1-r^2}}dr\right)d\theta=$ $\displaystyle\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\theta}d\theta\right)\left(\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}dr\right)$ である. ここで $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}d\theta=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0}\frac{-1}{1-t^2}dt=$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt=\left[\frac{1}{2}(\log(1+t)-\log(1-t))\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\log\!\left(\sqrt{2}+1\right)$,
$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}dr=\left[\sin^{-1}r\right]_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}=\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)-\sin^{-1}\frac{1}{n}$ だから

$$\iint_{D_n}\frac{1}{y\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=\log\!\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)-\sin^{-1}\frac{1}{n}\right)$$

である. 故に $\displaystyle\iint_D\frac{1}{y\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{y\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\!\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)-\sin^{-1}\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{2}\log\!\left(\sqrt{2}+1\right)$.
(30) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,1\leqq x^2+y^2\leqq n^2,\ 0\leqq y\leqq x\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=2}^{\infty}$ は D の近似増加列である. $\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in D_n$ であるためには $0\leqq r\leqq n$, $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ であることが必要十分である. 従って $E_n=[1,n]\times\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy=\iint_{E_n}\frac{r}{r^2\cos^2\theta\sqrt{1+r^2}}drd\theta=\int_1^n\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{r\cos^2\theta\sqrt{1+r^2}}d\theta\right)dr=$
$\displaystyle\int_1^n\left[\frac{\tan^2\theta}{r\sqrt{1+r^2}}\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}dr=\int_1^n\frac{1}{r\sqrt{1+r^2}}dr$ である. ここで $t=\sqrt{1+r^2}$ と変数変換すれば, r が 0 から n まで動くとき, t は $\sqrt{2}$ から $\sqrt{1+n^2}$ まで動き, $r=\sqrt{t^2-1}$ だから $dr=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$ である. 故に $\displaystyle\int_1^n\frac{1}{r\sqrt{1+r^2}}dr=$
$\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+n^2}}\frac{1}{t^2-1}dt=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+n^2}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\left[\frac{1}{2}\log\frac{t-1}{t+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+n^2}}\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+n^2}-1}{\sqrt{1+n^2}+1}-\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=$
$\displaystyle\log\left(\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}-\frac{1}{n}\right)+\log\!\left(\sqrt{2}+1\right)$ となるため, $\displaystyle\iint_D\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy=$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\log\left(\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}-\frac{1}{n}\right)+\log\!\left(\sqrt{2}+1\right)\right)=\log\!\left(\sqrt{2}+1\right)$.
(31) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x^2+y^2\leqq n^2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である. $\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in D_n$ であるためには $0\leqq r\leqq n$, $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であることが必要十分である. 従って $E_n=[0,n]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_{D_n}x^2e^{-x^2-y^2}dxdy=\iint_{E_n}r^3e^{-r^2}\cos^2\theta drd\theta=\int_0^n\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^3e^{-r^2}\cos^2\theta d\theta\right)dr=\int_0^n\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^3e^{-r^2}(1+\cos2\theta)}{2}d\theta\right)dr=$
$\displaystyle\int_0^n\left[\frac{r^3e^{-r^2}(2\theta+\sin2\theta)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}dr=\int_0^n\frac{\pi}{4}r^3e^{-r^2}dr=\int_0^n\frac{\pi}{8}r^2\left(-e^{-r^2}\right)'dr=\left[-\frac{\pi}{8}r^2e^{-r^2}\right]_0^n+\int_0^n\frac{\pi}{4}re^{-r^2}dr=$
$\displaystyle-\frac{\pi}{8}n^2e^{-n^2}+\int_0^n\frac{\pi}{4}re^{-r^2}dr=-\frac{\pi}{8}n^2e^{-n^2}+\left[-\frac{\pi}{8}e^{-r^2}\right]_0^n=\frac{\pi}{8}\left(1-\frac{1+n^2}{e^{n^2}}\right)$ である. 故に $\displaystyle\iint_D x^2e^{-x^2-y^2}dxdy=$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}x^2e^{-x^2-y^2}dxdy=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{8}\left(1-\frac{1+n^2}{e^{n^2}}\right)=\frac{\pi}{8}$ である.

$\displaystyle\iint_{D_n}e^{-(x^2+y^2)^2}dxdy=\iint_{E_n}re^{-r^4}drd\theta=\int_0^n\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}re^{-r^4}d\theta\right)dr=\int_0^n\frac{\pi r}{2}e^{-r^4}dr$ であり, $t=r^2$ と変数変換すれば, r が 0 から n まで動くとき, t は 0 から n^2 まで動き, $rdr=\dfrac{1}{2}dt$ だから, $\displaystyle\int_0^n\frac{\pi r}{2}e^{-r^4}dr=\frac{\pi}{4}\int_0^{n^2}e^{-t^2}dt$ が得られる. $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いると, $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)^2}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}e^{-(x^2+y^2)^2}dxdy=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\int_0^{n^2}e^{-t^2}dt=$
$\displaystyle\frac{\pi}{4}\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\pi\sqrt{\pi}}{8}$.

(32) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{n^2}\leqq x^2+y^2\leqq n^2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である. $\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in D_n$ であるためには $0\leqq r\leqq n$, $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であることが必要十分である. 従って $E_n=\left[\frac{1}{n},n\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{(x^2+y^2+a^2)\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint_{E_n}\frac{1}{r^2+a^2}drd\theta=\int_{\frac{1}{n}}^n\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{r^2+a^2}d\theta\right)dr=\int_{\frac{1}{n}}^n\frac{\pi}{2(r^2+a^2)}dr=$
$\displaystyle\left[\frac{\pi}{2a}\tan^{-1}\frac{r}{a}\right]_{\frac{1}{n}}^n=\frac{\pi}{2a}\left(\tan^{-1}\frac{n}{a}-\tan^{-1}\frac{1}{an}\right)$ である. 故に $\displaystyle\iint_D\frac{1}{(x^2+y^2+a^2)\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=$

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{(x^2+y^2+a^2)\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2a}\left(\tan^{-1}\frac{n}{a}-\tan^{-1}\frac{1}{an}\right)=\frac{\pi^2}{4a}.$$

(33) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\,0\leqq x^2+y^2\leqq n^2\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である．$\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in D_n$ であるためには $0\leqq r\leqq n$, $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{3\pi}{2}$ であることが必要十分である．従って $E_n=[0,n]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_{D_n}(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}dxdy=\iint_{E_n}r^3e^{-r^2}drd\theta=\int_0^n\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}r^3e^{-r^2}d\theta\right)dr=\int_0^n 2\pi r^3e^{-r^2}dr=\int_0^{n^2}\pi te^{-t}dt=$ $\displaystyle[-\pi te^{-t}]_0^{n^2}+\int_0^{n^2}\pi e^{-t}dt=-\pi n^2e^{-n^2}+[-\pi e^{-t}]_0^{n^2}=\pi\left(1-n^2e^{-n^2}-e^{-n^2}\right)$ となるため，

$$\iint_D(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}dxdy=\lim_{n\to\infty}\pi\left(1-n^2e^{-n^2}-e^{-n^2}\right)=\pi.$$

上と同様に $\displaystyle\iint_{D_n}x^2y^2e^{-x^2-y^2}dxdy=\iint_{E_n}r^5\cos^2\theta\sin^2\theta e^{-r^2}drd\theta=\int_0^n\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{r^5}{4}\sin^2 2\theta e^{-r^2}d\theta\right)dr=$ $\displaystyle\int_0^n\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{r^5(1-\cos 4\theta)}{8}e^{-r^2}d\theta\right)dr=\int_0^n\frac{\pi r^5}{4}e^{-r^2}dr=\int_0^{n^2}\frac{\pi t^2}{4}e^{-t}dt=\left[-\frac{\pi t^2}{4}e^{-t}\right]_0^{n^2}+\int_0^{n^2}\frac{\pi t}{2}e^{-t}dt=$ $\displaystyle-\frac{\pi n^4}{4}e^{-n^2}+\left[-\frac{\pi t}{2}e^{-t}\right]_0^{n^2}+\int_0^{n^2}\frac{\pi}{2}e^{-t}dt=-\frac{\pi n^4}{4}e^{-n^2}-\frac{\pi n^2}{2}e^{-n^2}+\left[-\frac{\pi}{2}e^{-t}\right]_0^{n^2}=$ $\displaystyle\frac{\pi}{4}\left(2-n^4e^{-n^2}-2n^2e^{-n^2}-2e^{-n^2}\right)$ となるため，$\displaystyle\iint_D x^2y^2e^{-x^2-y^2}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}x^2y^2e^{-x^2-y^2}dxdy=$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\left(2-n^4e^{-n^2}-2n^2e^{-n^2}-2e^{-n^2}\right)=\frac{\pi}{2}.$

実対称行列 $A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\b&c\end{smallmatrix}\right)$ の固有方程式は $t^2-(a+c)t+ac-b^2=0$ であり，この判別式は $(a+c)^2-4(ac-b^2)=(a-c)^2+4b^2\geqq 0$ となるため，A は実数の固有値をもつ．仮定から $a>0$ かつ $ac>b^2\geqq 0$ だから a と c はともに正の実数である．α, β を A の固有値とすれば，解と係数の関係と仮定から $\alpha+\beta=a+c>0$, $\alpha\beta=ac-b^2>0$ だから α と β はともに正の実数である．$R^{-1}AR=\left(\begin{smallmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{smallmatrix}\right)$ となる直交行列 R で $R=\left(\begin{smallmatrix}\cos\theta_0&-\sin\theta_0\\\sin\theta_0&\cos\theta_0\end{smallmatrix}\right)$ $(0\leqq\theta_0<2\pi)$ という形のものが存在し，$\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{\beta}}$ をそれぞれ $(1,1)$ 成分，$(2,2)$ 成分とする対角行列を S とする．このとき $\psi:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を RS で表される 1 次変換として $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\psi\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)$ と変数変換すれば，$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=RS\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)$ より $ax^2+2bxy+cy^2=(x\ y)A\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=(u\ v)^t(RS)A(RS)\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=(u\ v)^tS^tRARS\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=(u\ v)^tSR^{-1}ARS\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=(u\ v)^tS\left(\begin{smallmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{smallmatrix}\right)S\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=u^2+v^2$ である．$E_n=[0,n]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ とおき，$\psi\circ\varphi$ による E_n の像を D_n とすれば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である．$\det\psi'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=\det(RS)=(\det R)(\det S)=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}=\dfrac{1}{\sqrt{ac-b^2}}$ だから，合成写像の微分法により $\det(\psi\circ\varphi)'\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=\det\left(\psi'\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)\varphi'\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\right)=\det\psi'\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)\det\varphi'\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{r}{\sqrt{ac-b^2}}$ である．従って $\displaystyle\iint_{D_n}e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}dxdy=\iint_{E_n}\frac{r}{\sqrt{ac-b^2}}e^{-r^2}drd\theta=\int_0^n\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{r}{\sqrt{ac-b^2}}e^{-r^2}d\theta\right)dr=\int_0^n\frac{2\pi r}{\sqrt{ac-b^2}}e^{-r^2}dr=$ $\displaystyle\left[-\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}e^{-r^2}\right]_0^n=\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}\left(1-e^{-r^2}\right)$ となるため，

$$\iint_D e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}dxdy=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}\left(1-e^{-r^2}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}.$$

(34) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2\leqq\left(a-\frac{1}{n}\right)^2\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列であり，$\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in D_n$ であるためには $0\leqq r\leqq a-\dfrac{1}{n}$, $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{3\pi}{2}$ であることが必要十分である．従って $E_n=\left[0,1-\frac{1}{n}\right]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ とおけば，

$$\iint_{D_n}\frac{1}{(a^2-x^2-y^2)^\alpha}dxdy=\iint_{E_n}\frac{r}{(a^2-r^2)^\alpha}drd\theta=\int_0^{a-\frac{1}{n}}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{r}{(a^2-r^2)^\alpha}d\theta\right)dr=\int_0^{a-\frac{1}{n}}\frac{2\pi r}{(a^2-r^2)^\alpha}dr\quad\cdots(*)$$

である．$\alpha\neq 1$ の場合，$\displaystyle(*)=\left[\frac{-\pi}{(1-\alpha)(a^2-r^2)^{\alpha-1}}\right]_0^{a-\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{1-\alpha}\left(a^{2-2\alpha}-\frac{(2an-1)^{1-\alpha}}{n^{2-2\alpha}}\right)$ であり，$\alpha=1$ の場合，$\displaystyle(*)=\left[-\pi\log(a^2-r^2)\right]_0^{a-\frac{1}{n}}=2\pi\log a-\pi\log\left(\frac{2a}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$ である．故に $\alpha<1$ ならば $\displaystyle\iint_D\frac{1}{(a^2-x^2-y^2)^\alpha}dxdy=$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{(a^2-x^2-y^2)^\alpha}dxdy=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{1-\alpha}\left(a^{2-2\alpha}-\frac{(2an-1)^{1-\alpha}}{n^{2-2\alpha}}\right)=\frac{\pi a^{2-2\alpha}}{1-\alpha}$, $\alpha=1$ ならば

$\displaystyle\iint_D \frac{1}{(a^2-x^2-y^2)^\alpha}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{(a^2-x^2-y^2)^\alpha}dxdy = \lim_{n\to\infty}\left(2\pi\log a - \pi\log\left(\frac{2a}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\right) = \infty,\ \alpha < 1$ ならば $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(a^2-x^2-y^2)^\alpha}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{(a^2-x^2-y^2)^\alpha}dxdy = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{\alpha-1}\left(\frac{n^{2\alpha-2}}{(2an-1)^{\alpha-1}} - a^{2-2\alpha}\right) = \infty$ である

(35) $D_n = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{n^2} \leqq x^2+y^2 \leqq a^2,\ 0 \leqq y \leqq x\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ は D の近似増加列である. $\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in D_n$ であるためには $\frac{1}{n} \leqq r \leqq a,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}$ であることが必要十分である. 従って $E_n = \left[\frac{1}{n}, a\right]\times\left[0, \frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_{D_n}\tan^{-1}\frac{y}{x}dxdy = \iint_{E_n} r\tan^{-1}(\tan\theta)drd\theta = \int_{\frac{1}{n}}^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} r\theta d\theta\right)dr = \int_{\frac{1}{n}}^a\left[\frac{r\theta^2}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}dr =$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^a \frac{r}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)^2 dr = \left[\frac{r^2}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)^2\right]_{\frac{1}{n}}^a = \frac{1}{4}\left(a^2-\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)^2$ である. 従って

$$\iint_D \tan^{-1}\frac{y}{x}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\tan^{-1}\frac{y}{x}dxdy = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(a^2-\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2a^2}{16}.$$

(36) $D_n = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{n} \leqq y \leqq 1-\frac{1}{n},\ y^3 \leqq x \leqq \left(1-\frac{1}{n}\right)y^2\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=2}^\infty$ は D の近似増加列であり, $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{y^4-x^2}}dxdy = \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\left(\int_{y^3}^{\left(1-\frac{1}{n}\right)y^2}\frac{1}{\sqrt{y^4-x^2}}dx\right)dy = \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\left[\sin^{-1}\frac{x}{y^2}\right]_{x=y^3}^{x=\left(1-\frac{1}{n}\right)y^2}dy =$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\left(\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)-\sin^{-1}y\right)dy = \left(1-\frac{2}{n}\right)\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right) - \left[y\sin^{-1}y\right]_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy =$ $\displaystyle -\frac{3}{n}\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\sin^{-1}\frac{1}{n}+\left[-\sqrt{1-y^2}\right]_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} = -\frac{3}{n}\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\sin^{-1}\frac{1}{n}-\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}+$ $\displaystyle\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$ だから $\displaystyle\iint_D\frac{1}{\sqrt{y^4-x^2}}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{y^4-x^2}}dxdy =$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{n}\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\sin^{-1}\frac{1}{n}-\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right) = 1$$

(37) $D_n = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ \ x^3\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqq y \leqq n^2x\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=2}^\infty$ は D の近似増加列であり, $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{x^2}{x^4+y^2}dxdy = \int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_{x^3\left(1+\frac{1}{n}\right)}^{n^2x}\frac{x^2}{x^4+y^2}dy\right)dx = \int_{\frac{1}{n}}^1\left[\tan^{-1}\frac{y}{x^2}\right]_{y=x^3\left(1+\frac{1}{n}\right)}^{y=n^2x}dx =$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\tan^{-1}\frac{n^2}{x}-\tan^{-1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)x\right)\right)dx = \left[x\tan^{-1}\frac{n^2}{x}-x\tan^{-1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)x\right)\right]_{\frac{1}{n}}^1 +$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\frac{n^2x}{x^2+n^4}+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)x}{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2x^2}\right)dx = \tan^{-1}n^2-\tan^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{\tan^{-1}n^3}{n}+\frac{1}{n}\tan^{-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+$ $\displaystyle\left[\frac{n^2}{2}\log(x^2+n^4)+\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}\log\left(1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2x^2\right)\right]_{\frac{1}{n}}^1 = \tan^{-1}n^2-\tan^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{\tan^{-1}n^3}{n}+$ $\displaystyle\frac{1}{n}\tan^{-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{n^2}{2}\log\frac{1+n^4}{\frac{1}{n^2}+n^4}+\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}\log\frac{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n^2}}$ である. $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e$ を用いれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2}\log\frac{1+n^4}{\frac{1}{n^2}+n^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2}\log\frac{1+\frac{1}{n^4}}{1+\frac{1}{n^6}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}\log\left(1+\frac{1}{n^4}\right)^{n^4}-\frac{1}{n^4}\log\left(1+\frac{1}{n^6}\right)^{n^6}\right) = 0$ だから $\displaystyle\iint_D\frac{x^2}{x^4+y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{x^2}{x^4+y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\left(\tan^{-1}n^2-\tan^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{\tan^{-1}n^3}{n}+\right.$ $\displaystyle\left.\frac{1}{n}\tan^{-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{n^2}{2}\log\frac{1+n^4}{\frac{1}{n^2}+n^4}+\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}\log\frac{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n^2}}\right) = \frac{\pi}{4}+\frac{\log 2}{2}.$

(38) $D_n = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 \leqq \left(a-\frac{1}{n}\right)^2\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ は D の近似増加列である. $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}r\sin\theta\cos\varphi\\r\sin\theta\sin\varphi\\r\cos\theta\end{smallmatrix}\right)$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$ と変数変換を行えば, この変換のヤコビ行列式は $r^2\sin\theta$ であり, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in D_n$ であるためには, $0 \leqq r \leqq a-\dfrac{1}{n},\ 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であることが必要十分である. $E_n = \left[0, a-\frac{1}{n}\right]\times\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\times\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ と

おけば $\displaystyle\iiint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}dxdydz=\iiint_{E_n}\frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{a^2-r^2}}drd\theta d\varphi=\int_{\frac{1}{n}}^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{a^2-r^2}}d\varphi\right)d\theta\right)dr=$
$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi r^2\sin\theta}{2\sqrt{a^2-r^2}}d\theta\right)dr=\int_{\frac{1}{n}}^a\frac{\pi r^2}{2\sqrt{a^2-r^2}}dr=\frac{\pi}{2}\left(\int_{\frac{1}{n}}^a\frac{a^2}{\sqrt{a^2-r^2}}dr-\int_{\frac{1}{n}}^a\sqrt{a^2-r^2}dr\right)=$
$\displaystyle\frac{\pi}{2}\left(\left[a^2\sin^{-1}\frac{r}{a}\right]_{\frac{1}{n}}^a-\int_{\frac{1}{n}}^a\sqrt{a^2-r^2}dr\right)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi a^2}{2}-a^2\sin^{-1}\frac{1}{an}-\int_{\frac{1}{n}}^a\sqrt{a^2-r^2}dr\right)$ だから, $\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}dr=\frac{\pi a^2}{4}$
であることに注意すれば, $\displaystyle\iiint_D\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iiint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}dxdydz=$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi a^2}{2}-a^2\sin^{-1}\frac{1}{an}-\int_{\frac{1}{n}}^a\sqrt{a^2-r^2}dr\right)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi a^2}{2}-\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}dr\right)=\frac{\pi^2a^2}{8}.$

(39) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^3\middle|\,\frac{1}{n^2}\leqq x^2+y^2+z^2\leqq a^2\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ は D の近似増加列である. $\psi:[0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}^3$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}r\sin\theta\cos\varphi\\r\sin\theta\sin\varphi\\r\cos\theta\end{smallmatrix}\right)$ で定めれば, $\psi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{smallmatrix}\right)\in D_n$ であるためには $\dfrac{1}{n}\leqq r\leqq 1$, $0\leqq\theta\leqq\pi$, $0\leqq\varphi\leqq 2\pi$ が成り立つことが必要十分であり, $\det\psi'\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{smallmatrix}\right)=r^2\sin\theta$ だから $E_n=\left[\frac{1}{n},a\right]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$ とおけば
$\displaystyle\iiint_{D_n}\log(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\iiint_{E_n}2r^2\log r\sin\theta drd\theta d\varphi=\int_{\frac{1}{n}}^a\left(\int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi}2r^2\log r\sin\theta d\varphi\right)d\theta\right)dr=$
$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^a\left(\int_0^\pi4\pi r^2\log r\sin\theta d\theta\right)dr=\int_{\frac{1}{n}}^a8\pi r^2\log rdr=\left[\frac{8\pi r^3}{3}\log r\right]_{\frac{1}{n}}^a-\int_{\frac{1}{n}}^a\frac{8\pi r^2}{3}dr=\left[\frac{8\pi r^3}{3}\log r\right]_{\frac{1}{n}}^a-\left[\frac{8\pi r^3}{9}\right]_{\frac{1}{n}}^a=$
$\displaystyle\frac{8\pi a^3\log a}{3}+\frac{8\pi\log n}{3n^3}-\frac{8\pi a^3}{9}+\frac{8\pi}{9n^2}$ だから $\displaystyle\iiint_D\log(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\lim_{n\to\infty}\iiint_{D_n}\log(x^2+y^2+z^2)dxdydz=$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8\pi a^3\log a}{3}+\frac{8\pi\log n}{3n^3}-\frac{8\pi a^3}{9}+\frac{8\pi}{9n^2}\right)=\frac{8\pi a^3}{9}(3\log a-1).$

同様に, $\displaystyle\iiint_{D_n}\frac{x^2y^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}dxdydz=\iiint_{E_n}r^{8-2\alpha}\sin^5\theta\cos^2\theta\cos^2\varphi\sin^2\varphi drd\theta d\varphi=$
$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^a\left(\int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi}\frac{r^{8-2\alpha}}{4}\sin^5\theta\cos^2\theta\sin^2 2\varphi d\varphi\right)d\theta\right)dr=\int_{\frac{1}{n}}^a\left(\int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi}\frac{r^{8-2\alpha}}{8}\sin^5\theta\cos^2\theta\,(1-\cos4\varphi)\,d\varphi\right)d\theta\right)dr=$
$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^a\left(\int_0^\pi\frac{\pi r^{8-2\alpha}}{4}\cos^2\theta\left(1-\cos^2\theta\right)^2\sin\theta d\theta\right)dr=\int_{\frac{1}{n}}^a\frac{\pi r^{8-2\alpha}}{4}\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}+\frac{2\cos^5\theta}{5}-\frac{\cos^7\theta}{7}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}dr=$
$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^a\frac{4\pi r^{8-2\alpha}}{105}dr=\left[\frac{4\pi r^{9-2\alpha}}{105(9-2\alpha)}\right]_{\frac{1}{n}}^a=\frac{4\pi}{105(9-2\alpha)}\left(a^{9-2\alpha}-\frac{1}{n^{9-2\alpha}}\right)$. 従って $\displaystyle\iint_D\frac{x^2y^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}dxdydz=$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iiint_{D_n}\frac{x^2y^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}dxdydz=\lim_{n\to\infty}\frac{4\pi}{105(9-2\alpha)}\left(a^{9-2\alpha}-\frac{1}{n^{9-2\alpha}}\right)=\frac{4\pi a^{9-2\alpha}}{105(9-2\alpha)}.$

(40) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,x^2+y^2+z^2\leqq n^2,\,x\geqq0,\,y\geqq0,\,z\geqq0\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ は D の近似増加列である. $\psi:[0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}^3$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}r\sin\theta\cos\varphi\\r\sin\theta\sin\varphi\\r\cos\theta\end{smallmatrix}\right)$ で定めれば, $\psi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{smallmatrix}\right)\in D_n$ であるためには $0\leqq r\leqq n$, $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$, $0\leqq\varphi\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であることが必要十分であり, $\det\psi'\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{smallmatrix}\right)=r^2\sin\theta$ だから $E_n=[1,n]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ とおけば $\displaystyle\iiint_{D_n}\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(1+x^2+y^2+z^2)^\alpha}dxdydz=\iiint_{E_n}\frac{r^3\sin\theta}{(1+r^2)^\alpha}drd\theta d\varphi=\int_0^n\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^3\sin\theta}{(1+r^2)^\alpha}d\varphi\right)d\theta\right)dr=$
$\displaystyle\int_0^n\frac{\pi r^3}{2(1+r^2)^\alpha}dr=\int_0^n\frac{\pi t}{4(1+t)^\alpha}dt=\int_0^n\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{(1+t)^{\alpha-1}}-\frac{1}{(1+t)^\alpha}\right)dt=$
$\displaystyle\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{(\alpha-1)(1+t)^{\alpha-1}}-\frac{1}{(\alpha-2)(1+t)^{\alpha-2}}\right]_0^n=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{(\alpha-1)(1+n)^{\alpha-1}}-\frac{1}{(\alpha-2)(1+n)^{\alpha-2}}+\frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)}\right)$
である. 従って $\displaystyle\iint_D\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(1+x^2+y^2+z^2)^\alpha}dxdydz=\lim_{n\to\infty}\iiint_{D_n}\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(1+x^2+y^2+z^2)^\alpha}dxdydz=$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{(\alpha-1)(1+n)^{\alpha-1}}-\frac{1}{(\alpha-2)(1+n)^{\alpha-2}}+\frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)}\right)=\frac{\pi}{4(\alpha-1)(\alpha-2)}.$

(41) $\psi:[0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}^3$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}r\sin\theta\cos\varphi\\r\sin\theta\sin\varphi\\r\cos\theta+\frac{1}{2}\end{smallmatrix}\right)$ で定める. $\psi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには $r^2+r\cos\theta\leqq\dfrac{3}{4}$ かつ $r>0$, すなわち $0<r\leqq\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\cos^2\theta+3}-\cos\theta\right)$ が成り立つことが必要十分であり, $\det\psi'\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{smallmatrix}\right)=r^2\sin\theta$ で

ある．$E_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix} r\\ \theta\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq\theta\leqq\pi,\ \frac{1}{n}\leqq r\leqq\frac{1}{2}\left(\sqrt{\cos^2\theta+3}-\cos\theta\right)\right\}$ とおいて, ψ による $E_n\times[0,2\pi]$ の像を D_n とすれば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である．$\displaystyle\iiint_{D_n}\frac{1}{x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}dxdydz=\iiint_{E_n\times[0,2\pi]}\sin\theta drd\theta d\varphi=$ $\displaystyle\iint_{E_n}\left(\int_0^{2\pi}\sin\theta d\varphi\right)drd\theta=\int_0^{\pi}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\cos^2\theta+3}-\cos\theta\right)}\sin\theta dr\right)d\theta=\int_0^{\pi}\sin\theta\left(\frac{\sqrt{\cos^2\theta+3}}{2}-\frac{\cos\theta}{2}-\frac{1}{n}\right)d\theta=$ $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{\sqrt{t^2+3}}{2}-\frac{t}{2}-\frac{1}{n}\right)dt=\left[\frac{t}{4}\sqrt{t^2+3}+\frac{3}{4}\log\left(t+\sqrt{t^2+3}\right)-\frac{t^2}{4}-\frac{t}{n}\right]_{-1}^{1}=1+\frac{3\log 3}{4}-\frac{2}{n}$ だから $\displaystyle\iiint_D\frac{1}{x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}dxdydz=\lim_{n\to\infty}\iiint_{D_n}\frac{1}{x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}dxdydz=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3\log 3}{4}-\frac{2}{n}\right)=1+\frac{3\log 3}{4}.$

(42) $D=[0,n]\times[0,n]$ とおけば $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ は D の近似増加列である．このとき $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{(1+x)(1+xy^2)}dxdy=$ $\displaystyle\int_0^n\left(\int_0^n\frac{1}{(1+x)(1+xy^2)}dy\right)dx=\int_0^n\left[\frac{\tan^{-1}(\sqrt{x}y)}{\sqrt{x}(1+x)}\right]_{y=0}^{y=n}dx=\int_0^n\frac{\tan^{-1}(n\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}dx$ である．$t=n\sqrt{x}$ とおけば $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{n}dt$ であり, x が 0 から n まで動けば t は 0 から $n\sqrt{n}$ まで動くため, 上式は $\displaystyle\int_0^{n\sqrt{n}}\frac{2n\tan^{-1}t}{n^2+t^2}dt$ に等しい．そこで, 関数 $f:(0,\infty)\times(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ を $\displaystyle f\left(\begin{smallmatrix} x\\ y\end{smallmatrix}\right)=\int_0^x\frac{\tan^{-1}t}{y^2+t^2}dt$ によって定めれば,

$$\iint_{D_n}\frac{1}{(1+x)(1+xy^2)}dxdy=2nf\left(\begin{smallmatrix} n\sqrt{n}\\ n\end{smallmatrix}\right)\ \cdots(i)$$

が成り立つ．$0\leqq\tan^{-1}t\leqq\min\left\{t,\dfrac{\pi}{2}\right\}$ が 0 以上の任意の実数 t に対して成り立つため, $\left(\begin{smallmatrix} x\\ y\end{smallmatrix}\right)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ ならば

$$0\leqq f\left(\begin{smallmatrix} x\\ y\end{smallmatrix}\right)\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{y^2+t^2}dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\pi}{2(y^2+t^2)}dt=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\pi^2}{4y^2}\right)+\frac{\pi}{2y}\tan^{-1}\left(\frac{2y}{\pi}\right)\ \cdots(ii)$$

である．一方, 部分積分と置換積分 $t=sy$ を行えば,

$$\begin{aligned}f\left(\begin{smallmatrix} x\\ y\end{smallmatrix}\right)&=\left[\frac{1}{y}\tan^{-1}t\tan^{-1}\frac{t}{y}\right]_0^x-\int_0^x\frac{\tan^{-1}\frac{t}{y}}{y(1+t^2)}dt=\frac{1}{y}\tan^{-1}x\tan^{-1}\frac{x}{y}-\int_0^{\frac{x}{y}}\frac{\tan^{-1}s}{1+s^2y^2}ds\\&=\frac{1}{y}\tan^{-1}x\tan^{-1}\frac{x}{y}-\frac{1}{y^2}\int_0^{\frac{x}{y}}\frac{\tan^{-1}t}{\left(\frac{1}{y}\right)^2+t^2}dt=\frac{1}{y}\tan^{-1}x\tan^{-1}\frac{x}{y}-\frac{1}{y^2}f\left(\begin{smallmatrix} \frac{x}{y}\\ \frac{1}{y}\end{smallmatrix}\right)\end{aligned}$$

となるため, $x=n\sqrt{n}$, $y=n$ とすれば

$$f\left(\begin{smallmatrix} n\sqrt{n}\\ n\end{smallmatrix}\right)=\frac{1}{n}\tan^{-1}\left(\sqrt{n}\right)\tan^{-1}\left(n\sqrt{n}\right)-\frac{1}{n^2}f\left(\begin{smallmatrix} \sqrt{n}\\ \frac{1}{n}\end{smallmatrix}\right)\ \cdots(iii)$$

が得られる．(ii) から $\displaystyle 0\leqq\frac{1}{n}f\left(\begin{smallmatrix} \sqrt{n}\\ \frac{1}{n}\end{smallmatrix}\right)\leqq\frac{1}{2n}\log\left(1+\frac{\pi^2n^2}{4}\right)+\frac{\pi}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\pi n}\right)$ であり, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\log\left(1+\frac{\pi^2n^2}{4}\right)=\lim_{n\to\infty}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\pi n}\right)=0$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}f\left(\begin{smallmatrix} \sqrt{n}\\ \frac{1}{n}\end{smallmatrix}\right)=0$ が成り立つ．故に (i) と (iii) から

$$\begin{aligned}\iint_D\frac{1}{(1+x)(1+xy^2)}dxdy&=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{(1+x)(1+xy^2)}dxdy=\lim_{n\to\infty}2nf\left(\begin{smallmatrix} n\sqrt{n}\\ n\end{smallmatrix}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(2\tan^{-1}\left(\sqrt{n}\right)\tan^{-1}\left(n\sqrt{n}\right)-\frac{2}{n}f\left(\begin{smallmatrix} \sqrt{n}\\ \frac{1}{n}\end{smallmatrix}\right)\right)\\&=2\lim_{n\to\infty}\tan^{-1}\left(\sqrt{n}\right)\tan^{-1}\left(n\sqrt{n}\right)-2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}f\left(\begin{smallmatrix} \sqrt{n}\\ \frac{1}{n}\end{smallmatrix}\right)=\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

(43) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix} x\\ y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{n^2}\leqq x\leqq a-\frac{1}{n^2},\ 0\leqq y\leqq x-\frac{1}{n^2}\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である．$t=\sqrt{x-y}$ とおけば $y=x-t^2$, $dy=-2tdt$ であり, y が 0 から $x-\dfrac{1}{n^2}$ まで動けば t は $\sqrt{x}$ から $\dfrac{1}{n}$ まで動くため, $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{y^2}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dxdy=\int_{\frac{1}{n^2}}^{a-\frac{1}{n^2}}\left(\int_0^{a-\frac{1}{n^2}}\frac{y^2}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dy\right)dx=\int_{\frac{1}{n^2}}^{a-\frac{1}{n^2}}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\sqrt{x}}\frac{2(x-t^2)^2}{\sqrt{a-x}}dt\right)dx=$

$$\int_{\frac{1}{n^2}}^{a-\frac{2}{n^2}}\left[\frac{2(15tx^2-10t^3x+3t^5)}{15\sqrt{a-x}}\right]_{\frac{1}{n}}^{\sqrt{x}}dx=\frac{16}{15}\int_{\frac{1}{n^2}}^{a-\frac{2}{n^2}}\frac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}dx-\frac{2}{15n^5}\int_{\frac{1}{n^2}}^{a-\frac{2}{n^2}}\frac{15n^4x^2-10n^2x+3}{\sqrt{a-x}}dx\cdots(*)$$

が得られる．$t=\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}\right)$ とおけば $x=a\sin^2 t$, $dx=2a\cos t\sin t\,dt$ だから $\displaystyle\int\frac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}dx=\int 2a^3\sin^6 t\,dt$ が成り立つため，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n^2}}^{a-\frac{1}{n^2}}\frac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{an^2-1}}\right)}^{\tan^{-1}\left(\sqrt{an^2-1}\right)}2a^3\sin^6 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2a^3\sin^6 t\,dt=2a^3\frac{5!!}{6!!}\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi a^3}{16}$ である．一方，$\dfrac{1}{n^2}\leqq x\leqq a-\dfrac{1}{n^2}$ ならば $0\leqq\dfrac{x^2}{\sqrt{a-x}}\leqq\dfrac{a^2}{\sqrt{a-x}}$, $0\leqq\dfrac{x}{\sqrt{a-x}}\leqq\dfrac{a}{\sqrt{a-x}}$ であり，広義積分 $\displaystyle\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a-x}}dx$ は収束するため，広義積分 $\displaystyle\int_0^a\frac{x^2}{\sqrt{a-x}}dx$, $\displaystyle\int_0^a\frac{x}{\sqrt{a-x}}dx$ はともに収束する．従って，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{15n^5}\int_{\frac{1}{n^2}}^{a-\frac{1}{n^2}}\frac{15n^4x^2-10n^2x+3}{\sqrt{a-x}}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\int_{\frac{1}{n^2}}^{a-\frac{1}{n^2}}\frac{x^2}{\sqrt{a-x}}dx-\lim_{n\to\infty}\frac{4}{5n^3}\int_{\frac{1}{n^2}}^{a-\frac{1}{n^2}}\frac{x}{\sqrt{a-x}}dx+$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{5n^5}\int_{\frac{1}{n^2}}^{a-\frac{1}{n^2}}\frac{1}{\sqrt{a-x}}dx=0\cdot\int_0^a\frac{x^2}{\sqrt{a-x}}dx-0\cdot\int_0^a\frac{x}{\sqrt{a-x}}dx+0\cdot\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a-x}}dx=0$$ である．故に $(*)$ から

$$\iint_D\frac{y^2}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{y^2}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dxdy=\frac{16}{15}\frac{5\pi a^3}{16}=\frac{\pi a^3}{3}$$ が得られる．

(44) $\psi:[0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}^3$ を $\psi\begin{pmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\sin\theta\cos\varphi\\r\sin\theta\sin\varphi\\r\cos\theta\end{pmatrix}$ で定める．$\det\psi'\begin{pmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{pmatrix}=r^2\sin\theta$ であり，$\psi\begin{pmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{pmatrix}\in D$ であるためには $0\leqq\varphi\leqq\dfrac{\pi}{2}$, $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$, $0<r\leqq\left(\dfrac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2}+\dfrac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2}+\dfrac{\cos^2\theta}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ が成り立つことが必要十分である．$E_n=\left\{\begin{pmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2},\ 0\leqq\varphi\leqq\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{1}{n}\leqq r\leqq\left(\dfrac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2}+\dfrac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2}+\dfrac{\cos^2\theta}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}$ とおいて，ψ による E_n の像を D_n とすれば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である．$s=\sin^2\varphi$, $t=\sin^2\theta$ とおくと

$$\iiint_{D_n}\frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}\,dxdydz=\iiint_{E_n}r^{5-2\alpha}\cos\theta\sin^3\theta\cos\varphi\sin\varphi\,dr\,d\theta d\varphi=$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\left(\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{\cos^2\theta}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}r^{5-2\alpha}\cos\theta\sin^3\theta\cos\varphi\sin\varphi\,dr\right)d\varphi\right)d\theta=$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta}{8(3-\alpha)}\left(\left(\frac{\sin^2\theta(1-\sin^2\varphi)}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{1-\sin^2\theta}{c^2}\right)^{\alpha-3}-\frac{1}{n^{2(3-\alpha)}}\right)2\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\right)2\cos\theta\sin\theta\,d\theta=$$
$$\int_0^1\left(\int_0^1\frac{t}{8(3-\alpha)}\left(\left(\frac{t(1-s)}{a^2}+\frac{st}{b^2}+\frac{1-t}{c^2}\right)^{\alpha-3}-\frac{1}{n^{2(3-\alpha)}}\right)ds\right)dt=$$
$$\int_0^1\left(\int_0^1\frac{(abc)^{2(3-\alpha)}t}{8(3-\alpha)}\big((a^2-b^2)c^2st+b^2((c^2-a^2)t+a^2)\big)^{\alpha-3}ds\right)dt-\frac{1}{16n^{2(3-\alpha)}(3-\alpha)}$$ である．

$\alpha<3$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{16n^{2(3-\alpha)}(3-\alpha)}=0$ となるため，上式から $\displaystyle\iiint_D\frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}\,dxdydz=$

$$\lim_{n\to\infty}\iiint_{D_n}\frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}\,dxdydz=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{(abc)^{2(3-\alpha)}t}{8(3-\alpha)}\big((a^2-b^2)c^2st+b^2((c^2-a^2)t+a^2)\big)^{\alpha-3}ds\right)dt\cdots(*).$$

$a=b$ ならば $\displaystyle(*)=\int_0^1\frac{(ac)^{2(3-\alpha)}t}{8(3-\alpha)}\big((c^2-a^2)t+a^2\big)^{\alpha-3}dt$ だから $a=b=c$ の場合，$\displaystyle(*)=\int_0^1\frac{a^{2(3-\alpha)}t}{8(3-\alpha)}dt=\frac{a^{2(3-\alpha)}}{16(3-\alpha)}$.

$a=b\neq c$, $\alpha\neq 1,2$ の場合，$\displaystyle(*)=\left[\frac{(ac)^{2(3-\alpha)}t\big((c^2-a^2)t+a^2\big)^{\alpha-2}}{8(c^2-a^2)(3-\alpha)(\alpha-2)}\right]_0^1-\int_0^1\frac{(ac)^{2(3-\alpha)}\big((c^2-a^2)t+a^2\big)^{\alpha-2}}{8(c^2-a^2)(3-\alpha)(\alpha-2)}dt=$

$$\frac{a^{2(3-\alpha)}c^2}{8(c^2-a^2)(3-\alpha)(\alpha-2)}-\left[\frac{(ac)^{2(3-\alpha)}\big((c^2-a^2)t+a^2\big)^{\alpha-1}}{8(c^2-a^2)^2(3-\alpha)(\alpha-2)(\alpha-1)}\right]_0^1=$$
$$\frac{a^2c^2\big(a^2c^{2(2-\alpha)}-(\alpha-1)a^{2(3-\alpha)}+(\alpha-2)a^{2(2-\alpha)}c^2\big)}{8(c^2-a^2)^2(3-\alpha)(2-\alpha)(1-\alpha)}.$$

$a=b\neq c$, $\alpha=1$ の場合，$\displaystyle(*)=\int_0^1\frac{a^4c^4}{16(c^2-a^2)}\left(\frac{1}{(c^2-a^2)t+a^2}-\frac{a^2}{((c^2-a^2)t+a^2)^2}\right)dt=$

$$\frac{a^4c^4}{16(c^2-a^2)^2}\left[\log((c^2-a^2)t+a^2)+\frac{a^2}{(c^2-a^2)t+a^2}\right]_0^1=\frac{a^4c^2(2c^2(\log c-\log a)-c^2+a^2)}{16(c^2-a^2)^2}.$$

$a=b\neq c,\ \alpha=2$ の場合, $(*)=\displaystyle\int_0^1 \frac{a^2c^2}{8(c^2-a^2)}\left(1-\frac{a^2}{(c^2-a^2)t+a^2}\right)dt=$
$\displaystyle\frac{a^2c^2}{8(c^2-a^2)^2}\big[(c^2-a^2)t-a^2\log((c^2-a^2)t+a^2)\big]_0^1=\frac{a^2c^2\left(2a^2(\log a-\log c)-a^2+c^2\right)}{8(c^2-a^2)^2}.$
$a\neq b,\ \alpha\neq 2$ ならば $(*)=\displaystyle\int_0^1\left[\frac{a^{2(3-\alpha)}b^{2(3-\alpha)}c^{2(2-\alpha)}}{8(a^2-b^2)(3-\alpha)(\alpha-2)}\big((a^2-b^2)c^2st+b^2((c^2-a^2)t+a^2)\big)^{\alpha-2}\right]_{s=0}^{s=1}dt=$
$\displaystyle\frac{a^{2(3-\alpha)}b^{2(3-\alpha)}c^{2(2-\alpha)}}{8(a^2-b^2)(3-\alpha)(\alpha-2)}\int_0^1\left(a^{2(\alpha-2)}\left((c^2-b^2)t+b^2\right)^{\alpha-2}-b^{2(\alpha-2)}\left((c^2-a^2)t+a^2\right)^{\alpha-2}\right)dt\cdots(i).$
$a\neq b,\ \alpha=2$ ならば $(*)=\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^1\frac{a^2b^2c^2t}{8((a^2-b^2)c^2st+b^2((c^2-a^2)t+a^2))}ds\right)dt=$
$\displaystyle\int_0^1\left[\frac{a^2b^2\log((a^2-b^2)c^2st+b^2((c^2-a^2)t+a^2))}{8(a^2-b^2)}\right]_{s=0}^{s=1}dt=$
$\displaystyle\frac{a^2b^2}{8(a^2-b^2)}\left(\int_0^1\big(\log((c^2-b^2)t+b^2)-\log((c^2-a^2)t+a^2)\big)dt+2(\log a-\log b)\right)\cdots(ii)$
$a\neq b,\ b\neq c,\ c\neq a,\ \alpha\neq 1,2$ の場合,
$\displaystyle(i)=\frac{a^{2(3-\alpha)}b^{2(3-\alpha)}c^{2(2-\alpha)}}{8(a^2-b^2)(3-\alpha)(\alpha-2)(\alpha-1)}\left[\frac{a^{2(\alpha-2)}\left((c^2-b^2)t+b^2\right)^{\alpha-1}}{c^2-b^2}-\frac{b^{2(\alpha-2)}\left((c^2-a^2)t+a^2\right)^{\alpha-1}}{c^2-a^2}\right]_0^1=$
$\displaystyle\frac{a^{2(3-\alpha)}b^{2(3-\alpha)}c^{2(2-\alpha)}}{8(a^2-b^2)(3-\alpha)(2-\alpha)(1-\alpha)}\left(\frac{a^{2(\alpha-2)}c^{2\alpha-2}}{c^2-b^2}-\frac{a^{2(\alpha-2)}b^{2\alpha-2}}{c^2-b^2}-\frac{b^{2(\alpha-2)}c^{2\alpha-2}}{c^2-a^2}+\frac{b^{2(\alpha-2)}a^{2\alpha-2}}{c^2-a^2}\right)=$
$\displaystyle\frac{a^2b^2c^2}{8(a^2-b^2)(3-\alpha)(2-\alpha)(1-\alpha)}\left(\frac{b^{2(2-\alpha)}-b^2c^{2(1-\alpha)}}{c^2-b^2}-\frac{a^{2(2-\alpha)}-a^2c^{2(1-\alpha)}}{c^2-a^2}\right)=$
$\displaystyle\frac{a^2b^2c^2\left(a^2b^{2(2-\alpha)}-a^{2(2-\alpha)}b^2+b^2c^{2(2-\alpha)}-b^{2(2-\alpha)}c^2+c^2a^{2(2-\alpha)}-c^{2(2-\alpha)}a^2\right)}{8(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)(3-\alpha)(2-\alpha)(1-\alpha)}.$
$a\neq b,\ b\neq c,\ c\neq a,\ \alpha=1$ の場合, $(i)=\displaystyle\frac{a^2b^2c^2}{16(a^2-b^2)}\int_0^1\left(\frac{a^2}{(c^2-a^2)t+a^2}-\frac{b^2}{(c^2-b^2)t+b^2}\right)dt=$
$\displaystyle\frac{a^2b^2c^2}{16(a^2-b^2)}\left[\frac{a^2\log\big((c^2-a^2)t+a^2\big)}{c^2-a^2}-\frac{b^2\log\big((c^2-b^2)t+b^2\big)}{c^2-b^2}\right]_0^1=$
$\displaystyle\frac{a^2b^2c^2\big(-a^2(b^2-c^2)\log a-c^2(a^2-b^2)\log c-b^2(c^2-a^2)\log b\big)}{8(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}.$
$a\neq b,\ b\neq c,\ c\neq a,\ \alpha=2$ の場合, $(ii)=\displaystyle\frac{a^2b^2(\log a-\log b)}{4(a^2-b^2)}+$
$\displaystyle\frac{a^2b^2}{8(a^2-b^2)}\left(\left[\frac{((c^2-b^2)t+b^2)\log((c^2-b^2)t+b^2)}{c^2-b^2}-t\right]_0^1-\left[\frac{((c^2-a^2)t+a^2)\log((c^2-a^2)t+a^2)}{c^2-a^2}-t\right]_0^1\right)=$
$\displaystyle\frac{a^2b^2(\log a-\log b)}{4(a^2-b^2)}+\frac{a^2b^2}{4(a^2-b^2)}\left(\frac{(a^2b^2-a^2c^2)\log a+(b^2c^2-a^2b^2)\log b+(a^2c^2-b^2c^2)\log c}{(b^2-c^2)(c^2-a^2)}\right)=$
$\displaystyle\frac{a^2b^2c^2\big((b^2-c^2)\log a+(c^2-a^2)\log b+(a^2-b^2)\log c\big)}{4(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}.$
$a\neq b,\ a=c,\ \alpha\neq 1,2$ の場合, $(i)=\displaystyle\frac{a^{2(3-\alpha)}b^{2(3-\alpha)}}{8(a^2-b^2)(3-\alpha)(\alpha-2)}\int_0^1\left(\left((a^2-b^2)t+b^2\right)^{\alpha-2}-b^{2(\alpha-2)}\right)dt=$
$\displaystyle\frac{a^{2(3-\alpha)}b^{2(3-\alpha)}}{8(a^2-b^2)(3-\alpha)(\alpha-2)}\left[\frac{\left((a^2-b^2)t+b^2\right)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)(a^2-b^2)}-b^{2(\alpha-2)}t\right]_0^1=$
$\displaystyle\frac{a^2b^2\left(a^2b^{2(2-\alpha)}-(\alpha-1)a^{2(3-\alpha)}+(\alpha-2)a^{2(2-\alpha)}b^2\right)}{8(a^2-b^2)^2(3-\alpha)(2-\alpha)(1-\alpha)}.$
$a\neq b,\ b=c,\ \alpha\neq 1,2$ の場合, $(i)=\displaystyle\frac{a^{2(3-\alpha)}b^{2(3-\alpha)}}{8(a^2-b^2)(3-\alpha)(\alpha-2)}\int_0^1\left(a^{2(\alpha-2)}-\left((b^2-a^2)t+a^2\right)^{\alpha-2}\right)dt=$
$\displaystyle\frac{a^{2(3-\alpha)}b^{2(3-\alpha)}}{8(a^2-b^2)(3-\alpha)(\alpha-2)}\left[a^{2(\alpha-2)}t+\frac{\left((b^2-a^2)t+a^2\right)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)(a^2-b^2)}\right]_0^1=$
$\displaystyle\frac{a^2b^2\left(a^{2(2-\alpha)}b^2-(\alpha-1)b^{2(3-\alpha)}+(\alpha-2)a^2b^{2(2-\alpha)}\right)}{8(a^2-b^2)^2(3-\alpha)(2-\alpha)(1-\alpha)}.$
$a\neq b,\ a=c,\ \alpha=1$ の場合, $(i)=\displaystyle\frac{a^4b^2}{16(a^2-b^2)}\int_0^1\left(1-\frac{b^2}{(a^2-b^2)t+b^2}\right)dt=$

$\dfrac{a^4b^2}{16(a^2-b^2)}\left[t-\dfrac{b^2\log((a^2-b^2)t+b^2)}{a^2-b^2}\right]_0^1=\dfrac{a^4b^2\bigl(2b^2(\log b-\log a)-b^2+a^2\bigr)}{16(a^2-b^2)^2}$.

$a\neq b,\ b=c,\ \alpha=1$ の場合, $(i)=\dfrac{a^2b^4}{16(a^2-b^2)}\displaystyle\int_0^1\left(\dfrac{a^2}{(b^2-a^2)t+a^2}-1\right)dt=$

$\dfrac{a^2b^4}{16(a^2-b^2)}\left[\dfrac{a^2\log((b^2-a^2)t+a^2)}{b^2-a^2}-t\right]_0^1=\dfrac{a^2b^4\bigl(2a^2(\log a-\log b)-a^2+b^2\bigr)}{16(a^2-b^2)^2}$.

$a\neq b,\ a=c,\ \alpha=2$ の場合, $(ii)=\dfrac{a^2b^2}{8(a^2-b^2)}\left(\displaystyle\int_0^1\log((a^2-b^2)t+b^2)\,dt-2\log b\right)=$

$\dfrac{a^2b^2}{8(a^2-b^2)}\left(\left[\dfrac{((a^2-b^2)t+b^2)\log((a^2-b^2)t+b^2)}{a^2-b^2}-t\right]_0^1-2\log b\right)=\dfrac{a^2b^2\bigl(2a^2(\log a-\log b)-a^2+b^2\bigr)}{8(a^2-b^2)^2}$.

$a\neq b,\ b=c,\ \alpha=2$ の場合, $(ii)=\dfrac{a^2b^2}{8(a^2-b^2)}\left(2\log a-\displaystyle\int_0^1\log((b^2-a^2)t+a^2)dt\right)=$

$\dfrac{a^2b^2}{8(a^2-b^2)}\left(2\log a-\left[\dfrac{((b^2-a^2)t+a^2)\log((b^2-a^2)t+a^2)}{b^2-a^2}-t\right]_0^1\right)=\dfrac{a^2b^2\bigl(2b^2(\log b-\log a)-b^2+a^2\bigr)}{8(a^2-b^2)^2}$.

2. まず $f':(a,b)\to\boldsymbol{R}$ が正値関数であることを示す. もし $f'(c)<0$ となる $c\in(a,b)$ が存在すれば, f' の連続性から $\delta<\min\{c-a,b-c\}$ を満たす正の数 δ で, 条件「$x\in(c-\delta,c+\delta)$ ならば $|f'(x)-f'(c)|<-\frac{f'(c)}{2}$」を満たすものがある. 従って $x\in(c-\delta,c+\delta)$ ならば $f'(x)<\frac{f'(c)}{2}<0$ となり, 平均値の定理により, f は区間 $[c-\delta,c+\delta]$ で単調に減少するため, 仮定に反する. 故に f' は正値関数である.

(1) $D_n=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,a+\frac{1}{n}\leqq x^2+y^2\leqq b-\frac{1}{n}\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列であり, $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ $(r\geqq 0,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ とおくと, $\binom{x}{y}\in D_n$ であるためには $\binom{r}{\theta}\in\left[\sqrt{a+\frac{1}{n}},\sqrt{b-\frac{1}{n}}\right]\times[0,2\pi]$ であることが必要十分である. この変数変換のヤコビ行列式は r だから $\displaystyle\iint_{D_n}f'(x^2+y^2)dxdy=\iint_{\left[\sqrt{a+\frac{1}{n}},\sqrt{b-\frac{1}{n}}\right]\times[0,2\pi]}rf'(r^2)drd\theta=$

$\displaystyle\int_{\sqrt{a+\frac{1}{n}}}^{\sqrt{b-\frac{1}{n}}}\left(\int_0^{2\pi}rf'(r^2)d\theta\right)dr=\int_{\sqrt{a+\frac{1}{n}}}^{\sqrt{b-\frac{1}{n}}}2\pi rf'(r^2)dr=[\pi f(r^2)]_{\sqrt{a+\frac{1}{n}}}^{\sqrt{b-\frac{1}{n}}}=\pi\left(f\left(b-\frac{1}{n}\right)-f\left(a+\frac{1}{n}\right)\right)$. 従って

$\displaystyle\iint_D f'(x^2+y^2)dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}f'(x^2+y^2)dxdy=\lim_{n\to\infty}\pi\left(f\left(b-\frac{1}{n}\right)-f\left(a+\frac{1}{n}\right)\right)=$

$\displaystyle\pi\left(\lim_{x\to b-0}f(x)-\lim_{x\to a+0}f(x)\right)$ である.

(2) $D_n=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,a+\frac{1}{n}\leqq x^2+y^2\leqq n\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列であり, $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ $(r\geqq 0,$ $0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ とおくと, $\binom{x}{y}\in D_n$ であるためには $\binom{r}{\theta}\in\left[\sqrt{a+\frac{1}{n}},\sqrt{n}\right]\times[0,2\pi]$ であることが必要十分である. この変数変換のヤコビ行列式は r だから $\displaystyle\iint_{D_n}f'(x^2+y^2)dxdy=\iint_{\left[\sqrt{a+\frac{1}{n}},\sqrt{n}\right]\times[0,2\pi]}rf'(r^2)drd\theta=$

$\displaystyle\int_{\sqrt{a+\frac{1}{n}}}^{\sqrt{n}}\left(\int_0^{2\pi}rf'(r^2)d\theta\right)dr=\int_{\sqrt{a+\frac{1}{n}}}^{\sqrt{n}}2\pi rf'(r^2)dr=[\pi f(r^2)]_{\sqrt{a+\frac{1}{n}}}^{\sqrt{n}}=\pi\left(f(n)-f\left(a+\frac{1}{n}\right)\right)$. 従って

$\displaystyle\iint_D f'(x^2+y^2)dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}f'(x^2+y^2)dxdy=\lim_{n\to\infty}\pi\left(f(n)-f\left(a+\frac{1}{n}\right)\right)=\pi\left(\lim_{x\to\infty}f(x)-\lim_{x\to a+0}f(x)\right)$.

3. (1) $D_n=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{n}\leqq x\leqq 1-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\leqq y\leqq 1-x\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列であり,

$\displaystyle\iint_{D_n}x^{p-1}y^{q-1}dxdy=\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{x-\frac{1}{n}}x^{p-1}y^{q-1}dy\right)dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\left[\frac{x^{p-1}y^q}{q}\right]_{y=\frac{1}{n}}^{y=1-x}dx=$

$\displaystyle\frac{1}{q}\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}x^{p-1}\left((1-x)^q-\frac{1}{n^q}\right)dx=\frac{1}{q}\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}x^{p-1}(1-x)^qdx-\frac{1}{n^qpq}\left(1-\frac{1}{n}\right)^p+\frac{1}{n^{p+q}pq}$ となるため,

$\displaystyle\iint_D x^{p-1}y^{q-1}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}x^{p-1}y^{q-1}dxdy=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{q}\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}x^{p-1}(1-x)^qdx-\frac{1}{n^qpq}\left(1-\frac{1}{n}\right)^p+\frac{1}{n^{p+q}pq}\right)=$

$\frac{1}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx = \frac{1}{q}B(p,q+1)$ である．x, y の対称性から上の値は $\frac{1}{p}B(p+1,q)$ にも等しい．

(2) $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to \boldsymbol{R}^2$ を $f\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tan\varphi\\ \frac{\tan\psi}{\cos^2\varphi}\end{pmatrix}$ によって定めれば f は全単射であり，$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ を D の上に写す．$E_n=\left[\frac{1}{n},\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right]\times\left[\frac{1}{n},\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right]$ とおき，D_n を f による E_n の像とすれば，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である．$\det f'\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}=\frac{1}{\cos^4\varphi\cos^2\psi}$ だから，f による変数変換を行えば，$\iint_{D_n}\frac{x^{m-1}y^{n-1}}{\left((1+x^2)^2+y^2\right)^{\alpha}}dxdy=$

$\iint_{E_n}\tan^{m-1}\varphi\tan^{n-1}\psi\cos^{4\alpha-4}\varphi\cos^{2\alpha-2}\psi d\varphi d\psi=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}\tan^{m-1}\varphi\cos^{4\alpha-4}\varphi\tan^{n-1}\psi\cos^{2\alpha-2}\psi d\varphi\right)d\psi=$
$\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}\sin^{m-1}\varphi\cos^{4\alpha-m-3}\varphi d\varphi\right)\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}\sin^{n-1}\psi\cos^{2\alpha-n-1}\psi d\psi\right)$ が得られる．第 12 回の問題 4 の (1) の結果より $\iint_D\frac{x^{m-1}y^{n-1}}{\left((1+x^2)^2+y^2\right)^{\alpha}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}\sin^{m-1}\varphi\cos^{4\alpha-m-3}\varphi d\varphi\right)\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}\sin^{n-1}\psi\cos^{2\alpha-n-1}\psi d\psi\right)=$
$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-1}\varphi\cos^{4\alpha-m-3}\varphi d\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\psi\cos^{2\alpha-n-1}\psi d\psi\right)=\frac{1}{4}B\left(\frac{m}{2},2\alpha-\frac{m}{2}-1\right)B\left(\frac{n}{2},\alpha-\frac{n}{2}\right)$.

(3) $f:D\to D$, $g:[0,\infty)\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to D$ を $f\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u^{\frac{2}{\alpha}}\\ v^{\frac{2}{\alpha}}\\ w^{\frac{2}{\alpha}}\end{pmatrix}$, $g\begin{pmatrix}r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\sin\theta\cos\varphi\\ r\sin\theta\sin\varphi\\ r\cos\theta\end{pmatrix}$ により定めると，f は全単射であり，g は体積が 0 の部分を除けば全単射である．$E_n=\left[0,\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ とおき，D_n を $f\circ g$ による E_n の像とすれば，$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である．$\det(f\circ g)'\begin{pmatrix}r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}=\det\left(f'\left(g\begin{pmatrix}r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\right)g'\begin{pmatrix}r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\right)=$
$\left(\det f'\left(g\begin{pmatrix}r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\right)\right)\left(\det g'\begin{pmatrix}r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\right)=\frac{8}{\alpha^3}r^{\frac{6}{\alpha}-1}\sin^{\frac{4}{\alpha}-1}\theta\cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\theta\sin^{\frac{2}{\alpha}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\varphi$ だから，$f\circ g$ による変数変換を行えば，
$\iiint_{D_n}\frac{1}{1+x^{\alpha}+y^{\alpha}+z^{\alpha}}dxdy=\iiint_{E_n}\frac{8r^{\frac{6}{\alpha}-1}}{\alpha^3(1+r^2)}\sin^{\frac{4}{\alpha}-1}\theta\cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\theta\sin^{\frac{2}{\alpha}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\varphi drd\theta d\psi=$
$\frac{8}{\alpha^3}\left(\int_0^{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)}\frac{r^{\frac{6}{\alpha}-1}}{1+r^2}dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{4}{\alpha}-1}\theta\cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\theta d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{\alpha}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\varphi d\varphi\right)$ が得られる．$r=\tan\psi$ と変数変換すれば，$\frac{1}{1+r^2}dr=d\psi$ であり，ψ が 0 から $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}$ まで動けば r は 0 から $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)$ まで動くため，
$\int_0^{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)}\frac{r^{\frac{6}{\alpha}-1}}{1+r^2}dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}\tan^{\frac{6}{\alpha}-1}\psi d\psi$ である．第 12 回の問題 4 の (1) の結果より $\iiint_D\frac{1}{1+x^{\alpha}+y^{\alpha}+z^{\alpha}}dxdy=$
$\lim_{n\to\infty}\frac{8}{\alpha^3}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}\tan^{\frac{6}{\alpha}-1}\psi d\psi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{4}{\alpha}-1}\theta\cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\theta d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{\alpha}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\varphi d\varphi\right)=$
$\frac{8}{\alpha^3}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{6}{\alpha}-1}\psi\cos^{1-\frac{6}{\alpha}}\psi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{4}{\alpha}-1}\theta\cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\theta d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{\alpha}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\varphi d\varphi\right)=$
$\frac{1}{\alpha^3}B\left(\frac{3}{\alpha},1-\frac{3}{\alpha}\right)B\left(\frac{2}{\alpha},\frac{1}{\alpha}\right)B\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}\right)$.

[注意] ガンマ関数とベータ関数の間の関係式 $B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ とガンマ関数の等式 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ を用いれば，(1), (2), (3) で求めた値はそれぞれ $\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}$, $\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(2\alpha-\frac{m}{2}-1\right)}{4\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha-1)}$, $\frac{1}{\alpha^3}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3\Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha}\right)$ と表される．

微積分学 II 演習問題　第 28 回　面積と体積

1. 以下で与えられる領域 D の面積を求めよ．ただし, $a>0$, $b>0$ とする．

(1) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, (x^2+y^2-2ax)^2 \leqq 4a^2(x^2+y^2)\right\}$　(2) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, a^4 \leqq (x^2+y^2)^2 \leqq 2a^2(x^2-y^2)\right\}$

(3) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, (x^2+y^2)^2 \leqq 8a^2xy,\ x^2+y^2 \leqq a^2\right\}$　(4) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^2 \leqq \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b},\ y\geqq 0\right\}$

2. a, b, c を正の定数とし, (4) の実数 p, q, r は $\dfrac{p^2}{4a}+\dfrac{q^2}{4b}+r>0$ を満たすとする．

(1) $0<a<b$, $0<c<d$ とする．曲面 $z=\sqrt{2xy}$ と xy 平面ではさまれた領域で, $a\leqq x\leqq b$ かつ $c\leqq y\leqq d$ を満たす部分の体積を求めよ．また, 曲面 $z=\sqrt{2xy}$ のうち, $a\leqq x\leqq b$ かつ $c\leqq y\leqq d$ を満たす部分の面積を求めよ．

(2) 楕円放物面 $z=\dfrac{x^2}{2a}+\dfrac{y^2}{2b}$ と xy 平面ではさまれた領域で, 楕円柱 $E=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2c^2}+\dfrac{y^2}{b^2c^2}\leqq 1\right\}$ に含まれる部分の体積を求めよ．また, 上の楕円放物面の E に含まれる部分の面積を求めよ．

(3) 曲面 $z=\dfrac{x^2}{2a}-\dfrac{y^2}{2b}$ と xy 平面ではさまれた領域で, 楕円柱 $E=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2c^2}+\dfrac{y^2}{b^2c^2}\leqq 1\right\}$ に含まれる部分の体積を求めよ．また, 上の双曲放物面の E に含まれ, かつ xy 平面より上にある部分の面積を求めよ．

(4) 平面 $z=px+qy+r$ と 楕円放物面 $z=ax^2+by^2$ で囲まれたの部分の体積を求めよ．また, 平面 $z=px+qy+r$ のうち, 楕円放物面 $z=ax^2+by^2$ の内部にある部分の面積を求めよ．

(5) 円柱面 $(x-a)^2+y^2=a^2$, 円放物面 $x^2+y^2=z$ と xy 平面に平行な平面 $z=4a^2$ で囲まれた部分の体積を求めよ．また, 円柱面 $(x-a)^2+y^2=a^2$ のうち, $x^2+y^2\leqq z\leqq 4a^2$ を満たす部分の面積を求めよ．

(6) 円柱面 $x^2+y^2=a^2$, 曲面 $z=\dfrac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x^2+y^2}}+e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ と xy 平面で囲まれた部分の体積を求めよ．また, 曲面 $z=\dfrac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x^2+y^2}}+e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ のうち, 円柱面 $x^2+y^2=a^2$ の内部にある部分の面積を求めよ．

(7) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\leqq ax\right\}$ とおくとき, $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in D,\ 0\leqq z\leqq 2\sqrt{ax}\right\}$ の体積を求めよ．また, 曲面 $z=2\sqrt{ax}$ のうち, D の上にある部分の面積を求めよ．

(8) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\leqq a^2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$ とおくとき, $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in D,\ 0\leqq z\leqq cxy\right\}$ の体積を求めよ．また, 曲面 $z=cxy$ のうち, D の上にある部分の面積を求めよ．

(9) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ の内部から 2 つの円柱面 $x^2+y^2=ax$ と $x^2+y^2=-ax$ の内側の部分を除いた部分の体積を求めよ．また, この球面から上記の 2 つの円柱面の内側にある部分を除いた部分の面積を求めよ．

(10) n を 2 以上の整数, R を正の実数, $R\sin\dfrac{\pi}{n}\leqq r\leqq R$ とする．$k=1,2,\ldots,n$ に対し, D_k を球体 $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \left(x-R\cos\frac{\pi(2k-1)}{n}\right)^2+\left(y-R\sin\frac{\pi(2k-1)}{n}\right)^2+z^2\leqq r^2\right\}$ とするとき, $D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_n$ の体積と表面積を求めよ．

(11) $-a\leqq p<q\leqq a$ とする．xy 平面の領域 $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, p\leqq x\leqq q,\ x^2+y^2\leqq a^2\right\}$ に対し, 曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ の D の上にある部分の面積を求めよ．

(12) 曲面 $z=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ の $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 1\leqq x^2+y^2\leqq 4,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$ の上にある部分の体積と面積を求めよ．

(13) 曲面 $z=\dfrac{1}{c}(x^2+y^2)$ の $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\leqq ax\right\}$ の上にある部分の体積を求めよ．

3. 以下の領域 D の体積を求めよ．(2) では $a<b$ かつ $b\geqq 0$, $c>0$ とし, (4), (5), (6) では $a,b,c,k>0$ とする．

(1) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, 1\leqq z\leqq e,\ x^2+y^2\leqq(\log z)^2\right\}$

(2) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in E,\ 0\leqq z\leqq x^2+y^2\right\}$, E は $\left(\begin{smallmatrix}a\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}b\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\c\end{smallmatrix}\right)$ を頂点とする xy 平面上の三角形である．

(3) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\ y\leqq\cosh x,\ 0\leqq z\leqq y\tanh x\right\}$

(4) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in E,\ x^2+y^2+z^2\leqq a^2\right\}$, E は xy 平面において, アルキメデスの螺旋 $r=\dfrac{2a\theta}{\pi}$ の $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ 部分と y 軸で囲まれた領域である．

(5) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2-z^2\leqq a^2,\ |z|\leqq b\right\}$

(6) $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{|z|^k}{c^k} \leqq 1 \right\}$

4. 以下の各問で与えられた領域 D と E の共通部分の体積と表面積を求めよ.

(1) $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leqq 3 \right\}$, $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leqq 1 \right\}$

(2) $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leqq 4 \right\}$, $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$

(3) $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + (z-3)^2 \leqq 5 \right\}$, $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq z \right\}$

(4) $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq 2 - z \right\}$, $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq 1,\ z \geqq 0 \right\}$

(5) $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq 2z^2,\ z \geqq 0 \right\}$, $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq 3 - z \right\}$

(6) $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq (1-z)^2,\ 0 \leqq z \leqq 1 \right\}$, $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq x \right\}$

(7) $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2 \right\}$, $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 \leqq \dfrac{a^2}{4} \right\}$

(8) $0 < R \leqq a$, $a - R \leqq r \leqq \sqrt{a^2 + R^2}$ とする. D は xy 平面上の円板 $x^2 + (y-a)^2 \leqq R^2$ を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体, $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leqq r^2 \right\}$

5. 以下で定義される写像 f でパラメータ表示される曲面の面積を求めよ.

(1) $f\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ c\theta \end{pmatrix}$ $(0 \leqq r \leqq a,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$

(2) $f\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ \tan^{-1}(\tan\theta) \end{pmatrix}$ $(0 \leqq r \leqq \theta \leqq 2\pi,\ \theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

(3) $f\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+t \\ st \\ s-t \end{pmatrix}$ $(s^2 + t^2 \leqq 1)$

(4) $f\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar\cos\theta \\ br\sin\theta \\ \frac{r^2}{2}(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta) \end{pmatrix}$ $(0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$

(5) $f\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2 \\ \sqrt{2}st \\ t^2 \end{pmatrix}$ $(s^2 + t^2 \leqq 1)$

6. 極座標で表された曲線 $r = a(1 + \cos\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を x 軸を軸として 1 回転して得られる回転体の表面積を求めよ.

7. (発展問題) $a, b, \alpha, \beta, k, n$ を正の実数とする. 以下で与えられる領域 D の面積を求めよ.

(1) $kn \geqq 2$ の場合, $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ \left(\left(\dfrac{x}{a}\right)^k + \left(\dfrac{y}{b}\right)^k\right)^n \leqq \alpha x^{kn-2} + \beta y^{kn-2} \right\}$

(2) $n > 2$ の場合, $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)^n \leqq \alpha^{n-2}x^{n-2} - \beta^{n-2}y^{n-2} \right\}$

(3) n が 2 以上の整数の場合, $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ \left(\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2\right)^n \leqq \alpha^{2n-2}x^{2n-2} - \beta^{2n-2}y^{2n-2} \right\}$

(4) n が自然数の場合, $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \left(\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2\right)^n \leqq \alpha^{2n-1}x^{2n-1} + \beta^{2n-1}y^{2n-1} \right\}$

(5) $kn > l + m$ の場合, $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ \left(\left(\dfrac{x}{a}\right)^k + \left(\dfrac{y}{b}\right)^k\right)^n \leqq \alpha x^l y^m \right\}$

8. (発展問題) $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} \leqq a^{\frac{2}{3}} \right\}$ $(a > 0)$ とするとき, D の体積と表面積を求めよ.

9. (発展問題) a を正の定数とするとき, 次の方程式で与えられる曲面の面積を求めよ.

(1) $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (2) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ (3) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

10. (発展問題) 以下の曲面の面積を求めよ. ただし, (3) では $0 < a \leqq b$, (22) では $0 \leqq a < b$, $c > 0$ とする.

(1) $0 \leqq \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ とし, 放物面 $z = \dfrac{x^2}{2a} + \dfrac{y^2}{2b}$ を S とする. S の点 $\boldsymbol{x}$ における法線と z 軸のなす角の鋭角を $\gamma(\boldsymbol{x})$ で表すとき, $\alpha \leqq \gamma(\boldsymbol{x}) \leqq \beta$ を満たす $\boldsymbol{x} \in S$ 全体からなる部分.

(2) 球面 $x^2 + y^2 + (z-c)^2 = c^2$ のうちで, 楕円錐面 $z^2 = ax^2 + by^2$ の内部に含まれる部分.

(3) 球面 $x^2+y^2+(z-c)^2=c^2$ のうちで, 放物面 $z=\dfrac{x^2}{2a}+\dfrac{y^2}{2b}$ の内部に含まれる部分.

(4) $p>0,\ \alpha>\beta$ とする. 曲面 $z=\dfrac{x^2}{2p}$ の $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq a,\ \beta x\leqq y\leqq\alpha x\right\}$ の上にある部分.

(5) $a,\ p,\ q$ を正の実数とするとき, 曲面 $z^2=2px$ の曲面 $y^2=2qx$ と平面 $x=a$ によって切り取られる部分.

(6) 楕円柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (a>c>0)$ の楕円柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ によって切り取られる部分.

(7) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ の楕円柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b)$ によって切り取られる部分.

(8) 円錐 $y^2+z^2=x^2$ の円柱 $x^2+y^2\leqq a^2$ に含まれる部分.

(9) 円錐 $y^2+z^2=x^2$ が曲面 $y=\dfrac{x^2}{a}$ によって切り取られる部分.

(10) 曲面 $z=\dfrac{1}{2c}(y^2-x^2+2xy\cot\alpha)\ (0<\alpha<\pi)$ の $z\geqq 0,\ x^2+y^2\leqq a^2$ にある部分.

(11) 曲面 $z=\dfrac{x^2}{2a}+\dfrac{y^2}{2a}$ の柱面 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ によって切り取られる部分.

(12) 曲面 $z=\dfrac{xy}{a}$ の柱面 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ によって切り取られる部分.

(13) 曲面 $z=\dfrac{xy}{a}$ の柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ によって切り取られる部分.

(14) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ の柱面 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ の内側にある部分.

(15) 円錐面 $x^2+y^2=z^2$ の柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ の内側にある部分.

(16) 曲面 $z=\sqrt{a^2-(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2}\ (0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ の第一象限の部分.

(17) 曲面 $z=1-(x+y)^2$ の第一象限の部分.

(18) 曲面 $z=\sqrt{a^2-\dfrac{1}{2}(x+y)^2}$ の第一象限の部分.

(19) 曲面 $z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ の $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ 1\leqq x^2+y^2\leqq 4\right\}$ の上にある部分.

(20) 上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ の $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq a,\ 0\leqq y\leqq a-x\right\}$ の上にある部分.

(21) 曲面 $z=\sqrt{2xy}$ の $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ \sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\leqq 1\right\}$ の上にある部分.

(22) 曲面 $\sinh x\sinh z=\sin y$ の $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,a\leqq x\leqq b,\ \frac{c}{\cosh^2 x}\leqq y\leqq c\right\}$ の上にある部分.

11. (発展問題) D を $\boldsymbol{R}^2$ の領域, X を $\boldsymbol{R}^3$ の開集合とし, $\rho: X\to[0,\infty)$ を連続関数とする. S を C^1 級写像 $\varphi: D\to X$ によってパラメータ表示される曲面とし, $\boldsymbol{p}\in D$ に対して $\varphi(\boldsymbol{p})$ の第 i 成分 $(i=1,2,3)$ を $\varphi_i(\boldsymbol{p})$ で表し, $\varphi'(\boldsymbol{p})$ の第 j 列 $(j=1,2)$ を $D_j\varphi(\boldsymbol{p})$ によって表す. 実数 $m(S),\ g_i(S)\ (i=1,2,3)$ を

$$m(S)=\iint_D\rho(\varphi\left(\begin{smallmatrix}s\\t\end{smallmatrix}\right))\|D_1\varphi\left(\begin{smallmatrix}s\\t\end{smallmatrix}\right)\times D_2\varphi\left(\begin{smallmatrix}s\\t\end{smallmatrix}\right)\|\,dsdt,\qquad g_i(S)=\iint_D\varphi_i\left(\begin{smallmatrix}s\\t\end{smallmatrix}\right)\rho(\varphi\left(\begin{smallmatrix}s\\t\end{smallmatrix}\right))\|D_1\varphi\left(\begin{smallmatrix}s\\t\end{smallmatrix}\right)\times D_2\varphi\left(\begin{smallmatrix}s\\t\end{smallmatrix}\right)\|\,dsdt$$

で定める. このとき $\dfrac{g_i(S)}{m(S)}$ を第 i 成分とする $\boldsymbol{R}^3$ の点を, ρ を密度関数とする S の重心という.

(1) C^1 級写像 $f: E\to D$ に対し, $\psi: E\to X$ を f と φ の合成写像 $\varphi\circ f: E\to X$ とするとき, 次の等式を示せ.

$$\iint_D\rho(\varphi\left(\begin{smallmatrix}s\\t\end{smallmatrix}\right))\|D_1\varphi\left(\begin{smallmatrix}s\\t\end{smallmatrix}\right)\times D_2\varphi\left(\begin{smallmatrix}s\\t\end{smallmatrix}\right)\|\,dsdt=\iint_E\rho(\psi\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right))\|D_1\psi\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)\times D_2\psi\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)\|\,dudv$$

$$\iint_D\varphi_i\left(\begin{smallmatrix}s\\t\end{smallmatrix}\right)\rho(\varphi\left(\begin{smallmatrix}s\\t\end{smallmatrix}\right))\|D_1\varphi\left(\begin{smallmatrix}s\\t\end{smallmatrix}\right)\times D_2\varphi\left(\begin{smallmatrix}s\\t\end{smallmatrix}\right)\|\,dsdt=\iint_E\psi_i\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)\rho(\psi\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right))\|D_1\psi\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)\times D_2\psi\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)\|\,dudv$$

(2) S が $\boldsymbol{R}^3$ のある平面 H に含まれるとき, S の重心は H 上にあることを示せ.

(3) A, B, C を同一直線上にない $\boldsymbol{R}^3$ の 3 点とする. 密度関数 ρ が定数値関数であるとき, $\triangle$ABC の重心を求めよ.

(4) S を原点を中心とした半径 a の球面の z 座標が 0 以上の部分とする. 密度関数 ρ が定数値関数であるとき, S の重心を求めよ.

第 28 回の演習問題の解答

1. (1) $\binom{r}{\theta} \in [0,\infty)\times[-\pi,\pi]$ を $\binom{r\cos\theta}{r\sin\theta}$ に写す写像は $E = \left\{ \binom{r}{\theta} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, -\pi \leqq t \leqq \pi,\, 0 \leqq r \leqq 2a(1+\cos\theta) \right\}$ を D に写し, 原点を除けば単射である. D の面積は以下のようになる.

$$\iint_D dxdy = \iint_E r\,drd\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{2a(1+\cos\theta)} r\,dr\right)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} 2a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} a^2(3+4\cos\theta+\cos 2\theta)\,d\theta = 6\pi a^2$$

(2) $\binom{r}{\theta} \in [0,\infty)\times\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ を $\binom{r\cos\theta}{r\sin\theta}$ に写す写像は

$$E = \left\{ \binom{r}{\theta} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \theta \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right],\, a \leqq r \leqq \sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\theta} \right\}$$

を D に写し, 原点を除けば単射である. D の面積は以下のようになる.

$$\iint_D dxdy = \iint_E r\,drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\int_a^{\sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\theta}} r\,dr\right)d\theta + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\left(\int_a^{\sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\theta}} r\,dr\right)d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\left(a^2\cos 2\theta - \frac{a^2}{2}\right)d\theta + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\left(a^2\cos 2\theta - \frac{a^2}{2}\right)d\theta$$
$$= \left[\frac{a^2\sin 2\theta}{2} - \frac{a^2\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} + \left[\frac{a^2\sin 2\theta}{2} - \frac{a^2\theta}{2}\right]_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} = \sqrt{3}a^2 - \frac{\pi a^2}{3}$$

(3) D は原点と直線 $y=x$ に関して対称で, 第 1 象限と第 3 象限に含まれるため,

$$D' = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq y \leqq x,\, (x^2+y^2)^2 \leqq 8a^2xy,\, x^2+y^2 \leqq a^2 \right\}$$

とおけば, D' の面積を 4 倍したものが D の面積である. $\binom{r}{\theta} \in [0,\infty)\times\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ を $\binom{r\cos\theta}{r\sin\theta}$ に写す写像は

$$E = \left\{ \binom{r}{\theta} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq \theta \leqq \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{1}{4},\, 0 \leqq r \leqq 2a\sqrt{\sin 2\theta} \right\} \cup \left\{ \binom{r}{\theta} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{1}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\, 0 \leqq r \leqq 2a \right\}$$

を D' に写し, 原点を除けば単射である. D' の面積は以下のようになる.

$$\iint_{D'} dxdy = \iint_E r\,drd\theta = \int_0^{\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{1}{4}}\left(\int_0^{2a\sqrt{\sin 2\theta}} r\,dr\right)d\theta + \int_{\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{1}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^a r\,dr\right)d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{1}{4}} 2a^2\sin 2\theta\,d\theta + \int_{\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{1}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2}{2}\,d\theta = \left[-a^2\cos 2\theta\right]_0^{\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{1}{4}} + \left[\frac{a^2\theta}{2}\right]_{\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{1}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= a^2 - \frac{a^2\sqrt{15}}{4} + \frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}\sin^{-1}\frac{1}{4}$$

従って D の面積は $a^2\left(4 - \sqrt{15} + \dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1}\dfrac{1}{4}\right)$ である.

(4) $z = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$, $w = -\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$ とおくと $x = \dfrac{a}{2}(z-w)$, $y = \dfrac{b}{2}(z+w)$ だから $\binom{z}{w} \in \boldsymbol{R}^2$ を $\begin{pmatrix}\frac{a}{2}(z-w)\\ \frac{b}{2}(z+w)\end{pmatrix}$ に写す写像は $E = \left\{ \binom{z}{w} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, -1 \leqq z \leqq 0,\, z \leqq w \leqq -z^2 \right\}$ を D に写し, この写像のヤコビ行列式は $\dfrac{ab}{2}$ だから D の面積は以下のようになる.

$$\iint_D dxdy = \iint_E \frac{ab}{2}\,dzdw = \int_{-1}^0\left(\int_z^{-z^2} \frac{ab}{2}\,dw\right)dz = \int_{-1}^0 \frac{ab}{2}(-z^2-z)\,dz = \frac{ab}{2}\left[-\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2}\right]_{-1}^0 = \frac{ab}{12}$$

2. (1) 求める体積は $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} \sqrt{2xy}\,dxdy = \int_a^b\left(\int_c^d \sqrt{2xy}dy\right)dx = \int_a^b \left[\frac{2}{3}\sqrt{2x}y^{\frac{3}{2}}\right]_{y=c}^{y=d} dx =$
$\displaystyle\int_a^b \frac{2}{3}\left(d\sqrt{d} - c\sqrt{c}\right)\sqrt{2x}\,dx = \left[\frac{4}{9}\left(d\sqrt{d} - c\sqrt{c}\right)\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}\right]_a^b = \frac{4\sqrt{2}}{9}\left(b\sqrt{b} - a\sqrt{a}\right)\left(d\sqrt{d} - c\sqrt{c}\right).$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{\dfrac{y}{2x}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{\dfrac{x}{2y}}$ だから, 求める面積は $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=$
$\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]}\sqrt{1+\frac{y}{2x}+\frac{x}{2y}}dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d\sqrt{\frac{2xy+y^2+x^2}{2xy}}dy\right)dx=\int_a^b\left(\int_c^d\frac{x+y}{\sqrt{2xy}}dy\right)dx=$
$\displaystyle\int_a^b\left(\int_c^d\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2x}}\right)dy\right)dx=\int_a^b\left[\sqrt{2xy}+\frac{y\sqrt{2y}}{3\sqrt{x}}\right]_{y=c}^{y=d}dx=\int_a^b\left(\sqrt{2dx}-\sqrt{2cx}+\frac{d\sqrt{2d}}{3\sqrt{x}}-\frac{c\sqrt{2c}}{3\sqrt{x}}\right)dx=$
$\displaystyle\left[\frac{2x\sqrt{2dx}}{3}-\frac{2x\sqrt{2cx}}{3}+\frac{2d\sqrt{2dx}}{3}-\frac{2c\sqrt{2cx}}{3}\right]_a^b=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left((b+d)\sqrt{bd}-(b+c)\sqrt{bc}-(a+d)\sqrt{ad}+(a+c)\sqrt{ac}\right)=$
$\displaystyle\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{d}-\sqrt{c}\right)\left(a+b+c+d+\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\right)$.

(2) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\dfrac{x^2}{a^2c^2}+\dfrac{y^2}{b^2c^2}\leqq 1\right\}$ とおけば, 楕円放物面 $z=\dfrac{x^2}{2a}+\dfrac{y^2}{2b}$ と xy 平面ではさまれた領域で, E に含まれる部分は縦線集合 $A=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in D,\ 0\leqq z\leqq\dfrac{x^2}{2a}+\dfrac{y^2}{2b}\right\}$ である. $\begin{cases}x=ar\cos\theta\\y=br\sin\theta\end{cases}$ $(r\geqq 0,$ $0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $[0,c]\times[0,2\pi]$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は $\left|\begin{smallmatrix}a\cos\theta & -ar\sin\theta\\ b\sin\theta & br\cos\theta\end{smallmatrix}\right|=abr$ だから, A の体積は $\displaystyle\iiint_A dxdydx=\iint_D\left(\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b}\right)dxdy=$
$\displaystyle\iint_{[0,c]\times[0,2\pi]}\frac{abr^3}{2}\left(a\cos^2\theta+b\sin^2\theta\right)drd\theta=\int_0^c\left(\int_0^{2\pi}\frac{abr^3}{4}\left(a(1+\cos 2\theta)+b(1-\cos 2\theta)\right)d\theta\right)dr=$
$\displaystyle\int_0^c\frac{\pi abr^3(a+b)}{2}dr=\frac{\pi abc^3(a+b)}{8}$ である. また, $z=\dfrac{x^2}{2a}+\dfrac{y^2}{2b}$ のとき $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{a}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{b}$ だから, 与えられた楕円放物面の E に含まれる部分の面積は, 上と同様の変数変換を行えば $\displaystyle\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=$
$\displaystyle\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}dxdy=\iint_{[0,c]\times[0,2\pi]}abr\sqrt{1+r^2}drd\theta=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^c abr\sqrt{1+r^2}dr\right)d\theta=$
$\displaystyle\int_0^{2\pi}\left[\frac{ab}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^c d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{ab}{3}\left((1+c^2)^{\frac{3}{2}}-1\right)d\theta=\frac{2\pi ab}{3}\left((1+c^2)^{\frac{3}{2}}-1\right)$ である.

(3) 与えられた曲面は xz 平面と yz 平面に関して対称だから, 与えられた曲面と xy 平面ではさまれた領域で, 楕円柱 E に含まれる部分で第一象限に含まれる部分の体積と面積の 4 倍がそれぞれ求める体積と面積である. $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq y\leqq x,\ \frac{x^2}{a^2c^2}+\frac{y^2}{b^2c^2}\leqq 1\right\}$ とおけば, 求める体積は $\displaystyle 4\iint_D\left(\frac{x^2}{2a}-\frac{y^2}{2b}\right)dxdy$ で与えられ, 面積は $\displaystyle 4\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}dxdy$ で与えられる. $\begin{cases}x=ar\cos\theta\\y=br\sin\theta\end{cases}$ $(r\geqq 0,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $F=[0,c]\times\left[0,\tan^{-1}\frac{a}{b}\right]$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は abr だから,
$\displaystyle 4\iint_D\left(\frac{x^2}{2a}-\frac{y^2}{2b}\right)dxdy=4\iint_F r^3\left(\frac{a\cos^2\theta}{2}-\frac{b\sin^2\theta}{2}\right)drd\theta=\int_0^c\left(\int_0^{\tan^{-1}\frac{a}{b}}r^3(a-b+(a+b)\cos 2\theta)dr\right)d\theta=$
$\displaystyle\int_0^c\left[\frac{r^3}{2}(2\theta(a-b)+(a+b)\sin 2\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=\tan^{-1}\frac{a}{b}}dr=\int_0^c\frac{r^3}{2}\left(2(a-b)\tan^{-1}\frac{a}{b}+(a+b)\sin\left(2\tan^{-1}\frac{a}{b}\right)\right)dr=$
$\displaystyle\frac{c^3}{8}\left(2(a-b)\tan^{-1}\frac{a}{b}+\frac{2a(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, $\quad\displaystyle 4\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}dxdy=4\iint_F abr\sqrt{1+r^2}drd\theta=$
$\displaystyle 4\int_0^c\left(\int_0^{\tan^{-1}\frac{a}{b}}abr\sqrt{1+r^2}d\theta\right)dr=\int_0^c\left(4ab\tan^{-1}\frac{a}{b}\right)r\sqrt{1+r^2}dr=\left[\frac{4ab}{3}\tan^{-1}\frac{a}{b}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^c=$
$\displaystyle\frac{4ab}{3}\tan^{-1}\frac{a}{b}\left((1+c^2)^{\frac{3}{2}}-1\right)$ である. 故に, 求める体積と面積はそれぞれ $\displaystyle\frac{c^3}{8}\left(2(a-b)\tan^{-1}\frac{a}{b}+\frac{2a(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, $\displaystyle\frac{4ab}{3}\tan^{-1}\frac{a}{b}\left((1+c^2)^{\frac{3}{2}}-1\right)$ である.

(4) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,ax^2+by^2\leqq px+qy+r\right\}$ とおけば, $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,a\left(x-\frac{p}{2a}\right)^2+b\left(y-\frac{q}{2b}\right)^2\leqq\frac{p^2}{4a}+\frac{q^2}{4b}+r\right\}$ であり, 与えられた平面と楕円放物面で囲まれた部分は $A=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in D,\ ax^2+by^2\leqq z\leqq px+qy+r\right\}$

である. $\begin{cases} x = \frac{\rho}{\sqrt{a}}\cos\theta + \frac{p}{2a} \\ y = \frac{\rho}{\sqrt{b}}\sin\theta + \frac{q}{2b} \end{cases}$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と変数変換すれば, D は $\left[0, \sqrt{\frac{p^2}{4a} + \frac{q^2}{4b} + r}\right] \times [0, 2\pi]$ と面積 0 の部分を除いて 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は $\begin{vmatrix} \frac{\cos\theta}{\sqrt{a}} & -\frac{\rho\sin\theta}{\sqrt{a}} \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{b}} & \frac{\rho\cos\theta}{\sqrt{b}} \end{vmatrix} = \dfrac{\rho}{\sqrt{ab}}$ だから, A の体積は $\displaystyle\iiint_A dxdydx = \iint_D (px + qy + r - ax^2 - by^2)dxdy = \iint_D \left(\frac{p^2}{4a} + \frac{q^2}{4b} + r - a\left(x - \frac{p}{2a}\right)^2 - b\left(y - \frac{q}{2b}\right)^2\right) dxdy =$ $\displaystyle\iint_{\left[0, \sqrt{\frac{p^2}{4a} + \frac{q^2}{4b} + r}\right] \times [0, 2\pi]} \left(\frac{p^2}{4a} + \frac{q^2}{4b} + r - \rho^2\right) \frac{\rho}{\sqrt{ab}} d\rho d\theta = \int_0^{\sqrt{\frac{p^2}{4a} + \frac{q^2}{4b} + r}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{p^2}{4a} + \frac{q^2}{4b} + r - \rho^2\right) \frac{\rho}{\sqrt{ab}} d\theta\right) d\rho =$ $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{p^2}{4a} + \frac{q^2}{4b} + r}} \left(\frac{p^2}{4a} + \frac{q^2}{4b} + r - \rho^2\right) \frac{2\pi\rho}{\sqrt{ab}} d\rho = \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \left[\frac{p^2\rho^2}{4a} + \frac{q^2\rho^2}{4b} + r\rho^2 - \frac{\rho^4}{2}\right]_0^{\sqrt{\frac{p^2}{4a} + \frac{q^2}{4b} + r}} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}} \left(\frac{p^2}{4a} + \frac{q^2}{4b} + r\right)^2$ である.

また, 平面 $z = px + qy + r$ のうち, 楕円放物面 $z = ax^2 + by^2$ の内部にある部分の面積は, 上と同様の変数変換を行えば, $\displaystyle\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dxdy = \iint_{\left[0, \sqrt{\frac{p^2}{4a} + \frac{q^2}{4b} + r}\right] \times [0, 2\pi]} \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{\sqrt{ab}} \rho d\rho d\theta =$ $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{p^2}{4a} + \frac{q^2}{4b} + r}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{\sqrt{ab}} \rho d\theta\right) d\rho = \int_0^{\sqrt{\frac{p^2}{4a} + \frac{q^2}{4b} + r}} \frac{2\pi\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{\sqrt{ab}} \rho d\rho = \left[\frac{\pi\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{\sqrt{ab}} \rho^2\right]_0^{\sqrt{\frac{p^2}{4a} + \frac{q^2}{4b} + r}} =$ $\displaystyle\frac{\pi\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{\sqrt{ab}} \left(\frac{p^2}{4a} + \frac{q^2}{4b} + r\right)$ である.

(5) $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| (x - a)^2 + y^2 \leqq a^2\right\}$ とおけば, 円柱面 $(x - a)^2 + y^2 = a^2$, 円放物面 $x^2 + y^2 = z$ と xy 平面に平行な平面 $z = 4a^2$ で囲まれた部分は縦線集合 $A = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \middle| \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in D,\ x^2 + y^2 \leqq z \leqq 4a^2\right\}$ である. $\begin{cases} x = r\cos\theta + a \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $[0, a] \times [0, 2\pi]$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は $\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$ だから, A の体積は $\displaystyle\iiint_A dxdydx = \iint_D \left(4a^2 - x^2 - y^2\right) dxdy =$ $\displaystyle\iint_{[0, a] \times [0, 2\pi]} r\left(3a^2 - 2ar\cos\theta - r^2\right) drd\theta = \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} r\left(3a^2 - 2ar\cos\theta - r^2\right) d\theta\right) dr = \int_0^a 2\pi\left(3a^2r - r^3\right) dr =$ $\displaystyle\left[3\pi a^2r^2 - \frac{\pi r^4}{2}\right]_0^a = \frac{5\pi a^4}{2}$ である. また, 円柱面 $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ で, $x^2 + y^2 \leqq z \leqq 4a^2$ を満たす部分のうち $y \geqq 0$ である部分を S, $y \leqq 0$ である部分を T とすれば, T は S を xz 平面に関して対称移動したものだから, S と T の面積は等しい. $x^2 + y^2 \leqq z \leqq 4a^2$ かつ $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ を満たす点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ の x 座標は 0 以上であり, $y^2 = a^2 - (x - a)^2$ だから $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| x \geqq 0,\ x^2 + a^2 - (x - a)^2 \leqq z \leqq 4a^2\right\} = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| 0 \leqq x \leqq \frac{z}{2a},\ 0 \leqq z \leqq 4a^2\right\}$ とおけば S は $y = \sqrt{a^2 - (x - a)^2}$ かつ $\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right) \in D$ を満たす点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ 全体からなるため, S の面積は

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dxdz = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{-(x - a)}{\sqrt{a^2 - (x - a)^2}}\right)^2} dxdz = \int_0^{4a^2} \left(\int_0^{\frac{z}{2a}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - (x - a)^2}} dx\right) dz =$$

$\displaystyle\int_0^{4a^2} \left[a\sin^{-1}\frac{x - a}{a}\right]_{x=0}^{x=\frac{z}{2a}} dz = \int_0^{4a^2} a\left(\sin^{-1}\frac{z - 2a^2}{2a^2} + \frac{\pi}{2}\right) dz = 2a^3 \int_{-1}^1 \sin^{-1} t dt + 2\pi a^3 = 2\pi a^3$ となる. 従って, 求める面積は S の面積の 2 倍になるため, $4\pi a^3$ である.

(6) $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \leqq a^2\right\}$ とおく. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $[0, a] \times [0, 2\pi]$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は r だから, 求める体積は $\displaystyle\iint_D \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x^2+y^2}} + e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\right) dxdy = \iint_{[0, a] \times [0, 2\pi]} \frac{r}{2}\left(e^r + e^{-r}\right) drd\theta = \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \frac{r}{2}\left(e^r + e^{-r}\right) d\theta\right) dr =$ $\displaystyle\int_0^\pi ar\left(e^r + e^{-r}\right) dr = \left[\pi r\left(e^r - e^{-r}\right)\right]_0^a - \int_0^\pi a\left(e^r - e^{-r}\right) dr = \pi a\left(e^a - e^{-a}\right) - \left[\pi\left(e^r + e^{-r}\right)\right]_0^a =$

$2\pi + \pi e^a(a-1) - \pi e^{-a}(a+1)$ である.

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left(e^{\sqrt{x^2+y^2}} - e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left(e^{\sqrt{x^2+y^2}} - e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ だから, 求める面積は $\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy = \iint_D \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x^2+y^2}} + e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy = 2\pi + \pi e^a(a-1) - \pi e^{-a}(a+1)$ である.

(7) $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq a,\ -\sqrt{x(a-x)} \leqq y \leqq \sqrt{x(a-x)}\right\}$ だから, 求める体積は $\displaystyle\iint_D 2\sqrt{ax}dxdy = \int_0^a \left(\int_{-\sqrt{x(a-x)}}^{\sqrt{x(a-x)}} 2\sqrt{ax}dy\right)dx = \int_0^a 4\sqrt{a}x\sqrt{a-x}dx = \left[-\frac{8}{3}\sqrt{a}x(a-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a + \int_0^a \frac{8}{3}\sqrt{a}(a-x)^{\frac{3}{2}}dx = \left[-\frac{16}{15}\sqrt{a}(a-x)^{\frac{5}{2}}\right]_0^a = \frac{16a^3}{15}$ である.

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ だから, 求める面積は $\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy = \iint_D \sqrt{1+\frac{a}{x}}dxdy = \int_0^a \left(\int_{-\sqrt{x(a-x)}}^{\sqrt{x(a-x)}} \sqrt{\frac{a+x}{x}}dy\right)dx = \int_0^a 2\sqrt{x(a-x)}\sqrt{\frac{a+x}{x}}dx = 2\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$ で与えられる. ここで, $x = a\sin t$ とおけば, $dx = a\cos t dt$ であり, t が 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くとき, x は 0 から 1 まで動くため, $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2(1+\cos 2t)}{2}dt = \left[\frac{a^2(2t+\sin 2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$ である. 故に求める面積は $\dfrac{\pi a^2}{2}$ である.

(8) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには $\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right) \in [0,a] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ であることが必要十分である. この変数変換のヤコビ行列式は r だから, 求める体積は $\displaystyle\iint_D cxydxdy = \iint_{[0,a]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} cr^3\sin\theta\cos\theta drd\theta$ $\displaystyle\int_0^a \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cr^3}{2}\sin 2\theta d\theta\right)dr = \int_0^a \left[-\frac{cr^3}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \int_0^a \frac{cr^3}{2}dr = \frac{a^4c}{8}$ である.

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = cy$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = cx$ だから, 求める面積は, $\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy = \iint_D \sqrt{1+c^2(x^2+y^2)}dxdy = \iint_{[0,a]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} r\sqrt{1+c^2r^2}drd\theta = \int_0^a \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sqrt{1+c^2r^2}d\theta\right)dr = \int_0^a \frac{\pi r}{2}\sqrt{1+cr^2}dr = \left[\frac{\pi}{6c}\left(1+c^2r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{\pi}{6c^2}\left(\left(1+a^2c^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)$.

(9) $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leqq a^2,\ x^2+y^2 \geqq ax,\ x^2+y^2 \geqq -ax\right\} = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leqq a^2,\ x^2+y^2 \geqq a|x|\right\}$ とおき, 球面 $x^2+y^2+z^2 = a^2$ の内部から 2 つの円柱面 $x^2+y^2 = ax$ と $x^2+y^2 = -ax$ の内側の部分を除いた部分を D とすれば, $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in E,\ -\sqrt{a^2-x^2-y^2} \leqq z \leqq \sqrt{a^2-x^2-y^2}\right\}$ となるため, D の体積は $\displaystyle\iiint_D dxdydz = \iint_E 2\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$ で与えられる. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ とおくと, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in E$ であるためには $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ かつ $a|\cos\theta| \leqq r \leqq a$ であることが必要十分である. この変数変換のヤコビ行列式は r だから, $F = \left\{\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ a|\cos\theta| \leqq r \leqq a\right\}$ とおけば, D の体積は $\displaystyle\iint_E 2\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_{a|\cos\theta|}^a 2r\sqrt{a^2-r^2}dr\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{2}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=a|\cos\theta|}^{r=a} d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{2a^3}{3}|\sin\theta|^3 d\theta = \frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta = \frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta = \frac{8a^3}{3}\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16a^3}{9}$ である.

球面 $x^2+y^2+z^2 = a^2$ から 2 つの円柱面 $x^2+y^2 = ax$ と $x^2+y^2 = -ax$ の内側にある部分を除いた部分を S とする. S_+ を S の z 座標が 0 以上である点全体からなる部分, S_- を S の z 座標が 0 以下である点全体からなる部分とすれば, S_+ と S_- の面積は等しく, S の面積はこれらの面積の和になる. S_+ は $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ で

与えられる関数 $f:E\to\boldsymbol{R}$ のグラフであり，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ だから，S_+ の面積は $\displaystyle\iint_E\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy=\iint_E\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$ で与えられる．$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\quad(r\geqq 0,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ とおくと，$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in E$ であるためには $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ かつ $a|\cos\theta|\leqq r\leqq a$ であることが必要十分である．この変数変換のヤコビ行列式は r だから，$F=\left\{\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq\theta\leqq 2\pi,\ a|\cos\theta|\leqq r\leqq a\right\}$ とおけば，S_+ の面積は $\displaystyle\iint_E\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}\left(\int_{a|\cos\theta|}^a\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}dr\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\Big[-a\sqrt{a^2-r^2}\Big]_{r=a|\cos\theta|}^{r=a}d\theta=\int_0^{2\pi}a^2|\sin\theta|d\theta=$ $\displaystyle 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta=4a^2$ である．S の面積は S_+ の面積の 2 倍だから $8a^2$ である．

(10) $D_1,D_2,\dots,D_n$ の中心は半径 R の円に内接する正 n 角形の頂点にあるため，D_k と D_{k+1} $(k=1,2,\dots,n-1)$ および D_n と D_1 の中心間の距離はすべて $2R\sin\dfrac{\pi}{n}$ であり，z 軸を軸とした $\dfrac{2\pi}{n}$ の回転移動で，D_k $(k=1,2,\dots,n-1)$ は D_{k+1} に写され，D_n は D_1 に写される．また，z 軸を含み，$\left(\begin{smallmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\0\end{smallmatrix}\right)$ を通る平面を $H(\theta)$ で表せば，D_k の中心を通る平面 $H\!\left(\frac{\pi(2k-1)}{n}\right)$ と，D_k と D_{k+1} の交線を含む平面 $H\!\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$ $(k=1,2,\dots,n-1)$，D_n と D_1 の交線を含む平面 $H(0)$ に関して $D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_n$ は対称である．D_1 の $H(0)$ と $H\!\left(\frac{\pi}{n}\right)$ にはさまれた部分を E とすれば，$D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_n$ の体積は E の体積の $2n$ 倍であり，表面積は D_1 の表面に含まれる E の表面の面積の $2n$ 倍である．D_1 の中心 $\left(\begin{smallmatrix}R\cos\frac{\pi}{n}\\R\sin\frac{\pi}{n}\\0\end{smallmatrix}\right)$ から xz 平面である $H(0)$ までの距離は $R\sin\dfrac{\pi}{n}$ だから，E は半径が r の半球から，中心からの距離が $R\sin\dfrac{\pi}{n}$ である平面に関して中心と反対側の部分を切り取った図形である．この切り取った部分は，xy 平面の領域 $A=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,R\sin\dfrac{\pi}{n}\leqq x\leqq r,\ 0\leqq y\leqq\sqrt{r^2-x^2}\right\}$ を x 軸の回りに回転させて得られる回転体と合同だから，その体積は $\displaystyle\int_{R\sin\frac{\pi}{n}}^r\pi(r^2-x^2)\,dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{R\sin\frac{\pi}{n}}^r=\frac{\pi}{3}\Big(r-R\sin\frac{\pi}{n}\Big)^2\Big(2r+R\sin\frac{\pi}{n}\Big)$ である．また，半径 r の半円 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ の $R\sin\dfrac{\pi}{n}\leqq x\leqq r$ の部分を x 軸の回りに回転させて得られる回転面の面積は $\displaystyle\int_{R\sin\frac{\pi}{n}}^r 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_{R\sin\frac{\pi}{n}}^r 2\pi r\,dx=2\pi r\Big(r-R\sin\frac{\pi}{n}\Big)$ である．半径が r の半球の体積は $\dfrac{2}{3}\pi r^3$ だから E の体積は $\dfrac{2}{3}\pi r^3-\dfrac{\pi}{3}\Big(r-R\sin\dfrac{\pi}{n}\Big)^2\Big(2r+R\sin\dfrac{\pi}{n}\Big)=\dfrac{\pi R}{3}\sin\dfrac{\pi}{n}\Big(3r^2-R^2\sin^2\dfrac{\pi}{n}\Big)$ であり，E の赤道面以外の部分の表面積は $2\pi r^2$ だから，E の表面で，D_1 の表面に含まれる E の表面の面積は $2\pi r^2-2\pi r\Big(r-R\sin\dfrac{\pi}{n}\Big)=2\pi rR\sin\dfrac{\pi}{n}$ である．以上から $D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_n$ の体積と表面積は，それぞれ $\dfrac{2\pi nR}{3}\sin\dfrac{\pi}{n}\Big(3r^2-R^2\sin^2\dfrac{\pi}{n}\Big)$，$4\pi nrR\sin\dfrac{\pi}{n}$ である．

(11) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,b\leqq x\leqq c,\ |y|\leqq\sqrt{a^2-x^2}\right\}$ より，求める面積は $\displaystyle\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=$ $\displaystyle\int_b^c\left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dy\right)dx=\int_b^c\left[a\sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int_b^c\pi a\,dx=\pi a(c-b)$ である．

(12) 極座標変換 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を行うと，D は $E=[1,2]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ に対応するため，求める体積は $\displaystyle\iint_D\frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy=\iint_E\sin\theta\,drd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_1^2\sin\theta\,dr\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=1$ である．また，$z_x=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$，$z_y=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ だから，与えられた曲面の面積は $\displaystyle\iint_D\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}dxdy=\iint_D\frac{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}{x^2+y^2}dxdy=$ $\displaystyle\iint_E\frac{\sqrt{1+r^4}}{r}drd\theta=\int_1^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1+r^4}}{r}d\theta\right)dr=\int_1^2\frac{\pi\sqrt{1+r^4}}{2r}dr$ で与えられる．ここで $t=\sqrt{1+r^4}$ とおいて置換積分を行うと，上式は $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}}\frac{\pi t^2}{4(t^2-1)}dt=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}}\frac{\pi}{8}\left(2+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{\pi}{8}\left[2t+\log(t-1)-\log(t+1)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{17}}$ $=\dfrac{\pi}{8}\left(2\sqrt{17}-2\sqrt{2}+\log\left(9-\sqrt{17}\right)+\log\left(3+2\sqrt{2}\right)-3\log 2\right)$ となる．

(13) 極座標変換 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を行うと，D は $E=\left\{\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2},\ 0\leqq r\leqq a\cos\theta\right\}$ に対応するため，求める体積は $\displaystyle\iint_D\frac{1}{c}(x^2+y^2)\,dxdy=\iint_E\frac{r^3}{c}\,drd\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{a\cos\theta}\frac{r^3}{c}\,dr\right)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^4\cos^4\theta}{4c}\,d\theta=$

$\dfrac{a^4}{2c}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta = \dfrac{3\pi a^4}{32c}$ である.

3. (1) D は xz 平面の曲線 $x = \log z$ $(1 \leqq z \leqq e)$ を x 軸のまわりに回転させてできる回転体だから, D の体積は $\displaystyle\int_1^e \pi x^2 dz = \int_1^e \pi(\log z)^2 dz = [\pi z(\log z)^2]_1^e - \int_1^e 2\pi\log z dz = e\pi - [2\pi z\log z]_1^e + \int_1^e 2\pi dz = \pi(e-2)$ である.

(2) $a \leqq 0$ の場合, $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq 0,\, 0 \leqq y \leqq \dfrac{c}{a}(a-x)\right\} \cup \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq b,\, 0 \leqq y \leqq \dfrac{c}{b}(b-x)\right\}$ だから $\displaystyle\iint_E (x^2+y^2)dxdy = \int_a^0\left(\int_0^{\frac{c}{a}(a-x)}(x^2+y^2)dy\right)dx + \int_0^b\left(\int_0^{\frac{c}{b}(b-x)}(x^2+y^2)dy\right)dx =$ $\displaystyle\int_a^0\left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=\frac{c}{a}(a-x)}dx + \int_0^b\left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=\frac{c}{b}(b-x)}dx = \int_a^0 \frac{c(a^3c^2 - 3a^2c^2x + 3a(a^2+c^2)x^2 - (3a^2+c^2)x^3)}{3a^3}dx$ $\displaystyle + \int_0^b \frac{c(b^3c^2 - 3b^2c^2x + 3b(b^2+c^2)x^2 - (3b^2+c^2)x^3)}{3b^3}dx = \frac{c(b-a)}{12}(a^2+b^2+c^2+ab)$. $a > 0$ の場合, $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq a,\, \dfrac{c}{a}(a-x) \leqq y \leqq \dfrac{c}{b}(b-x)\right\} \cup \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, a \leqq x \leqq b,\, 0 \leqq y \leqq \dfrac{c}{b}(b-x)\right\}$ だから $\displaystyle\iint_E (x^2+y^2)dxdy = \int_0^a\left(\int_{\frac{c}{a}(a-x)}^{\frac{c}{b}(b-x)}(x^2+y^2)dy\right)dx + \int_a^b\left(\int_0^{\frac{c}{b}(b-x)}(x^2+y^2)dy\right)dx =$ $\dfrac{c(b-a)}{12}(a^2+b^2+c^2+ab)$. 故に, いずれの場合でも D の体積は $\dfrac{c(b-a)}{12}(a^2+b^2+c^2+ab)$ である.

(3) $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 0,\, 0 \leqq y \leqq \cosh x\right\}$ とおけば, D の体積は $\displaystyle\iint_E y\tanh x\, dxdy =$ $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^{\cosh x} y\tanh x\, dy\right)dx = \int_0^1\left(\frac{1}{2}\cosh x\sinh x\right)dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \sinh 2x\, dx = \frac{1}{8}(\cosh 2 - 1) = \frac{(e^2-1)^2}{16e^2}$.

(4) $A = \left\{\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2},\, 0 \leqq r \leqq \dfrac{2a\theta}{\pi}\right\}$ とおき, 写像 $\varphi: A \to E$ を $\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)$ で定めれば, φ は全単射で, φ のヤコビ行列式は r である. D の体積は $\displaystyle\iiint_D dxdydz = \iint_E\left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dz\right)dxdy =$ $\displaystyle\iint_E 2\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy = \iint_A 2r\sqrt{a^2-r^2}\,drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{2a\theta}{\pi}} 2r\sqrt{a^2-r^2}\,dr\right)d\theta =$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{2}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=\frac{2a\theta}{\pi}}d\theta = \frac{2a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\theta^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)d\theta = \frac{\pi a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t - \cos^4 t)dt = \frac{\pi a^2}{3}\left(1 - \frac{3\pi}{16}\right)$.
(上の計算で, $\theta = \dfrac{\pi}{2}\sin t$ と変数転換を行った.)

(5) $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\\s\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\, |s| \leqq b,\, 0 \leqq r \leqq \sqrt{a^2+s^2}\right\}$ とおき, 写像 $\varphi: E \to D$ を $\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\\s\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\\s\end{smallmatrix}\right)$ で定めれば, φ は全射で, 体積が 0 の部分を除いて単射であり, φ のヤコビ行列式は r である.
さらに $A = \left\{\left(\begin{smallmatrix}r\\s\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, |s| \leqq b,\, 0 \leqq r \leqq \sqrt{a^2+s^2}\right\}$ とおくと D の体積は $\displaystyle\iiint_D dxdydz = \iiint_E r\,drd\theta ds =$ $\displaystyle\iint_E\left(\int_0^{2\pi} r\,d\theta\right)drds = \iint_A 2\pi r\,drds = \int_{-b}^b\left(\int_0^{\sqrt{a^2+s^2}} 2\pi r\,dr\right)ds = \int_{-b}^{\pi} b(a^2+s^2)\,ds = 2\pi b\left(a^2 + \frac{b^2}{3}\right)$.

(6) $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1\right\}$ とおけば $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in E,\, |z| \leqq c\sqrt[k]{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}\right\}$ である. 写像 $\varphi: [0,1]\times[0,2\pi] \to E$ を $\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}ar\cos\theta\\br\sin\theta\end{smallmatrix}\right)$ で定めれば, φ は全射で, 面積が 0 の部分を除いて単射であり, φ のヤコビ行列式は abr である. D の体積は $\displaystyle\iiint_D dxdydz = \iint_E 2c\sqrt[k]{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy = \int_0^1\left(\int_0^{2\pi} 2abcr\sqrt[k]{1-r^2}\,d\theta\right)dr$ $\displaystyle = \int_0^1 4\pi abcr\sqrt[k]{1-r^2}\,dr = \left[-\frac{2\pi abck}{k+1}(1-r^2)^{\frac{k+1}{k}}\right]_0^1 = \frac{2\pi abck}{k+1}$

4. (1) $D \cap E$ は xz 平面の曲線 $x = \begin{cases}\sqrt{2z-z^2} & 0 \leqq z \leqq \frac{3}{2}\\ \sqrt{3-z^2} & \frac{3}{2} \leqq z \leqq \sqrt{3}\end{cases}$ を z 軸の回りに 1 回転した回転体である. 従って, $D \cap E$ の体積は $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\pi x^2 dz = \int_0^{\frac{3}{2}}\pi\left(2z - z^2\right)dz + \int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}}\pi\left(3 - z^2\right)dz = \left[\pi\left(z - \frac{z^3}{3}\right)\right]_0^{\frac{3}{2}} + \left[\pi\left(3z - \frac{z^3}{3}\right)\right]_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}} =$

$\pi\left(2\sqrt{3}-3\right)$ であり, 面積は $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}dz = \int_0^{\frac{3}{2}} 2\pi\sqrt{2z-z^2}\sqrt{1+\left(\frac{1-z}{\sqrt{2z-z^2}}\right)^2}dz+$
$\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}} 2\pi\sqrt{3-z^2}\sqrt{1+\left(\frac{-z}{\sqrt{3-z^2}}\right)^2}dz = \int_0^{\frac{3}{2}} 2\pi dz + \int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}} 2\sqrt{3}\pi dz = 3\pi\left(3-\sqrt{3}\right)$ である.

(2) $A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \, x^2+y^2 \leqq 1 \right\}$ とおけば, $D \cap E$ は縦線集合 $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \middle| \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in A,\, |z| \leqq \sqrt{4-x^2-y^2} \right\}$ である. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と変数変換すれば A は面積 0 の部分を除いて $[0,1]\times[0,2\pi]$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は $\left|\begin{smallmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{smallmatrix}\right| = r$ だから, $D \cap E$ の体積は $\displaystyle\iiint_{D\cap E} dxdydz =$
$\displaystyle\iint_A \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\right) dxdy = \iint_A 2\sqrt{4-x^2-y^2}dxdy = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} 2r\sqrt{4-r^2}drd\theta =$
$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} 2r\sqrt{4-r^2}d\theta\right) dr = \int_0^1 4\pi r\sqrt{4-r^2}dr = \left[-\frac{4\pi}{3}\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right)$ である. D の表面と E の表面の交わりは, 平面 $z=\sqrt{3}$ と $z=-\sqrt{3}$ 上にあるため, $D\cap E$ の表面のうち, E の表面の部分は, xz 平面の直線 $x=1$ の $-\sqrt{3} \leqq z \leqq \sqrt{3}$ の部分を z 軸の回りに 1 回転した円柱面である. 従って, その部分の面積は $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 2\pi dz = 4\sqrt{3}\pi$ である. また, $D \cap E$ の表面のうち, D の表面の部分は, xz 平面の円 $x^2+z^2=4$ の $-2 \leqq z \leqq -\sqrt{3}$ と $\sqrt{3} \leqq z \leqq 2$ の部分を z 軸の回りに 1 回転した回転体であるため, その部分の面積は問題 1 の (1) の結果から $8\pi\left(2-\sqrt{3}\right)$ である. 以上から $D \cap E$ の表面積は $4\sqrt{3}\pi + 8\pi\left(2-\sqrt{3}\right) = 4\pi\left(4-\sqrt{3}\right)$ である.

(3) $D \cap E$ は xz 平面の曲線 $x = \begin{cases} \sqrt{5-(z-3)^2} & 3-\sqrt{5} \leqq z \leqq 1,\, 4 \leqq z \leqq 3+\sqrt{5} \\ \sqrt{z} & 1 \leqq z \leqq 4 \end{cases}$ を z 軸の回りに 1 回転した回転体だから, $D \cap E$ の体積は $\displaystyle\int_{3-\sqrt{5}}^{3+\sqrt{5}} \pi x^2 dz = \int_{3-\sqrt{5}}^1 \pi\left(5-(z-3)^2\right)dz + \int_1^4 \pi z dz + \int_4^{3+\sqrt{5}} \pi\left(5-(z-3)^2\right)dz =$
$\displaystyle\left[\pi\left(5z-\frac{(z-3)^3}{3}\right)\right]_{3-\sqrt{5}}^1 + \left[\frac{\pi z^2}{2}\right]_1^4 + \left[\pi\left(5z-\frac{(z-3)^3}{3}\right)\right]_4^{3+\sqrt{5}} = \pi\left(\frac{20\sqrt{5}}{3}-\frac{9}{2}\right)$ であり, 面積は
$\displaystyle\int_{3-\sqrt{5}}^{3+\sqrt{5}} 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}dz = \int_{3-\sqrt{5}}^1 2\pi\sqrt{5-(z-3)^2}\sqrt{1+\left(\frac{-z+3}{\sqrt{5-(z-3)^2}}\right)^2}dz + \int_1^4 2\pi\sqrt{z}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{z}}\right)^2}dz+$
$\displaystyle\int_4^{3+\sqrt{5}} 2\pi\sqrt{5-(z-3)^2}\sqrt{1+\left(\frac{-z+3}{\sqrt{5-(z-3)^2}}\right)^2}dz = \int_{3-\sqrt{5}}^1 2\sqrt{5}\pi dz + \int_1^4 \pi\sqrt{4z+1}dz + \int_4^{3+\sqrt{5}} 2\sqrt{5}\pi dz =$
$\displaystyle 2\sqrt{5}\pi\left(\sqrt{5}-2\right) + \left[\frac{\pi}{6}\left(4z+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 + 2\sqrt{5}\pi\left(\sqrt{5}-1\right) = \pi\left(20+\frac{17\sqrt{17}}{6}-\frac{41\sqrt{5}}{6}\right)$ である.

(4) $D \cap E$ は xz 平面の曲線 $x = \begin{cases} 1 & 0 \leqq z \leqq 1 \\ \sqrt{2-z} & 1 \leqq z \leqq 2 \end{cases}$ を z 軸の回りに 1 回転した回転体だから, $D \cap E$ の体積は $\displaystyle\int_0^2 \pi x^2 dz = \int_0^1 \pi dz + \int_1^2 \pi(2-z)dz = \pi + \left[-\frac{\pi(2-z)^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3\pi}{2}$ である. D の表面と E の表面の交わりは, 平面 $z=1$ 上にあるため, $D \cap E$ の表面のうち, E の表面の部分は, xz 平面の直線 $x=1$ の $0 \leqq z \leqq 1$ の部分を z 軸の回りに 1 回転した円柱面と xy 平面上の原点を中心とする単位円板である. 従って, その部分の面積は $\displaystyle\int_0^1 2\pi dz + \pi = 3\pi$ である. また, $D\cap E$ の表面のうち, D に含まれる部分は, xz 平面の放物線 $x=\sqrt{2-z}$ の $1 \leqq z \leqq 2$ の部分を z 軸の回りに 1 回転した回転体であるため, その部分の面積は $\displaystyle\int_1^2 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}dz = \int_1^2 2\pi\sqrt{2-z}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{2\sqrt{2-z}}\right)^2}dz =$
$\displaystyle\int_1^2 \pi\sqrt{9-4z}dz = \left[-\frac{\pi}{6}\left(9-4z\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$ である. 以上から $D \cap E$ の表面積は $3\pi + \dfrac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right) = \dfrac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}+17\right)$ である.

(5) $D\cap E$ は xz 平面の曲線 $x=\begin{cases}\sqrt{2}x & 0\leqq z\leqq 1\\ \sqrt{3-z} & 1\leqq z\leqq 3\end{cases}$ を z 軸の回りに 1 回転した回転体だから, $D\cap E$ の体積は $\displaystyle\int_0^3 \pi x^2dz=\int_0^1 2\pi x^2dz+\int_1^3 \pi(3-z)dz=\left[\frac{2\pi x^3}{3}\right]_0^1+\left[-\frac{\pi(3-z)^2}{2}\right]_1^3=\frac{8\pi}{3}$ である. D の表面と E の表面の交わりは, 平面 $z=1$ 上にあるため, $D\cap E$ の表面のうち, E の表面の部分は, xz 平面の直線 $x=\sqrt{2}z$ の $0\leqq z\leqq 1$ の部分を z 軸の回りに 1 回転した円錐面である. 従って, その部分の面積は $\displaystyle\int_0^1 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}dz=\int_0^1 2\sqrt{6}\pi z=\sqrt{6}\pi$ である. また, $D\cap E$ の表面のうち, D の表面の部分は, xz 平面の放物線 $x=\sqrt{3-z}$ の $1\leqq z\leqq 3$ の部分を z 軸の回りに 1 回転した回転体であるため, その部分の面積は $\displaystyle\int_1^3 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}dz=\int_1^3 2\pi\sqrt{3-z}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{2\sqrt{3-z}}\right)^2}dz=\int_1^3 \pi\sqrt{13-4z}dz=\left[-\frac{\pi}{6}(13-4z)^{\frac{3}{2}}\right]_1^3=\frac{13\pi}{3}$ である. 以上から $D\cap E$ の表面積は $\sqrt{6}\pi+\dfrac{13\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}\left(3\sqrt{6}+13\right)$ である.

(6) $A=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2\,\middle|\, x^2+y^2\leqq x\right\}$ とおけば, $D\cap E$ は縦線集合 $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in A,\ 0\leqq z\leqq 1-\sqrt{x^2+y^2}\right\}$ である. $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ $(r\geqq 0,\ -\pi\leqq\theta\leqq\pi)$ と変数変換すれば A は面積 0 の部分を除いて $r\theta$ 平面の縦線集合 $B=\left\{\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2},\ 0\leqq r\leqq\cos\theta\right\}$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は $\left|\begin{smallmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{smallmatrix}\right|=r$ だから, $D\cap E$ の体積は $\displaystyle\iiint_{D\cap E}dxdydz=\iint_A\left(\int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}}dz\right)dxdy=\iint_A\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=\iint_B r(1-r)\,drd\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\cos\theta}\left(r-r^2\right)dr\right)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=\cos\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2\theta}{2}-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{4}-\frac{\cos\theta(1-\sin^2\theta)}{3}\right)d\theta=\left[\frac{\theta}{4}+\frac{\sin 2\theta}{8}-\frac{\sin\theta}{3}+\frac{\sin^3\theta}{9}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}-\frac{4}{9}$ である.
$D\cap E$ の表面のうち, E の表面の部分は, $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,x^2+y^2=x\leqq(1-z)^2,\ 0\leqq z\leqq 1\right\}$ だから, xz 平面上の縦線集合 $C=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq z\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq(1-z)^2\right\}$ を考えると, $S=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)\in C,\ y=\sqrt{x-x^2}\right\}$ と $T=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)\in C,\ y=-\sqrt{x-x^2}\right\}$ の合併集合である. S の面積は $\displaystyle\iint_C\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}dxdz=\iint_C\sqrt{1+\left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}\right)^2}dxdz=\int_0^1\left(\int_0^{(1-z)^2}\frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}dx\right)dz=\int_0^1\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}(2x-1)\right]_{x=0}^{x=(1-z)^2}dz=\int_0^1\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(2z^2-4z+1\right)dz+\int_0^1\frac{\pi}{4}dz=\left[\frac{z-1}{2}\sin^{-1}\left(2z^2-4z+1\right)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1-z}{\sqrt{2z-z^2}}dz+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-\left[\sqrt{2z-z^2}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}-1$ であり, T は xz 平面に関して S と対称な曲面であるため, その面積は S の面積と等しい. 従って, $D\cap E$ の表面のうち, E の表面の部分の面積は $\pi-2$ である. $D\cap E$ の表面のうち, D の表面の部分は, A と円錐面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ で A の上にある部分の合併集合である. A は半径 $\dfrac{1}{2}$ の円板だから, その面積は $\dfrac{\pi}{4}$ であり, 円錐面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ で A の上にある部分の面積は, $\displaystyle\iint_A\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\iint_A\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}dxdy=\sqrt{2}\iint_A dxdy=\sqrt{2}(A\text{ の面積})=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ である. 故に $D\cap E$ の表面のうち, D の表面の部分の面積は $\dfrac{\pi}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)$ である. 以上から $D\cap E$ の表面積は $\pi-2+\dfrac{\pi}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}\left(5+\sqrt{2}\right)-2$ である.

(7) $A=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\leqq\frac{a^2}{4}\right\}$ とおけば, $D\cap E$ は縦線集合 $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in A,\ |z|\leqq\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right\}$

である. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0,\ -\pi \leqq \theta \leqq \pi)$ と変数変換すれば A は面積 0 の部分を除いて $r\theta$ 平面の縦線集合 $B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq r \leqq a\cos\theta \right\}$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は $\left|\begin{smallmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{smallmatrix}\right| = r$ だから, $D \cap E$ の体積は $\displaystyle\iiint_{D\cap E} dxdydz = \iint_A \left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz \right) dxdy = \iint_A 2\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy =$ $\displaystyle\iint_B 2r\sqrt{a^2-r^2}drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a\cos\theta} 2r\sqrt{a^2-r^2}dr \right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{2}{3}\left(a^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_{r=0}^{r=a\cos\theta} d\theta =$ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a^3}{3}\left(1 - \left|\sin^3\theta\right|\right) d\theta = \frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin\theta\left(1-\cos^2\theta\right)\right) d\theta = \frac{4a^3}{3}\left[\theta + \cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a^3(3\pi-4)}{9}$ である. $D \cap E$ の表面のうち, E の表面の部分は, $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2 = ax \leqq a^2-z^2,\ -a \leqq z \leqq a \right\}$ だから, xz 平面上の縦線集合 $C = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, -a \leqq z \leqq a,\ 0 \leqq x \leqq a - \frac{z^2}{a} \right\}$ を考えると, $S = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right) \in C,\ y = \sqrt{ax-x^2} \right\}$ と $T = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right) \in C,\ y = -\sqrt{ax-x^2} \right\}$ の合併集合である. S の面積は $\displaystyle\iint_C \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dxdz =$ $\displaystyle\iint_C \sqrt{1 + \left(\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}\right)^2} dxdz = \int_{-a}^a \left(\int_0^{a-\frac{z^2}{a}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{a}-1\right)^2}} dx \right) dz = \int_{-a}^a \left[\frac{a}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x}{a}-1\right) \right]_{x=0}^{x=a-\frac{z^2}{a}} dz =$ $\displaystyle\int_{-a}^a \frac{a}{2}\sin^{-1}\left(1-\frac{2z^2}{a^2}\right) dz + \int_{-a}^a \frac{\pi a}{4} dz = \int_0^a a\sin^{-1}\left(1-\frac{2z^2}{a^2}\right) dz + \frac{\pi a^2}{2} = \left[az\sin^{-1}\left(1-\frac{2z^2}{a^2}\right) \right]_0^a -$ $\displaystyle\int_0^a \frac{-2az}{\sqrt{a^2-z^2}} dz + \frac{\pi a^2}{2} = -\left[2a\sqrt{a^2-z^2} \right]_0^a = 2a^2$ であり, T は xz 平面に関して S と対称な曲面であるため, その面積は S の面積と等しい. 従って, $D \cap E$ の表面のうち, E の表面の部分の面積は $4a^2$ である. $D \cap E$ の表面のうち, D の表面の部分は, A の上下にある半球面 $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $z = -\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ の部分の合併集合である. 上と同様の変数変換を行えば, 半球面 $z = \sqrt{a-x^2-y^2}$ で A の上にある部分の面積は, $\displaystyle\iint_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy =$ $\displaystyle\iint_A \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2} dxdy = \iint_A \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dxdy = \iint_B \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}} drd\theta =$ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a\cos\theta} \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}} dr \right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-a\sqrt{a^2-r^2} \right]_{r=0}^{r=a\cos\theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2(1-|\sin\theta|)d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2(1-\sin\theta)d\theta =$ $2\left[a^2(\theta+\cos\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2(\pi-2)$ である. 半球面 $z = -\sqrt{a-x^2-y^2}$ で A の下にある部分は, 半球面 $z = \sqrt{a-x^2-y^2}$ で A の上にある部分と xy 平面に関して対称な曲面であるため, その面積は半球面 $z = \sqrt{a-x^2-y^2}$ で A の上にある部分の面積と等しい. 故に $D \cap E$ の表面のうち, D の表面の部分の面積は $2a^2(\pi-2)$ である. 以上から $D \cap E$ の表面積は $4a^2 + 2a^2(\pi-2) = 2\pi a^2$ である.

(8) $r \leqq \sqrt{a^2+R^2}$ より, $\sqrt{r^2-x^2} \leqq \sqrt{a^2+R^2-x^2} \leqq a + \sqrt{R^2-x^2}$ であり, $a - \sqrt{R^2-x^2} \leqq \sqrt{r^2-x^2}$ を満たす x の範囲は, この不等式の両辺を 2 乗することにより, $|x| \leqq \sqrt{R^2 - \left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}$ であることがわかる. 従って, $D \cap E$ は xy 平面上の縦線集合 $A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, |x| \leqq \sqrt{R^2 - \left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2},\ a - \sqrt{R^2-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{r^2-x^2} \right\}$ を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体である. よって, この回転体の体積は以下の積分で与えられる.

$$\int_{-\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}}^{\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}} \pi\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx - \int_{-\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}}^{\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}} \pi\left(a - \sqrt{R^2-x^2}\right)^2 dx$$

$\displaystyle\int_{-\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}}^{\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}} \pi\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx = 2\int_0^{\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}} \pi\left(r^2-x^2\right)dx = 2\pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}} =$ $\displaystyle\frac{2\pi}{3}\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}\left(3r^2 - R^2 + \left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2\right)$. $\displaystyle\int 2\sqrt{R^2-x^2}dx = R^2\sin^{-1}\frac{x}{R} + x\sqrt{R^2-x^2}$ より

$\displaystyle\int_{-\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}}^{\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}} \pi\left(a-\sqrt{R^2-x^2}\right)^2 dx = 2\int_0^{\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}} \pi\left(a^2+R^2-x^2-2a\sqrt{R^2-x^2}\right)dx =$

$\displaystyle 2\pi\left[(a^2+R^2)x-\frac{x^3}{3}-aR^2\sin^{-1}\frac{x}{R}-ax\sqrt{R^2-x^2}\right]_0^{\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}} =$

$\displaystyle \frac{2\pi}{3}\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}\left(3a^2+2R^2+\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2\right)-2\pi aR^2\sin^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2aR}\right)^2}-$

$\displaystyle \pi\left(a^2+R^2-r^2\right)\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}$ となるため, $D\cap E$ の体積は

$\displaystyle 2\pi aR^2\sin^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2aR}\right)^2}-\pi\left(a^2+R^2-r^2\right)\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}$ で与えられる.

$D\cap E$ の表面のうち, E の表面の部分は, xy 平面の半円 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ の $|x| \leqq \sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}$ の部分を x 軸の回りに 1 回転した回転体であるため, その部分の面積は問題 1 の (1) の結果から $4\pi r\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}$ である. また, $D\cap E$ の表面のうち, D の表面の部分は, xy 平面の半円 $y=a-\sqrt{R^2-x^2}$ の $|x| \leqq \sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}$ の部分を x 軸の回りに 1 回転した回転体であるため, その部分の面積は $\displaystyle\int_{-\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}}^{\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}} 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx =$

$\displaystyle\int_{-\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}}^{\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}} 2\pi\left(a-\sqrt{R^2-x^2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}dx = 4\pi R\int_0^{\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}}\left(\frac{a}{\sqrt{R^2-x^2}}-1\right)dx =$

$\displaystyle 4\pi R\left[a\sin^{-1}\frac{x}{R}-x\right]_0^{\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}} = 4\pi aR\sin^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2aR}\right)^2}-4\pi R\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}$ である.

以上から $D\cap E$ の表面積は $\displaystyle 4\pi aR\sin^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2aR}\right)^2}+4\pi(r-R)\sqrt{R^2-\left(\frac{a^2+R^2-r^2}{2a}\right)^2}$ である.

5. (1) $f_r, f_\theta : [0,a]\times[0,2\pi] \to \boldsymbol{R}^3$ を $f_r\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $f_\theta\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ c \end{smallmatrix}\right)$ によって定めれば, 求める面積は

$$\begin{aligned}\iint_{[0,a]\times[0,2\pi]} \|f_r\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)\times f_\theta\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)\|\,drd\theta &= \int_0^a\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{c^2+r^2}d\theta\right)dr = \int_0^a 2\pi\sqrt{c^2+r^2}dr \\ &= \pi\left[r\sqrt{c^2+r^2}+c^2\log\left(r+\sqrt{c^2+r^2}\right)\right]_0^a \\ &= \pi\left(a\sqrt{c^2+a^2}+c^2\log\left(a+\sqrt{c^2+a^2}\right)-c^2\log|c|\right).\end{aligned}$$

(2) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq r\leqq 2\pi,\ r\leqq\theta\leqq 2\pi,\ \theta\neq\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}$ とおき, $f_r, f_\theta : D\to\boldsymbol{R}^3$ を $f_r\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $f_\theta\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ によって定めれば, 求める面積は

$$\begin{aligned}\iint_D \|f_r\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)\times f_\theta\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)\|\,drd\theta &= \int_0^{2\pi}\left(\int_r^{2\pi}\sqrt{1+r^2}d\theta\right)dr = \int_0^{2\pi}2\pi\sqrt{1+r^2}dr-\int_0^{2\pi}r\sqrt{1+r^2}dr \\ &= \pi\left[r\sqrt{1+r^2}+\log\left(r+\sqrt{1+r^2}\right)\right]_0^{2\pi}-\left[\frac{1}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\pi} \\ &= \pi\log\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)+\frac{1}{3}(2\pi^2-1)\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

(3) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, s^2+t^2\leqq 1\right\}$ とおき, 写像 $f_s, f_t : D\to\boldsymbol{R}^3$ を $f_s\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $f_t\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ s \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ で定める.

$\begin{cases} s = r\cos\theta \\ t = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0,\ 0 \geqq \theta \leqq 2\pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $[0,1]\times[0,2\pi]$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は r である. 従って, 求める面積は

$$\iint_D \|f_s(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}) \times f_t(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix})\|\,dsdt = \iint_D \sqrt{2s^2+2t^2+4}\,dsdt = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{2}r\sqrt{2+r^2}d\theta\right) dr = \int_0^1 2\sqrt{2}\pi r\sqrt{2+r^2}dr$$
$$= \left[\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(2+r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \pi\left(2\sqrt{6}-\frac{8}{3}\right).$$

(4) $f_r, f_\theta : [0,1]\times[0,2\pi] \to \boldsymbol{R}^3$ を $f_r(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}) = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \\ r(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta) \end{pmatrix}$, $f_\theta(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}) = \begin{pmatrix} -ar\sin\theta \\ br\cos\theta \\ r^2(b-a)\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}$ で定めれば, 求める面積は

$$\iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \|f_r(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}) \times f_\theta(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix})\|\,drd\theta = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} abr\sqrt{1+r^2}d\theta\right) dr = \int_0^1 2\pi abr\sqrt{1+r^2}dr$$
$$= \left[\frac{2\pi ab}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2\pi ab}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

(5) $D = \left\{(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, s^2+t^2 \leqq 1\right\}$ とおき, 写像 $f_s, f_t : D \to \boldsymbol{R}^3$ を $f_s(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}) = \begin{pmatrix} 2s \\ \sqrt{2}t \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_t(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}s \\ 2t \end{pmatrix}$ で定める. $(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}) \in D$ が $f(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}) = f(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix})$ を満たすならば $(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}) = \pm(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix})$ だから, f は D の部分集合 $E = \{(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}) \in D |\, s \geqq 0\}$ を与えられた曲面の上に面積 0 の部分を除いて, 1 対 1 に写す. $\begin{cases} s = r\cos\theta \\ t = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と変数変換すれば E は面積 0 の部分を除いて $[0,1]\times[0,\pi]$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は r である. 従って, 求める面積は

$$\iint_E \|f_s(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}) \times f_t(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix})\|\,dsdt = \iint_E 2\sqrt{2}(s^2+t^2)dsdt = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} 2\sqrt{2}r^3 d\theta\right) dr = \int_0^1 2\sqrt{2}\pi r^3 dr = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

6. 与えられた曲線は θ を媒介変数として $\begin{cases} x = a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = a(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$ と表される. 与えられた曲線は x 軸に関して対称だから, $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の部分を x 軸の回りに回転させればよい. x 軸を軸として角度 φ の回転を表す行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ だから, x 軸に垂直な平面上 $x = a(1+\cos\theta)\cos\theta$ の点 $\begin{pmatrix} a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ a(1+\cos\theta)\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ を x 軸を軸として角度 φ だけ回転させた点は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ a(1+\cos\theta)\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ a(1+\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi \\ a(1+\cos\theta)\sin\theta\sin\varphi \end{pmatrix}$ である. 従って, 与えられた曲線を x 軸を軸として 1 回転して得られる回転体は $f(\begin{smallmatrix} \theta \\ \varphi \end{smallmatrix}) = \begin{pmatrix} a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ a(1+\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi \\ a(1+\cos\theta)\sin\theta\sin\varphi \end{pmatrix}$ で与えられる写像 $f : [0,\pi]\times[0,2\pi] \to \boldsymbol{R}^3$ によってパラメータ表示される曲面である. $f_\theta, f_\varphi : [0,\pi]\times[0,2\pi] \to \boldsymbol{R}^3$ を $f_\theta(\begin{smallmatrix} \theta \\ \varphi \end{smallmatrix}) = \begin{pmatrix} -a\sin\theta(2\cos\theta+1) \\ a(1+\cos\theta)(2\cos\theta-1)\cos\varphi \\ a(1+\cos\theta)(2\cos\theta-1)\sin\varphi \end{pmatrix}$, $f_\varphi(\begin{smallmatrix} \theta \\ \varphi \end{smallmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -a(1+\cos\theta)\sin\theta\sin\varphi \\ a(1+\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix}$ で定めれば, 求める面積は

$$\iint_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \left\|f_\theta(\begin{smallmatrix} \theta \\ \varphi \end{smallmatrix}) \times f_\varphi(\begin{smallmatrix} \theta \\ \varphi \end{smallmatrix})\right\| drd\theta = \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{2}a^2\sin\theta(1-\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\,d\varphi\right) d\theta = \int_0^\pi 16\pi a^2 \sin^4\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$
$$= \int_0^1 32\pi a^2 t^5\,dt = \frac{32\pi a^2}{5}.$$

7. (1) $\boldsymbol{R}^2$ の領域 E を $E = \left\{(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ (x^k+y^k)^n \leqq \alpha a^{kn-2}x^{kn-2} + \beta b^{kn-2}y^{kn-2}\right\}$ で定め, まず E の面積を求める. $(\begin{smallmatrix} r \\ t \end{smallmatrix}) \in [0,\infty)\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ を $\begin{pmatrix} r(\cos^2 t)^{\frac{1}{k}} \\ r(\sin^2 t)^{\frac{1}{k}} \end{pmatrix}$ に写す写像は

$$A = \left\{(\begin{smallmatrix} r \\ t \end{smallmatrix}) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq r \leqq \sqrt{\alpha a^{kn-2}(\cos^2 t)^{n-\frac{2}{k}} + \beta b^{kn-2}(\sin^2 t)^{n-\frac{2}{k}}}\right\}$$

を E に写し, 原点を除けば単射である. この写像のヤコビ行列式は以下で与えられる.

$$\begin{vmatrix} (\cos^2 t)^{\frac{1}{k}} & -\frac{2r}{k}\sin t(\cos^2 t)^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}} \\ (\sin^2 t)^{\frac{1}{k}} & \frac{2r}{k}\cos t(\sin^2 t)^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{2r}{k}(\cos^2 t)^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}}(\sin^2 t)^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}}$$

第 12 回の問題 4.(1) の結果から E の面積は以下のようになる.

$$\begin{aligned}\iint_E dxdy &= \iint_A \frac{2r}{k}(\cos^2 t)^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}}(\sin^2 t)^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}}drdt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sqrt{\alpha a^{kn-2}(\cos^2 t)^{n-\frac{2}{k}}+\beta b^{kn-2}(\sin^2 t)^{n-\frac{2}{k}}}} \frac{2r}{k}(\cos^2 t)^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}}(\sin^2 t)^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}}dr\right)dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k}\left(\alpha a^{kn-2}(\cos^2 t)^{n-\frac{2}{k}} + \beta b^{kn-2}(\sin^2 t)^{n-\frac{2}{k}}\right)(\cos^2 t)^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}}(\sin^2 t)^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}}dt \\ &= \frac{\alpha a^{kn-2}}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-\frac{2}{k}-1} t \sin^{\frac{2}{k}-1} t\,dt + \frac{\beta b^{kn-2}}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{k}-1} t \sin^{2n-\frac{2}{k}-1} t\,dt \\ &= \frac{\alpha a^{kn-2}}{2k}B\left(n-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) + \frac{\beta b^{kn-2}}{2k}B\left(\frac{1}{k}, n-\frac{1}{k}\right) = \frac{\alpha a^{kn-2}+\beta b^{kn-2}}{2k}B\left(n-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)\end{aligned}$$

$\binom{x}{y}$ を $\binom{ax}{by}$ に写す $\boldsymbol{R}^2$ の 1 次変換によって E は D に写され, 領域の面積は ab 倍されるため, D の面積は $\dfrac{\alpha a^{kn-1}b+\beta ab^{kn-1}}{2k}B\left(n-\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k}\right)$ である.

(2) $\boldsymbol{R}^2$ の領域 E を $E = \left\{\binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, (x+y)^n \leqq \alpha^{n-2}a^{n-2}x^{n-2} - \beta^{n-2}b^{n-2}y^{n-2}\right\}$ で定め, まず E の面積を求める. $\mu = \sqrt{\dfrac{a\alpha}{b\beta}}$ とおけば, $\alpha^{n-2}a^{n-2}(\cos^2 t)^{n-2} - \beta^{n-2}b^{n-2}(\sin^2 t)^{n-2} \geqq 0$ を満たす $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲は $0 \leqq t \leqq \tan^{-1}\mu$ である. $\binom{r}{t} \in [0,\infty)\times\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ を $\begin{pmatrix} r\cos^2 t \\ r\sin^2 t\end{pmatrix}$ に写す写像は

$$A = \left\{\binom{r}{t} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq t \leqq \tan^{-1}\mu,\, 0 \leqq r \leqq \sqrt{\alpha^{n-2}a^{n-2}(\cos^2 t)^{n-2} - \beta^{n-2}b^{n-2}(\sin^2 t)^{n-2}}\right\}$$

を E に写し, 原点を除けば単射である. この写像のヤコビ行列式は以下で与えられる.

$$\begin{vmatrix} \cos^2 t & -2r\sin t\cos t \\ \sin^2 t & 2r\cos t\sin t\end{vmatrix} = 2r\cos t\sin t$$

E の面積は, 第 2 回の問題 2.(5), (6) と $\mu^2 = \dfrac{a\alpha}{b\beta}$ より

$$\begin{aligned}\iint_E dxdy &= \iint_A 2r\cos t\sin t\,drdt = \int_0^{\tan^{-1}\mu}\left(\int_0^{\sqrt{\alpha^{n-2}a^{n-2}(\cos^2 t)^{n-2}-\beta^{n-2}b^{n-2}(\sin^2 t)^{n-2}}} 2r\cos t\sin t\,dr\right)dt \\ &= \int_0^{\tan^{-1}\mu}\left(\alpha^{n-2}a^{n-2}(\cos^2 t)^{n-2} - \beta^{n-2}b^{n-2}(\sin^2 t)^{n-2}\right)\cos t\sin t\,dt \\ &= \alpha^{n-2}a^{n-2}\int_0^{\tan^{-1}\mu} \cos^{2n-3} t\sin t\,dt - \beta^{n-2}b^{n-2}\int_0^{\tan^{-1}\mu} \sin^{2n-3} t\cos t\,dt \\ &= \alpha^{n-2}a^{n-2}\int_{\cos(\tan^{-1}\mu)}^1 s^{2n-3}\,ds - \beta^{n-2}b^{n-2}\int_0^{\sin\left(\tan^{-1}\mu\right)} s^{2n-3}\,ds \\ &= \frac{\beta^{n-2}b^{n-2}\mu^{2n-4}}{2n-2}\left(1 - \frac{1}{(1+\mu^2)^{n-2}}\right) = \frac{\alpha^{n-2}a^{n-2}}{2n-2}\left(1 - \frac{\beta^{n-2}b^{n-2}}{(\alpha a+\beta b)^{n-2}}\right)\end{aligned}$$

である. $\binom{x}{y}$ を $\binom{ax}{by}$ に写す $\boldsymbol{R}^2$ の 1 次変換によって E は D に写され, 領域の面積は ab 倍されるため, D の面積は $\dfrac{\alpha^{n-2}a^{n-1}b}{2n-2}\left(1 - \dfrac{\beta^{n-2}b^{n-2}}{(\alpha a+\beta b)^{n-2}}\right)$ である.

(3) $\boldsymbol{R}^2$ の領域 E を $E = \left\{\binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, (x^2+y^2)^n \leqq \alpha^{2n-2}a^{2n-2}x^{2n-2} - \beta^{2n-2}b^{2n-2}y^{2n-2}\right\}$ で定め, まず E の面積を求める. $\mu = \dfrac{\alpha a}{\beta b}$ とおけば, $\alpha^{2n-2}a^{2n-2}\cos^{2n-2} t - \beta^{2n-2}b^{2n-2}\sin^{2n-2} t \geqq 0$ を満たす $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$

の範囲は $0 \leqq t \leqq \tan^{-1}\mu$ である. $\left(\begin{smallmatrix} r \\ t \end{smallmatrix}\right) \in [0,\infty) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ を $\left(\begin{smallmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{smallmatrix}\right)$ に写す写像は

$$A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} r \\ t \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; 0 \leqq t \leqq \tan^{-1}\mu,\ 0 \leqq r \leqq \sqrt{\alpha^{2n-2}a^{2n-2}\cos^{2n-2} t - \beta^{2n-2}b^{2n-2}\sin^{2n-2} t} \right\}$$

を E に写し, 原点を除けば単射である. この写像のヤコビ行列式は r であり, 第 9 回の問題 6 と第 2 回の問題 2.(5), (6) の結果から E の面積は以下のようになる.

$$\begin{aligned}
\iint_E dxdy &= \iint_A r\,drdt = \int_0^{\tan^{-1}\mu}\left(\int_0^{\sqrt{\alpha^{2n-2}a^{2n-2}\cos^{2n-2} t-\beta^{2n-2}b^{2n-2}\sin^{2n-2} t}} r\,dr\right)dt \\
&= \int_0^{\tan^{-1}\mu} \frac{1}{2}\big(\alpha^{2n-2}a^{2n-2}\cos^{2n-2} t - \beta^{2n-2}b^{2n-2}\sin^{2n-2} t\big)dt \\
&= \frac{\alpha^{2n-2}a^{2n-2}}{2}\int_0^{\tan^{-1}\mu}\cos^{2n-2} t\,dt - \frac{\beta^{2n-2}b^{2n-2}}{2}\int_0^{\tan^{-1}\mu}\sin^{2n-2} t\,dt \\
&= \frac{\alpha^{2n-2}a^{2n-2}}{2}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\left(\tan^{-1}\mu + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(2i-2)!!\mu}{(2i-1)!!(1+\mu^2)^i}\right) \\
&\quad - \frac{\beta^{2n-2}b^{2n-2}}{2}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\left(\tan^{-1}\mu - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(2i-2)!!\mu^{2i-1}}{(2i-1)!!(1+\mu^2)^i}\right)
\end{aligned}$$

$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ を $\left(\begin{smallmatrix} ax \\ by \end{smallmatrix}\right)$ に写す $\boldsymbol{R}^2$ の 1 次変換によって E は D に写され, 領域の面積は ab 倍されるため, D の面積は

$$\frac{(2n-3)!!}{2(2n-2)!!}\left((\alpha^{2n-2}a^{2n-1}b - \beta^{2n-2}ab^{2n-1})\tan^{-1}\mu + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(2i-2)!!\big(\alpha^{2n-2}a^{2n-1}b\mu + \beta^{2n-2}ab^{2n-1}\mu^{2i-1}\big)}{(2i-1)!!(1+\mu^2)^i}\right)$$

である. 上式に $\mu = \dfrac{\alpha a}{\beta b}$ を代入して整理すれば次のようになる.

$$\frac{(2n-3)!!}{2(2n-2)!!}\left((\alpha^{2n-2}a^{2n-1}b - \beta^{2n-2}ab^{2n-1})\tan^{-1}\left(\frac{\alpha a}{\beta b}\right) + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(2i-2)!!\big(\alpha^{2n-1}\beta^{2i-1}a^{2n}b^{2i} + \alpha^{2i-1}\beta^{2n-1}a^{2i}b^{2n}\big)}{(2i-1)!!(\alpha^2a^2+\beta^2b^2)^i}\right)$$

(4) $\boldsymbol{R}^2$ の領域 E を $E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; (x^2+y^2)^n \leqq \alpha^{2n-1}a^{2n-1}x^{2n-1} + \beta^{2n-1}b^{2n-1}y^{2n-1} \right\}$ で定め, まず E の面積を求める. $\mu = \dfrac{\alpha a}{\beta b}$ とおけば, $\alpha^{2n-1}a^{2n-1}\cos^{2n-1} t + \beta^{2n-1}b^{2n-1}\sin^{2n-1} t \geqq 0$ を満たす $-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲は $-\tan^{-1}\mu \leqq t \leqq \pi - \tan^{-1}\mu$ である. $\left(\begin{smallmatrix} r \\ t \end{smallmatrix}\right) \in [0,\infty) \times (-\pi, \pi)$ を $\left(\begin{smallmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{smallmatrix}\right)$ に写す写像は

$$A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} r \\ t \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; -\tan^{-1}\mu \leqq t \leqq \pi - \tan^{-1}\mu,\ 0 \leqq r \leqq \alpha^{2n-1}a^{2n-1}\cos^{2n-1} t + \beta^{2n-1}b^{2n-1}\sin^{2n-1} t \right\}$$

を E に写し, 原点を除けば単射である. この写像のヤコビ行列式は r であり, 問題 2.(5), (6) の結果から

$$\begin{aligned}
\int_{-\tan^{-1}\mu}^{\pi-\tan^{-1}\mu}\cos^{2k}t\,dt &= \int_0^{\pi}\cos^{2k}(t-\tan^{-1}\mu)\,dt = \int_0^{\pi}(\cos t\cos(\tan^{-1}\mu)+\sin t\sin(\tan^{-1}\mu))^{2k}dt \\
&= \sum_{i=0}^{2k}\binom{2k}{i}\frac{\mu^i}{(1+\mu^2)^k}\int_0^{\pi}\cos^{2k-i}t\sin^i t\,dt \\
&= \sum_{i=0}^{2k}\binom{2k}{i}\frac{\mu^i}{(1+\mu^2)^k}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2k-i}t\sin^i t\,dt+(-1)^i\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^i t\sin^{2k-i}t\,dt\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k}\binom{2k}{2i}\frac{\pi(2k-1-2i)!!(2i-1)!!\mu^{2i}}{(2k)!!(1+\mu^2)^k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\tan^{-1}\mu}^{\pi-\tan^{-1}\mu}\sin^{2k}t\,dt &= \int_0^{\pi}\sin^{2k}(t-\tan^{-1}\mu)\,dt = \int_0^{\pi}(\sin t\cos(\tan^{-1}\mu)-\cos t\sin(\tan^{-1}\mu))^{2k}dt \\
&= \sum_{i=0}^{2k}\binom{2k}{i}\frac{(-1)^i\mu^i}{(1+\mu^2)^{2n-1}}\int_0^{\pi}\cos^i t\sin^{2k-i}t\,dt \\
&= \sum_{i=0}^{2k}\binom{2k}{i}\frac{(-1)^i\mu^i}{(1+\mu^2)^{2n-1}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^i t\sin^{2k-i}t\,dt+(-1)^i\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2k-i}t\sin^i t\,dt\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k}\binom{2k}{2i}\frac{\pi(2k-1-2i)!!(2i-1)!!\mu^{2i}}{(2k)!!(1+\mu^2)^k}
\end{aligned}$$

$$\int_{-\tan^{-1}\mu}^{\pi-\tan^{-1}\mu}\sin^{2n-1}2t\,dt = \int_{-\tan^{-1}\mu}^{\pi-\tan^{-1}\mu}(1-\cos^2 2t)^{n-1}\sin 2t\,dt = 0$$

だから E の面積は以下のようになる.

$$\begin{aligned}
\iint_E dxdy &= \iint_A r\,drdt = \int_{-\tan^{-1}\mu}^{\pi-\tan^{-1}\mu}\left(\int_0^{\alpha^{2n-1}a^{2n-1}\cos^{2n-1}t+\beta^{2n-1}b^{2n-1}\sin^{2n-1}t} r\,dr\right)dt \\
&= \int_{-\tan^{-1}\mu}^{\pi-\tan^{-1}\mu}\frac{1}{2}\big(\alpha^{2n-1}a^{2n-1}\cos^{2n-1}t+\beta^{2n-1}b^{2n-1}\sin^{2n-1}t\big)^2dt \\
&= \int_{-\tan^{-1}\mu}^{\pi-\tan^{-1}\mu}\left(\frac{\alpha^{4n-2}a^{4n-2}}{2}\cos^{4n-2}t+\frac{\alpha^{2n-1}\beta^{2n-1}a^{2n-1}b^{2n-1}}{2^{2n-1}}\sin^{2n-1}2t+\frac{\beta^{4n-2}b^{4n-2}}{2}\sin^{4n-2}t\right)dt \\
&= \big(\alpha^{4n-2}a^{4n-2}+\beta^{4n-2}b^{4n-2}\big)\sum_{i=0}^{2n-1}\binom{4n-2}{2i}\frac{\pi(4n-3-2i)!!(2i-1)!!\mu^{2i}}{2(4n-2)!!(1+\mu^2)^{2n-1}}
\end{aligned}$$

ここで, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ を $\left(\begin{smallmatrix}ax\\by\end{smallmatrix}\right)$ に写す $\boldsymbol{R}^2$ の 1 次変換によって E は D に写され, 領域の面積は ab 倍されるため, D の面積は

$$\big(\alpha^{4n-2}a^{4n-1}b+\beta^{4n-2}ab^{4n-1}\big)\sum_{i=0}^{2n-1}\binom{4n-2}{2i}\frac{\pi(4n-3-2i)!!(2i-1)!!\mu^{2i}}{(4n-2)!!(1+\mu^2)^{2n-1}}$$

である. 上式に $\mu=\dfrac{\alpha a}{\beta b}$ を代入して整理すれば次のようになる.

$$\big(\alpha^{4n-2}a^{4n-2}+\beta^{4n-2}b^{4n-2}\big)\sum_{i=0}^{2n-1}\binom{4n-2}{2i}\frac{\pi(4n-3-2i)!!(2i-1)!!\alpha^{2i}\beta^{4n-2-2i}a^{2i+1}b^{4n-1-2i}}{2(4n-2)!!(\alpha^2a^2+\beta^2b^2)^{2n-1}}$$

(5) $\boldsymbol{R}^2$ の領域 E を $E=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\;\middle|\;x\geqq 0,\,y\geqq 0,\,(x^k+y^k)^n\leqq \alpha a^l b^m x^l y^m\right\}$ で定め, まず E の面積を求める. $\left(\begin{smallmatrix}r\\t\end{smallmatrix}\right)\in[0,\infty)\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ を $\begin{pmatrix}r(\cos^2 t)^{\frac{1}{k}}\\ r(\sin^2 t)^{\frac{1}{k}}\end{pmatrix}$ に写す写像は

$$A=\left\{\left(\begin{smallmatrix}r\\t\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\;\middle|\;0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2},\,0\leqq r\leqq\left(\alpha a^l b^m(\cos^2 t)^{\frac{l}{k}}(\sin^2 t)^{\frac{m}{k}}\right)^{\frac{1}{kn-l-m}}\right\}$$

を E に写し, 原点を除けば単射である. この写像のヤコビ行列式は以下で与えられる.

$$\begin{vmatrix} (\cos^2 t)^{\frac{1}{k}} & -\frac{2r}{k}\sin t(\cos^2 t)^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}} \\ (\sin^2 t)^{\frac{1}{k}} & \frac{2r}{k}\cos t(\sin^2 t)^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{2r}{k}(\cos^2 t)^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}}(\sin^2 t)^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}}$$

第 12 回の問題 4.(1) の結果から E の面積は以下のようになる.

$$\begin{aligned}
\iint_E dxdy &= \iint_A \frac{2r}{k}(\cos^2 t)^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}}(\sin^2 t)^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}}drdt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\left(\alpha a^l b^m(\cos^2 t)^{\frac{l}{k}}(\sin^2 t)^{\frac{m}{k}}\right)^{\frac{1}{kn-l-m}}} \frac{2r}{k}(\cos^2 t)^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}}(\sin^2 t)^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}}dr\right)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k}\left(\alpha a^l b^m(\cos^2 t)^{\frac{l}{k}}(\sin^2 t)^{\frac{m}{k}}\right)^{\frac{2}{kn-l-m}}(\cos^2 t)^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}}(\sin^2 t)^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}}dt \\
&= \frac{\left(\alpha a^l b^m\right)^{\frac{2}{kn-l-m}}}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2kn+2l-2m}{k(kn-l-m)}-1} t \sin^{\frac{2kn-2l+2m}{k(kn-l-m)}-1} t\,dt \\
&= \frac{\left(\alpha a^l b^m\right)^{\frac{2}{kn-l-m}}}{2k}B\left(\frac{kn+l-m}{k(kn-l-m)}, \frac{kn-l+m}{k(kn-l-m)}\right)
\end{aligned}$$

$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ を $\left(\begin{smallmatrix} ax \\ by \end{smallmatrix}\right)$ に写す $\boldsymbol{R}^2$ の 1 次変換によって E は D に写され, 領域の面積は ab 倍されるため, D の面積は $\dfrac{ab\left(\alpha a^l b^m\right)^{\frac{2}{kn-l-m}}}{2k}B\left(\dfrac{kn+l-m}{k(kn-l-m)}, \dfrac{kn-l+m}{k(kn-l-m)}\right)$ である.

8. $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を $f\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^3 \\ v^3 \\ w^3 \end{pmatrix}$ により定めると, $f\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in D$ であるためには $u^2+v^2+w^2 \leqq a^{\frac{2}{3}}$ であることが必要十分である. 従って $E = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \middle| u^2+v^2+w^2 \leqq a^{\frac{2}{3}} \right\}$ とおけば, f は E を D の上に 1 対 1 に写す. $f'\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3w^2 \end{pmatrix}$ だから $\det f'\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 27u^2v^2w^2$ である. 従って, D の体積は, $\iiint_D dxdydz = \iiint_E 27u^2v^2w^2dudvdw$ である. そこで $u = r\sin\theta\cos\varphi$, $v = r\sin\theta\sin\varphi$, $w = r\cos\theta$ ($r \geqq 0$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$) とおくと, $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in E$ であるためには $0 \leqq r \leqq a^{\frac{1}{3}}$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ であることが必要十分である. よって, $F = \left[0, a^{\frac{1}{3}}\right] \times [0,\pi] \times [0, 2\pi]$ とおけば $\iiint_E 27u^2v^2w^2dudvdw =$
$\iiint_F 27r^8\sin^5\theta\cos^2\theta\cos^2\varphi\sin^2\varphi drd\theta d\varphi = \int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{27}{4}r^8\sin^5\theta\cos^2\theta\sin^2 2\varphi d\varphi\right)d\theta\right)dr =$
$\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{27}{8}r^8\sin^5\theta\cos^2\theta(1-\cos 4\varphi)d\varphi\right)d\theta\right)dr = \int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\left(\int_0^{\pi}\frac{27\pi}{4}r^8\sin^5\theta\cos^2\theta d\theta\right)dr =$
$\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\left(\int_0^{\pi}\frac{27\pi}{4}r^8\left(1-\cos^2\theta\right)^2\cos^2\theta\sin\theta d\theta\right)dr = \int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\left(\int_0^{\pi}\frac{27\pi}{4}r^8\left(\cos^2\theta - 2\cos^4\theta + \cos^6\theta\right)\sin\theta d\theta\right)dr =$
$\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\left[\frac{27\pi}{4}r^8\left(-\frac{1}{3}\cos^3\theta + \frac{2}{5}\cos^5\theta - \frac{1}{7}\cos^7\theta\right)\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}dr = \int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\frac{36\pi}{35}r^8dr = \frac{4\pi}{35}a^3$ となり, 求める体積は $\dfrac{4\pi}{35}a^3$ である.

第一象限にある D の表面を S とすれば, D の対称性から D の表面積は S の面積の 8 倍である. $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leqq a^{\frac{2}{3}}\right\}$ とおけば S は E で定義された関数 $z = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ のグラフである. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -x^{-\frac{1}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -y^{-\frac{1}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}}$ だから S の面積 $|S|$ は

$$|S| = \iint_E \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}dxdy = \iint_E \sqrt{1 + \left(x^{-\frac{2}{3}} + y^{-\frac{2}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)}dxdy \ \cdots (i)$$

で与えられる. $x = u^3$, $y = v^3$ と変数変換すれば, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in E$ であるためには, $u \geqq 0$, $v \geqq 0$, $u^2+v^2 \leqq a^{\frac{2}{3}}$ であることが必要十分である. この変数変換のヤコビ行列式は $9u^2v^2$ だから, $F = \left\{\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| u \geqq 0,\, v \geqq 0,\, u^2+v^2 \leqq a^{\frac{2}{3}}\right\}$

とおけば (i) により, S の面積は $\displaystyle\iint_F 9uv\sqrt{u^2v^2+(u^2+v^2)\left(a^{\frac{2}{3}}-u^2-v^2\right)}dudv$ で与えられる. さらに $u=r\cos\theta$, $v=r\sin\theta$ $(r\geqq 0,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ と変数変換すれば $\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)\in F$ であるためには $0\leqq r\leqq a^{\frac{1}{3}}$, $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であることが必要十分である. 従って, $A=\sqrt{\dfrac{4a^{\frac{2}{3}}}{r^2}-3}$ に対して公式 $\displaystyle\int\sqrt{A^2-x^2}dx=\frac{A^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{A}+\frac{1}{2}x\sqrt{A^2-x^2}$ を用いると

$$
\begin{aligned}
|S|&=\iint_{\left[0,a^{\frac{1}{3}}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}9r^4\cos\theta\sin\theta\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-r^2(1-\cos^2\theta\sin^2\theta)}drd\theta\\
&=\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{9}{4}r^4\sin 2\theta\sqrt{4a^{\frac{2}{3}}-r^2(3+\cos^2 2\theta)}d\theta\right)dr\\
&=\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\left(\int_{-1}^{1}\frac{9}{8}r^4\sqrt{4a^{\frac{2}{3}}-r^2(3+t^2)}dt\right)dr=\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\left(\int_{-1}^{1}\frac{9}{8}r^5\sqrt{\frac{4a^{\frac{2}{3}}}{r^2}-3-t^2}dt\right)dr\\
&=\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\left[\left(\frac{9a^{\frac{2}{3}}r^3}{4}-\frac{27r^5}{16}\right)\sin^{-1}\frac{rt}{\sqrt{4a^{\frac{2}{3}}-3r^2}}+\frac{9tr^4}{16}\sqrt{4a^{\frac{2}{3}}-r^2(3+t^2)}\right]_{t=-1}^{t=1}dr\\
&=\frac{9}{8}\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\left(\left(4a^{\frac{2}{3}}r^3-3r^5\right)\sin^{-1}\frac{r}{\sqrt{4a^{\frac{2}{3}}-3r^2}}+2r^4\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-r^2}\right)dr\ \cdots(ii)
\end{aligned}
$$

である. $x=\dfrac{r}{\sqrt{4a^{\frac{2}{3}}-3r^2}}$ とおけば, $r^2=\dfrac{4a^{\frac{2}{3}}x^2}{3x^2+1}=\dfrac{4a^{\frac{2}{3}}}{3}\left(1-\dfrac{1}{3x^2+1}\right)$, $rdr=\dfrac{4a^{\frac{2}{3}}x}{(3x^2+1)^2}dx$ であり, r が 0 から $a^{\frac{1}{3}}$ まで動くとき, x は 0 から 1 まで動くため, 第 11 回の演習問題の 2 の (4) の結果を用いれば

$$
\begin{aligned}
\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\left(4a^{\frac{2}{3}}r^3-3r^5\right)\sin^{-1}\frac{r}{\sqrt{4a^{\frac{2}{3}}-3r^2}}dr&=64a^2\int_0^1\left(\frac{x^3}{(3x^2+1)^3}-\frac{3x^5}{(3x^2+1)^4}\right)\sin^{-1}xdx\\
&=64a^2\int_0^1\frac{x^3\sin^{-1}x}{(3x^2+1)^4}dx=\frac{41\pi a^2}{432}\ \cdots(iii)
\end{aligned}
$$

となる. また, $r=a^{\frac{1}{3}}\sin\theta$ とおけば $dr=a^{\frac{1}{3}}\cos\theta d\theta$ であり, θ が 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くとき, r は 0 から $a^{\frac{1}{3}}$ まで動くため, $\displaystyle\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}r^4\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-r^2}dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin^4\theta\cos^2\theta d\theta=a^2\frac{3!!1!!}{6!!}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi a^2}{32}$ である. 故に (ii) と (iii) から $|S|=\dfrac{41\pi a^2}{384}+\dfrac{9\pi a^2}{128}=\dfrac{17\pi a^2}{96}$ となるため, 求める面積は $8|S|=\dfrac{17\pi a^2}{12}$ である.

9. (1) $\boldsymbol{R}^3$ の点 $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)$ が $(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ で与えられる曲面 S 上にあるためには $x^2+y^2\leqq a^2$ かつ $z=\pm\left(a^{\frac{2}{3}}-(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ を満たすことが必要十分である. S_+ を S の z 座標が 0 以上である点全体からなる部分, S_- を S の z 座標が 0 以下である点全体からなる部分とすれば, これらの面積は等しく, S の面積はこれらの面積の和になる. $z=\left(a^{\frac{2}{3}}-(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ ならば

$$
\frac{\partial z}{\partial x}=-x(x^2+y^2)^{-\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-y(x^2+y^2)^{-\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}}
$$

だから, $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2\leqq a^2\right\}$ とおくと S_+ の面積は $\displaystyle\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\iint_D a^{\frac{1}{3}}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{6}}dxdy$ で与えられる. $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$ $(r\geqq 0,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $E=[0,a]\times[0,2\pi]$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は r だから $\displaystyle\iint_D a^{\frac{1}{3}}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{6}}dxdy=\iint_E a^{\frac{1}{3}}r^{-\frac{1}{3}}rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a a^{\frac{1}{3}}r^{\frac{2}{3}}dr\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{3}{5}a^{\frac{1}{3}}r^{\frac{5}{3}}\right]_0^a d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{3}{5}a^2d\theta=\frac{6\pi a^2}{5}$ となるため, S_+ の面積は $\dfrac{6\pi a^2}{5}$ である. 従って S の面積は $\dfrac{12\pi a^2}{5}$ である.

(2) $\boldsymbol{R}^3$ の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2)$ で与えられる曲面 S 上にあるためには $x^2+y^2 \leqq a^2$ かつ $z = \pm\sqrt{a\sqrt{x^2+y^2}-x^2-y^2}$ を満たすことが必要十分である. S_+ を S の z 座標が 0 以上である点全体からなる部分, S_- を S の z 座標が 0 以下である点全体からなる部分とすれば, これらの面積は等しく, S の面積はこれらの面積の和になる. $z = \sqrt{a\sqrt{x^2+y^2}-x^2-y^2}$ ならば

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{ax - 2x\sqrt{x^2+y^2}}{2\sqrt{a(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - (x^2+y^2)^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{ay - 2y\sqrt{x^2+y^2}}{2\sqrt{a(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - (x^2+y^2)^2}}$$

だから, $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leqq a^2 \right\}$ とおくと S_+ の面積は $\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy = \frac{1}{2}\iint_D \sqrt{\frac{a^2(x^2+y^2)}{a(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}-(x^2+y^2)^2}}\,dxdy$ で与えられる. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $E = [0, 2\pi] \times [0, a]$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は r だから

$$\iint_D \sqrt{\frac{a^2(x^2+y^2)}{a(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}-(x^2+y^2)^2}}\,dxdy = \iint_E \sqrt{\frac{a^2 r}{a-r}}\,drd\theta = \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{a^2 r}{a-r}}\,d\theta\right) dr = 2\pi\int_0^a a\sqrt{\frac{r}{a-r}}\,dr.$$

$t = \sqrt{\dfrac{r}{a-r}}$ とおけば, r が 0 から a まで動くと t は 0 から ∞ まで動き, $r = \dfrac{at^2}{1+t^2}$ だから $dr = \dfrac{2at}{(1+t^2)^2}dt$ である. 従って $\displaystyle\int_0^a a\sqrt{\frac{r}{a-r}}\,dr = \int_0^\infty \frac{2a^2t^2}{(1+t^2)^2}dt$ となり, さらに $t = \tan\varphi$ とおいて置換積分を行えば, t は 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動き, $dt = \dfrac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$ だから $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2a^2t^2}{(1+t^2)^2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2a^2\sin^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi = \left[a^2\varphi - \frac{a^2\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{2}$ である. 故に $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{a^2(x^2+y^2)}{a(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}-(x^2+y^2)^2}}\,dxdy = \pi^2a^2$ となるため, S_+ の面積は $\dfrac{\pi^2a^2}{2}$ である. ここで, S の面積は S_+ の面積の 2 倍だから, 求める S の面積は π^2a^2 である.

(3) $\boldsymbol{R}^3$ の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ で与えられる曲面 S 上にあるためには $x^2 \geqq y^2$, $x^2+y^2 \leqq a\sqrt{x^2-y^2}$ かつ $z = \pm\sqrt{a\sqrt{x^2-y^2}-x^2-y^2}$ を満たすことが必要十分である. S_+ を S の z 座標が 0 以上である点全体からなる部分, S_- を S の z 座標が 0 以下である点全体からなる部分とすれば, これらの面積は等しく, S の面積はこれらの面積の和になる. さらに T_+ を S_+ の x 座標が 0 以上である点全体からなる部分, T_- を S_+ の x 座標が 0 以下である点全体からなる部分とすれば, これらの面積は等しく, S_+ の面積はこれらの面積の和になる. $z = \sqrt{a\sqrt{x^2-y^2}-x^2-y^2}$ ならば

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{ax - 2x\sqrt{x^2-y^2}}{2\sqrt{a(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}} - x^4 + y^4}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-ay - 2y\sqrt{x^2-y^2}}{2\sqrt{a(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}} - x^4 + y^4}}$$

だから, $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0,\ x^2 \geqq y^2,\ x^2+y^2 \leqq a\sqrt{x^2-y^2} \right\}$ とおくと T_+ の面積は $\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy = \frac{1}{2}\iint_D \sqrt{\frac{a^2(x^2+y^2)}{a(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}-x^4+y^4}}\,dxdy$ で与えられる. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0,\ -\pi \leqq \theta \leqq \pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, -\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4},\ 0 \leqq r \leqq a\sqrt{\cos 2\theta} \right\}$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は r だから $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{a^2(x^2+y^2)}{a(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}-x^4+y^4}}\,dxdy = \iint_E \sqrt{\frac{a^2 r}{a(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}} - r\cos 2\theta}}\,drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\sqrt{\frac{r}{a\sqrt{\cos 2\theta}-r}}\,dr\right) d\theta$. $t = \sqrt{\dfrac{r}{a\sqrt{\cos 2\theta}-r}}$ とおけば, r が 0 から $a\sqrt{\cos 2\theta}$ まで動くと t は 0 から ∞ まで動き, $r = \dfrac{a\sqrt{\cos 2\theta}\,t^2}{1+t^2}$ だから $dr = \dfrac{2a\sqrt{\cos 2\theta}\,t}{(1+t^2)^2}dt$ である. 従って $\displaystyle\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\sqrt{\frac{r}{a\sqrt{\cos 2\theta}-r}}\,dr = \int_0^\infty \frac{2a^2t^2}{(1+t^2)^2}dt$ となり, (2) で行った計算により, この積分の値は $\dfrac{\pi a^2}{2}$ で

ある．故に $\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{a^2(x^2+y^2)}{a(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}-x^4+y^4}}dxdy = \frac{\pi^2a^2}{4}$ となるため, T_+ の面積は $\dfrac{\pi^2a^2}{8}$ である．ここで, S_+ の面積は T_+ の面積の 2 倍, S の面積は S_+ の面積の 2 倍だから, 求める S の面積は $\dfrac{\pi^2a^2}{2}$ である．

10. (1) $\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in S$ における法線ベクトルを $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ とすれば, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{a}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{b}$ より, $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = \left(\begin{smallmatrix} \frac{x}{a} \\ \frac{y}{b} \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ である．従って $\cos\gamma(\boldsymbol{x}) = \dfrac{(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{e}_3)}{\|\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\|\|\boldsymbol{e}_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+1}}$ となるため, $T = \{\boldsymbol{x} \in S | \alpha \leqq \gamma(\boldsymbol{x}) \leqq \beta\}$ とおけば, $T = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in S \,\middle|\, \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \leqq \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+1 \leqq \dfrac{1}{\cos^2\beta} \right\}$ である．$D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R} \,\middle|\, \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \leqq \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+1 \leqq \dfrac{1}{\cos^2\beta} \right\}$ とおけば, T の面積は $\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy = \iint_D \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}dxdy$ で与えられる．$\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $E = [\tan\alpha, \tan\beta] \times [0, 2\pi]$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は abr だから, T の面積は $\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}dxdy = \iint_E abr\sqrt{1+r^2}drd\theta =$ $\displaystyle\int_{\tan\alpha}^{\tan\beta}\left(\int_0^{2\pi} abr\sqrt{1+r^2}d\theta\right)dr = \int_{\tan\alpha}^{\tan\beta} 2\pi abr\sqrt{1+r^2}dr = \left[\frac{2}{3}\pi ab(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\tan\alpha}^{\tan\beta} = \frac{2}{3}\pi ab\left(\frac{1}{\cos^3\beta}-\frac{1}{\cos^3\alpha}\right)$.

(2) 球面 $x^2+y^2+(z-c)^2 = c^2$ のうちで, 楕円錐面 $z^2 = ax^2+by^2$ の内部に含まれる部分を S とし, x 座標と y 座標がともに 0 以上である S の部分を T とすれば S は xz 平面と yz 平面に関して対称だから, S の面積は T の面積の 4 倍である．$T = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2+(z-c)^2 = c^2,\ z^2 \geqq ax^2+by^2 \right\}$ であり, 球面 $x^2+y^2+(z-c)^2 = c^2$ 上の点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ は $\begin{cases} x = c\sin\theta\cos\varphi \\ y = c\sin\theta\sin\varphi \\ z = c(1+\cos\theta) \end{cases}$ $\quad (0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$ と表されるが, これが T に含まれるためには, $0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であり, $z^2 \geqq ax^2+by^2$ より $1+\cos\theta \geqq (1-\cos\theta)(a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi)$, すなわち $\cos\theta \geqq \dfrac{a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi-1}{a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi+1}$ が成り立つことが必要十分である．$D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \theta \\ \varphi \end{smallmatrix}\right) \in [0,\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \,\middle|\, \cos\theta \geqq \frac{a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi-1}{a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi+1} \right\}$ とおいて, 写像 $f : D \to \boldsymbol{R}^3$ を $f\left(\begin{smallmatrix} \theta \\ \varphi \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} c\sin\theta\cos\varphi \\ c\sin\theta\sin\varphi \\ c(1+\cos\theta) \end{smallmatrix}\right)$ で定め, 写像 $f_\theta, f_\varphi : D \to \boldsymbol{R}^3$ を $f_\theta\left(\begin{smallmatrix} \theta \\ \varphi \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} c\cos\theta\cos\varphi \\ c\cos\theta\sin\varphi \\ -c\sin\theta \end{smallmatrix}\right)$, $f_\varphi\left(\begin{smallmatrix} \theta \\ \varphi \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -c\sin\theta\sin\varphi \\ c\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で定めれば, 次の等式が成り立つ．

$$f_\theta\left(\begin{smallmatrix} \theta \\ \varphi \end{smallmatrix}\right) \times f_\varphi\left(\begin{smallmatrix} \theta \\ \varphi \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} c^2\sin^2\theta\cos\varphi \\ c^2\sin^2\theta\sin\varphi \\ c^2\sin\theta\cos\theta \end{smallmatrix}\right) = c^2\sin\theta\left(\begin{smallmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$$

$-1 \leqq \dfrac{a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi-1}{a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi+1} \leqq 1$ だから $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \theta \\ \varphi \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2},\ \cos^{-1}\left(\frac{a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi-1}{a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi+1}\right) \leqq \theta \leqq \pi \right\}$ であるため, T の面積は

$$\begin{aligned} \iint_D \left\|f_\theta\left(\begin{smallmatrix} \theta \\ \varphi \end{smallmatrix}\right) \times f_\varphi\left(\begin{smallmatrix} \theta \\ \varphi \end{smallmatrix}\right)\right\| d\theta d\varphi = \iint_D c^2\sin\theta d\theta d\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\cos^{-1}\left(\frac{a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi-1}{a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi+1}\right)}^{\pi} c^2\sin\theta d\theta\right)d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-c^2\cos\theta\right]_{\theta=\cos^{-1}\left(\frac{a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi-1}{a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi+1}\right)}^{\theta=\pi} d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} c^2\left(1-\frac{a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi-1}{a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi+1}\right)d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2c^2}{a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi+1}d\varphi \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

で与えられる．$t = \tan\varphi$ と変数変換すれば, φ が 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動けば t は 0 から ∞ まで動き, $dt = \dfrac{1}{\cos^2}d\varphi$ より

$$\begin{aligned} (*) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2c^2}{a+b\tan^2\varphi+\frac{1}{\cos^2}}\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2c^2}{a+1+(b+1)\tan^2\varphi}\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi \\ &= \frac{2c^2}{b+1}\int_0^{\infty} \frac{1}{\frac{a+1}{b+1}+t^2}dt = \frac{2c^2}{b+1}\left[\sqrt{\frac{b+1}{a+1}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{b+1}{a+1}}t\right)\right]_0^{\infty} = \frac{\pi c^2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}} \end{aligned}$$

となるため, T の面積は $\dfrac{\pi c^2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}$ である. 故に S の面積は $\dfrac{4\pi c^2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}$ である.

(3) 球面 $x^2+y^2+(z-c)^2=c^2$ のうちで, 放物面 $z=\dfrac{x^2}{2a}+\dfrac{y^2}{2b}$ の内部に含まれる部分を S とし, x 座標と y 座標がともに 0 以上である S の部分を T とすれば S は xz 平面と yz 平面に関して対称だから, S の面積は T の面積の 4 倍である. $T=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\, x\geqq 0,\, y\geqq 0,\, x^2+y^2+(z-c)^2=c^2,\, z\geqq\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b}\right\}$ であり, 球面 $x^2+y^2+(z-c)^2=c^2$ 上の点 $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)$ は $\begin{cases}x=c\sin\theta\cos\varphi\\ y=c\sin\theta\sin\varphi\\ z=c(1+\cos\theta)\end{cases}$ $(0\leqq\theta\leqq\pi,\,0\leqq\varphi\leqq 2\pi)$ と表されるが, これが T に含まれるためには, $0\leqq\varphi\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であり, $z\geqq\dfrac{x^2}{2a}+\dfrac{y^2}{2b}$ より $(1-\cos\theta)(b\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi)\leqq\dfrac{2ab}{c}$, すなわち $\cos\theta\geqq 1-\dfrac{2ab}{c(b\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi)}$ が成り立つことが必要十分である. $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}\theta\\\varphi\end{smallmatrix}\right)\in[0,\pi]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\,\middle|\,\cos\theta\geqq 1-\frac{2ab}{c(b\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi)}\right\}$ とおいて, 写像 $f:D\to\boldsymbol{R}^3$ を $f\left(\begin{smallmatrix}\theta\\\varphi\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}c\sin\theta\cos\varphi\\c\sin\theta\sin\varphi\\c(1+\cos\theta)\end{smallmatrix}\right)$ で定め, 写像 $f_\theta,f_\varphi:D\to\boldsymbol{R}^3$ を $f_\theta\left(\begin{smallmatrix}\theta\\\varphi\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}c\cos\theta\cos\varphi\\c\cos\theta\sin\varphi\\-c\sin\theta\end{smallmatrix}\right)$, $f_\varphi\left(\begin{smallmatrix}\theta\\\varphi\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}-c\sin\theta\sin\varphi\\c\sin\theta\cos\varphi\\0\end{smallmatrix}\right)$ で定めれば, 次の等式が成り立つ.

$$f_\theta\left(\begin{smallmatrix}\theta\\\varphi\end{smallmatrix}\right)\times f_\varphi\left(\begin{smallmatrix}\theta\\\varphi\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}c^2\sin^2\theta\cos\varphi\\c^2\sin^2\theta\sin\varphi\\c^2\sin\theta\cos\theta\end{pmatrix}=c^2\sin\theta\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\\sin\theta\sin\varphi\\\cos\theta\end{pmatrix}$$

$c\leqq a$ の場合, すべての $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ に対して不等式 $b\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi=(b-a)\cos^2\varphi+a\leqq b\leqq\dfrac{ab}{c}$ が成り立つため, $1-\dfrac{2ab}{c(b\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi)}\leqq -1$ である. よって, この場合は $D=[0,\pi]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ となり, T の面積は

$$\iint_D\left\|f_\theta\left(\begin{smallmatrix}\theta\\\varphi\end{smallmatrix}\right)\times f_\varphi\left(\begin{smallmatrix}\theta\\\varphi\end{smallmatrix}\right)\right\|d\theta d\varphi=\int_0^\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}c^2\sin\theta d\varphi\right)d\theta=\int_0^\pi\frac{\pi c^2}{2}\sin\theta d\theta=\left[-\frac{\pi c^2}{2}\cos\theta\right]_0^\pi=\pi c^2$$

で与えられるため, S の面積は $4\pi c^2$ である.

$a<c<b$ の場合, $0<\dfrac{a(b-c)}{c(b-a)}<1$ だから $\alpha=\cos^{-1}\sqrt{\dfrac{a(b-c)}{c(b-a)}}$ とおけば $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ である. $0\leqq\varphi\leqq\alpha$ ならば $\cos^2\varphi\geqq\dfrac{a(b-c)}{c(b-a)}$ だから $1-\dfrac{2ab}{c(b\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi)}=1-\dfrac{2ab}{c((b-a)\cos^2\varphi+a)}\geqq -1$ であり, $\alpha\leqq\varphi\leqq\dfrac{\pi}{2}$ ならば $\cos^2\varphi\leqq\dfrac{a(b-c)}{c(b-a)}$ だから $1-\dfrac{2ab}{c(b\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi)}=1-\dfrac{2ab}{c((b-a)\cos^2\varphi+a)}\leqq -1$ である. よって, この場合 D は $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}\theta\\\varphi\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq\varphi\leqq\alpha,\,0\leqq\theta\leqq\cos^{-1}\left(1-\frac{2ab}{c(b\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi)}\right)\right\}\cup\left([0,\pi]\times\left[\alpha,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ となり, T の面積は

$$\begin{aligned}\iint_D\left\|f_\theta\left(\begin{smallmatrix}\theta\\\varphi\end{smallmatrix}\right)\times f_\varphi\left(\begin{smallmatrix}\theta\\\varphi\end{smallmatrix}\right)\right\|d\theta d\varphi&=\int_0^\alpha\left(\int_0^{\cos^{-1}\left(1-\frac{2ab}{c(b\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi)}\right)}c^2\sin\theta d\theta\right)d\varphi+\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^\pi c^2\sin\theta d\theta\right)d\varphi\\&=\int_0^\alpha\left[-c^2\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\cos^{-1}\left(1-\frac{2ab}{c(b\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi)}\right)}d\varphi+\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\left[-c^2\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}d\varphi\\&=\int_0^\alpha\frac{2abc}{b\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi}d\varphi+c^2(\pi-2\alpha)\ \cdots(*)\end{aligned}$$

で与えられる. $t=\tan\varphi$ と変数変換すれば, φ が 0 から α まで動けば t は 0 から $\tan\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1}=\sqrt{\dfrac{b(c-a)}{a(b-c)}}$ まで動き, $dt=\dfrac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi$ より, T の面積は

$$\begin{aligned}(*)&=\int_0^\alpha\frac{2abc}{b+a\tan^2\varphi}\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi+c^2(\pi-2\alpha)=2bc\int_0^{\sqrt{\frac{b(c-a)}{a(b-c)}}}\frac{1}{\frac{b}{a}+t^2}dt+c^2(\pi-2\alpha)\\&=2bc\left[\sqrt{\frac{a}{b}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}t\right)\right]_0^{\sqrt{\frac{b(c-a)}{a(b-c)}}}+c^2(\pi-2\alpha)=2c\sqrt{ab}\tan^{-1}\sqrt{\frac{c-a}{b-c}}+\pi c^2-2c^2\cos^{-1}\sqrt{\frac{a(b-c)}{c(b-a)}}\end{aligned}$$

となるため, S の面積は $8c\sqrt{ab}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{c-a}{b-c}}+4\pi c^2-8c^2\cos^{-1}\sqrt{\dfrac{a(b-c)}{c(b-a)}}$ である. ここで, $0<x\leqq 1$ ならば $\tan(\cos^{-1}x)=\dfrac{\sin(\cos^{-1}x)}{\cos(\cos^{-1}x)}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ だから, $\cos^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ となるため, $x=\sqrt{\dfrac{a(b-c)}{c(b-a)}}$ とすれば $\cos^{-1}\sqrt{\dfrac{a(b-c)}{c(b-a)}}=\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{b(c-a)}{a(b-c)}}$ を得る. 故に S の面積は $8c\sqrt{ab}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{c-a}{b-c}}+4\pi c^2-8c^2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{b(c-a)}{a(b-c)}}$ である.

$c\geqq b$ の場合, すべての $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ に対して不等式 $b\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi=(b-a)\cos^2\varphi+a\geqq a\geqq\dfrac{ab}{c}$ が成り立つため, $-1\leqq 1-\dfrac{2ab}{c(b\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi)}\leqq 1$ である. よって, この場合は

$$D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}\theta\\ \varphi\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq\varphi\leqq\tfrac{\pi}{2},\ 0\leqq\theta\leqq\cos^{-1}\left(1-\tfrac{2ab}{c(b\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi)}\right)\right\}$$

であるため, T の面積は

$$\begin{aligned}\iint_D\left\|f_\theta\left(\begin{smallmatrix}\theta\\ \varphi\end{smallmatrix}\right)\times f_\varphi\left(\begin{smallmatrix}\theta\\ \varphi\end{smallmatrix}\right)\right\|d\theta d\varphi&=\iint_D c^2\sin\theta d\theta d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\cos^{-1}\left(1-\frac{2ab}{c(b\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi)}\right)}c^2\sin\theta d\theta\right)d\varphi\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-c^2\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\cos^{-1}\left(1-\frac{2ab}{c(b\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi)}\right)}d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2abc}{b\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi}d\varphi\quad\cdots(**)\end{aligned}$$

で与えられる. $t=\tan\varphi$ と変数変換すれば, φ が 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動けば t は 0 から ∞ まで動き, $dt=\dfrac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi$ より, T の面積は

$$(**)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2abc}{b+a\tan^2\varphi}\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi=2bc\int_0^\infty\frac{1}{\frac{b}{a}+t^2}dt=2bc\left[\sqrt{\frac{a}{b}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}t\right)\right]_0^\infty=\pi c\sqrt{ab}$$

となるため, S の面積は $4\pi c\sqrt{ab}$ である.

(4) 求める面積は $\displaystyle\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}dxdy=\int_0^a\left(\int_{\beta x}^{\alpha x}\frac{1}{p}\sqrt{p^2+x^2}dy\right)dx=$ $\displaystyle\int_0^a\frac{\alpha-\beta}{p}x\sqrt{p^2+x^2}dx=\left[\frac{\alpha-\beta}{3p}(p^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a=\frac{\alpha-\beta}{3p}\left((a^2+p^2)^{\frac{3}{2}}-p^3\right)$ である.

(5) 曲面 $z^2=2px$ は xy 平面に関して対称だから, この曲面の $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq a,\ -\sqrt{2qx}\leqq y\leqq\sqrt{2qx}\right\}$ の上にある部分の面積を 2 倍したものが求める面積である. この曲面の z 座標が正の部分は $z=\sqrt{2px}$ $(x\geqq 0)$ であり, 曲面 $z=\sqrt{2px}$ $(x\geqq 0)$ の D の上にある部分の面積は $\displaystyle\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\iint_D\sqrt{1+\frac{p}{2x}}dxdy=$ $\displaystyle\int_0^a\left(\int_{-\sqrt{2qx}}^{\sqrt{2qx}}\sqrt{1+\frac{p}{2x}}dy\right)dx=2\sqrt{q}\int_0^a\sqrt{2x+p}dx=\sqrt{q}\left[\frac{2}{3}(2x+p)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a=\frac{2\sqrt{q}}{3}\left((2a+p)^{\frac{3}{2}}-p^{\frac{3}{2}}\right)$ だから, 求める面積は $\dfrac{4\sqrt{q}}{3}\left((2a+p)^{\frac{3}{2}}-p^{\frac{3}{2}}\right)$ である.

(6) 楕円柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ は xy 平面に関して対称だから, この曲面の $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1\right\}$ の上にある部分の面積を 2 倍したものが求める面積である. この曲面の z 座標が正の部分は $z=\dfrac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ $(-a\leqq x\leqq a)$ であり, この曲面の D の上にある部分の面積は, $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,-a\leqq x\leqq a,\ -\dfrac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a}\leqq y\leqq\dfrac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right\}$ だから $\displaystyle\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\iint_D\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-c^2)x^2}{a^2-x^2}}dxdy=$ $\displaystyle\int_{-a}^a\left(\int_{-\frac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a}}^{\frac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a}}\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-c^2)x^2}{a^2-x^2}}dy\right)dx=\int_{-a}^a\frac{2b\sqrt{a^2-c^2}}{a^2}\sqrt{\frac{a^4}{a^2-c^2}-x^2}dx\ \cdots(*)$ である. $x=\dfrac{a^2\sin t}{\sqrt{a^2-c^2}}$

と変数変換すれば, $dx = \dfrac{a^2\cos t}{\sqrt{a^2-c^2}}dt$ であり, t が $-\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}$ から $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}$ まで動けば x は $-a$ から a まで動くため, $(*)=\displaystyle\int_{-\sin^{-1}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}}^{\sin^{-1}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}}\frac{2a^2b\cos^2 t}{\sqrt{a^2-c^2}}dt = \int_{-\sin^{-1}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}}^{\sin^{-1}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}}\frac{a^2b(1+\cos 2t)}{\sqrt{a^2-c^2}}dt = \left[\frac{a^2b(2t+\sin 2t)}{2\sqrt{a^2-c^2}}\right]_{-\sin^{-1}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}}^{\sin^{-1}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}}$ $= \dfrac{2a^2b}{\sqrt{a^2-c^2}}\left(\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}+\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\right)\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\right)\right) = \dfrac{2a^2b}{\sqrt{a^2-c^2}}\cos^{-1}\dfrac{c}{a}+2bc$ である. 従って, 求める面積は $\dfrac{4a^2b}{\sqrt{a^2-c^2}}\cos^{-1}\dfrac{c}{a}+4bc$ である.

(7) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ は xy 平面に関して対称だから, この球面の $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1\right\}$ の上にある部分の面積を 2 倍したものが求める面積である. 上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ の D の上にある部分の面積は, $\displaystyle\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy = \iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$ である. $\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta\end{cases}$ $(r\geqq 0,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $E=[0,1]\times[0,2\pi]$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は abr だから, 上式は $\displaystyle\iint_E\frac{a^2br}{\sqrt{a^2-r^2(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)}}drd\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\frac{a^2br}{\sqrt{a^2-r^2(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)}}dr\right)d\theta =$ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left[\frac{-a^2b\sqrt{a^2-r^2(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)}}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{a^3b}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}d\theta-\int_0^{2\pi}\frac{a^2b\sqrt{a^2-b^2}|\sin\theta|}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}d\theta =$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4a^3b}{a^2+b^2\tan^2\theta}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4a^2b\sqrt{a^2-b^2}\sin\theta}{(a^2-b^2)\cos^2\theta+b^2}d\theta = \int_0^{\infty}\frac{4a^3b}{a^2+b^2t^2}dt-\int_0^1\frac{4a^2b\sqrt{a^2-b^2}}{(a^2-b^2)t^2+b^2}dt =$ $\displaystyle\left[4a^2\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}t\right)\right]_0^{\infty}-\left[4a^2\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}t\right)\right]_0^1 = 2\pi a^2-4a^2\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right) = 2\pi a^2-4a^2\cos^{-1}\frac{b}{a}$ に等しいため, 求める面積は $4\pi a^2-8a^2\cos^{-1}\dfrac{b}{a}$ である.

(8) 円錐 $y^2+z^2=x^2$ はすべての座標平面について対称だから, 与えられた円錐の第一象限にある部分で, 円柱 $x^2+y^2\leqq a^2$ に含まれる部分の面積の 8 倍が求める面積である. $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq y\leqq x,\ x^2+y^2\leqq a^2\right\}$ とおけば, 与えられた円錐の第一象限にある部分で, 円柱 $x^2+y^2\leqq a^2$ に含まれる部分は $z=\sqrt{x^2-y^2}$ で与えられる曲面の D の上にある部分で, その面積は $\displaystyle\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy = \iint_D\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-y^2}}dxdy$ である. $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ $(r\geqq 0,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $E=[0,a]\times\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は r だから, 上式は $\displaystyle\iint_E\frac{\sqrt{2}r\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}}drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^a\frac{\sqrt{2}r\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}}dr\right)d\theta =$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^2\cos\theta}{\sqrt{2}\sqrt{1-2\sin^2\theta}}d\theta = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{a^2}{2\sqrt{\frac{1}{2}-t^2}}dt = \left[\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\sqrt{2}t\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi a^2}{4}$ に等しくなるため, 求める面積は $2\pi a^2$ である.

(9) 円錐 $y^2+z^2=x^2$ と曲面 $y=\dfrac{x^2}{a}$ は xy 平面と yz 平面について対称で, $y<0$ の部分には, 曲面 $y=\dfrac{x^2}{a}$ は存在しないので, 与えられた円錐の第一象限にある部分で, 曲面 $y=\dfrac{x^2}{a}$ によって切り取られる部分の面積の 4 倍が求める面積である. $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq y\leqq a,\ y\leqq x\leqq\sqrt{ay}\right\}$ とおけば, 与えられた円錐の第一象限にある部分で, 曲面 $y=\dfrac{x^2}{a}$ によって切り取られる部分は $z=\sqrt{x^2-y^2}$ で与えられる曲面の D の上にある部分で, その面積は $\displaystyle\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy = \iint_D\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-y^2}}dxdy = \int_0^a\left(\int_y^{\sqrt{ay}}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-y^2}}dx\right)dy =$ $\displaystyle\int_0^a\left[\sqrt{2}\sqrt{x^2-y^2}\right]_{x=y}^{x=\sqrt{ay}}dy = \int_0^a\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(y-\frac{a}{2}\right)^2}dy = \frac{\sqrt{2}\pi a^2}{8}$ に等しいため, 求める面積は $\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{2}}$ である.

(10) 与えられた曲面を, z 軸を軸にして $-\dfrac{\alpha}{2}$ だけ回転して得られる曲面の方程式は $z = \dfrac{xy}{c\sin\alpha}$ で, この曲面の $z \geqq 0$, $x^2+y^2 \leqq a^2$ にある部分の面積を求めればよい. 曲面 $z = \dfrac{xy}{c\sin\alpha}$ は z 軸について対称だから, $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, x^2+y^2 \leqq a^2\right\}$ とおけば, 求める面積は $2\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy = \iint_D \frac{2}{c\sin\alpha}\sqrt{c^2\sin^2\alpha+x^2+y^2}dxdy$ で与えられる. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0,\, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $E = [0,a]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は r である. 従って, 求める面積は $\displaystyle\iint_E \frac{2r}{c\sin\alpha}\sqrt{c^2\sin^2\alpha+r^2}drd\theta = \int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2r}{c\sin\alpha}\sqrt{c^2\sin^2\alpha+r^2}d\theta\right)dr = \int_0^a \frac{\pi r}{c\sin\alpha}\sqrt{c^2\sin^2\alpha+r^2}dr = \left[\frac{\pi}{3c\sin\alpha}(c^2\sin^2\alpha+r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{\pi}{3c\sin\alpha}\left((c^2\sin^2\alpha+a^2)^{\frac{3}{2}}-c^3\sin^3\alpha\right)$ である.

(11) 与えられた曲面と柱面は xz 平面と yz 平面に関して対称だから, 与えられた曲面の柱面 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ によって切り取られる部分の第一象限に含まれる部分の面積の 4 倍が求める面積である.
従って $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, (x^2+y^2)^2 \leqq a^2(x^2-y^2)\right\}$ とおけば, 求める面積は
$4\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy = \frac{4}{a}\iint_D \sqrt{a^2+x^2+y^2}dxdy$ で与えられる. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\, 0 \leqq r \leqq a\sqrt{\cos 2\theta}\right\}$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は r である. 従って, 求める面積は $\displaystyle\frac{4}{a}\iint_E r\sqrt{a^2+r^2}drd\theta =$
$\displaystyle\frac{4}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r\sqrt{a^2+r^2}dr\right)d\theta = \frac{4}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{3}(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=a\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta = \frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\sqrt{2}\cos^3\theta-1\right)d\theta =$
$\displaystyle\frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 3\theta+3\cos\theta)-1\right)d\theta = \frac{4a^2}{3}\left[\frac{\sqrt{2}}{6}(\sin 3\theta+9\sin\theta)-\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{9}(20-3\pi)$ である.

(12) 与えられた曲面と柱面は z 軸について対称だから, 与えられた曲面の柱面 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ によって切り取られる部分の第一象限と第四象限に含まれる部分の面積の 2 倍が求める面積である.
従って $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, x \geqq 0,\, (x^2+y^2)^2 \leqq a^2(x^2-y^2)\right\}$ とおけば, 求める面積は
$2\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy = \frac{2}{a}\iint_D \sqrt{a^2+y^2+x^2}dxdy$ で与えられる. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, -\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\, 0 \leqq r \leqq a\sqrt{\cos 2\theta}\right\}$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は r である. 従って, 求める面積は $\displaystyle\frac{2}{a}\iint_E r\sqrt{a^2+r^2}drd\theta =$
$\displaystyle\frac{2}{a}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r\sqrt{a^2+r^2}dr\right)d\theta = \frac{2}{a}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{3}(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=a\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta = \frac{2a^2}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(2\sqrt{2}\cos^3\theta-1\right)d\theta =$
$\displaystyle\frac{2a^2}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 3\theta+3\cos\theta)-1\right)d\theta = \frac{2a^2}{3}\left[\frac{\sqrt{2}}{6}(\sin 3\theta+9\sin\theta)-\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{9}(20-3\pi)$ である.

(13) 与えられた曲面と柱面は z 軸について対称であり, 与えられた柱面は $xy < 0$ の部分には存在しないため, 与えられた曲面の柱面 $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$ によって切り取られる部分の第一象限に含まれる部分の面積の 2 倍が求める面積である. 従って $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, (x^2+y^2)^2 \leqq 2a^2xy\right\}$ とおけば, 求める面積は
$2\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy = \frac{2}{a}\iint_D \sqrt{a^2+x^2+y^2}dxdy$ で与えられる. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\, 0 \leqq r \leqq a\sqrt{\sin 2\theta}\right\}$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は r である. 従って, 求める面積は $\displaystyle\frac{2}{a}\iint_E r\sqrt{a^2+r^2}drd\theta =$

$\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} r\sqrt{a^2+r^2}dr\right)d\theta = \dfrac{2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\dfrac{1}{3}(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=a\sqrt{\sin 2\theta}} d\theta = \dfrac{2a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\sqrt{2}\cos^3\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)-1\right)d\theta =$
$\dfrac{2a^2}{3}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(3\theta-\dfrac{3\pi}{4}\right)+3\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)-1\right)d\theta = \dfrac{2a^2}{3}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{6}\left(\sin\left(3\theta-\dfrac{3\pi}{4}\right)+9\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)-\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$
$\dfrac{a^2}{9}(20-3\pi)$ である.

(14) 与えられた球面と柱面はすべての座標平面に関して対称だから, 与えられた球面の柱面 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ によって切り取られる部分の第一象限に含まれる部分の面積の 8 倍が求める面積である.
従って $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, (x^2+y^2)^2 \leqq a^2(x^2-y^2)\right\}$ とおけば, 求める面積は
$8\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy = \iint_D \dfrac{8a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$ で与えられる. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$
と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\, 0 \leqq r \leqq a\sqrt{\cos 2\theta}\right\}$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は r である. 従って, 求める面積は $\displaystyle\iint_E \dfrac{8ar}{\sqrt{a^2-r^2}}drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \dfrac{8ar}{\sqrt{a^2-r^2}}dr\right)d\theta =$
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[-8a\sqrt{a^2-r^2}\right]_{r=0}^{r=a\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8a^2\left(1-\sqrt{2}\sin\theta\right)d\theta = \left[8a^2\left(\theta+\sqrt{2}\cos\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2\left(\pi+4-4\sqrt{2}\right)$ である.

(15) 与えられた円錐面と柱面は z 軸と xy 平面について対称であり, 与えられた柱面は $xy < 0$ の部分には存在しないため, 与えられた円錐面の柱面 $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$ によって切り取られる部分の第一象限に含まれる部分の面積の 4 倍が求める面積である. 従って $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, (x^2+y^2)^2 \leqq 2a^2xy\right\}$ とおけば, 求める面積は
$4\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy = \iint_D 4\sqrt{2}dxdy$ で与えられる. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\, 0 \leqq r \leqq a\sqrt{\sin 2\theta}\right\}$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は r である. 従って, 求める面積は $\displaystyle\iint_E 4\sqrt{2}rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} 4\sqrt{2}rdr\right)d\theta =$
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{2}a^2\sin 2\theta d\theta = \left[-\sqrt{2}a^2\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}a^2$ である.

(16) $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, x\cos\alpha + y\sin\alpha \leqq a\right\}$ とおけば, 与えられた曲面の第一象限の部分は D の上にある部分であり, $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq \frac{a}{\cos\alpha},\, 0 \leqq y \leqq \frac{a-x\cos\alpha}{\sin\alpha}\right\}$ だから, 求める面積は
$\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy = \iint_D \dfrac{a}{\sqrt{a^2-(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2}}dxdy =$
$\displaystyle\int_0^{\frac{a}{\cos\alpha}}\left(\int_0^{\frac{a-x\cos\alpha}{\sin\alpha}} \dfrac{a}{\sqrt{a^2-(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2}}dy\right)dx = \int_0^{\frac{a}{\cos\alpha}}\left[\dfrac{a}{\sin\alpha}\sin^{-1}\dfrac{x\cos\alpha+y\sin\alpha}{a}\right]_{y=0}^{y=\frac{a-x\cos\alpha}{\sin\alpha}} dx =$
$\displaystyle\int_0^{\frac{a}{\cos\alpha}} \dfrac{a}{\sin\alpha}\left(\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}\dfrac{x\cos\alpha}{a}\right)dx = \dfrac{\pi a^2}{\sin 2\alpha} - \left[\dfrac{ax}{\sin\alpha}\sin^{-1}\dfrac{x\cos\alpha}{a}\right]_0^{\frac{a}{\cos\alpha}} + \int_0^{\frac{a}{\cos\alpha}} \dfrac{ax\cos\alpha}{\sin\alpha\sqrt{a^2-x^2\cos^2\alpha}}dx =$
$\left[-\dfrac{a\sqrt{a^2-x^2\cos^2\alpha}}{\cos\alpha\sin\alpha}\right]_0^{\frac{a}{\cos\alpha}} = \dfrac{2a^2}{\sin 2\alpha}$ である.

(17) $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, x+y \leqq 1\right\}$ とおけば, 与えられた曲面の第一象限の部分は D の上にある部分であり, $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 1,\, 0 \leqq y \leqq 1-x\right\}$ だから, 求める面積は $\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy =$
$\displaystyle\iint_D \sqrt{1+8(x+y)^2}dxdy = \int_0^1\left(\int_0^{1-x}\sqrt{1+8(x+y)^2}dy\right)dx \cdots (*)$ である. $\displaystyle\int_0^{1-x}\sqrt{1+8(x+y)^2}dy =$
$\left[\dfrac{x+y}{2}\sqrt{1+8(x+y)^2}+\dfrac{\sqrt{2}}{8}\log\left(2\sqrt{2}(x+y)+\sqrt{1+8(x+y)^2}\right)\right]_{y=0}^{y=1-x} = \dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\log\left(\sqrt{2}+1\right)-\dfrac{x}{2}\sqrt{1+8x^2}-$

$\frac{\sqrt{2}}{8}\log\bigl(2\sqrt{2}x+\sqrt{1+8x^2}\bigr)$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2}\sqrt{1+8x^2}dx = \left[\frac{1}{48}(1+8x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{13}{24}$, $\displaystyle\int_0^1 \log\Bigl(2\sqrt{2}x+\sqrt{1+8x^2}\Bigr) =$ $\displaystyle\Bigl[x\log\Bigl(2\sqrt{2}x+\sqrt{1+8x^2}\Bigr)\Bigr]_0^1 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{1+8x^2}}dx = 2\log\Bigl(\sqrt{2}+1\Bigr) - \left[\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{1+8x^2}\right]_0^1 = 2\log\Bigl(\sqrt{2}+1\Bigr) - \frac{\sqrt{2}}{2}$ より,

$(*) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\log\bigl(\sqrt{2}+1\bigr) - \frac{13}{24} - \frac{\sqrt{2}}{8}\left(2\log\bigl(\sqrt{2}+1\bigr) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{13}{12}$

(18) $D = \bigl\{\bigl(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\bigr) \in \boldsymbol{R}^2 \bigm| x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, x+y \leqq \sqrt{2}a\bigr\}$ とおけば, 与えられた曲面の第一象限の部分は D の上にある部分であり, $D = \bigl\{\bigl(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\bigr) \in \boldsymbol{R}^2 \bigm| 0 \leqq x \leqq \sqrt{2}a,\, 0 \leqq y \leqq \sqrt{2}a - x\bigr\}$ だから, 求める面積は $\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy =$ $\displaystyle\iint_D \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2a^2-(x+y)^2}}dxdy = \int_0^{\sqrt{2}a}\left(\int_0^{\sqrt{2}a-x}\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2a^2-(x+y)^2}}dy\right)dx = \int_0^{\sqrt{2}a}\left[\sqrt{2}a\sin^{-1}\frac{x+y}{\sqrt{2}a}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{2}a-x}dx =$ $\displaystyle\sqrt{2}a\int_0^{\sqrt{2}a}\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}a}\right)dx = \pi a^2 - \left[\sqrt{2}ax\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}a}\right]_0^{\sqrt{2}a} + \int_0^{\sqrt{2}a}\frac{\sqrt{2}ax}{\sqrt{2a^2-x^2}}dx = \Bigl[-\sqrt{2}a\sqrt{2a^2-x^2}\Bigr]_0^{\sqrt{2}a} = 2a^2$ である.

(19) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0,\, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $E = [1,2]\times\bigl[0, \frac{\pi}{2}\bigr]$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は r である. 従って, 求める面積は $\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy =$ $\displaystyle\iint_D \frac{\sqrt{(x^2+y^2)^2+2}}{x^2+y^2}dxdy = \iint_E \frac{\sqrt{r^4+2}}{r}drd\theta = \int_1^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{r^4+2}}{r}d\theta\right)dr = \int_1^2 \frac{\pi\sqrt{r^4+2}}{2r}dr \cdots (*)$ で与えられる. $t = \sqrt{r^4+2}$ とおけば, $r^3dr = \frac{t}{2}dt$ であり, r が 1 から 2 まで動けば, t は $\sqrt{3}$ から $3\sqrt{2}$ まで動くため, $\displaystyle(*) = \int_1^2 \frac{\pi\sqrt{r^4+2}}{2r^4}r^3dr = \int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}}\frac{\pi t^2}{4(t^2-2)}dt = \int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}}\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}}-\frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)\right)dt =$ $\displaystyle\frac{\pi}{4}\left[t+\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right]_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}\bigl(6-\sqrt{6}+2\log\bigl(\sqrt{3}+\sqrt{2}\bigr)-\log 2\bigr)$.

(20) 求める面積は $\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy = \int_0^a\left(\int_0^{a-x}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dy\right)dx =$ $\displaystyle\int_0^a\left[a\sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]_{y=0}^{y=a-x}dx = \int_0^a a\sin^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx \cdots (*)$ によって与えられる. $\theta = \sin^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ とおけば $x = \frac{a(1-\sin^2\theta)}{1+\sin^2\theta}$, $dx = \frac{-4a\sin\theta\cos\theta}{(1+\sin^2\theta)^2}d\theta$ であり, x が 0 から a まで動けば, θ は $\frac{\pi}{2}$ から 0 まで動くため, $\displaystyle(*) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4a^2\theta\sin\theta\cos\theta}{(1+\sin^2\theta)^2}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\left(\frac{-2a^2}{1+\sin^2\theta}\right)'d\theta = \left[\frac{-2a^2\theta}{1+\sin^2\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a^2}{1+\sin^2\theta}d\theta =$ $\displaystyle-\frac{\pi a^2}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a^2}{\frac{1}{\cos^2\theta}+\tan^2\theta}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = -\frac{\pi a^2}{2} + \int_0^{\infty}\frac{a^2}{\frac{1}{2}+t^2}dt = -\frac{\pi a^2}{2} + \Bigl[\sqrt{2}a^2\tan^{-1}\Bigl(\sqrt{2}t\Bigr)\Bigr]_0^{\infty} = \frac{\pi a^2}{2}\Bigl(\sqrt{2}-1\Bigr)$.

(21) $D = \Bigl\{\bigl(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\bigr) \in \boldsymbol{R}^2 \Bigm| 0 \leqq x \leqq a,\, 0 \leqq y \leqq b\bigl(1-\sqrt{\tfrac{x}{a}}\bigr)^2\Bigr\}$ だから, 求める面積は $\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy =$ $\displaystyle\int_0^a\left(\int_0^{b\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dy\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^a\left[2\sqrt{xy}+\frac{2y\sqrt{y}}{3\sqrt{x}}\right]_{y=0}^{y=b\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2}dx =$ $\displaystyle\sqrt{2b}\int_0^a\left(\sqrt{x}-\frac{x}{\sqrt{a}}+\frac{b}{3\sqrt{x}}-\frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{b\sqrt{x}}{a}-\frac{bx}{3\sqrt{a^3}}\right)dx = \sqrt{2b}\left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x^2}{2\sqrt{a}}+\frac{2b\sqrt{x}}{3}-\frac{bx}{\sqrt{a}}+\frac{2b\sqrt{x^3}}{3a}-\frac{bx^2}{6\sqrt{a^3}}\right]_0^a =$ $\frac{\sqrt{2ab}(a+b)}{6}$ である.

(22) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が与えられた曲面上の点で, $x \neq 0$ ならば $\sinh z = \dfrac{\sin y}{\sinh x}$ だから $z = \log\left(\dfrac{\sin y}{\sinh x} + \sqrt{\dfrac{\sin^2 y}{\sinh^2 x} + 1}\right) = \log\left(\sin y + \sqrt{\sinh^2 x + \sin^2 y}\right) - \log(\sinh x)$ である. 従って $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-\cosh x \sin y}{\sinh x\sqrt{\sinh^2 x + \sin^2 y}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\cos y}{\sqrt{\sinh^2 x + \sin^2 y}}$ となるため, 求める面積は $\displaystyle\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy = \iint_D \frac{\cosh x}{\sinh x} dxdy = \int_a^b \left(\int_{\frac{c}{\cosh^2 x}}^{c} \frac{\cosh x}{\sinh x} dy\right) dx = \int_a^b c\frac{\sinh x}{\cosh x} dx = [c\log(\cosh x)]_a^b = c\log\left(\frac{\cosh b}{\cosh a}\right)$.

11. (1) $\boldsymbol{v} \in E$ に対し, $f(\boldsymbol{v})$ の第 j 成分を $f_j(\boldsymbol{v})$ とすれば, 合成写像の微分法から

$$\begin{aligned}
\big(D_1\psi(\boldsymbol{v})\ D_2\psi(\boldsymbol{v})\big) &= \psi'(\boldsymbol{v}) = \varphi'(f(\boldsymbol{v}))f'(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s}(f(\boldsymbol{v})) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(f(\boldsymbol{v})) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}(f(\boldsymbol{v})) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(f(\boldsymbol{v})) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial s}(f(\boldsymbol{v})) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial t}(f(\boldsymbol{v})) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s}(\boldsymbol{v}) & \frac{\partial f_1}{\partial t}(\boldsymbol{v}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial s}(\boldsymbol{v}) & \frac{\partial f_2}{\partial t}(\boldsymbol{v}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s}(f(\boldsymbol{v}))\frac{\partial f_1}{\partial s}(\boldsymbol{v}) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(f(\boldsymbol{v}))\frac{\partial f_2}{\partial s}(\boldsymbol{v}) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial s}(f(\boldsymbol{v}))\frac{\partial f_1}{\partial t}(\boldsymbol{v}) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(f(\boldsymbol{v}))\frac{\partial f_2}{\partial t}(\boldsymbol{v}) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}(f(\boldsymbol{v}))\frac{\partial f_1}{\partial s}(\boldsymbol{v}) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(f(\boldsymbol{v}))\frac{\partial f_2}{\partial s}(\boldsymbol{v}) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}(f(\boldsymbol{v}))\frac{\partial f_1}{\partial t}(\boldsymbol{v}) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(f(\boldsymbol{v}))\frac{\partial f_2}{\partial t}(\boldsymbol{v}) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial s}(f(\boldsymbol{v}))\frac{\partial f_1}{\partial s}(\boldsymbol{v}) + \frac{\partial \varphi_3}{\partial t}(f(\boldsymbol{v}))\frac{\partial f_2}{\partial s}(\boldsymbol{v}) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial s}(f(\boldsymbol{v}))\frac{\partial f_1}{\partial t}(\boldsymbol{v}) + \frac{\partial \varphi_3}{\partial t}(f(\boldsymbol{v}))\frac{\partial f_2}{\partial t}(\boldsymbol{v}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

だから $D_1\psi(\boldsymbol{v}) = \dfrac{\partial f_1}{\partial s}(\boldsymbol{v})D_1\varphi(f(\boldsymbol{v})) + \dfrac{\partial f_2}{\partial s}(\boldsymbol{v})D_2\varphi(f(\boldsymbol{v}))$, $D_2\psi(\boldsymbol{v}) = \dfrac{\partial f_1}{\partial t}(\boldsymbol{v})D_1\varphi(f(\boldsymbol{v})) + \dfrac{\partial f_2}{\partial t}(\boldsymbol{v})D_2\varphi(f(\boldsymbol{v}))$ が成り立つ. 従って, 外積の性質から

$$\begin{aligned}
D_1\psi(\boldsymbol{v}) \times D_2\psi(\boldsymbol{v}) &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial s}(\boldsymbol{v})D_1\varphi(f(\boldsymbol{v})) + \frac{\partial f_2}{\partial s}(\boldsymbol{v})D_2\varphi(f(\boldsymbol{v}))\right) \times \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}(\boldsymbol{v})D_1\varphi(f(\boldsymbol{v})) + \frac{\partial f_2}{\partial t}(\boldsymbol{v})D_2\varphi(f(\boldsymbol{v}))\right) \\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial s}(\boldsymbol{v})\frac{\partial f_2}{\partial t}(\boldsymbol{v}) - \frac{\partial f_1}{\partial t}(\boldsymbol{v})\frac{\partial f_2}{\partial s}(\boldsymbol{v})\right) D_1\varphi(f(\boldsymbol{v})) \times D_2\varphi(f(\boldsymbol{v})) \\
&= (\det f'(\boldsymbol{v}))D_1\varphi(f(\boldsymbol{v})) \times D_2\varphi(f(\boldsymbol{v}))
\end{aligned}$$

だから $|\det f'(\boldsymbol{v}))|\|D_1\varphi(f(\boldsymbol{v})) \times D_2\varphi(f(\boldsymbol{v}))\| = \|D_1\psi(\boldsymbol{v}) \times D_2\psi(\boldsymbol{v})\|$ が得られる. C^1 級関数 $\lambda : D \to \boldsymbol{R}$ に対し, $\mu : E \to \boldsymbol{R}$ を f と λ の合成写像 $\lambda\circ f : E \to \boldsymbol{R}$ とする. 写像 f による変数変換を行えば,

$$\begin{aligned}
\iint_D \lambda\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)\left\|D_1\varphi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) \times D_2\varphi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)\right\| dsdt &= \iint_E \lambda\left(f\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)\right)\left\|D_1\varphi\left(f\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)\right) \times D_2\varphi\left(f\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)\right)\right\|\left|\det f'\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)\right| dudv \\
&= \iint_E \mu\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)\left\|D_1\psi\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \times D_2\psi\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)\right\| dudv
\end{aligned}$$

となり, λ が $\lambda(\boldsymbol{u}) = \rho(\varphi(\boldsymbol{u}))$ で定義される写像の場合と $\lambda(\boldsymbol{u}) = \varphi_i(\boldsymbol{u})\rho(\varphi(\boldsymbol{u}))$ で定義される写像の場合を考えれば, 結果が得られる.

(2) H は $\boldsymbol{a}$ を位置ベクトルとする点を通り, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ に平行な平面であるとする. 仮定から, C^1 級関数 $\alpha, \beta : D \to \boldsymbol{R}$ が存在して, S のパラメータ表示 $\varphi : D \to X$ は $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} + \alpha(\boldsymbol{x})\boldsymbol{b} + \beta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{c}$ の形に表される. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の第 i 成分をそれぞれ a_i, b_i, c_i とすれば, $m(S)$, $g_i(S)$ の定義から次の等式が成り立つ.

$$g_i(S) = a_i m(S) + b_i \iint_D \alpha\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)\rho\left(\varphi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)\right)\left\|D_1\varphi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) \times D_2\varphi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)\right\| dsdt + c_i \iint_D \beta\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)\rho\left(\varphi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)\right)\left\|D_1\varphi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) \times D_2\varphi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)\right\| dsdt$$

そこで,

$$\begin{aligned}
A(S) &= \frac{1}{m(S)} \iint_D \alpha\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)\rho\left(\varphi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)\right)\left\|D_1\varphi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) \times D_2\varphi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)\right\| dsdt \\
B(S) &= \frac{1}{m(S)} \iint_D \beta\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)\rho\left(\varphi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)\right)\left\|D_1\varphi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) \times D_2\varphi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)\right\| dsdt
\end{aligned}$$

とおけば $g_i(S) = m(S)(a_i + A(S)b_i + B(S)c_i)$ が成り立つため, S の重心の位置ベクトルは $\boldsymbol{a} + A(S)\boldsymbol{b} + B(S)\boldsymbol{c}$ となり, S の重心は H 上にあることがわかる.

(3) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ をそれぞれ点 A, B, C の位置ベクトルとする. $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1 - s\right\}$ とし, $\varphi : D \to \boldsymbol{R}^3$ を $\varphi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) = \boldsymbol{a} + s(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) + t(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})$ で定めれば, φ は $\triangle$ABC のパラメータ表示である. $\boldsymbol{a} = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{smallmatrix}\right)$,

$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とおけば $\varphi_i\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) = a_i + s(b_i - a_1) + t(c_i - a_i)$ であり, $D_1\varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, $D_2\varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$ より $A = \|D_1\varphi(\boldsymbol{v}) \times D_2\varphi(\boldsymbol{v})\| = \|(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})\|$ とおく. ρ がつねに一定の値 k をとるとすれば

$$
\begin{aligned}
m(\triangle\mathrm{ABC}) &= \iint_D kA\,dsdt = \int_0^1 \left(\int_0^{1-s} A\,dt\right) ds = \int_0^1 kA(1-s)\,ds = \frac{kA}{2} \\
g_i(\triangle\mathrm{ABC}) &= \iint_D kA(a_i + s(b_i - a_i) + t(c_i - a_i))\,dsdt = \int_0^1 \left(\int_0^{1-s} kA(a_i + s(b_i - a_i) + t(c_i - a_i))dt\right) ds \\
&= \int_0^1 kA\left[a_i t + st(b_i - a_i) + \frac{t^2}{2}(c_i - a_i)\right]_{t=0}^{t=1-s} ds \\
&= \int_0^1 kA\left(a_i(1-s) + s(1-s)(b_i - a_i) + \frac{(1-s)^2}{2}(c_i - a_i)\right) ds \\
&= kA\left[a_i\left(s - \frac{s^2}{2}\right) + \left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3}\right)(b_i - a_i) - \frac{(1-s)^3}{6}(c_i - a_i)\right]_0^1 = \frac{kA(a_i + b_i + c_i)}{6}
\end{aligned}
$$

だから, $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心は $\begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1+c_1}{3} \\ \frac{a_2+b_2+c_2}{3} \\ \frac{a_3+b_3+c_3}{3} \end{pmatrix}$ である.

(4) $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq s \leqq 2\pi,\ 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$ とし, $\varphi : D \to \boldsymbol{R}^3$ を $\varphi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a\cos s\sin t \\ a\sin s\sin t \\ a\cos t \end{pmatrix}$ で定めれば, φ は S のパラメータ表示である. $D_1\varphi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -a\sin s\sin t \\ a\cos s\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ $D_2\varphi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a\cos s\cos t \\ a\sin s\cos t \\ -a\sin t \end{pmatrix}$ だから $D_1\varphi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) \times D_2\varphi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -a^2\cos s\sin^2 t \\ -a^2\sin s\sin^2 t \\ -a^2\cos t\sin t \end{pmatrix}$ である. 従って $\|D_1\varphi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) \times D_2\varphi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)\| = a^2\sin t$ だから, ρ がつねに一定の値 k をとるとすれば

$$
\begin{aligned}
m(S) &= \iint_D a^2 k\sin t\,dsdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} a^2 k\sin t\,ds\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi a^2 k\sin t\,dt = 2\pi a^2 k \\
g_1(S) &= \iint_D a^3 k\cos s\sin^2 t\,dsdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} a^3 k\cos s\sin^2 t\,ds\right) dt = 0 \\
g_2(S) &= \iint_D a^3 k\sin s\sin^2 t\,dsdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} a^3 k\sin s\sin^2 t\,ds\right) dt = 0 \\
g_3(S) &= \iint_D a^3 k\cos t\sin t\,dsdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} a^3 k\cos t\sin t\,ds\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi a^3 k\sin 2t\,dt = \left[-\frac{\pi a^3 k}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi a^3 k
\end{aligned}
$$

である. 従って S の重心は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$ である.