微積分学 I 演習問題

目 次

微積分学 I 演習問題　第 1 回　数列の極限

1. 次の極限を求めよ. 必要ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ を用いてよい.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n+1}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}((-2)^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+3n^2+1}-n^2\right)$　(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+n^3+n}-n^2}{n}$　(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$　(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}$

(10) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(3n)^n}{(3n+1)^n}$　(11) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^{n-1}}{(2n)^{n-1}}$　(12) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)$

2. 正の実数 a に対し, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ であることを示せ.

3. $a,b,c\in\boldsymbol{R}$ を定数とし a は 0 でないとする. $x_1=c$, $x_{n+1}=ax_n+b$ を満たす数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の一般項を求め, これが収束するための条件を求めよ.

4. 漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n^2+1)$ を満たす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える.

(1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列であることを示せ.

(2) $|a_1|\leqq 1$ ならばすべての n に対して $|a_n|\leqq 1$ が成り立つことを数学的帰納法で示せ.

(3) $|a_1|\leqq 1$ のとき $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束・発散を調べ, 収束する場合には極限値を求めよ.

5. $a,b>0$ とし, $x_1\geqq -\dfrac{b}{a}$ かつ $x_{n+1}=\sqrt{ax_n+b}$ を満たす数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える.

(1) α を方程式 $x=\sqrt{ax+b}$ の解とするとき,「$x_n<\alpha$ ならば $x_{n+1}<\alpha$」と「$x_n>\alpha$ ならば $x_{n+1}>\alpha$」が成り立つことを示せ.

(2) 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $x_1<\alpha$ ならば単調増加数列であり, $x_1>\alpha$ ならば単調減少数列であることを示せ.

(3) 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限を求めよ.

6. $a,b>0$, $m>1$ とし, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_1=b$, $a_{n+1}=\left(1-\dfrac{1}{m}\right)a_n+\dfrac{a}{ma_n^{m-1}}$ で定める.

(1) $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{m}\right)x+\dfrac{a}{mx^{m-1}}$ で与えられる関数 $f:(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ の増減を調べよ.

(2) $b\neq\sqrt[m]{a}$ かつ $n\geqq 2$ ならば $a_n>\sqrt[m]{a}$ であることを n による数学的帰納法で示せ.

(3) $b\neq\sqrt[m]{a}$ かつ $n\geqq 2$ ならば $a_n>a_{n+1}$ であることを示せ.

(4) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示し, 極限値を求めよ.

7. 次の級数の和を求めよ. ただし, k は自然数とする.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+k)}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+k)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+k}\right)}$

8. (発展問題) 以下の漸化式を満たす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束・発散について調べよ.

(1) $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{a_n^2+1}$　(2) $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{a_n^2}{a_n^2+1}$

9. (発展問題) 任意の $n=2,3,4,\ldots$ に対し, 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の第 n 項目までの和と積が等しいとする.

(1) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k$ とおくとき, S_n を用いて S_{n+1} を表わせ.

(2) x_n を用いて x_{n+1} を表わせ.

(3) $0\neq x_1<1$ ならば任意の $n\geqq 3$ に対して $1>x_n>x_{n+1}>0$ が成り立ち, $x_1>1$ ならば任意の $n\geqq 2$ に対して $x_n>x_{n+1}>1$ が成り立つことを示せ.

(4) 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限を求めよ.

第 1 回の演習問題の解答

1. (1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{0}{1+0}=0$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}((-2)^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(3^n\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1\right)\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}3\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1\right)^{\frac{1}{n}}=3$

(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}=0$

(4) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$

(5) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+3n^2+1}-n^2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{\sqrt{n^4+3n^2+1}+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}}+1}=\frac{3}{2}$

(6) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=$
$\displaystyle \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=e\cdot1=e$

(7) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+n^3+n}-n^2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n}{n\left(\sqrt{n^4+n^3+n}+n^2\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}+1}=\frac{1}{2}$

(8) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{n}{n-1}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}=$
$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}=\frac{1}{e\cdot1}=\frac{1}{e}$

(9) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}$

(10) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{(3n)^n}{(3n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{(3n+1)^n}{(3n)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

(11) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^{n-1}}{(2n)^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1}=\sqrt{e}$

(12) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}n\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}=\frac{1}{2}\log\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)=\frac{1}{2}\log e=\frac{1}{2}$

2. $a>1$ の場合, $x_n=\sqrt[n]{a}-1$ によって数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めれば, 各項は正で, 二項定理により, すべての自然数 n に対して $a=(1+x_n)^n=1+nx_n+\sum\limits_{k=2}^{n}{}_nC_kx_n^k\geqq 1+nx_n$ が成り立つ. 従って, すべての自然数 n に対して $0<x_n\leqq\dfrac{a-1}{n}$ であり, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a-1}{n}=0$ だから $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ である. 故に $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)=1$ である. $0<a<1$ の場合, $\dfrac{1}{a}>1$ だから, 上で示したことから, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}=1$ である. 従って, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a}}}=\dfrac{1}{1}=1$ が得られる.

3. $a\neq1$ の場合, $\alpha=\dfrac{b}{1-a}$ とおくと $\alpha=a\alpha+b$ である. $x_{n+1}=ax_n+b$ の両辺からこの等式を辺々引けば, $x_{n+1}-\alpha=a(x_n-\alpha)$ となるため $\{x_n-\alpha\}_{n=1}^{\infty}$ は初項 $c-\alpha$, 公比 a の等比数列である. 従って一般項は $x_n=a^{n-1}(c-\alpha)+\alpha=a^{n-1}\left(c+\dfrac{b}{a-1}\right)-\dfrac{b}{a-1}$ である. この場合 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するのは $-1<a<1$ または $c+\dfrac{b}{a-1}=0$ が成り立つときである.

$a=1$ の場合, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は初項 c 公差 b の等差数列になるため, 一般項は $x_n=c+b(n-1)$ である. よって, この場合は $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するのは $b=0$ の場合である.

以上から, この数列が収束する条件は, $-1 < a < 1$ または $b = c(1-a)$ である.

4. (1) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{2}(a_n^2+1) - a_n = \dfrac{1}{2}(a_n-1)^2 \geqq 0$ だから $a_{n+1} \geqq a_n$ が成り立つ.

(2) $n=1$ のときは, 仮定により $|a_1| \leqq 1$ が成り立つ. $|a_n| \leqq 1$ が成り立つと仮定すれば $a_{n+1}-1 = \dfrac{1}{2}(a_n^2+1)-1 = \dfrac{1}{2}(a_n^2-1) \leqq 0$ だから $a_{n+1} \leqq 1$ である. また, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n^2+1) \geqq 0$ だから $|a_{n+1}| \leqq 1$ である.

(3) (1), (2) より $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加数列であるため, この数列は収束する. 極限を L として $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n^2+1)$ の両辺の極限を考えると $L = \dfrac{1}{2}(L^2+1)$ より $L=1$ が得られる. よって $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 1 に収束する.

5. (1) $x_{n+1} = \sqrt{ax_n+b}$ から $\alpha = \sqrt{a\alpha+b}$ を辺々引くと

$$x_{n+1} - \alpha = \sqrt{ax_n+b} - \sqrt{a\alpha+b} = \frac{a(x_n-\alpha)}{\sqrt{ax_n+b}+\sqrt{a\alpha+b}}$$

となるため, $\sqrt{ax_n+b}+\sqrt{a\alpha+b} > 0$ だから $x_{n+1}-\alpha$ と $x_n-\alpha$ は同符号であることがわかる. 従って $x_n < \alpha$ ならば $x_{n+1} < \alpha$ であり, $x_n > \alpha$ ならば $x_{n+1} > \alpha$ である.

(2) α は 2 次方程式 $x^2-ax-b=0$ の正の解で, 負の解を β とすれば $x^2-x-a = (x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解されることに注意する. 今度は $x_{n+1} = \sqrt{ax_n+b}$ の両辺から x_n を引くと

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{ax_n+b} - x_n = \frac{-x_n^2+ax_n+b}{\sqrt{ax_n+b}+x_n} = \frac{-(x_n-\alpha)(x_n-\beta)}{\sqrt{ax_n+b}+x_n}$$

であり, $x_n \geqq 0$ を満たす n (例えば $n \geqq 2$) に対して $x_{n+1}-x_n$ と $x_n-\alpha$ は異符号であることがわかる.

(1) の結果から n による数学的帰納法で $x_1 < \alpha$ ならばすべての n に対して $x_n < \alpha$ が成り立つことが示されるため, 上のことから, $n \geqq 2$ に対して $x_{n+1} > x_n$ が成り立つことがわかる. また, $-a \leqq x_1 < 0$ ならば $x_2 = \sqrt{ax_1+b} \geqq 0 > x_1$ であり $x_1 \geqq 0$ ならば上のことから $x_2 > x_1$ となるため, $x_1 < \alpha$ ならば数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列である.

同様に $x_1 > \alpha$ ならばすべての n に対して $x_n > \alpha > 0$ となるため, 上のことから, $n \geqq 1$ に対して $x_{n+1} > x_n$ が成り立つことがわかる.

(3) (1), (2) より数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $x_1 < \alpha$ ならば上に有界な単調増加数列であり, $x_1 > \alpha$ なら下に有界な単調減少数列だから, いずれにしても収束する. そこで, 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限を L とおき, $x_{n+1} = \sqrt{ax_n+b}$ の両辺の極限を考えると $L = \sqrt{aL+b}$ となるため, $L = \alpha = \dfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ であることがわかる.

6. (1) $f'(x) = \left(1-\dfrac{1}{m}\right)\left(1-\dfrac{a}{x^m}\right)$ であり $a>0,\ m>1$ だから f は $(0, \sqrt[m]{a}]$ において単調に減少し, $[\sqrt[m]{a}, \infty)$ において単調に増加して, $\sqrt[m]{a}$ において最小値 $\sqrt[m]{a}$ をとる.

(2) f は $(0, \sqrt[m]{a}]$ において単調に減少するため, $0 < b < \sqrt[m]{a}$ ならば $a_2 = f(b) > f(\sqrt[m]{a}) = \sqrt[m]{a}$ である. また, f は $[\sqrt[m]{a}, \infty)$ において単調に増加するため, $a_n > \sqrt[m]{a}$ ならば $a_{n+1} = f(a_n) > f(\sqrt[m]{a}) = \sqrt[m]{a}$ である. よって, $b \neq \sqrt[m]{a}$ のとき n による数学的帰納法により, $n = 2, 3, \ldots$ に対して $a_n > \sqrt[m]{a}$ であることがわかる.

(3) $f(x) - x = \dfrac{1}{mx^{m-1}}(a - x^m)$ だから $x > \sqrt[m]{a}$ ならば $f(x)-x < 0$ すなわち $f(x) < x$ であることに注意する. $b \neq \sqrt[m]{a}$ かつ $n \geqq 2$ ならば (2) の結果から $a_n > \sqrt[m]{a}$ だから, 上の注意により $a_n > f(a_n) = a_{n+1}$ が成り立つ.

(4) (2) と (3) により, $b \neq \sqrt[m]{a}$ ならば $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ は下に有界な単調減少数列である. また, $b = \sqrt[m]{a}$ ならば $f(\sqrt[m]{a}) = \sqrt[m]{a}$ より, すべての n に対して $a_n = \sqrt[m]{a}$ である. 従って, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束して, その極限値を α とすれば $a_{n+1} = \left(1-\dfrac{1}{m}\right)a_n + \dfrac{a}{ma_n^{m-1}}$ から $\alpha = \left(1-\dfrac{1}{m}\right)\alpha + \dfrac{a}{m\alpha^{m-1}}$ である. これより $\alpha = \sqrt[m]{a}$ が得られる.

7. (1) $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\right)$ だから

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}&=\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\right)\\&=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}\right)\end{aligned}$$

である. 従って $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}\right)=\frac{1}{kk!}$.

(2) $\dfrac{1}{n(n+k)}=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k}\right)$ だから $m\geqq k$ ならば

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)=\frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}-\sum_{n=k+1}^{m+k}\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}-\sum_{n=m+1}^{m+k}\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{m+n}\right)$$

である. 従って $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+k)}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{m+n}\right)=\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}$.

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+k)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+k}\right)}=\dfrac{\sqrt{n+k}-\sqrt{n}}{k\sqrt{n(n+k)}}=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$ だから $m\geqq k$ ならば

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{n(n+k)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+k}\right)}&=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)=\frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{n}}-\sum_{n=k+1}^{m+k}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\&=\frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{n}}-\sum_{n=m+1}^{m+k}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{n}}-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{m+n}}\right)\end{aligned}$$

である. 従って $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+k)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+k}\right)}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{k}\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{n}}-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{m+n}}\right)=\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

8. (1) 仮定から以下の等式が成り立つ.

$$a_{n+1}-1=\frac{a_n(a_n-1)^2}{2(a_n^2+1)}\ \cdots\ (i)\qquad a_{n+1}-a_n=\frac{-(a_n-1)\left(\left(a_n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right)}{2(a_n^2+1)}\ \cdots\ (ii)$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束するならば (ii) より, α は $\dfrac{-(\alpha-1)\left(\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right)}{2(\alpha^2+1)}=0$ を満たす実数だから $\alpha=1$ である. もし 0 が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上界ならば (ii) より, $a_n<a_{n+1}<1$ だから, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 を上界とする単調増加数列になるため, 0 以下の値に収束する. このことは $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するならば, その極限値は 1 であることと矛盾するため, $a_{N_0}>0$ となる自然数 N_0 が存在する. (i) より $a_{N_0+1}\geqq 1$ であり, (i), (ii) より, $a_n\geqq 1$ ならば $a_n\geqq a_{n+1}\geqq 1$ だから, $\{a_n\}_{n=N_0+1}^{\infty}$ は 1 を下界とする単調減少数列となって収束する. 故に $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, a_1 がどのような値であってもつねに 1 に収束する.

(2) 仮定から以下の等式が成り立つ.

$$a_{n+1}=\frac{a_n(a_n+1)^2}{2(a_n^2+1)}\cdots(i)\quad a_{n+1}-1=\frac{(a_n-1)\left(\left(a_n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right)}{2(a_n^2+1)}\cdots(ii)\quad a_{n+1}-a_n=\frac{-a_n(a_n-1)^2}{2(a_n^2+1)}\cdots(iii)$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束するならば (iii) より, α は $\dfrac{-\alpha(\alpha-1)^2}{2(\alpha^2+1)}=0$ を満たす実数だから $\alpha=0$ または 1 である.

(i), (iii) より, $a_n\leqq 0$ ならば $a_n\leqq a_{n+1}\leqq 0$ だから, $a_1\leqq 0$ ならば $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 を上界とする単調増加数列となって収束する. その極限値は 0 または 1 であるが, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 を上界とするため, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する. (i), (ii), (iii) より, $0<a_n<1$ ならば $0<a_{n+1}<a_n<1$ だから, $0<a_1\leqq 1$ ならば $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 を下界とする

単調減少数列となって収束する．その極限値は 0 または 1 であるが，すべての自然数 n に対して $a_n \leqq a_1 < 1$ だから $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する．(*ii*), (*iii*) より，$a_n \geqq 1$ ならば $1 \leqq a_{n+1} \leqq a_n$ だから，$a_1 \geqq 1$ ならば $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 1 を下界とする単調減少数列となって収束する．その極限値は 0 または 1 であるが，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 1 を下界とするため，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 1 に収束する．以上から $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，$a_1 < 1$ ならば 0 に収束し，$a_1 \geqq 1$ ならば 0 に収束する．

9. (1) 仮定から $S_{n+1} = x_{n+1}S_n = S_n + x_{n+1}$ だから $x_{n+1}(S_n - 1) = S_n$．これより，もし $S_n = 1$ とすれば $S_n = 0$ となって矛盾が生じるため $x_{n+1} = \dfrac{S_n}{S_n - 1}$ である．従って $S_{n+1} = \dfrac{S_n^2}{S_n - 1}$．

(2) $S_{n+1} = x_{n+1}S_n = S_n + x_{n+1}$ から $S_n(x_{n+1} - 1) = x_{n+1}$．故に，もし $x_{n+1} = 1$ とすれば $x_{n+1} = 0$ となって矛盾が生じるため $S_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_{n+1} - 1}$ である．これを (1) で得た式に代入すれば，$\dfrac{x_{n+2}}{x_{n+2} - 1} = \dfrac{x_{n+1}^2}{x_{n+1} - 1}$ が得られ，これより $x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1}^2}{x_{n+1}^2 - x_{n+1} + 1}$ $(n \geqq 1)$ を得る．従って $n \geqq 2$ の場合は $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{x_n^2 - x_n + 1}$ である．また $x_1x_2 = x_1 + x_2$ より $x_2(x_1 - 1) = x_1$ だから $x_1 \neq 1$ である．よって $n = 1$ の場合は $x_2 = \dfrac{x_1}{x_1 - 1}$ である．

(3) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x + 1}$ によって関数 f を定めると (2) より $n \geqq 2$ ならば $x_{n+1} = f(x_n)$ であることに注意する．$0 \neq x < 1$ ならば $x^2 - x + 1 > x^2 > 0$ だから $0 < f(x) < 1$ であり，$x > 1$ ならば $x^2 > x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ だから $f(x) > 1$ である．

$0 \neq x_1 < 1$ の場合，$x_2 = \dfrac{x_1}{x_1 - 1}$ から $0 \neq x_2 < 1$ となるため，上の議論から $x_3 = f(x_2)$ は $0 < x_3 < 1$ を満たす．帰納的に $0 < x_n < 1$ が成り立つと仮定すれば，上の結果から $0 < x_{n+1} = f(x_n) < 1$ である．

$x_1 > 1$ の場合，$x_2 = \dfrac{x_1}{x_1 - 1}$ から $x_2 > 1$ となる．帰納的に $x_n > 1$ が成り立つと仮定すれば，上の結果から $x_{n+1} = f(x_n) > 1$ である．

また $x - f(x) = \dfrac{x(x-1)^2}{x^2 - x + 1}$ だから $0 < x < 1$, $x > 1$ ならば $f(x) < x$ が成り立つことに注意すれば，$x_1 < 1$ の場合は $n \geqq 3$ ならば $x_{n+1} < x_n$ が成り立ち，$x_1 > 1$ の場合は $n \geqq 2$ ならば $x_{n+1} < x_n$ が成り立つことがわかる．

(4) $x_1 = 0$ ならば，明らかにすべての n に対して $x_n = 0$ だから，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する．また，(2) の解答でみたように，$x_1 \neq 1$ である．$x_1 \neq 0$ の場合は (3) の結果により，実数列 $\{x_n\}_{n=3}^{\infty}$ は下に有界な単調減少数列になるため収束する．$\{x_n\}_{n=3}^{\infty}$ の極限を L とおく．(2) より，$x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{x_n^2 - x_n + 1}$ だから，この両辺の n を大きくすれば $L = \dfrac{L^2}{L^2 - L + 1}$ が得られる．従って $L(L-1)^2 = 0$ が成り立つため，$L = 0$ または $L = 1$ である．$0 \neq x_1 < 1$ ならば任意の $n \geqq 3$ に対して $1 > x_n > x_{n+1} > 0$ だから $0 \leqq L < 1$ となるため $L = 0$ である．$x_1 > 1$ ならば任意の $n \geqq 2$ に対して $x_n > 1$ だから $L \geq 1$ となるため $L = 1$ である．以上から $x_1 < 1$ ならば $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束し，$x_1 > 1$ ならば $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 1 に収束する．

微積分学 I 演習問題　第2回　逆三角関数

1. (1) $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{1}{3}$ とおくとき, 次の $\boxed{}$ にあてはまる自然数を求めよ.

$$\tan 2\alpha = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\quad \tan\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}},\quad \pi = 8\tan^{-1}\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}} + 4\tan^{-1}\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}.$$

(2) $\beta = \tan^{-1}\dfrac{1}{5}$ とおくとき, 次の $\boxed{}$ にあてはまる自然数を求めよ.

$$\tan 2\beta = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\quad \tan 4\beta = \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}},\quad \tan\left(4\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}},\quad \pi = 16\tan^{-1}\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}} - 4\tan^{-1}\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}.$$

2. 次の関係式が成り立つことを示せ.

(1) $\sin\left(\cos^{-1}x\right) = \cos\left(\sin^{-1}x\right) = \sqrt{1-x^2}$　(2) $\sin\left(2\cos^{-1}x\right) = 2x\sqrt{1-x^2}$　(3) $\tan\left(\cos^{-1}x\right) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

(4) $\tan\left(\sin^{-1}x\right) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$　(5) $\cos\left(\tan^{-1}x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　(6) $\sin\left(\tan^{-1}x\right) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

3. 次の等式を満たす x をそれぞれ求めよ.

(1) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{2}$　(2) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$　(3) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$

(4) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$　(5) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{2}{5} = \dfrac{\pi}{4}$　(6) $2\cos^{-1}x = \tan^{-1}\sqrt{15}$

4. 次の値を, 逆三角関数を用いずに表せ.

(1) $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}} - \sin^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}}$　(2) $\tan^{-1}\dfrac{2}{3} + \tan^{-1}\dfrac{1}{5}$　(3) $\sin^{-1}\dfrac{2}{3} + \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

(4) $\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{13}} + \sin^{-1}\dfrac{7}{2\sqrt{13}}$　(5) $\tan^{-1}\dfrac{4}{3} - \tan^{-1}\dfrac{1}{7}$　(6) $\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

(7) $2\tan^{-1}\dfrac{1}{2} - \tan^{-1}\dfrac{1}{7}$　(8) $3\tan^{-1}\dfrac{1}{4} + \tan^{-1}\dfrac{5}{99}$　(9) $\cos^{-1}\dfrac{7}{25} + 2\cos^{-1}\dfrac{3}{5}$

5. 次の関係式が成り立つことを示せ. また, (1) では $x > 0$, (2) では $-1 \leqq x < 1$, (3) では $|x| < 1$, (4) では $x < -1$ とする.

(1) $2\tan^{-1}x - \tan^{-1}\dfrac{x^2-1}{2x} = \dfrac{\pi}{2}$　(2) $2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} - \dfrac{\pi}{2} = \sin^{-1}x$　(3) $\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2} = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$

(4) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{1-x}{1+x} = -\dfrac{3\pi}{4}$　(5) $\tan\left(2\tan^{-1}e^x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sinh x$

6. (発展問題) 等式 $5\tan^{-1}\dfrac{1}{7} + 2\tan^{-1}\dfrac{3}{79} = \dfrac{\pi}{4}$ が成り立つことを示せ.

7. (発展問題) $\alpha, \beta, \gamma \in [-1, 1]$ に対し, $\cos^{-1}\alpha \leqq \cos^{-1}\beta + \cos^{-1}\gamma$ が成り立つためには $\alpha \geqq \beta\gamma - \sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}$ または $\beta+\gamma < 0$ が成り立つことが必要十分であることを示せ. また, 上の不等式の等号が成立するためには $\beta+\gamma \geqq 0$ かつ $\alpha = \beta\gamma - \sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

8. (発展問題) 次の不等式を満たす xy 平面上の点 (x, y) 全体からなる領域を図示せよ.

(1) $-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1}x + \tan^{-1}y < \dfrac{\pi}{2}$　(2) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1}x + \sin^{-1}y \leqq \dfrac{\pi}{2}$

9. (発展問題) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \begin{cases} \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy} & xy < 1 \\ \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy} + \pi & xy > 1,\ x > 0 \\ \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy} - \pi & xy > 1,\ x < 0 \end{cases}$$

第 2 回の演習問題の解答

1. (1) $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$ だから tan の加法定理により $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{3}{4}$, $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = \dfrac{1-\tan 2\alpha}{1+\tan 2\alpha} = \dfrac{1}{7}$. 一方 $0 < \alpha = \tan^{-1}\dfrac{1}{3} < \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$ より $-\dfrac{\pi}{12} < \dfrac{\pi}{4} - 2\alpha < \dfrac{\pi}{4}$ だから最後の等式から $\dfrac{\pi}{4} - 2\alpha = \tan^{-1}\dfrac{1}{7}$ が得られる. 従って $\pi = 8\alpha + 4\tan^{-1}\dfrac{1}{7} = 8\tan^{-1}\dfrac{1}{3} + 4\tan^{-1}\dfrac{1}{7}$. 以上から ア 3, イ 4, ウ 1, エ 7, オ 1, カ 3, キ 1, ク 7. $\dfrac{\pi}{4} = 2\tan^{-1}\dfrac{1}{3} + \tan^{-1}\dfrac{1}{7}$ をハットンの公式という.

(2) $\tan\beta = \dfrac{1}{5}$ だから tan の加法定理により $\tan 2\beta = \dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \dfrac{5}{12}$, $\tan 4\beta = \dfrac{2\tan 2\beta}{1-\tan^2 2\beta} = \dfrac{120}{119}$, $\tan\left(4\beta - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan 4\beta - \tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan 4\beta\tan\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{239}$. 一方 $0 < \beta = \tan^{-1}\dfrac{1}{5} < \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$ より $-\dfrac{\pi}{4} < 4\beta - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{5\pi}{12}$ だから最後の等式から $4\beta - \dfrac{\pi}{4} = \tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ が得られる. 従って $\pi = 16\beta - 4\tan^{-1}\dfrac{1}{239} = 16\tan^{-1}\dfrac{1}{5} - 4\tan^{-1}\dfrac{1}{239}$. 以上から ア 5, イ 12, ウ 120, エ 119, オ 1, カ 239, キ 1, ク 5, ケ 1, コ 239. $\dfrac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\dfrac{1}{5} - \tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ をマチンの公式という.

2. (1) $y = \cos^{-1}x$ とおけば, $0 \leqq y \leqq \pi$ だから $\sin y \geqq 0$ である. 従って $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ となるため, $\sin\left(\cos^{-1}x\right) = \sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-\left(\cos\left(\cos^{-1}x\right)\right)^2} = \sqrt{1-x^2}$ である. この結果と教科書の例題 1.6 の (1) から $\cos\left(\sin^{-1}x\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \cos^{-1}x\right) = \sin\left(\cos^{-1}x\right) = \sqrt{1-x^2}$.

(2) sin の 2 倍角公式と (1) から $\sin\left(2\cos^{-1}x\right) = 2\cos\left(\cos^{-1}x\right)\sin\left(\cos^{-1}x\right) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

(3) (1) から $\tan\left(\cos^{-1}x\right) = \dfrac{\sin\left(\cos^{-1}x\right)}{\cos\left(\cos^{-1}x\right)} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

(4) (1) から $\tan\left(\sin^{-1}x\right) = \dfrac{\sin\left(\sin^{-1}x\right)}{\cos\left(\sin^{-1}x\right)} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(5) $y = \tan^{-1}x$ とおけば, $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ だから $\cos y > 0$ である. 従って $1+\tan^2 y = \dfrac{1}{\cos^2 y}$ から $\cos y = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 y}}$ となるため, $\tan y = x$ より $\cos\left(\tan^{-1}x\right) = \cos y = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(6) (5) と $\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$ から $\sin\left(\tan^{-1}x\right) = \tan\left(\tan^{-1}x\right)\cos\left(\tan^{-1}x\right) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. (1) $0 \leqq \cos^{-1}\dfrac{1}{3} \leqq \pi$ だから $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2} - \cos^{-1}\dfrac{1}{3} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である. 故に $\sin^{-1}x = \dfrac{\pi}{2} - \cos^{-1}\dfrac{1}{3}$ より $x = \sin(\sin^{-1}x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \cos^{-1}\dfrac{1}{3}\right) = \cos\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$.

(2) まず $0 < \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2}$ より $\dfrac{\pi}{3} < \cos^{-1}\dfrac{1}{3} < \dfrac{\pi}{2}$ となるため, $-\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{4} - \cos^{-1}\dfrac{1}{3} < \dfrac{\pi}{12}$ である. 従って, 前問の (1) の結果と $\sin^{-1}x = \dfrac{\pi}{4} - \cos^{-1}\dfrac{1}{3}$ より $x = \sin(\sin^{-1}x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \cos^{-1}\dfrac{1}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4}\cos\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{3}\right) - \cos\dfrac{\pi}{4}\sin\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{1-2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$

(3) まず $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ より $0 < \tan^{-1}\dfrac{1}{2} < \dfrac{\pi}{4}$ となるため, $\dfrac{\pi}{12} < \dfrac{\pi}{3} - \tan^{-1}\dfrac{1}{2} < \dfrac{\pi}{3}$ である. 故に $\tan^{-1}x = \dfrac{\pi}{3} - \tan^{-1}\dfrac{1}{2}$ より $x = \tan(\tan^{-1}x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{3} - \tan^{-1}\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+2} = \left(2\sqrt{3}-1\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 5\sqrt{3}-8$.

(4) まず $0 < \dfrac{1}{3} < 1$ より $0 < \tan^{-1}\dfrac{1}{3} < \dfrac{\pi}{4}$ となるため, $0 < \dfrac{\pi}{4} - \tan^{-1}\dfrac{1}{3} < \dfrac{\pi}{4}$ である. 故に $\tan^{-1}x = \dfrac{\pi}{4} - \tan^{-1}\dfrac{1}{3}$ より $x = \tan(\tan^{-1}x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \tan^{-1}\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)} = \dfrac{1}{2}$. 従って $\dfrac{\pi}{4} = \tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{3}$ が示されたが, これはオイラーの公式と呼ばれるもののひとつである.

(5) まず $0<\dfrac{2}{5}<1$ より $0<\tan^{-1}\dfrac{2}{5}<\dfrac{\pi}{4}$ となるため, $0<\dfrac{\pi}{4}-\tan^{-1}\dfrac{2}{5}<\dfrac{\pi}{4}$ である．故に $\tan^{-1}x=\dfrac{\pi}{4}-\tan^{-1}\dfrac{2}{5}$ より $x=\tan(\tan^{-1}x)=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\tan^{-1}\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\left(\tan^{-1}\frac{2}{5}\right)}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\left(\tan^{-1}\frac{2}{5}\right)}=\dfrac{3}{7}$.

(6) $0<\tan^{-1}\sqrt{15}<\dfrac{\pi}{2}$ だから，$2\cos^{-1}x=\tan^{-1}\sqrt{15}$ を満たす x は区間 $(0,1)$ に存在する．前問の (5) より $\cos\left(2\cos^{-1}x\right)=\cos\left(\tan^{-1}\sqrt{15}\right)=\dfrac{1}{4}$ である．一方 $\cos\left(2\cos^{-1}x\right)=2\cos\left(\cos^{-1}x\right)-1=2x^2-1$ だから $2x^2-1=\dfrac{1}{4}$ となるため, $x=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$ である.

4. (1) $\alpha=\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\beta=\sin^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ とおくと, $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\beta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ だから, 問題 2 の (1) より $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ である．また $0<\dfrac{1}{\sqrt{5}}<\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\dfrac{3}{\sqrt{10}}<1$ より $0<\alpha<\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{3}<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ である．従って $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<-\dfrac{\pi}{6}$ だから $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}-\dfrac{6}{5\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\sin^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\alpha-\beta=-\dfrac{\pi}{4}$.

(2) $\alpha=\tan^{-1}\dfrac{2}{3}$, $\beta=\tan^{-1}\dfrac{1}{5}$ とおくと，$\tan\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\tan\beta=\dfrac{1}{5}$ である．また $0<\dfrac{2}{3}<1$, $0<\dfrac{1}{5}<1$ より $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{4}$ である．従って $0<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$ だから $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}}=1$ より $\tan^{-1}\dfrac{2}{3}+\tan^{-1}\dfrac{1}{5}=\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

(3) $\alpha=\sin^{-1}\dfrac{2}{3}$, $\beta=\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ とおくと，$\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ だから，問題 2 の (1) より $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos\beta=\dfrac{2}{3}$ である．また $0<\dfrac{2}{3}<1$, $0<\dfrac{3}{\sqrt{10}}<1$ より $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ である．従って $0<\alpha+\beta<\pi$ だから $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{9}-\dfrac{\sqrt{5}}{9}=0$ より $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\sin^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

(4) $\alpha=\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{13}}$, $\beta=\sin^{-1}\dfrac{7}{2\sqrt{13}}$ とおくと，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$, $\sin\beta=\dfrac{7}{2\sqrt{13}}$ だから，問題 2 の (1) より $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$, $\cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$ である．また $0<\dfrac{1}{\sqrt{13}}<1$, $0<\dfrac{7}{2\sqrt{13}}<1$ より $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ である．従って $0<\alpha+\beta<\pi$ だから $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{26}-\dfrac{14\sqrt{3}}{26}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より $\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{13}}+\sin^{-1}\dfrac{7}{2\sqrt{13}}=\alpha+\beta=\dfrac{5\pi}{6}$.

(5) $\alpha=\tan^{-1}\dfrac{4}{3}$, $\beta=\tan^{-1}\dfrac{1}{7}$ とおくと，$\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$, $\tan\beta=\dfrac{1}{7}$ である．また $\dfrac{4}{3}>1$, $0<\dfrac{1}{7}<1$ より $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{4}$ である．従って $0<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$ だから $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{25}{21}}{\frac{25}{21}}=1$ より $\tan^{-1}\dfrac{4}{3}-\tan^{-1}\dfrac{1}{7}=\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

(6) $\alpha=\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\beta=\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ とおくと, $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ だから, 問題 2 の (1) より $\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\beta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ である．また $0<\dfrac{1}{\sqrt{5}}<1$, $0<\dfrac{1}{\sqrt{10}}<1$ より $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ である．従って $0<\alpha+\beta<\pi$ だから $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}-\dfrac{6}{5\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より $\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$.

(7) $\alpha=\tan^{-1}\dfrac{1}{2}$, $\beta=\tan^{-1}\dfrac{1}{7}$ とおくと，$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\tan\beta=\dfrac{1}{7}$, $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{4}{3}$ である．また $0<\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $0<\dfrac{1}{7}<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より $0<\alpha<\dfrac{\pi}{6}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{6}$ である．従って $-\dfrac{\pi}{6}<2\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{3}$ だから $\tan(2\alpha-\beta)=\dfrac{\tan 2\alpha-\tan\beta}{1+\tan 2\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{25}{21}}{\frac{25}{21}}=1$ より $2\tan^{-1}\dfrac{1}{2}-\tan^{-1}\dfrac{1}{7}=\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{4}$. この等式はベガの公式と呼ばれるが, ヘルマンまたはクラウゼンの発見であるという説もある.

(8) $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{1}{4}$, $\beta = \tan^{-1}\dfrac{5}{99}$ とおくと, $\tan\alpha = \dfrac{1}{4}$, $\tan\beta = \dfrac{5}{99}$ だから tan の加法定理から $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{8}{15}$, $\tan 3\alpha = \dfrac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1-\tan 2\alpha\tan\alpha} = \dfrac{47}{52}$, $\tan(3\alpha+\beta) = \dfrac{\tan 3\alpha + \tan\beta}{1+\tan 3\alpha\tan\beta} = \dfrac{\frac{4913}{5148}}{\frac{4913}{5148}} = 1$. 一方 $0 < \alpha = \tan^{-1}\dfrac{1}{4} < \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$, $0 < \beta = \tan^{-1}\dfrac{5}{99} < \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$ より $0 < 3\alpha+\beta < \dfrac{2\pi}{3}$ だから $\tan(3\alpha+\beta) = 1$ から $3\tan^{-1}\dfrac{1}{4} + \tan^{-1}\dfrac{5}{99} = 3\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{4}$ が得られる. この等式はハットンの公式と呼ばれるもののひとつである.

(9) $\alpha = \cos^{-1}\dfrac{7}{25}$, $\beta = \cos^{-1}\dfrac{3}{5}$ とおくと, $\cos\alpha = \dfrac{7}{25}$, $\cos\beta = \dfrac{3}{5}$ だから, 問題 2 の (1) より $\sin\alpha = \dfrac{24}{25}$, $\sin\beta = \dfrac{4}{5}$ である. よって $\cos 2\beta = -\dfrac{7}{25}$, $\sin 2\beta = \dfrac{24}{25}$ である. また $0 < \dfrac{7}{25} < 1$, $0 < \dfrac{3}{5} < 1$ より $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ である. 従って $0 < \alpha + 2\beta < \dfrac{3\pi}{2}$ だから $\cos(\alpha+2\beta) = \cos\alpha\cos 2\beta - \sin\alpha\sin 2\beta = -\dfrac{49}{625} - \dfrac{576}{625} = -1$ より $\cos^{-1}\dfrac{7}{25} + 2\cos^{-1}\dfrac{3}{5} = \alpha + 2\beta = \pi$.

5. (1) $\alpha = \tan^{-1}x$, $\beta = \tan^{-1}\dfrac{x^2-1}{2x}$ とおけば $x = \tan\alpha$, $\dfrac{x^2-1}{2x} = \tan\beta$. $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{2x}{1-x^2}$, $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \dfrac{1}{\tan 2\alpha} = \dfrac{1-x^2}{2x} = -\tan\beta = \tan(-\beta)$. $x > 0$ より $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ だから $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} < -\beta < \dfrac{\pi}{2}$ であることに注意すれば $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \tan(-\beta)$ より $\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha = -\beta$ を得る. 従って $2\tan^{-1}x - \tan^{-1}\dfrac{x^2-1}{2x} = 2\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{2}$.

(2) $y = 2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} - \dfrac{\pi}{2}$ とおくと, $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \tan\left(\dfrac{y}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1+\tan\frac{y}{2}}{1-\tan\frac{y}{2}}$ だから

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{\left(1+\tan\frac{y}{2}\right)^2}{\left(1-\tan\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{1+\tan^2\frac{y}{2} + 2\tan\frac{y}{2}}{1+\tan^2\frac{y}{2} - 2\tan\frac{y}{2}} = \frac{\sin^2\frac{y}{2} + \cos^2\frac{y}{2} + 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}}{\sin^2\frac{y}{2} + \cos^2\frac{y}{2} - 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}} = \frac{1+\sin y}{1-\sin y}$$

である. よって $(1+x)(1-\sin y) = (1-x)(1+\sin y)$ だから $x = \sin y$ が得られる. また, $-1 < x < 1$ ならば $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ であるため, $\sin^{-1}x = y = 2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} - \dfrac{\pi}{2}$ である.

(3) $y = \sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}$ とおくと, $\sin y = \dfrac{2x}{1+x^2}$ だから $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - \dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2} = \left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2$ である. y は $\sin^{-1}$ の値域に属するため, $-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である. よって $\cos y \geqq 0$ であり, 仮定から $-1 < x < 1$ だから, 上式より $\cos y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ である. 従って $\tan y = \dfrac{\sin y}{\cos y} = \dfrac{2x}{1-x^2}$ となるため, $\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2} = y = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$ を得る.

(4) $\alpha = \tan^{-1}x$, $\beta = \tan^{-1}\dfrac{1-x}{1+x}$ とおくと $\tan\alpha = x$, $\tan\beta = \dfrac{1-x}{1+x}$ だから tan の加法定理から $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{x + \frac{1-x}{1+x}}{1 - \frac{x-x^2}{1+x}} = 1$ である. ここで $x < -1$ より $\dfrac{1-x}{1+x} = -1 + \dfrac{2}{1+x} < -1$ だから $\alpha, \beta < -\dfrac{\pi}{4}$ であり, また $\alpha, \beta > -\dfrac{\pi}{2}$ だから $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha + \beta + \dfrac{\pi}{2} < 0$ である. この不等式と $\tan(\alpha+\beta) = 1$ より $\tan\left(\alpha + \beta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{\tan(\alpha+\beta)} = -1$ だから $\alpha + \beta + \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{4}$. 故に $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{1-x}{1+x} = \alpha + \beta = -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4}$ である.

(6) $y = 2\tan^{-1}e^x - \dfrac{\pi}{2}$ とおくと, $\tan^{-1}e^x = \dfrac{y}{2} + \dfrac{\pi}{4}$ だから, tan の加法定理から $e^x = \tan\left(\dfrac{y}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan\frac{y}{2} + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\frac{y}{2}\tan\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1+\tan\frac{y}{2}}{1-\tan\frac{y}{2}}$ である. 故に $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\frac{1+\tan\frac{y}{2}}{1-\tan\frac{y}{2}} - \frac{1-\tan\frac{y}{2}}{1+\tan\frac{y}{2}}\right) = \dfrac{2\tan\frac{y}{2}}{1-\tan^2\frac{y}{2}} = \tan\left(\dfrac{y}{2} + \dfrac{y}{2}\right) = \tan y$.

6. $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{1}{7}$ とおくと, $\tan\alpha = \dfrac{1}{7}$ だから tan の加法定理から $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{7}{24}$, $\tan 4\alpha = \dfrac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \dfrac{336}{527}$, $\tan 5\alpha = \dfrac{\tan 4\alpha + \tan\alpha}{1-\tan 4\alpha\tan\alpha} = \dfrac{2879}{3353}$. $\beta = \tan^{-1}\dfrac{3}{79}$ とおくと, $\tan\beta = \dfrac{3}{79}$ だから $\tan 2\beta = \dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \dfrac{474}{6232}$.

よって, $\tan(5\alpha+2\beta)=\dfrac{\tan 5\alpha+\tan 2\beta}{1-\tan 5\alpha\tan 2\beta}=1$. 一方 $0<y<\dfrac{\pi}{2}$ ならば $0<y<\tan y$ だから, $y=\tan^{-1}x$ を代入すれば, $x>0$ ならば $0<\tan^{-1}x<x$ が成り立つことがわかる. 従って $0<5\alpha+2\beta<\dfrac{5}{7}+\dfrac{6}{79}=\dfrac{437}{553}<\dfrac{\pi}{2}$ となるため, $\tan(5\alpha+2\beta)=1=\tan\dfrac{\pi}{4}$ から $5\tan^{-1}\dfrac{1}{7}+2\tan^{-1}\dfrac{3}{79}=5\alpha+2\beta=\dfrac{\pi}{4}$ である. この等式はオイラーの公式と呼ばれるもののひとつである.

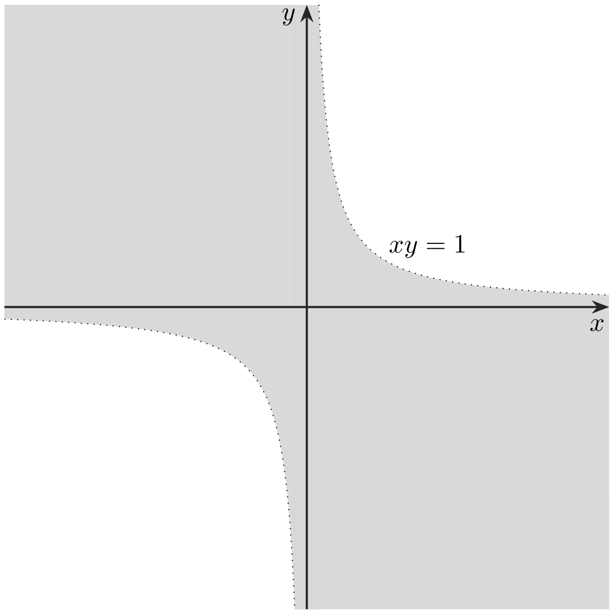
7. $\cos^{-1}\alpha\leqq\pi$ だから, $\cos^{-1}\beta+\cos^{-1}\gamma>\pi$ ならば与えられた不等式は成り立つ. 後者の不等式は $\cos^{-1}\beta>\pi-\cos^{-1}\gamma=\cos^{-1}(-\gamma)$ と同値で, $\cos^{-1}$ は狭義単調減少関数だから, これは $\beta<-\gamma$, すなわち $\beta+\gamma<0$ と同値である. $\beta+\gamma\geqq 0$ の場合, $\cos^{-1}\beta+\cos^{-1}\gamma\leqq\pi$ だから, 与えられた不等式は $\cos(\cos^{-1}\alpha)\leqq\cos(\cos^{-1}\beta+\cos^{-1}\gamma)$ と同値であり, この左辺は α, 右辺は $\cos$ の加法定理と問題 2 の (1) から $\beta\gamma-\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}$ に等しい. 従って, 与えられた不等式は $\beta+\gamma<0$ または「$\beta+\gamma\geqq 0$ かつ $\alpha\geqq\beta\gamma-\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}$」が成り立つことと同値である. このことは $\beta+\gamma<0$ または $\alpha\geqq\beta\gamma-\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}$ が成り立つことと同値である. また上の議論から $\cos^{-1}\alpha=\cos^{-1}\beta+\cos^{-1}\gamma$ が成り立つためには $\beta+\gamma\geqq 0$ かつ $\alpha=\beta\gamma-\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}$ が成り立つことが必要十分である.

8. (1) $x\leqq 0$ ならば $\tan^{-1}x\leqq 0$ であり, $\tan^{-1}y<\dfrac{\pi}{2}$ は任意の実数 y に対して成り立つため, $x\leqq 0$ の場合は $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y<\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ. 同様に, $y\leqq 0$ ならば 任意の実数 x に対して, $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y<\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ. $x,y>0$ の場合, $0<\tan^{-1}y,\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}x<\dfrac{\pi}{2}$ であり, $\tan$ は区間 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ で単調増加だから, 不等式 $\tan^{-1}y<\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}x$ は $y=\tan\left(\tan^{-1}y\right)<\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)=\dfrac{1}{\tan\left(\tan^{-1}x\right)}=\dfrac{1}{x}$ と同値である. よって, $x,y>0$ の場合は不等式 $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y<\dfrac{\pi}{2}$ は $xy<1$ と同値である. 以上から, 不等式 $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y<\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つための条件は $x\leqq 0$ または $y\leqq 0$ または「$x,y>0$ かつ $xy<1$」である.

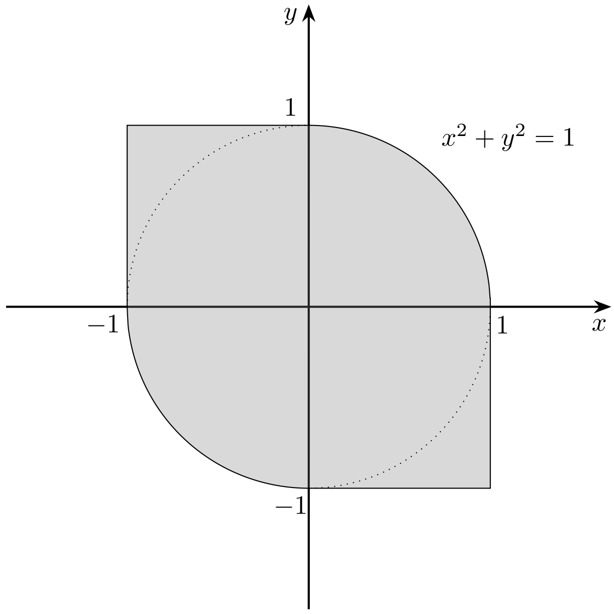
$\tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}x$ だから, 不等式 $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y>-\dfrac{\pi}{2}$ は $\tan^{-1}(-x)+\tan^{-1}(-y)<\dfrac{\pi}{2}$ と同値である. 上の結果から, この不等式が成り立つ条件は $-x\leqq 0$ または $-y\leqq 0$ または「$-x,-y>0$ かつ $(-x)(-y)<1$」である. よって 不等式 $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y>-\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ条件は $x\geqq 0$ または $y\geqq 0$ または「$x,y<0$ かつ $xy<1$」である. 従って, $-\dfrac{\pi}{2}<\tan^{-1}x+\tan^{-1}y<\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ条件は $xy<1$ であるため, この不等式を満たす (x,y) 全体からなる領域は下の図の網かけの部分の境界を除いた部分である.

(2) $y\leqq 0$ ならば $\sin^{-1}y\leqq 0\leqq\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}x$ だから, 任意の $x\in[-1,1]$ に対して, 不等式 $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y\leqq\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ. 同様に, $x\leqq 0$ ならば 任意の $y\in[-1,1]$ に対して, 不等式 $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y\leqq\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ. $x,y>0$ の場合, $0<\sin^{-1}y,\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であり, $\sin$ は区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ で単調増加だから, 不等式 $\sin^{-1}y\leqq\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}x$ は $y=\sin\left(\sin^{-1}y\right)\leqq\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}x\right)=\cos\left(\sin^{-1}x\right)=\sqrt{1-x^2}$ と同値である. よって, $x,y>0$ の場合は不等式 $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y\leqq\dfrac{\pi}{2}$ は $y\leqq\sqrt{1-x^2}$, 従って $x^2+y^2\leqq 1$ と同値である. 以上から, 不等式 $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y<\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つための条件は $x\leqq 0$ または $y\leqq 0$ または「$x,y>0$ かつ $x^2+y^2\leqq 1$」である.

$\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x$ だから, 不等式 $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y\geqq-\dfrac{\pi}{2}$ は $\sin^{-1}(-x)+\sin^{-1}(-y)\leqq\dfrac{\pi}{2}$ と同値である. 上の結果から, この不等式が成り立つ条件は $-x\leqq 0$ または $-y\leqq 0$ または「$-x,-y>0$ かつ $(-x)^2+(-y)^2\leqq 1$」である. よって 不等式 $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y\geqq-\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ条件は $x\geqq 0$ または $y\geqq 0$ または「$x,y<0$ かつ $x^2+y^2\leqq 1$」である. 従って, $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\sin^{-1}x+\sin^{-1}y\leqq\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ条件は「$-1\leqq x\leqq 0$ かつ $0\leqq y\leqq 1$」または「$0\leqq x\leqq 1$ かつ $-1\leqq y\leqq 0$」または $x^2+y^2\leqq 1$ であるため, この不等式を満たす (x,y) 全体からなる領域は下の図の灰色の部分の境界を含んだ部分である.



(1) の領域



(2) の領域

9. (1) $\alpha = \tan^{-1} x$, $\beta = \tan^{-1} y$ とおくと $x = \tan\alpha$, $y = \tan\beta$ だから加法定理から $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{x+y}{1-xy}$ である．$xy < 1$ の場合, 問題 8 の (1) の結果から $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \dfrac{\pi}{2}$ だから, 上の等式により $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \dfrac{x+y}{1-xy}$ である． $xy > 1$ の場合, $\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{y} < 1$ だから, 上の結果から $\tan^{-1}\dfrac{1}{x} + \tan^{-1}\dfrac{1}{y} = \tan^{-1}\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{1-\frac{1}{xy}} = \tan^{-1}\dfrac{y+x}{xy-1} = -\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$ が成り立つ．一方, $x > 0$ ならば $\tan^{-1} x + \tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つため, $xy > 1$ かつ $x > 0$ ならば $y > 0$ でもあるので $\tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$ と $\tan^{-1}\dfrac{1}{y} = \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} y$ が成り立つ．これらを $\tan^{-1}\dfrac{1}{x} + \tan^{-1}\dfrac{1}{y} = -\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$ に代入すれば $\pi - \tan^{-1} x - \tan^{-1} y = -\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$ が得られるため, $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy} + \pi$ である．$xy > 1$ かつ $x < 0$ ならば $(-x)(-y) > 1$ かつ $-x > 0$ だから, 上で得た等式から $\tan^{-1}(-x) + \tan^{-1}(-y) = \tan^{-1}\dfrac{(-x)+(-y)}{1-(-x)(-y)} + \pi$ である．この左辺は $-\tan^{-1}(-x) - \tan^{-1}(-y)$ に等しく, 右辺は $-\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy} + \pi$ に等しいため, $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy} - \pi$ である．

微積分学 I 演習問題　第 3 回　関数の極限と無限小・無限大の位数

1. 必要ならば $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ であることを用いて, 次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\quad(a,b>0)$　(2) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$　(3) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x^2}$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\log((1+x)(1+x^2))}{x}$　(5) $\lim_{x\to +0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$　(6) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+e^x-2}{x}$

(7) $\lim_{x\to +0}\frac{2\sin^{-1}(1-x)-\pi}{\sqrt{x}}$　(8) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}$　(9) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}(\sin^{-1}x)}{x}$

(10) $\lim_{x\to 0}(\log(1-\cos x)-2\log|x|)$　(11) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}$　(12) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{\sin^{-1}x}$

(13) $\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)$　(14) $\lim_{x\to -0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$　(15) $\lim_{x\to +0}\frac{\cos^{-1}(1-x^2)}{x}$

(16) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\sin x}$　(17) $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$

2. a を実数または $\pm\infty$, α を正の実数とし, f, g, F, G を a を含む開区間 (ただし $a=\infty$ のときは (c,∞), $a=-\infty$ のときは $(-\infty,c)$ の形の開区間) で定義された関数とする. $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ と $\lim_{x\to a}|F(x)|=\lim_{x\to a}|G(x)|=\infty$ が成り立つとき, 次の $\boxed{}$ にあてはまる文字を入れよ.

(1) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ ならば f は g より $\boxed{ア}$ 位の無限 $\boxed{イ}$ といい, g は f より $\boxed{ウ}$ 位の無限 $\boxed{エ}$ という. また, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ が存在して 0 でないとき, f と g は $\boxed{オ}$ 位の無限 $\boxed{カ}$ という.

(2) $\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=0$ ならば F は G より $\boxed{ア}$ 位の無限 $\boxed{イ}$ といい, G は F より $\boxed{ウ}$ 位の無限 $\boxed{エ}$ という. また, $\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}$ が存在して 0 でないとき, F と G は $\boxed{オ}$ 位の無限 $\boxed{カ}$ という.

(3) a が実数の場合, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{|x-a|^\alpha}$ が存在して 0 でないとき, f は $\boxed{ア}$ 位の無限 $\boxed{イ}$ といい, $a=\pm\infty$ の場合, $\lim_{x\to a}|x|^\alpha f(x)$ が存在して 0 でないとき, f は $\boxed{ウ}$ 位の無限 $\boxed{エ}$ という.

(4) a が実数の場合, $\lim_{x\to a}|x-a|^\alpha F(x)$ が存在して 0 でないとき, F は $\boxed{ア}$ 位の無限 $\boxed{イ}$ といい, $a=\pm\infty$ の場合, $\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{|x|^\alpha}$ が存在して 0 でないとき, F は $\boxed{ウ}$ 位の無限 $\boxed{エ}$ という.

3. 以下の関数について, 無限小または無限大の位数を求めよ.

(1) $1-\cos x\ (x\to 0)$　(2) $\frac{x-1}{x^3+1}\ (x\to\infty)$　(3) $\frac{x^3+1}{x-1}\ (x\to\infty)$　(4) $\frac{1}{e^x-1}\ (x\to 0)$

(5) $\sqrt{x^6+1}\ (x\to\infty)$　(6) $\frac{1}{\tan x}\ (x\to\frac{\pi}{2})$　(7) $\frac{1}{\log(1+x^2)}\ (x\to 0)$　(8) $\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\ (x\to\infty)$

(9) $\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\ (x\to\infty)$　(10) $\sqrt{x^4+1}-x^2\ (x\to\infty)$

4. 任意の正の実数 α に対して $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{|x|^\alpha}=0$ であることを示せ.

5. $(0,\varepsilon)$ 上の関数 f がつねに正の値をとり, 実数 α に対し, $\lim_{x\to +0}\frac{f(x)}{x^\alpha}$ が 0 でない値に収束するとき, $\lim_{x\to +0}f(x)^{\frac{1}{\log x}}=e^\alpha$ であることを示せ.

第 3 回の演習問題の解答

1. (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\log a}-1-e^{x\log b}+1}{x}=\log a\lim_{x\to0}\frac{e^{x\log a}-1}{x\log a}-\log b\lim_{x\to0}\frac{e^{x\log b}-1}{x\log b}=\log a-\log b$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\lim_{x\to0}(1+\cos x+\cos^2x)=\frac{3}{2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log((1+x)(1+x^2))}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\log(1+x)}{x}+\frac{\log(1+x^2)}{x^2}x\right)=\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x^2)}{x^2}\lim_{x\to0}x=$ $1+0=1$

(5) $x\to+0$ のとき, $\dfrac{1}{x}\to\infty$ だから $e^{\frac{1}{x}}\to\infty$ である. 従って $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0.$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}+e^x-2}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{x}+\frac{e^x-1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=2+1=3$

(7) $y=\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}(1-x)$ とおくと, $x\to+0$ のとき, $y\to+0$ であり, $\sin^{-1}(1-x)=\dfrac{\pi}{2}-y$ だから $1-x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)=\cos y$ となるため $\sqrt{x}=\sqrt{1-\cos y}$ である. 従って (2) の結果を用いれば $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{2\sin^{-1}(1-x)-\pi}{\sqrt{x}}=\lim_{y\to+0}\frac{-2y}{\sqrt{1-\cos y}}=\lim_{y\to+0}\frac{-2}{\sqrt{\frac{1-\cos y}{y^2}}}=\frac{-2}{\sqrt{\lim_{y\to+0}\frac{1-\cos y}{y^2}}}=-2\sqrt{2}$

(8) $y=\tan^{-1}x$ とおくと $x\to0$ のとき, $y\to0$ であり, $x=\tan y$ だから $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=\lim_{y\to0}\frac{y}{\tan y}=\lim_{y\to0}\frac{\cos y}{\frac{\sin y}{y}}=\frac{\lim_{y\to0}\cos y}{\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}}=1.$

(9) $x\to0$ のとき $\sin^{-1}x\to0$ だから, 教科書の定理 1.8 と (8) の結果から $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan^{-1}(\sin^{-1}x)}{\sin^{-1}x}=\lim_{y\to0}\frac{\tan^{-1}y}{y}=1.$ 故に, 教科書の問題 1.6 の (4) の結果から $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan^{-1}(\sin^{-1}x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\tan^{-1}(\sin^{-1}x)}{\sin^{-1}x}}{\frac{\sin^{-1}x}{x}}=\frac{\lim_{x\to0}\frac{\tan^{-1}(\sin^{-1}x)}{\sin^{-1}x}}{\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x}{x}}=\frac{1}{1}=1.$

(10) log の連続性と (2) の結果から $\displaystyle\lim_{x\to0}(\log(1-\cos x)-2\log|x|)=\lim_{x\to0}\log\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\log\left(\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$ $\displaystyle=\log\frac{1}{2}=-\log2.$

(11) $y=\dfrac{\pi}{2}-x$ とおくと $x=\dfrac{\pi}{2}-y$ であり $x\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $y\to0$ だから $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}=\lim_{y\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{2y}=\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{2y}=\frac{1}{2}.$

(12) (8) と教科書の問題 1.6 の (4) の結果から $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan^{-1}x}{\sin^{-1}x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\tan^{-1}x}{x}}{\frac{\sin^{-1}x}{x}}=\frac{\lim_{x\to0}\frac{\tan^{-1}x}{x}}{\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x}{x}}=\frac{1}{1}=1$

(13) $y=\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}x$ とおくと $x\to\infty$ のとき $y\to+0$ であり, $x=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)=\dfrac{1}{\tan y}$ だから $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)=\lim_{y\to+0}\frac{y}{\tan y}=\lim_{y\to+0}\frac{\cos y}{\frac{\sin y}{y}}=1$

(14) $x\to-0$ のとき, $\dfrac{1}{x}\to-\infty$ だから $e^{\frac{1}{x}}\to0$ である. 従って $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1.$

(15) $y=\cos^{-1}(1-x^2)$ とおけば任意の $x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ に対して $0\leqq y\leqq\pi$ だから $\cos y\geqq0$ である. 従って $x>0$ ならば $x=\sqrt{1-\cos y}$ であり, $x\to+0$ のとき, $y\to+0$ だから, (2) の結果を用いると $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\cos^{-1}(1-x^2)}{x}=\lim_{y\to+0}\frac{y}{\sqrt{1-\cos y}}=\lim_{y\to+0}\frac{1}{\sqrt{\frac{1-\cos y}{y^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\lim_{y\to+0}\frac{1-\cos y}{y^2}}}=\sqrt{2}.$

(16) (2) の結果を用いれば $\lim_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x\sin x}=-\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2\frac{\sin x}{x}}=-\dfrac{1}{2}$.

(17) $\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$ だから $\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left((1+ax)^{\frac{1}{ax}}\right)^a=e^a$

2. (1) ア 高, イ 小, ウ 低, エ 小, オ 同, カ 小
(2) ア 低, イ 大, ウ 高, エ 大, オ 同, カ 大
(3) ア α, イ 小, ウ α, エ 小
(4) ア α, イ 大, ウ α, エ 大

3. (1) 演習問題 1 の (2) から $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}\neq0$ より $x\to0$ のとき, $1-\cos x$ は無限小の位数 2 である.

(2) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x-1}{x^3+1}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^3}}=1$ より $x\to\infty$ のとき, $\dfrac{x-1}{x^3+1}$ は無限小の位数 2 である.

(3) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^3+1}{x-1}}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x^3-x^2}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x}}=1$ より $x\to\infty$ のとき, $\dfrac{x^3+1}{x-1}$ は無限大の位数 2 である.

(4) $\lim_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{e^x-1}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\dfrac{1}{\frac{e^x-1}{x}}=\dfrac{1}{\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}}=1$ より $x\to0$ のとき, $\dfrac{1}{e^x-1}$ は無限大の位数 1 である.

(5) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+1}}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^3}}=1$ より $x\to\infty$ のとき $\sqrt{x^6+1}$ は無限大の位数 3 である.

(6) $y=\dfrac{\pi}{2}-x$ とおくと $x=\dfrac{\pi}{2}-y$ であり $x\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $y\to0$ だから $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{1}{\tan x}}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{y\to0}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{y\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}=\lim_{y\to0}\dfrac{\sin y}{y\cos y}=\lim_{y\to0}\dfrac{\sin y}{y}\lim_{y\to0}\dfrac{1}{\cos y}=1$. 従って, $x\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき, $\dfrac{1}{\tan x}$ は無限小の位数 1 である.

(7) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{\log(1+x^2)}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{\frac{\log(1+x^2)}{x^2}}=\dfrac{1}{\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+x^2)}{x^2}}=\dfrac{1}{1}=1$ より $x\to0$ のとき $\dfrac{1}{\log(1+x^2)}$ は無限大の位数 2 である.

(8) $y=\tan^{-1}x$ とおくと $x\to\infty$ のとき $y\to\dfrac{\pi}{2}-0$ であり, $x=\tan y$ だから $\lim_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)=\lim_{y\to\frac{\pi}{2}-0}\tan y\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)$ である. さらに $z=\dfrac{\pi}{2}-y$ とおけば $y\to\dfrac{\pi}{2}-0$ のとき $z\to+0$ だから $\lim_{y\to\frac{\pi}{2}-0}\tan y\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)=\lim_{z\to+0}z\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)=\lim_{z\to+0}\dfrac{z}{\sin z}\cos z=1\neq0$ となるため, $x\to\infty$ のとき, $\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}x$ は無限小の位数 1 である.

(9) $y=\dfrac{1}{x}$ とおくと $x\to\infty$ のとき $y\to+0$ だから $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x\sin\frac{1}{x}}=\lim_{y\to+0}\dfrac{y}{\sin y}=1\neq0$ となるため, $x\to\infty$ のとき, $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{x}}$ は無限大の位数 1 である.

(10) $\lim_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt{x^4+1}-x^2\right)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+1}+x^2}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}+1}=\dfrac{1}{2}$ より $x\to\infty$ のとき $\sqrt{x^4+1}-x^2$ は無限小の位数 2 である.

4. $y=\dfrac{1}{x^2}$ とおくと $|x|=y^{-\frac{1}{2}}$ であり, $x\to0$ のとき $y\to\infty$ である. 教科書の問 1.17 より, 任意の正の実数 α に対して $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{|x|^\alpha}=\lim_{y\to\infty}y^{\frac{\alpha}{2}}e^{-y}=0$ である.

5. $\lim_{x\to+0}\dfrac{f(x)}{x^\alpha}=a$ とおき, $(0,\varepsilon)$ 上の関数 g, φ を $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^\alpha}$, $\varphi(x)=f(x)^{\frac{1}{\log x}}$ で定めると $\lim_{x\to+0}g(x)=a>0$, $f(x)=x^\alpha g(x)$ だから

$$\lim_{x\to+0}\log\varphi(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log f(x)}{\log x}=\lim_{x\to+0}\frac{\alpha\log x+\log g(x)}{\log x}=\lim_{x\to+0}\left(\alpha+\frac{\log g(x)}{\log x}\right)=\alpha$$

である. 従って $\lim_{x\to+0}f(x)^{\frac{1}{\log x}}=\lim_{x\to+0}e^{\log\varphi(x)}=e^{\lim_{x\to+0}\log\varphi(x)}=e^\alpha$ である.

微積分学 I 演習問題　第 4 回　導関数

1. 次の関数の導関数を求めよ.

(1) $(x+2)^3(x^3-4)^5$　(2) $\dfrac{x^4-1}{x^3+2}$　(3) $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)^2}$　(4) $\dfrac{cx+d}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

(5) $(x-3)\sqrt{x^2+2x+3}$　(6) $\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)^7$　(7) $\sqrt{\dfrac{1-x^n}{1+x^n}}$　(8) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

(9) $\cos^3(2x^3)$　(10) $(9x^2-6x-7)e^{x^3}$　(11) $\sqrt{1+e^x}$　(12) $x^2e^{\frac{1}{x}}$

(13) $e^{-3x}(\sin 3x+\cos 3x)$　(14) $e^{-x}\sin^2 x$　(15) $\log(\log x)$　(16) $\log|\cos x|$

(17) $\log\left(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}\right)$　(18) $(\log(e^x+1))^2$　(19) $\dfrac{(\log|x|)^2}{x}$　(20) $\log\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+3}}$

(21) $\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$　(22) $\log(\sin(e^x))$　(23) $\sin^{-1}(2x^2-1)$　(24) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$

(25) $\cos^{-1}\dfrac{1}{x}$　(26) $\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$　(27) $\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$　(28) $\tan^{-1}\dfrac{x^2-1}{2x}$

(29) $\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x+1}$　(30) $\cos^{-1}\dfrac{1-x}{1+x}$　(31) $\cos^{-1}\dfrac{1}{x^2+1}$　(32) $\sin^{-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

(33) $\tan^{-1}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1}$　(34) $\cos^{-1}\dfrac{2x}{x^2+1}$　(35) $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$　(36) $\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$

(37) $\tan^{-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$　(38) $\tan^{-1}\sqrt{x^2-1}$　(39) $\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　(40) $\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(41) $\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\tan\dfrac{x}{2}\right)$　(42) $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$　(43) $\cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$　(44) $\sin^{-1}\sqrt{1-e^{2x}}$

(45) $\sqrt{1+x^2}\sin(\tan^{-1}x)$　(46) $\log(\sin^{-1}(e^x))$　(47) $\sin^{-1}\dfrac{e^x}{e^x+e^{-x}}$　(48) $\tan^{-1}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(49) $\sin^{-1}(\tan^{-1}x)$　(50) $\sin^{-1}\sqrt{1-\sin x}$　(51) x^{3x^2}　(52) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$

(53) x^{x^a}　(54) $(\cos x)^{\cos x}$　(55) $(\tan x)^{\sin x}$　(56) $x^{(\log x)^a}$

(57) $\tan\left(x^{\sin x}\right)$　(58) $(\log x)^{\frac{1}{x}}$　(59) $e^{\sin^{-1}x}$　(60) $(\cos^{-1}x)^{\log x}$

2. $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=\begin{cases}x^2\log|x| & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ で定めるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) f の 0 における微分係数 $f'(0)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}f'(x)$ を求めよ.

(3) f' は 0 で連続か? 理由を付けて答えよ.

(4) f' は 0 で微分可能か? 理由を付けて答えよ.

3. 関数 $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ を $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}$ で定義する.

(1) f は狭義単調減少関数であることを示し, さらに f は全射であることを示せ.

(2) f の逆関数 f^{-1} の $\dfrac{1}{e}$ における微分係数 $(f^{-1})'\left(\dfrac{1}{e}\right)$ を求めよ.

4. 関数 $f,g:\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\to\boldsymbol{R}$, $h:\left(-\sqrt[4]{2},\sqrt[4]{2}\right)\to\boldsymbol{R}$ をそれぞれ $f(x)=x^2\cos^{-1}(1-x^2)$, $g(x)=x\cos^{-1}(1-x^2)$,
$h(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos^{-1}(1-x^4)}{x} & 0<|x|<\sqrt[4]{2}\\ 0 & x=0\end{cases}$ によって定めるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) f, g, h の 0 における微分係数を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}f'(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}g'(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}h'(x)$ を求めよ.

(3) f, g の導関数は 0 で微分可能か? また, h の導関数は 0 で連続か? 理由を付けて答えよ.

(4) f, g の定義域を $(0,1)$ に制限して得られる関数も $f,g:(0,1)\to\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ で表すとき, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$, $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\pi}{3\sqrt{2}}$ であることに注意して, f, g の逆関数の, それぞれ $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{3\sqrt{2}}$ における微分係数を求めよ.

第 4 回の演習問題の解答

1. (1) $((x+2)^3(x^3-4)^5)' = ((x+2)^3)'(x^3-4)^5 + (x+2)^3((x^3-4)^5)' =$
$3(x+2)^2(x^3-4)^5 + 15x^2(x+2)^3(x^3-4)^4 = (x+2)^2(x^3-4)^4(18x^3+30x^2-12)$

(2) $\left(\dfrac{x^4-1}{x^3+2}\right)' = \dfrac{(x^4-1)'(x^3+2)-(x^4-1)(x^3+2)'}{(x^3+2)^2} = \dfrac{4x^3(x^3+2)-3x^2(x^4-1)}{(x^3+2)^2} = \dfrac{x^6+8x^3+3x^2}{(x^3+2)^2}$

(3) $\left(\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)^2}\right)' = \dfrac{((x-1)(x-2))'(x+1)^2-(x-1)(x-2)((x+1)^2)'}{(x+1)^4} =$
$\dfrac{(2x-3)(x+1)-2(x-1)(x-2)}{(x+1)^3} = \dfrac{5x-7}{(x+1)^3}$

(4) $\left(\dfrac{cx+d}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\right)' = (cx+d)'(ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}} + (cx+d)\left((ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}}\right)' =$
$c(ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}} - (cx+d)\left(ax+\dfrac{b}{2}\right)(ax^2+bx+c)^{-\frac{3}{2}} = (ax^2+bx+c)^{-\frac{3}{2}}\left(c\big(ax^2+bx+c\big)-(cx+d)\left(ax+\dfrac{b}{2}\right)\right) =$
$\dfrac{1}{2}(ax^2+bx+c)^{-\frac{3}{2}}((bc-2ad)x+2c^2-bd)$

(5) $\left((x-3)\sqrt{x^2+2x+3}\right)' = (x-3)'\sqrt{x^2+2x+3} + (x-3)\left(\sqrt{x^2+2x+3}\right)' =$
$\sqrt{x^2+2x+3} + \dfrac{(x-3)(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \dfrac{x^2+2x+3+(x-3)(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

(6) $\left(\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)^7\right)' = 7\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)^6\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)' = 7\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)^6\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)$

(7) $\left(\sqrt{\dfrac{1-x^n}{1+x^n}}\right)' = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+x^n}{1-x^n}}\left(\dfrac{1-x^n}{1+x^n}\right)' = \sqrt{\dfrac{1+x^n}{1-x^n}}\dfrac{-nx^{n-1}(1+x^n)-nx^{n-1}(1-x^n)}{2(1+x^n)^2} =$
$\dfrac{-nx^{n-1}}{\sqrt{1-x^n}\sqrt{(1+x^n)^3}}$

(8) $\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)'(1+\cos x)-\sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2} = \dfrac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \dfrac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} = \dfrac{1}{1+\cos x}$

(9) $\left(\cos^3(2x^3)\right)' = -3\sin(2x^3)\cos^2(2x^3)(2x^3)' = -18x^2\sin(2x^3)\cos^2(2x^3)$

(10) $\left((9x^2-6x-7)e^{x^3}\right)' = ((9x^2-6x-7))'e^{x^3} + (9x^2-6x-7)\left(e^{x^3}\right)' =$
$(18x-6)e^{x^3} + 3x^2(9x^2-6x-7)e^{x^3} = 3(9x^4-6x^3-7x^2+6x-2)e^{x^3} = 3(x-1)(x+1)(9x^2-6x+2)e^{x^3}$

(11) $\left(\sqrt{1+e^x}\right)' = \dfrac{(1+e^x)'}{2\sqrt{1+e^x}} = \dfrac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$

(12) $\left(x^2e^{\frac{1}{x}}\right)' = (x^2)'e^{\frac{1}{x}} + x^2\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = 2xe^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$

(13) $\left(e^{3x}(\sin 3x+\cos 3x)\right)' = \left(e^{3x}\right)'(\sin 3x+\cos 3x) + e^{3x}(\sin 3x+\cos 3x)' =$
$3e^{3x}(\sin 3x+\cos 3x) + e^{3x}(3\cos 3x-3\sin 3x)' = 6e^{3x}\cos 3x$

(14) $\left(e^{-x}\sin^2 x\right)' = (e^{-x})'\sin^2 x + e^{-x}(\sin^2 x)' = e^{-x}\sin x(2\cos x-\sin x)$

(15) $(\log(\log x))' = \dfrac{(\log x)'}{\log x} = \dfrac{1}{x\log x}$

(16) $(\log|\cos x|)' = \dfrac{(\cos x)'}{\cos x} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

(17) $\left(\log\big(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}\big)\right)' = \dfrac{\left(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}\right)'}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}} = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x-a}}+\frac{1}{2\sqrt{x-b}}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}} = \dfrac{1}{2\sqrt{(x-a)(x-b)}}$

(18) $\left((\log(e^x+1))^2\right)' = 2(\log(e^x+1))'\log(e^x+1) = 2\dfrac{e^x}{e^x+1}\log(e^x+1) = \dfrac{2e^x\log(e^x+1)}{e^x+1}$

(19) $\left(\dfrac{(\log|x|)^2}{x}\right)' = \dfrac{((\log|x|)^2)'}{x} + (\log|x|)^2\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{2\log|x|}{x^2} - \dfrac{(\log|x|)^2}{x^2} = \dfrac{\log|x|(2-\log|x|)}{x^2}$

(20) $\left(\log\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+3}}\right)' = \left(\dfrac{1}{2}\log(x-1)-\dfrac{1}{2}\log(x^2+3)\right)' = \dfrac{1}{2(x-1)} - \dfrac{x}{x^2+3}$

(21) $\left(\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)' = \dfrac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)'}{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(22) $(\log(\sin(e^x)))' = \dfrac{(\sin(e^x))'}{\sin(e^x)} = \dfrac{e^x\cos(e^x)}{\sin(e^x)}$

(23) $\left(\sin^{-1}(2x^2-1)\right)' = \dfrac{(2x^2-1)'}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} = \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2-4x^4}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & 0<x<1 \\ -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & -1<x<0 \end{cases}$ であるが,

$$\sin^{-1}(2x^2-1) = \begin{cases} 2\sin^{-1}x - \frac{\pi}{2} & 0 \leqq x \leqq 1 \\ -2\sin^{-1}x - \frac{\pi}{2} & -1 \leqq x \leqq 0 \end{cases} \qquad \cdots (*)$$

が成り立つため, $\left(\sin^{-1}x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ から $\left(\sin^{-1}(2x^2-1)\right)' = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & 0<x<1 \\ -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & -1<x<0 \end{cases}$ は明らかである. また, $\sin^{-1}(2x^2-1)$ は 0 で微分不可能である. 実際, $(*)$ と教科書の問題 1.6 の (4) から $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin^{-1}(2x^2-1)-\sin^{-1}(-1)}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{2\sin^{-1}x}{x} = 2$, $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{\sin^{-1}(2x^2-1)-\sin^{-1}(-1)}{x} = \lim_{x\to-0}\frac{-2\sin^{-1}x}{x} = -2$ となるため $\sin^{-1}(2x^2-1)$ の 0 における左右の微分係数は一致しない.

[$(*)$ の証明] $x = \cos\dfrac{\theta}{2}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ とおくと教科書の例題 1.6 の (1) から $\theta = 2\cos^{-1}x = \pi - 2\sin^{-1}x$ であり, $2x^2-1 = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1 = \cos\theta$ が成り立つため, $\cos^{-1}(2x^2-1) = \cos^{-1}(\cos\theta)$ が得られる. ここで, $0 \leqq x \leqq 1$ のときは $0 \leqq \theta \leqq \pi$ だから $\cos^{-1}(\cos\theta) = \theta = \pi - 2\sin^{-1}x$, $-1 \leqq x \leqq 0$ のときは $0 \leqq \theta - \pi \leqq \pi$ だから, 教科書の問 1.11 の (2) から $\cos^{-1}(\cos\theta) = \cos^{-1}(-\cos(\theta-\pi)) = \pi - \cos^{-1}(\cos(\theta-\pi)) = \pi - (\theta-\pi) = 2\pi - \theta = \pi + 2\sin^{-1}x$ である. 従って

$$\sin^{-1}(2x^2-1) = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(2x^2-1) = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(\cos\theta) = \begin{cases} 2\sin^{-1}x - \frac{\pi}{2} & 0 \leqq x \leqq 1 \\ -2\sin^{-1}x - \frac{\pi}{2} & -1 \leqq x \leqq 0 \end{cases}$$

(24) $\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)' = \dfrac{4}{\sqrt{3}\left(1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)}\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{x^2+x+1}$

(25) $\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(26) $\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{x}\right)' = (\tan^{-1})'\left(\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{1+x^2}$

[別解] $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x>0 \\ -\frac{\pi}{2} & x<0 \end{cases}$ が成り立つ. 実際 $x>0$ の場合は教科書の問 1.11 の (4) の結果であり, $x<0$ ならば $-x>0$ だから $\tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \tan^{-1}\left(-\dfrac{1}{-x}\right) = -\tan^{-1}\dfrac{1}{-x} = -\dfrac{\pi}{2} + \tan^{-1}(-x) = -\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}x$ が成り立つ. 上の等式の両辺の導関数を考えれば $\left(\tan^{-1}x\right)' + \left(\tan^{-1}\dfrac{1}{x}\right)' = 0$ で, $\left(\tan^{-1}x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ だから $\left(\tan^{-1}\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ である.

(27) $\left(\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}\right)' = \dfrac{\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)'}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} = \dfrac{\frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2}}{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} = \dfrac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2}{1+x^2}$ であるが,

$$\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \begin{cases} 2\tan^{-1}x + \pi & x<-1 \\ 2\tan^{-1}x & |x|<1 \\ 2\tan^{-1}x - \pi & x>1 \end{cases} \qquad \cdots (*)$$

が成り立つため, $\left(\tan^{-1}x\right)' = \dfrac{1}{x^2+1}$ から $\left(\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}\right)' = \dfrac{2}{1+x^2}$ は明らかである.

[(∗) の証明] $x = \tan\dfrac{\theta}{2}$ $(|\theta| < \pi)$ とおくと $\theta = 2\tan^{-1}x$ であり, $\dfrac{2x}{1-x^2} = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} = \tan\theta$ が成り立つため, $\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2} = \tan^{-1}(\tan\theta)$ が得られる. ここで, $x < -1$ のときは $0 < \theta+\pi < \dfrac{\pi}{2}$ だから $\tan^{-1}(\tan\theta) = \tan^{-1}(\tan(\theta+\pi)) = \theta+\pi = 2\tan^{-1}x+\pi$, $-1 < x < 1$ のときは $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ だから $\tan^{-1}(\tan\theta) = \theta = 2\tan^{-1}x$, $x > 1$ のときは $-\dfrac{\pi}{2} < \theta-\pi < 0$ だから $\tan^{-1}(\tan\theta) = \tan^{-1}(\tan(\theta-\pi)) = \theta-\pi = 2\tan^{-1}x-\pi$ である.

(28) $\left(\tan^{-1}\dfrac{x^2-1}{2x}\right)' = \dfrac{\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)'}{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2} = \dfrac{\frac{4x^2-2(x^2-1)}{4x^2}}{1+\frac{(x^2-1)^2}{4x^2}} = \dfrac{2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2}{1+x^2}$ であるが,

$$\tan^{-1}\frac{x^2-1}{2x} = \begin{cases} 2\tan^{-1}x - \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ 2\tan^{-1}x + \frac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases} \quad \cdots(*)$$

が成り立つため, $\left(\tan^{-1}x\right)' = \dfrac{1}{x^2+1}$ から $\left(\tan^{-1}\dfrac{x^2-1}{2x}\right)' = \dfrac{2}{1+x^2}$ は明らかである.

[(∗) の証明] 第 3 回の演習問題の 5 の (3) より $x > 0$ の場合は $\tan^{-1}\dfrac{x^2-1}{2x} = 2\tan^{-1}x - \dfrac{\pi}{2}$ であり, $x < 0$ の場合は, この式の x に $-x$ を代入すれば $-\tan^{-1}\dfrac{x^2-1}{2x} = -2\tan^{-1}x - \dfrac{\pi}{2}$ が得られるため, $\tan^{-1}\dfrac{x^2-1}{2x} = 2\tan^{-1}x + \dfrac{\pi}{2}$ である.

(29) $\left(\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x+1}\right)' = \dfrac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} = \dfrac{\frac{2}{(x+1)^2}}{1+\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}} = \dfrac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2} = \dfrac{1}{x^2+1}$ であるが,

$$\tan^{-1}\frac{x-1}{x+1} = \begin{cases} \tan^{-1}x - \frac{\pi}{4} & x > -1 \\ \tan^{-1}x + \frac{3\pi}{4} & x < -1 \end{cases} \quad \cdots(*)$$

が成り立つため, $\left(\tan^{-1}x\right)' = \dfrac{1}{x^2+1}$ から $\left(\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x+1}\right)' = \dfrac{1}{x^2+1}$ は明らかである.

[(∗) の証明] $x < -1$ ならば第 3 回の演習問題の 5 の (6) から $\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x+1} = -\tan^{-1}\dfrac{1-x}{1+x} = \tan^{-1}x + \dfrac{3\pi}{4}$ である. $x > -1$ の場合, $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ とおくと $xy = x\dfrac{1-x}{1+x} = 3 - \left(1+x+\dfrac{2}{1+x}\right) = 3-2\sqrt{2} - \left(\sqrt{1+x} - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}}\right)^2 \leqq 3-2\sqrt{2} < 1$ となるため, (x, y) は第 3 回の演習問題の 9 の (1) の不等式を満たす. このとき, $\dfrac{x+y}{1-xy} = \dfrac{x+\frac{1-x}{1+x}}{1-x\frac{1-x}{1+x}} = 1$ であることに注意すれば, 第 3 回の演習問題の 5 の (1) から, $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{1-x}{1+x} = \tan^{-1}1 = \dfrac{\pi}{4}$ が得られる. 従って $x > -1$ ならば $\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x+1} = -\tan^{-1}\dfrac{1-x}{1+x} = \tan^{-1}x - \dfrac{\pi}{4}$ である.

(30) $-1 \leqq \dfrac{1-x}{1+x} \leqq 1$ であるためには $x \geqq 0$ でなければならないことに注意する.

$$\left(\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x}\right)' = -\frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$$

(31) $\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{x^2+1}\right)' = -\dfrac{\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2}} = \dfrac{2x}{|x|(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \begin{cases} \frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} & x > 0 \\ -\frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} & x < 0 \end{cases}$ であり, $\cos^{-1}\dfrac{1}{x^2+1}$ は 0 で微分不可能である. 実際 $y = \cos^{-1}\dfrac{1}{x^2+1}$ とおくと $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{\cos y} - 1}$ であり, $x \to 0$ のとき, $y \to +0$ だか

ら, 第 3 回の演習問題の 1 の (3) から
$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\cos^{-1}\frac{1}{x^2+1}-\cos^{-1}1}{x}=\lim_{y\to+0}\frac{y}{\sqrt{\frac{1}{\cos y}-1}}=\lim_{y\to+0}\frac{\sqrt{\cos y}}{\sqrt{\frac{1-\cos y}{y^2}}}=\sqrt{2}$, $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{\cos^{-1}\frac{1}{x^2+1}-\cos^{-1}1}{x}=$ $\displaystyle\lim_{y\to+0}\frac{y}{-\sqrt{\frac{1}{\cos y}-1}}=-\lim_{y\to+0}\frac{\sqrt{\cos y}}{\sqrt{\frac{1-\cos y}{y^2}}}=-\sqrt{2}$ となって $\displaystyle\cos^{-1}\frac{1}{x^2+1}$ の 0 における左右の微分係数は一致しない.

(32) $\displaystyle\left(\sin^{-1}\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'=\frac{\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}}=\frac{2x}{|x|(x^2+1)}=\begin{cases}\frac{2}{x^2+1} & x>0\\ -\frac{2}{x^2+1} & x<0\end{cases}$ であるが,

$$\sin^{-1}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\begin{cases}2\tan^{-1}x-\frac{\pi}{2} & x\geqq 0\\ -2\tan^{-1}x-\frac{\pi}{2} & x\leqq 0\end{cases}\quad\cdots(*)$$

が成り立つため, $\displaystyle\big(\tan^{-1}x\big)'=\frac{1}{x^2+1}$ から $\displaystyle\left(\sin^{-1}\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'=\begin{cases}\frac{2}{x^2+1} & x>0\\ -\frac{2}{x^2+1} & x<0\end{cases}$ は明らかである. また, $\displaystyle\sin^{-1}\frac{x^2-1}{x^2+1}$ は 0 で微分不可能である. 実際, $(*)$ と第 3 回の演習問題 1 の (10) から $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin^{-1}\frac{x^2-1}{x^2+1}-\sin^{-1}(-1)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{2\tan^{-1}x}{x}$ $\displaystyle=2$, $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{\sin^{-1}\frac{x^2-1}{x^2+1}-\sin^{-1}(-1)}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{-2\tan^{-1}x}{x}=-2$ となるため $\displaystyle\sin^{-1}\frac{x^2-1}{x^2+1}$ の 0 における左右の微分係数は一致しない.
[$(*)$ の証明] $x=\tan\theta$ $(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$ とおくと, $\theta=\tan^{-1}x$ であり, 教科書の問 1.11 の (1) と例題 1.6 の (1) から $\displaystyle\sin^{-1}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\sin^{-1}\frac{\tan^2\theta-1}{\tan^2\theta+1}=\sin^{-1}(\sin^2\theta-\cos^2\theta)=-\sin^{-1}(\cos 2\theta)=\cos^{-1}(\cos 2\theta)-\frac{\pi}{2}$ である. $x\geqq 0$ ならば $0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ だから $0\leqq 2\theta<\pi$ となるため, $\cos^{-1}(\cos 2\theta)=2\theta=2\tan^{-1}x$ である. $x\leqq 0$ ならば $-\frac{\pi}{2}<\theta\leqq 0$ だから $0\leqq 2\theta+\pi<\pi$ となるため, 教科書の問 1.11 の (2) より $\cos^{-1}(\cos 2\theta)=\cos^{-1}(-\cos(2\theta+\pi))=\pi-\cos^{-1}(\cos(2\theta+\pi))=-2\theta=-2\tan x$ である.

(33) $\displaystyle\left(\tan^{-1}\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1}\right)'=\frac{\left(\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1}\right)'}{1+\left(\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1}\right)^2}=\frac{(2x+2)(x^2-2x-1)-(x^2+2x-1)(2x-2)}{(x^2-2x-1)^2+(x^2+2x-1)^2}=\frac{-2x^2-2}{(x^2+1)^2}=$ $\displaystyle-\frac{2}{x^2+1}$ であるが

$$\tan^{-1}\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1}=\begin{cases}-2\tan^{-1}x-\frac{3\pi}{4} & x<-\tan\frac{\pi}{8}\\ -2\tan^{-1}x+\frac{\pi}{4} & -\tan\frac{\pi}{8}<x<\tan\frac{3\pi}{8}\\ -2\tan^{-1}x+\frac{5\pi}{4} & x>\tan\frac{3\pi}{8}\end{cases}\quad\cdots(*)$$

が成り立つため, $\displaystyle\big(\tan^{-1}x\big)'=\frac{1}{x^2+1}$ から $\displaystyle\left(\tan^{-1}\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1}\right)'=-\frac{2}{x^2+1}$ は明らかである.
[$(*)$ の証明] $x=\tan\frac{\theta}{2}$ $(|\theta|<\pi)$ とおくと $\displaystyle\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1}=\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}+2\tan\frac{\theta}{2}-1}{\tan^2\frac{\theta}{2}-2\tan\frac{\theta}{2}-1}=\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}}=$ $\displaystyle\frac{\sin\theta-\cos\theta}{-\sin\theta-\cos\theta}=-\frac{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}=-\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ である. $\theta=2\tan^{-1}x$ より $x<-\tan\frac{\pi}{8}$ ならば $\displaystyle-\frac{\pi}{4}<\theta+\frac{3\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$ となるため $\displaystyle\tan^{-1}\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1}=\tan^{-1}\left(-\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right)=-\tan^{-1}\left(\tan\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)\right)=-\theta-\frac{3\pi}{4}=$ $\displaystyle-2\tan^{-1}x-\frac{3\pi}{4}$ が得られる. $\displaystyle-\tan\frac{\pi}{8}<x<\tan\frac{3\pi}{8}$ ならば $\displaystyle-\frac{\pi}{2}<\theta-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$ となるため $\displaystyle\tan^{-1}\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1}=$ $\displaystyle\tan^{-1}\left(-\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right)=-\tan^{-1}\left(\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right)=-\theta+\frac{\pi}{4}=-2\tan^{-1}x+\frac{\pi}{4}$ が得られる. $\displaystyle x>\tan\frac{3\pi}{8}$ ならば $\displaystyle-\frac{\pi}{2}<\theta-\frac{5\pi}{4}<-\frac{\pi}{4}$ となるため $\displaystyle\tan^{-1}\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1}=\tan^{-1}\left(-\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right)=-\tan^{-1}\left(\tan\left(\theta-\frac{5\pi}{4}\right)\right)=$

$-\theta+\dfrac{5\pi}{4}=-2\tan^{-1}x+\dfrac{5\pi}{4}$ が得られる．

(34) $\left(\cos^{-1}\dfrac{2x}{x^2+1}\right)'=-\dfrac{\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}}=\dfrac{2(x^2-1)}{|x^2-1|(x^2+1)}=\begin{cases}\frac{2}{x^2+1} & |x|>1\\ -\frac{2}{x^2+1} & |x|<1\end{cases}$ であるが

$$\cos^{-1}\frac{2x}{x^2+1}=\begin{cases}2\tan^{-1}x+\frac{3\pi}{2} & x\leqq -1\\ -2\tan^{-1}x+\frac{\pi}{2} & -1\leqq x\leqq 1\\ 2\tan^{-1}x-\frac{\pi}{2} & x\geqq 1\end{cases}\quad\cdots(*)$$

であるため，$\left(\tan^{-1}x\right)'=\dfrac{1}{x^2+1}$ から $\left(\cos^{-1}\dfrac{2x}{x^2+1}\right)'=\begin{cases}\frac{2}{x^2+1} & |x|>1\\ -\frac{2}{x^2+1} & |x|<1\end{cases}$ は明らかである．また，$\cos^{-1}\dfrac{2x}{x^2+1}$ は ±1 において微分不可能である． 実際，$y=\tan^{-1}x+\dfrac{\pi}{4}$ とおけば $x=\tan\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan y-1}{\tan y+1}$ であり，$x\to-1+0$ のとき $y\to+0$，$x\to-1-0$ のとき $y\to-0$ だから $(*)$ から $\displaystyle\lim_{x\to-1+0}\frac{\cos^{-1}\frac{2x}{x^2+1}-\cos^{-1}(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1+0}\frac{-2\tan^{-1}x-\frac{\pi}{2}}{x+1}=\lim_{y\to+0}\frac{-2y}{\frac{\tan y-1}{\tan y+1}+1}=-\lim_{y\to+0}\frac{y}{\sin y}(\sin y+\cos y)=-1$，$\displaystyle\lim_{x\to-1-0}\frac{\cos^{-1}\frac{2x}{x^2+1}-\cos^{-1}(-1)}{x-(-1)}$
$\displaystyle=\lim_{x\to-1-0}\frac{2\tan^{-1}x+\frac{\pi}{2}}{x+1}=$
$\displaystyle\lim_{y\to-0}\frac{2y}{\frac{\tan y-1}{\tan y+1}+1}=\lim_{y\to-0}\frac{y}{\sin y}(\sin y+\cos y)=1$ となって，$\cos^{-1}\dfrac{2x}{x^2+1}$ の -1 における左右の微分係数は一致しない．同様に $y=\tan^{-1}x-\dfrac{\pi}{4}$ とおけば $x=\tan\left(y+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1+\tan y}{1-\tan y}$ であり，$x\to1+0$ のとき $y\to+0$，$x\to1-0$ のとき $y\to-0$ だから $(*)$ から $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{\cos^{-1}\frac{2x}{x^2+1}-\cos^{-1}1}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{2\tan^{-1}x-\frac{\pi}{2}}{x-1}=\lim_{y\to+0}\frac{2y}{\frac{1+\tan y}{1-\tan y}-1}=$ $\displaystyle\lim_{y\to+0}\frac{y}{\sin y}(\cos y-\sin y)=1$，$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{\cos^{-1}\frac{2x}{x^2+1}-\cos^{-1}1}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{-2\tan^{-1}x+\frac{\pi}{2}}{x-1}=\lim_{y\to-0}\frac{-2y}{\frac{1+\tan y}{1-\tan y}-1}=$ $\displaystyle-\lim_{y\to-0}\frac{y}{\sin y}(\cos y-\sin y)=-1$ となって，$\cos^{-1}\dfrac{2x}{x^2+1}$ の 1 における左右の微分係数は一致しない．

[$(*)$ の証明] $x=\tan\dfrac{\theta}{2}$ $(-\pi<\theta<\pi)$ とおけば $\theta=2\tan^{-1}x$ であり，教科書の例題 1.6 の (1) から $\cos^{-1}\dfrac{2x}{x^2+1}=$ $\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{\tan^2\frac{\theta}{2}+1}=\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}\left(2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}(\sin\theta)$ が得られる．$x\leqq-1$ ならば $-\pi<\theta\leqq-\dfrac{\pi}{2}$ だから $0<\theta+\pi\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となるため $\sin^{-1}(\sin\theta)=\sin^{-1}(-\sin(\theta+\pi))=-\sin^{-1}(\sin(\theta+\pi))=$ $-\theta-\pi=-2\tan^{-1}x-\pi$ である． $-1\leqq x\leqq1$ ならば $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ だから $\sin^{-1}(\sin\theta)=\theta=2\tan^{-1}x$ である． $x\geqq1$ ならば $\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<\pi$ だから $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta-\pi<0$ となるため $\sin^{-1}(\sin\theta)=\sin^{-1}(-\sin(\theta-\pi))=$ $-\sin^{-1}(\sin(\theta-\pi))=-\theta+\pi=-2\tan^{-1}x+\pi$ である．

(35) $\left(\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}\right)'=\dfrac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}=\dfrac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & -1<x<0\\ -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & 0<x<1\end{cases}$ であるが，

$$\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}=\begin{cases}-\cos^{-1}x+\pi & -1\leqq x\leqq 0\\ \cos^{-1}x & 0\leqq x\leqq 1\end{cases}\quad\cdots(*)$$

が成り立つため，$\left(\cos^{-1}x\right)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ から $\left(\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}\right)'=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & -1<x<0\\ -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & 0<x<1\end{cases}$ は明らかである．また，$\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ は 0 で微分不可能である． 実際，$(*)$ から $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}-\sin^{-1}1}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\cos^{-1}x-\frac{\pi}{2}}{x}=$

$\lim_{x\to+0}\dfrac{\cos^{-1}x-\cos^{-1}0}{x}$ となるため, $\lim_{x\to+0}\dfrac{\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}-\sin^{-1}1}{x}$ は $\cos^{-1}x$ の 0 における微分係数 -1 に等しい. 一方 $\lim_{x\to-0}\dfrac{\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}-\sin^{-1}1}{x}=\lim_{x\to-0}\dfrac{-\cos^{-1}x+\frac{\pi}{2}}{x}=\lim_{x\to-0}\dfrac{(-\cos^{-1}x)-(-\cos^{-1}0)}{x}$ となるため, $\lim_{x\to-0}\dfrac{\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}-\sin^{-1}1}{x}$ は $-\cos^{-1}x$ の 0 における微分係数 1 に等しいため, $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ の 0 における左右の微分係数は一致しない.

[(*) の証明] $-1\leqq x\leqq 0$ ならば $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\cos^{-1}x-\pi\leqq 0$ であり, 第 3 回の演習問題 2 の (1) から, $\sin(\cos^{-1}x-\pi)=\sin(-\cos^{-1}x)=-\sin(\cos^{-1}x)=-\sqrt{1-x^2}$ となるため, $\cos^{-1}x-\pi=\sin^{-1}\left(-\sqrt{1-x^2}\right)=-\sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ を得る. 従って $-1\leqq x\leqq 0$ ならば $\sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)=-\cos^{-1}x+\pi$ である. $0\leqq x\leqq 1$ ならば $0\leqq\cos^{-1}x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であり, 第 3 回の演習問題 2 の (1) から, $\sin(\cos^{-1}x)=\sqrt{1-x^2}$ となるため, $\cos^{-1}x=\sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ を得る. 従って $0\leqq x\leqq 1$ ならば $\sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)=\cos^{-1}x$ である.

(36) $\left(\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}\right)'=\dfrac{\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)'}{\sqrt{1-\frac{x+1}{2}}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ であるが, $-1\leqq x\leqq 1$ ならば

$$2\sin^{-1}\sqrt{\frac{x+1}{2}}=\sin^{-1}x+\frac{\pi}{2}\quad\cdots(*)$$

が成り立つため, $\left(\sin^{-1}x\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ から, $\left(\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ は明らかである.

[(*) の証明] $-1\leqq x\leqq 1$ ならば $0\leqq\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}\leqq 1$ だから $2\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$ と $\sin^{-1}x+\dfrac{\pi}{2}$ はともに閉区間 $[0,\pi]$ に属する. cos はこの区間で狭義単調減少関数だから, (*) が成り立つことは, $\cos\left(2\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}\right)=\cos\left(\sin^{-1}x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ が成り立つことと同値である. ここで

$$\cos\left(2\sin^{-1}\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)=1-2\sin^2\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)=1-2\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right)^2=-x$$
$$\cos\left(\sin^{-1}x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(\sin^{-1}x)=-x$$

となって, 上式は成り立つため (*) が示される.

(37) $\left(\tan^{-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)'=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)'}{1+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{2x^2+2x\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{1}{2x\sqrt{x^2-1}}$

(38) $\left(\tan^{-1}\sqrt{x^2-1}\right)'=\dfrac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)'}{1+\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(39) $\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\dfrac{-\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}}=\dfrac{x}{|x|(x^2+1)}=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2} & x>0\\ -\frac{1}{1+x^2} & x<0\end{cases}$ であるが,

$$\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\begin{cases}\tan^{-1}x & x\geqq 0\\ -\tan^{-1}x & x\leqq 0\end{cases}\quad\cdots(*)$$

となるため, $\left(\tan^{-1}x\right)'=\dfrac{1}{x^2+1}$ から $\left(\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2} & x>0\\ -\frac{1}{1+x^2} & x<0\end{cases}$ は明らかである. また $\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ は 0 で微分不可能である. 実際, (*) と第 3 回の演習問題 1 の (10) から $\lim_{x\to+0}\dfrac{\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\cos^{-1}1}{x}=\lim_{x\to+0}\dfrac{\tan^{-1}x}{x}=1$, $\lim_{x\to-0}\dfrac{\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\cos^{-1}1}{x}=\lim_{x\to-0}\dfrac{-\tan^{-1}x}{x}=-1$ となるため $\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ の 0 における左右の微分係数

は一致しない.
[(∗) の証明] $x \geqq 0$ ならば $0 \leqq \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ であり, 第 3 回の演習問題 2 の (5) から, $\cos\left(\tan^{-1} x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ だから, $\cos^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \tan^{-1} x$ が得られる. $x \leqq 0$ ならば, $-x \geqq 0$ だから, いま示した等式の x に $-x$ を代入すれば $\cos^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$ が得られる.

(40) $\left(\tan^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \dfrac{\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2} = \dfrac{-x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}$

(41) $\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\tan\dfrac{x}{2}\right)\right)' = \dfrac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)^2}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\tan\dfrac{x}{2}\right)' = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\dfrac{1}{1+\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$
$= \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{(a-b)(a+b)}}{(a+b)\cos^2\frac{x}{2}+(a-b)\sin^2\frac{x}{2}} = \dfrac{\sqrt{(a-b)(a+b)}}{2(a+b\cos x)}$

(42) $\left(\sin^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \dfrac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}} = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}} = \dfrac{1}{x^2+1}$ であるが, 教科書の問題 1.5 の (3) から $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \tan^{-1} x$ だから, $\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ はただちに得られる.

(43) $\left(\cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)\right)' = \dfrac{\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)'}{\sqrt{1-\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)^2}} = \dfrac{\frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{|1-2x^2|} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & |x| < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} < |x| < 1 \end{cases}$ であるが, 次の等式 (∗) と $\left(\cos^{-1} x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ から上の結果は明らかである.

$$\cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \begin{cases} -2\cos^{-1} x + \frac{5\pi}{2} & -1 \leqq x \leqq -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2\cos^{-1} x - \frac{\pi}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -2\cos^{-1} x + \frac{\pi}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1 \end{cases} \qquad \cdots(*)$$

[(∗) の証明] $-1 \leqq x \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ならば $-\dfrac{\pi}{2} \leqq 2\cos^{-1} x - 2\pi \leqq 0$ であることに注意すると, 第 3 回の演習問題の 2 の (2) から $\sin\left(2\cos^{-1} x - 2\pi\right) = \sin\left(2\cos^{-1} x\right) = 2x\sqrt{1-x^2}$ だから, 教科書の問 1.11 の (1) を用いれば $2\cos^{-1} x - 2\pi = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = -\cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) + \dfrac{\pi}{2}$ である. 従って, $\cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = -2\cos^{-1} x + \dfrac{5\pi}{2}$ である. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ならば $-\dfrac{\pi}{2} \leqq 2\cos^{-1} x - \pi \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であることに注意すると, 第 3 回の演習問題の 2 の (2) から $\sin\left(2\cos^{-1} x - \pi\right) = -\sin\left(2\cos^{-1} x\right) = -2x\sqrt{1-x^2}$ だから, 教科書の例題 1.6 の (1) と問 1.11 の (1) を用いれば $2\cos^{-1} x - \pi = \sin^{-1}\left(-2x\sqrt{1-x^2}\right) = -\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) - \dfrac{\pi}{2}$ である. 従って, $\cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1} x - \dfrac{\pi}{2}$ である. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1$ ならば $0 \leqq 2\cos^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であることに注意すると, 第 3 回の演習問題の 2 の (2) から $\sin\left(2\cos^{-1} x\right) = 2x\sqrt{1-x^2}$ だから, 教科書の問 1.11 の (1) を用いれば $2\cos^{-1} x = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = -\cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) + \dfrac{\pi}{2}$ である. 従って, $\cos^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = -2\cos^{-1} x + \dfrac{\pi}{2}$ である.

(44) $\left(\sin^{-1}\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-e^{2x}})^2}}\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}}\dfrac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}(1-e^{2x})' = \dfrac{-2e^{2x}}{2e^x\sqrt{1-e^{2x}}}$
$= \dfrac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

(45) $\left(\sqrt{1+x^2}\sin(\tan^{-1} x)\right)' = \left(\sqrt{1+x^2}\right)'\sin(\tan^{-1} x) + \sqrt{1+x^2}\left(\sin(\tan^{-1} x)\right)' = \dfrac{x\sin(\tan^{-1} x)}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{\cos(\tan^{-1} x)}{\sqrt{1+x^2}}$ であるが, 第 3 回の演習問題の 2 の (6) から $\sqrt{1+x^2}\sin(\tan^{-1} x) = x$ となるため $\left(\sqrt{1+x^2}\sin(\tan^{-1} x)\right)' = 1$ である.

(46) $\left(\log(\sin^{-1}(e^x))\right)' = \dfrac{(\sin^{-1}(e^x))'}{\sin^{-1}(e^x)} = \dfrac{(e^x)'}{\sin^{-1}(e^x)\sqrt{1-(e^x)^2}} = \dfrac{e^x}{\sin^{-1}(e^x)\sqrt{1-(e^x)^2}}$

(47) $\left(\sin^{-1}\dfrac{e^x}{e^x+e^{-x}}\right)' = \dfrac{\left(\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}\right)^2}} = \dfrac{\frac{2}{(e^x+e^{-x})^2}}{\frac{1}{e^x+e^{-x}}\sqrt{2+e^{-2x}}} = \dfrac{2}{(e^x+e^{-x})\sqrt{2+e^{-2x}}}$

(48) $\left(\tan^{-1}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)' = \dfrac{\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)'}{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2} = \dfrac{\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}}{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2} = \dfrac{2}{e^{2x}+e^{-2x}} = \dfrac{1}{\cosh 2x}$

(49) $\left(\sin^{-1}(\tan^{-1}x)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}}(\tan^{-1}x)' = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-(\tan^{-1}x)^2}}$

(50) $(\sin^{-1}(\sqrt{1-\sin x}))' = \dfrac{(\sqrt{1-\sin x})'}{\sqrt{1-(1-\sin x)}} = \dfrac{-\cos x}{2\sqrt{\sin x}\sqrt{1-\sin x}}$

(51) $y = x^{3x^2}$ とおいて両辺の対数をとれば, $\log y = 3x^2\log x$. この両辺を x で微分すれば, $\dfrac{y'}{y} = 6x\log x + 3x$. 従って $\left(x^{3x^2}\right)' = y(6x\log x+3x) = 3x^{3x^2+1}(2\log x+1)$.

(52) $y = (a+x)^{\frac{1}{x}}$ とおいて両辺の対数をとれば, $\log y = \dfrac{\log(a+x)}{x}$. この両辺を x で微分すれば, $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{x(a+x)} - \dfrac{\log(a+x)}{x^2}$. 従って $\left((a+x)^{\frac{1}{x}}\right)' = y\left(\dfrac{1}{x(a+x)} - \dfrac{\log(a+x)}{x^2}\right) = \dfrac{(a+x)^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(\dfrac{x}{a+x} - \log(a+x)\right)$.

(53) $y = x^{x^a}$ とおいて両辺の対数をとれば, $\log y = x^a\log x$. この両辺を x で微分すれば, $\dfrac{y'}{y} = ax^{a-1}\log x + x^{a-1}$. 従って $\left(x^{x^a}\right)' = y\left(ax^{a-1}\log x + x^{a-1}\right) = x^{x^a+a-1}(a\log x+1)$.

(54) $y = (\cos x)^{\cos x}$ とおいて両辺の対数をとれば, $\log y = \cos x\log(\cos x)$. この両辺を x で微分すれば, $\dfrac{y'}{y} = -\sin x\log(\cos x) - \dfrac{\cos x\sin x}{\cos x} = -\sin x(\log(\cos x)+1)$. 従って $((\cos x)^{\cos x})' = -y\sin x(\log(\cos x)+1) = -(\cos x)^{\cos x}\sin x(\log(\cos x)+1)$.

(55) $y = (\tan x)^{\sin x}$ とおいて両辺の対数をとれば, $\log y = \sin x\log(\tan x)$. この両辺を x で微分すれば, $\dfrac{y'}{y} = \cos x\log(\tan x) - \dfrac{\sin x}{\tan x\cos^2 x} = \cos x\log(\tan x) - \dfrac{1}{\cos x}$. 従って $\left((\tan x)^{\sin x}\right)' = y\left(\cos x\log(\tan x) - \dfrac{1}{\cos x}\right) = (\tan x)^{\sin x}\left(\cos x\log(\tan x) - \dfrac{1}{\cos x}\right)$.

(56) $y = x^{(\log x)^a}$ とおいて両辺の対数をとれば, $\log y = (\log x)^{a+1}$. この両辺を x で微分すれば, $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{(a+1)(\log x)^a}{x}$. 従って $\left(x^{(\log x)^a}\right)' = \dfrac{y(a+1)(\log x)^a}{x} = \dfrac{(a+1)x^{(\log x)^a}(\log x)^a}{x}$.

(57) $y = x^{\sin x}$ とおいて両辺の対数をとれば, $\log y = \sin x\log x$. この両辺を x で微分すれば, $\dfrac{y'}{y} = \cos x\log x + \dfrac{\sin x}{x}$ となるため, $(x^{\sin x})' = x^{\sin x}\left(\cos x\log x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$ である. 従って $\left(\tan\left(x^{\sin x}\right)\right)' = \dfrac{\left(x^{\sin x}\right)'}{\cos^2\left(x^{\sin x}\right)} = \dfrac{x^{\sin x}\left(\cos x\log x + \frac{\sin x}{x}\right)}{\cos^2\left(x^{\sin x}\right)} = \dfrac{x^{\sin x}(x\cos x\log x + \sin x)}{x\cos^2\left(x^{\sin x}\right)}$.

(58) $y = (\log x)^{\frac{1}{x}}$ とおいて両辺の対数をとれば, $\log y = \dfrac{\log(\log x)}{x}$. この両辺を x で微分すれば, (14) の結果から $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{(\log(\log x))'}{x} + \log(\log x)\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{x^2\log x} - \dfrac{\log(\log x)}{x^2}$ である. 従って $\left((\log x)^{\frac{1}{x}}\right)' = y\left(\dfrac{1}{x^2\log x} - \dfrac{\log(\log x)}{x^2}\right) = \dfrac{(\log x)^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(\dfrac{1}{\log x} - \log(\log x)\right)$.

(59) $\left(e^{\sin^{-1}x}\right)' = e^{\sin^{-1}x}(\sin^{-1}x)' = \dfrac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$

(60) $y = (\cos^{-1}x)^{\log x}$ とおいて両辺の対数をとれば, $\log y = \log x\log(\cos^{-1}x)$. この両辺を x で微分すれば,

$\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{x}\log(\cos^{-1}x) + \dfrac{-\log x}{\cos^{-1}x\sqrt{1-x^2}}$. 従って $\left((\cos^{-1}x)^{\log x}\right)' =$
$y\left(\dfrac{1}{x}\log(\cos^{-1}x) + \dfrac{-\log x}{\cos^{-1}x\sqrt{1-x^2}}\right) = (\cos^{-1}x)^{\log x}\left(\dfrac{1}{x}\log(\cos^{-1}x) - \dfrac{\log x}{\cos^{-1}x\sqrt{1-x^2}}\right)$.

2. (1) 教科書の問 1.18 より $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x\log|x| = 0$.

(2) $x \neq 0$ ならば $f(x) = x^2\log|x|$ だから, このとき $f'(x) = 2x\log|x| + x$ である. 従って教科書の問 1.18 より $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0}(2x\log|x| + x) = 0$.

(3) (1), (2) の結果から $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$ だから f' は 0 で連続である.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}(2\log|x| + 1) = -\infty$ だから f' は 0 で微分不可能である.

3. (1) e^{-x}, $\dfrac{1}{x}$ は $x > 0$ においてともに x の狭義単調減少関数だから, $0 < x < y$ ならば $e^{-x} > e^{-y}$, $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$ が成り立つ. これらを辺々かけ合わせれば $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x} > \dfrac{e^{-y}}{y} = f(y)$ となるため, f は狭義単調減少関数である. とくに f は単射である. また, $x \to +0$ のとき, $e^{-x} \to 1$, $\dfrac{1}{x} \to \infty$ だから $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = \infty$ であり, $x \to \infty$ のとき $e^{-x} \to 0$, $\dfrac{1}{x} \to 0$ だから $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ である. 従って, 任意の $y \in (0,\infty)$ に対して $f(b) < y < f(a)$ を満たす $0 < a < b$ があるため, 中間値の定理から $f(x) = y$ を満たす $a < x < b$ がある. 故に f は全射でもあるため, 全単射であり, f の逆関数が存在する.

(2) $f'(x) = -\dfrac{(x+1)e^{-x}}{x^2}$, $f(1) = \dfrac{1}{e}$ より 逆関数の微分の公式から, $(f^{-1})'\left(\dfrac{1}{e}\right) = (f^{-1})'(f(1)) = \dfrac{1}{f'(1)} = -\dfrac{1}{2e^{-1}} = -\dfrac{e}{2}$.

4. (1) $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x\cos^{-1}(1-x^2) = 0$, $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\cos^{-1}(1-x^2) = 0$.
$y = x^2$ とおけば $x \to 0$ のとき, $y \to +0$ だから, 第 4 回の演習問題 1 の (15) の結果を用いると
$h'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^{-1}(1-x^4)}{x^2} = \lim\limits_{y\to +0}\dfrac{\cos^{-1}(1-y^2)}{y} = \sqrt{2}$.

(2) $x \neq 0$ ならば $f'(x) = 2x\cos^{-1}(1-x^2) + \dfrac{2x^3}{|x|\sqrt{2-x^2}} = \begin{cases} 2x\cos^{-1}(1-x^2) + \dfrac{2x^2}{\sqrt{2-x^2}} & x > 0 \\ 2x\cos^{-1}(1-x^2) - \dfrac{2x^2}{\sqrt{2-x^2}} & x < 0 \end{cases}$ だから
$\lim\limits_{x\to +0} f'(x) = \lim\limits_{x\to +0}\left(2x\cos^{-1}(1-x^2) + \dfrac{2x^2}{\sqrt{2-x^2}}\right) = 0$, $\lim\limits_{x\to -0} f'(x) = \lim\limits_{x\to -0}\left(2x\cos^{-1}(1-x^2) - \dfrac{2x^2}{\sqrt{2-x^2}}\right) = 0$ となるため $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$ である.

$x \neq 0$ ならば $g'(x) = \cos^{-1}(1-x^2) + \dfrac{2x^2}{|x|\sqrt{2-x^2}} = \begin{cases} \cos^{-1}(1-x^2) + \dfrac{2x}{\sqrt{2-x^2}} & x > 0 \\ \cos^{-1}(1-x^2) - \dfrac{2x}{\sqrt{2-x^2}} & x < 0 \end{cases}$ だから
$\lim\limits_{x\to +0} g'(x) = \lim\limits_{x\to +0}\left(\cos^{-1}(1-x^2) + \dfrac{2x}{\sqrt{2-x^2}}\right) = 0$, $\lim\limits_{x\to -0} g'(x) = \lim\limits_{x\to -0}\left(\cos^{-1}(1-x^2) - \dfrac{2x}{\sqrt{2-x^2}}\right) = 0$ となるため $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = 0$ である.

$x \neq 0$ ならば $\left(\dfrac{\cos^{-1}(1-x^4)}{x}\right)' = \left(\cos^{-1}(1-x^4)\right)'\dfrac{1}{x} + \cos^{-1}(1-x^4)\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-(1-x^4)'}{x\sqrt{1-(1-x^4)^2}} - \dfrac{\cos^{-1}(1-x^4)}{x^2} = \dfrac{4x^2}{\sqrt{2x^4-x^8}} - \dfrac{\cos^{-1}(1-x^4)}{x^2} = \dfrac{4}{\sqrt{2-x^4}} - \dfrac{\cos^{-1}(1-x^4)}{x^2}$ だから $\lim\limits_{x\to 0} h'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4}{\sqrt{2-x^4}} - \dfrac{\cos^{-1}(1-x^4)}{x^2}\right) = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

(3) (1) の結果と (2) より $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to +0}\left(2\cos^{-1}(1-x^2) + \dfrac{2x}{\sqrt{2-x^2}}\right) = 0$,
$\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to -0}\left(2\cos^{-1}(1-x^2) - \dfrac{2x}{\sqrt{2-x^2}}\right) = 0$ となるため $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = 0$ である. 故に f'

は 0 で微分可能である.

(1) と (2), および第 4 回の演習問題 1 の (15) の結果を用いれば

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\left(\frac{\cos^{-1}(1-x^2)}{x}+\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}\right)=2\sqrt{2},$

$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\lim_{x\to-0}\left(\frac{\cos^{-1}(1-x^2)}{x}-\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}\right)=-2\sqrt{2}$ となるため, g' は 0 で微分不可能である.

上の (1), (2) の結果より, $\displaystyle\lim_{x\to 0}h'(x)=h'(0)$ だから, h' は 0 で連続である.

(4) $\displaystyle(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{6}\right)=(f^{-1})'\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=\frac{1}{f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}\pi}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{3}{\sqrt{2}\pi+\sqrt{6}}$

$\displaystyle(g^{-1})'\left(\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\right)=(g^{-1})'\left(g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=\frac{1}{g'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{1}{\frac{\pi}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}}=\frac{3}{\pi+2\sqrt{3}}$

微積分学 I 演習問題　第 5 回　高次導関数

1. 次の関数の n 次導関数を求めよ．ただし, m は自然数, a, b, c, d, α は実数で, $\alpha \neq 1$, $\alpha > 0$ (5) では $ac \neq 0$ とする．

(1) $\log\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$　(2) $\log|x^3-3x+2|$　(3) $\dfrac{x+1}{x-1}$　(4) $\dfrac{x^3}{1-x^2}$

(5) $\dfrac{1}{acx^2+(ad+bc)x+bd}$　(6) $\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$　(7) $(e^{2x}-e^{-x})^3$　(8) α^x

(9) $\log_\alpha x$　(10) $\sin ax\cos bx$　(11) $\sin^3 x$　(12) $e^{ax}\sin(bx+c)$

(13) $e^{ax}\cos(bx+c)$　(14) $(1+x)\log(1+x)$　(15) $x^2\log(1+x)$　(16) $(x^2+1)\log x$

(17) $(x^2+x+1)(\log x+e^x)$　(18) x^3e^{ax}　(19) x^4e^{ax}　(20) $x^2\cos 2x$

(21) $x^2\sin^2 x$　(22) $x^3\sin 3x$　(23) $x^4\cos 2x$　(24) $(x^2-1)^m$

(25) $x\log\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$　(26) $x\log\sqrt{1-x^2}$

2. $f:(-1,1)\to \boldsymbol{R}$ を $f(x)=\sin^{-1}x$ で定める．

(1) $\sqrt{1-x^2}f'(x)=1$ の両辺を x で微分することによって $(1-x^2)f''(x)-xf'(x)=0$ を示せ.

(2) n を 2 以上の整数とするとき, (1) で得た等式の両辺を x で $n-2$ 回微分することによって次の等式を示せ.

$$(1-x^2)f^{(n)}(x)-(2n-3)xf^{(n-1)}(x)-(n-2)^2f^{(n-2)}(x)=0$$

(3) $f^{(n)}(0)$ を求めよ．(n が偶数の場合と奇数の場合に分けよ.)

3. 次で与えられる関数 f の n 次導関数 $f^{(n)}$ について, 前問に倣って $f^{(n)}(x)$ の漸化式を導き, $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

(1) $f(x)=e^{x^2}$　(2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$　(3) $f(x)=\sqrt{2+x^2}$　(4) $f(x)=\sqrt{2-x^2}$

(5) $f(x)=e^{x^3}$　(6) $f(x)=x^2e^{x^2}$　(7) $f(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$　(8) $f(x)=\log(x^2+1)$

(9) $f(x)=\log(x^3+1)$　(10) $f(x)=e^{c\sin^{-1}x}$

4. n を 0 以上の整数とする．$\dfrac{x^n}{n!}(\log x-a_n)$ の n 次導関数が $\log x$ になるような, 実数の定数 a_n を求めよ.

5. (発展問題) (1) $f(x)=\tan^{-1}x$ に対して $f^{(n)}(x)=(n-1)!\cos^n f(x)\sin\left(n\left(f(x)+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ が成り立つことを示し, この結果を用いて $\dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{1}{1+x^2}=n!(1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}\sin\left((n+1)\left(\tan^{-1}x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ が成り立つことを示せ.

(2) $g(x)=\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$ に対して $g^{(n)}(x)=(-1)^n(n-1)!\sin^n g(x)\sin(ng(x))$ が成り立つことを示せ.

6. (発展問題) f が n 回微分可能ならば $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ が成り立つこと示せ.

7. (発展問題) $x^{n-1}\log x$, $x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$ の n 次導関数を求めよ.

8. (発展問題) $f,g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}} & x>0\\ 0 & x\leqq 0\end{cases}$ で定める．また, $x\neq 0$ に対し, $F_n(x)=x^{3n}e^{\frac{1}{x^2}}f^{(n)}(x)$ とおき, $x>0$ に対し, $G_n(x)=x^{2n}e^{\frac{1}{x}}g^{(n)}(x)$ とおく.

(1) $F_1(x)$, $G_1(x)$ を求めよ.

(2) $F_n'(x)=\dfrac{1}{x^3}(F_{n+1}(x)+(3nx^2-2)F_n(x))$, $G_n'(x)=\dfrac{1}{x^2}(G_{n+1}(x)+(2nx-1)G_n(x))$ を示せ.

(3) $F_n(x)$ は x の $2(n-1)$ 次の多項式であり, $G_n(x)$ は x の $n-1$ 次の多項式であることを示せ.

(4) n による数学的帰納法で $f^{(n)}(0)=0$ であることを示せ．従って f は無限回微分可能である.

第 5 回の演習問題の解答

1. (1) $\left(\log\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|\right)^{(n)} = (\log|x+1| - \log|x-1|)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n} - \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}$

(2) $\log|x^3-3x+2| = \log|(x-1)^2(x+2)| = 2\log|x-1| + \log|x+2|$ だから, $n \geqq 1$ ならば $(\log|x^3-3x+2|)^{(n)} = 2(\log|x-1|)^{(n)} + (\log|x+2|)^{(n)} = \dfrac{2(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n} + \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+2)^n}$

(3) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{(n)} = \left(1 + \dfrac{2}{x-1}\right)^{(n)} = \dfrac{2(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$

(4) $\left(\dfrac{x^3}{1-x^2}\right)^{(n)} = \left(-x + \dfrac{x}{1-x^2}\right)^{(n)} = \left(-x - \dfrac{1}{2(x-1)} - \dfrac{1}{2(x+1)}\right)^{(n)} = (-x)^{(n)} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{(n)} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{(n)}$ より $\left(\dfrac{x^3}{1-x^2}\right)' = -1 + \dfrac{1}{2(x-1)^2} + \dfrac{1}{2(x+1)^2}$. $n \geqq 2$ ならば $\left(\dfrac{x^3}{1-x^2}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n+1}n!}{2}\left(\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}} + \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$.

(5) $ad-bc \neq 0$ の場合, $\left(\dfrac{1}{acx^2+(ad+bc)x+bd}\right)^{(n)} = \left(\dfrac{1}{(ax+b)(cx+d)}\right)^{(n)} = \dfrac{1}{ad-bc}\left(\dfrac{a}{ax+b} - \dfrac{c}{cx+d}\right)^{(n)} = \dfrac{a}{ad-bc}\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)} - \dfrac{c}{ad-bc}\left(\dfrac{1}{cx+d}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{ad-bc}\left(\dfrac{a^{n+1}}{(ax+b)^{n+1}} - \dfrac{c^{n+1}}{(cx+d)^{n+1}}\right)$.
$ad-bc=0$ の場合, $d = \dfrac{bc}{a}$ だから $\left(\dfrac{1}{acx^2+(ad+bc)x+bd}\right)^{(n)} = \left(\dfrac{a}{c(ax+b)^2}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n a^{n+1}(n+1)!}{c(ax+b)^{n+2}}$.

(6) $\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ だから $\left(\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$ であり, $n \geqq 2$ ならば $\left(\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n}\left((x+1)^{\frac{1}{2}-n} - (x-1)^{\frac{1}{2}-n}\right)$.

(7) $\left((e^{2x}-e^{-x})^3\right)^{(n)} = \left(e^{6x} - 3e^{3x} + 3 - e^{-3x}\right)^{(n)} = 6^n e^{6x} - 3^{n+1}e^{3x} - (-3)^n e^{-3x}$

(8) $(\alpha^x)^{(n)} = \left(e^{x\log\alpha}\right)^{(n)} = (\log\alpha)^n e^{x\log\alpha} = (\log\alpha)^n \alpha^x$

(9) $(\log_\alpha x)^{(n)} = \left(\dfrac{\log x}{\log\alpha}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n\log\alpha}$

(10) $(\sin ax\cos bx)^{(n)} = \left(\dfrac{1}{2}(\sin((a+b)x) + \sin((a-b)x))\right)^{(n)} = \dfrac{1}{2}\left((a+b)^n\sin\left((a+b)x + \dfrac{n\pi}{2}\right) + (a-b)^n\sin\left((a-b)x + \dfrac{n\pi}{2}\right)\right)$

(11) $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$ より $\sin^3 x = \dfrac{1}{2}(\sin x - \sin x\cos 2x) = \dfrac{1}{2}\left(\sin x - \dfrac{1}{2}\sin 3x + \dfrac{1}{2}\sin x\right) = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{1}{4}\sin 3x$. 故に $(\sin^3 x)^{(n)} = \left(\dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{1}{4}\sin 3x\right)^{(n)} = \dfrac{3}{4}\sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right) - \dfrac{3^n}{4}\sin\left(3x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

(12) $(e^{ax}\sin(bx+c))' = e^{ax}(a\sin(bx+c) + b\cos(bx+c))$ だから, $\cos\gamma = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\gamma = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす $0 \leqq \gamma < 2\pi$ をとれば, $(e^{ax}\sin(bx+c))' = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\gamma\sin(bx+c) + \sin\gamma\cos(bx+c)) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+c+\gamma)$ である. そこで $(e^{ax}\sin(bx+c))^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+c+n\gamma)$ となることを n による帰納法で示す. $n=1$ の場合に主張が成り立つことは上でみた. n のとき主張が成り立つと仮定して, $(e^{ax}\sin(bx+c))^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+c+n\gamma)$ の両辺を微分すれば, $a = \sqrt{a^2+b^2}\cos\gamma$, $b = \sqrt{a^2+b^2}\sin\gamma$ より $(e^{ax}\sin(bx+c))^{(n+1)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}(a\sin(bx+c+n\gamma) + b\cos(bx+c+n\gamma)) = (a^2+b^2)^{\frac{n+1}{2}}e^{ax}(\cos\gamma\sin(bx+c+n\gamma) + \sin\gamma\cos(bx+c+n\gamma)) = (a^2+b^2)^{\frac{n+1}{2}}e^{ax}\sin(bx+c+(n+1)\gamma)$ となり, $n+1$ のときも主張が成り立つ.
[注意] ライプニッツの公式を用いれば $(e^{ax}\sin(bx+c))^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}a^k b^{n-k}e^{ax}\sin\left(bx+c+\dfrac{\pi n}{2}\right)$ が得られるため, 上の結果から等式 $\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}a^k b^{n-k}\sin\left(bx+c+\dfrac{\pi n}{2}\right) = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+c+n\gamma)$ が得られる.

(13) $(e^{ax}\cos(bx+c))' = e^{ax}(a\cos(bx+c) - b\sin(bx+c))$ だから, $\cos\gamma = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\gamma = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす $0 \leqq \gamma < 2\pi$ をとれば, $(e^{ax}\cos(bx+c))' = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\gamma\cos(bx+c) - \sin\gamma\sin(bx+c)) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(bx+c+\gamma)$ であ

る．そこで $(e^{ax}\cos(bx+c))^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\cos(bx+c+n\gamma)$ となることを n による帰納法で示す．$n=1$ の場合に主張が成り立つことは上でみた．n のとき主張が成り立つと仮定して，$(e^{ax}\cos(bx+c))^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\cos(bx+c+n\gamma)$ の両辺を微分すれば，$a=\sqrt{a^2+b^2}\cos\gamma$, $b=\sqrt{a^2+b^2}\sin\gamma$ より $(e^{ax}\cos(bx+c))^{(n+1)} =$
$(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}(a\cos(bx+c+n\gamma)-b\sin(bx+c+n\gamma)) = (a^2+b^2)^{\frac{n+1}{2}}e^{ax}(\cos\gamma\cos(bx+c+n\gamma)-\sin\gamma\sin(bx+c+n\gamma)) = (a^2+b^2)^{\frac{n+1}{2}}e^{ax}\cos(bx+c+(n+1)\gamma)$ となり，$n+1$ のときも主張が成り立つ．

[注意] ライプニッツの公式を用いれば $(e^{ax}\cos(bx+c))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}e^{ax}\cos\Bigl(bx+c+\dfrac{\pi n}{2}\Bigr)$ が得られるため，上の結果から等式 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\cos\Bigl(bx+c+\dfrac{\pi n}{2}\Bigr) = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos(bx+c+n\gamma)$ が得られる．

(14) $((1+x)\log(1+x))' = \log(1+x)+1$ であり，$n \geqq 2$ ならば $((1+x)\log(1+x))^{(n)} = (\log(1+x)+1)^{(n-1)} = \dfrac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}$.

(15) $(x^2\log(x+1))' = 2x\log(x+1)+\dfrac{x^2}{x+1} = 2x\log(x+1)+x-1+\dfrac{1}{x+1}$, $(x^2\log(x+1))'' = 2\log(x+1)+\dfrac{2x}{x+1}+1-\dfrac{1}{(x+1)^2} = 2\log(x+1)+3-\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ であり，$n \geqq 3$ ならば $(x^2\log(x+1))^{(n)} =$
$\left(2\log(x+1)+3-\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)^{(n-2)} = \dfrac{2(-1)^{n-3}(n-3)!}{(x+1)^{n-2}}-\dfrac{2(-1)^n(n-2)!}{(x+1)^{n-1}}-\dfrac{(-1)^n(n-1)!}{(x+1)^n}$.

(16) $((x^2+1)\log x)' = 2x\log x+x+\dfrac{1}{x}$, $((x^2+1)\log x)'' = 2\log x+3-\dfrac{1}{x^2}$ であり，$n \geqq 3$ ならば $((x^2+1)\log x)^{(n)} = \left(2\log x+3-\dfrac{1}{x^2}\right)^{(n-2)} = \dfrac{2(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}}+(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$.
(ライプニッツの公式から，一般に $(x^m\log x)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(x^m)^{(i)}(\log x)^{(n-i)} =$
$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i-1}\binom{n}{i}m(m-1)\cdots(m-i+1)(n-i-1)!x^{m-n}+m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}\log x$).

(17) $((x^2+x+1)\log x)' = (2x+1)\log x+x+1+\dfrac{1}{x}$, $((x^2+x+1)\log x)'' = 2\log x+3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$ であり，$n \geqq 3$ ならば $((x^2+x+1)\log x)^{(n)} = \left(2\log x+3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)^{(n-2)} = (-1)^{n-3}\dfrac{2(n-3)!}{x^{n-2}}+(-1)^{n-2}\dfrac{(n-2)!}{x^{n-1}}+(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$.
また，$((x^2+x+1)e^x)^{(n)} = (x^2+x+1)e^x+n(2x+1)e^n+n(n-1)e^n = (x^2+(2n+1)x+n^2+1)e^x$. 以上から $((x^2+x+1)(\log x+e^x))' = (2x+1)\log x+x+1+\dfrac{1}{x}+(x^2+3x+2)e^x$, $((x^2+x+1)(\log x+e^x))'' = 2\log x+3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+(x^2+5x+5)e^x$, $((x^2+x+1)(\log x+e^x))^{(n)} = (-1)^{n-3}\dfrac{2(n-3)!}{x^{n-2}}+(-1)^{n-2}\dfrac{(n-2)!}{x^{n-1}}+(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}+(x^2+(2n+1)x+n^2+1)e^x$ $(n \geqq 3)$.

(18) $(x^3e^{ax})^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(x^3)^{(i)}(e^{ax})^{(n-i)} = a^nx^3e^{ax}+3na^{n-1}x^2e^{ax}+3n(n-1)a^{n-2}xe^{ax}+$
$n(n-1)(n-2)a^{n-3}e^{ax} = a^{n-3}(a^3x^3+3a^2nx^2+3an(n-1)x+n(n-1)(n-2))e^{ax}$

(19) $(x^4e^{ax})^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(x^4)^{(i)}(e^{ax})^{(n-i)} =$
$a^nx^4e^{ax}+4na^{n-1}x^3e^{ax}+6n(n-1)a^{n-2}x^2e^{ax}+4n(n-1)(n-2)a^{n-3}xe^{ax}+n(n-1)(n-2)(n-3)a^{n-4}e^{ax} =$
$a^{n-4}(a^4x^4+4a^3nx^3+6a^2n(n-1)x^2+4an(n-1)(n-2)x+n(n-1)(n-2)(n-3))e^{ax}$
一般には $(x^me^{ax})^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(x^m)^{(i)}(e^{ax})^{(n-i)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}m(m-1)\cdots(m-i+1)a^{n-i}x^{m-i}e^{ax}$

(20) $(x^2\cos 2x)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(x^2)^{(i)}(\cos 2x)^{(n-i)} =$
$2^nx^2\cos\left(2x+\dfrac{\pi n}{2}\right)+2^nnx\cos\left(2x+\dfrac{\pi(n-1)}{2}\right)+2^{n-2}n(n-1)\cos\left(2x+\dfrac{\pi(n-2)}{2}\right)$

(21) $(x^2\sin^2 x)^{(n)} = \left(\dfrac{x^2-x^2\cos 2x}{2}\right)^{(n)} = \dfrac{1}{2}(x^2)^{(n)}-\dfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(x^2)^{(i)}(\cos 2x)^{(n-i)} =$
$\dfrac{1}{2}(x^2)^{(n)}-2^{n-1}x^2\cos\left(2x+\dfrac{\pi n}{2}\right)-2^{n-1}nx\cos\left(2x+\dfrac{\pi(n-1)}{2}\right)-2^{n-3}n(n-1)\cos\left(2x+\dfrac{\pi(n-2)}{2}\right) =$

$\dfrac{1}{2}(x^2)^{(n)} - 2^{n-3}(4x^2 - n(n-1))\cos\left(2x + \dfrac{\pi n}{2}\right) - 2^{n-1}nx\sin\left(2x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$ より
$(x^2\sin^2 x)' = x + x^2\sin 2x - x\cos 2x$, $(x^2\sin^2 x)'' = 1 + (2x^2-1)\cos 2x + 4x\sin 2x$ であり,
$n \geqq 3$ ならば $(x^2\sin^2 x)^{(n)} = -2^{n-3}(4x^2 - n(n-1))\cos\left(2x + \dfrac{\pi n}{2}\right) - 2^{n-1}nx\sin\left(2x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$.

(22) $(x^3\sin 3x)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(x^3)^{(i)}(\sin 3x)^{(n-i)} = 3^n x^3\sin\left(3x + \dfrac{\pi n}{2}\right) + 3^n nx^2\sin\left(3x + \dfrac{\pi(n-1)}{2}\right) +$
$3^{n-1}n(n-1)x\sin\left(3x + \dfrac{\pi(n-2)}{2}\right) + 3^{n-3}n(n-1)(n-2)\sin\left(3x + \dfrac{\pi(n-3)}{2}\right) =$
$(3^n x^3 - 3^{n-1}n(n-1)x)\sin\left(3x + \dfrac{\pi n}{2}\right) - (3^n nx^2 - 3^{n-3}n(n-1)(n-2)\cos\left(3x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$

(23) $(x^4\cos 2x)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(x^4)^{(i)}(\cos 2x)^{(n-i)} = 2^n x^4\cos\left(2x + \dfrac{\pi n}{2}\right) + 2^{n+1}nx^3\cos\left(2x + \dfrac{\pi(n-1)}{2}\right) +$
$3{\cdot}2^{n-1}n(n-1)x^2\cos\left(2x + \dfrac{\pi(n-2)}{2}\right) + 2^{n-1}n(n-1)(n-2)x\cos\left(2x + \dfrac{\pi(n-3)}{2}\right) + 2^{n-4}n(n-1)(n-2)(n-3)$
$\cos\left(2x + \dfrac{\pi(n-4)}{2}\right) = (2^n x^4 - 3{\cdot}2^{n-1}n(n-1)x^2 + 2^{n-4}n(n-1)(n-2)(n-3))\cos\left(2x + \dfrac{\pi n}{2}\right) +$
$(2^{n+1}nx^3 - 2^{n-1}n(n-1)(n-2)x)\sin\left(2x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$

(24) $((x^2-1)^m)^{(n)} = ((x-1)^m(x+1)^m)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}((x-1)^m)^{(i)}((x+1)^m)^{(n-i)} =$
$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}m(m-1)\cdots(m-i+1)m(m-1)\cdots(m-n+i+1)(x-1)^{m-i}(x+1)^{m-n+i}$

(25) $\left(x\log\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\right)' = \left(\dfrac{x}{2}\log x - x\log(x+1)\right)' = \dfrac{1}{2}\log x - \log(x+1) + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2}$ であり, $n \geqq 2$ ならば
$\left(x\log\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\right)^{(n)} = \left(\dfrac{1}{2}\log x - \log(x+1) + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2}\right)^{(n-1)} =$
$\dfrac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{2x^{n-1}} - \dfrac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} + \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} = (-1)^{n-2}(n-2)!\left(\dfrac{1}{2x^{n-1}} - \dfrac{n+x}{(1+x)^n}\right)$

(26) $\left(x\log\sqrt{1-x^2}\right)' = \left(\dfrac{x\log(1-x)}{2} + \dfrac{x\log(1+x)}{2}\right)' = \dfrac{\log(1-x)}{2} - \dfrac{x}{2(1-x)} + \dfrac{\log(1+x)}{2} + \dfrac{x}{2(x+1)} =$
$\dfrac{\log(1-x)}{2} + \dfrac{\log(1+x)}{2} - \dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{1}{2(x-1)} + 1$ であり, $n \geqq 2$ ならば
$\left(x\log\sqrt{1-x^2}\right)^{(n)} = \left(\dfrac{\log(1-x)}{2} + \dfrac{\log(1+x)}{2} - \dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{1}{2(x-1)} + 1\right)^{(n-1)} =$
$\dfrac{-(n-2)!}{2(1-x)^{n-1}} + \dfrac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{2(1+x)^{n-1}} - \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2(x+1)^n} + \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2(x-1)^n} = \dfrac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{2}\left(\dfrac{x-n}{(x-1)^n} + \dfrac{x+n}{(x+1)^n}\right)$.

2. (1) $\sqrt{1-x^2}f'(x) = 1$ の左辺の微分は

$$\left(\sqrt{1-x^2}f'(x)\right)' = \sqrt{1-x^2}f''(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f'(x) = \frac{(1-x^2)f''(x) - xf'(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

であり, 右辺の微分は 0 だから $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 0$ である.

(2) ライプニッツの公式より,

$$\begin{aligned}((1-x^2)f''(x))^{(n-2)} &= \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(1-x^2)^{(k)}(f'')^{(n-2-k)}(x)\\ &= (1-x^2)f^{(n)}(x) - 2(n-2)xf^{(n-1)}(x) - (n-2)(n-3)f^{(n-2)}(x),\\ (xf'(x))^{(n-2)} &= \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(x)^{(k)}(f')^{(n-2-k)}(x) = xf^{(n-1)}(x) + (n-2)f^{(n-2)}(x)\end{aligned}$$

だから (1) で得た等式の両辺を x で $n-2$ 回微分すると左辺は
$((1-x^2)f^{(n)}(x) - 2(n-2)xf^{(n-1)}(x) - (n-2)(n-3)f^{(n-2)}(x)) - (xf^{(n-1)}(x) + (n-2)xf^{(n-2)}(x)) =$
$(1-x^2)f^{(n)}(x) - (2n-3)xf^{(n-1)}(x) - (n-2)^2f^{(n-2)}(x)$ となるため, 示すべき等式が得られる.

(3) (2) で得た式に $x=0$ を代入すれば $f^{(n)}(0)-(n-2)^2f^{(n-2)}(0)=0$ を得る．$a_m=f^{(2m)}(0)$, $b_m=f^{(2m+1)}(0)$ によって数列 $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$ を定めると上式より，$a_m=4(m-1)^2a_{m-1}$, $b_m=(2m-1)^2b_{m-1}$ が得られる．$a_0=f(0)=0$ だから $a_m=4(m-1)^2a_{m-1}$ より帰納的に任意の m に対して $a_m=0$ であることがわかる．また，$b_0=f'(0)=1$ だから $b_m=(2m-1)^2b_{m-1}$ より帰納的に $b_m=((2m-1)!!)^2$ であることがわかる．以上から $f^{(2m)}(0)=0$, $f^{(2m+1)}(0)=((2m-1)!!)^2$ である．

3. (1) $f'(x)=2xe^{x^2}$ だから $f'(x)=2xf(x)$ である．この両辺を $n-1$ 回微分すれば $f^{(n)}(x)=2xf^{(n-1)}(x)+2(n-1)f^{(n-2)}(x)$ が得られる．とくに $x=0$ のときは $f^{(n)}(0)=2(n-1)f^{(n-2)}(0)$ だから $a_m=f^{(2m)}(0)$, $b_m=f^{(2m+1)}(0)$ によって数列 $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$ を定めると上式より，$a_m=2(2m-1)a_{m-1}$, $b_m=4mb_{m-1}$ が得られる．$a_0=f(0)=1$ だから $a_m=2(2m-1)a_{m-1}$ より，$a_m=2(2m-1)a_{m-1}=2^2(2m-1)(2m-3)a_{m-2}=\cdots=2^m(2m-1)(2m-3)\cdots 1a_0=2^m(2m-1)!!$ となる．また，$b_0=f'(0)=0$ だから $b_m=4mb_{m-1}$ より帰納的に任意の m に対して $b_m=0$ であることがわかる．以上から $f^{(2m)}(0)=2^m(2m-1)!!=\dfrac{(2m)!}{m!}$, $f^{(2m+1)}(0)=0$ である．

(2) $(x^2+1)f(x)=x$ だから，この両辺を n 回微分すれば，$n=1$ のとき $(x^2+1)f'(x)+2xf(x)=1$, $n\geqq 2$ のとき $(x^2+1)f^{(n)}(x)+2nxf^{(n-1)}(x)+n(n-1)f^{(n-2)}(x)=0$ が得られる．とくに $x=0$ のときは $f^{(n)}(0)=-n(n-1)f^{(n-2)}(0)$ だから $a_m=f^{(2m)}(0)$, $b_m=f^{(2m+1)}(0)$ によって数列 $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$ を定めると上式より，$a_m=-2m(2m-1)a_{m-1}$, $b_m=-2m(2m+1)b_{m-1}$ が得られる．$a_0=f(0)=0$ だから $a_m=-2m(2m-1)a_{m-1}$ より帰納的に任意の m に対して $a_m=0$ であることがわかる．また，$b_0=f'(0)=1$ だから $b_m=-(2m+1)(2m)b_{m-1}$ より，$b_m=-(2m+1)(2m)b_{m-1}=(-1)^2(2m+1)(2m)(2m-1)(2m-2)b_{m-2}=\cdots=(-1)^m(2m+1)(2m)\cdots3\cdot2b_0=(-1)^m(2m+1)!$ となる．以上から $f^{(2m)}(0)=0$, $f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m(2m+1)!$ である．

(3) $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}}$ だから $(2+x^2)f'(x)=x\sqrt{2+x^2}$ となるため，$(2+x^2)f'(x)=xf(x)$ である．この両辺を $n-1$ 回微分すれば $(2+x^2)f^{(n)}(x)+2(n-1)xf^{(n-1)}(x)+(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x)=xf^{(n-1)}(x)+(n-1)f^{(n-2)}(x)$ が得られる．従って $(2+x^2)f^{(n)}(x)+(2n-3)xf^{(n-1)}(x)+(n-1)(n-3)f^{(n-2)}(x)=0$ が成り立つ．とくに $x=0$ のときは $f^{(n)}(0)=-\dfrac{1}{2}(n-1)(n-3)f^{(n-2)}(0)$ だから $a_m=f^{(2m)}(0)$, $b_m=f^{(2m+1)}(0)$ によって数列 $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$ を定めると上式より，$a_m=-\dfrac{1}{2}(2m-1)(2m-3)a_{m-1}$, $b_m=-m(2m-2)b_{m-1}$ が得られる．$a_0=f(0)=\sqrt{2}$ だから $a_m=-\dfrac{1}{2}(2m-1)(2m-3)a_{m-1}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2(2m-1)(2m-3)^2(2m-5)a_{m-2}=\cdots=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^m(2m-1)(2m-3)^2\cdots3^2\cdot1^2(-1)a_0=-\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^m(2m-1)((2m-3)!!)^2$ となる．また，$b_0=f'(0)=0$ だから $b_m=-m(2m-2)b_{m-1}$ より，帰納的に任意の m に対して $b_m=0$ であることがわかる．以上から $f^{(2m)}(0)=-\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^m(2m-1)((2m-3)!!)^2$, $f^{(2m+1)}(0)=0$ である．

(4) $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{2-x^2}}$ だから $(2-x^2)f'(x)=-x\sqrt{2-x^2}$ となるため，$(2-x^2)f'(x)=-xf(x)$ である．この両辺を $n-1$ 回微分すれば $(2-x^2)f^{(n)}(x)-2(n-1)xf^{(n-1)}(x)-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x)=-xf^{(n-1)}(x)-(n-1)f^{(n-2)}(x)$ が得られる．従って $(2-x^2)f^{(n)}(x)-(2n-3)xf^{(n-1)}(x)-(n-1)(n-3)f^{(n-2)}(x)=0$ が成り立つ．とくに $x=0$ のときは $f^{(n)}(0)=\dfrac{1}{2}(n-1)(n-3)f^{(n-2)}(0)$ だから $a_m=f^{(2m)}(0)$, $b_m=f^{(2m+1)}(0)$ によって数列 $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$ を定めると上式より，$a_m=\dfrac{1}{2}(2m-1)(2m-3)a_{m-1}$, $b_m=m(2m-2)b_{m-1}$ が得られる．$a_0=f(0)=\sqrt{2}$ だから $a_m=\dfrac{1}{2}(2m-1)(2m-3)a_{m-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2(2m-1)(2m-3)^2(2m-5)a_{m-2}=\cdots=$
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^m(2m-1)(2m-3)^2\cdots3^2\cdot1^2(-1)a_0=-\dfrac{\sqrt{2}}{2^m}(2m-1)((2m-3)!!)^2$ となる．また，$b_0=f'(0)=0$ だから $b_m=m(2m-2)b_{m-1}$ より，帰納的に任意の m に対して $b_m=0$ であることがわかる．以上から $f^{(2m)}(0)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2^m}(2m-1)((2m-3)!!)^2$, $f^{(2m+1)}(0)=0$ である．

(5) $f'(x)=3x^2e^{x^3}$ だから $f'(x)=3x^2f(x)$ である．この両辺を $n-1$ 回微分すれば $f^{(n)}(x)=3x^2f^{(n-1)}(x)+6(n-1)xf^{(n-2)}(x)+3(n-1)(n-2)f^{(n-3)}(x)$ が得られる．とくに $x=0$ のときは $f^{(n)}(0)=3(n-1)(n-2)f^{(n-3)}(0)$

だから $a_m = f^{(3m)}(0)$, $b_m = f^{(3m+1)}(0)$, $c_m = f^{(3m+2)}(0)$ によって数列 $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$, $\{c_m\}_{m=0}^{\infty}$ を定めると上式より, $a_m = 3(3m-1)(3m-2)a_{m-1}$, $b_m = 3(3m)(3m-1)b_{m-1}$, $c_m = 3(3m+1)(3m)c_{m-1}$ が得られる. $a_0 = f(0) = 1$ だから $a_m = \dfrac{(3m)(3m-1)(3m-2)}{m}a_{m-1}$ より, $a_m = \dfrac{(3m)(3m-1)(3m-2)}{m}a_{m-1} = \dfrac{(3m)(3m-1)(3m-2)(3m-3)(3m-4)(3m-5)}{m(m-1)}a_{m-2} = \cdots = \dfrac{(3m)(3m-1)(3m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{m(m-1)\cdots 1}a_0 = \dfrac{(3m)!}{m!}$ となる. また, $b_0 = f'(0) = 0$, $c = f''(0) = 0$ だから $b_m = 3(3m)(3m-1)b_{m-1}$, $c_m = 3(3m+1)(3m)c_{m-1}$ より帰納的に任意の m に対して $b_m = c_m = 0$ であることがわかる. 以上から $f^{(3m)}(0) = \dfrac{(3m)!}{m!}$, $f^{(3m+1)}(0) = f^{(3m+2)}(0) = 0$ である.

(6) $f'(x) = 2x^3e^{x^2} + 2xe^{x^2}$ の両辺を x 倍すれば $xf'(x) = 2x^4e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}$ だから $xf'(x) = 2(x^2+1)f(x)$ である. この両辺を $n-1$ 回微分すれば $xf^{(n)}(x) + (n-1)f^{(n-1)}(x) = 2(x^2+1)f^{(n-1)}(x) + 4(n-1)xf^{(n-2)}(x) + 2(n-1)(n-2)f^{(n-3)}(x)$ が得られる. 従って $xf^{(n)}(x) = (2x^2-n+3)f^{(n-1)}(x) + 4(n-1)xf^{(n-2)}(x) + 2(n-1)(n-2)f^{(n-3)}(x)$ である. とくに $x=0$ のときは $(n-3)f^{(n-1)}(0) = 2(n-1)(n-2)f^{(n-3)}(0)$ だから $f^{(n)}(0) = \dfrac{2n(n-1)}{n-2}f^{(n-2)}(0)$ が 3 以上の n に対して成り立つ. $a_m = f^{(2m)}(0)$, $b_m = f^{(2m-1)}(0)$ によって数列 $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ を定めると上式より, 2 以上の m に対して $a_m = \dfrac{(2m)(2m-1)}{m-1}a_{m-1}$, $b_m = \dfrac{2(2m-1)(2m-2)}{2m-3}b_{m-1}$ が得られる. $a_1 = f''(0) = 2$ だから $a_m = \dfrac{(2m)(2m-1)}{m-1}a_{m-1} = \dfrac{(2m)(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{(m-1)(m-2)}a_{m-2} = \cdots = \dfrac{(2m)(2m-1)\cdots 4\cdot 3}{(m-1)(m-2)\cdots 1}a_1 = \dfrac{(2m)!}{(m-1)!}$. また, $b_1 = f'(0) = 0$ だから $b_m = \dfrac{2(2m-1)(2m-2)}{2m-3}b_{m-1}$ より, 帰納的に任意の m に対して $b_m = 0$ であることがわかる. 以上から $m \geqq 1$ ならば $f^{(2m)}(0) = \dfrac{(2m)!}{(m-1)!}$, $f^{(2m-1)}(0) = 0$ である.

(7) $f'(x) = \dfrac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ より $(x^2+1)f'(x) = \sqrt{x^2+1}$. さらにこの両辺を微分すれば $(x^2+1)f''(x) + 2xf'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ となるため, $(x^2+1)f''(x) + 2xf'(x) = xf'(x)$, 従って $(x^2+1)f''(x) + xf'(x) = 0$ が成り立つ. 両辺を $n-2$ 回微分すれば $(x^2+1)f^{(n)}(x) + (2n-3)xf^{(n-1)}(x) + (n-2)^2f^{(n-2)}(x) = 0$ が得られる. とくに $x=0$ のときは $f^{(n)}(0) = -(n-2)^2f^{(n-2)}(0)$ だから $a_m = f^{(2m)}(0)$, $b_m = f^{(2m+1)}(0)$ によって数列 $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$ を定めると上式より, $a_m = -4(m-1)^2a_{m-1}$, $b_m = -(2m-1)^2b_{m-1}$ が得られる. $a_0 = f(0) = 0$ だから $a_m = -4(m-1)^2a_{m-1}$ より, 帰納的に任意の m に対して $a_m = 0$ であることがわかる. また, $b_0 = f'(0) = 1$ だから $b_m = -(2m-1)^2b_{m-1}$ より, $b_m = -(2m-1)^2b_{m-1} = (-1)^2(2m-1)^2(2m-3)^2b_{m-2} = \cdots = (-1)^m(2m-1)^2\cdots 1^2b_0 = (-1)^{m-1}((2m-1)!!)^2$ となる. 以上から $f^{(2m)}(0) = 0$, $f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m((2m-1)!!)^2$ である.

(8) $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ より $(x^2+1)f'(x) = 2x$. この両辺を $n-1$ 回微分すると, $n=2$ ならば $(x^2+1)f''(x) + 2xf'(x) = 2$, $n \geqq 3$ ならば $(x^2+1)f^{(n)}(x) + 2(n-1)xf^{(n-1)}(x) + (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x) = 0$. $x=0$ のとき $f''(0) = 2$ であり, $f^{(n)}(0) + (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0) = 0$ が 3 以上の n に対して成り立つ. $a_m = f^{(2m)}(0)$, $b_m = f^{(2m-1)}(0)$ によって数列 $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ を定めると上式より, 2 以上の m に対して $a_m = -(2m-1)(2m-2)a_{m-1}$, $b_m = -(2m-2)(2m-3)b_{m-1}$ を得る. $a_1 = f''(0) = 2$ だから $a_m = -(2m-1)(2m-2)a_{m-1} = (-1)^2(2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)a_{m-2} = \cdots = (-1)^{m-1}(2m-1)(2m-2)\cdots 3\cdot 2a_1 = 2(-1)^{m-1}(2m-1)!$. また, $b_1 = f'(0) = 0$ だから $b_m = (2m-2)(2m-3)b_{m-1}$ より, 帰納的に任意の m に対して $b_m = 0$ であることがわかる. 以上から $m \geqq 1$ ならば $f^{(2m)}(0) = 2(-1)^{m-1}(2m-1)!$, $f^{(2m-1)}(0) = 0$ である.

(9) $f'(x) = \dfrac{3x^2}{x^3+1}$ より $(x^3+1)f'(x) = 3x^2$. この両辺を $n-1$ 回微分すると, $n=2$ ならば $(x^3+1)f''(x) + 3x^2f'(x) = 6x$, $n=3$ ならば $(x^3+1)f'''(x) + 6x^2f''(x) + 6xf'(x) = 6$, $n \geqq 4$ ならば $(x^3+1)f^{(n)}(x) + 3(n-1)x^2f^{(n-1)}(x) + 3(n-1)(n-2)xf^{(n-2)}(x) + (n-1)(n-2)(n-3)f^{(n-3)}(x) = 0$ である. $x=0$ のとき $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 6$ であり, $f^{(n)}(0) + (n-1)(n-2)(n-3)f^{(n-3)}(0) = 0$ が 4 以上の n に対して成り立つ. $a_m = f^{(3m)}(0)$, $b_m = f^{(3m-1)}(0)$, $c_m = f^{(3m-2)}(0)$ によって数列 $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ を定めると上式より, 2 以上の m に対して $a_m = -(3m-1)(3m-2)\ (3m-3)a_{m-1}$, $b_m = -(3m-2)(3m-3)(3m-4)b_{m-1}$, $c_m = -(3m-3)(3m-4)(3m-5)c_{m-1}$ を得る. $a_1 = f'''(0) = 6$ だから $a_m = -(3m-1)(3m-2)(3m-3)a_{m-1} = (-1)^2(3m-1)(3m-2)\ (3m-3)(3m-4)(3m-5)(3m-6)a_{m-2} = \cdots = (-1)^{m-1}(3m-1)(3m-2)(3m-3)\cdots 5\cdot 4\cdot 3a_1 =$

$3(-1)^{m-1}(3m-1)!$. また, $b_1 = f''(0) = 0$, $c_1 = f'(0) = 0$ だから $b_m = -(3m-2)(3m-3)\ (3m-4)b_{m-1}$, $c_m = -(3m-3)(3m-4)(3m-5)c_{m-1}$ より, 帰納的に任意の m に対して $b_m = c_m = 0$ であることがわかる. 以上から $m \geqq 1$ ならば $f^{(3m)}(0) = 3(-1)^{m-1}(3m-1)!$, $f^{(3m-1)}(0) = f^{(3m-2)}(0) = 0$ である.

(10) $f'(x) = \dfrac{c}{\sqrt{1-x^2}} e^{c\sin^{-1}x} = \dfrac{c}{\sqrt{1-x^2}} f(x)$ より $\sqrt{1-x^2}f'(x) = cf(x)$. この両辺を x で微分すれば $\sqrt{1-x^2}f''(x) - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}f'(x) = \dfrac{c^2}{\sqrt{1-x^2}}f(x)$ が得られる. この両辺に $\sqrt{1-x^2}$ をかけて右辺を左辺に移項して $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) - c^2 f(x) = 0$ を得る. この等式の左辺を x で n 回微分すれば, ライプニッツの公式より $(1-x^2)f^{(n+2)}(x) + \dbinom{n}{1}(1-x^2)'f^{(n+1)}(x) + \dbinom{n}{2}(1-x^2)''f^{(n)}(x) - (xf^{(n+1)}(x) + \dbinom{n}{1}(x)'f^{(n)}(x)) - c^2 f^{(n)}(x) = (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - x(2n+1)f^{(n+1)}(x) - (c^2+n^2)f^{(n)}(x)$. 従って $x=0$ の場合, $f^{(n+2)}(0) - (c^2+n^2)f^{(n)}(0) = 0$, すなわち $f^{(n+2)}(0) = (c^2+n^2)f^{(n)}(0)$ である. $a_m = f^{(2m)}(0)$, $b_m = f^{(2m+1)}(0)$ によって数列 $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$, $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$ を定めると上式より, 2 以上の m に対して $a_m = (c^2+(2m-2)^2)a_{m-2}$, $b_m = (c^2+(2m-1)^2)b_{m-2}$ を得る. $a_0 = f(0) = 1$ だから $f^{(2m)}(0) = a_m = (c^2+(2m-2)^2)a_{m-1} = (c^2+(2m-2)^2)(c^2+(2m-4)^2)a_{m-2} = \cdots$
$= (c^2+(2m-2)^2)(c^2+(2m-4)^2)\cdots(c^2+2^2)c^2a_0 = c^2(c^2+2^2)(c^2+4^2)\cdots(c^2+(2m-4)^2)(c^2+(2m-2)^2)$.
また $f'(x) = \dfrac{c}{\sqrt{1-x^2}}e^{c\sin^{-1}x}$ より $b_0 = f'(0) = c$ だから
$f^{(2m+1)}(0) = b_m = ((2m-1)^2+c^2)b_{m-1} = (c^2+(2m-1)^2)(c^2+(2m-3)^2)b_{m-1} = \cdots$
$= (c^2+(2m-1)^2)(c^2+(2m-3)^2)\cdots(c^2+3^2)(c^2+1^2)b_0 = c(c^2+1^2)(c^2+3^2)\cdots(c^2+(2m-3)^2)(c^2+(2m-1)^2)$.

4. $\dfrac{x^n}{n!}(\log x - a_n)$ の導関数は $\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}(\log x - a_n) + \dfrac{x^{n-1}}{n!} = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left(\log x - a_n + \dfrac{1}{n}\right)$ であり, この関数の $n-1$ 次導関数が $\log x$ になるため, $a_{n-1} = a_n - \dfrac{1}{n}$ が成り立つように, 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を定めればよい. $a_0 = 0$ であり, 1 以上の任意の整数 n に対して $a_n - a_{n-1} = \dfrac{1}{n}$ が成り立つため, $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ である.

(別解) ライプニッツの公式から $\left(\dfrac{x^n}{n!}(\log x - a_n)\right)^{(n)} = \log x - a_n + \sum\limits_{i=1}^{n}\dbinom{n}{i}\left(\dfrac{x^n}{n!}\right)^{(n-i)}(\log x - a_n)^{(i)}$ であり, これに $\left(\dfrac{x^n}{n!}\right)^{(n-i)} = \dfrac{x^i}{i!}$, $(\log x - a_n)^{(i)} = \dfrac{(-1)^{i-1}(i-1)!}{x^i}$ を代入すれば, $\left(\dfrac{x^n}{n!}(\log x - a_n)\right)^{(n)}$ は $\log x - a_n + \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(-1)^{i-1}}{i}\dbinom{n}{i}$ に等しいことがわかる. 仮定により, $\left(\dfrac{x^n}{n!}(\log x - a_n)\right)^{(n)} = \log x$ だから $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(-1)^{i-1}}{i}\dbinom{n}{i}$ である.

5. (1) $x = \tan y$ だから $\cos y \sin\left(y + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos^2 y = \dfrac{1}{1+\tan^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{dy}{dx}$ より $n=1$ のとき主張は正しい. $n=k$ のとき主張が正しいとし, $\dfrac{d^k y}{dx^k} = (k-1)!\cos^k y \sin k\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)$ の両辺を x で微分すれば, $\dfrac{dy}{dx} = \cos^2 y$ より $\dfrac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}} = k!\cos^{k-1}y\left(-\sin y \sin k\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right) + \cos y \cos k\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)\dfrac{dy}{dx} = k!\cos^{k+1}y\cos\left((k+1)y + \dfrac{\pi k}{2}\right) = k!\cos^{k+1}y\sin\left((k+1)\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ だから $n=k+1$ のときも主張は正しい. 次に, $\cos^2 y = \dfrac{1}{1+\tan^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$ であり, $y = \tan^{-1}x$ は $|y| < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすため $\cos y > 0$. 従って $\cos y = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ である. 一方 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$ だから, 上の結果から $\dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = n!\cos^{n+1}y\sin\left((n+1)\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = n!(1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}\sin\left((n+1)\left(\tan^{-1}x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

(2) $\tan y = \dfrac{1}{x}$ だから $-\sin^2 y = \cos^2 y - 1 = \dfrac{1}{1+\tan^2 y} - 1 = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} - 1 = -\dfrac{1}{1+x^2}$. 一方 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\dfrac{1}{1+x^2}$ より $n=1$ のとき, 主張は成り立つ. $n=k$ のときに主張が成り立つとし, $\dfrac{d^k y}{dx^k} = (-1)^k(k-1)!\sin^k y \sin ky$ の両辺を x で微分すれば, $\dfrac{dy}{dx} = -\sin^2 y$ より $\dfrac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}} = (-1)^k k!\sin^{k-1}y(\cos y \sin ky + \sin y \cos ky)\dfrac{dy}{dx} = (-1)^{k+1}k!\sin^{k+1}y\sin(k+1)y$ だから $n=k+1$ のときも主張が成り立つ.

6. f が 1 回微分可能ならば合成関数の微分法から $\dfrac{d}{dx}\left(f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=\dfrac{-1}{x^2}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$ が成り立つ. f が n 回微分可能ならば $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ が成り立つと仮定する. f が $n+1$ 回微分可能ならば, $x^nf\left(\dfrac{1}{x}\right)=xx^{n-1}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ にライプニッツの公式を用いると, 帰納法の仮定から $\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^nf\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=x\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^n}{dx^n}x^{n-1}f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)+(n+1)\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=x\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)+\dfrac{(-1)^n(n+1)}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)=$
$x\left(\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{x^{n+2}}f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{(-1)^{n+1}}{x^{n+3}}f^{(n+1)}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)+\dfrac{(-1)^n(n+1)}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}f^{(n+1)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ となって帰納法が進む.

7. $f(x)=-\log x$ で f を定めれば, $x^{n-1}\log x=x^{n-1}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ であり, $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n(n-1)!}{x^n}$ だから $f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)=(-1)^n(n-1)!x^n$ が成り立つ. そこで 5 の結果を用いると $(x^{n-1}\log x)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{(n-1)!}{x}$ である.

$g(x)=e^x$ で g を定めれば, $x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}=x^{n-1}g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ であり, $g^{(n)}(x)=e^x$ だから $g^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)=e^{\frac{1}{x}}$ が成り立つ. そこで 5 の結果を用いると $\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}g^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{(-1)^ne^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$ である.

(別解) ライプニッツの公式から $(x^{n-1}\log x)^{(n)}=\sum\limits_{r=0}^{n}\dbinom{n}{r}(x^{n-1})^{(r)}(\log x)^{(n-r)}$ であり, これに $(x^{n-1})^{(r)}=(n-1)(n-2)\cdots(n-r)x^{n-r-1}$, $(\log x)^{(n-r)}=\dfrac{(-1)^{n-r-1}(n-r-1)!}{x^{n-r}}$ $(r<n)$ を代入し, $r=n$ の場合の項 $\dbinom{n}{n}(x^{n-1})^{(n)}\log x$ は 0 になることに注意すれば,

$$\begin{aligned}(x^{n-1}\log x)^{(n)} &= \sum_{r=0}^{n-1}\binom{n}{r}(n-1)(n-2)\cdots(n-r)x^{n-r-1}\frac{(-1)^{n-r-1}(n-r-1)!}{x^{n-r}}\\ &= \sum_{r=0}^{n-1}\binom{n}{r}(n-1)!\frac{(-1)^{n-r-1}}{x}=\frac{(n-1)!}{x}\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n}{r}(-1)^{n-r-1}\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

二項定理 $(a+b)^n=\sum\limits_{r=0}^{n}\dbinom{n}{r}a^rb^{n-r}$ において $a=1$, $b=-1$ とおくと (左辺) $=(1+(-1))^n=0$, (右辺) $=\sum\limits_{r=0}^{n}\dbinom{n}{r}(-1)^{n-r}=\sum\limits_{r=0}^{n-1}\dbinom{n}{r}(-1)^{n-r}+\dbinom{n}{n}(-1)^0=-\sum\limits_{r=0}^{n-1}\dbinom{n}{r}(-1)^{n-r-1}+1$ となるため $\sum\limits_{r=0}^{n-1}\dbinom{n}{r}(-1)^{n-r-1}=1$ である. 従って $(*)$ から $(x^{n-1}\log x)^{(n)}=\dfrac{(n-1)!}{x}$ である.

8. (1) $f'(x)=\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$, $g'(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ より $F_1(x)=x^3e^{\frac{1}{x^2}}\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}=2$, $G_1(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=1$.

(2) $f^{(n)}(x)=x^{-3n}e^{-\frac{1}{x^2}}F_n(x)$ だから $F_n(x)=x^{3n}e^{\frac{1}{x^2}}f^{(n)}(x)$ の両辺を x で微分すれば
$F_n'(x)=3nx^{3n-1}e^{\frac{1}{x^2}}f^{(n)}(x)-2x^{3n-3}e^{\frac{1}{x^2}}f^{(n)}(x)+x^{3n}e^{\frac{1}{x^2}}f^{(n+1)}(x)=3nx^{-1}F_n(x)-2x^{-3}F_n(x)+x^{-3}F_{n+1}(x)=\dfrac{1}{x^3}(F_{n+1}(x)+(3nx^2-2)F_n(x))$. $g^{(n)}(x)=x^{-2n}e^{-\frac{1}{x}}G_n(x)$ だから $G_n(x)=x^{2n}e^{\frac{1}{x}}g^{(n)}(x)$ の両辺を x で微分すれば $G_n'(x)=2nx^{2n-1}e^{\frac{1}{x}}g^{(n)}(x)-x^{2n-2}e^{\frac{1}{x}}g^{(n)}(x)+x^{2n}e^{\frac{1}{x}}g^{(n+1)}(x)=2nx^{-1}G_n(x)-x^{-2}G_n(x)+x^{-2}G_{n+1}(x)=\dfrac{1}{x^2}(G_{n+1}(x)+(2nx-1)G_n(x))$.

(3) n による数学的帰納法で主張を示す. (1) の結果から $n=1$ のときは主張が成り立つ. $F_n(x)$, $G_n(x)$ がそれぞれ x の $2(n-1)$ 次, $n-1$ 次の多項式であることを仮定して, $x^{2(n-1)}$, x^{n-1} の係数をそれぞれ a_n, b_n とおくと, $F_n'(x)$ は $2n-3$ 次の多項式で x^{2n-3} の係数は $2(n-1)a_n$ であり, $G_n'(x)$ は $n-2$ 次の多項式で x^{n-2} の係数は $(n-1)b_n$ である. $F_{n+1}(x)=x^3F_n'(x)-(3nx^2-2)F_n(x)$ で, $x^3F_n'(x)$ と $(3nx^2-2)F_n(x)$ はともに $2n$ 次の多項式だから $F_{n+1}(x)$ は $2n$ 次以下の多項式である. 右辺 $x^3F_n'(x)-(3nx^2-2)F_n(x)$ の x^{2n} の係数は $2(n-1)a_n-3na_n=(-n-2)a_n$ だから $a_{n+1}=-(n+2)a_n$ が得られる. また (1) から $a_1=2$ であるため $a_n=-(n+1)a_{n-1}=(-1)^2(n+1)na_{n-2}=\cdots=(-1)^{n-1}(n+1)n\cdots3a_1=(-1)^{n-1}(n+1)!$. 従っ

て $a_{n+1} = (-1)^n(n+2)! \neq 0$ だから $F_{n+1}(x)$ は $2n$ 次の多項式である．上の証明から $F_n(x)$ の $2(n-1)$ 次の係数は $(-1)^{n-1}(n+1)!$ である．$G_{n+1}(x) = x^2G'_n(x) - (2nx-1)G_n(x)$ で，$x^2G'_n(x)$ と $(2nx-1)G_n(x)$ はともに n 次の多項式だから $G_{n+1}(x)$ は n 次以下の多項式である．右辺 $x^2G'_n(x) - (2nx-1)G_n(x)$ の x^n の係数は $(n-1)b_n - 2nb_n = (-n-1)b_n$ だから $b_{n+1} = -(n+1)b_n$ が得られる．また (1) から $b_1 = 1$ であるため $b_n = -nb_{n-1} = (-1)^2n(n-1)b_{n-2} = \cdots = (-1)^{n-1}n(n-1)\cdots 2b_1 = (-1)^{n-1}n!$. 従って $b_{n+1} = (-1)^n(n+1)! \neq 0$ だから $G_{n+1}(x)$ は n 次の多項式である．上の証明から $G_n(x)$ の $n-1$ 次の係数は $(-1)^{n-1}n!$ である．

(4) f, g が n 回微分可能で $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0$ であることを n による帰納法で示す．$n=0$ のときは, $f^{(0)} = f$, $g^{(n)}(0) = g$ より主張は成立する．$n=k$ のとき, 帰納法の仮定が成り立つとする．まず, f は $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ においては, 無限回微分可能であるため $f^{(k)}$ は 0 以外で微分可能である．$y = \dfrac{1}{x^2}$ とおくと, $x = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ で, $x \to 0$ のとき, $y \to \infty$ だから $f^{(k)}$ の 0 における微分係数は, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{-3k}e^{-\frac{1}{x^2}}F_k(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}F_k(x)}{x^{3k+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3k+1}}\lim_{x\to 0}F_k(x) = \lim_{y\to\infty}y^{\frac{3k+1}{2}}e^{-y}F_k(0) = 0$. 従って $f^{(k)}$ は 0 においても微分可能で, $f^{(k+1)}(0) = 0$ が成り立つ．g は $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ においては, 無限回微分可能であるため $g^{(k)}$ は 0 以外で微分可能である．$y = \dfrac{1}{x}$ とおくと, $x = \dfrac{1}{y}$ で, $x \to +0$ のとき, $y \to \infty$ だから $g^{(k)}$ の 0 における右微分係数は, $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{g^{(k)}(x) - g^{(k)}(0)}{x-0} = \lim_{x\to +0}\frac{x^{-2k}e^{-\frac{1}{x}}G_k(x)}{x} = \lim_{x\to +0}\frac{e^{-\frac{1}{x}}G_k(x)}{x^{2k+1}} = \lim_{x\to +0}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2k+1}}\lim_{x\to 0}G_k(x) = \lim_{y\to\infty}y^{2k+1}e^{-y}G_k(0) = 0$. また, $x \leqq 0$ ならば $g(x) \leqq 0$ だから $x < 0$ ならば $g^{(k)}(x) = 0$ である．故に $g^{(k)}$ の 0 における左微分係数は, $\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{g^{(k)}(x) - g^{(k)}(0)}{x-0} = 0$ となって, $g^{(k)}$ の 0 における右微分係数に一致するため，$g^{(k)}$ は 0 においても微分可能で, $g^{(k+1)}(0) = 0$ が成り立つ.

微積分学 I 演習問題　第 6 回　平均値の定理とテイラーの定理

1. 以下の等式の両辺の関数の微分を考えることによって, 等式が成り立つことを示せ.

(1) $2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1} x \ (-1 < x \leqq 1)$

(2) $\tan^{-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{x^2-1} - \frac{\pi}{4} & x \leqq -1 \\ \frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{x^2-1} + \frac{\pi}{4} & x \geqq 1 \end{cases}$

(3) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \begin{cases} -2\sin^{-1} x - \pi & -1 \leqq x \leqq -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2\sin^{-1} x & -\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -2\sin^{-1} x + \pi & \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1 \end{cases}$

(4) $\tan^{-1}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1} = \begin{cases} -2\tan^{-1} x - \frac{3\pi}{4} & x < -1-\sqrt{2} \\ -2\tan^{-1} x + \frac{\pi}{4} & -1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2} \\ -2\tan^{-1} x + \frac{5\pi}{4} & x > -1+\sqrt{2} \end{cases}$

2. マクローリンの定理を用いて, 以下の関数を 0 の近くで近似する $n-1$ 次の多項式と剰余項を求めよ.

(1) $(e^x+e^{-x})^2$　　(2) $\sin^2 x$　　(3) $\sin x\cos x$　　(4) $\log\dfrac{1+x}{1-x}$　　(5) $\sqrt{1+2x}$

3. 正の実数 A に対し, $\dfrac{1}{2}A < B^m < 2A$ を満たす B を選んで, $x = \dfrac{A}{B^m} - 1$ とおくとき, $\sqrt[m]{A}$ を多項式

$$B\left(1+\binom{\frac{1}{m}}{1}x+\cdots+\binom{\frac{1}{m}}{k}x^k+\cdots+\binom{\frac{1}{m}}{n}x^n\right)$$

で近似すれば, 誤差は $B\left|\binom{\frac{1}{m}}{n}\right|\left|\dfrac{1}{(1+x)^n}-1\right||x|^n$ 以下であることを示せ.

4. 次の数の近似値を小数第 5 位まで求めよ.　(1) $\sqrt{3}$　(2) $\sqrt[3]{2}$　(3) e　(4) $\log 2$

5. 次の極限 が 0 でない値になるように α, β を定めて, そのときの極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^\alpha}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x + 2\cos x - 2}{x^\alpha}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^x + x}{x^\alpha}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \frac{1+\alpha x}{1+\beta x}}{x^3}$

6. 関数 $f : [0,1] \to [0,1]$ は連続で, $(0,1)$ の各点で微分可能であるとする. すべての $x \in (0,1)$ に対して $f'(x) \neq 1$ ならば, $f(c) = c$ を満たす $c \in [0,1]$ がただ 1 つ存在することを示せ.

7. e^{e-2} と 2 ではどちらが大きいか答えて, その理由を述べよ.

8. 関数 $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ は微分可能であり, 定数 $M > 0$ が存在して, 任意の $x \in (a,b)$ に対して $|f'(x)| \leqq M$ が成り立つとする. さらに, $f(\alpha) = \alpha$ を満たす $\alpha \in (a,b)$ が存在すると仮定する. 数列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ が, 任意の自然数 n に対して $x_n \in (a,b)$ かつ $x_{n+1} = f(x_n)$ を満たすならば, $|x_n - \alpha| \leqq M^{n-1}|x_1 - \alpha|$ がすべての自然数 n に対して成り立つことを示せ.

9. (発展問題) 関数 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ は連続で $f(a)f(b) < 0$ を満たし, (a,b) の各点で 2 回微分可能であり, さらに任意の $x \in (a,b)$ に対して $f''(x) > 0$ であるとする. また, $p \in [a,b]$ は $f(p) > 0$ を満たす点とする.

(1) $f(\alpha) = 0$ を満たす $\alpha \in (a,b)$ がただ 1 つだけ存在することを示せ.

(2) $\alpha < p$ かつ $x \in [\alpha, p)$ ならば $f'(x) > 0$ であり, $\alpha > p$ かつ $x \in (p, \alpha]$ ならば $f'(x) < 0$ であることを示せ.

(3) 数列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ を帰納的に $x_0 = p$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ で定義する. $\alpha > p$ ならばすべての自然数 n に対して $x_{n-1} < x_n < \alpha$ が成り立ち, $\alpha < p$ ならばすべての自然数 n に対して $x_{n-1} > x_n > \alpha$ が成り立つことを示せ.

第 6 回の演習問題の解答

1. 一般に $X \subset \boldsymbol{R}$ とし, 関数 $f, g : X \to \boldsymbol{R}$ が X に含まれる閉区間 $[a,b]$ の任意の点で連続で, しかも (a,b) の任意の点 x で微分可能であり, $f'(x) = g'(x)$ が成り立つならば, 任意の $x, c \in [a,b]$ に対して $f(x) = g(x) + f(c) - g(c)$ が成り立つ. 実際, $F : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ を $F(x) = f(x) - g(x)$ で定めれば, F は連続で, (a,b) の任意の点 x で微分可能であり, $F'(x) = 0$ が成り立つため, 教科書の定理 2.6 から F は $[a,b]$ において定数値関数となる. 従って, 任意の $x \in [a,b]$ に対して $f(x) - g(x) = F(x) = F(c) = f(c) - g(c)$ が成り立つため, $f(x) = g(x) + f(c) - g(c)$ である.

(1) 関数 $f, g : [-1,1] \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \begin{cases} 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} & x \neq -1 \\ \pi & x = -1 \end{cases}$, $g(x) = -\sin^{-1} x$ で定めると, $x \in (-1,1)$ に対し, $f'(x) = \left(2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)' = \dfrac{2\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)'}{1+\frac{1-x}{1+x}} = \dfrac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'}{\frac{2}{1+x}} = -\dfrac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{2}{(1+x)^2}}{\frac{2}{1+x}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $g'(x) = \left(-\sin^{-1} x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ が成り立つため, f, g は $(-1,1)$ の各点 x で微分可能で, $f'(x) = g'(x)$ である. 一方, 明らかに g は連続であり, f も $(-1,1]$ では連続で, $\displaystyle\lim_{x\to-1+0} f(x) = 2\lim_{x\to-1+0}\tan^{-1}\sqrt{\tfrac{1-x}{1+x}} = 2\lim_{y\to\infty}\tan^{-1} y = \pi = f(-1)$ だから f も $[-1,1]$ で連続である. よってはじめに述べたことから, $x \in [-1,1]$ に対して $f(x) = g(x) + f(-1) - g(-1) = -\sin^{-1} x + \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ. 故に $-1 < x \leqq 1$ ならば $\sin^{-1} x + 2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{\pi}{2}$ である.

(2) 関数 $f, g : (-\infty,-1] \cup [1,\infty) \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \tan^{-1}\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, $g(x) = \tan^{-1}\sqrt{x^2-1}$ で定めると, 第 5 回の演習問題の 1 の (37), (35) から $f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{x^2-1}}$, $g'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ が成り立つため, f, g は $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ の各点 x で微分可能で, $(2f(x))' = g(x)$ である. f, g は連続だから, 任意の $x \in (-\infty,-1]$ に対して, 区間 $[x-1,-1]$ ではじめに述べた結果を用いると $2f(x) = g(x) + 2f(-1) - g(-1) = \tan^{-1}\sqrt{x^2-1} - \dfrac{\pi}{2}$ が得られる. 同様に, 任意の $x \in [1,\infty)$ に対して, 区間 $[1, x+1]$ ではじめに述べた結果を用いると $2f(x) = g(x) + 2f(1) - g(1) = \tan^{-1}\sqrt{x^2-1} + \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ. 故に $\tan^{-1}\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{x^2-1} - \frac{\pi}{4} & x \leqq -1 \\ \frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{x^2-1} + \frac{\pi}{4} & x \geqq 1 \end{cases}$ である.

(3) 関数 $f, g : [-1,1] \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$, $g(x) = 2\sin^{-1} x$ で定めると, $|x| < 1$, $x \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ならば, $f'(x) = \left(\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)\right)' = \dfrac{\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)'}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}} = \dfrac{2\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{|1-2x^2|} = \dfrac{2(1-2x^2)}{|1-2x^2|\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & |x| < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} < |x| < 1 \end{cases}$, $g'(x) = \left(2\sin^{-1} x\right)' = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ が成り立つため, f, g は $\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ の各点 x で微分可能で, $|x| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ならば $f'(x) = g'(x)$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < |x| < 1$ ならば $f'(x) = (-g(x))'$ である. f, g は連続だから, はじめに述べたことから, $x \in \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ に対して $f(x) = -g(x) + f(-1) - (-g(-1)) = -2\sin^{-1} x - \pi$, $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ に対して $f(x) = g(x) + f(0) - g(0) = -2\sin^{-1} x$, $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ に対して $f(x) = -g(x) + f(1) - (-g(1)) = -2\sin^{-1} x + \pi$ が成り立つ. 故に $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \begin{cases} -2\sin^{-1} x - \pi & -1 \leqq x \leqq -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2\sin^{-1} x & -\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -2\sin^{-1} x + \pi & \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1 \end{cases}$ である.

(4) 関数 $f, g : \left(-\infty, -1-\sqrt{2}\right) \cup \left(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right) \cup \left(1-\sqrt{2}, \infty\right) \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \tan^{-1}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1}$, $g(x) = -2\tan^{-1} x$ で定めると, 第 5 回の演習問題の 1 の (33) から $f'(x) = -\dfrac{2}{x^2+1}$, $g'(x) = -\dfrac{2}{1+x^2}$ が成り立つため, f, g は定義域の各点 x で微分可能で, $f'(x) = g(x)$ である. f, g は連続だから, 任意の $x \in \left(-\infty, -1-\sqrt{2}\right)$ に対して $a < x < b < -1-\sqrt{2}$ を満たす a, b を選んで, 区間 $[a,b]$ ではじめに述べた結果を用いると, $f(x) = g(x) + f(a) - g(a) = -2\tan^{-1} x - \tan^{-1}\dfrac{a^2+2a-1}{a^2-2a-1} + 2\tan^{-1} a$ が成り立つ. この等式において $a \to -\infty$ とすれば等

式 $f(x)=-2\tan^{-1}x+\dfrac{3\pi}{4}$ が得られる. 同様に, $x\in\left(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}\right)$ ならば $-1-\sqrt{2}<a<x<b<-1+\sqrt{2}$ かつ $a<0<b$ を満たす a, b を選んで, 区間 $[a,b]$ ではじめに述べた結果を用いると, $f(x)=g(x)+f(0)-g(0)=-2\tan^{-1}x+\dfrac{\pi}{4}$ が得られ, $x\in\left(-1+\sqrt{2},\infty\right)$ ならば $-1+\sqrt{2}<a<x<b$ を満たす a, b を選んで, 区間 $[a,b]$ ではじめに述べた結果を用いると, $f(x)=g(x)+f(b)-g(b)=-2\tan^{-1}x-\tan^{-1}\dfrac{b^2+2b-1}{b^2-2b-1}+2\tan^{-1}b$ を得るが, この等式において $b\to\infty$ とすれば等式 $f(x)=-2\tan^{-1}x+\dfrac{5\pi}{4}$ が得られる.

故に $\tan^{-1}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x-1}=\begin{cases}-2\tan^{-1}x-\frac{3\pi}{4} & x<-1-\sqrt{2}\\ -2\tan^{-1}x+\frac{\pi}{4} & -1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2}\\ -2\tan^{-1}x+\frac{5\pi}{4} & x>-1+\sqrt{2}\end{cases}$ である.

2. (1) $f(x)=(e^x+e^{-x})^2$ とおけば $f(x)=e^{2x}+e^{-2x}+2$ だから, $k\geqq 1$ ならば $f^{(k)}(x)=2^ke^{2x}+(-2)^ke^{-2x}$ となるため $f^{(k)}(0)=2^k+(-2)^k=\begin{cases}2^{k+1} & k \text{ は偶数}\\ 0 & k \text{ は奇数}\end{cases}$ である. 従って $(e^x+e^{-x})^2$ を 0 の近くで近似する $n-1$ 次の多項式は, n が偶数ならば $4+\dfrac{2^3}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{2^{2k+1}}{(2k)!}x^{2k}+\cdots+\dfrac{2^{n-1}}{(n-2)!}x^{n-2}$ であり, n が奇数ならば $4+\dfrac{2^3}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{2^{2k+1}}{(2k)!}x^{2k}+\cdots+\dfrac{2^n}{(n-1)!}x^{n-1}$ である. 剰余項は n が偶数の場合も奇数の場合も $\dfrac{2^ne^{2c}+(-2)^ne^{-2c}}{n!}x^n$ (c は 0 と x の間の数) である.

(2) $f(x)=\sin^2x$ とおけば $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ より, $k\geqq 1$ ならば $f^{(k)}(x)=-2^{k-1}\cos\left(2x+\dfrac{\pi k}{2}\right)$ となるため $f^{(k)}(0)=-2^{k-1}\cos\dfrac{\pi k}{2}=\begin{cases}(-1)^{\frac{k}{2}+1}2^{k-1} & k \text{ は偶数}\\ 0 & k \text{ は奇数}\end{cases}$ である. 従って $\sin^2 x$ を 0 の近くで近似する $n-1$ 次の多項式は, n が偶数ならば $x^2+\cdots+\dfrac{(-1)^{k+1}2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}+\cdots+\dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}2^{n-3}}{(n-2)!}x^{n-2}$ であり, n が奇数ならば $x^2+\cdots+\dfrac{(-1)^{k+1}2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}+\cdots+\dfrac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}2^{n-2}}{(n-1)!}x^{n-1}$ である. 剰余項は n が偶数の場合も奇数の場合も $-\dfrac{2^{n-1}\cos\left(2c+\frac{\pi n}{2}\right)}{n!}x^n$ (c は 0 と x の間の数) である.

(3) $f(x)=\sin x\cos x$ とおけば $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x$ だから, $f^{(k)}(x)=2^{k-1}\sin\left(2x+\dfrac{\pi k}{2}\right)$ となるため $f^{(k)}(0)=2^{k-1}\sin\dfrac{\pi k}{2}=\begin{cases}(-1)^{\frac{k-1}{2}}2^{k-1} & k \text{ は奇数}\\ 0 & k \text{ は偶数}\end{cases}$ である. 従って $\sin x\cos x$ を 0 の近くで近似する $n-1$ 次の多項式は, n が偶数ならば $x+\cdots+\dfrac{(-1)^k2^{2k}}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\cdots+\dfrac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}2^{n-2}}{(n-1)!}x^{n-1}$ であり, n が奇数ならば $x+\cdots+\dfrac{(-1)^k2^{2k}}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\cdots+\dfrac{(-1)^{\frac{n-3}{2}}2^{n-3}}{(n-2)!}x^{n-2}$ である. 剰余項は n が偶数の場合も奇数の場合も $\dfrac{2^{n-1}\sin\left(2c+\frac{\pi n}{2}\right)}{n!}x^n$ (c は 0 と x の間の数) である.

(4) $f(x)=\log\dfrac{1+x}{1-x}$ とおけば $f(x)=\log(1+x)-\log(1-x)$ だから, $k\geqq 1$ ならば $f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}+\dfrac{(k-1)!}{(1-x)^k}$ となるため $f^{(k)}(0)=(k-1)!((-1)^{k-1}+1)=\begin{cases}2(k-1)! & k \text{ は奇数}\\ 0 & k \text{ は偶数}\end{cases}$ である. 従って $\log\dfrac{1+x}{1-x}$ を 0 の近くで近似する $n-1$ 次の多項式は, n が偶数ならば $2x+\cdots+\dfrac{2}{2k+1}x^{2k+1}+\cdots+\dfrac{2}{n-1}x^{n-1}$ であり, n が奇数ならば $2x+\cdots+\dfrac{2}{2k+1}x^{2k+1}+\cdots+\dfrac{2}{n-2}x^{n-2}$ である. 剰余項は n が偶数の場合も奇数の場合も $\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(1+c)^n}+\dfrac{1}{n(1-c)^n}\right)x^n$ (c は 0 と x の間の数) である.

(5) $f(x)=\sqrt{1+2x}$ とおけば $f^{(k)}(x)=2^k\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\dfrac{1}{2}-k+1\right)(1+2x)^{\frac{1}{2}-k}$ となるため, $f'(x)=$

$(1+2x)^{\frac{1}{2}}$ であり, $k \geqq 2$ ならば $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(2k-3)!!(1+2x)^{\frac{1}{2}-k}$ である. 従って $f(0) = f'(0) = 1$, $k \geqq 2$ ならば $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(2k-3)!!$ である. 故に $\sqrt{1+2x}$ を 0 の近くで近似する $n-1$ 次の多項式は, $1 + x + \cdots + \dfrac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{k!}x^k + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-2}(2n-5)!!}{(n-1)!}x^{n-1}$ であり, 剰余項は $n \geqq 2$ ならば $\dfrac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!(1+2c)^{\frac{1}{2}-n}}{n!}x^n$ である.

3. テイラーの定理から $0 < \theta < 1$ で等式

$$(1+x)^{\frac{1}{m}} = 1 + \binom{\frac{1}{m}}{1}x + \cdots + \binom{\frac{1}{m}}{k}x^k + \cdots + \binom{\frac{1}{m}}{n-1}x^{n-1} + \binom{\frac{1}{m}}{n}(1+\theta x)^{\frac{1}{m}-n}x^n$$

を満たすものが存在するため, $(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を多項式 $F_n(x) = 1 + \binom{\frac{1}{m}}{1}x + \cdots + \binom{\frac{1}{m}}{k}x^k + \cdots + \binom{\frac{1}{m}}{n}x^n$ で近似した場合の誤差は $\binom{\frac{1}{m}}{n}\Big((1+\theta x)^{\frac{1}{m}-n} - 1\Big)x^n$ である. ここで, θ の関数 $\Big|(1+\theta x)^{\frac{1}{m}-n} - 1\Big|$ は単調増加関数だから $(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を多項式 $F_n(x)$ で近似した場合の誤差は $\left|\binom{\frac{1}{m}}{n}\right|\Big|(1+x)^{\frac{1}{m}-n} - 1\Big||x|^n$ 以下である. $B^m < A$ の場合, $x > 0$ だから $(1+x)^{-n} < (1+x)^{\frac{1}{m}-n} < 1$ が成り立つため, $0 < 1 - (1+x)^{\frac{1}{m}-n} < 1 - (1+x)^{-n}$ である. $B^m > A$ の場合, $-1 < x < 0$ だから $1 < (1+x)^{\frac{1}{m}-n} < (1+x)^{-n}$ が成り立つため, $0 < (1+x)^{\frac{1}{m}-n} - 1 < (1+x)^{-n} - 1$ である. 従っていずれの場合も $\Big|(1+x)^{\frac{1}{m}-n} - 1\Big| \leqq |(1+x)^{-n} - 1|$ が成り立つため, $(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を多項式 $F_n(x)$ で近似した場合の誤差は $\left|\binom{\frac{1}{m}}{n}\right||(1+x)^{-n} - 1||x|^n$ 以下である. 故に $A^{\frac{1}{m}} = B(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を多項式 $F_n(x)$ で近似した場合の誤差は $B\left|\binom{\frac{1}{m}}{n}\right||(1+x)^{-n} - 1||x|^n$ 以下である.

4. (1) $m = 2$, $A = 3$, $B = 1.7$ として問題 3 の結果を用いると, $x = \dfrac{11}{289}$ だから $\sqrt{3}$ を $\dfrac{17}{10}\sum_{k=0}^{n}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k$ で近似した誤差は $\dfrac{17}{10}\left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right|\left|\dfrac{289^n}{300^n} - 1\right|\dfrac{11^n}{289^n}$ 以下である. よって, $n = 2, 3$ のとき, この誤差はそれぞれ $\dfrac{13327303}{601351200000} = 0.000022\cdots$, $\dfrac{64768226237}{104274298080000000} = 0.00000062\cdots$ 以下であり, $\dfrac{17}{10}\left(1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{11}{289}\right) - \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{11}{289}\right)^2 + \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{11}{289}\right)^3\right) = 1.73205094\cdots$ だから, $\sqrt{3}$ はこの値のプラスマイナス 0.00000063 の範囲 $1.73205031 < \sqrt{3} < 1.73205157$ にあることがわかる. よって, $\sqrt{3}$ の小数第 5 位までは 1.73205 と確定できる. ($B = 1.7$ のかわりに $B = 2$ とすれば $n = 10$ で誤差が 3.0×10^{-7} となり, $B = 1.5$ とすれば $n = 9$ で誤差が 7.7×10^{-7} となって, $\sqrt{3}$ の小数第 5 位まで求まる.)

(2) $m = 3$, $A = 2$, $B = \dfrac{5}{4}$ として問題 3 の結果を用いると, $x = \dfrac{3}{125}$ だから $\sqrt[3]{2}$ を $\dfrac{5}{4}\sum_{k=0}^{n}\binom{\frac{1}{3}}{k}x^k$ で近似した誤差は $\dfrac{5}{4}\left|\binom{\frac{1}{3}}{n}\right|\left|\dfrac{125^n}{128^n} - 1\right|\dfrac{3^n}{125^n}$ 以下となり, $n = 3$ のとき, この誤差は $\dfrac{48009}{655360000000} = 0.000000073\cdots$ 以下である. 一方 $\dfrac{5}{4}\left(1 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{125}\right) - \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{3}{125}\right)^2 + \dfrac{5}{81}\left(\dfrac{3}{125}\right)^3\right) = 1.259921066\cdots$ だから, $\sqrt[3]{2}$ はこの値のプラスマイナス 0.000000074 の範囲 $1.259920992 < \sqrt[3]{2} < 1.25992114$ にあることがわかる. よって, $\sqrt[3]{2}$ の小数第 5 位までは 1.25992 と確定できる. ($B = 1.2$ とすれば $n = 6$ で誤差が 2.5×10^{-7} となって, $\sqrt[3]{2}$ の小数第 5 位まで求まる.)

(3) 0 と 1 の間に $e = \sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{k!} + \dfrac{e^c}{n!}$ を満たす c が存在するため, e を $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$ で近似した誤差は $\dfrac{e^c - 1}{n!}$ であり, この値は $\dfrac{2}{n!}$ より小さい正の数である. $n = 10$ のとき, $\dfrac{2}{10!} = 0.00000055\cdots$ であり, $\sum_{k=0}^{10}\dfrac{1}{k!} = 2.71828180\cdots$ だから e はこの値のプラスマイナス 0.00000056 の範囲 $2.71828125 < e < 2.71828235$ にあることがわかる. よって e 小数第 5 位までは 2.71828 と確定できる.

(4) テイラーの定理から $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k} + \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+c)^n}$ を満たす c が 0 と x の間にある. 従って $\log(1+x)$

を $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$ で近似した誤差は $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\dfrac{1}{(1+c)^n}-1\right)x^n$ である．ここで，$\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\dfrac{1}{(1+c)^n}-1\right)x^n\right| \leqq \dfrac{1}{n}\left|\dfrac{1}{(1+x)^n}-1\right||x|^n$ だから，$\log(1+x)$ を $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$ で近似した誤差は $\dfrac{1}{n}\left|\dfrac{1}{(1+x)^n}-1\right||x|^n$ 以下である．

上のことから，$\log(1+x)$ の近似式 $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$ に $x=1$ を代入して，誤差が 10^{-6} 以下になるためには $n=10^6$ として計算する必要があるため，非効率的である．そこで正の実数 a と $ps-qr\neq 0$ を満たす整数 p, q, r, s を $\dfrac{a^r}{2^p}$, $\dfrac{a^s}{2^q}$ ができるだけ 1 に近くなるように選んで $A=\log\dfrac{a^r}{2^p}$, $B=\log\dfrac{a^s}{2^q}$ とおく．$\begin{cases} r\log a-p\log 2=A \\ s\log a-q\log 2=B \end{cases}$ だから，$\log 2=\dfrac{As-Br}{qr-ps}$ であり，この等式に A と B の近似値を代入することによって，$\log 2$ の近似値を得る．

$a=3$, $p=3$, $q=8$, $r=2$, $s=5$ と選べば，$\log 2=5A-2B$ であり，$A=\log\dfrac{9}{8}=\log\left(1+\dfrac{1}{8}\right)$, $B=\log\dfrac{243}{256}=\log\left(1-\dfrac{13}{256}\right)$ である．$5A$ を $5\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k8^k}$ で近似した誤差は $\dfrac{5}{n}\left(\dfrac{1}{8^n}-\dfrac{1}{9^n}\right)$ 以下で，この値は $n=7$ のとき 2.0×10^{-7} より小さい．$5\sum_{k=1}^{7}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k8^k}=0.58891521\cdots$ だから $5A$ は $0.58891501<5A<0.58891541$ の範囲にある．$-2B$ を $2\sum_{k=1}^{n}\dfrac{13^k}{k256^k}$ で近似した誤差は $\dfrac{2}{n}\left(\dfrac{13^n}{243^n}-\dfrac{13^n}{256^n}\right)$ 以下で，この値は $n=4$ のとき，7.8×10^{-7} より小さい．$2\sum_{k=1}^{4}\dfrac{13^k}{k256^k}=0.10423186\cdots$ だから $-2B$ は $0.10423104<-2B<0.10423264$ の範囲にある．故に $\log 2=5A-2B$ は $0.69314605<\log 2<0.69314805$ の範囲にあるため，$\log 2$ の小数第 5 位までは 0.69314 と確定できる．(ついでに，$\log 3=8A-3B$ より，$\log 3$ の近似値 1.09861 が得られる.)

5. (1) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$ だから $\sin x-x\cos x=\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$ である．従って $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{o(x^3)}{x^3}\right)=\dfrac{1}{3}$ となるため，$\alpha=3$ であり，このときの極限値は $\dfrac{1}{3}$ である．$\alpha<3$ ならば $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}x^{3-\alpha}=\left(\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2}\right)\left(\lim_{x\to 0}x^{3-\alpha}\right)=\dfrac{1}{3}\cdot 0=0$ であり，$\alpha>4$ ならば $\lim_{x\to +0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^\alpha}=\lim_{x\to +0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}\dfrac{1}{x^{\alpha-3}}=\left(\lim_{x\to +0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}\right)\left(\lim_{x\to +0}\dfrac{1}{x^{\alpha-3}}\right)=\infty$ となるため，$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^\alpha}$ が 0 でない値に収束するような α は 3 だけである．

(2) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)$ だから $x\sin x+2\cos x-2=-\dfrac{x^4}{12}+o(x^4)$ である．従って $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\sin x+2\cos x-2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{12}+\dfrac{o(x^4)}{x^4}\right)=-\dfrac{1}{12}$ となるため，$\alpha=4$ のとき $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\sin x+2\cos x-2}{x^\alpha}$ は 0 でない値 $-\dfrac{1}{12}$ に収束する．$\alpha<4$ ならば $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\sin x+2\cos x-2}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x\sin x+2\cos x-2}{x^4}x^{4-\alpha}=\left(\lim_{x\to 0}\dfrac{x\sin x+2\cos x-2}{x^4}\right)\left(\lim_{x\to 0}x^{4-\alpha}\right)=-\dfrac{1}{12}\cdot 0=0$ であり，$\alpha>4$ ならば $\lim_{x\to +0}\dfrac{x\sin x+2\cos x-2}{x^\alpha}=\lim_{x\to +0}\dfrac{x\sin x+2\cos x-2}{x^4}\dfrac{1}{x^{\alpha-4}}=\left(\lim_{x\to +0}\dfrac{x\sin x+2\cos x-2}{x^4}\right)\left(\lim_{x\to +0}\dfrac{1}{x^{\alpha-4}}\right)=-\infty$ となるため，$\lim_{x\to 0}\dfrac{x\sin x+2\cos x-2}{x^\alpha}$ が 0 でない値に収束するような α は 4 だけである．

(3) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$, $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$ だから $\cos x-e^x+x=-x^2+o(x^3)$ である．従って $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^x+x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-x^2+o(x^3)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(-1+\dfrac{xo(x^3)}{x^3}\right)=-1$ となるため，$\alpha=2$ のとき $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^x+x}{x^\alpha}$ は 0 でない値 -1 に収束する．$\alpha<2$ ならば $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^x+x}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^x+x}{x^2}x^{2-\alpha}=\left(\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^x+x}{x^2}\right)\left(\lim_{x\to 0}x^{2-\alpha}\right)=-1\cdot 0=0$ であり，$\alpha>2$ ならば $\lim_{x\to +0}\dfrac{\cos x-e^x+x}{x^\alpha}=$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\cos x-e^x+x}{x^2}\frac{1}{x^{\alpha-2}}=\left(\lim_{x\to+0}\frac{\cos x-e^x+x}{x^2}\right)\left(\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^{\alpha-2}}\right)=-\infty$ となるため, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^x+x}{x^\alpha}$ が 0 でない値に収束するような α は 2 だけである.

(4) $\displaystyle\frac{e^x-\frac{1+\alpha x}{1+\beta x}}{x^3}=\frac{(1+\beta x)\Big(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\Big)-1-\alpha x}{x^3(1+\beta x)}=\frac{1-\alpha+\beta+\big(\beta+\frac12\big)x}{x^2(1+\beta x)}+\frac{3\beta+1}{6(1+\beta x)}+\frac{o(x^3)}{x^3(1+\beta x)}$ だから $\displaystyle\frac{1-\alpha+\beta+\big(\beta+\frac12\big)x}{x^2(1+\beta x)}=\frac{e^x-\frac{1+\alpha x}{1+\beta x}}{x^3}-\frac{3\beta+1}{6(1+\beta x)}-\frac{o(x^3)}{x^3(1+\beta x)}$ であり, $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{3\beta+1}{6(1+\beta x)}+\frac{o(x^3)}{x^3(1+\beta x)}\right)=\frac{3\beta+1}{6}$ が成り立つため, 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-\frac{1+\alpha x}{1+\beta x}}{x^3}$ が存在すれば極限値 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\alpha+\beta+\big(\beta+\frac12\big)x}{x^2(1+\beta x)}$ も存在する. $x\to0$ のとき, $x^2(1+\beta x)\to0$ だから, この極限値が存在するためには $1-\alpha+\beta=\displaystyle\lim_{x\to0}\big(1-\alpha+\beta+\big(\beta+\tfrac12\big)x\big)=0$ であることが必要である. 従って $\alpha=\beta+1$ であり, このとき $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\alpha+\beta+\big(\beta+\frac12\big)x}{x^2(1+\beta x)}=\lim_{x\to0}\frac{\beta+\frac12}{x(1+\beta x)}$ であり, この極限値が存在するのは $\beta=-\dfrac12$ の場合に限る. 故に $\alpha=\dfrac12$ であり, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-\frac{1+\alpha x}{1+\beta x}}{x^3}=\lim_{x\to0}\left(\frac{3\beta+1}{6(1+\beta x)}+\frac{o(x^3)}{x^3(1+\beta x)}\right)=\frac{3\beta+1}{6}=\frac{1}{18}$ である.

6. $f(0)=0$ または $f(1)=1$ ならば $f(c)=c$ を満たす $c\in[0,1]$ は存在する. $f(0)\neq0$ かつ $f(1)\neq1$ の場合, 関数 $F:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ を $F(x)=f(x)-x$ で定めれば, F は連続で, $F(0)=f(0)>0$ かつ $F(1)=f(1)-1<0$ だから, 中間値の定理から $F(c)=0$ を満たす $c\in(0,1)$ が存在する. このとき c は $f(c)=c$ を満たす. $c,d\in[0,1]$ $(c<d)$ で $f(c)=c$, $f(d)=d$ を満たすものが存在すると仮定すれば, $F(c)=F(d)=0$ であり, F は連続関数で, $(0,1)$ の各点で微分可能だから, ロルの定理から $F'(p)=0$ を満たす $p\in(c,d)$ が存在する. $F'(x)=f'(x)-1$ だから $f'(p)-1=F'(p)=0$ となって, すべての $x\in(0,1)$ に対して $f'(x)\neq1$ であるという仮定と矛盾する. 従って $f(c)=c$ を満たす $c\in[0,1]$ はただ 1 つしか存在しない.

7. e^x に関するマクローリンの定理から $x>0$ ならば $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}$ だから $x=1$ を代入すれば $e-2>\dfrac12+\dfrac16+\dfrac1{24}=\dfrac{17}{24}>0.7$ であることがわかる. また, $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ でもあるため, $x=e-2$ を代入し, $1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ が x の単調増加関数であることに注意すれば, $e-2>0.7$ より $e^{e-2}>1+e-2+\dfrac{(e-2)^2}{2}+\dfrac{(e-2)^3}{6}>1.7+\dfrac{(0.7)^2}{2}+\dfrac{(0.7)^3}{6}=2.0021666666\cdots>2$ が成り立つ. 従って $e^{e-2}>2$ である.

8. 平均値の定理から $x_{n+1}-\alpha=f(x_n)-f(\alpha)=f'(c_n)(x_n-\alpha)$ をみたす c_n が x_n と α の間にある. 従って $|x_{n+1}-\alpha|=|f'(c_n)||x_n-\alpha|\leqq M|x_n-\alpha|$ が任意の n に対して成り立つため,

$$|x_n-\alpha|\leqq M|x_{n-1}-\alpha|\leqq M^2|x_{n-2}-\alpha|\leqq\cdots\leqq M^{n-1}|x_1-\alpha|$$

となり, $|x_n-\alpha|\leqq M^{n-1}|x_1-\alpha|$ がすべての n に対して成り立つ.

9. (1) まず f は連続で $f(a)f(b)<0$ だから中間値の定理により, $f(\alpha)=0$ を満たす $\alpha\in(a,b)$ は存在する. もし, f' が (a,b) において一定符号ならば f は単調増加または単調減少だから $f(\alpha)=0$ を満たす α はただ 1 つである. f' が (a,b) において符号を変える場合を考えると, f' の連続性により, 中間値の定理から $f'(\beta)=0$ を満たす $\beta\in(a,b)$ が存在する. $x\in(a,b)$ に対して $f''(x)>0$ だから f' は単調増加関数である. 従って, (a,β) において f' は負の値をとり, (β,b) において f' は正の値をとるため, f は $[a,\beta]$ において単調に減少し, $[\beta,b]$ において単調に増加する. このとき $f(\beta)$ は f の最小値で, f は (a,b) において負の値もとるため $f(\beta)<0$ である. $f(a)<0$ の場合, $x\in[a,\beta]$ ならば $f(x)\leqq f(a)<0$ だから, 区間 $[a,\beta]$ では $f(x)\neq0$ である. 故にこの場合は, $f(x)=0$ を満たす x は f が単調増加である区間 $[\beta,b]$ に存在するため, そのような x はただ 1 つしかない. $f(b)<0$ の場合, $x\in[\beta,b]$ ならば $f(x)\leqq f(b)<0$ だから, 区間 $[\beta,b]$ では $f(x)\neq0$ である. この場合は, $f(x)=0$ を満たす x は f が単調減少である区間 $[a,\beta]$ に存在するため, そのような x はただ 1 つしかない.

(2) $\alpha < p$ のとき, $f(\alpha) = 0 < f(p)$ だから区間 $[\alpha, p]$ は f が増加する区間を含むため (1) の議論から $[a, b]$ において f' がつねに正の値をとるか, または $f'(\beta) = 0$ となる $\beta < p$ がある. $f(\beta) < 0 < f(p)$ だから区間 (β, p) に $f(x) = 0$ を満たす x が存在して, そのような x は α に限るため $\beta < \alpha < p$ である. 従って (1) で示したことにより区間 $[\alpha, b)$ において f' は正の値をとる.

$\alpha > p$ のとき, $f(\alpha) = 0 < f(p)$ だから区間 $[p, \alpha]$ は f が減少する区間を含むため (1) の議論から $[a, b]$ において f' がつねに負の値をとるか, または $f'(\beta) = 0$ となる $\beta > p$ がある. $f(\beta) < 0 < f(p)$ だから区間 (p, β) に $f(x) = 0$ を満たす x が存在して, そのような x は α に限るため $p < \alpha < \beta$ である. 従って (1) で示したことにより区間 (a, α) において f' は負の値をとる.

(3) $\alpha < p$ のとき, $x \in (\alpha, p]$ が $f(x) > 0$ を満たすとすれば (2) より $f'(x) > 0$ だから $x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} < x$ である. また, 平均値の定理から $f(x) = f(x) - f(\alpha) = f'(c_x)(x - \alpha)$ を満たす $c_x \in (\alpha, x)$ がある. f' は単調増加関数だから $f'(c_x) < f'(x)$ であることに注意すれば $x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} - \alpha = x - \alpha - \dfrac{f'(c_x)(x-\alpha)}{f'(x)} = \dfrac{(f'(x) - f'(c_x))(x - \alpha)}{f'(x)} > 0$ である. 従って $x_{n-1} \in (\alpha, p]$, $f(x_{n-1}) > 0$ ならば $\alpha < x_n < x_{n-1}$ となるため, n による帰納法で主張が示される.

$\alpha > p$ のとき, $x \in [p, \alpha)$ が $f(x) > 0$ を満たすとすれば (2) より $f'(x) < 0$ だから $x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} > x$ である. また, 平均値の定理から $f(x) = f(x) - f(\alpha) = f'(c_x)(x - \alpha)$ を満たす $c_x \in (x, \alpha)$ がある. f' は単調増加関数だから $f'(c_x) > f'(x)$ であることに注意すれば $x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} - \alpha = x - \alpha - \dfrac{f'(c_x)(x-\alpha)}{f'(x)} = \dfrac{(f'(c_x) - f'(x))(\alpha - x)}{f'(x)} < 0$ である. 従って $x_{n-1} \in (\alpha, p]$, $f(x_{n-1}) > 0$ ならば $\alpha > x_n > x_{n-1}$ となるため, n による帰納法で主張が示される.

微積分学 I 演習問題　第 7 回　不定形の極限

1. 次の極限を求めよ．ただし (51) の α は正の定数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x+1)-xe^x}{x^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x+1)-x}{e^x-x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\cos x-x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2\log(x+1)-2x+x^2}{x^3}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{(e^x-1)^3}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x-x}{\tan^{-1}x-x}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x^2+1)-x^2}{\cos(x^2)-1}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan^{-1}x}{x^3}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x+1)}{\sin^{-1}x}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{1}{x-p}\left(\log\left(\frac{e^x-e^p}{x-p}\right)-p\right)$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{\tan^{-1}x-x}$

(12) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\cos^2x-e^x\sin x+x^2}{x(e^x-1)-\sin^2x}$

(14) $\displaystyle\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

(15) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x-x}{x^3}$

(16) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-(x+1)\sin x-\cos x}{x^3}$

(17) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x+1)\tan^{-1}\frac{1}{x}$

(18) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-e^{-x^2}}{1-\cos3x}$

(19) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan^{-1}x-x}{e^{2x}-2x-2x^2}$

(20) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+2)}{\log(x^4+x^3)}$

(21) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin^{-1}\frac{2}{x}$

(22) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2\sqrt{1-x^2}-2+x^2}{x^4}$

(23) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)$

(24) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$

(25) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt[3]{1-x^3}}{x^3}$

(26) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{e^x-e^{-x}}$

(27) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{\sin x-x}$

(28) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^3}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$

(29) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x+\log(1-x)}{x^2}$

(30) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}$

(31) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}-\frac{2}{x^2}\right)$

(32) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{1-\cos x}$

(33) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x^2)}{\sin^2x}$

(34) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-x}{x\log(1+x)-x^2}$

(35) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin2x-2x}$

(36) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2+2)}{2\sqrt{x}}$

(37) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{1-\cos2x}$

(38) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$

(39) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^3}{\sqrt{x}}$

(40) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

(41) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4}$

(42) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x-x^2}{x^4}$

(43) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\sqrt[3]{x}\log\left(\frac{1}{x}-1\right)$

(44) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-2e^x+1}{x\sin x}$

(45) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}$

(46) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2\cos x-2+x^2}{x^4}$

(47) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

(48) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\log\frac{x+5}{x+1}$

(49) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\sin^{-1}x}\right)$

(50) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\sin x(\log x)^2$

(51) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{\alpha}}$

(52) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

(53) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

(54) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$

(55) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2}e^x$

(56) $\displaystyle\lim_{x\to+0}(\sin x)^{\tan x}$

(57) $\displaystyle\lim_{x\to0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$

(58) $\displaystyle\lim_{x\to+0}(e^x-1-x)^{\frac{1}{\log x}}$

(59) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

(60) $\displaystyle\lim_{x\to+0}(e^x-1)^{\frac{1}{\log x}}$

(61) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos^2x+x^2-1}{x^4}$

(62) $\displaystyle\lim_{x\to+0}(\tan^{-1}x)^{\frac{1}{\log x}}$

(63) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)^{\frac{1}{\log x}}$

(64) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\log(1+x)}{x^2}\right)$

(65) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x\log x-x+1}{(x-1)\log x}$

(66) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\tan x)^{\cos x}$

(67) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

(68) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

(69) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\tan^{-1}x}{\tan^{-1}(x+1)}\right)^{x}$

(70) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}-\frac{2}{x}\right)$

(71) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{e^x-1}-\sqrt{1-x}\right)$

(72) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}\left(x\sin x-\frac{\pi}{2}\right)$

第 7 回の演習問題の解答

1. (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x+1)-xe^x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x+1}-e^x-xe^x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{(x+1)^2}-2e^x-xe^x}{2}=-\frac{3}{2}$

(別解) $\log(x+1)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$, $e^x=1+x+o(x)$ より

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x+1)-xe^x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{3x^2}{2}+o(x^2)-xo(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(-\frac{3}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}-\frac{o(x)}{x}\right)=-\frac{3}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x+1)-x}{e^x-x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{(x+1)^2}}{e^x}=-1$

(別解) $\log(x+1)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$, $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ より $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x+1)-x}{e^x-x-1}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}=-1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\cos x-x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\cos x-x\sin x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{2\frac{\sin x}{x}+\cos x}=\frac{1}{3}$

(別解) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ より $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\cos x-x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{-\frac{x^3}{2}+xo(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}=\frac{1}{3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2\log(x+1)-2x+x^2}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{x+1}-2+2x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{3x^2(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{2}{3(x+1)}=\frac{2}{3}$

(別解) $\log(x+1)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$ より $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2\log(x+1)-2x+x^2}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2x^3}{3}+2o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{3}+2\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=\frac{2}{3}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{(e^x-1)^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3e^x(e^x-1)^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3e^{3x}-6e^{2x}+3e^x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{9e^{3x}-12e^{2x}+3e^x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{27e^{3x}-24e^{2x}+3e^x}=\frac{1}{6}$

(別解) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$, $e^x=1+x+o(x)$ より $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{(e^x-1)^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{(x+o(x))^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{\left(1+\frac{o(x)}{x}\right)^3}=\frac{1}{6}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x-x}{\tan^{-1}x-x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{\frac{1}{1+x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x^2)(1-\sqrt{1-x^2})}{-x^2\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{-x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{-2x}=-\lim_{x\to0}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}$

(別解) $(\sin^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\sin^{-1}x)''=\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)'=\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $(\sin^{-1}x)'''=\left(\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)'=\dfrac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$ より $\sin^{-1}x=x+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$. $(\tan^{-1}x)'=\dfrac{1}{x^2+1}$, $(\tan^{-1}x)''=\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)'=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$, $(\tan^{-1}x)'''=\left(\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}\right)'=\dfrac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$ より $\tan^{-1}x=x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$. よって $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x-x}{\tan^{-1}x-x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{-\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}}=-\frac{1}{2}$

(7) $x^2=t$ とおくと, $x\to0$ のとき, $t\to+0$ だから $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x^2+1)-x^2}{\cos(x^2)-1}=\lim_{t\to+0}\frac{\log(t+1)-t}{\cos t-1}=\lim_{t\to+0}\frac{\frac{1}{t+1}-1}{-\sin t}=\lim_{t\to+0}\frac{-t}{-\sin t(t+1)}=\lim_{t\to+0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}\frac{1}{t+1}=\lim_{t\to+0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}\lim_{t\to+0}\frac{1}{t+1}=1$

(別解) $\log(x+1)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ より $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(x^2+1)-x^2}{\cos(x^2)-1}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^4)}{x^4}}=1$

(8) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan^{-1}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-\sin x+\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{6x}=\lim_{x\to 0}\left(-\dfrac{\sin x}{6x}+\dfrac{1}{3(1+x^2)^2}\right)=\dfrac{1}{6}$

(別解) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$, $\tan^{-1}x=x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$ より $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan^{-1}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{o(x^3)}{x^3}\right)=\dfrac{1}{6}$

(9) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(x+1)}{\sin^{-1}x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}=1$

(別解) 教科書の問題 1.6 の (4) から $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(x+1)}{\sin^{-1}x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{\log(x+1)}{x}}{\frac{\sin^{-1}x}{x}}=\dfrac{\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}}=1$

(10) $\lim_{x\to p}\dfrac{e^x-e^p}{x-p}$ は e^x の p における微分係数は e^p だから, log の連続性より $\lim_{x\to p}\log\left(\dfrac{e^x-e^p}{x-p}\right)=\log\left(\lim_{x\to p}\dfrac{e^x-e^p}{x-p}\right)$ $=\log e^p=p$ である. 従って $\lim_{x\to p}\left(\log\left(\dfrac{e^x-e^p}{x-p}\right)-p\right)=0$ となるため, ロピタルの定理が使えて,

$\lim_{x\to p}\dfrac{1}{x-p}\left(\log\left(\dfrac{e^x-e^p}{x-p}\right)-p\right)=\lim_{x\to p}\dfrac{1}{(x-p)'}\left(\log\left(\dfrac{e^x-e^p}{x-p}\right)-p\right)'=\lim_{x\to p}\dfrac{e^x(x-p)-(e^x-e^p)}{(e^x-e^p)(x-p)}=$

$\lim_{x\to p}\dfrac{(e^x(x-p)-(e^x-e^p))'}{((e^x-e^p)(x-p))'}=\lim_{x\to p}\dfrac{e^x(x-p)}{e^x(x-p)+(e^x-e^p)}=\lim_{x\to p}\dfrac{e^x}{e^x+\frac{e^x-e^p}{x-p}}=\dfrac{\lim_{x\to p}e^x}{\lim_{x\to p}e^x+\lim_{x\to p}\frac{e^x-e^p}{x-p}}=\dfrac{e^p}{e^p+e^p}=\dfrac{1}{2}$

(別解) $e^x=e^p+e^p(x-p)+\dfrac{e^p}{2}(x-p)^2+o((x-p)^2)$ より $\dfrac{e^x-e^p}{x-p}=e^p+\dfrac{e^p(x-p)}{2}+o(x-p)$ であることと $\log(1+y)=y+o(y)$ を用いると, $\log(e^x-e^p)-\log(x-p)-p=\log\left(\dfrac{e^x-e^p}{x-p}\right)-\log(e^p)=\log\left(e^p+\dfrac{e^p(x-p)}{2}+o(x-p)\right)-\log e^p=\log\left(1+\dfrac{x-p}{2}+e^{-p}o(x-p)\right)=\dfrac{x-p}{2}+e^{-p}o(x-p)+o\left(\dfrac{x-p}{2}+e^{-p}o(x-p)\right)$ である. $y=\varepsilon(x)=\dfrac{x-p}{2}+e^{-p}o(x-p)$ とおけば, $x\to p$ のとき $y\to 0$ であり, $\lim_{x\to p}\dfrac{\varepsilon(x)}{x-p}=\dfrac{1}{2}$ だから, $\lim_{x\to p}\dfrac{\log(e^x-e^p)-\log(x-p)-p}{x-p}$ $=\lim_{x\to p}\left(\dfrac{\varepsilon(x)}{x-p}+\dfrac{o(\varepsilon(x))}{x-p}\right)=\lim_{x\to p}\dfrac{\varepsilon(x)}{x-p}+\lim_{x\to p}\dfrac{\varepsilon(x)}{x-p}\dfrac{o(\varepsilon(x))}{\varepsilon(x)}=\lim_{x\to p}\dfrac{\varepsilon(x)}{x-p}+\lim_{x\to p}\dfrac{\varepsilon(x)}{x-p}\lim_{y\to 0}\dfrac{o(y)}{y}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot 0=\dfrac{1}{2}$

(11) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{\tan^{-1}x-x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\frac{1}{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-1)(1+x^2)}{1-(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}-\dfrac{(\cos x-1)(1+x^2)}{x^2}=$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\lim_{x\to 0}(1+x^2)=\dfrac{1}{2}$ (第 3 回の演習問題 1 の (3) の結果を用いた)

(別解) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$, $\tan^{-1}x=x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$ より $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{\tan^{-1}x-x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}=$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{-\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}}=\dfrac{1}{2}$

(12) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{2x\cos x}=-\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{2\cos x}=-\dfrac{1}{2}.$

(別解) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\log\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{-2\sin^2\frac{x}{2}}\dfrac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=-\dfrac{1}{2}\lim_{x\to 0}\dfrac{\log\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{-2\sin^2\frac{x}{2}}\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=-\dfrac{1}{2}$

(13) $x\cos^2x-e^x\sin x+x^2=x\left(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^2-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)\right)+x^2=$ $x(1-x^2+o(x^3))-\left(x+x^2+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)\right)+x^2=-\dfrac{4x^3}{3}+o(x^3)$,

$x(e^x-1)-\sin^2x=x\left(x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-(x+o(x^2))^2=x^2+\dfrac{x^3}{2}+o(x^3)-(x^2+o(x^3))=\dfrac{x^3}{2}+o(x^3)$ より

$\lim_{x\to 0}\dfrac{x\cos^2x-e^x\sin x+x^2}{x(e^x-1)-\sin^2x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-\frac{4x^3}{3}+o(x^3)}{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-\frac{4}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{2}+\frac{o(x^3)}{x^3}}=-\dfrac{8}{3}$

(14) $f(x)=(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ とおいて両辺の対数をとると $\log f(x)=\dfrac{\log(\cos x)}{x^2}$ だから $f(x)=e^{\frac{\log(\cos x)}{x^2}}$ である. 指数関数の連続性と (9) から $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\log(\cos x)}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

(15) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{3x^2\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{3\sqrt{1-x^2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{1}{6}$

(16) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$, $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$ より $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-(x+1)\sin x-\cos x}{x^3}=$ $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{6}+o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{3}+\frac{x}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=\frac{1}{3}$

(17) $y=\dfrac{1}{x}$ とおくと $x\to\infty$ のとき $y\to+0$ だから, 第 3 回の演習問題 1 の (10) の結果から $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x+1)\tan^{-1}\frac{1}{x}=$ $\displaystyle\lim_{y\to+0}\left(\frac{1}{y}+1\right)\tan^{-1}y=\lim_{y\to+0}\frac{\tan^{-1}y}{y}+\lim_{y\to+0}\tan^{-1}y=1+\frac{\pi}{2}$

(18) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-e^{-x^2}}{1-\cos 3x}=\lim_{x\to0}\frac{2xe^{-x^2}}{3\sin 3x}=\lim_{x\to0}\frac{2e^{-x^2}}{9\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{2\lim\limits_{x\to0}e^{-x^2}}{9\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{2}{9}$

(19) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan^{-1}x-x}{e^{2x}-1-2x-2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x^2+1}-1}{2e^{2x}-2-4x}=\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{2e^{2x}-2-4x}\frac{1}{x^2+1}=\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{2e^{2x}-2-4x}\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2+1}=$ $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{-2x}{4e^{2x}-4}=-\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{e^{2x}-1}{2x}}=-\frac{1}{4}$

(別解) $\tan^{-1}x=x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$, $e^{2x}=1+2x+2x^2+\dfrac{4x^3}{3}+o(x^3)$ より $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan^{-1}x-x}{e^{2x}-1-2x-2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{\frac{4x^3}{3}+o(x^3)}=$ $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{4}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}}=-\frac{1}{4}$

(20) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+2)}{\log(x^4+x^3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+2)}{3\log x+\log(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+2}}{\frac{3}{x}+\frac{1}{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x+1)}{3(x+1)(x+2)+x(x+2)}=$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{4x^2+11x+6}=\frac{1}{4}$

(21) $y=\dfrac{2}{x}$ とおくと $x\to\infty$ のとき $y\to+0$ だから, 教科書の問題 1.6 の (4) より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin^{-1}\frac{2}{x}=\lim_{y\to+0}\frac{2\sin^{-1}y}{y}=2$

(22) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2\sqrt{1-x^2}-2+x^2}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{4(1-x^2)-(2-x^2)^2}{x^4\left(2\sqrt{1-x^2}+2-x^2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}+2-x^2}=-\frac{1}{4}$

(23) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{2\sin x}{x}+\cos x}=\frac{1}{3}$

(24) $y=\dfrac{1}{x}$ とおくと $x\to\infty$ のとき $y\to+0$ だから, 教科書の例 2.8 より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to+0}\frac{1}{y^y}=1$

(25) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt[3]{1-x^3}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2x^3}{x^3\left((1+x^3)^{\frac{2}{3}}+(1-x^6)^{\frac{1}{3}}+(1-x^3)^{\frac{2}{3}}\right)}=\frac{2}{3}$

(26) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{1}{2}$

(27) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{\sin x-x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(\cos x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{-1-\cos x}{\cos^2 x}=-2$

(28) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^3}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}}=1$

(29) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x+\log(1-x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1-x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{2(1-x)}=-\frac{1}{2}$

(30) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{3x^2\cos^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\lim_{x\to0}\frac{1+\cos x}{3\cos^2 x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

(31) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}-\frac{2}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{1}{2}$

(32) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}o(x^2)$ より $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}-o(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{\frac{1}{2}-\frac{o(x^2)}{x^2}}=1$

(33) $\log(1+x^2)=x^2+o(x^2)$ だから $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x^2)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+o(x^2)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{o(x^2)}{x^2}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}=1$

(34) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-x}{x\log(1+x)-x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-1}{\log(1+x)+\frac{x}{1+x}-2x}=\lim_{x\to0}\frac{-x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}-2}=\lim_{x\to0}\frac{-x\sqrt{1+x^2}}{-3x-2x^2}=$
$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}}{3+2x}=\frac{1}{3}$

(35) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin 2x-2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{2\cos 2x-2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{-4\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{-8\cos 2x}=-\frac{1}{4}$

(36) $y=\sqrt{x^2+2}$ とおくと $x\to\infty$ のとき $x\to\infty$ だから, 教科書の問 1.18 から
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2+2)}{2\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2+2)}{(x^2+2)^{\frac{1}{4}}}\frac{(x^2+2)^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{x}}=\lim_{y\to\infty}\frac{\log y}{y^{\frac{1}{4}}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{\frac{1}{4}}=0\cdot\frac{1}{2}=0$

(37) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to0}\frac{2e^{2x}-2e^{-2x}}{2\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{4e^{2x}+4e^{-2x}}{4\cos 2x}=2$

(38) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{-1}{\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\lim_{x\to0}\frac{-1}{\cos x}=-\frac{1}{2}$

(39) 教科書の問 1.18 から $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^3}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log x}{x^{\frac{1}{6}}}\right)^3=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^{\frac{1}{6}}}\right)^3=0^3=0$

(40) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x-\log(1+x)}{x\log(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\log(1+x)+\frac{x}{1+x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{\log(1+x)}{x}+\frac{1}{1+x}}=\frac{1}{2}$

(41) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ より $e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)$ である.
従って $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^4}{2}+o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right)=\frac{1}{2}$

(42) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$ より $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x-x)(\sin x+x)}{x^4}=$
$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\left(-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(2x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{x^4}=\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)\lim_{x\to0}\left(2-\frac{x^2}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}x^2\right)=-\frac{1}{3}$

(43) 教科書の問 1.18 から $\displaystyle\lim_{x\to+0}\sqrt[3]{x}\log\left(\frac{1}{x}-1\right)=\lim_{x\to+0}\left(\sqrt[3]{x}\log(1-x)-\sqrt[3]{x}\log x\right)=\lim_{x\to+0}\sqrt[3]{x}\log(1-x)-$
$\displaystyle\lim_{x\to+0}\sqrt[3]{x}\log x=0-0=0$

(44) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-2e^x+1}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2e^{2x}-2e^x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{4e^{2x}-2e^x}{2\cos x-x\sin x}=1$

(45) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$ より $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{6}-o(x^3)}{x^2(x+o(x))}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}-\frac{o(x^3)}{x^3}}{1+\frac{o(x)}{x}}=\frac{1}{6}$

(46) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)$ より $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2\cos x-2+x^2}{x^4}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{12}+\frac{2o(x^4)}{x^4}\right)=\frac{1}{12}$

(47) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ より $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x(x+o(x))}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{1+\frac{o(x))}{x}}=\frac{1}{2}$

(48) $y=\dfrac{1}{x}$ とおくと $x\to\infty$ のとき $y\to+0$ だから, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\log\frac{x+5}{x+1}=\lim_{y\to+0}\frac{1}{y}\log\frac{\frac{1}{y}+5}{\frac{1}{y}+1}=$
$\displaystyle\lim_{y\to+0}\frac{\log(1+5y)-\log(1+y)}{y}=\lim_{y\to+0}\left(\frac{5}{1+5y}-\frac{1}{1+y}\right)=4$

(49) $y=\sin^{-1}x$ とおくと $x\to0$ のとき $y\to0$ だから $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x\sin^{-1}x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{y\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 y}-\frac{1}{y\sin y}\right)=$
$\displaystyle\lim_{y\to0}\frac{y-\sin y}{y\sin^2 y}=\lim_{y\to0}\frac{y-\left(y-\frac{y^3}{6}+o(y^3)\right)}{y(y+o(y))^2}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{y^3}{6}+o(y^3)}{y^3+o(y^3)}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{1}{6}+\frac{o(y^3)}{y^3}}{1+\frac{o(y^3)}{y^3}}=\frac{1}{6}$

(50) 教科書の問 1.18 から $\displaystyle\lim_{x\to+0}\sin x(\log x)^2=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\left(x^{\frac{1}{2}}\log x\right)^2=\left(\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to+0}x^{\frac{1}{2}}\log x\right)^2=1\cdot0=0$

(51) $y=\dfrac{1}{x}$ とおくと $x\to+0$ のとき $y\to\infty$ だから, 教科書の問 1.17 から $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^\alpha}=\lim_{y\to\infty}y^\alpha e^{-y}=0$

(52) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ より $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2\sin x-\cos x(x+\sin x)}{\sin^3 x}=$
$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(2x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{(x+o(x))^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{5}{6}x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{5}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{1+\frac{o(x^3)}{x^3}}=\frac{5}{6}$

(53) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ だから $x\to0$ のとき, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$ の分母と分子はともに 0 に近づく. 第 5 回の演習問題 1 の (47) から $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{x-(1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)}=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)}=$
$\displaystyle e\lim_{x\to0}\frac{-\log(1+x)}{x(2+3x)}=e\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}\frac{-1}{2+3x}=-\frac{e}{2}$

(54) $y=-x$ とおくと $x\to0$ のとき $y\to0$ だから $\displaystyle\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to0}(1+y)^{-\frac{1}{y}}=\frac{1}{\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\frac{1}{e}$

(55) $f(x)=\log\left(\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x^2}e^x\right)$ とおけば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(x+x^2\log x-x^2\log(1+x))=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\log x-\log(1+x)}{\frac{1}{x^2}}$
$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\left(x-x^2+\frac{x^3}{1+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2(1+x)}=\frac{1}{2}$ となるため, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2}e^x=$
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}e^{f(x)}=e^{\lim_{x\to\infty}f(x)}=\sqrt{e}$.

(56) $f(x)=\log(\sin x)^{\tan x}$ とおき, $y=\sin x$ とおけば, $x\to+0$ のとき $y\to+0$ だから 教科書の問 1.18 から $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\tan x\log(\sin x)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x\log(\sin x)}{\cos x}=\frac{\lim_{y\to+0}y\log y}{\lim_{x\to+0}\cos x}=0$ となるため $\displaystyle\lim_{x\to+0}(\sin x)^{\tan x}=$
$\displaystyle\lim_{x\to+0}e^{f(x)}=e^{\lim_{x\to+0}f(x)}=e^0=1$.

(57) $f(x)=\log(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$ とおけば $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\log(e^x+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+1}{e^x+x}=2$ となるため $\displaystyle\lim_{x\to0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=$
$\displaystyle\lim_{x\to0}e^{f(x)}=e^{\lim_{x\to0}f(x)}=e^2$.

(58) $f(x)=\log(e^x-1-x)^{\frac{1}{\log x}}$ とおけば $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log(e^x-1-x)}{\log x}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{e^x-1}{e^x-1-x}}{\frac{1}{x}}=$
$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^x-1}{x}\frac{x^2}{e^x-1-x}=\lim_{x\to+0}\frac{e^x-1}{x}\lim_{x\to+0}\frac{x^2}{e^x-1-x}=\lim_{x\to+0}\frac{2x}{e^x-1}=\frac{2}{\lim_{x\to+0}\frac{e^x-1}{x}}=2$ となるため
$\displaystyle\lim_{x\to+0}(e^x-1-x)^{\log x}=\lim_{x\to+0}e^{f(x)}=e^{\lim_{x\to+0}f(x)}=e^2$.

(59) $f(x)=\log\left(\dfrac{\log(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ とおけば $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\log(\log(1+x))-\log x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{1}{1+x}}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=$
$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\log(1+x)}{x(1+x)\log(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{-\log(1+x)}{(1+2x)\log(1+x)+x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{1+x}}{2\log(1+x)+\frac{1+2x}{1+x}+1}=-\frac{1}{2}$ となるため
$\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}e^{f(x)}=e^{\lim_{x\to+0}f(x)}=e^{-\frac{1}{2}}$.

(60) $f(x)=\log(e^x-1)^{\frac{1}{\log x}}$ とおけば $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log(e^x-1)}{\log x}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{e^x}{e^x-1}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{e^x}{\frac{e^x-1}{x}}=1$ となるため
$\displaystyle\lim_{x\to+0}(e^x-1)^{\frac{1}{\log x}}=\lim_{x\to+0}e^{f(x)}=e^{\lim_{x\to+0}f(x)}=e$.

(61) ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x+x^2-1}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin x\cos x+2x}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}=$
$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{4\sin^2 x}{12x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{3}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=\frac{1}{3}$

(別解) $\cos^2 x=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)=\dfrac{1}{2}\left(2-\dfrac{(2x)^2}{2!}+\dfrac{(2x)^4}{4!}+o(x^4)\right)=1-x^2+\dfrac{x^4}{3}+o(x^4)$ だから $\cos^2 x+x^2-1=$

$\dfrac{x^4}{3}+o(x^4)$ である. 従って $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x+x^2-1}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right)=\frac{1}{3}$.

(62) $f(x)=\log(\tan^{-1}x)^{\frac{1}{\log x}}$ とおけば $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log(\tan^{-1}x)}{\log x}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{\frac{\tan^{-1}x}{x}(1+x^2)}=1$ だから $\displaystyle\lim_{x\to+0}(\tan^{-1}x)^{\frac{1}{\log x}}=\lim_{x\to+0}e^{f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to+0}f(x)}=e^1=e$.

(63) $f(x)=\log\Bigl(\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\Bigr)^{\frac{1}{\log x}}$ とおくと, 第 3 回の演習問題 1 の (15) の結果から $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log\bigl(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\bigr)}{\log x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{(x^2+1)\bigl(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\bigr)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{x^2+1}\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}x\bigl(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\bigr)}=-1$ となるため, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\Bigl(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\Bigr)^{\frac{1}{\log x}}=\lim_{x\to\infty}e^{f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}f(x)}=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

(64) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\biggl(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\log(1+x)}{x^2}\biggr)=\lim_{x\to 0}\frac{x-(x+1)\log(1+x)}{x^2(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(x+1)\Bigl(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\Bigr)}{x^2(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}\biggl(-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\biggr)=-\frac{1}{2}$

(65) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x\log x-x+1}{(x-1)\log x}=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)\log(1+y)-y}{y\log(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)\Bigl(y-\frac{y^2}{2}+o(y^2)\Bigr)-y}{y\Bigl(y-\frac{y^2}{2}+o(y^2)\Bigr)}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y^2}{2}+o(y^2)}{y^2+o(y^2)}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{2}+\frac{o(y^2)}{y^2}}{1+\frac{o(y^2)}{y^2}}=\frac{1}{2}$

(66) $y=\tan x$ とおけば, $x\to\frac{\pi}{2}-0$ のとき $y\to\infty$ である. また $x=\tan^{-1}y$ だから, 第 3 回の演習問題 2 の (5) から $\cos x=\cos\bigl(\tan^{-1}y\bigr)=\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ であるため $(\tan x)^{\cos x}=e^{\cos x\log(\tan x)}=e^{\frac{\log y}{\sqrt{1+y^2}}}$ である. $y\geqq 1$ ならば $0\leqq\dfrac{\log y}{\sqrt{1+y^2}}\leqq\dfrac{\log y}{y}$ であり, $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\frac{\log y}{y}=0$ だから $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\frac{\log y}{\sqrt{1+y^2}}=0$ が成り立つ. 従って $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\tan x)^{\cos x}=\lim_{y\to\infty}e^{\frac{\log y}{\sqrt{1+y^2}}}=e^0=1$ である.

(67) α を $a_1,a_2,\dots,a_n$ のうちで最大のものとすれば, $x>0$ ならば $\alpha^x\leqq a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x\leqq n\alpha^x$ だから $\dfrac{\alpha}{n^{\frac{1}{x}}}\leqq\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\leqq\alpha$ が成り立つ. ここで, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}n^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{\log n}{x}}=e^0=1$ だから, 上の不等式から $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\biggl(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\biggr)^{\frac{1}{x}}=\alpha$ である.

(68) $\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\log\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)}$ であり, ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\biggl(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\biggr)=\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x\log a_1+a_2^x\log a_2+\cdots+a_n^x\log a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}=\frac{\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_n}{n}=\log\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ だから $\displaystyle\lim_{x\to 0}\biggl(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\biggr)^{\frac{1}{x}}=e^{\log\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ である.

(69) $f(x)=\log\biggl(\dfrac{\tan^{-1}x}{\tan^{-1}(x+1)}\biggr)^x$ とおけば $f(x)=x(\log(\tan^{-1}x)-\log(\tan^{-1}(x+1)))$, $\left(\dfrac{\tan^{-1}x}{\tan^{-1}(x+1)}\right)^x=e^{f(x)}$ であり,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(\tan^{-1}x)-\log(\tan^{-1}(x+1))}{\frac{1}{x}}&=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(1+x^2)\tan^{-1}x}-\frac{1}{(1+(1+x)^2)\tan^{-1}(x+1)}}{-\frac{1}{x^2}}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x^2}{(1+x^2)\tan^{-1}x}+\frac{x^2}{(1+(1+x)^2)\tan^{-1}(x+1)}\right)=0\end{aligned}$$

だから $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\biggl(\frac{\tan^{-1}x}{\tan^{-1}(x+1)}\biggr)^x=\lim_{x\to\infty}e^{f(x)}=1$ である.

(70) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}-\dfrac{2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^2(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\Big(2+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\Big)-2\Big(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\Big)}{x^2(x+o(x))}=$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{1+\frac{o(x^3)}{x^3}}=\dfrac{1}{6}$

(71) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x}{e^x-1}-\sqrt{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sqrt{1-x}(e^x-1)}{x^2(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\Big(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+o(x^2)\Big)\Big(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\Big)}{x^2(x+o(x))}$
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{x^3}{24}+o(x^3)}{x^2(x+o(x))}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{24}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{1+\frac{o(x^3)}{x^3}}=-\dfrac{1}{24}$

(72) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\cos x}\left(x\sin x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{-\sin x-x\cos x}{\sin x}=-1$

微積分学 I 演習問題　第 8 回　関数の級数展開

1. 次の関数のマクローリン展開と, その収束半径を求めよ.

(1) e^{-x^2}　(2) $\dfrac{1}{x+2}$　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　(4) $\log(1-x^2)$　(5) $\dfrac{x-1}{x+1}$　(6) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(7) $\dfrac{x}{1+x^2}$　(8) $\dfrac{1}{4+x^2}$　(9) $(e^x-e^{-x})^2$　(10) $\cos^2 x$　(11) $\dfrac{1}{1-3x+2x^2}$　(12) $\dfrac{1}{1+x+x^2}$

(13) $\cosh^3 x$　(14) $\sin^3 x$　(15) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　(16) $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$　(17) $x\log(1+2x)$　(18) $\tanh^{-1} x$

(19) $\sinh^{-1} x$　(20) $\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$

2. 関数 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=(2x^2+7x+7)e^{-x}$ で定める. f の増減, 凹凸, 漸近線を調べて, f のグラフの概形をかけ.

3. a を実数, b を 0 でない実数の定数する. $f(x)=(x^2-ax+ab)e^{\frac{x}{b}}$ で与えられる関数が次の 2 つの条件 (1) と (2) の両方を満たすとき, a と b の値と, f が極小になる x を求めよ.

(1) f は $x>0$ の範囲で極小値をとる.

(2) f のグラフは $(-3, f(-3))$ と $(2, f(2))$ を変曲点にもつ.

4. 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ の法線のうちで, 原点から最大の距離を持つものを求めよ.

第 8 回の演習問題の解答

1. (1) e^t のマクローリン展開 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^n}{n!}$ に $t=-x^2$ を代入して e^{-x^2} のマクローリン展開 $e^{-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-x^2)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{n!}$ を得る．この級数の収束半径は無限大である．

(2) $(1+t)^{-1}$ のマクローリン展開 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}t^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^n$ を $\dfrac{1}{2}$ 倍したものに $t=\dfrac{x}{2}$ を代入すれば $\dfrac{1}{2+x}$ のマクローリン展開 $\dfrac{1}{2+x}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$ を得る．この級数の収束半径は $\left|\dfrac{x}{2}\right|=|t|<1$ より 2 である．

(3) $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ のマクローリン展開 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}t^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}t^n$ に $t=-x^2$ を代入して $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ のマクローリン展開 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}(-x^2)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$ を得る．この級数の収束半径は $|-x^2|=|t|<1$ より 1 である．

(4) $\log(1+t)$ のマクローリン展開 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{n}$ に $t=-x^2$ を代入して $\log(1-x^2)$ のマクローリン展開 $\log(1-x^2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(-x^2)^n}{n}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n}$ を得る．この級数の収束半径は $|-x^2|=|t|<1$ より 1 である．

(5) $\dfrac{x-1}{x+1}=1-\dfrac{2}{1+x}$ だから $(1+x)^{-1}$ のマクローリン展開より $\dfrac{x-1}{x+1}=1-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=-1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}2(-1)^{n-1}nx^n$ を得る．この級数の収束半径は 1 である．

(6) $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ のマクローリン展開 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}t^n$ に $t=x^2$ を代入すれば $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n}$ であり，この両辺に x をかけると $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ のマクローリン展開 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n}$ が得られる．この級数の収束半径は $|x^2|=|t|<1$ より 1 である．

(7) $(1+t)^{-1}$ のマクローリン展開 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^n$ に $t=x^2$ を代入すれば $\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}$ であり，この両辺に x をかけて $\dfrac{x}{1+x^2}$ のマクローリン展開 $\dfrac{x}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n+1}$ を得る．この級数の収束半径は $|x^2|=|t|<1$ より 1 である．

(8) $(1+t)^{-1}$ のマクローリン展開 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^n$ を $\dfrac{1}{4}$ 倍したものに $t=\dfrac{x^2}{4}$ を代入すれば $\dfrac{1}{4+x^2}$ のマクローリン展開 $\dfrac{1}{4+x^2}=\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{x^2}{4}\right)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4}\left(\dfrac{x^2}{4}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4^{n+1}}x^{2n}$ を得る．この級数の収束半径は $\left|\dfrac{x^2}{4}\right|=|t|<1$ より 2 である．

(9) e^t のマクローリン展開 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^n}{n!}$ に $t=\pm 2x$ を代入すれば $e^{2x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2x)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}x^n$, $e^{-2x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-2x)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-2)^n}{n!}x^n$ を得る．$2^n+(-2)^n=\begin{cases}2^{n+1} & n\text{ は偶数}\\ 0 & n\text{ は奇数}\end{cases}$ であることに注意すれば，$(e^x-e^{-x})^2$ のマクローリン展開は $(e^x-e^{-x})^2=e^{2x}+e^{-2x}-2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}x^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-2)^n}{n!}x^n-2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+(-2)^n}{n!}x^n=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{2^{2m+1}}{(2m)!}x^{2m}$ となり，この級数の収束半径は無限大である．

(10) $\cos t$ のマクローリン展開 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}$ に $t=2x$ を代入すれば $\cos 2x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}$ であり，$\cos^2 x=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$ から $\cos^2 x$ のマクローリン展開 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$ を得る．この級数の収束半径は無限大である．

(11) $\dfrac{1}{1-3x+2x^2}=\dfrac{1}{(1-x)(1-2x)}=\dfrac{2}{1-2x}-\dfrac{1}{1-x}$ だから $(1+t)^{-1}$ のマクローリン展開 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^n$ に

$t=-2x,\, t=-x$ を代入すれば $\dfrac{1}{1-3x+2x^2}$ のマクローリン展開 $2\sum_{n=0}^{\infty}2^nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)x^n$ を得る. この級数の収束半径は, $|-2x|<1$ かつ $|-x|<1$ より $\dfrac{1}{2}$ である.

(12) $\dfrac{1}{1+x+x^2}=\dfrac{1-x}{1-x^3}=\dfrac{1}{1-x^3}-\dfrac{x}{1-x^3}$ だから $(1+t)^{-1}$ のマクローリン展開 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^n$ に $t=-x^3$ を代入すれば $\dfrac{1}{1-x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}$ より $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ のマクローリン展開 $\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}-x\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}=\sum_{n=0}^{\infty}(x^{3n}-x^{3n+1})=1-x+x^3-x^4+x^6-x^7+\cdots+x^{3n}-x^{3n+1}+\cdots$ を得る. この級数の収束半径は, $|x^3|<1$ より 1 である.

(13) $\cosh^3x=\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}(e^{3x}+e^{-3x}+3e^x+3e^{-x})$ であり, e^t のマクローリン展開 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^n}{n!}$ に $t=\pm x.\pm 3x$ を代入して, $1+(-1)^n=\begin{cases}2 & n \text{ は偶数}\\ 0 & n \text{ は奇数}\end{cases}$, $3^n+(-3)^n=\begin{cases}2\cdot 3^n & n \text{ は偶数}\\ 0 & n \text{ は奇数}\end{cases}$ であることに注意すれば, $\cosh^3x$ のマクローリン展開は $\dfrac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n+(-3)^n+3(1+(-1)^n)}{n!}x^n=\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{9^m+3}{4(2m)!}x^{2m}$ によって与えられる. この級数の収束半径は無限大である.

(14) 第 6 回の演習問題 1 の (11) の解答から $\sin^3x=\dfrac{3}{4}\sin x-\dfrac{1}{4}\sin 3x$ であるため, $\sin t$ のマクローリン展開 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1}$ より, $\sin^3x$ のマクローリン展開は $\dfrac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}-\dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{3(-1)^n(1-9^n)}{4(2n+1)!}x^{2n+1}$ であり, この級数の収束半径は無限大である.

(15) $\left(\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{\pi n}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ だから $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ の n 次導関数の 0 における値は $\sin\left(\dfrac{\pi n}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}} & n \text{ を 4 で割った余りが } 0 \text{ または } 1\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & n \text{ を 4 で割った余りが } 2 \text{ または } 3\end{cases}$ となるため, テイラーの定理から $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{x}{\sqrt{2}}-\dfrac{x^2}{2!\sqrt{2}}-\dfrac{x^3}{3!\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{(-1)^kx^{2k}}{(2k)!\sqrt{2}}+\dfrac{(-1)^kx^{2k+1}}{(2k+1)!\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\left(c+\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{n!}x^n$ を満たす c が 0 と x の間にある. $\left|\sin\left(c+\dfrac{\pi n}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\leqq 1$ だから, 任意の実数 x に対して, $n\to\infty$ のとき, 剰余項 $\dfrac{\sin\left(c+\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{n!}x^n$ は 0 に近づく. 従って $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ のマクローリン展開は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{x}{\sqrt{2}}-\dfrac{x^2}{2!\sqrt{2}}-\dfrac{x^3}{3!\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{(-1)^kx^{2k}}{(2k)!\sqrt{2}}+\dfrac{(-1)^kx^{2k+1}}{(2k+1)!\sqrt{2}}+\cdots$ であり, この級数の収束半径は無限大である.

(16) $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ のマクローリン展開 $\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}t^n$ の t に $-4x^2$ を代入すれば $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$ のマクローリン展開

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-4x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(2n-1)!!}{n!}x^{2n}$$

を得る. $\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}t^n$ の収束半径は 1 だから上で求めた整級数は $|-4x^2|<1$ ならば収束し, $|-4x^2|>1$ ならば発散する. 従って収束半径は $\dfrac{1}{2}$ である.

(17) $\log(1+t)$ のマクローリン展開 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{n}$ に $t=2x$ を代入して $\log(1+2x)$ のマクローリン展開

$$\log(1+2x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^nx^n}{n}$$

を得る. この級数の収束半径は $|2x|=|t|<1$ より $|x|<\dfrac{1}{2}$ だから $\dfrac{1}{2}$ である. $\log(1+2x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^nx^n}{n}$ の両辺に x をかければ, $x\log(1+2x)$ のマクローリン展開

$$x\log(1+2x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^nx^{n+1}}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n-1}x^n}{n-1}$$

が得られ, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^n x^n}{n}$ が収束することと, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^n x^{n+1}}{n}$ が収束することは同値だから, $x\log(1+2x)$ のマクローリン展開の収束半径も $\dfrac{1}{2}$ である.

(18) $\tanh^{-1}x=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}$ だから, $\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$, $\log(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n$ より, $\tanh^{-1}x=\dfrac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{2n}x^n=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$ を得る. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ の収束半径は 1 だから, $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$ の収束半径も 1 である.

(19) $\sinh^{-1}x=\log\bigl(x+\sqrt{1+x^2}\bigr)$ であり, $\log\bigl(x+\sqrt{1+x^2}\bigr)$ の導関数は $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ だから, 微積分学の基本定理によって $\sinh^{-1}x=\int_0^x(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}dt$ が成り立つ. 一方, $(1+x)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^n$ の x に t^2 を代入すれば $(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}t^{2n}$ が得られる. 従って $\sinh^{-1}x=\displaystyle\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n+1}$. ここで, $\binom{-\frac{1}{2}}{n}=\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}=\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}=\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}$ だから $\sinh^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1}$ と表すことができる. $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^n$ の収束半径が 1 であることから, 上で得た $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1}$ の収束半径も 1 である.

(20) $(1+t)^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}t^n$ の t に x^2, $-x^2$ を代入すれば

$$\sqrt{1+x^2}=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^{2n},\qquad \sqrt{1-x^2}=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n x^{2n}$$

を得る. 従って

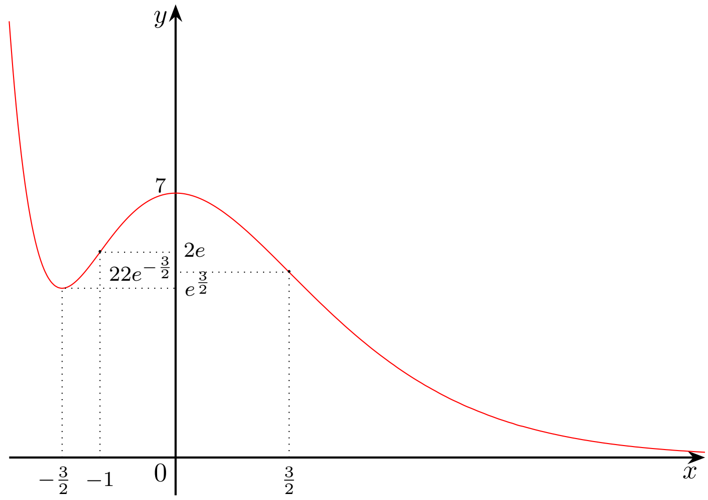
$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}&=\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^{2n}-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n x^{2n}\right)\\&=\frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(1-(-1)^n)x^{2n}\end{aligned}$$

である. $1-(-1)^n$ は n が偶数のときは 0 で, 奇数のときは 2 だから $n=2m+1$ $(m=0,1,2,\dots)$ の場合の和をとればよいため. 上式から

$$\frac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{x^2}\sum_{m=0}^{\infty}2\binom{\frac{1}{2}}{2m+1}x^{4m+2}=\sum_{m=0}^{\infty}2\binom{\frac{1}{2}}{2m+1}x^{4m}$$

となる. 故に $\sum_{m=0}^{\infty}2\binom{\frac{1}{2}}{2m+1}x^{4m}=1+\sum_{m=1}^{\infty}2\dfrac{(4m-1)!!}{(4m+2)!!}x^{4m}$ が $\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$ のマクローリン展開である.

2. $f'(x)=(-2x^2-3x)e^{-x}=-x(2x+3)e^{-x}$ だから $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$ で f は狭義単調減少, $\left[-\frac{3}{2},0\right]$ で f は狭義単調増加, $[0,\infty]$ で f は狭義単調減少である. また $f''(x)=(2x^2-x-3)e^{-x}=(2x-3)(x+1)e^{-x}$ だから $(-\infty,-1]$ で f は下に凸, $\left[-1,\frac{3}{2}\right]$ で f は上に凸, $\left[\frac{3}{2},\infty\right)$ で f は下に凸である. さらに $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ だから x 軸は $x\to\infty$ における f の漸近線である. 以上から f のグラフの概形は次のようになる.



3. $f(x) = (x^2 - ax + ab)e^{\frac{x}{b}}$ より $f'(x) = \dfrac{1}{b}(x^2 + (2b-a)x)e^{\frac{x}{b}}$, $f''(x) = \dfrac{1}{b^2}(x^2 + (4b-a)x + b(2b-a))e^{\frac{x}{b}}$. 仮定より 2 次方程式 $x^2 + (4b-a)x + b(2b-a) = 0$ は -3 と 2 を解にもつため, 解と係数の関係から $a - 4b = -1$, $b(2b-a) = -6$ である. $a = 4b - 1$ を第 2 式に代入して $b(1-2b) = -6$ だから $(2b+3)(b-2) = 0$ である. 従って $b = -\dfrac{3}{2}$, 2 となるため, $(a, b) = \left(-7, -\frac{3}{2}\right), (7, 2)$ となる.

$(a, b) = \left(-7, -\frac{3}{2}\right)$ の場合, $f'(x) = -\dfrac{2}{3}x(x+4)e^{-\frac{2x}{3}}$ だから f は $(-\infty, -4]$ で単調減少, $[-4, 0]$ で単調増加, $[0, \infty)$ で単調減少するため, f は -4 で極小値をとり, 0 で極大値をとる.

$(a, b) = (7, 2)$ の場合, $f'(x) = \dfrac{1}{2}x(x-3)e^{\frac{x}{2}}$ だから f は $(-\infty, 0]$ で単調増加, $[0, 3]$ で単調減少, $[3, \infty)$ で単調増加するため, f は 0 で極大値をとり, 3 で極小値をとる.

以上から $a = 7$, $b = 2$ で, f は 3 で極小値をとる

4. 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $\left(\begin{smallmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{smallmatrix}\right)$ における接線の方向ベクトルは $\left(\begin{smallmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{smallmatrix}\right)$ で, 法線はこのベクトルに垂直だから, $\left(\begin{smallmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{smallmatrix}\right)$ を通る法線の方程式は $-a\sin t(x - a\cos t) + b\cos t(y - b\sin t) = 0$ である. この法線と原点との距離の 2 乗は $\frac{(a^2-b^2)^2\cos^2 t\sin^2 t}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = \frac{(a^2-b^2)^2\sin^2 t(1-\sin^2 t)}{(a^2-b^2)\sin^2 t + b^2}$ だから, 関数 $f : [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ を $f(s) = \frac{(a^2-b^2)^2 s(1-s)}{(a^2-b^2)s + b^2}$ で定めれば, $f(\sin^2 t)$ は上記の法線と原点との距離の 2 乗である. $f'(s) = -\frac{(a^2-b^2)^2((a-b)s+b)((a+b)s-b)}{((a^2-b^2)s+b^2)^2}$ だから f は $\left[0, \frac{b}{a+b}\right]$ で単調に増加し, $\left[\frac{b}{a+b}, 1\right]$ で単調に減少する. 故に $s = \frac{b}{a+b}$ のとき f は最大値 $(a-b)^2$ をとる. ここで $\sin^2 t = \frac{b}{a+b}$ $(0 \leqq t < 2\pi)$ ならば $t = \sin^{-1}\sqrt{\frac{b}{a+b}}$, $\pi - \sin^{-1}\sqrt{\frac{b}{a+b}}$, $\pi + \sin^{-1}\sqrt{\frac{b}{a+b}}$, $2\pi - \sin^{-1}\sqrt{\frac{b}{a+b}}$ であり, $\cos\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right) = \sqrt{\frac{a}{a+b}}$, $\cos\left(\pi - \sin^{-1}\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right) = -\sqrt{\frac{a}{a+b}}$, $\cos\left(\pi + \sin^{-1}\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right) = -\sqrt{\frac{a}{a+b}}$, $\cos\left(2\pi - \sin^{-1}\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right) = \sqrt{\frac{a}{a+b}}$ だから, 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $\begin{pmatrix} a\sqrt{\frac{a}{a+b}} \\ b\sqrt{\frac{b}{a+b}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a\sqrt{\frac{a}{a+b}} \\ -b\sqrt{\frac{b}{a+b}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -a\sqrt{\frac{a}{a+b}} \\ -b\sqrt{\frac{b}{a+b}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a\sqrt{\frac{a}{a+b}} \\ -b\sqrt{\frac{b}{a+b}} \end{pmatrix}$ における法線が, 原点との距離が最大になる法線で, 距離の最大値は $a - b$ である.

微積分学 I 演習問題　第 9 回　原始関数と積分

1. 次の関数の原始関数を求めよ. ただし, (36), (37), (39) の n は自然数の定数, (41), (42) の α は実数の定数とする.

(1) $\dfrac{(x^2-1)^3}{x^4}$　(2) $\dfrac{x^3}{x^4+1}$　(3) $\dfrac{x^2}{(x^3+1)(x^3+4)}$　(4) $\dfrac{x^4}{x^{10}+1}$

(5) $\dfrac{1}{x(x^7+1)}$　(6) $\dfrac{1}{x^2-2x+3}$　(7) $\dfrac{x-1}{(x^2-2x+2)^3}$　(8) $\dfrac{2x^3(x^2-1)}{(x^2+1)^3}$

(9) $\dfrac{2x}{x^4+x^2+1}$　(10) $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$　(11) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}$　(12) $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

(13) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$　(14) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$　(15) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$　(16) $\dfrac{3}{x\sqrt{x^3-4}}$

(17) $\dfrac{4}{x\sqrt{x^4+1}}$　(18) $\dfrac{2}{\sqrt{3-4x-4x^2}}$　(19) $\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3}{\sqrt{x^2-1}}$　(20) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}$

(21) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$　(22) $\dfrac{\cos^3 x}{\sin x}$　(23) $\dfrac{1}{\cos^3 x}$　(24) $\sin^4 x$

(25) $\tan^4 x$　(26) $\dfrac{1}{\sin^4 x}$　(27) $\dfrac{\sin x\cos x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$　(28) $\dfrac{\sin^3 x}{2+\cos x}$

(29) $\dfrac{\cos x}{3-\cos^2 x}$　(30) $\dfrac{\sin^4 x}{\cos^6 x}$　(31) $\dfrac{1}{1+\sin x}$　(32) $\dfrac{x\sin x}{(x\cos x-\sin x)^2}$

(33) $\dfrac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$　(34) $\dfrac{x+\sin^{-1} 2x}{\sqrt{1-4x^2}}$　(35) $\tan^{-1} x$　(36) $x^{2n}\tan^{-1} x$

(37) $x^{2n+1}\tan^{-1} x$　(38) $x\sin^{-1} x$　(39) $x^{2n}\sin^{-1} x$　(40) $(\sin^{-1} x)^2$

(41) $\dfrac{(\log x)^\alpha}{x}$　(42) $x^\alpha \log x$　(43) $\dfrac{\log x}{x(1+\log x)}$　(44) $x^3(\log|x|)^2$

(45) $x^2\log(x^2+1)$　(46) $x\log(x^2-2x+2)$　(47) $(\log|x|)^3$　(48) $\dfrac{e^x}{e^{2x}-e^x+2}$

(49) $\dfrac{2}{(e^x+e^{-x})^2}$　(50) $\dfrac{1}{e^x+4e^{-x}+5}$　(51) $\left(\dfrac{1}{e^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)^2$　(52) $x^5e^{-x^2}$

(53) x^3e^{2x}　(54) $x^3\cos 2x$　(55) $e^{4x}\sin 3x$　(56) $e^{-x}\sin^2 x$

(57) $\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$　(58) $(\sin x)\log\sin x$　(59) $\tan x\log(1+\tan^2 x)$　(60) $(x+1)e^x\log x$

2. 次の極限値を積分を用いて表し, 値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3\sqrt{n^4+k^4}}{n^6}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2}$　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\tan^{-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)$　(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\tan\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$　(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}}$　(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n+k}}{n\sqrt{n}}$

(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^3}\sqrt{n^2+k^2}$　(10) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^2\sqrt{n^4+k^4}}$　(11) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$　(12) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$

(13) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$　(14) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\left(1+\tfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\tfrac{k}{n}\right)\cdots\left(1+\tfrac{n}{n}\right)}$

3. 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 2x\log(x^2+3x+2)dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\log 2}\frac{1}{1+e^{3x}}dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x^2\tan^{-1} x dx$　(4) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} x^3\tan^{-1} x dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2-\sin x+\sin^2 x}{\cos x}dx$　(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$　(7) $\displaystyle\int_0^1 x^{n-1}\tan^{-1}(x^n)dx$　(8) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 2x\sin^{-1}(x^2)dx$

(9) $\displaystyle\int_{-\log\sqrt{3}}^0 e^x\log(e^{2x}+1)dx$　(10) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx$　(11) $\displaystyle\int_0^{\log\sqrt{3}}\frac{1}{e^x+e^{3x}}dx$　(12) $\displaystyle\int_0^1 2x\tan^{-1} x dx$

(13) $\displaystyle\int_0^1 (2-6x^2)\sin^{-1} x dx$　(14) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+3}dx$　(15) $\displaystyle\int_1^2 x(2x-3)^5 dx$　(16) $\displaystyle\int_0^3\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx$

(17) $\displaystyle\int_3^4 (x-2)\log(x^3-2x^2)dx$　(18) $\displaystyle\int_0^2 x^5e^{x^2}dx$　(19) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sin^{-1} x}{x^2}dx$　(20) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x dx$

(21) $\displaystyle\int_0^\pi e^{-x}\sin\frac{x}{3}dx$　(22) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^5 x dx$　(23) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$　(24) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\cos 2x dx$

第 9 回の演習問題の解答

1. (1) $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)^3}{x^4}dx = \int \left(x^2-3+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)dx = \frac{1}{3}x^3-3x-\frac{3}{x}+\frac{1}{3x^3}$

(2) $t=x^4$ とおくと $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t+1}dt = \frac{1}{4}\log|t+1| = \frac{1}{4}\log(x^4+1)$

(3) $x^3=t$ とおくと $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^3+1)(x^3+4)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(t+1)(t+4)}dt = \frac{1}{9}\int \left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+4}\right)dt =$
$\displaystyle\frac{1}{9}\left(\log|t+1|-\log|t+4|\right) = \frac{1}{9}\left(\log|x^3+1|-\log|x^3+4|\right)$

(4) $x^5=t$ とおくと $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^{10}+1}dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{5}\tan^{-1}t = \frac{1}{5}\tan^{-1}x^5$

(5) $x^7=t$ とおくと $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^7+1)}dx = \int \frac{x^6}{x^7(x^7+1)}dx = \frac{1}{7}\int \frac{1}{t(t+1)}dt = \frac{1}{7}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt =$
$\displaystyle\frac{1}{7}\left(\log|t|-\log|t+1|\right) = \log|x| - \frac{1}{7}\log|x^7+1|$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x+3} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x-1}{\sqrt{2}}$

(7) $t=x^2-2x+2$ とおくと $(x-1)dx = \frac{1}{2}dt$ だから $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^3}dx = \int \frac{dt}{2t^3} = -\frac{1}{4t^2} = -\frac{1}{4(x^2-2x+2)^2}$

(8) $t=x^2+1$ とおくと, $2xdx=dt$ だから $\displaystyle\int \frac{2x^3(x^2-1)}{(x^2+1)^3}dx = \int \frac{(t-1)(t-2)}{t^3}dt = \int\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{t^2}+\frac{2}{t^3}\right)dt =$
$\displaystyle\log t + \frac{3}{t} - \frac{1}{t^2} = \log(x^2+1) + \frac{3}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}$

(9) $t=x^2+\frac{1}{2}$ とおくと, $2xdx=dt$ だから $\displaystyle\int \frac{2x}{x^4+x^2+1}dx = \int \frac{2x}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx = \int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$
$\displaystyle\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2t}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}$

(10) $t=x+\frac{1}{2}$ とおくと $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{t+\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt = \int\left(\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)dt =$
$\displaystyle\frac{1}{2}\log\left(t^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2t}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\log(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$

(11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}} = \int \frac{-\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}{3}dx = -\frac{2}{9}\sqrt{x^3}+\frac{2}{9}\sqrt{(x+3)^3}$

(12) $t=x^2+x+1$ とおくと $dt=(2x+1)dx$ より $\displaystyle\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}}dt = 2\sqrt{t} = 2\sqrt{x^2+x+1}$

(13) $t=\sqrt{1-x^2}$ とおくと, $x^2=1-t^2$, $\displaystyle\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -dt$ だから $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{dt}{t^2-1}$
$\displaystyle= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2}(\log|t-1|-\log|t+1|) = \frac{1}{2}\log\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \log\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

(14) $t=\sqrt{x^2+1}$ とおくと, $x^2=t^2-1$, $\displaystyle\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = dt$ だから $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{x}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{dt}{t^2-1} =$
$\displaystyle\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2}(\log|t-1|-\log|t+1|) = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \log\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$

(15) $t=\sqrt{x^2-1}$ とおくと, $x^2=t^2+1$, $\displaystyle\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = dt$ だから $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{dt}{t^2+1}dt =$
$\tan^{-1}t = \tan^{-1}\sqrt{x^2-1}$

(16) $t=\sqrt{x^3-4}$ とおくと $x^3=t^2+4$, $\displaystyle\frac{3x^2}{\sqrt{x^3-4}}dx = 2dt$ だから
$\displaystyle\int \frac{3}{x\sqrt{x^3-4}}dx = \int \frac{3x^2}{x^3\sqrt{x^3-4}}dx = \int \frac{2dt}{t^2+2^2}dt = \tan^{-1}\frac{t}{2} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^3-4}}{2}$

(17) $t=\sqrt{x^4+1}$ とおくと $x^4=t^2-1$, $\dfrac{4x^3}{\sqrt{x^4+1}}dx=2dt$ だから $\displaystyle\int\frac{4}{x\sqrt{x^4+1}}dx=\int\frac{4x^3}{x^4\sqrt{x^4+1}}dx=\int\frac{2dt}{t^2-1}=$ $\displaystyle\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=(\log|t-1|-\log|t+1|)=\log\frac{\sqrt{x^4+1}-1}{\sqrt{x^4+1}+1}=2\log\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^4}$

(18) $\displaystyle\int\frac{2}{\sqrt{3-4x-4x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}}=\sin^{-1}\left(x+\frac{1}{2}\right)$

(19) $t=x+\sqrt{x^2-1}$ とおけば $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}dx=dt$ だから $\displaystyle\int\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3}{\sqrt{x^2-1}}dx=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}=$ $\dfrac{1}{3}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3$

(20) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}dx=\int\frac{1-x^2}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$ $\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$

(21) $t=\sqrt{x+1}$ とおくと $x=t^2-1$, $\dfrac{dx}{dt}=2t$ より $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+1}}{x}dx=\int\frac{2t^2}{t^2-1}dx=$ $\displaystyle\int\left(2+\frac{2}{t^2-1}\right)dx=\int\left(2+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dx=2t+\log|t-1|-\log|t+1|=$ $2\sqrt{x+1}+\log|\sqrt{x+1}-1|-\log|\sqrt{x+1}+1|$

(22) $t=\sin x$ とおくと $\displaystyle\int\frac{\cos^3 x}{\sin x}dx=\int\frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{1-t^2}{t}dt=\int\left(\frac{1}{t}-t\right)dt=$ $\log|t|-\dfrac{t^2}{2}=\log|\sin x|-\dfrac{\sin^2 x}{2}$.

(23) $t=\sin x$ とおけば $\cos xdx=dt$ だから $\displaystyle\int\frac{1}{\cos^3 x}dx=\int\frac{\cos x}{\cos^4 x}dx=\int\frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)^2}dx=$ $\displaystyle\int\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\right)^2dt=\int\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{2}{1-t^2}+\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt=$ $\displaystyle\int\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-t}-\log(1-t)+\log(1+t)-\frac{1}{1+t}\right)=$ $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1-\sin x}+\log\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}-\dfrac{1}{1+\sin x}\right)=\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}+\dfrac{1}{4}\log\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

(24) $\sin^4 x=\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=\dfrac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\dfrac{1+\cos 4x}{2}\right)=\dfrac{3}{8}-\dfrac{\cos 2x}{2}+$ $\dfrac{\cos 4x}{8}$ だから $\displaystyle\int\sin^4 xdx=\int\left(\frac{3}{8}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}\right)dx=\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}$

(25) $t=\tan x$ とおけば $x=\tan^{-1}t$ より $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ だから $\displaystyle\int\tan^4 xdx=\int\frac{t^4}{1+t^2}dt=\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt$ $=\dfrac{t^3}{3}-t+\tan^{-1}t=\dfrac{\tan^3 x}{3}-\tan x+x$

(26) $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ の両辺を $\sin^2 x$ で割れば $\dfrac{1}{\tan^2 x}+1=\dfrac{1}{\sin^2 x}$ だから $\dfrac{1}{\sin^4 x}=\left(\dfrac{1}{\tan^2 x}+1\right)^2$ である. $t=\tan x$ とおけば $x=\tan^{-1}t$ より $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ だから $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^4 x}dx=$ $\displaystyle\int\left(\frac{1}{\tan^2 x}+1\right)^2dx=\int\frac{1}{1+t^2}\left(\frac{1}{t^2}+1\right)^2dt=\int\left(\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^2}\right)dt=-\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{t}=-\frac{1}{3\tan^3 x}-\frac{1}{\tan x}$

(27) $a=\pm b$ ならば $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}dx=\int\frac{1}{2}\sin 2xdx=-\frac{1}{4}\cos 2x$. $a\neq\pm b$ ならば $t=\sin x$ とおくと $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}dx=\int\frac{t}{a^2+(b^2-a^2)t^2}dt=\frac{\log|a^2+(b^2-a^2)t^2|}{2(b^2-a^2)}=\frac{\log|a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x|}{2(b^2-a^2)}$

(28) $t=\cos x$ とおけば $\sin xdx=-dt$ だから $\displaystyle\int\frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx=\int\frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{2+\cos x}dx=\int\frac{t^2-1}{2+t}dt=$ $\displaystyle\int\left(t-2+\frac{3}{2+t}\right)dt=\frac{t^2}{2}-2t+3\log(2+t)=\frac{\cos^2 x}{2}-2\cos x+3\log(2+\cos x)$

(29) $t=\sin x$ とおけば $dt=\cos xdx$ だから $\displaystyle\int\frac{\cos x}{3-\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos x}{2+\sin^2 x}dx=\int\frac{dt}{2+t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}}=$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\dfrac{\sin x}{\sqrt{2}}$

(30) $t=\tan x$ とおけば $\dfrac{dx}{\cos^2 x}=dt$ だから $\displaystyle\int\frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx=\int\frac{\tan^4 x}{\cos^2 x}dx=\int t^4dt=\frac{t^5}{5}=\frac{\tan^5 x}{5}$

(31) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin x}dx=\int\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=\tan x-\frac{1}{\cos x}$

(32) $t=x\cos x-\sin x$ とおくと $dt=-x\sin xdx$ より $\displaystyle\int\frac{x\sin x}{(x\cos x-\sin x)^2}dx=\int\frac{-1}{t^2}dt=\frac{1}{t}=\frac{1}{x\cos x-\sin x}$

(33) $t=\sin^{-1}x$ とおくと $dt=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ より $\displaystyle\int\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int tdt=\frac{t^2}{2}=\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}x\right)^2$

(34) $\displaystyle\int\frac{x+\sin^{-1}2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx+\int\frac{\sin^{-1}2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx=\int\left(-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\right)'dx+$
$\displaystyle\int\frac{1}{2}\sin^{-1}2x(\sin^{-1}2x)'dx=-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+\frac{1}{4}(\sin^{-1}2x)^2$

(35) $\displaystyle\int\tan^{-1}xdx=\int(x)'\tan^{-1}xdx=x\tan^{-1}x-\int\frac{x}{x^2+1}dx=x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(x^2+1)$

(36) $\displaystyle\int x^{2n}\tan^{-1}xdx=\int\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'\tan^{-1}xdx=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\tan^{-1}x-\int\frac{x^{2n+1}}{2n+1}(\tan^{-1}x)'dx=$
$\displaystyle\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\tan^{-1}x-\int\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+x^2)}dx$ ここで $t=x^2$ とおけば $xdx=\dfrac{1}{2}dt$ であり, 初項 1, 公比 $-t$ の等比級数の和の公式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k=\frac{1-(-1)^nt^n}{1+t}$ より $\displaystyle\frac{t^n}{1+t}=\frac{(-1)^n}{1+t}-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}t^k$ だから (上式) $\displaystyle=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\tan^{-1}x-$
$\displaystyle\int\frac{t^n}{2(2n+1)(1+t)}dt=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\tan^{-1}x-\int\frac{(-1)^n}{2(2n+1)(1+t)}dt+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\int\frac{t^k}{2(2n+1)}dt=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\tan^{-1}x-$
$\displaystyle\frac{(-1)^n\log(1+t)}{2(2n+1)}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}t^{k+1}}{2(k+1)(2n+1)}=\frac{1}{4n+2}\left(2x^{2n+1}\tan^{-1}x-(-1)^n\log(1+x^2)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}x^{2k+2}}{k+1}\right)$

(37) $\displaystyle\int x^{2n-1}\tan^{-1}xdx=\int\left(\frac{x^{2n}}{2n}\right)'\tan^{-1}xdx=\frac{x^{2n}}{2n}\tan^{-1}x-\int\frac{x^{2n}}{2n}(\tan^{-1}x)'dx=$
$\displaystyle\frac{x^{2n}}{2n}\tan^{-1}x-\int\frac{x^{2n}}{2n(1+x^2)}dx$ ここで, 初項 1, 公比 $-x^2$ の等比級数の和の公式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-x^2)^k=\frac{1-(-1)^nx^{2n}}{1+x^2}$ より $\displaystyle\frac{x^{2n}}{1+x^2}=\frac{(-1)^n}{1+x^2}-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}x^{2k}$ だから (上式) $\displaystyle=\frac{x^{2n}}{2n}\tan^{-1}x-\int\frac{(-1)^n}{2n(1+x^2)}dx+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\int\frac{x^{2k}}{2n}dx=$
$\displaystyle\frac{1}{2n}\left((x^{2n}-(-1)^n)\tan^{-1}x+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right)$

(38) $x=\sin t$ $(-\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2})$ とおくと $dx=\cos tdt$, $\sin^{-1}x=t$, $\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-x^2}$ より $\displaystyle\int x\sin^{-1}xdx=\int t\sin t\cos tdt=\int\frac{t}{2}\sin 2tdt=\int\frac{t}{2}\left(-\frac{\cos 2t}{2}\right)'dt=-\frac{t\cos 2t}{4}+\int\left(\frac{t}{2}\right)'\frac{\cos 2t}{2}dt=$
$\displaystyle-\frac{t\cos 2t}{4}+\int\frac{\cos 2t}{4}dt=-\frac{t\cos 2t}{4}+\frac{\sin 2t}{8}=-\frac{t}{4}(1-2\sin^2 t)+\frac{\sin t\cos t}{4}=\frac{1}{4}\sin^{-1}x(2x^2-1)+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$

(39) $\displaystyle\int x^{2n}\sin^{-1}xdx=\int\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'\sin^{-1}xdx=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\sin^{-1}x-\int\frac{x^{2n+1}}{2n+1}(\sin^{-1}x)'dx=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\sin^{-1}x-$
$\displaystyle\int\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\sqrt{1-x^2}}dx$ $t=\sqrt{1-x^2}$ とおけば $x^2=1-t^2$, $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-dt$ だから (上式) $\displaystyle=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\sin^{-1}x+$
$\displaystyle\int\frac{(1-t^2)^n}{2n+1}dt=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\sin^{-1}x+\sum_{k=0}^{n}\int\frac{\binom{n}{k}(-t^2)^k}{2n+1}dt=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\sin^{-1}x+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\binom{n}{k}t^{2k+1}}{(2k+1)(2n+1)}=$
$\displaystyle\frac{1}{2n+1}\left(x^{2n+1}\sin^{-1}x+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\binom{n}{k}(1-x^2)^{k+\frac{1}{2}}}{2k+1}\right)$

(40) $\displaystyle\int(\sin^{-1}x)^2dx=\int(x)'(\sin^{-1}x)^2dx=x(\sin^{-1}x)^2-\int x((\sin^{-1}x)^2)'dx=$
$\displaystyle x(\sin^{-1}x)^2-\int\frac{2x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x(\sin^{-1}x)^2+\int\left(2\sqrt{1-x^2}\right)'\sin^{-1}xdx=$

$x(\sin^{-1}x)^2+2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x-\displaystyle\int\sqrt{1-x^2}(\sin^{-1}x)'dx=$
$x(\sin^{-1}x)^2+2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x-\displaystyle\int 2dx=x(\sin^{-1}x)^2+2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x-2x$

(41) $t=\log x$ とおくと $dt=\dfrac{1}{x}dx$ より $\alpha\neq-1$ ならば $\displaystyle\int\frac{(\log x)^\alpha}{x}dx=\int t^\alpha dt=\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}=$
$\dfrac{(\log x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ であり, $\alpha=-1$ ならば $\displaystyle\int\frac{(\log x)^\alpha}{x}dx=\int t^\alpha dt=\log|t|=\log|\log x|.$

(42) $\alpha\neq-1$ の場合, $\displaystyle\int x^\alpha\log xdx=\int\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'\log xdx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\log x-\int\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\log x)'dx=$
$\displaystyle\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\log x-\int\frac{x^\alpha}{\alpha+1}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\log x-\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}.$
$\alpha=-1$ の場合, $y=\log x$ とおくと $\dfrac{1}{x}dx=dy$ より $\displaystyle\int x^\alpha\log xdx=\int ydy=\frac{y^2}{2}=\frac{1}{2}(\log x)^2.$

(43) $t=\log x$ とおけば $\dfrac{1}{x}dx=dt$ だから $\displaystyle\int\frac{\log x}{x(1+\log x)}dx=\int\frac{t}{1+t}dt=\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=$
$t-\log|1+t|=\log x-\log|1+\log x|$

(44) $\displaystyle\int x^3(\log|x|)^2dx=\int\left(\frac{x^4}{4}\right)'(\log|x|)^2dx=\frac{x^4}{4}(\log|x|)^2-\int\frac{x^4}{4}((\log|x|)^2)'dx=$
$\displaystyle\frac{x^4}{4}(\log|x|)^2-\int\frac{x^3}{2}\log|x|dx=\frac{x^4}{4}(\log|x|)^2-\int\left(\frac{x^4}{8}\right)'\log|x|dx=\frac{x^4}{4}(\log|x|)^2-\frac{x^4}{8}\log|x|+\int\frac{x^4}{8}(\log|x|)'dx=$
$\displaystyle\frac{x^4}{4}(\log|x|)^2-\frac{x^4}{8}\log|x|+\int\frac{x^3}{8}dx=\frac{x^4}{4}(\log|x|)^2-\frac{x^4}{8}\log|x|+\frac{x^4}{32}$

(45) $\displaystyle\int x^2\log(x^2+1)dx=\int\left(\frac{x^3}{3}\right)'\log(x^2+1)dx=\frac{x^3}{3}\log(x^2+1)-\int\frac{x^3}{3}(\log(x^2+1))'dx=\frac{x^3}{3}\log(x^2+1)-$
$\displaystyle\int\frac{2x^4}{3(x^2+1)}dx=\frac{x^3}{3}\log(x^2+1)-\frac{2}{3}\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{x^3}{3}\log(x^2+1)-\frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}-x+\tan^{-1}x\right)$

(46) $\displaystyle\int x\log(x^2-2x+2)dx=\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\log(x^2-2x+2)dx=$
$\displaystyle\frac{x^2}{2}\log(x^2-2x+2)-\int\frac{x^2}{2}(\log(x^2-2x+2))'dx=\frac{x^2}{2}\log(x^2-2x+2)-\int\frac{x^3-x^2}{x^2-2x+2}dx=$
$\displaystyle\frac{x^2}{2}\log(x^2-2x+2)-\int\left(x+1-\frac{2}{(x-1)^2+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}\log(x^2-2x+2)-\frac{x^2}{2}-x+2\tan^{-1}(x-1)$

(47) $\displaystyle\int(\log|x|)^3dx=\int(x)'(\log|x|)^3dx=x(\log|x|)^3-\int x((\log|x|)^3)'dx=x(\log|x|)^3-\int 3(\log|x|)^2dx=$
$\displaystyle x(\log|x|)^3-\int 3(x)'(\log|x|)^2dx=x(\log|x|)^3-3x(\log|x|)^2+\int 3x((\log|x|)^2)'dx=x(\log|x|)^3-3x(\log|x|)^2+$
$\displaystyle\int 6\log|x|dx=x(\log|x|)^3-3x(\log|x|)^2+\int 6(x)'\log|x|dx=x(\log|x|)^3-3x(\log|x|)^2+6x\log|x|-$
$\displaystyle\int 6x(\log|x|)'dx=x(\log|x|)^3-3x(\log|x|)^2+6x\log|x|-\int 6dx=x(\log|x|)^3-3x(\log|x|)^2+6x\log|x|-6x$

(48) $t=e^x$ とおけば, $e^xdx=dt$ だから $\displaystyle\int\frac{e^x}{e^{2x}-e^x+2}dx=\int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\frac{2t-1}{\sqrt{7}}=$
$\displaystyle\frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\frac{2e^x-1}{\sqrt{7}}$

(49) $t=e^x$ とおけば, $e^xdx=dt$ だから $\displaystyle\int\frac{2}{(e^x+e^{-x})^2}dx=\int\frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}dx=\int\frac{2t}{(t^2+1)^2}dt=-\frac{1}{t^2+1}=$
$\displaystyle-\frac{1}{e^{2x}+1}$

(50) $t=e^x$ とおくと $dt=e^xdx$ より $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x+4e^{-x}+5}=\int\frac{e^x}{e^{2x}+5e^x+4}dx=\int\frac{dt}{t^2+5t+4}=$
$\displaystyle\int\frac{dt}{(t+1)(t+4)}=\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+4}\right)dt=\frac{1}{3}(\log(t+1)-\log(t+4))=\frac{1}{3}\log\frac{e^x+1}{e^x+4}$

(51) $t=e^x$ とおけば, $dx=\dfrac{1}{t}dt$ だから $\displaystyle\int\left(\frac{1}{e^x+1}-\frac{1}{2}\right)^2dx=\int\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{2}\right)^2dt=\int\frac{(1-t)^2}{4t(1+t)^2}dt=$
$\displaystyle\int\frac{(1+t)^2-4t}{4t(1+t)^2}dt=\int\left(\frac{1}{4t}-\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt=\frac{1}{4}\log t+\frac{1}{1+t}=\frac{x}{4}+\frac{1}{1+e^x}$

(52) $t=x^2$ とおけば $xdx=\dfrac{1}{2}dt$ だから $\displaystyle\int x^5e^{-x^2}dx=\int\frac{1}{2}t^2e^{-t}dt=\int\frac{1}{2}t^2(-e^{-t})'dt=-\frac{1}{2}t^2e^{-t}+\int te^{-t}dt=$
$\displaystyle-\frac{1}{2}t^2e^{-t}+\int t(-e^{-t})'dt=-\frac{1}{2}t^2e^{-t}-te^{-t}+\int e^{-t}dt=-\frac{1}{2}t^2e^{-t}-te^{-t}-e^{-t}=-\left(\frac{x^4}{2}+x^2+1\right)e^{-x^2}$

(53) $\displaystyle\int x^3e^{2x}dx=\int x^3\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx=\frac{x^3}{2}e^{2x}-\int\frac{3x^2}{2}e^{2x}dx=\frac{x^3}{2}e^{2x}-\int\frac{3x^2}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx=$
$\displaystyle\frac{x^3}{2}e^{2x}-\frac{3x^2}{4}e^{2x}+\int\frac{3x}{2}e^{2x}dx=\frac{x^3}{2}e^{2x}-\frac{3x^2}{4}e^{2x}+\int\frac{3x}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx=\frac{x^3}{2}e^{2x}-\frac{3x^2}{4}e^{2x}+\frac{3x}{4}e^{2x}-\int\frac{3}{4}e^{2x}dx=$
$\displaystyle\frac{x^3}{2}e^{2x}-\frac{3x^2}{4}e^{2x}+\frac{3x}{4}e^{2x}-\frac{3}{8}e^{2x}=\left(\frac{x^3}{2}-\frac{3x^2}{4}+\frac{3x}{4}-\frac{3}{8}\right)e^{2x}$

(54) $\displaystyle\int x^3\cos 2xdx=\int x^3\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)'dx=\frac{x^3\sin 2x}{2}-\int\frac{3x^2\sin 2x}{2}dx=\frac{x^3\sin 2x}{2}+\int\frac{3x^2(\cos 2x)'}{4}dx=$
$\displaystyle\frac{x^3\sin 2x}{2}+\frac{3x^2\cos 2x}{4}-\int\frac{3x\cos 2x}{2}dx=\frac{x^3\sin 2x}{2}+\frac{3x^2\cos 2x}{4}-\int\frac{3x(\sin 2x)'}{4}dx=\frac{x^3\sin 2x}{2}+\frac{3x^2\cos 2x}{4}-$
$\displaystyle\frac{3x\sin 2x}{4}+\int\frac{3\sin 2x}{4}dx=\frac{x^3\sin 2x}{2}+\frac{3x^2\cos 2x}{4}-\frac{3x\sin 2x}{4}-\frac{3\cos 2x}{8}=\left(\frac{x^3}{2}-\frac{3x}{4}\right)\sin 2x+\left(\frac{3x^2}{4}-\frac{3}{8}\right)\cos 2x$

(55) $\displaystyle\int e^{4x}\sin 3xdx=\int\left(\frac{e^{4x}}{4}\right)'\sin 3xdx=\frac{e^{4x}}{4}\sin 3x-\int\frac{e^{4x}}{4}(\sin 3x)'dx=\frac{e^{4x}}{4}\sin 3x-\int\frac{3e^{4x}}{4}\cos 3xdx=$
$\displaystyle\frac{e^{4x}}{4}\sin 3x-\int\left(\frac{3e^{4x}}{16}\right)'\cos 3xdx=\frac{e^{4x}}{4}\sin 3x-\frac{3e^{4x}}{16}\cos 3x+\int\frac{3e^{4x}}{16}(\cos 3x)'dx=\frac{e^{4x}}{4}\sin 3x-\frac{3e^{4x}}{16}\cos 3x-$
$\displaystyle\frac{9}{16}\int e^{4x}\sin 3xdx$ だから $\displaystyle\frac{25}{16}\int e^{4x}\sin 3xdx=\frac{e^{4x}}{4}\sin 3x-\frac{3e^{4x}}{16}\cos 3x$ となるため
$\displaystyle\int e^{4x}\sin 3xdx=\frac{e^{4x}}{25}(4\sin 3x-3\cos 3x)$

(56) $\displaystyle\int e^{-x}\sin^2 xdx=\int\frac{1}{2}e^{-x}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\int e^{-x}dx-\frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2xdx$ であり, $\displaystyle\int e^{-x}dx=-e^{-x}$,
$\displaystyle\int e^{-x}\cos 2xdx=\int(-e^{-x})'\cos 2xdx=-e^{-x}\cos 2x+\int e^{-x}(\cos 2x)'dx=-e^{-x}\cos 2x-\int 2e^{-x}\sin 2xdx=$
$\displaystyle-e^{-x}\cos 2x-\int 2(-e^{-x})'\sin 2xdx=-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x-\int 2e^{-x}(\sin 2x)'dx=$
$\displaystyle-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x-4\int e^{-x}\cos 2xdx$ だから $\displaystyle 5\int e^{-x}\sin 2xdx=-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x$ となるため
$\displaystyle\int e^{-x}\sin 2xdx=\frac{e^{-x}}{5}(-\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x)$ である. 以上から $\displaystyle\int e^{-x}\sin^2 xdx=\frac{e^{-x}}{10}(\cos 2x-2\sin 2x-5)$

(57) $\displaystyle\int\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx=\int(x)'\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx=x\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\int\frac{x+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}dx=$
$\displaystyle x\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx=x\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\sqrt{x^2-1}$

(58) $\displaystyle\int(\sin x)\log\sin xdx=\int(-\cos x)'\log\sin xdx=-\cos x\log\sin x+\int\frac{\cos^2 x}{\sin x}dx$ であり, $t=\cos x$ とおくと
$\displaystyle\int\frac{\cos^2 x}{\sin x}dx=\int\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}\sin xdx=\int\frac{t^2}{t^2-1}dt=\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=\int\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right)dt=$
$\displaystyle t+\frac{1}{2}\log|t-1|-\frac{1}{2}\log|t+1|=\cos x+\frac{1}{2}\log(1-\cos x)-\frac{1}{2}\log(1+\cos x)$ だから
$\displaystyle\int(\sin x)\log\sin xdx=-\cos x\log\sin x+\cos x+\frac{1}{2}\log(1-\cos x)-\frac{1}{2}\log(1+\cos x)$

(59) $t=\log(1+\tan^2 x)$ おけば ($t=\tan x$ とおき, さらに $s=\log(1+t^2)$ とおいて置換積分してもよい.)
$\displaystyle dt=\frac{2\tan x}{\cos^2 x(1+\tan^2 x)}dx=2\tan xdx$ だから $\displaystyle\int\tan x\log(1+\tan^2 x)dx=\int\frac{t}{2}dt=\frac{t^2}{4}=\frac{1}{4}(\log(1+\tan^2 x))^2=$
$\displaystyle\frac{1}{4}\left(\log\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)\right)^2=(\log|\cos x|)^2$

(60) $\displaystyle\int (x+1)e^x \log x dx = \int (xe^x)' \log x dx = xe^x \log x - \int xe^x (\log x)' dx =$
$\displaystyle xe^x \log x - \int e^x dx = xe^x \log x - e^x$

2. (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \log(1+x)dx$ または $\displaystyle\int_1^2 \log x dx$ である. $\displaystyle\int_0^1 \log(1+x)dx =$
$\displaystyle\int_0^1 (1+x)'\log(1+x)dx = [(1+x)\log(1+x)]_0^1 - \int_0^1 (1+x)(\log(1+x))'dx = 2\log 2 - \int_0^1 dx = 2\log 2 - 1$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3\sqrt{n^4+k^4}}{n^6} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^4}\,\frac{1}{n} = \int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}\,dx = \left[\frac{1}{6}(1+x^4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{6}.$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\,\frac{1}{n} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$ $x=\sin\theta$ とおくと, $dx = \cos\theta d\theta$ であり, x が 0 から 1 まで動けば θ は 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くため, $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta =$
$\displaystyle\left[\frac{2\theta+\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \left[\tan^{-1}x\right]_0^1 = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}.$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\tan^{-1}\left(1+\frac{k}{n}\right) = \int_1^2 \tan^{-1}x dx = \left[x\tan^{-1}x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{1+x^2}dx =$
$\displaystyle 2\tan^{-1}2 - \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_1^2 = 2\tan^{-1}2 - \frac{\pi}{4} - \frac{\log 5}{2} + \frac{\log 2}{2}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\tan\left(\frac{k\pi}{4n}\right) = \int_0^1 \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx = \left[-\frac{4}{\pi}\log\left(\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)\right]_0^1 = \frac{2\log 2}{\pi}$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1$

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n+k}}{n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}\,\frac{1}{n} = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^3}\sqrt{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\,\frac{1}{n} = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

(10) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^2\sqrt{n^4+k^4}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^3}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^4}}\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\,dx = \left[\frac{1}{2}\sqrt{1+x^4}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$

(11) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \left[\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^1 = \sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$

(12) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\log 2}{2}$

(13) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx.$ $x=\tan\theta$ とおくと, $dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ であり, x が 0 から 1 まで動けば θ は 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ まで動くため, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\theta}d\theta =$
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta.$ $t=\sin\theta$ とおくと $dt = \cos\theta d\theta$ であり, θ が 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ まで動けば t は 0 から $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ まで動くため, (上式) $\displaystyle= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-t^2}dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt = \frac{1}{2}[\log(1+t)-\log(1-t)]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} =$

$\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\log\left(\sqrt{2}+1\right).$

(14) $a_n=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$ とおくと log の連続性から $\log\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)=\lim_{n\to\infty}\log a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\log(1+x)dx=\int_0^1(1+x)'\log(1+x)dx=$ $[(1+x)\log(1+x)]_0^1-\int_0^1(1+x)(\log(1+x))'dx=2\log 2-\int_0^1 1dx=2\log 2-1.$

故に $\lim_{n\to\infty}a_n=e^{2\log 2-1}=e^{\log 4}e^{-1}=\frac{4}{e}.$

3. (1) $\int_0^1 2x\log(x^2+3x+2)dx=\int_0^1(x^2)'(\log(x+1)+\log(x+2))dx=[x^2(\log(x+1)+\log(x+2)]_0^1-\int_0^1 x^2((\log(x+1)+\log(x+2))'dx=\log 6-\int_0^1\left(\frac{x^2}{x+1}+\frac{x^2}{x+2}\right)dx=$ $\log 6-\int_0^1\left(2x-3+\frac{1}{x+1}+\frac{4}{x+2}\right)dx=\log 6-[x^2-3x+\log(x+1)+4\log(x+2)]_0^1=2-3\log 3+4\log 2$

(2) $y=e^{3x}$ とおくと $x=\frac{\log y}{3}$ だから $dx=\frac{1}{3y}dy$ であり, x が 0 から $\log 2$ まで動けば y は 1 から 8 まで動くため, $\int_0^{\log 2}\frac{1}{1+e^{3x}}dx=\int_1^8\frac{1}{3y(1+y)}dy=\int_1^8\frac{1}{3}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{1+y}\right)dy=\left[\frac{1}{3}(\log y-\log(1+y))\right]_1^8=\frac{1}{3}(4\log 2-2\log 3)$

(3) $\int_0^{\sqrt{3}}x^2\tan^{-1}xdx=\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{x^3}{3}\right)'\tan^{-1}xdx=\left[\frac{x^3}{3}\tan^{-1}x\right]_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^3}{3}(\tan^{-1}x)'dx=$ $\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^3}{3(1+x^2)}dx=\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{3}\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)dx=\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\left[\frac{1}{6}(x^2-\log(1+x^2))\right]_0^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}+\frac{\log 2}{3}$

(4) $\int_1^{\sqrt{3}}x^3\tan^{-1}xdx=\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{x^4}{4}\right)'\tan^{-1}xdx=\left[\frac{x^4}{4}\tan^{-1}x\right]_1^{\sqrt{3}}-\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x^4}{4}(\tan^{-1}x)'dx=$ $\frac{11\pi}{16}-\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x^4}{4(1+x^2)}dx=\frac{11\pi}{16}-\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{4}\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{11\pi}{16}-\left[\frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}-x+\tan^{-1}x\right)\right]_1^{\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{6}$

(5) $y=\sin x$ とおくと $\cos xdx=dy$ であり, x が 0 から $\frac{\pi}{6}$ まで動けば y は 0 から $\frac{1}{2}$ まで動くため, $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2-\sin x+\sin^2 x}{\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{(2-\sin x+\sin^2 x)\cos x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2-y+y^2}{1-y^2}dy=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-1+\frac{3-y}{1-y^2}\right)dy=$ $\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{1+y}+\frac{3}{1-y}-\frac{2y}{1-y^2}\right)\right)dy=\left[-x+\frac{1}{2}(3\log(1+y)-3\log(1-y)+\log(1-y^2))\right]_0^{\frac{1}{2}}=$ $2\log 3-\log 2-\frac{1}{2}$

(6) $t=\cos x$ とおくと, $-dt=\sin xdx$ であり, x が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで動けば t は 1 から 0 まで動くため, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx=\int_1^0\frac{-1}{1+t}dx=[-\log|1+t|]_1^0=\log 2.$

(7) $y=x^n$ とおくと, $x^{n-1}dx=\frac{1}{n}dy$ であり, x が 0 から 1 まで動けば y も 0 から 1 まで動くため, $\int_0^1 x^{n-1}\tan^{-1}(x^n)dx=\frac{1}{n}\int_0^1\tan^{-1}ydy=\frac{1}{n}\int_0^1(y)'\tan^{-1}ydy=\frac{1}{n}\left[y\tan^{-1}y\right]_0^1-\frac{1}{n}\int_0^1 y\left(\tan^{-1}y\right)'dy=$ $\frac{\pi}{4n}-\frac{1}{n}\int_0^1\frac{y}{1+y^2}dy=\frac{\pi}{4n}-\frac{1}{2n}[\log(1+y^2)]_0^1=\frac{\pi}{4n}-\frac{\log 2}{2n}$ (別解) 部分積分を行ってから $y=x^{2n}$ とおいて置換積分を行う. $\int_0^1 x^{n-1}\tan^{-1}(x^n)dx=\int_0^1\left(\frac{x^n}{n}\right)'\tan^{-1}(x^n)dx=$ $\left[\frac{x^n}{n}\tan^{-1}(x^n)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^n}{n}\left(\tan^{-1}(x^n)\right)'dx=\frac{\pi}{4n}-\int_0^1\frac{x^{2n-1}}{x^{2n}+1}dx=\frac{\pi}{4n}-\left[\frac{1}{2n}\log\left(1+x^{2n}\right)\right]_0^1=\frac{\pi}{4n}-\frac{\log 2}{2n}$

(8) $\int_0^{\frac{1}{2}}2x\sin^{-1}(x^2)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(x^2)'\sin^{-1}(x^2)dx=\left[x^2\sin^{-1}(x^2)\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}x^2(\sin^{-1}(x^2))'dx=$

$\frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{1}{4}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx=\frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{1}{4}-\left[-\sqrt{1-x^4}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{15}}{4}-1$

(9) $t=e^x$ とおくと $dt=e^x dx$ であり, x が $-\log\sqrt{3}$ から 0 まで動けば t は $\frac{1}{\sqrt{3}}$ から 1 まで動くため,
$\int_{-\log\sqrt{3}}^0 e^x\log(e^{2x}+1)dx=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1\log(t^2+1)dx=\left[t\log(t^2+1)\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1-\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1\frac{2t^2}{t^2+1}dt=$
$\log 2-\frac{1}{\sqrt{3}}\log\frac{4}{3}-2\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\log 2-\frac{1}{\sqrt{3}}\log\frac{4}{3}-2\left[t-\tan^{-1}t\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1=$
$\log 2-\frac{1}{\sqrt{3}}\log\frac{4}{3}-2+\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{3}=\log 2-\frac{1}{\sqrt{3}}\log\frac{4}{3}-2+\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}.$

(10) $x=\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと, $dx=\sqrt{2}\cos\theta d\theta$ であり, x が 0 から 1 まで動けば θ は 0 から $\frac{\pi}{4}$ まで動くため,
$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{\sqrt{2(1-\sin^2\theta)}}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}.$

(11) $t=e^x$ とおくと, $x=\log t$, $dx=\frac{1}{t}dt$ であり, x が 0 から $\log\sqrt{3}$ まで動けば t は 1 から $\sqrt{3}$ まで動くため,
$\int_0^{\log\sqrt{3}}\frac{dx}{e^x+e^{3x}}=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dt}{t^2(t^2+1)}=\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\left[-\frac{1}{t}-\tan^{-1}t\right]_1^{\sqrt{3}}=1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{12}$

(12) $\int_0^1 2x\tan^{-1}xdx=\int_0^1(x^2)'\tan^{-1}xdx=\left[x^2\tan^{-1}x\right]_0^1-\int_0^1 x^2(\tan^{-1}x)'dx=\frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=$
$\frac{\pi}{4}-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{\pi}{4}-\int_0^1 dx+\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}-1$ ((1) より)

(13) $\int_0^1(2-6x^2)\sin^{-1}xdx=\left[(2x-2x^3)\sin^{-1}x\right]_0^1-\int_0^1\frac{2x-2x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}dx$ $t=x^2$ とおくと
$dt=2xdx$ であり, x が 0 から 1 まで動けば t も 0 から 1 まで動くため, (上式)$=-\int_0^1\sqrt{1-t}dx=\left[\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{2}{3}}\right]_0^1=-\frac{2}{3}.$

(14) $x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと, $dx=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$ であり, x が 0 から 1 まで動けば θ は 0 から $\frac{\pi}{6}$ まで動くため,
$\int_0^1\frac{1}{x^2+3}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}}{3(1+\tan^2\theta)\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}}{3}d\theta=\frac{\sqrt{3}\pi}{18}.$

(15) $\int_1^2 x(2x-3)^5dx=\int_1^2 x\left(\frac{1}{12}(2x-3)^6\right)'dx=\left[\frac{x}{12}(2x-3)^6\right]_1^2-\int_1^2\frac{x'}{12}(2x-3)^6dx=$
$\frac{1}{12}-\int_1^2\frac{1}{12}(2x-3)^6dx=\frac{1}{12}-\left[\frac{1}{168}(2x-3)^7\right]_1^2dx=\frac{1}{14}$

(16) $t=\sqrt{1+x}$ とおくと, $x=t^2-1$, $\frac{dx}{\sqrt{1+x}}=2dt$ であり, x が 0 から 3 まで動けば t は 1 から 2 まで動くため, $\int_0^3\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx=\int_1^2 2(t^2-1)^2dt=\int_1^2(2t^4-4t^2+2)dt=\left[\frac{2t^5}{5}-\frac{4t^3}{3}+2t\right]_1^2=\frac{76}{15}$

(17) $t=x-2$ とおくと, $dx=dt$ であり, x が 3 から 4 まで動けば t は 1 から 2 まで動くため,
$\int_3^4(x-2)\log(x^3-2x^2)dx=\int_1^2 t\log(t(t+2)^2)dt=\int_1^2\left(\frac{t^2}{2}\right)'(\log t+2\log(t+2))dt=\left[\frac{t^2}{2}(\log t+2\log(t+2))\right]_1^2$
$-\int_1^2\frac{t^2}{2}(\log t+2\log(t+2))'dt=10\log 2-\log 3-\int_1^2\left(\frac{t}{2}+\frac{t^2}{t+2}\right)dt=$
$10\log 2-\log 3-\int_1^2\left(\frac{3t}{2}-2+\frac{4}{t+2}\right)dt=10\log 2-\log 3-\left[\frac{3t^2}{4}-2t+4\log(t+2)\right]_1^2=2\log 2+3\log 3-\frac{1}{4}$

(18) $t=x^2$ とおくと, $xdx=\frac{1}{2}dt$ であり, x が 0 から 2 まで動けば t は 0 から 4 まで動くため, $\int_0^2 x^5e^{x^2}dx=$
$\int_0^4\frac{t^2}{2}e^tdt=\int_0^4\frac{t^2}{2}(e^t)'dt=\left[\frac{t^2}{2}e^t\right]_0^4-\int_0^4\left(\frac{t^2}{2}\right)'e^tdt=8e^4-\int_0^4 te^tdt=8e^4-\int_0^4 t(e^t)'dt=$
$8e^4-[te^t]_0^4+\int_0^4(t)'e^tdt=4e^4+\int_0^4 e^tdt=4e^4+[e^t]_0^4=5e^4-1$

(19) $x=\sin\theta$ とおくと，$dx=\cos\theta d\theta$ であり，x が $\dfrac{1}{2}$ から 1 まで動けば θ は $\dfrac{\pi}{6}$ から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くため，
$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\sin^{-1}x}{x^2}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\theta\left(-\frac{1}{\sin\theta}\right)'d\theta=\left[-\frac{\theta}{\sin\theta}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\theta)'}{\sin\theta}d\theta=-\frac{\pi}{6}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\theta}d\theta=$
$\displaystyle-\frac{\pi}{6}+\left[\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=-\frac{\pi}{6}+\log\left(2+\sqrt{3}\right)$ (教科書の例題 3.12 の結果を用いた)

(20) $t=\tan x$ とおくと，$dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ であり，x が $\dfrac{\pi}{6}$ から $\dfrac{\pi}{4}$ まで動けば t は $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ から 1 まで動くため，
$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 xdx=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{t^2}{1+t^2}dt=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=[t-\tan^{-1}t]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}=1-\frac{\pi}{12}-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(21) $\displaystyle\int_0^{\pi}e^{-x}\sin\frac{x}{3}dx=\int_0^{\pi}(-e^{-x})'\sin\frac{x}{3}dx=\left[-e^{-x}\sin\frac{x}{3}\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^{-x}\left(\sin\frac{x}{3}\right)'dx=-\frac{\sqrt{3}e^{-\pi}}{2}+$
$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{e^{-x}}{3}\cos\frac{x}{3}dx=-\frac{\sqrt{3}e^{-\pi}}{2}+\int_0^{\pi}\frac{(-e^{-x})'}{3}\cos\frac{x}{3}dx=-\frac{\sqrt{3}e^{-\pi}}{2}+\left[-\frac{e^{-x}}{3}\cos\frac{x}{3}\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{e^{-x}}{3}\left(\cos\frac{x}{3}\right)'dx=$
$\displaystyle-\frac{\sqrt{3}e^{-\pi}}{2}-\frac{e^{-\pi}}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\int_0^{\pi}e^{-x}\sin\frac{x}{3}dx$ より $\displaystyle\frac{10}{9}\int_0^{\pi}e^{-x}\sin\frac{x}{3}dx=\frac{1}{6}\left(2-\left(3\sqrt{3}+1\right)e^{-\pi}\right)$ である．従って
$\displaystyle\int_0^{\pi}e^{-x}\sin\frac{x}{3}dx=\frac{3}{20}\left(2-\left(3\sqrt{3}+1\right)e^{-\pi}\right)$

(22) $t=\cos x$ とおくと，$\sin xdx=dt$ であり，x が 0 から $\dfrac{\pi}{3}$ まで動けば t は 1 から $\dfrac{1}{2}$ まで動くため，
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^5 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos^2 x)^2\sin xdx=-\int_1^{\frac{1}{2}}(1-t^2)^2dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-2t^2+t^4)dt=\left[t-\frac{2t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{53}{480}$

(23) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}x(\tan x)'dx=[x\tan x]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}(x)'\tan xdx=\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan xdx=\frac{\pi}{\sqrt{3}}+[\log\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}}$
$\displaystyle=\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\log 2$

(24) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\cos 2xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)'dx=\left[\frac{x^2\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x^2)'\frac{\sin 2x}{2}dx=\frac{\pi^2}{32}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\sin 2xdx=$
$\displaystyle\frac{\pi^2}{32}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)'dx=\frac{\pi^2}{32}+\left[\frac{x\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x)'\frac{\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi^2}{32}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi^2}{32}-\left[\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=$
$\displaystyle\frac{\pi^2}{32}-\frac{1}{4}$

微積分学 I 演習問題　第 10 回　有理関数の積分

1. 次の関数の原始関数を求めよ．ただし (8) では $a \neq 0$ とする．

(1) $\dfrac{1}{x^3-x}$　(2) $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$　(3) $\dfrac{x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$　(4) $\dfrac{x}{x^4-1}$

(5) $\dfrac{1}{x^4-1}$　(6) $\dfrac{x^2}{x^4+x^2-2}$　(7) $\dfrac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$　(8) $\dfrac{8a^3}{x^4+4a^4}$

(9) $\dfrac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)^2}$　(10) $\dfrac{x^3+7}{(x+2)(x+1)^3}$　(11) $\dfrac{6}{x^4+x^2-2}$　(12) $\dfrac{4x^2}{(x-2)^2(x^2+4)}$

(13) $\dfrac{7}{2x^2+5x-3}$　(14) $\dfrac{x^3+20}{x^2-2x+10}$　(15) $\dfrac{2x+7}{x^2+x-2}$　(16) $\dfrac{x^4+2x^3-1}{x^2+2x+3}$

(17) $\dfrac{5x}{x^3-2x-4}$　(18) $\dfrac{x+2}{x^2-4x+8}$　(19) $\dfrac{x^3+1}{x^2+2x+10}$　(20) $\dfrac{5x}{2x^2+7x+3}$

(21) $\dfrac{x^2-13}{x^2+2x-3}$　(22) $\dfrac{x^2+1}{x(x^2-1)}$　(23) $\dfrac{x+1}{x(x^2+1)}$　(24) $\dfrac{4}{(x-1)^2(x+1)}$

(25) $\dfrac{x^3-1}{x^2(x+1)}$　(26) $\dfrac{2x-3}{(x+1)(x^2-2x+2)}$　(27) $\dfrac{x^2}{(x+1)(x^2+2x+2)}$　(28) $\dfrac{4x-5}{(x^2-1)(x-2)}$

(29) $\dfrac{5x^2}{(x+1)(x^2-2x+2)}$　(30) $\dfrac{3x+5}{(x-1)(x^2+2x+5)}$　(31) $\dfrac{3}{x^3-1}$　(32) $\dfrac{4(x+1)}{(x^2+2)^2}$

(33) $\dfrac{x^2+x}{(x^2+9)^2}$　(34) $\dfrac{2x}{(x-1)^2(x^2+1)}$　(35) $\dfrac{2}{(x-1)^2(x^2+1)}$　(36) $\dfrac{x^4+1}{x^2(x^2+1)}$

(37) $\dfrac{4}{(x^2-1)^2}$　(38) $\dfrac{2x(x-2)}{x^4-1}$　(39) $\dfrac{8x}{(x-1)^3(x+1)}$　(40) $\dfrac{x}{(x^2-4x+5)^2}$

2. 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+7}{(x+2)^2(x^2+1)}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x(x+7)}{(x+2)^2(x^2+1)}dx$　(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2-2x+2)^2}dx$　(4) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2}{x^2-4x+5}dx$

(5) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2-2}{x^2(x^2-2x+2)}dx$　(6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-2)^2(x-3)}dx$　(7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x-3)^2}dx$　(8) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2}dx$

(9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{(x+1)(x^2+1)}dx$　(10) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$　(11) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2(x+2)}dx$　(12) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2+1}{x^2-x-6}dx$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x(2x+1)}{(x^2+1)(x+1)^2}dx$ と $\dfrac{1}{2}$ の大小を判定せよ．ただし，$\pi = 3.14\cdots$, $e = 2.71\cdots$ である．

4. (1) $\displaystyle I_n = \int (\sin^{-1} x)^n dx$ とおくとき, I_n に関する漸化式をつくれ.

(2) $\displaystyle I_n = \int x^n \sin x dx$, $\displaystyle J_n = \int x^n \cos x dx$ とおくとき, I_n, J_n に関する漸化式をつくれ.

5. (発展問題) a, m を 0 でない実数とし, f は n 回微分可能な関数であるとする．n 以下の自然数 k に対して $x^{km-1}f^{(k)}(ax^m)$ の原始関数を, f の n 次以下の導関数を用いて表せ.

6. (発展問題) 常に 0 の値をとる定数値関数とは異なる連続関数 f と 0 でない実数 λ が次の等式を満たすとき, λ と f を求めよ.

$$\lambda f(x) = \int_{-1}^{1} (x-t)^2 f(t) dt$$

7. (発展問題) 関数 $f : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ は連続で, $(0,1)$ の各点で微分可能であるとし, f の導関数 $f' : (0,1) \to \boldsymbol{R}$ は有界であるとする．また, $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ は周期が 1 の連続な周期関数とする．このとき次の等式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g(nx)dx = \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx$$

第 10 回の演習問題の解答

1. (1) $x^3-x=x(x-1)(x+1)$ だから $\dfrac{1}{x^3-x}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x}$ とおけば (右辺) $=$ $\dfrac{Ax(x+1)+Bx(x-1)+C(x^2-1)}{x^3-x}=\dfrac{(A+B+C)x^2+(A-B)x-C}{x^3-x}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+B+C=0\\A-B=0\\C=1\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=\dfrac{1}{2}$, $B=\dfrac{1}{2}$, $C=-1$. 従って $\displaystyle\int\frac{1}{x^3-x}dx=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}\right)dx=\frac{1}{2}(\log|x-1|+\log|x+1|-2\log|x|)$.

(2) $x^4+x^2+1=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$ だから $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}=\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2-x+1}$ とおけば (右辺) $=$ $\dfrac{(A+C)x^3+(-A+B+C+D)x^2+(A-B+C+D)x+B+D}{x^4+x^2+1}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+C=0\\-A+B+C+D=0\\A-B+C+D=0\\B+D=1\end{smallmatrix}\right.$ である. これを解けば, $A=B=D=\dfrac{1}{2}$, $C=-\dfrac{1}{2}$ となるため

$$\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x^2+x+1}+\frac{-x+1}{x^2-x+1}\right)\cdots(*)$$

である. 第 9 回の演習問題 1 の (10) より $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$ だから, $y=-x$ とおくと $\displaystyle\int\frac{-x+1}{x^2-x+1}dx=-\int\frac{y+1}{y^2+y+1}dx=-\frac{1}{2}\log(y^2+y+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)=$ $\displaystyle-\frac{1}{2}\log(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$ を得る. 故に $(*)$ から, 次の結果が得られる.

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{4}\log\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

(3) $t=x^2$ とおくと $\displaystyle\int\frac{x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx=\int\frac{dt}{2(t+a^2)(t+b^2)}$ である. $a^2\neq b^2$ の場合, $\displaystyle\int\frac{dt}{2(t+a^2)(t+b^2)}=\int\frac{1}{2(a^2-b^2)}\left(-\frac{1}{t+a^2}+\frac{1}{t+b^2}\right)dt=\frac{-\log|t+a^2|+\log|t+b^2|}{2(a^2-b^2)}=$ $\dfrac{-\log(x^2+a^2)+\log(x^2+b^2)}{2(a^2-b^2)}$. $a^2=b^2$ の場合, $\displaystyle\int\frac{dt}{2(t+a^2)^2}=-\frac{1}{2(t+a^2)}=-\frac{1}{2(x^2+a^2)}$.

(4) $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ だから $\dfrac{x}{x^4-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ とおけば (右辺) $=$ $\dfrac{(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+A-B-D}{x^4-1}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+B+C=0\\A-B+D=0\\A+B-C=1\\A-B-D=0\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=\dfrac{1}{4}$, $B=\dfrac{1}{4}$, $C=-\dfrac{1}{2}$, $D=0$. 従って $\displaystyle\int\frac{x}{x^4-1}dx=\int\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=$ $\dfrac{1}{4}(\log|x-1|+\log|x+1|-\log(x^2+1))$.

(5) $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ だから $\dfrac{1}{x^4-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ とおけば (右辺) $=$ $\dfrac{(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+A-B-D}{x^4-1}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+B+C=0\\A-B+D=0\\A+B-C=0\\A-B-D=1\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=\dfrac{1}{4}$, $B=-\dfrac{1}{4}$, $C=0$, $D=-\dfrac{1}{2}$. 従って $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4-1}=\int\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}\right)dx=$ $\dfrac{1}{4}(\log|x-1|-\log|x+1|-2\tan^{-1}x)$

(6) $x^4+x^2-2=(x^2-1)(x^2+2)=(x-1)(x+1)(x^2+2)$ だから $\dfrac{x^2}{x^4+x^2-2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2}$ とおけば (右辺) $=\dfrac{(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(2A+2B-C)x+2A-2B-D}{x^4+x^2-2}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+B+C=0\\A-B+D=1\\2A+2B-C=0\\2A-2B-D=0\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=\dfrac{1}{6}$, $B=-\dfrac{1}{6}$, $C=0$, $D=\dfrac{2}{3}$. 従って $\displaystyle\int\frac{x^2}{x^4+x^2-2}dx=\int\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{4}{x^2+2}\right)dx=$

$\dfrac{1}{6}\log|x-1|-\dfrac{1}{6}\log|x+1|+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$

(7) $a^2\neq b^2$ かつ $ab\neq 0$ の場合 $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\int\frac{1}{a^2-b^2}\left(-\frac{1}{x^2+a^2}+\frac{1}{x^2+b^2}\right)dx=$ $\dfrac{1}{a^2-b^2}\left(-\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}+\dfrac{1}{b}\tan^{-1}\dfrac{x}{b}\right)$.

$a\neq 0$ かつ $b=0$ の場合 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2(x^2+a^2)}=\int\frac{1}{a^2}\left(-\frac{1}{x^2+a^2}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{a^2}\left(-\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}-\frac{1}{x}\right)$.

$a=0$ かつ $b\neq 0$ の場合 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2(x^2+b^2)}=\int\frac{1}{b^2}\left(-\frac{1}{x^2+b^2}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{b^2}\left(-\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{x}{b}-\frac{1}{x}\right)$.

$a^2=b^2\neq 0$ の場合 $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^2}\left(\int\frac{1}{x^2+a^2}dx-\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx\right)=$ $\displaystyle\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\int x\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)'dx\right)=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{2}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{x^2+a^2}-\int\frac{1}{x^2+a^2}dx\right)=$ $\displaystyle\frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{x^2+a^2}\right)$. $a=b=0$ の場合 $\displaystyle\int\frac{1}{x^4}dx=-\frac{1}{3x^3}$

(8) $x^4+4a^4=x^4+4a^2x^2+4a^4-4a^2x^2=(x^2+2a^2)^2-(2ax)^2=(x^2-2ax+2a^2)(x^2+2ax+2a^2)$ より $\dfrac{8a^3}{x^4+4a^4}=\dfrac{Ax+B}{x^2-2ax+2a^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2ax+2a^2}$ とおくと,

$$(\text{右辺})=\frac{(A+C)x^3+(2aA+B-2aC+D)x^2+2a(aA+B+aC-D)x+2a^2(B+D)}{x^4+4a^4}$$

より $\left\{\begin{smallmatrix}A+C=0\\2aA+B-2aC+D=0\\aA+B+aC-D=0\\B+D=4a\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=-1$, $B=2a$, $C=1$, $D=2a$. 従って $\displaystyle\int\frac{8a^3}{x^4+4a^4}dx=$ $\displaystyle\int\left(\frac{-x+2a}{x^2-2ax+2a^2}+\frac{x+2a}{x^2+2ax+2a^2}\right)dx=\int\frac{-(x-a)+a}{(x-a)^2+a^2}dx+\int\frac{(x+a)+a}{(x+a)^2+a^2}dx=$ $\displaystyle-\frac{1}{2}\int\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+a^2}dx+\int\frac{a}{(x-a)^2+a^2}dx+\frac{1}{2}\int\frac{2(x+a)}{(x+a)^2+a^2}dx+\int\frac{a}{(x+a)^2+a^2}dx=$ $\displaystyle-\frac{1}{2}\log((x-a)^2+a^2)+\tan^{-1}\frac{x-a}{a}+\frac{1}{2}\log((x+a)^2+a^2)+\tan^{-1}\frac{x+a}{a}=$ $\displaystyle\frac{1}{2}\log(x^2+2ax+2a^2)-\frac{1}{2}\log(x^2-2ax+2a^2)+\tan^{-1}\frac{x+a}{a}+\tan^{-1}\frac{x-a}{a}$

(9) $\dfrac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x+2}+\dfrac{D}{(x+2)^2}$ とおくと, (右辺) $=$ $\dfrac{(A+C)x^3+(3A+B+D)x^2+(4B-3C-2D)x-4A+4B+2C+D}{(x-1)^2(x+2)^2}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+C=0\\3A+B+D=0\\4B-3C-2D=2\\-4A+4B+2C+D=1\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=0$, $B=\dfrac{1}{3}$, $C=0$, $D=-\dfrac{1}{3}$. 従って $\displaystyle\int\frac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)^2}dx=\int\left(\frac{1}{3(x-1)^2}-\frac{1}{3(x+2)^2}+\right)dx=$ $\displaystyle-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{1}{3(x+2)}$

(別解) $t=x^2+x-2$ とおけば $dt=(2x+1)dx$ だから $\displaystyle\int\frac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)^2}dx=\int\frac{2x+1}{(x^2+x-2)^2}dx=\int\frac{1}{t^2}dt=$ $\displaystyle-\frac{1}{t}=-\frac{1}{x^2+x-2}$

(10) $\dfrac{x^3+7}{(x+2)(x+1)^3}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}+\dfrac{D}{(x+1)^3}$ とおくと, (右辺) $=$ $\dfrac{(A+B)x^3+(3A+4B+C)x^2+(3A+5B+3C+D)x+A+2B+2C+2D}{(x+2)(x+1)^3}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+B=1\\3A+4B+C=0\\3A+5B+3C+D=0\\A+2B+2C+2D=7\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=1$, $B=0$, $C=-3$, $D=6$. 従って $\displaystyle\int\frac{x^3+7}{(x+2)(x+1)^3}dx=\int\left(\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{6}{(x+1)^3}\right)dx=$ $\displaystyle\log|x+2|+\frac{3}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2}$

(11) $x^4+x^2-2=(x-1)(x+1)(x^2+2)$ だから $\dfrac{6}{x^4+x^2-2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2}$ とおけば, (右辺) $=$

$\dfrac{(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(2A+2B-C)x+2A-2B-D}{x^4+x^2-2}$ より $\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ 2A+2B-C=0 \\ 2A-2B-D=6 \end{cases}$. これを解けば, $A=1$, $B=-1$, $C=0$, $D=-2$. 従って $\displaystyle\int \frac{6}{x^4+x^2-2}dx = \int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+2}\right)dx = \log|x-1|-\log|x+1|-\sqrt{2}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}$

(12) $\dfrac{4x^2}{(x-2)^2(x^2+4)} = \dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x-2)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4}$ とおけば, (右辺) $=$ $\dfrac{(A+C)x^3+(-2A+B-4C+D)x^2+4(A+C-D)x-4(2A-B-D)}{(x-2)^2(x^2+4)}$ より $\begin{cases} A+C=0 \\ -2A+B-4C+D=4 \\ A+C-D=0 \\ 2A-B-D=0 \end{cases}$. これを解けば, $A=1$, $B=2$, $C=-1$, $D=0$. 従って $\displaystyle\int \frac{4x^2}{(x-2)^2(x^2+4)}dx = \int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}-\frac{x}{x^2+4}\right)dx =$ $\log|x-2|-\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{1}{2}\log(x^2+4)$

(13) $2x^2+5x-3=(2x-1)(x+3)$ だから $\dfrac{7}{2x^2+5x-3} = \dfrac{A}{2x-1}+\dfrac{B}{x+3}$ とおけば, (右辺) $=$ $\dfrac{(A+2B)x+3A-B}{2x^2+5x-3}$ より $\begin{cases} A+2B=0 \\ 3A-B=7 \end{cases}$. これを解けば, $A=2$, $B=-1$. 従って $\displaystyle\int \frac{7}{2x^2+5x-3}dx =$ $\displaystyle\int\left(\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x+3}\right)dx = \log|2x-1|-\log|x+3|$

(14) $\dfrac{x^3+20}{x^2-2x+10} = x+2-\dfrac{6(x-1)}{(x-1)^2+3^2}+\dfrac{6}{(x-1)^2+3^2}$ だから $\displaystyle\int \frac{x^3+20}{x^2-2x+10}dx =$ $\displaystyle\int\left(x+2-\frac{6(x-1)}{(x-1)^2+3^2}+\frac{6}{(x-1)^2+3^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}+2x-3\log(x^2-2x+10)+2\tan^{-1}\frac{x-1}{3}$

(15) $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ だから $\dfrac{2x+7}{x^2+x-2} = \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}$ とおけば, (右辺) $=$ $\dfrac{(A+B)x+2A-B}{x^2+x-2}$ より $\begin{cases} A+B=2 \\ 2A-B=7 \end{cases}$. これを解けば, $A=3$, $B=-1$.
従って $\displaystyle\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx = \int\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx = 3\log|x-1|-\log|x+2|$

(16) $\dfrac{x^4+2x^3-1}{x^2+2x+3} = x^2-3+\dfrac{6(x+1)}{(x+1)^2+2}+\dfrac{2}{(x+1)^2+2}$ だから $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^3-1}{x^2+2x+3}dx =$ $\displaystyle\int\left(x^2-3+\frac{6(x+1)}{(x+1)^2+2}+\frac{2}{(x+1)^2+2}\right)dx = \frac{x^3}{3}-3x+3\log(x^2+2x+3)+\sqrt{2}\tan^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$

(17) $x^3-2x-4=(x-2)(x^2+2x+2)$ だから $\dfrac{5x}{x^3-2x-4} = \dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+2x+2}$ とおけば, (右辺) $=$ $\dfrac{(A+B)x^2+(2A-2B+C)x+2(A-C)}{x^3-2x-4}$ より $\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-2B+C=5 \\ A-C=0 \end{cases}$. これを解けば, $A=1$, $B=-1$, $C=1$. 従って $\displaystyle\int \frac{5x}{x^3-2x-4}dx = \int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{-x+1}{x^2+2x+2}\right)dx = \int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{x+1}{x^2+2x+2}+\frac{2}{(x+1)^2+1}\right)dx =$ $\log|x-2|-\dfrac{1}{2}\log(x^2+2x+2)+2\tan^{-1}(x+1)$

(18) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-4x+8}dx = \int\left(\frac{x-2}{(x-2)^2+2^2}+\frac{4}{(x-2)^2+2^2}\right)dx = \frac{1}{2}\log(x^2-4x+8)+2\tan^{-1}\frac{x-2}{2}$

(19) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2+2x+10}dx = \int\left(x-2-\frac{6(x+1)}{(x+1)^2+3^2}+\frac{27}{(x+1)^2+3^2}\right)dx =$ $\dfrac{x^2}{2}-2x-3\log(x^2+2x+10)+9\tan^{-1}\dfrac{x+1}{3}$

(20) $2x^2+7x+3=(2x+1)(x+3)$ だから $\dfrac{5x}{2x^2+7x+3} = \dfrac{A}{2x+1}+\dfrac{B}{x+3}$ とおけば, (右辺) $=$ $\dfrac{(A+2B)x+3A+B}{2x^2+7x+3}$ より $\begin{cases} A+2B=5 \\ 3A+B=0 \end{cases}$. これを解けば, $A=-1$, $B=3$. 従って $\displaystyle\int \frac{5x}{2x^2+7x+3}dx = \int\left(\frac{3}{x+3}-\frac{1}{2x+1}\right)dx = 3\log|x+3|-\frac{1}{2}\log|2x+1|$

(21) $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$, $\dfrac{x^2-13}{x^2+2x-3} = 1-\dfrac{2x+10}{x^2+2x-3}$ だから $\dfrac{2x+10}{x^2+2x-3} = \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+3}$ とおけ

ば, (右辺) $= \dfrac{(A+B)x+3A-B}{x^2+2x-3}$ より $\left\{\begin{smallmatrix} A+B=2 \\ 3A-B=10 \end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=3$, $B=-1$. 従って
$\displaystyle\int \frac{x^2-13}{x^2+2x-3}dx = \int \left(1-\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+3}\right)dx = x-3\log|x-1|+\log|x+3|$

(22) $\dfrac{x^2+1}{x(x^2-1)} = \dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}$ とおけば, (右辺) $= \dfrac{(A+B+C)x^2+(B-C)x-A}{x(x^2-1)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix} A+B+C=1 \\ B-C=0 \\ -A=1 \end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=-1$, $B=C=1$. 従って $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}dx = \int \left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)dx = \log|x^2-1|-\log x$

(23) $\dfrac{x+1}{x(x^2+1)} = \dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ とおけば, (右辺) $= \dfrac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix} A+B=0 \\ C=1 \\ A=1 \end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=1$, $B=-1$, $C=1$. 従って $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x^2+1)}dx = \int \left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \log|x|-\frac{1}{2}\log|x^2+1|+\tan^{-1}x$

(24) $\dfrac{4}{(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x+1}$ とおけば, (右辺) $= \dfrac{(A+C)x^2+(B-2C)x-A+B+C}{(x-1)^2(x+1)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix} A+C=0 \\ B-2C=0 \\ -A+B+C=4 \end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=-1$, $B=2$, $C=1$. 従って $\displaystyle\int \frac{4}{(x-1)^2(x+1)}dx =$
$\displaystyle\int \left(-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}\right)dx = \log|x+1|-\log|x-1|-\frac{2}{x-1}$

(25) $\dfrac{x^3-1}{x^2(x+1)} = 1-\dfrac{x^2+1}{x^2(x+1)}$ であり, $\dfrac{x^2+1}{x^2(x+1)} = \dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x+1}$ とおけば, (右辺) $=$
$\dfrac{(A+C)x^2+(A+B)x+B}{x^2(x+1)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix} A+C=1 \\ A+B=0 \\ B=1 \end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=-1$, $B=1$, $C=2$.
従って $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x^2(x+1)}dx = \int \left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x+1}\right)dx = x+\log|x|-2\log|x+1|+\frac{1}{x}$

(26) $\dfrac{2x-3}{(x+1)(x^2-2x+2)} = \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-2x+2}$ とおけば, (右辺) $= \dfrac{(A+B)x^2+(-2A+B+C)x+2A+C}{(x+1)(x^2-2x+2)}$
より $\left\{\begin{smallmatrix} A+B=0 \\ -2A+B+C=2 \\ 2A+C=-3 \end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=-1$, $B=1$, $C=-1$. 従って $\displaystyle\int \frac{2x-3}{(x+1)(x^2-2x+2)}dx =$
$\displaystyle\int \left(-\frac{1}{x+1}+\frac{x-1}{x^2-2x+2}\right)dx = -\log|x+1|+\frac{1}{2}\log(x^2-2x+2)$

(27) $\dfrac{x^2}{(x+1)(x^2+2x+2)} = \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+2x+2}$ とおけば, (右辺) $= \dfrac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+2A+C}{(x+1)(x^2-2x+2)}$
より $\left\{\begin{smallmatrix} A+B=1 \\ 2A+B+C=0 \\ 2A+C=0 \end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=1$, $B=0$, $C=-2$. 従って $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx =$
$\displaystyle\int \left(\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2+1}\right)dx = \log|x+1|-2\tan^{-1}(x+1)$

(28) $\dfrac{4x-5}{(x^2-1)(x-2)} = \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x-2}$ とおけば, (右辺) $= \dfrac{(A+B+C)x^2+(-A-3B)x-2A+2B-C}{(x^2-1)(x-2)}$
より $\left\{\begin{smallmatrix} A+B+C=0 \\ -A-3B=4 \\ -2A+2B-C=-5 \end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=\dfrac{1}{2}$, $B=-\dfrac{3}{2}$, $C=1$. 従って $\displaystyle\int \frac{4x-5}{(x^2-1)(x-2)}dx =$
$\displaystyle\int \left(\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{2(x+1)}+\frac{1}{x-2}\right)dx = \frac{1}{2}\log|x-1|-\frac{3}{2}\log|x+1|+\log|x-2|$

(29) $\dfrac{5x^2}{(x+1)(x^2-2x+2)} = \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-2x+2}$ とおけば, (右辺) $= \dfrac{(A+B)x^2+(-2A+B+C)x+2A+C}{(x+1)(x^2-2x+2)}$
より $\left\{\begin{smallmatrix} A+B=5 \\ -2A+B+C=0 \\ 2A+C=0 \end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=1$, $B=4$, $C=-2$. 従って $\displaystyle\int \frac{5x^2}{(x+1)(x^2-2x+2)}dx =$
$\displaystyle\int \left(\frac{1}{x+1}+\frac{4x-2}{x^2-2x+2}\right)dx = \int \left(\frac{1}{x+1}+\frac{4(x-1)}{x^2-2x+2}+\frac{2}{(x-1)^2+1}\right)dx =$
$\log|x+1|+2\log(x^2-2x+2)+2\tan^{-1}(x-1)$

(30) $\dfrac{3x+5}{(x-1)(x^2+2x+5)} = \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+2x+5}$ とおけば, (右辺) $= \dfrac{(A+B)x^2+(2A-B+C)x+5A-C}{(x-1)(x^2-2x+5)}$
より $\left\{\begin{smallmatrix} A+B=0 \\ 2A-B+C=3 \\ 5A-C=5 \end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=1$, $B=-1$, $C=0$. 従って $\displaystyle\int \frac{5x^2}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx =$
$\displaystyle\int \left(\frac{1}{x-1}-\frac{x}{x^2+2x+5}\right)dx = \int \left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+2x+5}+\frac{1}{(x+1)^2+2^2}\right)dx =$

$\log|x-1|-\dfrac{1}{2}\log(x^2+2x+5)+\dfrac{1}{2}\tan^{-1}(x+1)$

(31) $\dfrac{3}{x^3-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$ とおけば, (右辺) $=\dfrac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C}{x^3-1}$ より $\begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=0 \\ A-C=3 \end{cases}$. これを解けば, $A=1$, $B=-1$, $C=-2$. 従って $\displaystyle\int\frac{3}{x^3-1}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}\right)dx=$ $\displaystyle\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}-\frac{\frac{3}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)dx=\log|x-1|-\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)-\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

(32) 教科書の問 3.10 の結果から $\displaystyle\int\frac{4(x+1)}{(x^2+2)^2}dx=\int\frac{4x}{(x^2+2)^2}dx+\int\frac{4}{(x^2+2)^2}dx=$ $\displaystyle-\frac{2}{x^2+2}+\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{x-2}{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}$

(33) $\dfrac{x^2+x}{(x^2+9)^2}=\dfrac{Ax+B}{x^2+9}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+9)^2}$ とおけば, (右辺) $=\dfrac{Ax^3+Bx^2+(9A+C)x+9B+D}{(x^2+2)^2}$ より $\begin{cases} A=0 \\ B=1 \\ 9A+C=1 \\ 9B+D=0 \end{cases}$. これを解けば, $A=0$, $B=1$, $C=1$, $D=-9$. 従って, 教科書の問 3.10 の結果から $\displaystyle\int\frac{x^2+x}{(x^2+9)^2}dx=$ $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+9}dx+\int\frac{x}{(x^2+9)^2}dx-\int\frac{9}{(x^2+9)^2}dx=\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}-\frac{1}{2(x^2+9)}-\frac{x}{2(x^2+9)}-\frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{x}{3}=$ $\displaystyle\frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{x}{3}-\frac{x+1}{2(x^2+9)}$

(34) $\dfrac{2x}{(x-1)^2(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ とおくと, (右辺) $=$ $\dfrac{(A+C)x^3+(-A+B-2C+D)x^2+(A+C-2D)x-A+B+D}{(x-1)^2(x^2+1)}$ より $\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B-2C+D=0 \\ A+C-2D=2 \\ -A+B+D=0 \end{cases}$. これを解けば, $A=0$, $B=1$, $C=0$, $D=-1$. 従って $\displaystyle\int\frac{2x}{(x-1)^2(x^2+1)}dx=\int\left(\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=-\frac{1}{x-1}-\tan^{-1}x$

(35) $\dfrac{2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ とおくと, (右辺) $=$ $\dfrac{(A+C)x^3+(-A+B-2C+D)x^2+(A+C-2D)x-A+B+D}{(x-1)^2(x^2+1)}$ より $\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B-2C+D=0 \\ A+C-2D=0 \\ -A+B+D=2 \end{cases}$. これを解けば, $A=-1$, $B=1$, $C=1$, $D=0$. 従って $\displaystyle\int\frac{2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx=\int\left(-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{x}{x^2+1}\right)dx=$ $\displaystyle-\log|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\log(x^2+1)$

(36) $\dfrac{x^4+1}{x^2(x^2+1)}=1+\dfrac{-x^2+1}{x^2(x^2+1)}$ であり, $\dfrac{-x^2+1}{x^2(x^2+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ とおくと, (右辺) $=$ $\dfrac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+Ax+B}{x^2(x^2+1)}$ より $\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=-1 \\ A=0 \\ B=1 \end{cases}$. これを解けば, $A=0$, $B=1$, $C=0$, $D=-2$. 従って $\displaystyle\int\frac{x^4+1}{x^2(x^2+1)}dx=\int\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2+1}\right)dx=x-\frac{1}{x}-2\tan^{-1}x$

(37) $\dfrac{4}{(x^2-1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x+1}+\dfrac{D}{(x+1)^2}$ とおくと, (右辺) $=$ $\dfrac{(A+C)x^3+(A+B-C+D)x^2+(-A+2B-C-2D)x-A+B+C+D}{(x^2-1)^2}$ より $\begin{cases} A+C=0 \\ A+B-C+D=0 \\ -A+2B-C-2D=0 \\ -A+B+C+D=4 \end{cases}$. これを解けば, $A=-1$, $B=C=D=1$. 従って $\displaystyle\int\frac{4}{(x^2-1)^2}dx=\int\left(-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx=$ $\displaystyle-\log|x-1|-\frac{1}{x-1}+\log|x+1|-\frac{1}{x+1}$

(38) $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ だから $\dfrac{2x(x-2)}{x^4-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ とおけば (右辺) $=$ $\dfrac{(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+A-B-D}{x^4-1}$ より $\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=2 \\ A+B-C=-4 \\ A-B-D=0 \end{cases}$. これを解けば, $A=-\dfrac{1}{2}$,

$B=-\dfrac{3}{2}$, $C=2$, $D=1$. 従って $\displaystyle\int\frac{2x(x-2)}{x^4-1}dx=\int\left(-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{2(x+1)}+\frac{2x+1}{x^2+1}\right)dx=$
$-\dfrac{1}{2}\log|x-1|-\dfrac{3}{2}\log|x+1|+\log(x^2+1)+\tan^{-1}x$

(39) $\dfrac{8x}{(x-1)^3(x+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{(x-1)^3}+\dfrac{D}{x+1}$ とおくと, (右辺) $=$
$\dfrac{(A+D)x^3+(-A+B-3D)x^2+(-A+C+3D)x+A-B+C-D}{(x-1)^3(x+1)}$ より $\begin{cases}A+D=0\\-A+B-3D=0\\-A+C+3D=8\\A-B+C-D=0\end{cases}$. これを解けば,
$A=-1$, $B=2$, $C=4$, $D=1$. 従って $\displaystyle\int\frac{8x}{(x-1)^3(x+1)}dx=\int\left(-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{4}{(x-1)^3}+\frac{1}{x+1}\right)dx=$
$-\log|x-1|-\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{2}{(x-2)^2}+\log|x+1|$

(40) 教科書の問 3.10 の結果から $\displaystyle\int\frac{x}{(x^2-4x+5)^2}dx=\int\left(\frac{x-2}{(x^2-4x+5)^2}+\frac{2}{((x-2)^2+1)^2}\right)dx=$
$-\dfrac{1}{2(x^2-4x+5)}+\dfrac{x-2}{x^2-4x+5}+\tan^{-1}(x-2)=\dfrac{2x-5}{2(x^2-4x+5)}+\tan^{-1}(x-2)$

2. (1) $\dfrac{x+7}{(x+2)^2(x^2+1)}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{(x+2)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ とおくと,
(右辺) $=\dfrac{(A+C)x^3+(2A+B+4C+D)x^2+(A+4C+4D)x+2A+B+4D}{(x+2)^2(x^2+1)}$ より $\begin{cases}A+C=0\\2A+B+4C+D=0\\A+4C+4D=1\\2A+B+4D=7\end{cases}$. これを解けば, $A=B=D=1$, $C=-1$. 従って, $\displaystyle\int_0^1\frac{x+7}{(x+2)^2(x^2+1)}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{-x+1}{x^2+1}\right)dx=$
$\left[\log|x+2|-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{2}\log(x^2+1)+\tan^{-1}x\right]_0^1=\log 3-\dfrac{3}{2}\log 2+\dfrac{1}{6}+\dfrac{\pi}{4}$

(2) $\dfrac{x(x+7)}{(x+2)^2(x^2+1)}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{(x+2)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ とおくと,
(右辺) $=\dfrac{(A+C)x^3+(2A+B+4C+D)x^2+(A+4C+4D)x+2A+B+4D}{(x+2)^2(x^2+1)}$ より $\begin{cases}A+C=0\\2A+B+4C+D=1\\A+4C+4D=7\\2A+B+4D=0\end{cases}$. これを解けば, $A=-1$, $B=-2$, $C=1$, $D=1$. 従って, $\displaystyle\int_0^1\frac{x(x+7)}{(x+2)^2(x^2+1)}dx=\int_0^1\left(\frac{-1}{x+2}+\frac{-2}{(x+2)^2}+\frac{x+1}{x^2+1}\right)dx=$
$\left[-\log|x+2|+\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{2}\log(x^2+1)+\tan^{-1}x\right]_0^1=\dfrac{3}{2}\log 2-\log 3-\dfrac{1}{3}+\dfrac{\pi}{4}$

(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{(x^2-2x+2)^2}dx=\int_0^1\frac{x^2-2x+2+2x-2}{(x^2-2x+2)^2}dx=\int_0^1\frac{1}{(x-1)^2+1}dx+\int_0^1\frac{2x-2}{(x^2-2x+2)^2}dx=$
$[\tan^{-1}(x-1)]_0^1+\left[-\dfrac{1}{x^2-2x+2}\right]_0^1=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$

(4) $\displaystyle\int_1^3\frac{x^2}{x^2-4x+5}dx=\int_1^3\left(1+\frac{4x-5}{x^2-4x+5}\right)dx=\int_1^3\left(1+\frac{4x-8}{x^2-4x+5}+\frac{3}{(x-2)^2+1}\right)dx=$
$\left[x+2\log(x^2-4x+5)+3\tan^{-1}(x-2)\right]_1^3=2+\dfrac{3\pi}{2}$

(5) $\dfrac{2x^2-2}{x^2(x^2-2x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2-2x+2}$ とおくと,
(右辺) $=\dfrac{(A+C)x^3+(-2A+B+D)x^2+(2A-2B)x+B}{x^2(x^2-2x+2)}$ より $\begin{cases}A+C=0\\-2A+B+D=2\\2A-2B=0\\2B=-2\end{cases}$. これを解けば, $A=B=-1$, $C=D=1$. 従って, $\displaystyle\int_1^2\frac{2x^2-2}{x^2(x^2-2x+2)}dx=\int_1^2\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{x+1}{(x-1)^2+1}\right)dx=$
$\displaystyle\int_1^2\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{x-1}{(x-1)^2+1}+\frac{2}{(x-1)^2+1}\right)dx=\left[-\log x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\log((x-1)^2+1)+2\tan^{-1}(x-1)\right]_1^2=$
$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\log 2}{2}-\dfrac{1}{2}$.

(6) $\dfrac{1}{(x-2)^2(x-3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x-2)^2}+\dfrac{C}{x-3}$ とおくと,

(右辺) $= \dfrac{(A+C)x^2+(-5A+B-4C)x+6A-3B+4C}{(x-2)^2(x-3)}$ より $\begin{cases} A+C=0 \\ -5A+B-4C=0 \\ 6A-3B+4C=1 \end{cases}$. これを解けば, $A=B=-1$, $C=1$. 従って, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-2)^2(x-3)}dx = \int_0^1\left(-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{x-3}\right)dx = \left[-\log|x-2|+\frac{1}{x-2}+\log|x-3|\right]_0^1 = 2\log 2-\log 3-\frac{1}{2}$.

(7) $\dfrac{1}{(x-2)(x-3)^2} = \dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{(x-3)^2}+\dfrac{C}{x-2}$ とおくと,

(右辺) $= \dfrac{(A+C)x^2+(-5A+B-6C)x+6A-2B+9C}{(x-2)^2(x-3)}$ より $\begin{cases} A+C=0 \\ -5A+B-6C=0 \\ 6A-2B+9C=1 \end{cases}$. これを解けば, $A=-1$, $B=C=1$. 従って, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x-3)^2}dx = \int_0^1\left(-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{1}{x-2}\right)dx = \left[-\log|x-3|-\frac{1}{x-3}+\log|x-2|\right]_0^1 = \log 3-2\log 2+\frac{1}{6}$.

(8) $\dfrac{1}{x(x+1)^2} = \dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$ とおくと, (右辺) $= \dfrac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(x+1)^2}$ より $\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B+C=0 \\ A=1 \end{cases}$. これを解けば, $A=1$, $B=C=-1$. 従って, $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2}dx = \int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \left[\log x-\log(x+1)+\frac{1}{x+1}\right]_1^2 = 2\log 2-\log 3-\frac{1}{6}$.

(9) $\dfrac{4}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ とおくと,

(右辺) $= \dfrac{(A+B)x^2+(B+C)x+A+C}{(x+1)(x^2+1)}$ より $\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=4 \end{cases}$. これを解けば, $A=2$, $B=-2$, $C=2$. 従って, $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{(x+1)(x^2+1)}dx = \int_0^1\left(\frac{2}{x+1}-\frac{2x}{x^2+1}+\frac{2}{x^2+1}\right)dx = \left[2\log(x+1)-\log(x^2+1)+2\tan^{-1}x\right]_0^1 = \log 2+\frac{\pi}{2}$.

(10) $\dfrac{4x+2}{(x+1)^2(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ とおくと,

(右辺) $= \dfrac{(A+C)x^3+(A+B+2C+D)x^2+(A+C+2D)x+A+B+D}{(x+1)^2(x^2+1)}$ より $\begin{cases} A+C=0 \\ A+B+2C+D=0 \\ A+C+2D=4 \\ A+B+D=2 \end{cases}$. これを解けば, $A=1$, $B=C=-1$, $D=2$. 従って, $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}dx = \int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{-x+2}{x^2+1}\right)dx = \left[\log|x+1|+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\log(x^2+1)+2\tan^{-1}x\right]_0^1 = \frac{\log 2}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$

(11) $\dfrac{1}{(x+1)^2(x+2)} = \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{C}{x+2}$ とおくと,

(右辺) $= \dfrac{(A+C)x^2+(3A+B+2C)x+2A+2B+C}{(x+1)^2(x+2)}$ より $\begin{cases} A+C=0 \\ 3A+B+2C=0 \\ 2A+2B+C=1 \end{cases}$. これを解けば, $A=-1$, $B=C=1$. 従って, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2(x+2)}dx = \int_0^1\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+2}\right)dx = \left[-\log|x+1|-\frac{1}{x+1}+\log|x+2|\right]_0^1 = \frac{1}{2}+\log 3-2\log 2$.

(12) $\dfrac{x^2+1}{x^2-x-6} = 1+\dfrac{x+7}{x^2-x-6}$ であり, $x^2-x+6=(x-3)(x+2)$ だから $\dfrac{x+7}{x^2-x-6} = \dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x+2}$ とおけば, (右辺) $= \dfrac{(A+B)x+2A-3B}{x^2-x-6}$ より $\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-3B=7 \end{cases}$. これを解けば, $A=2$, $B=-1$.

従って $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2+1}{x^2-x-6}dx = \int_{-1}^1\left(1+\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \left[x+2\log|x-3|-\log|x+2|\right]_{-1}^1 = 2-2\log 2-\log 3$.

3. $\dfrac{2x(2x+1)}{(x^2+1)(x+1)^2} = \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ とおくと,

(右辺) $= \dfrac{(A+C)x^3+(A+B+2C+D)x^2+(A+C+2D)x+A+B+D}{(x^2+1)(x+1)^2}$ より $\begin{cases} A+C=0 \\ A+B+2C+D=4 \\ A+C+2D=2 \\ A+B+D=0 \end{cases}$. これを解けば,

$A=-2,\, B=1,\, C=2,\, D=1$. 従って, $\displaystyle\int \frac{2x(2x+1)}{(x^2+1)(x+1)^2}dx = \int\left(\frac{-2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2x+1}{x^2+1}\right)dx =$ $\displaystyle -2\log|x+1| - \frac{1}{x+1} + \log(x^2+1) + \tan^{-1}x$ である. 故に $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x(2x+1)}{(x^2+1)(x+1)^2}dx =$ $\displaystyle\left[-2\log|x+1| - \frac{1}{x+1} + \log(x^2+1) + \tan^{-1}x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \log 2 + \frac{1}{2}$ だから $\log 2$ と $\dfrac{\pi}{4}$ の大小を比較すればよい. $\log 2$ と $\dfrac{\pi}{4}$ の大小関係と $4\log 2 = \log 16$ と π の大小関係は同じで, e^x は単調増加関数だから $\log 16$ と π の大小関係と $e^{\log 16} = 16$ と e^π の大小関係は同じである. $\pi > 3,\, e > 2.7$ より $e^\pi > e^3 > (2.7)^3 = 19.683 > 16$ であるため, $\dfrac{\pi}{4} > \log 2$. 従って $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x(2x+1)}{(x^2+1)(x+1)^2}dx > \frac{1}{2}$ である.

4. (1) 部分積分法を用いる.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int (x)'(\sin^{-1}x)^n dx = x(\sin^{-1}x)^n - \int x\left((\sin^{-1}x)^n\right)' dx = x(\sin^{-1}x)^n - \int x\frac{n(\sin^{-1}x)^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= x(\sin^{-1}x)^n + \int \left(\sqrt{1-x^2}\right)' n(\sin^{-1}x)^{n-1}dx \\
&= x(\sin^{-1}x)^n + n\sqrt{1-x^2}(\sin^{-1}x)^{n-1} - n\int (n-1)(\sin^{-1}x)^{n-2}dx \\
&= x(\sin^{-1}x)^n + n\sqrt{1-x^2}(\sin^{-1}x)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}
\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle I_n = \int x^n(-\cos x)'dx = -x^n\cos x + \int nx^{n-1}\cos x dx = -x^n\cos x + nJ_{n-1}$, $\displaystyle J_n = \int x^n(\sin x)'dx = x^n\sin x - \int nx^{n-1}\sin x dx = x^n \sin x - nI_{n-1}$ より $\begin{cases} I_n = -x^n\cos x + nJ_{n-1} \\ J_n = x^n\sin x - nI_{n-1}\end{cases}$ 故に $I_{n-1} = -x^{n-1}\cos x + (n-1)J_{n-2},\, J_{n-1} = x^{n-1}\sin x - (n-1)I_{n-2}$ だから

$$I_n = -x^n\cos x + nx^{n-1}\sin x - n(n-1)I_{n-2}, \qquad J_n = x^n\sin x + nx^{n-1}\cos x - n(n-1)J_{n-2}.$$

$n < -1$ のとき $\displaystyle I_n = \int\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'\sin x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sin x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\cos x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sin x - \frac{J_{n+1}}{n+1}$, $\displaystyle J_n = \int\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'\cos x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cos x + \int\frac{x^{n+1}}{n+1}\sin x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cos x + \frac{I_{n+1}}{n+1}$ より $\begin{cases} I_n = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\sin x - \dfrac{J_{n+1}}{n+1} \\ J_n = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\cos x + \dfrac{I_{n+1}}{n+1}\end{cases}$ 故に $\displaystyle I_{n+1} = \frac{x^{n+2}}{n+2}\sin x - \frac{J_{n+2}}{n+2},\, J_{n+1} = \frac{x^{n+2}\cos x}{n+2} + \frac{I_{n+2}}{n+2}$ だから

$$I_n = \frac{x^{n+1}\sin x}{n+1} - \frac{x^{n+2}\cos x}{(n+1)(n+2)} - \frac{I_{n+2}}{(n+1)(n+2)}, \quad J_n = \frac{x^{n+1}\cos x}{n+1} + \frac{x^{n+2}\sin x}{(n+1)(n+2)} - \frac{J_{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

5. $\displaystyle I_k = \int x^{km-1}f^{(k)}(ax^m)dx$ とおけば, $\displaystyle I_1 = \int x^{m-1}f'(ax^m)dx = \frac{1}{am}f(ax^m)$ であり, $k \geqq 2$ ならば部分積分法により $\displaystyle I_k = \int x^{(k-1)m}\left(\frac{1}{am}f^{(k-1)}(ax^m)\right)' dx = \frac{x^{(k-1)m}}{am}f^{(k-1)}(ax^m) - \int\frac{k-1}{a}x^{(k-1)m-1}f^{(k-1)}(ax^m)dx =$ $\displaystyle\frac{x^{(k-1)m}}{am}f^{(k-1)}(ax^m) - \frac{k-1}{a}I_{k-1}$ だから $\displaystyle I_k = \frac{x^{(k-1)m}}{am}f^{(k-1)}(ax^m) - \frac{k-1}{a}I_{k-1}$ である. $J_k = \begin{cases}\frac{(-a)^k I_k}{(k-1)!} & 1 \leqq k \leqq n \\ 0 & k = 0\end{cases}$ とおけば, 上式から $\displaystyle J_k - J_{k-1} = \frac{-(-a)^{k-1}x^{(k-1)m}}{m(k-1)!}f^{(k-1)}(ax^m)$ だから $\displaystyle J_k = -\sum_{i=1}^{k}\frac{(-a)^{i-1}x^{(i-1)m}}{m(i-1)!}f^{(i-1)}(ax^m)$ が得られる. 従って $\displaystyle I_k = \frac{(k-1)!}{(-a)^k}J_k = \sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{k-i}(k-1)!x^{(i-1)m}}{a^{k-i+1}m(i-1)!}f^{(i-1)}(ax^m)$ である.

6. $\displaystyle\int_{-1}^1 (x-t)^2 f(t)dt = x^2\int_{-1}^1 f(t)dt - 2x\int_{-1}^1 tf(t)dt + \int_{-1}^1 t^2 f(t)dt$ より $\displaystyle a = \int_{-1}^1 f(t)dt,\, b = \int_{-1}^1 tf(t)dt$,

$c = \int_{-1}^{1} t^2 f(t)dt$ とおくと, 仮定から $\lambda f(x) = ax^2 - 2bx + c$ である. $\lambda \neq 0$ ならば $f(x) = \frac{a}{\lambda}x^2 - \frac{2b}{\lambda}x + \frac{c}{\lambda}$ となるため, $a = \int_{-1}^{1} \left(\frac{a}{\lambda}t^2 - \frac{2b}{\lambda}t + \frac{c}{\lambda}\right)dt = \frac{2a}{3\lambda} + \frac{2c}{\lambda}$ より $c = \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{3}\right)a$, $b = \int_{-1}^{1} \left(\frac{a}{\lambda}t^3 - \frac{2b}{\lambda}t^2 + \frac{c}{\lambda}t\right)dt = -\frac{4b}{3\lambda}$ より $(3\lambda + 4)b = 0$, $c = \int_{-1}^{1} \left(\frac{a}{\lambda}t^4 - \frac{2b}{\lambda}t^3 + \frac{c}{\lambda}t^2\right)dt = \frac{2a}{5\lambda} + \frac{2c}{3\lambda}$ より $-6a + (15\lambda - 10)c = 0$ が得られる.

$c = \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{3}\right)a$ を $-6a + (15\lambda - 10)c = 0$ に代入すると $(45\lambda^2 - 60\lambda - 16)a = 0$ となるため $a = 0$ または $\lambda = \frac{2}{3} \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$ である. $a = 0$ の場合は $c = \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{3}\right)a$ から $c = 0$ であるため, f についての仮定から $b \neq 0$ である. このとき, $(3\lambda + 4)b = 0$ から $\lambda = -\frac{4}{3}$ である. $\lambda = \frac{2}{3} \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$ の場合は $c = \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{3}\right)a$ から $c = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}a$ であり, $(3\lambda + 4)b = 0$ から $b = 0$ である. 以上から, C を 0 でない任意定数とすると「$\lambda = -\frac{4}{3}$, $f(x) = Cx$」または「$\lambda = \frac{2}{3} \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $f(x) = C\left(x^2 \pm \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ (複号同順)」が求めるものである.

7. $\int_0^1 f(x)g(nx)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)g(nx)dx$ であり, $y = nx$ とおいて $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)g(nx)dx$ の置換積分を考えると $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)g(nx)dx = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{n}f\left(\frac{y}{n}\right)g(y)dy$ である. 従って

$$\int_0^1 f(x)g(nx)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{n}f\left(\frac{y}{n}\right)g(y)dy \cdots (1)$$

が成り立つ. 一方 $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ であることと, g の周期性から $y = x + k - 1$ とおいて置換積分すれば, $\int_0^1 g(x)dx = \int_{k-1}^{k} g(y)dy$ が成り立つことから

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx &= \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \int_0^1 g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \int_0^1 g(x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \int_{k-1}^{k} g(y)dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) g(y)dy.\end{aligned}$$

故に

$$\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) g(y)dy \cdots (2)$$

が成り立つ. $f' : (0,1) \to \boldsymbol{R}$ は有界であるという仮定から, 正の実数 K で, すべての $x \in (0,1)$ に対して $|f'(x)| \leqq K$ を満たすものがある. $y \in [k-1, k]$ に対し, 平均値の定理から $f\left(\frac{y}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{y}{n} - \frac{k}{n}\right)f'(\xi)$ を満たす $\frac{k-1}{n} < \xi < \frac{k}{n}$ がある. 従って $y \in [k-1, k]$ ならば $\left|f\left(\frac{y}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqq \frac{K(k-y)}{n} \leqq \frac{K}{n}$ が成り立つ. この不等式と, $\int_{k-1}^{k} |g(y)|dy = \int_0^1 |g(x)|dx$ を用いると

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{n}f\left(\frac{y}{n}\right) g(y)dy - \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) g(y)dy\right| &\leqq \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{n}\left|f\left(\frac{y}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| |g(y)|dy \\ &\leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{K}{n^2} \int_{k-1}^{k} |g(y)|dy = \sum_{k=1}^{n} \frac{K}{n^2} \int_0^1 |g(y)|dy = \frac{K}{n} \int_0^1 |g(x)|dx\end{aligned}$$

となる. 故に (1) から

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)g(nx)dx - \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx\right| &\leqq \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{n}f\left(\frac{y}{n}\right)g(y)dy - \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)g(y)dy\right| \\ &\quad + \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)g(y)dy - \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx\right| \\ &\leqq \frac{K}{n}\int_0^1 |g(x)|dx + \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)g(y)dy - \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx\right|\end{aligned}$$

となり, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{K}{n}\int_0^1 g(x)dx = 0$ と (2) から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)dx = \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx$ が得られる.

微積分学 I 演習問題　第 11 回　三角関数と無理関数の積分

1. 次の関数の原始関数を求めよ. ただし (28) と (74) の n は自然数とし, (36) では $p \neq q$ とする.

(1) $\dfrac{\tan x}{1+\sin x+\cos x}$　(2) $\dfrac{2-\sin x}{2+\cos x}$　(3) $\dfrac{2\tan x}{1+\tan x}$　(4) $\dfrac{1}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$

(5) $\dfrac{3}{\tan x(2+\cos^2 x)}$　(6) $\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$　(7) $\dfrac{\tan x}{2+\cos x}$　(8) $\dfrac{1}{5+3\sin x+4\cos x}$

(9) $\dfrac{3\tan x-5}{\tan x+2\cos^2 x}$　(10) $\dfrac{\tan x}{1+\sin x}$　(11) $\dfrac{1}{1+\cos x}$　(12) $\dfrac{1}{1+2\sin x-\cos x}$

(13) $\dfrac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$　(14) $\dfrac{1}{2-\tan x}$　(15) $\dfrac{1}{2+2\sin x+\cos x}$　(16) $\dfrac{1}{3+\sin x+2\cos x}$

(17) $\dfrac{1}{\sin^2 x(1+\tan x)}$　(18) $\dfrac{\tan x}{1+\cos^2 x}$　(19) $\dfrac{2}{4\cos^2 x+\tan x-3}$　(20) $\dfrac{2\tan^2 x}{2\tan x-2\sin^2 x-1}$

(21) $\dfrac{\cos x}{1+\sin x-\cos x}$　(22) $\dfrac{1}{3+\cos x}$　(23) $\dfrac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}$　(24) $\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)(3-\sin x+2\cos x)}$

(25) $\dfrac{x}{1+\sin x}$　(26) $\dfrac{x}{1+\cos x}$　(27) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$　(28) $x^{n-1}\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$

(29) $\dfrac{3}{\sqrt{9x^2-12x+1}}$　(30) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$　(31) $\dfrac{x(1+x^2)}{\sqrt{1+x^4}}$　(32) $\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+5x-6}}$

(33) $\dfrac{1}{(x+4)\sqrt{x^2+4}}$　(34) $\dfrac{1}{x\sqrt[4]{x+1}}$　(35) $\dfrac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$　(36) $\dfrac{1}{(x-p)\sqrt{(x-p)(x-q)}}$

(37) $\dfrac{\log x}{2\sqrt{x-1}}$　(38) $\dfrac{1}{x\sqrt{x-4}}$　(39) $\dfrac{1}{x-2\sqrt{x-1}}$　(40) $\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x^2-x+1}}$

(41) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$　(42) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$　(43) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$　(44) $\dfrac{1}{(3-x)\sqrt{2+x-x^2}}$

(45) $\dfrac{1}{(x+3)\sqrt{x+1}}$　(46) $\dfrac{1}{x\sqrt{x+4}}$　(47) $\dfrac{1}{x+4+4\sqrt{x+1}}$　(48) $\dfrac{1}{\left(x-6\sqrt{x-9}\right)\sqrt{x-9}}$

(49) $\dfrac{1}{x-3\sqrt{x+4}}$　(50) $\dfrac{2x-1}{x^2\sqrt{x-1}}$　(51) $2x\tan^{-1}\sqrt{x+1}$　(52) $\dfrac{x}{\left(x+4\sqrt{x-3}\right)\sqrt{x-3}}$

(53) $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}+2}$　(54) $xe^{\sqrt{x-2}}$　(55) $\log\left|x+2\sqrt{x+3}\right|$　(56) $\dfrac{x^2}{\left(x+\sqrt{x+2}\right)\sqrt{x+2}}$

(57) $\dfrac{1}{x\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+4\right)}$　(58) $\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}+1}$　(59) $\dfrac{3}{x+4-3\sqrt[3]{x+2}}$　(60) $\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+2x-3}}$

(61) $\dfrac{x+2}{\sqrt{3-2x-x^2}}$　(62) $\dfrac{\log x^3}{4\sqrt[4]{x+1}}$　(63) $\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-(x-2)^2}}$　(64) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{1-(x-2)^2}}$

(65) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$　(66) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x(1+x)}$　(67) $\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x^2-5}}$　(68) $\dfrac{1}{\left(1+\sqrt{2x-x^2}\right)\sqrt{2x-x^2}}$

(69) $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$　(70) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x(x+1)}$　(71) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-2x+2}}$　(72) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}}$

(73) $\dfrac{x\log x}{(1+x)^4}$　(74) $\dfrac{\sin nx}{\sin x}$　(75) $x(\tan^{-1}x)^2$　(76) $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}$

2. (発展問題) 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{1+\cos x}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^6 x}{\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x}dx$　(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{\log(x+1)}{x^2+1}dx$　(4) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^3\sin^{-1}x}{(3x^2+1)^4}dx$

3. (発展問題) 連続関数 f と $R(X,Y)=R(Y,X)$ を満たす X, Y の有理式 $R(X,Y)$ について, 次の等式を示せ.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(a\sin x+b\cos x)dx=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin x\right)dx$ (a, b は定数)

(2) f が偶関数ならば $\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin x f(\cos x)dx=\pi\int_0^1 f(x)dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}xR(\sin x,\cos x)dx=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R(\sin x,\cos x)dx$

4. (発展問題) 前問を用いて次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}(\sin x+\cos x)^{10}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{2+\sin^2 x}dx$　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$

第 11 回の演習問題の解答

1. (1) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$ より $\displaystyle\int\frac{\tan x}{1+\sin x+\cos x}dx=$ $\displaystyle\int\frac{\frac{4t}{1-t^2}}{(1+t^2)\left(1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}dt=\int\frac{2t}{(1-t^2)(1+t)}dt\cdots(*)$. $\dfrac{2t}{(1-t^2)(1+t)}=\dfrac{A}{t-1}+\dfrac{B}{t+1}+\dfrac{C}{(t+1)^2}$ とおくと (右辺) $=\dfrac{(A+B)t^2+(2A+C)t+A-B-C}{(t^2-1)(t+1)}$ より $\begin{cases}A+B=0\\2A+C=-2\\A-B-C=0\end{cases}$. これを解けば, $A=-\dfrac{1}{2}$, $B=\dfrac{1}{2}$, $C=-1$. 従って $(*)=\displaystyle\int\left(-\frac{1}{2(t-1)}+\frac{1}{2(t+1)}-\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt=-\frac{1}{2}\log|t-1|+\frac{1}{2}\log|t+1|+\frac{1}{t+1}=$ $\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-1}\right|+\dfrac{1}{\tan\frac{x}{2}+1}$.

(2) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$ より $\displaystyle\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx=$ $\displaystyle\int\frac{2\left(2-\frac{2t}{1+t^2}\right)}{(1+t^2)\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}dt=\int\frac{4(1-t+t^2)}{(3+t^2)(1+t^2)}dt\cdots(*)$. $\dfrac{4(1-t+t^2)}{(3+t^2)(1+t^2)}=\dfrac{At+B}{3+t^2}+\dfrac{Ct+D}{1+t^2}$ とおくと (右辺) $=$ $\dfrac{(A+C)t^3+(B+D)t^2+(A+3C)t+(B+3D)}{(3+t^2)(1+t^2)}$ より $\begin{cases}A+C=0\\B+D=4\\A+3C=-4\\B+3D=4\end{cases}$. これを解けば, $A=2$, $B=4$, $C=-2$, $D=0$. 従って $(*)=\displaystyle\int\left(\frac{2t+4}{3+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}\right)dt=\int\frac{2t}{3+t^2}dt+\int\frac{4}{3+t^2}dt-\int\frac{2t}{1+t^2}dt=$ $\log(3+t^2)+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{t}{\sqrt{3}}-\log(1+t^2)=\log\left(3+\tan^2\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan\dfrac{x}{2}\right)-\log\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right)$.

(3) $t=\tan x$ とおくと $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ だから $\displaystyle\int\frac{2\tan x}{1+\tan x}dx=\int\frac{2t}{(1+t)(1+t^2)}dt\cdots(*)$. $\dfrac{2t}{(1+t)(1+t^2)}=$ $\dfrac{A}{1+t}+\dfrac{Bt+C}{1+t^2}$ とおくと (右辺) $=\dfrac{(A+B)t^2+(B+C)t+A+C}{(1+t)(1+t^2)}$ より $\begin{cases}A+B=0\\B+C=2\\A+C=0\end{cases}$. これを解けば, $A=-1$, $B=C=1$. 従って $(*)=\displaystyle\int\left(-\frac{1}{1+t}+\frac{t+1}{1+t^2}\right)dt=-\log|1+t|+\frac{1}{2}\log(1+t^2)+\tan^{-1}t=$ $-\log|1+\tan x|+\dfrac{1}{2}\log(1+\tan^2 x)+\tan^{-1}\tan x=-\log|1+\tan x|-\log|\cos x|+x=x-\log|\cos x+\sin x|$

(4) $t=\tan x$ とおくと $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ だから $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=$ $\displaystyle\int\frac{1}{a^2\frac{1}{1+t^2}+b^2\frac{t^2}{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}dt=\int\frac{dt}{a^2+b^2t^2}=\frac{1}{b^2}\int\frac{dt}{\left(\frac{a}{b}\right)^2+t^2}=\frac{1}{ab}\tan^{-1}\frac{bt}{a}=\frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\tan x\right)$

(5) $t=\tan x$ とおくと $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ だから $\displaystyle\int\frac{3}{\tan x(2+\cos^2 x)}dx=\int\frac{3}{t\left(2+\frac{1}{1+t^2}\right)(1+t^2)}dt=\int\frac{3}{t(3+2t^2)}dt$ $\cdots(*)$. $\dfrac{3}{t(3+2t^2)}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{Bt+C}{3+2t^2}$ とおくと (右辺) $=\dfrac{(2A+B)t^2+Ct+3A}{t(3+2t^2)}$ より $\begin{cases}2A+B=0\\C=0\\3A=3\end{cases}$. これを解けば, $A=1$, $B=-2$, $C=0$. 従って $(*)=\displaystyle\int\left(\frac{1}{t}-\frac{2t}{3+2t^2}\right)dt=\log|t|-\frac{1}{2}\log(3+2t^2)=\log|\tan x|-\frac{1}{2}\log(3+2\tan^2 x)$

(6) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$ より $\displaystyle\int\frac{\cos x}{1+\cos x}dx=\int\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}dt=$ $\displaystyle\int\frac{1-t^2}{1+t^2}dt=\int\left(-1+\frac{2}{1+t^2}\right)dt=2\tan^{-1}t-t=x-\tan\frac{x}{2}$

(7) $t=\cos x$ とおくと $\sin x dx=-dt$ より $\displaystyle\int\frac{\tan x}{2+\cos x}dx=-\int\frac{1}{t(t+2)}dt=-\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}\right)dt=$ $-\dfrac{1}{2}\log|t|+\dfrac{1}{2}\log|t+2|=\dfrac{1}{2}(\log(\cos x+2)-\log|\cos x|)$.

(8) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$ より $\displaystyle\int\frac{1}{5+3\sin x+4\cos x}dx=$

$\int \frac{2}{t^2+6t+9}dt = \int \frac{2}{(t+3)^2}dt = -\frac{2}{t+3} = -\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+3}$

(9) $t=\tan x$ とおくと $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ だから $\int \frac{3\tan x - 5}{\tan x + 2\cos^2 x}dx = \int \frac{3t-5}{\left(t+\frac{2}{1+t^2}\right)(1+t^2)}dt = \int \frac{3t-5}{t^3+t+2}dt =$ $\int \frac{3t-5}{(t+1)(t^2-t+2)}dt \cdots (*)$. $\frac{3t-5}{(t+1)(t^2-t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+2}$ とおくと (右辺) $=$ $\frac{(A+B)t^2+(-A+B+C)t+2A+C}{(t+1)(t^2-t+2)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix} A+B=0 \\ -A+B+C=3 \\ 2A+C=-5 \end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=-2$, $B=2$ $C=-1$. 従って $(*) = \int \left(-\frac{2}{t+1} + \frac{2t-1}{t^2-t+2}\right)dt = -2\log|1+t| + \log(t^2-t+2) = -2\log|1+\tan x| + \log(\tan^2 x - \tan x + 2)$

(10) $t=\sin x$ とおくと $\cos x dx = dt$ より $\int \frac{\tan x}{1+\sin x}dx = \int \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x(1+\sin x)}dx = \int \frac{\sin x\cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)^2}dx =$ $\int \frac{t}{(1-t)(1+t)^2}dt \cdots (*)$. $\frac{t}{(1-t)(1+t)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2}$ とおくと (右辺) $=$ $\frac{(A+B)t^2+(2A+C)t+A-B-C}{(t-1)(1+t)^2}$ より $\left\{\begin{smallmatrix} A+B=0 \\ 2A+C=-1 \\ A-B-C=0 \end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=-\frac{1}{4}$, $B=\frac{1}{4}$, $C=-\frac{1}{2}$. 従って $(*) = \int \left(-\frac{1}{4(t-1)} + \frac{1}{4(t+1)} - \frac{1}{2(t+1)^2}\right)dt = -\frac{1}{4}\log|t-1| + \frac{1}{4}\log|t+1| + \frac{1}{2(t+1)} =$ $\frac{1}{4}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + \frac{1}{2(1+\sin x)}$

(11) $t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ より $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{2}{(1+t^2)\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}dt = \int dt =$ $t = \tan\frac{x}{2}$

(12) $t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ より $\int \frac{1}{1+2\sin x - \cos x}dx =$ $\int \frac{2}{(1+t^2)\left(1+\frac{4t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}dt = \int \frac{1}{t(t+2)}dt = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2}\right)dt = \frac{1}{2}(\log|t| - \log|t+2|) =$ $\frac{1}{2}\left(\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \log\left|\tan\frac{x}{2}+2\right|\right)$

(13) $t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ より $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx =$ $\int \frac{2+\frac{4t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)}dx = \int \left(\frac{1}{2t} + 1 + \frac{t}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\log|t| + t + \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{2}\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}$

(14) $t=\tan x$ とおくと $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ だから $\int \frac{1}{2-\tan x}dx = \int \frac{1}{(2-t)(1+t^2)}dt \cdots (*)$. $\frac{1}{(2-t)(1+t^2)} =$ $\frac{A}{t-2} + \frac{Bt+C}{t^2+1}$ とおくと (右辺) $= \frac{(A+B)t^2+(-2B+C)t+A-2C}{(t-2)(t^2+1)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix} A+B=0 \\ -2B+C=0 \\ A-2C=-1 \end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=-\frac{1}{5}$, $B=\frac{1}{5}$, $C=\frac{2}{5}$. 従って $(*) = \int \frac{1}{5}\left(\frac{t}{t^2+1} + \frac{2}{t^2+1} - \frac{1}{t-2}\right)dt = \frac{1}{10}\log|t^2+1| + \frac{2}{5}\tan^{-1}t - \frac{1}{5}\log|t-2| =$ $\frac{1}{10}\log(\tan^2 x+1) + \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}\log|\tan x - 2| = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}\log|\sin x - 2\cos x|$

(15) $t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ より $\int \frac{1}{2+2\sin x+\cos x}dx =$ $\int \frac{2}{(1+t^2)\left(2+\frac{4t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}dt = \int \frac{2}{(t+1)(t+3)}dt = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3}\right)dt = \log|t+1| - \log|t+3| =$ $\log\left|\tan\frac{x}{2}+1\right| - \log\left|\tan\frac{x}{2}+3\right|$

(16) $t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ より $\int \frac{1}{3+\sin x+2\cos x}dx =$ $\int \frac{2}{(1+t^2)\left(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{2-2t^2}{1+t^2}\right)}dt = \int \frac{2}{(t+1)^2+2^2}dt = \tan^{-1}\frac{t+1}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)$

(17) $t=\tan x$ とおくと $\sin x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ だから $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^2 x(1+\tan x)}dx=\int\frac{1}{\frac{t^2}{1+t^2}(1+t)(1+t^2)}dt=$ $\displaystyle\int\frac{1}{t^2(1+t)}dt\cdots(*)$. $\dfrac{1}{t^2(1+t)}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{B}{t^2}+\dfrac{C}{t+1}$ とおくと (右辺) $=\dfrac{(A+C)t^2+(A+B)t+B}{t^2(t+1)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+C=0\\A+B=0\\B=1\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=-1$, $B=1$, $C=1$. 従って $(*)=\displaystyle\int\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t+1}\right)dt=-\log|t|-\frac{1}{t}+\log|t+1|=$ $\log|\tan x+1|-\log|\tan x|-\dfrac{1}{\tan x}$

(18) $t=\tan x$ とおくと $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ だから $\displaystyle\int\frac{\tan x}{1+\cos^2 x}dx=\int\frac{t}{\left(1+\frac{1}{1+t^2}\right)(1+t^2)}dt=\int\frac{t}{2+t^2}dt=$ $\dfrac{1}{2}\log(t^2+2)=\dfrac{1}{2}\log(\tan^2 x+2)$

(19) $t=\tan x$ とおくと $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ だから $\displaystyle\int\frac{2}{4\cos^2 x+\tan x-3}dx=\int\frac{2}{\left(\frac{4}{1+t^2}+t-3\right)(1+t^2)}dt=$ $\displaystyle\int\frac{2}{(t-1)\big(t-1-\sqrt{2}\big)\big(t-1+\sqrt{2}\big)}dt\cdots(*)$. $\dfrac{2}{(t-1)\left(t-1-\sqrt{2}\right)\left(t-1+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{A}{t-1}+\dfrac{B}{t-1-\sqrt{2}}+\dfrac{C}{t-1+\sqrt{2}}$ とおくと (右辺) $=\dfrac{(A+B+C)t^2+\left(-2A+B\left(-2+\sqrt{2}\right)+C\left(-2-\sqrt{2}\right)\right)t-A+B\left(1-\sqrt{2}\right)+C\left(1+\sqrt{2}\right)}{(t-1)\left(t-1-\sqrt{2}\right)\left(t-1+\sqrt{2}\right)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+B+C=0\\-2A+B\left(-2+\sqrt{2}\right)+C\left(-2-\sqrt{2}\right)=0\\-A+B\left(1-\sqrt{2}\right)+C\left(1+\sqrt{2}\right)=2\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=-1$, $B=C=\dfrac{1}{2}$. 従って $(*)=\displaystyle\int\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{t-1}+\frac{1}{t-1-\sqrt{2}}+\frac{1}{t-1+\sqrt{2}}\right)dt=-\log|t-1|+\frac{1}{2}\log|t^2-2t-1|=$ $\dfrac{1}{2}\log|\tan^2 x-2\tan x-1|-\log|\tan x-1|$

(20) $t=\tan x$ とおくと $\sin x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ だから $\displaystyle\int\frac{2\tan^2 x}{2\tan x-2\sin^2 x-1}dx=$ $\displaystyle\int\frac{2t^2}{(1+t^2)\left(2t-\frac{2t^2}{1+t^2}-1\right)}dt=\int\frac{2t^2}{(t-1)(2t^2-t+1)}dt\cdots(*)$. $\dfrac{2t^2}{(t-1)(2t^2-t+1)}=\dfrac{A}{t-1}+\dfrac{Bt+C}{2t^2-t+1}$ とおくと (右辺) $=\dfrac{(2A+B)t^2+(-A-B+C)t+A-C}{(t-1)(2t^2-t+1)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}2A+B=2\\-A-B+C=0\\A-C=0\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=1$, $B=0$, $C=1$. 従って $(*)=\displaystyle\int\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{2t^2-t+1}\right)dt=\int\frac{1}{t-1}dt+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}dt=\log|t-1|+\frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\frac{4t-1}{\sqrt{7}}=$ $\log|\tan x-1|+\dfrac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\dfrac{4\tan x-1}{\sqrt{7}}$

(21) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$ より $\displaystyle\int\frac{\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx=$ $\displaystyle\int\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)}dx=\int\frac{1-t^2}{t(t+1)(1+t^2)}dx\cdots(*)$. $\dfrac{1-t^2}{t(t+1)(1+t^2)}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{B}{t+1}+\dfrac{Ct+D}{t^2+1}$ とおくと (右辺) $=\dfrac{(A+B+C)t^3+(A+C+D)t^2+(A+B+D)t+A}{t(t+1)(1+t^2)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+B+C=0\\A+C+D=-1\\A+B+D=0\\A=1\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=1$, $B=0$, $C=D=-1$. 従って $(*)=\displaystyle\int\left(\frac{1}{t}-\frac{t+1}{t^2+1}\right)dt=\log|t|-\frac{1}{2}\log|t^2+1|-\tan^{-1}t=$ $\log\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|-\dfrac{1}{2}\log\left|\tan^2\dfrac{x}{2}+1\right|-\dfrac{x}{2}=\log\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|+\log\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|-\dfrac{x}{2}=\log\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|-\dfrac{x}{2}$

(22) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{3+\cos x}dx=\int\frac{2}{(1+t^2)\left(3+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}dt=$ $\displaystyle\int\frac{1}{2+t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{x}{2}\right)$

(23) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x}{x\sin x+\cos x}=\dfrac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}$ を満たす A, B, C, D を求める.

(左辺) $= \dfrac{(B+C)\cos x - Cx^2 + (A-D)x}{(x\sin x+\cos x)^2}$ だから $C=-1$, $B=1$, $A=D=0$ とすればよい．従って $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}dx = \frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x+\cos x}$ である．

(24) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$ より $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(1+\cos x)(3-\sin x+2\cos x)}dx =$ $\displaystyle\int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\left(3-\frac{2t}{1+t^2}+\frac{2-2t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)}dt = \int \frac{t}{t^2-2t+5}dt = \int \frac{t-1}{(t-1)^2+2^2}dt + \int \frac{1}{(t-1)^2+2^2}dt =$ $\dfrac{1}{2}\log((t-1)^2+4) + \dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{t-1}{2} = \dfrac{1}{2}\log\left(\left(\tan\dfrac{x}{2}-1\right)^2+4\right) + \dfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\right)$

(25) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$ より, $\displaystyle\int \frac{x}{1+\sin x}dx = \int \frac{4\tan^{-1}t}{(1+t)^2}dt =$ $\displaystyle\int 4\tan^{-1}t\left(-\frac{1}{1+t}\right)'dt = -\frac{4\tan^{-1}t}{1+t} + \int \frac{4}{(1+t)(1+t^2)}dt.$ $\dfrac{4}{(1+t)(1+t^2)} = \dfrac{A}{1+t}+\dfrac{Bt+C}{1+t^2}$ とおけば, (右辺) $=$ $\dfrac{(A+B)t^2+(B+C)t+A+C}{(1+t)(1+t^2)}$ より $\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=4 \end{cases}$. これを解けば, $A=C=2$, $B=-2$ である．従って $\displaystyle\int \frac{4}{(1+t)(1+t^2)}dt = \int \frac{2}{1+t}dt - \int \frac{2x}{1+t^2}dt + \int \frac{2}{1+t^2}dt = 2\log|1+t| - \log(1+t^2) + 2\tan^{-1}t =$ $\log(1+t^2+2t) - \log(1+t^2) + 2\tan^{-1}t = \log\left(1+\dfrac{2t}{1+t^2}\right) + 2\tan^{-1}t = \log(1+\sin x)+x$, $\dfrac{2}{1+t} = \dfrac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} =$ $\dfrac{2\cos^2\frac{x}{2}\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{2\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{1+\cos x+\sin x}{1+\sin x} = 1+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ であることと, $2\tan^{-1}t = x$ に注意すれば, $\displaystyle\int \frac{x}{1+\sin x}dx = -x\left(1+\frac{\cos x}{1+\sin x}\right) + \log(1+\sin x) + x = -\frac{x\cos x}{1+\sin x} + \log(1+\sin x).$

(26) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2\tan^{-1}t$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$ より $\displaystyle\int \frac{x}{1+\cos x}dx =$ $\displaystyle\int \frac{2\tan^{-1}t}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int 2\tan^{-1}t\,dt = \int 2(t)'\tan^{-1}t\,dt = 2t\tan^{-1}t - \int \frac{2t}{1+t^2}dt = 2t\tan^{-1}t - \log(1+t^2) =$ $x\tan\dfrac{x}{2} - \log\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right) = x\tan\dfrac{x}{2} + \log\left(\cos^2\dfrac{x}{2}\right) = x\tan\dfrac{x}{2} + \log(1+\cos x) - \log 2$. 従って, 定数の差を無視すれば $\displaystyle\int \frac{x}{1+\cos x}dx = x\tan\frac{x}{2} + \log(1+\cos x)$ である．

(27) 教科書の 104 ページの結果の結果と教科書の 86 ページの公式の (10) から
$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}dx =$
$\log\left(x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$

(28) $\displaystyle\int x^{n-1}\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)dx = \int \left(\frac{x^n}{n}\right)'\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)dx = \frac{x^n}{n}\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right) -$ $\displaystyle\int \frac{x^n+\frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2+a}}}{n\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)}dx = \frac{x^n}{n}\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right) - \int \frac{x^n}{n\sqrt{x^2+a}}dx$ $t = x+\sqrt{x^2+a}$ とおくと $x = \dfrac{t^2-a}{2t}$, $dx =$ $\dfrac{t^2+a}{2t^2}dt$ だから $\displaystyle\int \frac{x^n}{n\sqrt{x^2+a}}dx = \int \frac{(t^2-a)^n}{2^n n t^n}\frac{2t}{t^2+1}\frac{t^2+1}{2t^2}dt = \frac{1}{2^n n}\sum_{i=0}^{n}(-a)^i\binom{n}{i}\int t^{n-2i-1}dt \cdots (*)$ を得る．n

が奇数ならば $(*) = \dfrac{1}{2^n n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{n-2i}\binom{n}{i}t^{n-2i} = \frac{1}{2^n n}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-a)^i}{n-2i}\binom{n}{i}\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)^{n-2i}$ であり, n が偶数ならば

$$\begin{aligned}(*) &= \frac{1}{2^n n}\left(\sum_{0\leqq i\leqq n,\, i\neq\frac{n}{2}}\frac{(-a)^i}{n-2i}\binom{n}{i}t^{n-2i} + (-a)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}}\log t\right)\\ &= \frac{1}{2^n n}\left(\sum_{0\leqq i\leqq n,\, i\neq\frac{n}{2}}\frac{(-a)^i}{n-2i}\binom{n}{i}\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)^{n-2i} + (-a)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}}\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)\right)\end{aligned}$$

となるため, $\displaystyle\int x^{n-1}\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$ は n が奇数ならば

$$\frac{x^n}{n}\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right) - \frac{1}{2^n n}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-a)^i}{n-2i}\binom{n}{i}\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)^{n-2i}$$

で与えられ, n が偶数ならば

$$\frac{x^n}{n}\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right) - \frac{1}{2^n n}\left(\sum_{0\leqq i\leqq n,\, i\neq\frac{n}{2}}\frac{(-a)^i}{n-2i}\binom{n}{i}\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)^{n-2i} + (-a)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}}\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)\right)$$

で与えられる.

(29) 教科書の 104 ページの結果と教科書の 86 ページの公式の (10) から
$\displaystyle\int\frac{3}{\sqrt{9x^2-12x+1}}dx = \int\frac{3}{\sqrt{(3x-2)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}}dx = \log\left|3x-2+\sqrt{9x^2-12x+1}\right|$

(30) 教科書の 104 ページの結果から $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}dx = \int\frac{(x-1)\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}dx = \int\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}dx =$
$\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx - \int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \sqrt{x^2-1} - \log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$

(31) $t = x^2$ とおくと, 教科書の 104 ページの結果から $\displaystyle\int\frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1+x^4}}dx = \frac{1}{2}\int\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}dt =$
$\displaystyle\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt + \frac{1}{2}\int\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt = \frac{1}{2}\log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{1+t^2} = \frac{1}{2}\log\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{1+x^4}$

(32) $-x^2+5x-6 = (3-x)(x-2)$ より $t = \sqrt{\dfrac{x-2}{3-x}}$ とおくと $x = \dfrac{3t^2+2}{t^2+1} = 3 - \dfrac{1}{t^2+1}$, $dx = \dfrac{2tdt}{(t^2+1)^2}$ より
$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+5x-6}} = \int\frac{dx}{\sqrt{(3-x)(x-2)}} = \int\frac{2t}{(t^2+1)^2\sqrt{\frac{1}{t^2+1}\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)}}dt =$
$\displaystyle\int\frac{2}{t^2+1}dt = 2\tan^{-1}t = 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-2}{3-x}}$. または $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+5x-6}} = \int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2}} =$
$\sin^{-1}(2x-5)$ (公式 $\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{t}{a}\right)$ を用いた.)

(33) $t = x+\sqrt{x^2+4}$ とおくと $x = \dfrac{t^2-4}{2t}$, $\sqrt{x^2+4} = t-x = \dfrac{t^2+4}{2t}$, $dx = \dfrac{t^2+4}{2t^2}dt$ より $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+4}} =$
$\displaystyle\int\frac{1}{\left(\frac{t^2-4}{2t}+4\right)\frac{t^2+4}{2t}}\frac{t^2+4}{2t^2}dt = \int\frac{2}{t^2+8t-4}dt = \int\frac{2}{\left(t+4-2\sqrt{5}\right)\left(t+4+2\sqrt{5}\right)}dt =$
$\displaystyle\int\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1}{t+4-2\sqrt{5}} - \frac{1}{t+4+2\sqrt{5}}\right)dt = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\log\left|t+4-2\sqrt{5}\right| - \log\left|t+4+2\sqrt{5}\right|\right) =$
$\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\log\left|x+\sqrt{x^2+4}+4-2\sqrt{5}\right| - \log\left|x+\sqrt{x^2+4}+4+2\sqrt{5}\right|\right)$

(34) $t = \sqrt[4]{x+1}$ とおくと $x = t^4-1$, $dx = 4t^3dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt[4]{x+1}}dx = \int\frac{4t^3}{t(t^4-1)}dt = \int\frac{4t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}dt\cdots(*)$.
$\dfrac{4t^2}{t^4-1} = \dfrac{A}{t^2-1} + \dfrac{B}{t^2+1}$ とおけば (右辺) $= \dfrac{(A+B)t^2+A-B}{t^4-1}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+B=4\\ A-B=0\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=B=2$. 従っ

て $(*)=\displaystyle\int\left(\frac{2}{t^2-1}+\frac{2}{t^2+1}\right)dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}+\frac{2}{t^2+1}\right)dt=\log|t-1|-\log|t+1|+2\tan^{-1}t=$ $\log\left|\sqrt[4]{x+1}-1\right|-\log\left|\sqrt[4]{x+1}+1\right|+2\tan^{-1}\sqrt[4]{x+1}$

(35) $t=x+\sqrt{x^2+a^2}$ とおくと $x=\dfrac{t^2-a^2}{2t}$, $\sqrt{x^2+a^2}=t-x=\dfrac{t^2+a^2}{2t}$, $dx=\dfrac{t^2+a^2}{2t^2}dt$ より $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=$ $\displaystyle\int\frac{t^2+a^2}{2t^2\left(\frac{t^2+a^2}{2t}\right)^3}dt=\int\frac{4t}{(t^2+a^2)^2}dt=\frac{-2}{t^2+a^2}=\frac{-2}{\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^2+a^2}=\frac{-1}{x^2+a^2+x\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}-$ $\dfrac{1}{a^2}$. または $x=a\tan t$ とおき, $dx=\dfrac{a}{\cos^2 t}dt$ より $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{a}{a^3\cos^2 t(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}dt=$ $\displaystyle\int\frac{dt}{a^2\cos^2 t(\cos^2 t)^{-\frac{3}{2}}}=\int\frac{\cos t}{a^2}dt=\frac{\sin t}{a^2}=\frac{1}{a^2}\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right)=\frac{1}{a^2}\frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$

(教科書の問題 1.5 の (3) を用いた.)

(36) $t=\sqrt{\dfrac{x-q}{x-p}}$ とおくと $x=\dfrac{pt^2-q}{t^2-1}=p+\dfrac{p-q}{t^2-1}$, $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{2(p-q)t}{(t^2-1)^2}$ より $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-p)\sqrt{(x-p)(x-q)}}=$ $\displaystyle\int\frac{-2(p-q)t}{\frac{p-q}{t^2-1}\sqrt{\frac{p-q}{t^2-1}(p-q+\frac{p-q}{t^2-1})}(t^2-1)^2}dt=\frac{-2}{|p-q|}\int\frac{|t^2-1|}{t^2-1}dt=\frac{-2}{|p-q|}\frac{|t^2-1|}{t^2-1}t=$ $\dfrac{-2}{|p-q|}\dfrac{|p-q|(x-p)}{|x-p|(p-q)}\sqrt{\dfrac{x-q}{x-p}}=\dfrac{-2(x-p)}{(p-q)|x-p|}\sqrt{\dfrac{x-q}{x-p}}=\dfrac{-2|x-p|}{(p-q)(x-p)}\sqrt{\dfrac{x-q}{x-p}}=\dfrac{2\sqrt{(x-p)(x-q)}}{(q-p)(x-p)}.$

(37) $t=x+\sqrt{x^2-a^2}$ とおくと $x=\dfrac{t^2+a^2}{2t}$, $\sqrt{x^2-a^2}=\dfrac{t^2-a^2}{2t}$, $dx=\dfrac{t^2-a^2}{2t^2}dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}dx=$ $\displaystyle\int\frac{t^2-a^2}{\frac{(t^2+a^2)^2}{4t^2}\frac{t^2-a^2}{2t}2t^2}dt=\int\frac{4t}{(t^2+a^2)^2}dt=-\frac{2}{t^2+a^2}=-\frac{1}{x\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}=-\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}-\frac{1}{a^2}$

(38) $t=\sqrt{x-4}$ とおくと $x=t^2+4$, $dx=2tdt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{x-4}}dx=\int\frac{2}{t^2+4}dt=\tan^{-1}\frac{t}{2}=\tan^{-1}\frac{\sqrt{x-4}}{2}$

(39) $t=\sqrt{x-1}$ とおくと $x=t^2+1$, $dx=2tdt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{x-2\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{2t}{(t-1)^2}dt=\int\frac{2t-2+2}{(t-1)^2}dt=$ $\displaystyle\int\frac{2}{t-1}dt+\int\frac{2}{(t-1)^2}dt=2\log|t-1|-\frac{2}{t-1}=\log(t-1)^2-\frac{2}{t-1}=\log\left(x-2\sqrt{x-1}\right)-\frac{2}{\sqrt{x-1}-1}$

(40) $t=x+\sqrt{x^2-x+1}$ とおくと $x=\dfrac{t^2-1}{2t-1}$, $\sqrt{x^2-x+1}=\dfrac{t^2-t+1}{2t-1}$, $dx=\dfrac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2}dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{(1-x)\sqrt{x^2-x+1}}dx=\int\frac{2t^2-2t+2}{\left(1-\frac{t^2-1}{2t-1}\right)\frac{t^2-t+1}{2t-1}(2t-1)^2}dt=\int\frac{2}{t(2-t)}dt=\int\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2-t}\right)dt=$ $\log|t|-\log|t-2|=\log\left|x+\sqrt{x^2-x+1}\right|-\log\left|x+\sqrt{x^2-x+1}-2\right|$

(41) $a^2-x^2=(a-x)(x+a)$ だから $t=\sqrt{\dfrac{a-x}{x+a}}$ とおくと $x=\dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}=\dfrac{2at}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{-4at}{(1+t^2)^2}dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int\frac{-4at}{\frac{a^2(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}\frac{2at}{1+t^2}(1+t^2)^2}dt=-\int\frac{2t^2+2}{a^2(1-t^2)^2}dt=-\int\frac{(1+t)^2+(1-t)^2}{a^2(1-t^2)^2}dt=$ $\displaystyle-\int\frac{1}{a^2(1-t)^2}dt-\int\frac{1}{(1+t)^2}dt=\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)=\frac{2t}{a^2(t^2-1)}=\frac{\frac{2}{a^2}\sqrt{\frac{a-x}{x+a}}}{\frac{a-x}{x+a}-1}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}$

(42) $t=\sqrt{x-1}$ とおくと $x=t^2+1$, $dx=2tdt$ より $\displaystyle\int\frac{\log x}{2\sqrt{x-1}}dx=\int\log(t^2+1)dt=\int t'\log(t^2+1)dt=$ $\displaystyle t\log(t^2+1)-\int\frac{2t^2}{t^2+1}dt=t\log(t^2+1)-\int\left(2-\frac{2}{t^2+1}\right)dt=t\log(t^2+1)-2t+2\tan^{-1}t=$ $\sqrt{x-1}(\log x-2)+2\tan^{-1}\sqrt{x-1}$

(43) $t=x+\sqrt{x^2+1}$ とおくと $x=\dfrac{t^2-1}{2t}$, $\sqrt{x^2+1}=\dfrac{t^2+1}{2t}$, $dx=\dfrac{t^2+1}{2t^2}dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx=$ $\displaystyle\int\frac{t^2+1}{\frac{(t^2-1)^2}{4t^2}\frac{t^2+1}{2t}2t^2}dt=\int\frac{4t}{(t^2-1)^2}dt=-\frac{2}{t^2-1}=-\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=-\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x}=-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+1$

(44) $2+x-x^2=(2-x)(x+1)$ だから $t=\sqrt{\dfrac{2-x}{x+1}}$ とおくと $x=\dfrac{2-t^2}{1+t^2}$, $\sqrt{2+x-x^2}=\dfrac{3t}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{-6t}{(1+t^2)^2}dt$

より $\displaystyle\int \frac{1}{(3-x)\sqrt{2+x-x^2}}dx = \int \frac{-6t}{\left(3-\frac{2-t^2}{1+t^2}\right)\frac{3t}{1+t^2}(1+t^2)^2}dt = \int \frac{-2}{4t^2+1}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}dt =$
$-\tan^{-1}2t = -\tan^{-1}2\sqrt{\dfrac{2-x}{x+1}} = \tan^{-1}\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}} - \dfrac{\pi}{2}$ (教科書の問 1.11 の (4) を用いた.)

(45) $t=\sqrt{x+1}$ とおくと $x=t^2-1$, $dx=2tdt$ より $\displaystyle\int \frac{1}{(x+3)\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{2}{t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}dt = \sqrt{2}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}} =$
$\sqrt{2}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$

(46) $t=\sqrt{x+4}$ とおくと $x=t^2-4$, $dx=2tdt$ より $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+4}}dx = \int \frac{2}{t^2-4}dt = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt =$
$\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{t-2}{t+2}\right| = \dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| = \dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)^2}{x}\right| = \log\left|\sqrt{x+4}-2\right| - \dfrac{1}{2}\log|x|$

(47) $t=\sqrt{x+1}$ とおくと $x=t^2-1$, $dx=2tdt$ より $\displaystyle\int \frac{1}{x+4+4\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{2t}{t^2+4t+3}dt =$
$\displaystyle\int \frac{2t}{(t+1)(t+3)}dt \cdots (*)$. $\dfrac{2t}{(t+1)(t+3)} = \dfrac{A}{t+1}+\dfrac{B}{t+3}$ とおけば (右辺) $= \dfrac{(A+B)t+3A+B}{(t+1)(t+3)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+B=2\\3A+B=0\end{smallmatrix}\right.$.
これを解けば, $A=-1$, $B=3$. 従って $(*) = \displaystyle\int\left(\frac{3}{t+3}-\frac{1}{t+1}\right)dt = 3\log|t+3| - \log|t+1| =$
$3\log\left(\sqrt{x+1}+3\right) - \log\left(\sqrt{x+1}+1\right)$

(48) $t=\sqrt{x-9}$ とおくと $x=t^2+9$, $dx=2tdt$ より $\displaystyle\int \frac{1}{\left(x-6\sqrt{x-9}\right)\sqrt{x-9}}dx = \int \frac{2}{(t-3)^2}dt = -\frac{2}{t-3} =$
$\dfrac{2}{3-\sqrt{x-9}}$

(49) $t=\sqrt{x+4}$ とおくと $x=t^2-4$, $dx=2tdt$ より $\displaystyle\int \frac{1}{x-3\sqrt{x+4}}dx = \int \frac{2t}{t^2-3t-4}dt = \int \frac{2t}{(t-4)(t+1)}dt$
$\cdots (*)$. $\dfrac{2t}{(t-4)(t+1)} = \dfrac{A}{t-4}+\dfrac{B}{t+1}$ とおけば (右辺) $= \dfrac{(A+B)t+A-4B}{(t-4)(t+1)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+B=2\\A-4B=0\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば,
$A=\dfrac{8}{5}$, $B=\dfrac{2}{5}$. 従って $(*) = \displaystyle\int \frac{2}{5}\left(\frac{4}{t-4}+\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{2}{5}(4\log|t-4|+\log|t+1|) =$
$\dfrac{8}{5}\log\left(\sqrt{x+4}-4\right) + \dfrac{2}{5}\log\left(\sqrt{x+4}+1\right)$

(50) $t=\sqrt{x-1}$ とおくと $x=t^2+1$, $dx=2tdt$ であり, 教科書の問 3.10 の結果を用いると $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2\sqrt{x-1}}dx =$
$\displaystyle\int \frac{4t^2+2}{(t^2+1)^2}dt = \int \frac{4(t^2+1)-2}{(t^2+1)^2}dt = \int \frac{4}{t^2+1}dt - \int \frac{2}{(t^2+1)^2}dt = 4\tan^{-1}t - \frac{t}{t^2+1} - \tan^{-1}t =$
$3\tan^{-1}\sqrt{x-1} - \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$

(51) $t=\sqrt{x+1}$ とおくと $x=t^2-1$, $dx=2tdt$ より $\displaystyle\int 2x\tan^{-1}\sqrt{x+1}dx = \int (4t^3-4t)\tan^{-1}tdt =$
$\displaystyle\int (t^4-2t^2)'\tan^{-1}tdt = (t^4-2t^2)\tan^{-1}t - \int \frac{t^4-2t^2}{t^2+1}dt = (t^4-2t^2)\tan^{-1}t - \int\left(t^2-3+\frac{3}{t^2+1}\right)dt =$
$(t^4-2t^2)\tan^{-1}t - \dfrac{t^3}{3} + 3t - 3\tan^{-1}t = (t^2-3)(t^2+1)\tan^{-1}t - \dfrac{1}{3}t(t^2-9) = (x^2-4)\tan^{-1}\sqrt{x-1} - \dfrac{1}{3}(x-8)\sqrt{x-1}$

(52) $t=\sqrt{x-3}$ とおくと $x=t^2+3$, $dx=2tdt$ より $\displaystyle\int \frac{x}{\left(x+4\sqrt{x-3}\right)\sqrt{x-3}}dx = \int \frac{2t^2+6}{t^2+4t+3}dt =$
$\displaystyle\int\left(2-\frac{8t}{(t+1)(t+3)}\right)dt \cdots (*)$. $\dfrac{8t}{(t+1)(t+3)} = \dfrac{A}{t+1}+\dfrac{B}{t+3}$ とおけば (右辺) $= \dfrac{(A+B)t+3A+B}{(t+1)(t+3)}$ より
$\left\{\begin{smallmatrix}A+B=8\\3A+B=0\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=-4$, $B=12$. 従って $(*) = \displaystyle\int\left(2+\frac{4}{t+1}-\frac{12}{t+3}\right)dt =$
$2t+4\log|t+1| - 12\log|t+3|) = 2\sqrt{x-3} + 4\log\left(\sqrt{x-3}+1\right) - 12\log\left(\sqrt{x-3}+3\right)$

(53) $t=\sqrt{x+1}$ とおくと $x=t^2-1$, $dx=2tdt$ より $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+2}dx = \int \frac{2t^3-2t}{t+2}dt =$
$\displaystyle\int\left(2t^2-4t+6-\frac{12}{t+2}\right)dt = \frac{2}{3}t^3-2t^2+6t-12\log|t+2| = \frac{2}{3}\sqrt{x+1}(x+10) - 2x - 12\log\left(\sqrt{x+1}+2\right) - 2$

(54) $t=\sqrt{x-2}$ とおくと $x=t^2+2$, $dx=2tdt$ より $\displaystyle\int xe^{\sqrt{x-2}}dx=\int(2t^3+4t)e^tdt=\int(2t^3+4t)(e^t)'dt=$ $\displaystyle(2t^3+4t)e^t-\int(6t^2+4)e^tdt=(2t^3+4t)e^t-\int(6t^2+4)(e^t)'dt=(2t^3+4t)e^t-(6t^2+4)e^t+\int 12te^tdt=$ $\displaystyle(2t^3-6t^2+4t-4)e^t+\int 12t(e^t)'dt=(2t^3-6t^2+4t-4)e^t+12te^t-\int 12e^tdt=2(t^3-3t^2+8t-8)e^t=$ $2\left((x+6)\sqrt{x-2}-3x-2\right)e^{\sqrt{x-2}}$

(55) $t=\sqrt{x+3}$ とおくと $x=t^2-3$, $dx=2tdt$ より $\displaystyle\int\log\left|x+2\sqrt{x+3}\right|dx=\int 2t\log|t^2+2t-3|dt=$ $\displaystyle\int(t^2)'\log|t^2+2t-3|dt=t^2\log|t^2+2t-3|-\int\frac{2t^3+2t^2}{t^2+2t-3}dt=t^2\log|t^2+2t-3|-$ $\displaystyle\int\left(2t-2+\frac{10t-6}{(t-1)(t+3)}\right)dt\cdots(*)$. $\displaystyle\frac{10t-6}{(t-1)(t+3)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+3}$ とおけば (右辺) $=\displaystyle\frac{(A+B)t+3A-B}{(t-1)(t+3)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+B=10\\3A-B=-6\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=1$, $B=9$. 従って $\displaystyle(*)=t^2\log|(t-1)(t+3)|-\int\left(2t-2+\frac{1}{t-1}+\frac{9}{t+3}\right)dt=$ $t^2\log|t-1|+t^2\log|t+3|-t^2+2t-\log|t-1|-9\log|t+3|=$ $(x+2)\log\left|\sqrt{x+3}-1\right|+(x-6)\log\left(\sqrt{x+3}+3\right)-x-3+2\sqrt{x+3}$

(56) $t=\sqrt{x+2}$ とおくと $x=t^2-2$, $dx=2tdt$ より $\displaystyle\int\frac{x^2}{\left(x+\sqrt{x+2}\right)\sqrt{x+2}}dx=\int\frac{2t^4-8t^2+8}{t^2+t-2}dt=$ $\displaystyle\int\left(2t^2-2t-2+\frac{-2t+4}{(t-1)(t+2)}\right)dt\cdots(*)$. $\displaystyle\frac{-2t+4}{(t-1)(t+2)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+2}$ とおけば (右辺) $=\displaystyle\frac{(A+B)t+2A-B}{(t-1)(t+2)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+B=-2\\2A-B=4\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=\dfrac{2}{3}$, $B=-\dfrac{8}{3}$. 従って $\displaystyle(*)=\int\left(2t^2-2t-2+\frac{2}{3(t-1)}-\frac{8}{3(t+2)}\right)dt=$ $\displaystyle\frac{2}{3}t^3-t^2-2t+\frac{2}{3}\log|t-1|-\frac{8}{3}\log|t+2|=\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x+2}-x-2+\frac{2}{3}\log\left|\sqrt{x+2}-1\right|-\frac{8}{3}\log\left(\sqrt{x+2}+2\right)$

(57) $t=\sqrt[6]{x}$ とおくと $x=t^6$, $dx=6t^5dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+4\right)}dx=\int\frac{6}{t^4(t^2+4)}dt\cdots(*)$. $\displaystyle\frac{6}{t^4(t^2+4)}=$ $\displaystyle\frac{A}{t^2}+\frac{B}{t^4}+\frac{C}{t^2+4}$ とおけば (右辺) $=\displaystyle\frac{(A+C)t^4+(4A+B)t^2+4B}{t^4(t^2+4)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+C=0\\4A+B=0\\4B=6\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=-\dfrac{3}{8}$, $B=\dfrac{3}{2}$, $C=\dfrac{3}{8}$. 従って $\displaystyle(*)=\int\frac{3}{8}\left(-\frac{1}{t^2}+\frac{4}{t^4}+\frac{1}{t^2+4}\right)dt=\frac{3}{8t}-\frac{1}{2t^3}+\frac{3}{16}\tan^{-1}\frac{t}{2}=\frac{3}{8\sqrt[6]{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{3}{16}\tan^{-1}\frac{\sqrt[6]{x}}{2}$

(58) $t=\sqrt[4]{x}$ とおくと $x=t^4$, $dx=4t^3dt$ より $\displaystyle\int\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}+1}dx=\int\frac{4t^4-4t^3}{t^2+1}dt=\int\left(4t^2-4t-4+\frac{4t+4}{t^2+1}\right)dt=$ $\displaystyle\frac{4}{3}t^3-2t^2-4t+2\log(t^2+1)+4\tan^{-1}t=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+2\log(\sqrt{x}+1)+4\tan^{-1}\sqrt[4]{x}$

(59) $t=\sqrt[3]{x+2}$ とおくと $x=t^3-2$, $dx=3t^2dt$ より $\displaystyle\int\frac{3}{x+4-3\sqrt[3]{x+2}}dx=\int\frac{9t^2}{t^3-3t+2}dt=$ $\displaystyle\int\frac{9t^2}{(t-1)^2(t+2)}dt\cdots(*)$. $\displaystyle\frac{9t^2}{(t-1)^2(t+2)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{(t-1)^2}+\frac{C}{t+2}$ とおけば (右辺) $=$ $\displaystyle\frac{(A+C)t^2+(A+B-2C)t-2A+2B+C}{(t-1)^2(t+2)}$ より $\left\{\begin{smallmatrix}A+C=9\\A+B-2C=0\\-2A+2B+C=0\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=5$, $B=3$, $C=4$. 従って $\displaystyle(*)=\int\left(\frac{5}{t-1}+\frac{3}{(t-1)^2}+\frac{4}{t+2}\right)dt=5\log|t-1|-\frac{3}{t-1}+4\log|t+2|=$ $\displaystyle 5\log\left|\sqrt[3]{x+2}-1\right|+4\log\left|\sqrt[3]{x+2}+2\right|-\frac{3}{\sqrt[3]{x+2}-1}$

(60) $t=x+\sqrt{x^2+2x-3}$ とおくと $x=\dfrac{t^2+3}{2t+2}$, $\sqrt{x^2+2x-3}=\dfrac{t^2+2t-3}{2t+2}$, $dx=\dfrac{t^2+2t-3}{2(t+1)^2}dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+2x-3}}dx=\int\frac{t^2+2t-3}{\left(\frac{t^2+3}{2t+2}-1\right)\frac{t^2+2t-3}{2t+2}2(t+1)^2}dt=\int\frac{2}{(t-1)^2}dt=-\frac{2}{t-1}=$ $\displaystyle-\frac{2}{x-1+\sqrt{x^2+2x-3}}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{2(x-1)}$

(61) $3-2x-x^2=(x+3)(1-x)$ だから, $t=\sqrt{\dfrac{1-x}{x+3}}$ とおくと $x=\dfrac{1-3t^2}{1+t^2}$, $\sqrt{3-2x-x^2}=\dfrac{4t}{1+t^2}$,

$dx = -\dfrac{8t}{(1+t^2)^2}dt$ であり, 教科書の問 3.10 の結果を用いると $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = \int \frac{\left(\frac{1-3t^2}{1+t^2}+2\right)(-8t)}{\frac{4t}{1+t^2}(1+t^2)^2}dt =$
$\displaystyle\int \frac{2t^2-6}{(1+t^2)^2}dt = \int \frac{2(1+t^2)-8}{(1+t^2)^2}dt = \int \frac{2}{1+t^2}dt - 8\int \frac{1}{(1+t^2)^2}dt = -\frac{4t}{1+t^2} - 2\tan^{-1} t =$
$\displaystyle -\sqrt{3-2x-x^2} - 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}$
(別解) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = \int\left(\frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}} - \frac{-1-x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\right)dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-(x+1)^2}} - \int \frac{(3-2x-x^2)'}{2\sqrt{3-2x-x^2}}dx$
$\displaystyle = \sin^{-1}\frac{x+1}{2} - \sqrt{3-2x-x^2}$
(注意) 第 3 回の演習問題 5 の (4) の x に $\dfrac{x+1}{2}$ を代入して, 教科書の問 1.11 の (4) を用いれば $2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{x+3}} =$
$\dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1}\dfrac{x+1}{2}$ が得られる.

(62) $t = \sqrt[4]{x+1}$ とおくと $x = t^4-1$, $dx = 4t^3dt$ であり, (34) の解答の途中の結果を用いると $\displaystyle\int \frac{\log x^3}{4\sqrt[4]{x+1}}dx =$
$\displaystyle\int 3t^2\log(t^4-1)dt = \int (t^3)'\log(t^4-1)dt = t^3\log(t^4-1) - \int \frac{4t^6}{t^4-1}dt =$
$\displaystyle t^3\log(t^4-1) - \int\left(4t^2 + \frac{4t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}\right)dt = t^3\log(t^4-1) - \frac{4}{3}t^3 - \log|t-1| + \log|t+1| - 2\tan^{-1}t =$
$\displaystyle\sqrt[4]{(x+1)^3}\log x - \frac{4}{3}\sqrt[4]{(x+1)^3} - \log\left|\sqrt[4]{x+1}-1\right| + \log\left|\sqrt[4]{x+1}+1\right| - 2\tan^{-1}\sqrt[4]{x+1}$

(63) $x = \sin t + 2$ とおくと $dx = \cos t dt$ より $\displaystyle\int \frac{x^2-4}{\sqrt{1-(x-2)^2}}dx = \int(\sin^2 t + 4\sin t)dt =$
$\displaystyle\int\left(\frac{1-\cos 2t}{2} + 4\sin t\right)dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} - 4\cos t = \frac{t}{2} + \frac{\sin t\cos t}{2} - 4\cos t = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin^2 t}(\sin t - 8) =$
$\displaystyle\frac{1}{2}\sin^{-1}(x-2) + \frac{1}{2}(x-10)\sqrt{1-(x-2)^2}$

(64) $1-(x-2)^2 = (x-1)(3-x)$ だから, $t = \sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}$ とおくと $x = \dfrac{3+t^2}{1+t^2}$, $\sqrt{1-(x-1)^2} = \dfrac{2t}{1+t^2}$,
$dx = -\dfrac{4t}{(1+t^2)^2}dt$ より $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-(x-2)^2}}dx = \int \frac{-4t}{\left(\frac{3+t^2}{1+t^2}+1\right)\frac{2t}{1+t^2}(1+t^2)^2}dt = \int \frac{-1}{t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}dt =$
$\displaystyle -\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{3-x}{2x-2}}$

(65) $t = x + \sqrt{x^2+2x-3}$ とおくと $x = \dfrac{t^2+3}{2t+2}$, $\sqrt{x^2+2x-3} = \dfrac{t^2+2t-3}{2t+2}$, $dx = \dfrac{t^2+2t-3}{2(t+1)^2}dt$ より
$\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx = \int \frac{\left(\frac{t^2+3}{2t+2}-1\right)(t^2+2t-3)}{\frac{t^2+2t-3}{2t+2}2(t+1)^2}dt = \int \frac{t^2-2t+1}{2(t+1)^2}dt = \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{4t}{(t+1)^2}\right)dt =$
$\displaystyle\frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{4}{t+1} + \frac{4}{(t+1)^2}\right)dt = \frac{t}{2} - 2\log|t+1| - \frac{2}{t+1} = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+2x-3}\right) -$
$\displaystyle 2\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right| - \frac{2}{x+1+\sqrt{x^2+2x-3}} = \sqrt{x^2+2x-3} - 2\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right| - \frac{1}{2}$

(66) $t = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ とおけば $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = -\dfrac{4t}{(1+t^2)^2}dt$ であり, (34) の解答の途中の結果を用いると
$\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x(1+x)}dx = \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int \frac{4t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}dt = \log|t-1| - \log|t+1| + 2\tan^{-1}t =$
$\displaystyle\log\left|\frac{1-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right| + 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \log\left(1-\sqrt{1-x^2}\right) - \log|x| - \sin^{-1}x + \frac{\pi}{2}.$
[注意] 第 3 回の演習問題 5 の (4) と教科書の問 1.11 の (4) から $2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1}x$ が得られる.

(67) $t = x + \sqrt{x^2-5}$ とおくと $x = \dfrac{t^2+5}{2t}$, $\sqrt{x^2-5} = \dfrac{t^2-5}{2t}$, $dx = \dfrac{t^2-5}{2t^2}dt$ より $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2-5}}dx =$

$$\int \frac{t^2-5}{\left(\frac{t^2+5}{2t}+2\right)\frac{t^2-5}{2t}2t^2}dx = \int \frac{2}{(t+2)^2+1}dx = 2\tan^{-1}(t+2) = 2\tan^{-1}\left(x+2+\sqrt{x^2-5}\right)$$

(68) $t = \sqrt{\dfrac{2-x}{x}}$ とおくと $x = \dfrac{2}{1+t^2}$, $\sqrt{2x-x^2} = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx = -\dfrac{4t}{(1+t^2)^2}dt$ より

$$\int \frac{1}{\left(1+\sqrt{2x-x^2}\right)\sqrt{2x-x^2}}dx = \int \frac{-4t}{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2t}{1+t^2}(1+t^2)^2}dt = \int \frac{-2}{(1+t)^2}dt = \frac{2}{1+t} = \frac{x-\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$$

(69) $t = x+\sqrt{x^2-2x+2}$ とおくと $x = \dfrac{t^2-2}{2t-2}$, $\sqrt{x^2-2x+2} = \dfrac{t^2-2t+2}{2t-2}$, $dx = \dfrac{t^2-2t+2}{2(t-1)^2}dt$ より

$\displaystyle\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx = \int \frac{\left(\frac{(t^2-2)^2}{4(t-1)^2}+1\right)(t^2-2t+2)}{\frac{t^2-2t+2}{2t-2}2(t-1)^2}dt = \int \frac{t^4-8t+8}{4(t-1)^3}dt.$ $s = t-1$ とおけば, $t = s+1$, $dt = ds$ より (上式) $= \displaystyle\frac{1}{4}\int \frac{(s+1)^4-8s}{s^3}ds = \frac{1}{4}\int\left(s+4+\frac{6}{s}-\frac{4}{s^2}+\frac{1}{s^3}\right)ds = \frac{s^2}{8}+s+\frac{3}{2}\log|s|+\frac{1}{s}-\frac{1}{8s^2} =$ $\displaystyle\frac{1}{8}\left(s-\frac{1}{s}\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)+s+\frac{1}{s}+\frac{3}{2}\log|s| = \frac{1}{8}\left(s-\frac{1}{s}+8\right)\left(s+\frac{1}{s}\right)+\frac{3}{2}\log|s|\cdots(*)$. ここで $s = t-1 = x-1+\sqrt{x^2-2x+2}$ だから $\dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}+x-1} = \sqrt{x^2-2x+2}-x+1$ であるため $s+\dfrac{1}{s} = 2\sqrt{x^2-2x+2}$, $s-\dfrac{1}{s} = 2x-2$ である. 従って $(*) = \dfrac{1}{2}(x+3)\sqrt{x^2-2x+2}+\dfrac{3}{2}\log\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\right)$.

(70) $t = x+\sqrt{x^2-1}$ とおくと $x = \dfrac{t^2+1}{2t}$, $\sqrt{x^2-1} = \dfrac{t^2-1}{2t}$, $dx = \dfrac{t^2-1}{2t^2}dt$ より $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x(x+1)}dx =$ $\displaystyle\int \frac{\frac{t^2-1}{2t}(t^2-1)}{\frac{t^2+1}{2t}\left(\frac{t^2+1}{2t}+1\right)2t^2}dt = \int \frac{(t-1)^2}{t(t^2+1)}dt\cdots(*)$. $\dfrac{(t-1)^2}{t(t^2+1)} = \dfrac{A}{t}+\dfrac{Bt+C}{t^2+1}$ とおけば (右辺) $= \dfrac{(A+B)t^2+Ct+A}{t(t^2+1)}$ より $A=1$, $B=0$ $C=-2$. 従って $(*) = \displaystyle\int\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2+1}\right)dt = \log|t|-2\tan^{-1}t =$ $\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-2\tan^{-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$. $x>0$ の場合, 第 3 回の演習問題 5 の (3) の等式の x に $x+\sqrt{x^2-1}$ を代入すれば $2\tan^{-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \tan^{-1}\sqrt{x^2-1}+\dfrac{\pi}{2}$ が得られる. また, $x<0$ の場合は $-x-\sqrt{x^2-1}>0$ だから上記の等式の x に $-x-\sqrt{x^2-1}$ を代入すれば $2\tan^{-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \tan^{-1}\sqrt{x^2-1}-\dfrac{\pi}{2}$ が得られる. 以上から, 関数 $2\tan^{-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ は定義域 $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ のそれぞれの区間 $(-\infty,-1]$, $[1,\infty)$ において, 関数 $\tan^{-1}\sqrt{x^2-1}$ と定数の違いしかないため, 上の結果から $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x(x+1)}dx = \log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\tan^{-1}\sqrt{x^2-1}$.

(71) $t = x+\sqrt{x^2-2x+2}$ とおくと $x = \dfrac{t^2-2}{2t-2}$, $\sqrt{x^2-2x+2} = \dfrac{t^2-2t+2}{2t-2}$, $dx = \dfrac{t^2-2t+2}{2(t-1)^2}dt$ より

$\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-2x+2}}dx = \int\frac{t^2-2t+2}{\frac{t^2-2}{2t-2}\frac{t^2-2t+2}{2t-2}2(t-1)^2}dt = \int\frac{2}{t^2-2}dt = \int\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}}-\frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)dt =$ $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\log\left|t-\sqrt{2}\right|-\log\left|t+\sqrt{2}\right|\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\log\left|x+\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{2}\right|-\log\left|x+\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{2}\right|\right)$

(72) $3-2x-x^2 = (x+3)(1-x)$ だから, $t = \sqrt{\dfrac{1-x}{x+3}}$ とおくと $x = \dfrac{1-3t^2}{1+t^2}$, $\sqrt{3-2x-x^2} = \dfrac{4t}{1+t^2}$, $dx = -\dfrac{8t}{(1+t^2)^2}dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}}dx = \int\frac{-8t}{\left(\frac{1-3t^2}{1+t^2}+1\right)\frac{4t}{1+t^2}(1+t^2)^2}dt = \int\frac{1}{t^2-1}dt =$

$$\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2}(\log|t-1|-\log|t+1|) = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}+1}\right| =$$

$\log\left|\sqrt{x+3}-\sqrt{1-x}\right|-\dfrac{1}{2}\log|x+1|-\dfrac{1}{2}\log 2$

(73) $\dfrac{x}{(1+x)^4} = \dfrac{1+x-1}{(1+x)^4} = \dfrac{1}{(1+x)^3}-\dfrac{1}{(1+x)^4}$ だから $\displaystyle\int\frac{x}{(1+x)^4}dx = \int\left(\frac{1}{(1+x)^3}-\frac{1}{(1+x)^4}\right)dx =$ $\dfrac{1}{3(1+x)^3}-\dfrac{1}{2(1+x)^2}$ である. また, $\dfrac{1}{x(1+x)^2} = \dfrac{x+1-x}{x(1+x)^2} = \dfrac{1}{x(1+x)}-\dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}$, $\dfrac{1}{x(1+x)^3} = \dfrac{x+1-x}{x(1+x)^3} = \dfrac{1}{x(1+x)^2}-\dfrac{1}{(1+x)^3} = \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{(1+x)^3}$ だから $\displaystyle\int\frac{x\log x}{(1+x)^4}dx =$

$\displaystyle\int\left(\frac{1}{3(1+x)^3}-\frac{1}{2(1+x)^2}\right)'\log x\,dx=\left(\frac{1}{3(1+x)^3}-\frac{1}{2(1+x)^2}\right)\log x-\int\left(\frac{1}{3x(1+x)^3}-\frac{1}{2x(1+x)^2}\right)dx=$ $\displaystyle\left(\frac{1}{3(1+x)^3}-\frac{1}{2(1+x)^2}\right)\log x-\int\left(\frac{1}{6(1+x)}+\frac{1}{6(1+x)^2}-\frac{1}{3(1+x)^3}-\frac{1}{6x}\right)dx=$ $\displaystyle\left(\frac{1}{3(1+x)^3}-\frac{1}{2(1+x)^2}+\frac{1}{6}\right)\log x-\frac{1}{6}\log(1+x)+\frac{1}{6(1+x)}-\frac{1}{6(1+x)^2}=$ $\displaystyle\frac{x^2\log x(x+3)}{6(1+x)^3}-\frac{1}{6}\log(1+x)+\frac{1}{6(1+x)}-\frac{1}{6(1+x)^2}$

(74) $\displaystyle I_n=\int\frac{\sin nx}{\sin x}dx$ とおくと $\displaystyle I_1=\int dx=x$, $\displaystyle I_2=\int 2\cos x\,dx=2\sin x$ である．加法定理より

$$\begin{aligned}\sin(n+2)x&=\sin(n+1)x\cos x+\cos(n+1)x\sin x=\sin nx\cos^2x+2\cos nx\sin x\cos x-\sin nx\sin^2x\\&=\sin nx+2\cos nx\cos x\sin x-2\sin nx\sin^2x=\sin nx+2\cos(n+1)x\sin x\end{aligned}$$

だから $\displaystyle I_{n+2}=\int\left(\frac{\sin nx}{\sin x}+2\cos(n+1)x\right)dx=I_n+\frac{2\sin(n+1)x}{n+1}$ が得られる．従って $\displaystyle I_{2n}=I_2+\sum_{k=2}^{n}(I_{2k}-I_{2k-2})=2\sin x+\sum_{k=2}^{n}\frac{2\sin(2k-1)x}{2k-1}$, $\displaystyle I_{2n+1}=I_1+\sum_{k=1}^{n}(I_{2k+1}-I_{2k-1})=x+\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin 2kx}{k}$.

(75) 第 9 回の問題 1 の (35) より $\displaystyle\int\tan^{-1}x\,dx=x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(x^2+1)$ だから $\displaystyle\int x(\tan^{-1}x)^2\,dx=$ $\displaystyle\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'(\tan^{-1}x)^2\,dx=\frac{x^2(\tan^{-1}x)^2}{2}-\int\frac{x^2\tan^{-1}x}{1+x^2}dx=\frac{x^2(\tan^{-1}x)^2}{2}-\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\tan^{-1}x\,dx=$ $\displaystyle\frac{x^2(\tan^{-1}x)^2}{2}-\int\tan^{-1}x\,dx+\int\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}dx=\frac{x^2(\tan^{-1}x)^2}{2}-x\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\log(x^2+1)+\frac{(\tan^{-1}x)^2}{2}$.

(76) $x=\tan\theta$ とおけば $\displaystyle\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$ であり，$\cos^4\theta+\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-2\cos^2\theta\sin^2\theta=$ $\displaystyle 1-\frac{\sin^2 2\theta}{2}$ だから，$\displaystyle\int\frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}dx=\int\frac{1-\tan^2\theta}{\sqrt{1+\tan^4\theta}}d\theta=\int\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sqrt{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}d\theta=\int\frac{\cos2\theta}{\sqrt{1-\frac{\sin^2 2\theta}{2}}}d\theta$ が得られる．さらに $y=\sin2\theta$ とおけば $\displaystyle\cos2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}dy$ であり，第 3 回の問題 2 の (5) と (6) の結果から $\sin(2\tan^{-1}x)=$ $\displaystyle 2\sin(\tan^{-1}x)\cos(\tan^{-1}x)=\frac{2x}{1+x^2}$ が成り立つため $\displaystyle\int\frac{\cos2\theta}{\sqrt{1-\frac{\sin^2 2\theta}{2}}}d\theta=\int\frac{1}{\sqrt2\sqrt{2-y^2}}dy=\frac{1}{\sqrt2}\sin^{-1}\frac{y}{\sqrt2}=$ $\displaystyle\frac{1}{\sqrt2}\sin^{-1}\left(\frac{\sin2t}{\sqrt2}\right)=\frac{1}{\sqrt2}\sin^{-1}\left(\frac{\sin(2\tan^{-1}x)}{\sqrt2}\right)=\frac{1}{\sqrt2}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt2x}{1+x^2}\right)$.

2. (1) $\displaystyle t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと $\displaystyle\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\displaystyle dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ であり，x が $\displaystyle\frac{\pi}{4}$ から $\displaystyle\frac{\pi}{3}$ まで動くとき，t は $\displaystyle\tan\frac{\pi}{8}$ から $\displaystyle\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt3}$ まで動く．ここで，$\displaystyle\frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}=\tan\frac{\pi}{4}=1$ だから $\displaystyle\tan^2\frac{\pi}{8}+2\tan\frac{\pi}{8}-1=0$ が成り立つため $\displaystyle\tan\frac{\pi}{8}$ は 2 次方程式 $x^2+2x-1=0$ の正の解である．従って $\displaystyle\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt2-1$ である．$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{1+\cos x}dx=\int_{\tan\frac{\pi}{8}}^{\tan\frac{\pi}{6}}\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}dt=$ $\displaystyle\int_{\tan\frac{\pi}{8}}^{\tan\frac{\pi}{6}}\frac{1-t^2}{1+t^2}dt=\int_{\tan\frac{\pi}{8}}^{\tan\frac{\pi}{6}}\left(-1+\frac{2}{1+t^2}\right)dt=\left[2\tan^{-1}t-t\right]_{\tan\frac{\pi}{8}}^{\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{\sqrt3}+\sqrt2-1$

(2) $\displaystyle R(X,Y)=\frac{Y^6}{X^4-X^2Y^2+Y^4}$ として教科書の問 3.21 の (iv) を用いると，

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 x}{\cos^4 x - \cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x}dx$ だから

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x}dx &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x}dx\right.\\
&\quad \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 x}{\cos^4 x - \cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x}dx\right)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 x + \sin^6 x}{\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x}dx\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)\left(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x\right)}{2(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)}dx\\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

(3) $x = \tan t$ とおけば $t = \tan^{-1} x$ より $\dfrac{1}{x^2+1}dx = dt$ であり, x が 0 から 1 まで動くとき, t は 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ まで動くため, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x^2+1}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\tan t + 1)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin t + \cos t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos t dt \cdots (*)$.
ここで $\sin t + \cos t = \sqrt{2}\sin\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ だから $s = t + \dfrac{\pi}{4}$ とおけば, $dt = ds$ であり, t が 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ まで動くとき, s は $\dfrac{\pi}{4}$ から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くため, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin t + \cos t)dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\sqrt{2}\sin s\right)ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\log\sqrt{2} + \log\sin s\right)ds = \frac{\pi\log 2}{8} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin s ds$. 一方, $\cos t = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$ だから $s = \dfrac{\pi}{2} - t$ とおけば, $dt = -ds$ であり, t が 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ まで動くとき, s は $\dfrac{\pi}{2}$ から $\dfrac{\pi}{4}$ まで動くため, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos t dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \log\sin s ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin s ds$. 従って $(*)$ から $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x^2+1}dx = \frac{\pi\log 2}{8} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin s ds - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin s ds = \frac{\pi\log 2}{8}$.

(4) $y = 3x^2 + 1$ とおけば $xdx = \dfrac{1}{6}dy$, $x^2 = \dfrac{y-1}{3}$ だから

$$\int \frac{x^3}{(3x^2+1)^4}dx = \int \frac{y-1}{18y^4}dy = \frac{1}{18}\int\left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{y^4}\right)dy = \frac{1}{18}\left(\frac{1}{3y^3} - \frac{1}{2y^2}\right) = \frac{-9x^2-1}{108(3x^2+1)^3}$$

が得られる. 従って, 部分積分を行った後, $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ と変数変換を行えば $x = \dfrac{1-y^2}{1+y^2}$, $dx = \dfrac{-4y}{(1+y^2)^2}dy$ だから

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^3\sin^{-1} x}{(3x^2+1)^4}dx &= \left[\frac{-(9x^2+1)\sin^{-1} x}{108(3x^2+1)^3}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{9x^2+1}{108(3x^2+1)^3\sqrt{1-x^2}}dx\\
&= -\frac{5\pi}{6912} + \frac{1}{1728}\int_0^1 \frac{(y^2+1)^3(5y^4-8y^2+5)}{(y^4-y^2+1)^3}dy \quad \cdots (i)
\end{aligned}$$

が得られる. $y^4 - y^2 + 1 = (y^2+1)^2 - 3y^2 = \left(y^2 - \sqrt{3}y + 1\right)\left(y^2 + \sqrt{3}y + 1\right)$ だから

$$\begin{aligned}
\frac{(y^2+1)^3(5y^4-8y^2+5)}{(y^4-y^2+1)^3} &= \frac{Ay+B}{y^2-\sqrt{3}y+1} + \frac{A'y+B'}{y^2+\sqrt{3}y+1} + \frac{Cy+D}{\left(y^2-\sqrt{3}y+1\right)^2} + \frac{C'y+D'}{\left(y^2+\sqrt{3}y+1\right)^2}\\
&\quad + \frac{Ey+F}{\left(y^2-\sqrt{3}y+1\right)^3} + \frac{E'y+F'}{\left(y^2+\sqrt{3}y+1\right)^3}
\end{aligned}$$

を満たす実数 A, A', B, B', C, C', D, D', E, E', F, F' が存在するが, 左辺は y の偶関数であることから $A' = -A$,

$B' = B$, $C' = -C$, $D' = D$, $E' = -E$, $F' = F$ である．このとき，

$$\frac{(y^2+1)^3(5y^4-8y^2+5)}{(y^4-y^2+1)^3} = \frac{Ay+B}{y^2-\sqrt{3}y+1} + \frac{-Ay+B}{y^2+\sqrt{3}y+1} + \frac{Cy+D}{\left(y^2-\sqrt{3}y+1\right)^2} + \frac{-Cy+D}{\left(y^2+\sqrt{3}y+1\right)^2} + \frac{Ey+F}{\left(y^2-\sqrt{3}y+1\right)^3} + \frac{-Ey+F}{\left(y^2+\sqrt{3}y+1\right)^3}$$

となり，左辺の分子は $5y^{10}+7y^8-4y^6-4y^4+7y^2+5$ であり，右辺を通分したときの分子は $\left(2\sqrt{3}A+2B\right)y^{10} - \left(4\sqrt{3}A+2B-4\sqrt{3}C-2D\right)y^8 + \left(6\sqrt{3}A+2B+8D+6\sqrt{3}E+2F\right)y^6 - \left(4\sqrt{3}A-2B+6D-18\sqrt{3}E-24F\right)y^4 + \left(2\sqrt{3}A-2B+4\sqrt{3}C+8D+6\sqrt{3}E+24F\right)y^2+2B+2D+2F$ となるため，A, B, C, D, E, F は

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -4\sqrt{3} & -2 & 4\sqrt{3} & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 6\sqrt{3} & 2 & 0 & 8 & 6\sqrt{3} & 2 & -4 \\ -4\sqrt{3} & 2 & 0 & -6 & 18\sqrt{3} & 24 & -4 \\ 2\sqrt{3} & -2 & 4\sqrt{3} & 8 & 6\sqrt{3} & 24 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

を拡大係数行列とする連立一次方程式の解である．従って $A=0$, $B=\dfrac{5}{2}$, $C=\dfrac{17\sqrt{3}}{16}$, $D=-\dfrac{3}{8}$, $E=-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$, $F=\dfrac{3}{8}$ が得られる．一方, $y=-z$ と変数変換すれば,

$$\int_0^1 \frac{-Py+Q}{\left(y^2+\sqrt{3}y+1\right)^k}dy = \int_0^{-1} \frac{Pz+Q}{\left(z^2-\sqrt{3}z+1\right)^k}(-1)dz = \int_{-1}^0 \frac{Py+Q}{\left(y^2-\sqrt{3}y+1\right)^k}dy$$

だから, 次の等式が成り立つ.

$$\int_0^1 \frac{(y^2+1)^3(5y^4-8y^2+5)}{(y^4-y^2+1)^3}dy = \frac{5}{2}\int_{-1}^1 \frac{1}{y^2-\sqrt{3}y+1}dy + \int_{-1}^1 \frac{\frac{17\sqrt{3}}{16}y-\frac{3}{8}}{\left(y^2-\sqrt{3}y+1\right)^2}dy + \int_{-1}^1 \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{8}y+\frac{3}{8}}{\left(y^2-\sqrt{3}y+1\right)^3}dy \cdots (ii)$$

さらに $t = y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と変数変換し, $2+\sqrt{3} = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} > 0$ であることに注意すれば, $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ より

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{y^2-\sqrt{3}y+1}dy = \int_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{t^2+\frac{1}{4}}dt = \left[2\tan^{-1}2t\right]_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\left(\tan^{-1}\left(2-\sqrt{3}\right)+\tan^{-1}\left(2+\sqrt{3}\right)\right) = \pi$$

となる．同様に $t = y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と変数変換すれば, 次が得られる.

$$\int_{-1}^1 \frac{\frac{17\sqrt{3}}{16}y-\frac{3}{8}}{\left(y^2-\sqrt{3}y+1\right)^2}dy = \int_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\frac{17\sqrt{3}}{16}t+\frac{39}{32}}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{17\sqrt{3}}{16}\int_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^2}dt + \frac{39}{32}\int_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^2}dt$$

$$\int_{-1}^1 \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{8}y+\frac{3}{8}}{\left(y^2-\sqrt{3}y+1\right)^3}dy = \int_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{8}t-\frac{3}{16}}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^3}dt = -\frac{3\sqrt{3}}{8}\int_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^3}dt - \frac{3}{16}\int_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^3}dt$$

ここで,

$$\int_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^2}dt = \left[-\frac{2}{4t^2+1}\right]_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\sqrt{3}, \quad \int_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^3}dt = \left[-\frac{4}{\left(4t^2+1\right)^2}\right]_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -2\sqrt{3}$$

であり, $I_k = \displaystyle\int_{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^k}dt$ とおけば, $I_1 = \pi$, $I_{k+1} = \dfrac{1}{k}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{k-1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{k-1}\right) + \dfrac{4k-2}{k}I_k$ だから $I_2 = 2+2I_1 = 2\pi+2$, $I_3 = 2+3I_2 = 6\pi+8$ が得られる．故に (ii) から

$$\int_0^1 \frac{(y^2+1)^3(5y^4-8y^2+5)}{(y^4-y^2+1)^3}dy = \frac{5\pi}{2} + \frac{17\sqrt{3}}{16}\left(-\sqrt{3}\right) + \frac{39}{32}(2\pi+2) - \frac{3\sqrt{3}}{8}\left(-2\sqrt{3}\right) - \frac{3}{16}(6\pi+8) = \frac{61\pi}{16}$$

となるため, (i) により $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3\sin^{-1}x}{(3x^2+1)^4}dx = -\frac{5\pi}{6912}+\frac{1}{1728}\frac{61\pi}{16}=\frac{41\pi}{27648}$.

3. (1) $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ は単位円上の点だから $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす $0 \leqq \theta < 2\pi$ がある. このとき, 加法定理から

$$\begin{aligned} a\sin x + b\cos x &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\sin x + \sin\theta\cos x) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta) \end{aligned}$$

である.

一般に φ を周期 τ をもつ連続な周期関数とすれば, $\theta \in \boldsymbol{R}$ に対して, $y = x+\theta$, $z = y-\tau$ と変数変換すれば

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \varphi(x+\theta)dx &= \int_\theta^{\tau+\theta}\varphi(y)dy = \int_\theta^\tau \varphi(y)dy + \int_\tau^{\tau+\theta}\varphi(y)dy = \int_\theta^\tau \varphi(y)dy + \int_\tau^{\tau+\theta}\varphi(y-\tau)dy \\ &= \int_\theta^\tau \varphi(y)dy + \int_0^\theta \varphi(z)dz = \int_\theta^\tau \varphi(x)dx + \int_0^\theta \varphi(x)dx = \int_0^\tau \varphi(x)dx \end{aligned}$$

だから, $\alpha \in \boldsymbol{R}$ に対し, $y = x-\alpha$ と変数変換すれば $\displaystyle\int_\alpha^{\tau+\alpha}\varphi(x)dx = \int_0^\tau \varphi(y+\alpha)dy = \int_0^\tau \varphi(x)dx$ が成り立つ. 従って $\displaystyle\int_0^\tau \varphi(x+\theta)dx = \int_\alpha^{\tau+\alpha}\varphi(x)dx$ が得られる.

また, $y = \pi - x$ と変数変換すれば

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin x\right)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin(\pi-y)\right)dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin y\right)dy$$

が成り立つことに注意すると, 以上のことから,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(a\sin x + b\cos x)dx &= \int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)\right)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin x\right)dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin x\right)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin x\right)dx \\ &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin x\right)dx \end{aligned}$$

(2) $I = \displaystyle\int_0^\pi x\sin x f(\cos x)dx$ とおく. $y = \pi - x$ と変数変換すれば

$$\begin{aligned} I &= -\int_\pi^0 (\pi-y)\sin(\pi-y)f(\cos(\pi-y))dy = \int_0^\pi (\pi-y)\sin y f(-\cos y)dy \\ &= \int_0^\pi (\pi-x)\sin x f(\cos x)dx = \pi\int_0^\pi \sin x f(\cos x)dx - \int_0^\pi x\sin x f(\cos x)dx \\ &= \pi\int_0^\pi \sin x f(\cos x)dx - I \end{aligned}$$

だから $2I = \pi\displaystyle\int_0^\pi \sin x f(\cos x)dx$ である. さらに, $z = \cos x$ と変数変換して, f が偶関数であることを用いれば, $2I = -\pi\displaystyle\int_1^{-1} f(z)dz = 2\pi\int_0^1 f(x)dx$ だから $I = \pi\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ が得られる.

(3) $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xR(\sin x, \cos x)dx$ とおく. $y = \dfrac{\pi}{2} - x$ と変数変換すれば, $R(Y, X) = R(X, Y)$ より

$$\begin{aligned} J &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\frac{\pi}{2} - y\right) R\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right), \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - y\right) R(\cos y, \sin y) dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) R(\sin x, \cos x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R(\sin x, \cos x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xR(\sin x, \cos x)dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R(\sin x, \cos x)dx - J \end{aligned}$$

だから $2J = \dfrac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R(\sin x, \cos x)dx$ である. 故に $J = \dfrac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R(\sin x, \cos x)dx$.

4. (1) $a = b = 1$, $f(x) = x^{10}$ として前問の (1) を用い, さらに $\left(\sqrt{2}\sin x\right)^{10}$ が偶関数であることと, 教科書の 91 ページの公式から

$\displaystyle\int_0^{2\pi} (\sin x + \cos x)^{10} dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{2}\sin x\right)^{10} dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 32\sin^{10} x dx = 128 \frac{9!!}{10!!}\frac{\pi}{2} = \frac{63\pi}{4}$.

(2) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ として前問の (2) を用いると, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \pi \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \pi \left[\tan^{-1} x\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{4}$.

(3) $\dfrac{x\sin^3 x}{2 + \sin^2 x} = \dfrac{x \sin x(1 - \cos^2 x)}{3 - \cos^2 x}$ だから $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{3 - x^2}$ として前問の (2) を用いると,

$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin^3 x}{2 + \sin^2 x} dx = \pi \int_0^1 \frac{1 - x^2}{3 - x^2} dx = \pi \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{3 - x^2}\right) dx = \pi \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3} + x} + \frac{1}{\sqrt{3} - x}\right)\right) dx =$

$\displaystyle\pi \left[x - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\log\left(\sqrt{3} + x\right) - \log\left(\sqrt{3} - x\right)\right)\right]_0^1 = \pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\log\left(\sqrt{3} + 2\right)\right)$.

(4) $R(X, Y) = \dfrac{XY}{X^4 + Y^4}$ として前問の (3) を用い, $y = \sin^2 x$ と変数変換すれば,

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x\cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x + (1 - \sin^2 x)^2} dx = \frac{\pi}{8}\int_0^1 \frac{1}{y^2 + (1 - y)^2} dx =$

$\displaystyle\frac{\pi}{16}\int_0^1 \frac{1}{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} dx = \frac{\pi}{16}\left[2\tan^{-1}(2y - 1)\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{16}$.

微積分学 I 演習問題　第 12 回　広義積分

1. 次の広義積分を求めよ. ただし a, b, c, k は定数で, $a>0$, $c>1$ とする

(1) $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{8x+64}{x(x^2+4)^2}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x+7}{(x+2)^2(x^2+1)}dx$　(4) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\sin^{-1}x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\log 2}\frac{1}{e^x\sqrt{e^x-1}}dx$　(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}\right)dx$　(7) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\infty}\frac{8x-16}{x^6+x^4-x^2-1}dx$　(8) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\tan^{-1}x}{(1+x^2)^2}dx$

(9) $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-ax}\cos bx dx$　(10) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$　(11) $\displaystyle\int_1^{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx$　(12) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(13) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{4\sin^{-1}x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$　(14) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^7}{(1+x^4)^4}dx$　(15) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{x+(\sin^{-1}x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$　(16) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\tan^{-1}x}{x^2}dx$

(17) $\displaystyle\int_0^{2}\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}dx$　(18) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{x\sqrt{2-x^2}}dx$　(19) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}dx$　(20) $\displaystyle\int_0^{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx$

(21) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\log(1+x^2)}{x^2}dx$　(22) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x(x+1)^2}dx$　(23) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1+(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}dx$　(24) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\log x}{(1+x)^3}dx$

(25) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\log x}{(1+x)^2}dx$　(26) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{\sin x}dx$　(27) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\log\sin x dx$　(28) $\displaystyle\int_0^{1}x(\log x)^2dx$

(29) $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx$　(30) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2+3}}dx$　(31) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{e^x\sqrt{e^x+1}}dx$　(32) $\displaystyle\int_0^{\infty}x^3e^{-2x^2}dx$

(33) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\log(x^2+1)}{x^3}dx$　(34) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{e^{2x}-e^x}dx$　(35) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{(1+\log x)^2}{x^2}dx$　(36) $\displaystyle\int_1^{2}\frac{\log x}{\sqrt{x-1}}dx$

(37) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\log x}{x^k}dx$　(38) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\log x}{x^k}dx$　(39) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{(c-x)\sqrt{1-x^2}}dx$　(40) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{x\log x}{(1+x)^4}dx$

2. (1) $\displaystyle\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x+1)^2(x^2+1)}$ を部分分数に分けよ.　(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$ を求めよ.

3. 次の広義積分の収束・発散を調べよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{2}\frac{2}{1-x^2}dx$　(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\tan x dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\tan^{-1}x dx$　(4) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{\cos x}dx$

(5) $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}dx$　(6) $\displaystyle\int_0^{2}\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}dx$　(7) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{e^x}{\sqrt{x}}dx$　(8) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$

(9) $\displaystyle\int_0^{2}2^x\log x dx$　(10) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}dx$　(11) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sin x}dx$　(12) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$

(13) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$　(14) $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{1}{(x+1)\log x}dx$　(15) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\tan^{-1}x}{x}dx$　(16) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$

(17) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\tan^{-1}x}{x\sqrt{x-1}}dx$　(18) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\log x}{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}dx$　(19) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{x}{\sin x}dx$　(20) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\log x}{x\sqrt{x+1}}dx$

(21) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}dx$　(22) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x+1)}}dx$　(23) $\displaystyle\int_0^{\infty}xe^{-x^3}dx$　(24) $\displaystyle\int_0^{\infty}\sin\frac{1}{x^2}dx$

4. (発展問題) (1) $0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ ならば $\dfrac{2}{\pi}x\leqq\sin x$ であることを用いて $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)\,dx$ は収束することを示せ.

(2) $2I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$ を示し, I の値を求めよ.

5. (発展問題) 前問の結果を用いて, 次の積分の値を求めよ. ただし (14) の a は $-1\leqq a\leqq 1$ を満たすとする.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)^2dx$　(4) $\displaystyle\int_0^{\pi}\log(1-\cos x)dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi}\log(1+\cos x)dx$　(6) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1-\cos x}dx$　(7) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx$　(8) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\sin^{-1}x}{x}dx$

(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x\,dx$　(10) $\displaystyle\int_0^{\pi}x\log(\sin x)\,dx$　(11) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\tan x)\,dx$　(12) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{x^2\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(13) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\log(\sin x)\,dx$　(14) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\log|a-x|}{\sqrt{1-x^2}}dx$

第 12 回の演習問題の解答

1. (1) $\dfrac{8x+64}{x(x^2+4)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+4} + \dfrac{Dx+E}{(x^2+4)^2}$ とおくと,

$$(\text{右辺}) = \frac{(A+B)x^4 + Cx^3 + (8A+4B+D)x^2 + (4C+E)x + 16A}{x(x^2+4)^2}$$

より, $\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ 8A+4B+D=0 \\ 4C+E=8 \\ 16A=64 \end{cases}$. これを解けば, $A=4$, $B=-4$, $C=0$, $D=-16$, $E=8$ となるため $\dfrac{8x+64}{x(x^2+4)^2} = \dfrac{4}{x} - \dfrac{4x}{x^2+4} - \dfrac{16x-8}{(x^2+4)^2}$ である. 教科書の問 3.10 の結果から $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+4)^2}dx = \frac{x}{8(x^2+4)} + \frac{1}{16}\tan^{-1}\frac{x}{2}$ より $\displaystyle\int_2^\infty \frac{8x+64}{x(x^2+4)^2}dx = \int_2^\infty \left(\frac{4}{x} - \frac{4x}{x^2+4} - \frac{16x-8}{(x^2+4)^2}\right)dx = \left[2\log\frac{x^2}{x^2+4} + \frac{8}{x^2+4} + \frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}\right]_2^\infty = \frac{\pi}{8} + 2\log 2 - \frac{5}{4}$.

(2) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = -\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{x} = \frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x} = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\frac{x}{\sin x}$ であり, ロピタルの定理から $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{2} = 0$ だから $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \left[\frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\frac{x}{\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} - \lim_{x\to+0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\frac{x}{\sin x} = \frac{2}{\pi}$

(3) $\dfrac{x+7}{(x+2)^2(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{(x+2)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ とおくと,

$$(\text{右辺}) = \frac{(A+C)x^3 + (2A+B+4C+D)x^2 + (A+4C+4D)x + 2A+B+4D}{(x+2)^2(x^2+1)}$$

より, $\begin{cases} A+C=0 \\ 2A+B+4C+D=0 \\ A+4C+4D=1 \\ 2A+B+4D=7 \end{cases}$. これを解けば, $A=B=D=1, C=-1$ となるため $\dfrac{x+7}{(x+2)^2(x^2+1)} = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{(x+2)^2} + \dfrac{-x+1}{x^2+1}$ である. 故に $\displaystyle\int_0^t \frac{x+7}{(x+2)^2(x^2+1)}dx = \int_0^t \frac{1}{x+2}dx + \int_0^t \frac{1}{(x+2)^2}dx - \int_0^t \frac{x}{x^2+1}dx + \int_0^t \frac{1}{x^2+1}dx = [\log(x+2)]_0^t + \left[-\frac{1}{x+2}\right]_0^t - \left[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_0^t + [\tan^{-1}x]_0^t = \log(t+2) - \log 2 - \frac{1}{t+2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log(t^2+1) + \tan^{-1}t = \frac{1}{2}\log\frac{(t+2)^2}{(t^2+1)} - \log 2 - \frac{1}{t+2} + \frac{1}{2} + \tan^{-1}t$. 従って $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x+7}{(x+2)^2(x^2+1)}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{x+7}{(x+2)^2(x^2+1)}dx = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2}\log\frac{(t+2)^2}{(t^2+1)} - \log 2 - \frac{1}{t+2} + \frac{1}{2} + \tan^{-1}t\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} - \log 2$.

(4) $\theta = \sin^{-1}x$ とおくと $x = \dfrac{1}{2}$ のとき $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ であり, $x \to 1-0$ のとき, $\theta \to \dfrac{\pi}{2} - 0$ である. また $x = \sin\theta$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d\theta$ だから $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sin^{-1}x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta}{\sin^2\theta}d\theta$ である.

$\displaystyle\int \frac{\theta}{\sin^2\theta}d\theta = \int \theta\left(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)' d\theta = -\frac{\theta\cos\theta}{\sin\theta} + \int \frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta = -\frac{\theta\cos\theta}{\sin\theta} + \log|\sin\theta|$ だから

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta}{\sin^2\theta}d\theta = \left[-\frac{\theta\cos\theta}{\sin\theta} + \log|\sin\theta|\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \log 2$

(5) $t = \sqrt{e^x - 1}$ とおくと, $x \to +0$ のとき, $t \to +0$ であり, $x = \log 2$ ならば $t = 1$ である. また, $x = \log(t^2+1)$, $dx = \dfrac{2t}{t^2+1}dt$ だから $\displaystyle\int_0^{\log 2}\frac{1}{e^x\sqrt{e^x-1}}dx = \int_0^1 \frac{2}{(t^2+1)^2}dt$ である. さらに $t = \tan\theta$ と変数変換すれば t が 0 から 1 まで動くとき, θ は 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ まで動き, $dt = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ だから $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{(t^2+1)^2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)d\theta = \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

(6) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}\right)dx=\int\left(\frac{(\sin x)'}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)dx=\log|\sin x|-\log|x|=\log\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ だから
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}\right)dx=\left[\log\left|\frac{\sin x}{x}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\log\frac{2}{\pi}-\lim_{x\to+0}\log\left|\frac{\sin x}{x}\right|=\log 2-\log\pi.$

(7) $\displaystyle\frac{8x-16}{x^6+x^4-x^2-1}=\frac{8x-16}{(x-1)(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$ とおいて右辺を通分すれば, 分子は $(A+B+C)x^5+(A-B+D)x^4+(2A+2B+E)x^3+(2A-2B+F)x^2+(A+B-C-E)x+A-B-D-F$ となるため, $\begin{cases}A+B+C=0\\A-B+D=0\\2A+2B+E=0\\2A-2B+F=0\\A+B-C-E=8\\A-B-D-F=-16\end{cases}$. これを解けば, $A=-1$, $B=3$, $C=-2$, $D=4$, $E=-4$, $F=8$ となるため $\displaystyle\frac{8x-16}{x^6+x^4-x^2-1}=-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{2x-4}{x^2+1}-\frac{4x-8}{(x^2+1)^2}$ である. 教科書の問 3.10 の結果から $\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\tan^{-1}x$ より $\displaystyle\int_{\sqrt3}^{\infty}\frac{8x-16}{x^6+x^4-x^2-1}dx=$
$\displaystyle\int_{\sqrt3}^{\infty}\left(-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{2x-4}{x^2+1}-\frac{4x-8}{(x^2+1)^2}\right)dx=\left[\log\frac{(x+1)^3}{(x-1)(x^2+1)}+8\tan^{-1}x+\frac{4x+2}{x^2+1}\right]_{\sqrt3}^{\infty}=$
$\displaystyle\frac{4\pi}{3}-\log\frac{7+4\sqrt3}{2}-\frac{2\sqrt3+1}{2}.$

(8) $t=\tan^{-1}x$ とおくと $x=0$ のとき $t=0$ であり, $x\to\infty$ のとき, $t\to\dfrac{\pi}{2}-0$ である. また $x=\tan t$, $\displaystyle\frac{1}{1+x^2}dx=dt$ だから $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\tan^{-1}x}{(1+x^2)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos^2 t\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2t}{2}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)'dx=$
$\displaystyle\left[t\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)dx=\frac{\pi^2}{8}-\left[\frac{t^2}{4}-\frac{\cos 2t}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}$

(9) $\displaystyle\int e^{-ax}\cos bx\,dx=\int e^{-ax}\left(\frac{1}{b}\sin bx\right)'dx=\frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx+\frac{a}{b}\int e^{-ax}\sin bx\,dx=$
$\displaystyle\frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx+\frac{a}{b}\int e^{-ax}\left(-\frac{1}{b}\cos bx\right)'dx=\frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx-\frac{a}{b^2}e^{-ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{-ax}\cos bx\,dx$ だから
$\displaystyle\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx-\frac{a}{b^2}e^{-ax}\cos bx$ である. 従って $\displaystyle\int e^{-ax}\cos bx\,dx=$
$\displaystyle\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx-a\cos bx)$ が成り立つため $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx=\left[\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx-a\cos bx)\right]_0^{\infty}=\frac{a}{a^2+b^2}.$

(10) 教科書の問題 3.2 の (1) の結果から $\displaystyle\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=\tan^{-1}e^x$ だから $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=$
$\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx+\int_0^{\infty}\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=\frac{\pi}{4}-\lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}e^x+\lim_{x\to\infty}\tan^{-1}e^x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

(11) $t=x+\sqrt{x^2+2x-3}$ とおくと $x=\dfrac{t^2+3}{2t+2}$, $\sqrt{x^2+2x-3}=\dfrac{t^2+2t-3}{2t+2}$, $dx=\dfrac{t^2+2t-3}{2(t+1)^2}dt$ より
$\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx=\int\frac{\frac{t^2+3}{2t+2}(t^2+2t-3)}{\frac{t^2+2t-3}{2t+2}2(t+1)^2}dt=\int\frac{t^2+3}{2(t+1)^2}dt=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{2t-2}{(t+1)^2}\right)dt=$
$\displaystyle\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{2}{t+1}+\frac{4}{(t+1)^2}\right)dt=\frac{t}{2}-\log|t+1|-\frac{2}{t+1}=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+2x-3}\right)-\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right|$
$\displaystyle-\frac{2}{x+1+\sqrt{x^2+2x-3}}=\sqrt{x^2+2x-3}-\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right|-\frac{1}{2}$ だから $\displaystyle\int_1^2\frac{x}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx=$
$\displaystyle\sqrt5-\log\bigl(3+\sqrt5\bigr)-\lim_{x\to1+0}\left(\sqrt{x^2+2x-3}-\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right|\right)=\sqrt5-\log\bigl(3+\sqrt5\bigr)+\log 2$

(12) $t=\sin^{-1}x$ とおくと $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=dt$, $x=\sin t$ であり, 第 3 回の演習問題 2 の (1) から $\displaystyle\int\frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$
$\displaystyle\int t\sin t\,dt=\int t(-\cos t)'dt=-t\cos t+\int\cos t\,dt=-t\cos t+\sin t=x-\sin^{-1}x\cos(\sin^{-1}x)=x-\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}$
だから $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{0}\frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int_0^{1}\frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{x\to-1+0}\left(-x+\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}\right)+$

$\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\left(x-\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}\right)=2$

(13) $t=\sin^{-1}x$ とおくと $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=dt$, $x=\sin t$ より $\displaystyle\int\frac{4\sin^{-1}x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int(4t-1)dt=2t^2-t=$ $2(\sin^{-1}x)^2-\sin^{-1}x$ だから $\displaystyle\int_0^1\frac{4\sin^{-1}x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{x\to 1-0}\left(2(\sin^{-1}x)^2-\sin^{-1}x\right)=\frac{\pi^2-\pi}{2}$

(14) $t=1+x^4$ とおくと, $x^3dx=\dfrac{1}{4}dt$ より $\displaystyle\int\frac{x^7}{(1+x^4)^4}dx=\int\frac{t-1}{4t^4}dt=\int\left(\frac{1}{4t^3}-\frac{1}{4t^4}\right)dt=-\frac{1}{8t^2}+\frac{1}{12t^3}=$ $\displaystyle-\frac{1}{8(1+x^4)^2}+\frac{1}{12(1+x^4)^3}$ だから $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^7}{(1+x^4)^4}dx=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{8(1+x^4)^2}+\frac{1}{12(1+x^4)^3}+\frac{1}{24}\right)=\frac{1}{24}$

(15) $t=\sin^{-1}x$ とおくと $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=dt$, $x=\sin t$ であり, 第 3 回の演習問題 2 の (1) から $\displaystyle\int\frac{x+(\sin^{-1}x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int(\sin t+t^3)dt=-\cos t+\frac{t^4}{4}=-\cos(\sin^{-1}x)+\frac{1}{4}(\sin^{-1}x)^4=-\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{4}(\sin^{-1}x)^4$ だから, $\displaystyle\int_0^1\frac{x+(\sin^{-1}x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{x\to 1-0}\left(-\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{4}(\sin^{-1}x)^4+1\right)=\frac{\pi^4}{64}+1$

(16) $\displaystyle\int\frac{\tan^{-1}x}{x^2}dx=\int\tan^{-1}x\left(-\frac{1}{x}\right)'dx=-\frac{\tan^{-1}x}{x}+\int\frac{1}{x(x^2+1)}dx=-\frac{\tan^{-1}x}{x}+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=$ $\displaystyle-\frac{\tan^{-1}x}{x}+\log|x|-\frac{1}{2}\log(x^2+1)$ だから $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\tan^{-1}x}{x^2}dx=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\tan^{-1}x}{x}+\log|x|-\frac{1}{2}\log(x^2+1)+\frac{\pi}{4}+\frac{\log 2}{2}\right)$ $\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\tan^{-1}x}{x}-\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+\frac{\pi}{4}+\frac{\log 2}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\log 2}{2}$

(17) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}dx-\int\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}dx=\sin^{-1}(x-1)-\sqrt{2x-x^2}$ だから $\displaystyle\int_0^2\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}dx=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}dx+\int_1^2\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}dx=\lim_{x\to+0}\left(-1-\sin^{-1}(x-1)+\sqrt{2x-x^2}\right)+$ $\displaystyle\lim_{x\to 2-0}\left(\sin^{-1}(x-1)-\sqrt{2x-x^2}+1\right)=\pi$

(18) $t=\sqrt{2-x^2}$ とおくと $xdx=-tdt$, $x^2=2-t^2$ だから $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{2-x^2}}dx=\int\frac{x}{x^2\sqrt{2-x^2}}dx=\int\frac{1}{t^2-2}dt=$ $\displaystyle\int\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}}-\frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)dt=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\log\left|t-\sqrt{2}\right|-\log\left|t+\sqrt{2}\right|\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2-x^2}}=$ $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2-x^2}}{|x|}$ だから $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{x\sqrt{2-x^2}}dx=\lim_{x\to\sqrt{2}-0}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2-x^2}}{|x|}-\frac{\log\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\log\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}}$

(19) $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}dx=\int\frac{x^2+2x+2-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2+1}dx-\int\frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}dx=$ $\displaystyle\tan^{-1}(x+1)+\frac{1}{x^2+2x+2}$ だから $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}dx=\lim_{x\to\infty}\left(\tan^{-1}(x+1)+\frac{1}{x^2+2x+2}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

(20) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx=\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}$ だから $\displaystyle\int_0^9\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx+\int_1^9\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx=$ $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}\right)+\lim_{x\to 1+0}\left(6-\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{9}{2}$

(21) $\displaystyle\int\frac{\log(1+x^2)}{x^2}dx=\int\log(1+x^2)\left(-\frac{1}{x}\right)'dx=-\frac{\log(1+x^2)}{x}+\int\frac{2}{1+x^2}dx=-\frac{\log(1+x^2)}{x}+2\tan^{-1}x$ だから $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log(1+x^2)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\log(1+x^2)}{x^2}x=\left(\lim_{x\to+0}\frac{\log(1+x^2)}{x^2}\right)\left(\lim_{x\to+0}x\right)=1\cdot 0=0$ であることに注意すれば, $\displaystyle\int_0^1\frac{\log(1+x^2)}{x^2}dx=\lim_{x\to+0}\left(\frac{\pi}{2}-\log 2+\frac{\log(1+x^2)}{x}-2\tan^{-1}x\right)=\frac{\pi}{2}-\log 2$

(22) $\displaystyle\frac{1}{x(1+x)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{1+x}+\frac{C}{(1+x)^2}$ とおくと (右辺) $\displaystyle=\frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(1+x)^2}$ より, $\left\{\begin{smallmatrix}A+B=0\\2A+B+C=0\\A=1\end{smallmatrix}\right.$. これを解けば, $A=1$, $B=C=-$ となる. 従って $\displaystyle\int\frac{1}{x(x+1)^2}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\right)dx=$ $\displaystyle\log\left|\frac{x}{1+x}\right|+\frac{1}{1+x}$ だから $\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{x(x+1)^2}dx=\lim_{x\to\infty}\left(\log\left|\frac{x}{1+x}\right|+\frac{1}{1+x}+\log 2-\frac{1}{2}\right)=\log 2-\frac{1}{2}$

(23) $t=\tan^{-1}x$ とおくと $dt=\dfrac{1}{1+x^2}dx$ より $\displaystyle\int\frac{1+(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}dx=\int(1+t^2)dt=t+\frac{t^3}{3}=$ $\tan^{-1}x+\dfrac{1}{3}(\tan^{-1}x)^3$ だから $\displaystyle\int_1^\infty\frac{1+(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}dx=\lim_{x\to\infty}\left(\tan^{-1}x+\frac{1}{3}(\tan^{-1}x)^3-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^3}{192}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi^3}{192}$

(24) (22) の解答から $\displaystyle\int\frac{\log x}{(1+x)^3}dx=\int\log x\left(-\frac{1}{2(1+x)^2}\right)'dx=-\frac{\log x}{2(1+x)^2}+\int\frac{1}{2x(1+x)^2}dx=$ $\displaystyle-\frac{\log x}{2(1+x)^2}+\frac{1}{2}\log\left|\frac{x}{1+x}\right|+\frac{1}{2(1+x)}$ であり，教科書の問 1.18 より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{2(1+x)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}\frac{x}{2(1+x)^2}=$ $\displaystyle\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}\right)\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2(1+x)^2}\right)=0\cdot0=0$ だから $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log x}{(1+x)^3}dx=$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\log x}{2(1+x)^2}+\frac{1}{2}\log\left|\frac{x}{1+x}\right|+\frac{1}{2(1+x)}+\frac{\log 2}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\log 2}{2}-\frac{1}{4}$

(25) $\displaystyle\int\frac{\log x}{(1+x)^2}dx=\int\log x\left(-\frac{1}{1+x}\right)'dx=-\frac{\log x}{1+x}+\int\frac{1}{x(1+x)}dx=-\frac{\log x}{1+x}+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)dx=$ $\displaystyle-\frac{\log x}{1+x}+\log x-\log(1+x)=\frac{x\log x}{1+x}-\log(1+x)$ だから，教科書の問 1.18 より $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x\log x}{1+x}=0$ であることに注意すれば $\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{(1+x)^2}dx=\lim_{x\to+0}\left(-\frac{x\log x}{1+x}+\log(1+x)-\log 2\right)=-\log 2$

(26) $\displaystyle\int\frac{1-\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{(1-\cos x)\sin x}{\sin^2x}dx=\int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx=-\log(1+\cos x)$ だから $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{\sin x}dx=$ $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log(1+\cos x)=\log 2$

(27) 教科書の例題 3.12 から $\displaystyle\int\sin x\log\sin x\,dx=\int(-\cos x)'\log\sin x\,dx=-\cos x\log\sin x+\int\frac{\cos^2x}{\sin x}dx=$ $\displaystyle\int\frac{1-\sin^2x}{\sin x}dx-\cos x\log\sin x=\int\frac{1}{\sin x}dx-\int\sin x\,dx-\cos x\log\sin x=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\cos x-\cos x\log\sin x.$ $0<x<\pi$ ならば $\displaystyle\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\cos x\log\sin x=\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)-\cos x\log\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)=(1-\cos x)\log\left(\sin\frac{x}{2}\right)-$ $\displaystyle(1+\cos x)\log\left(\cos\frac{x}{2}\right)-\log 2\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\log\left(\sin\frac{x}{2}\right)-2\cos^2\frac{x}{2}\log\left(\cos\frac{x}{2}\right)-\log 2\cos x$ であり，教科書の問 1.18 より $\displaystyle\lim_{x\to+0}\sin^2\frac{x}{2}\log\left(\sin\frac{x}{2}\right)=0$ であることに注意すれば $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\log\sin x\,dx=$ $\displaystyle\lim_{x\to+0}\left((\log 2-1)\cos x-2\sin^2\frac{x}{2}\log\left(\sin\frac{x}{2}\right)+2\cos^2\frac{x}{2}\log\left(\cos\frac{x}{2}\right)\right)=\log 2-1$

(28) $\displaystyle\int x(\log x)^2dx=\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'(\log x)^2dx=\frac{x^2}{2}(\log x)^2-\int x\log x\,dx=\frac{x^2}{2}(\log x)^2-\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx=$ $\displaystyle\frac{x^2}{2}(\log x)^2-\frac{x^2}{2}\log x+\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}(\log x)^2-\frac{x^2}{2}\log x+\frac{x^2}{4}$ だから，教科書の問 1.18 より $\displaystyle\int_0^1x(\log x)^2dx=$ $\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{4}-\frac{x^2}{2}(\log x)^2+\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}\right)=\frac{1}{4}$

(29) $t=\sqrt{x^2-4}$ とおくと $x^2=t^2+4$, $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx=dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx=\int\frac{x}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx=\int\frac{1}{t^2+4}dt=$ $\displaystyle\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{t}{2}=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$ だから $\displaystyle\int_2^\infty\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}=\frac{\pi}{4}$

(30) $t=\sqrt{x^2+3}$ とおくと $x^2=t^2-3$, $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx=dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+3}}dx=\int\frac{x}{x^2\sqrt{x^2+3}}dx=\int\frac{1}{t^2-3}dt=$ $\displaystyle\int\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{3}}-\frac{1}{t+\sqrt{3}}\right)dt=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\log\left|t-\sqrt{3}\right|-\log\left|t+\sqrt{3}\right|\right)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\left(\frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3}}\right)$ だから $\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{x\sqrt{x^2+3}}dx=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\left(\frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{3}}\right)+\frac{\log(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\log(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$

(31) $t=\sqrt{e^x+1}$ とおくと $e^x=t^2-1$, $\dfrac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx=2dt$ であり，第 10 回の演習問題 1 の (37) の結果から $\displaystyle\int\frac{1}{e^x\sqrt{e^x+1}}dx=\int\frac{e^x}{e^{2x}\sqrt{e^x+1}}dx=\int\frac{2}{(t^2-1)^2}dt=\frac{1}{2}\left(-\log|t-1|-\frac{1}{t-1}+\log|t+1|-\frac{1}{t+1}\right)=$

$\dfrac{1}{2}\left(\log\dfrac{\sqrt{e^x+1}+1}{\sqrt{e^x+1}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{e^x+1}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right)$ だから $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x\sqrt{e^x+1}}dx =$
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\log\frac{\sqrt{e^x+1}+1}{\sqrt{e^x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{e^x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right)+\sqrt{2}-\log\bigl(\sqrt{2}+1\bigr)\right)=\sqrt{2}-\log\bigl(\sqrt{2}+1\bigr)$

(32) $t=x^2$ とおくと $xdx=\dfrac{1}{2}dt$ より $\displaystyle\int x^3e^{-2x^2}dx=\int\frac{t}{2}e^{-2t}dt=\int\frac{t}{4}(-e^{-2t})'dt=-\frac{t}{4}e^{-2t}+\int\frac{1}{4}e^{-2t}dt=$
$-\dfrac{t}{4}e^{-2t}-\dfrac{1}{8}e^{-2t}=-\dfrac{x^3}{4}e^{-2x^3}-\dfrac{1}{8}e^{-2x^3}$ だから, 教科書の問 1.17 から $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{4}e^{-2x^3}=0$ であることに注意すれば
$\displaystyle\int_0^\infty x^3e^{-2x^3}dx=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{8}-\frac{x^3}{4}e^{-2x^3}-\frac{1}{8}e^{-2x^3}\right)=\frac{1}{8}$

(33) $\displaystyle\int\frac{\log(x^2+1)}{x^3}dx=\int\left(-\frac{1}{2x^2}\right)'\log(x^2+1)dx=-\frac{\log(x^2+1)}{2x^2}+\int\frac{1}{x(x^2+1)}dx=$
$\displaystyle-\frac{\log(x^2+1)}{2x^2}+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=-\frac{\log(x^2+1)}{2x^2}+\frac{1}{2}\log\frac{x^2}{x^2+1}$ であり, 教科書の問 1.18 から $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2+1)}{2x^2}$
$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}\frac{x^2+1}{2x^2}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}\right)\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2}\right)=0\cdot\frac{1}{2}=0$ だから $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log(x^2+1)}{x^3}dx=$
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\log(x^2+1)}{2x^2}+\frac{1}{2}\log\frac{x^2}{x^2+1}+\log 2\right)=\log 2$

(34) $t=e^x$ とおくと $e^xdx=dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{e^{2x}-e^x}dx=\int\frac{e^x}{e^{3x}-e^{2x}}dx=\int\frac{1}{t^2(t-1)}dt=\int\frac{t-(t-1)}{t^2(t-1)}dt=$
$\displaystyle\int\left(\frac{1}{t(t-1)}-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt=\log|t-1|-\log|t|+\frac{1}{t}=\log|1-e^{-x}|+e^{-x}$ だから
$\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{e^{2x}-e^x}dx=\lim_{x\to\infty}\bigl(\log|1-e^{-x}|+e^{-x}-\log(1-e^{-1})-e^{-1}\bigr)=1-\frac{1}{e}-\log(e-1)$

(35) $\displaystyle\int\frac{(1+\log x)^2}{x^2}dx=\int\left(-\frac{1}{x}\right)'(1+\log x)^2dx=-\frac{(1+\log x)^2}{x}+2\int\frac{1+\log x}{x^2}dx=-\frac{(1+\log x)^2}{x}+$
$\displaystyle 2\int\left(-\frac{1}{x}\right)'(1+\log x)dx=-\frac{(1+\log x)^2}{x}-\frac{2+2\log x}{x}+2\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{5}{x}-\frac{4\log x}{x}-\frac{(\log x)^2}{x}$ であり, 教科書の
問 1.18 から $\displaystyle\int_1^\infty\frac{(1+\log x)^2}{x^2}dx=\lim_{x\to\infty}\left(5-\frac{5}{x}-\frac{4\log x}{x}-\frac{4(\log x)^2}{x}\right)=5$

(36) $t=\sqrt{x-1}$ とおくと, $x=t^2+1$, $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}dx=2dt$ より $\displaystyle\int\frac{\log x}{\sqrt{x-1}}dx=\int 2\log(t^2+1)dt=$
$\displaystyle\int(2t)'\log(t^2+1)dt=2t\log(t^2+1)-\int\frac{4t^2}{t^2+1}dt=2t\log(t^2+1)-\int\left(4-\frac{4}{t^2+1}\right)dt=$
$2t\log(t^2+1)-4t+4\tan^{-1}t=2\sqrt{x-1}\log x-4\sqrt{x-1}+4\tan^{-1}\sqrt{x-1}$ だから $\displaystyle\int_1^2\frac{\log x}{\sqrt{x-1}}dx=$
$\displaystyle\lim_{x\to1+0}\bigl(2\log 2+\pi-4-2\sqrt{x-1}\log x+4\sqrt{x-1}-4\tan^{-1}\sqrt{x-1}\bigr)=2\log 2+\pi-4$

(37) $k=1$ ならば $\displaystyle\int\frac{\log x}{x}dx=\frac{(\log x)^2}{2}$ だから, $\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{x^k}dx=\lim_{x\to+0}\left(-\frac{1}{2}(\log x)^2\right)=-\infty$, $k\neq1$ ならば
$\displaystyle\int\frac{\log x}{x^k}dx=\int\left(\frac{x^{1-k}}{1-k}\right)'\log x\,dx=\frac{x^{1-k}\log x}{1-k}-\int\frac{1}{(1-k)x^k}=\frac{x^{1-k}}{1-k}\log x-\frac{x^{1-k}}{(1-k)^2}$ だから, $k<1$ ならば教科書
の問 1.18 から, $\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{x^k}dx=\lim_{x\to+0}\left(\frac{x^{1-k}}{(1-k)^2}-\frac{x^{1-k}}{1-k}\log x-\frac{1}{(1-k)^2}\right)=-\frac{1}{(1-k)^2}$, $k>1$ ならば $\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{x^k}dx=$
$\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{x^{1-k}}{(1-k)^2}-\frac{x^{1-k}}{1-k}\log x-\frac{1}{(1-k)^2}\right)=\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x^{k-1}(k-1)}\left(\log x+\frac{1}{k-1}\right)-\frac{1}{(1-k)^2}\right)=-\infty.$

(38) 上の問題より $\displaystyle\int\frac{\log x}{x^k}dx=\begin{cases}\frac{x^{1-k}}{1-k}\log x-\frac{x^{1-k}}{(1-k)^2} & k\neq1\\ \frac{1}{2}(\log x)^2 & k=1\end{cases}$ だから, $k<1$ ならば
$\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log x}{x^k}dx=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{1-k}}{1-k}\log x-\frac{x^{1-k}}{(1-k)^2}+\frac{1}{(1-k)^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{1-k}}{1-k}\left(\log x-\frac{1}{1-k}\right)+\frac{1}{(1-k)^2}\right)=\infty,$
$k=1$ ならば $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log x}{x^k}dx=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}(\log x)^2=\infty$, $k>1$ ならば教科書の問 1.18 から, $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log x}{x^k}dx=$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{1-k}}{1-k}\log x-\frac{x^{1-k}}{(1-k)^2}+\frac{1}{(1-k)^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\log x}{x^{k-1}(k-1)}-\frac{1}{x^{k-1}(k-1)^2}+\frac{1}{(k-1)^2}\right)=\frac{1}{(1-k)^2}$.

(39) $x=\sin t$ とおけば $dx=\cos t dt$ より $\displaystyle\int\frac{1}{(c-x)\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{c-\sin t}dt\cdots(*)$. さらに $s=\tan\dfrac{t}{2}$ とおけば $\sin t=\dfrac{2s}{1+s^2}$, $dt=\dfrac{2}{1+s^2}ds$ だから $\displaystyle(*)=\int\frac{2}{\left(c-\frac{2s}{1+s^2}\right)(1+s^2)}ds=\frac{2}{c}\int\frac{1}{\left(s-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{c^2-1}}{c}\right)^2}ds=$

$\dfrac{2}{\sqrt{c^2-1}}\tan^{-1}\left(\dfrac{cs-1}{\sqrt{c^2-1}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{c^2-1}}\tan^{-1}\left(\dfrac{c\tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}x\right)-1}{\sqrt{c^2-1}}\right)$ である. 従って

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\frac{1}{(c-x)\sqrt{1-x^2}}dx &= \int_{-1}^{0}\frac{1}{(c-x)\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{(c-x)\sqrt{1-x^2}}dx\\
&= \lim_{x\to-1+0}\left(-\frac{2}{\sqrt{c^2-1}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{c^2-1}}\right)-\frac{2}{\sqrt{c^2-1}}\tan^{-1}\left(\frac{c\tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}x\right)-1}{\sqrt{c^2-1}}\right)\right)\\
&\quad+\lim_{x\to1+0}\left(\frac{2}{\sqrt{c^2-1}}\tan^{-1}\left(\frac{c\tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}x\right)-1}{\sqrt{c^2-1}}\right)+\frac{2}{\sqrt{c^2-1}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{c^2-1}}\right)\right)\\
&= \frac{2}{\sqrt{c^2-1}}\left(\tan^{-1}\left(\frac{c+1}{\sqrt{c^2-1}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{c-1}{\sqrt{c^2-1}}\right)\right).
\end{aligned}$$

$\dfrac{c+1}{\sqrt{c^2-1}}\dfrac{c-1}{\sqrt{c^2-1}}=1$ であることに注意すれば, 教科書の問 1.11 の (4) と上式から $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{(c-x)\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{\sqrt{c^2-1}}$.

(40) 第 11 回の問題 1 の (73) より, $\dfrac{x\log x}{(1+x)^4}$ の原始関数は $\dfrac{x^2\log x(x+3)}{6(1+x)^3}-\dfrac{1}{6}\log(1+x)+\dfrac{1}{6(1+x)}-\dfrac{1}{6(1+x)^2}$ だから, 教科書の問 1.18 から, $\displaystyle\int_0^1\frac{x\log x}{(1+x)^4}dx=\lim_{x\to+0}\left(-\frac{1}{6}\log 2+\frac{1}{24}-\frac{x^2(x+3)\log x}{6(1+x)^3}+\frac{1}{6}\log(1+x)-\frac{x}{6(1+x)^2}\right)$ $=-\dfrac{1}{6}\left(\log 2-\dfrac{1}{4}\right)$.

2. (1) $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x+1)^2(x^2+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ とおくと,

$$(\text{右辺})=\frac{(A+C)x^3+(A+B+2C+D)x^2+(A+C+2D)x+A+B+D}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

より $\begin{cases}A+C=a\\A+B+2C+D=b\\A+1C+2D=c\\A+B+D=d\end{cases}$. これを解けば, $A=\dfrac{2a-b+d}{2}$, $B=\dfrac{-a+b-c+d}{2}$, $C=\dfrac{b-d}{2}$, $D=\dfrac{-a+c}{2}$ となるため, $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x^2+1)(x+1)^2}=\dfrac{2a-b+d}{2(x+1)}+\dfrac{-a+b-c+d}{2(x+1)^2}+\dfrac{(b-d)x-a+c}{2(x^2+1)}$.

(2) $\displaystyle\int_0^t\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x+1)^2(x^2+1)}dx=\int_0^t\frac{A}{x+1}dx+\int_0^t\frac{B}{(x+1)^2}+\int_0^t\frac{Cx}{x^2+1}dx+\int_0^t\frac{D}{x^2+1}dx=[A\log(1+x)]_0^t-\left[\frac{B}{1+x}\right]_0^t+\left[\frac{C}{2}\log(1+x^2)\right]_0^t+[D\tan^{-1}x]_0^t=\frac{2a-b+d}{2}\log(1+t)+\frac{-a+b-c+d}{2}\left(1-\frac{1}{1+t}\right)+\frac{b-d}{4}\log(1+t^2)-\frac{a-c}{2}\tan^{-1}t=a\log(1+t)+\frac{b-d}{4}\log\frac{1+t^2}{(1+t)^2}+\frac{-a+b-c+d}{2}\left(1-\frac{1}{1+t}\right)-\frac{a-c}{2}\tan^{-1}t$

であり, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\log(1+t)=\infty$, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\log\frac{1+t^2}{(1+t)^2}=0$, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+t}\right)=1$, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}2\tan^{-1}t=\frac{\pi}{2}$ だから,

$a>0$ ならば $\displaystyle\int_0^\infty\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x+1)^2(x^2+1)}dx=\infty$, $a<0$ ならば $\displaystyle\int_0^\infty\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x+1)^2(x^2+1)}dx=-\infty$, $a=0$ ならば $\displaystyle\int_0^\infty\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x+1)^2(x^2+1)}dx=\frac{b-c+d}{2}+\frac{c\pi}{4}$,

3. (1) $\displaystyle\int_0^1\frac{2}{1-x^2}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx=[\log|1+x|-\log|1-x|]_0^1=\lim_{x\to1-0}(\log|1+x|-\log|1-x|)=\infty$,

$\displaystyle\int_1^2 \frac{2}{1-x^2}dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx = [\log|1+x|-\log|1-x|]_1^2 = \lim_{x\to 1+0}(\log 3-\log|1+x|+\log|1-x|) =$ $-\infty$ だから $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{1-x^2}dx$ は存在しない.

(2) $t=\cos x$ とおけば $\sin x dx = -dt$ だから $\displaystyle\int \sin^2 x\tan x dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos x}dx = \int\left(t-\frac{1}{t}\right)dt =$ $\displaystyle\frac{t^2}{2}-\log|t| = \frac{\cos^2 x}{2}-\log|\cos x|$. 従って $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\tan x dx = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\cos^2 x}{2}-\log|\cos x|\right)-\frac{1}{2} = \infty$, $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 x\tan x dx = \frac{1}{2}-\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0}\left(\frac{\cos^2 x}{2}-\log|\cos x|\right) = -\infty$ となるため $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\tan x dx$ は存在しない.

(3) $\displaystyle\int \tan^{-1} x dx = x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(x^2+1)$ である. 一方 $x>0$ ならば $\displaystyle 0<\frac{\log(x^2+1)}{2x}<\frac{\log(x^2+2x+1)}{2x} = \frac{\log(x+1)}{x}$ であり, 教科書の問 1.18 から $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+1)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+1)}{x+1}\frac{x+1}{x} = 0$ だから $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2+1)}{2x} = 0$ である. 従って $\displaystyle\int_0^\infty \tan^{-1}x dx = \lim_{x\to\infty}\left(x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right) =$
$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\tan^{-1}x-\frac{\log(x^2+1)}{2x}\right) = \infty$.

(4) 教科書の問 3.7 の結果から $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}dx = -\log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|$ だから $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}dx = \left[-\log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$ $\displaystyle -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right| = \infty$ であり, 同様に $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{\cos x}dx = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right| = -\infty$ である. 従って, $\displaystyle\int_0^\pi\frac{1}{\cos x}dx$ は存在しない.

(5) 教科書の 104 ページの結果から $\displaystyle\int\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx - \int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \sqrt{x^2-1}-\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$ である. 一方 $x\geqq 1$ ならば $\displaystyle 0\leqq\frac{\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|}{x}<\frac{\log 2x}{x}$ であり, 教科書の問 1.18 から
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log 2x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log x}{x}+\frac{\log 2}{x}\right) = 0$ となるため, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|}{x} = 0$ である.
従って $\displaystyle\int_2^\infty\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\sqrt{3}+\log\left(2+\sqrt{3}\right)\right) =$
$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-\frac{\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|}{x}-\frac{\sqrt{3}-\log(2+\sqrt{3})}{x}\right) = \infty$.

(6) $\displaystyle\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{(x+1)^1+(x-1)^2}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}$ だから $\displaystyle\int_0^1\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}dx = \left[-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right]_0^1 =$ $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\left(-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right) = \infty$, $\displaystyle\int_1^2\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}dx = \left[-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right]_1^2 = \lim_{x\to1+0}\left(-\frac{4}{3}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right) = \infty$ だから $\displaystyle\int_0^2\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}dx = \infty$.

(7) $0<x\leqq 1$ ならば $1<e^x\leqq e$ だから $\displaystyle 0<\frac{e^x}{\sqrt{x}}\leqq\frac{e}{\sqrt{x}}$ が成り立つ. 教科書の問 4.1 により $\displaystyle\int_0^1\frac{e}{\sqrt{x}}dx$ は収束するため, 教科書の定理 4.2 の (1) によって $\displaystyle\int_0^1\frac{e^x}{\sqrt{x}}dx$ も収束する.

(8) $x\geqq 1$ ならば $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}\leqq\frac{1}{\sqrt{x^4}}=\frac{1}{x^2}$ であり, 教科書の問 4.3 により $\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx$ は収束するため, 教科書の定理 4.2 の (1) によって $\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$ も収束する. 従って $\displaystyle\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx = \int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx+\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$ も収束する.

(9) $0<x\leqq 1$ ならば $1<2^x\leqq 2$ だから $0\leqq -2^x\log x\leqq -2\log x$ が成り立つ. $\displaystyle\int_0^1(-2\log x)dx = [-2x\log x+2x]_0^1$ $\displaystyle = 2-\lim_{x\to+0}(-2x\log x+2x) = 2$ となって, $\displaystyle\int_0^1(-4\log x)dx$ は収束するため教科書の定理 4.2 の (1) によって

$\displaystyle\int_0^1 (-2^x \log x)dx$ も収束する．従って $\displaystyle\int_0^2 2^x \log x dx = -\int_0^1 (-2^x \log x)dx + \int_1^2 2^x \log x dx$ も収束する．

(10) 0 以上の整数 n に対して $x \in [\pi n, \pi(n+1)]$ ならば $\dfrac{x}{1+x^6 \sin^2 x} \leqq \dfrac{\pi(n+1)}{1+x^6 \sin^2 x} \leqq \dfrac{\pi(n+1)}{1+(\pi n)^6 \sin^2 x}$ だから $\displaystyle\int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x}dx \leqq \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{\pi(n+1)}{1+(\pi n)^6 \sin^2 x}dx$ である．$y = x - \pi n - \dfrac{\pi}{2}$ とおけば, $n > 0$ の場合 $\displaystyle\int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{\pi(n+1)}{1+(\pi n)^6 \sin^2 x}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi(n+1)}{1+(\pi n)^6 \cos^2 y}dy \cdots (*)$ であり，$t = \tan y$ とおくと $\cos^2 y = \dfrac{1}{1+t^2}$, $dy = \dfrac{dt}{1+t^2}$ だから $\displaystyle\int \frac{\pi(n+1)}{1+(\pi n)^6 \cos^2 x}dx = \int \frac{\pi(n+1)}{\left(1+(\pi n)^6 \frac{1}{1+t^2}\right)(1+t^2)}dt = \int \frac{\pi(n+1)}{t^2+(\pi n)^6}dt = \frac{n+1}{\pi^2 n^3} \tan^{-1} \frac{t}{(\pi n)^3} = \frac{n+1}{\pi^2 n} \tan^{-1} \frac{\tan y}{(\pi n)^3}$. 従って $(*) = \dfrac{n+1}{\pi n^3} \leqq \dfrac{4}{\pi n(n+1)} = \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$ が成り立ち, $n = 0$ の場合は $(*) = \pi^2$ である．任意の正の実数 R に対して $k \geqq \dfrac{R}{\pi}$ を満たす自然数 k をとれば, $\displaystyle\int_0^R \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x}dx \leqq \int_0^{\pi k} \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x}dx = \sum_{n=0}^{k-1} \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x}dx \leqq \pi^2 + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \pi^2 + \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{k}\right) < \pi^2 + \frac{4}{\pi}$ となるため, $\displaystyle\int_0^R \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x}dx$ は上に有界である．故に $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x}dx$ は収束する．

(11) $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ ならば $0 < \sin x \leqq x$, $\dfrac{\sqrt{16-\pi^2}}{4} \leqq \sqrt{1-x^2}$ だから $0 < \dfrac{\sqrt{16-\pi^2}}{4x} \leqq \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sin x}$ である．$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{16-\pi^2}}{4x}dx = \left[\frac{\sqrt{16-\pi^2}}{4} \log x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{16-\pi^2}}{4} \log \frac{\pi}{4} - \lim_{x \to +0} \frac{\sqrt{16-\pi^2}}{4} \log x = \infty$ となるため, 教科書の定理 4.2 の (2) によって $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sin x}dx$ は発散する．

(12) $\sin x$ のグラフは $[0, \pi]$ において上に凸であるため $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ならば $0 < \dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin x$ が成り立つ．従って $0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ならば $0 < \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}} \leqq \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}$ であり，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}dx = \left[\sqrt{2\pi x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$ となるため，教科書の定理 4.2 の (1) によって $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$ は収束する．$\dfrac{\pi}{2} < t < \pi$ に対し，$y = \pi - x$ と変数変換すれば $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^t \frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-t} \frac{-1}{\sqrt{\sin(\pi-y)}}dy = \int_{\pi-t}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin y}}dy$ であり, 上の結果から $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx = \lim_{t \to \pi-0} \int_{\pi-t}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin y}}dy$ は収束するため, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$ も収束する．

(13) $x \geqq 1$ ならば $\dfrac{x}{\sqrt{x^5+1}} < \dfrac{x}{\sqrt{x^5}} = \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ であり, 教科書の問 4.3 により $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ は収束するため, 教科書の定理 4.2 の (1) によって $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$ も収束する．従って $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx + \int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$ も収束する．

(14) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x \log x}}{\frac{1}{(x+1)\log x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x} = 1$ だから $\dfrac{1}{(x+1)\log x} \simeq \dfrac{1}{x \log x}$ $(x \to \infty)$ である．
また $\displaystyle\int \frac{1}{x \log x}dx = \int \frac{(\log x)'}{\log x}dx = \log(\log x)$ より $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x \log x}dx = \lim_{x \to \infty} \log(\log x) - \log(\log 2) = \infty$ だから教科書の定理 4.3 によって $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{(x+1)\log x}dx$ は発散する．

(15) $x \geqq 1$ ならば $\tan^{-1} x \geqq \dfrac{\pi}{4}$ だから $\dfrac{\tan^{-1} x}{x} \geqq \dfrac{\pi}{4x}$ である．$\displaystyle\int_1^\infty \frac{\pi}{4x}dx = \left[\frac{\pi}{4} \log x\right]_1^\infty = \lim_{x \to \infty} \frac{\pi}{4} \log x = \infty$ となるため, 教科書の定理 4.2 の (2) によって $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\tan^{-1} x}{x}dx$ は発散する．
従って $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\tan^{-1} x}{x}dx = \int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{x}dx + \int_1^\infty \frac{\tan^{-1} x}{x}dx$ も発散する．

(16) $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x^4-1}}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=1$ だから $\frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\simeq\frac{1}{x^2}$ $(x\to\infty)$ である. また $\int_2^\infty\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_2^\infty=\frac{1}{2}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=2$ となって $\int_2^\infty\frac{1}{x^2}dx$ は収束するため, 教科書の定理 4.3 によって $\int_2^\infty\frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$ は収束する. 一方, $x>1$ ならば $0<\frac{1}{\sqrt{x^4-1}}=\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)(x^2+1)}}\leqq\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ であり, $\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx=\left[2\sqrt{x-1}\right]_1^2=2$ だから教科書の定理 4.2 の (1) によって

$\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$ は収束する. 従って $\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx+\int_2^\infty\frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$ も収束する.

(17) $x\geqq 2$ ならば $0<\tan^{-1}x<\frac{\pi}{2}$, $0<\frac{1}{x\sqrt{x-1}}<\frac{1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}$ だから $0<\frac{\tan^{-1}x}{x\sqrt{x-1}}<\frac{\pi}{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}$ である. $\int_2^\infty\frac{\pi}{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}dx=\left[-\frac{\pi}{\sqrt{x-1}}\right]_2^\infty=\pi-\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{\sqrt{x-1}}=\pi$ だから教科書の定理 4.2 の (1) により $\int_2^\infty\frac{\tan^{-1}x}{x\sqrt{x-1}}dx$ は収束する. 一方 $1<x\leqq 2$ ならば $\tan^{-1}x\leqq x$ だから $\frac{\tan^{-1}x}{x\sqrt{x-1}}\leqq\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ である.

$\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx=\left[2\sqrt{x-1}\right]_1^2=2$ だから教科書の定理 4.2 の (1) によって $\int_1^2\frac{\tan^{-1}x}{x\sqrt{x-1}}dx$ は収束する.

従って $\int_1^\infty\frac{\tan^{-1}x}{x\sqrt{x-1}}dx=\int_1^2\frac{\tan^{-1}x}{x\sqrt{x-1}}dx+\int_2^\infty\frac{\tan^{-1}x}{x\sqrt{x-1}}dx$ も収束する.

(18) $x\geqq e$ ならば $\log x\geqq 1$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}\geqq\frac{1}{x+1}$ だから $\frac{\log x}{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}\geqq\frac{1}{x+1}$ である. $\int_e^\infty\frac{1}{x+1}dx=[\log(1+x)]_e^\infty=\lim_{x\to\infty}\log(1+x)-\log(1+e)=\infty$ だから教科書の定理 4.2 の (2) によって $\int_e^\infty\frac{\log x}{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}dx$ は発散する. 従って $\int_0^\infty\frac{\log x}{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}dx=\int_0^e\frac{\log x}{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}dx+\int_e^\infty\frac{\log x}{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}dx$ も発散する.

(19) $\sin x$ のグラフは $[0,\pi]$ において上に凸であり, 直線 $y=x$ は原点で $\sin x$ のグラフに接するため, $0<x\leqq\frac{\pi}{2}$ ならば $\frac{2}{\pi}x\leqq\sin x<x$ が成り立つ. 従って $0<x\leqq\frac{\pi}{2}$ ならば $1<\frac{x}{\sin x}\leqq\frac{\pi}{2}$ だから $0<\log\frac{x}{\sin x}\leqq\log\frac{\pi}{2}$ が成り立ち, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{\pi}{2}dx$ は存在するため, 教科書の定理 4.2 の (1) によって $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{x}{\sin x}dx$ は収束する.

(20) $0<x\leqq\frac{1}{e}$ ならば $\frac{\sqrt{e}}{x\sqrt{1+e}}=\frac{1}{x\sqrt{\frac{1}{e}+1}}\leqq\frac{1}{x\sqrt{x+1}}\leqq-\frac{\log x}{x\sqrt{x+1}}$ であり, $\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{\sqrt{e}}{x\sqrt{1+e}}dx=\left[\frac{\sqrt{e}\log x}{\sqrt{1+e}}\right]_0^{\frac{1}{e}}=-\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{1+e}}-\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{e}\log x}{\sqrt{1+e}}=\infty$ だから, 教科書の定理 4.2 の (2) によって $\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{\log x}{x\sqrt{x+1}}dx$ は発散する. 従って $\int_0^1\frac{\log x}{x\sqrt{x+1}}dx=\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{\log x}{x\sqrt{x+1}}dx+\int_{\frac{1}{e}}^1\frac{\log x}{x\sqrt{x+1}}dx$ も発散する.

(21) $0\leqq x<1$ ならば $\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\leqq\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ であり, $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx=\left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^1=2-\lim_{x\to 1-0}2\sqrt{1-x}=2$ となって $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ は収束するため, 教科書の定理 4.2 の (1) によって $\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}dx$ は収束する.

(22) $x\geqq 1$ ならば $\frac{1}{\sqrt[3]{x(x+1)}}\geqq\frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}$ であり, 教科書の問 4.3 により $\int_1^\infty\frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}dx=\int_2^\infty\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx$ は発散するため, 教科書の定理 4.2 の (2) によって $\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt[3]{x(x+1)}}dx$ も発散する.

(23) $x\geqq 1$ ならば $xe^{-x^3}\leqq x^2e^{-x^3}$ であり, $\int_1^\infty x^2e^{-x^3}dx=\left[-\frac{1}{3}e^{-x^3}\right]_1^\infty=\frac{1}{3e}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}e^{-x^3}=\frac{1}{3e}$ となって $\int_1^\infty x^2e^{-x^3}dx$ は収束するため, 教科書の定理 4.2 の (1) によって $\int_1^\infty xe^{x^3}dx$ は収束する. 従って $\int_0^\infty xe^{x^3}dx=\int_0^1 xe^{x^3}dx+\int_1^\infty xe^{x^3}dx$ も収束する.

(24) $0 < x \leqq 1$ ならば $\left|\sin\dfrac{1}{x^2}\right| \leqq 1$ だから, 教科書の定理 4.2 の (1) によって $\displaystyle\int_0^1 \left|\sin\frac{1}{x^2}\right| dx$ は収束する. また, $x \geqq 1$ ならば $0 < \dfrac{1}{x^2} \leqq 1 < \pi$ であり, 任意の正の実数 t に対して $\sin t < t$ が成り立つため, $x \geqq 1$ ならば $0 < \sin\dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{x^2}$ である. 教科書の問 4.3 により, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ は収束するため, 教科書の定理 4.2 の (1) によって $\displaystyle\int_1^\infty \left|\sin\frac{1}{x^2}\right| dx$ は収束する. 従って $\displaystyle\int_0^\infty \left|\sin\frac{1}{x^2}\right| dx = \int_0^1 \left|\sin\frac{1}{x^2}\right| dx + \int_1^\infty \left|\sin\frac{1}{x^2}\right| dx$ は収束するため, 教科書の定理 4.4 によって $\displaystyle\int_0^\infty \sin\frac{1}{x^2}dx$ は絶対収束する.

4. (1) 教科書の問題 3.10 の (2) により $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ならば $\dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin x$ だから, 両辺の対数を考えれば $\log\sin x \geqq \log x + \log 2 - \log\pi$ である. よって $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ ならば $\log t + \log 2 - \log\pi - 1 < 0$ であることに注意すれば

$$\begin{aligned}\int_t^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x dx &\geqq \int_t^{\frac{\pi}{2}} (\log x + \log 2 - \log\pi)dx = [x\log x + x(\log 2 - \log\pi - 1)]_t^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\pi}{2} - t(\log t + \log 2 - \log\pi - 1) \geqq -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

となるため, $\displaystyle\int_t^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x dx$ は下に有界である. 一方, $f(t) = \displaystyle\int_t^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x dx$ によって, 関数 $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \to \boldsymbol{R}$ を定めれば $f'(t) = -\log\sin t \geqq 0$ だから f は単調増加関数である. そこで, $a_n = f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ によって数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ を定めれば $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は下に有界な単調減少数列であるため, 連続性の公理によって収束する. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = I$ とおく. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 自然数 k で, 条件「$n \geqq k$ ならば $|a_n - I| < \varepsilon$」を満たすものがある. $0 < t < \dfrac{1}{k}$ ならば $n > \dfrac{1}{t}$ を満たす自然数 n をとると, $n > k$ かつ $\dfrac{1}{n} < t$ より $-\varepsilon < a_n - I = f\left(\dfrac{1}{n}\right) - I < f(t) - I < f\left(\dfrac{1}{n}\right) - I = a_k - I < \varepsilon$ となるため $|f(t) - I| < \varepsilon$ である. 故に $\displaystyle\lim_{t\to+0}\int_t^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x dx = \lim_{t\to 0} f(t) = I$ となり, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x dx$ は存在する.

(2) $x = \dfrac{\pi}{2} - y$ とおくと $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \log\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin y dy = I$ であるから $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{1}{2}\sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x dx = 2I$. $x = \dfrac{y}{2}$ とおき, 教科書の問 3.21 の (ii) で示したことと, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x dx = I$ を用いて $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin 2x dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\log\sin y dy =$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log\sin y + \log\cos y)dy = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin y dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos y dy\right) = I$ を得る. 故に $\displaystyle 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{1}{2}\sin 2x dx =$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log\sin 2x - \log 2)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin 2x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2 dx = I - \frac{\pi\log 2}{2}$ となるため, $I = -\dfrac{\pi\log 2}{2}$ である.

5. (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\log\sin x)'dx = [x\log\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x dx = -\lim_{x\to+0} x\log\sin x + \frac{\pi\log 2}{2} =$ $\displaystyle -\lim_{x\to+0}\frac{x}{\sin x}\sin x\log\sin x + \frac{\pi\log 2}{2} = -\lim_{x\to+0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to+0}\sin x\log\sin x + \frac{\pi\log 2}{2} =$ $\displaystyle -\left(\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\right)^{-1}\lim_{y\to+0} y\log y + \frac{\pi\log 2}{2} = \frac{\pi\log 2}{2}$ ($y = \sin x$ とおき, 教科書の問 1.18 の結果を用いた.)

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\frac{-1}{\tan x}\right)' dx = \left[-\frac{x^2}{\tan x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{\tan x}dx = \left[-x\cos x\frac{x}{\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x}dx =$ $\pi\log 2$ ((1) の結果を用いた.)

(3) $y = \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$ とおくと $x \to +0$ のとき, $y \to \dfrac{\pi}{2} - 0$, $x \to \infty$ のとき $y \to +0$ であり, $x = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) =$ $\dfrac{1}{\tan y}$ だから $dx = -\dfrac{1}{\sin^2 y}dy$ である. 従って (2) の結果から $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)^2 dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\frac{y}{\sin y}\right)^2 dy =$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{y}{\sin y}\right)^2 dy = \pi \log 2.$

(4) $y = \dfrac{x}{2}$ とおくと $\displaystyle\int_0^{\pi} \log(1-\cos x)dx = \int_0^{\pi} \log\Big(2\sin^2\frac{x}{2}\Big)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(2\log\sin y + \log 2)dy =$
$\displaystyle 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin y dy + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2 dy = -2\pi\log 2 + \pi\log 2 = -\pi\log 2.$

(5) $y = \pi - x$, $z = \dfrac{\pi}{2} - y$ とおくと, (4) の結果より $\displaystyle\int_0^{\pi} \log(1+\cos x)dx = \int_{\pi}^{0} -\log(1+\cos(\pi-y))dy =$
$\displaystyle\int_0^{\pi} \log(1-\cos y)dy = -\pi\log 2.$

(6) 教科書の問題 1.6 の (1) の結果から $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log(1-\cos x) = \lim_{x\to+0} \frac{\log(1-\cos x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{\sin x}{1-\cos x}}{-\frac{1}{x^2}} =$
$\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{-x^2\sin x}{1-\cos x} = -\lim_{x\to+0} x\left(\frac{1-\cos x}{x\sin x}\right)^{-1} = -0{\cdot}2 = 0$ だから, (4) より $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1-\cos x}dx =$
$\displaystyle\int_0^{\pi} x(\log(1-\cos x))'dx = [x\log(1-\cos x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \log(1-\cos x)dx = \pi\log 2 + \pi\log 2 = 2\pi\log 2.$

(7) $x = \sin y$ とおけば, $dx = \cos y dy$ だから $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin y dy = -\frac{\pi\log 2}{2}.$

(8) $\displaystyle\int \frac{\sin^{-1}x}{x}dx = \int \sin^{-1}x(\log x)'dx = \sin^{-1}x\log x - \int \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ であり, 教科書の問 1.18 と問題 1.6 の (4) の結果から $\displaystyle\lim_{x\to+0} \sin^{-1}x\log x = \left(\lim_{x\to+0} \frac{\sin^{-1}x}{x}\right)\left(\lim_{x\to+0} x\log x\right) = 0$ だから, (6) の結果により $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^{-1}x}{x}dx =$
$\displaystyle\lim_{x\to+0} \sin^{-1}x\log x - \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi\log 2}{2}.$

(9) $y = \dfrac{\pi}{2} - x$ とおき, (1) の結果を用いると $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\tan x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(-y\tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y}{\tan y}dy$
$= \dfrac{\pi\log 2}{2}$

(10) $y = \pi - x$ とおけば $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\log\sin x\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\pi-y)\log\sin(\pi-y)\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi-x)\log\sin x\,dx$ だから
$\displaystyle\int_0^{\pi} x\log\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\log\sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\log\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\log\sin x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi-x)\log\sin x\,dx =$
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\log\sin x + (\pi-x)\log\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi\log\sin x\,dx = -\frac{\pi^2\log 2}{2}.$

(11) $y = \dfrac{\pi}{2} - x$ とおけば $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \log\cos\Big(\frac{\pi}{2} - y\Big)\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x dx$ だから
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\tan x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log\sin x - \log\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x\,dx = 0.$

(12) $x = \sin t$ とおけば, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\log\sin t\,dt$ であり, 一方 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$
$\displaystyle\int_0^1 \left(-\sqrt{1-x^2}\right)'x\log x\,dx = \Big[\Big(-\sqrt{1-x^2}\Big)x\log x\Big]_0^1 + \int_0^1 \sqrt{1-x^2}(\log x + 1)\,dx = -\lim_{x\to+0} \Big(-\sqrt{1-x^2}\Big)x\log x +$
$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\log x\,dx + \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\log\sin t\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\log\sin t\,dt + \frac{\pi}{4}$ だから
$\displaystyle 2\int_0^1 \frac{x^2\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\log\sin t\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\log\sin t\,dt + \frac{\pi}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t + \cos^2 t)\log\sin t\,dt + \frac{\pi}{4} =$
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin t\,dt + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\log 2}{2}$ が得られる. 従って $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi\log 2}{4}$ である.

(13) (12) の結果から $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\log\sin x\,dx = \int_0^1 \frac{x^2\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi\log 2}{4}.$

(14) $\theta = \sin^{-1}a$, $x = \sin t$ とおけば, $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\log|y-x|}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log|\sin\theta - \sin t|\,dt =$

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log\left|2\sin\frac{\theta-t}{2}\cos\frac{\theta+t}{2}\right| dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log 2\, dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log\left|\sin\frac{\theta-t}{2}\right| dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log\left|\cos\frac{\theta+t}{2}\right| dt =$
$\displaystyle\pi\log 2 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \log\sin\frac{\theta-t}{2} dt + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\frac{t-\theta}{2} dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\frac{\pi-\theta-t}{2} dt$ である.
$\displaystyle\varphi = \frac{\theta-t}{2}$ とおけば $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \log\sin\frac{\theta-t}{2} dt = \int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}}^{0} -2\log\sin\varphi\, d\varphi = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi,$
$\displaystyle\varphi = \frac{t-\theta}{2}$ とおけば $\displaystyle\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\frac{t-\theta}{2} dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}} 2\log\sin\varphi\, d\varphi = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi,$
$\displaystyle\varphi = \frac{\pi-\theta-t}{2}$ とおけば $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\frac{\pi-\theta-t}{2} dt = \int_{\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}} -2\log\sin\varphi\, d\varphi = 2\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}}^{\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi$ だから
$\displaystyle\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\frac{t-\theta}{2} dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\frac{\pi-\theta-t}{2} dt = 2\int_{0}^{\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi =$
$\displaystyle-\pi\log 2 + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi$ である. $\psi = \pi - \varphi$ とおけば $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}} \log\sin\psi\, d\psi =$
$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\psi\, d\psi$ より, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\log|y-x|}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi\log 2 + 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi - \pi\log 2 + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi =$
$\displaystyle 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi + 2\int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\psi\, d\psi = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi = -\pi\log 2.$

微積分学 I 演習問題　第 13 回　級数の収束・発散

1. 次の級数の収束・発散を判定せよ. ただし, 一般項に a, b, k などの定数が含まれる場合は, 必要ならば場合分けをすること.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n+1)!)^2}{(2n)!}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{2^n}$　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n!}$　(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{\pi}{2^n}$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n!}$　(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^2+1}$　(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{a^n}$　(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n(n!)^2}{(2n)!}$　(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{a^{2n}+1}$

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}$ (ただし, $a,b>0$ とする.)

2. 次の交代級数の収束・発散を判定せよ. ただし (7) では $a>1$ とする.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{2^n}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{n^2+1}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n}$　(6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{(\log n)^n}$　(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^{\log n}}$　(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^n}{(n+1)^{n+1}}$

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)^{n\sqrt{n}}$　(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sin\frac{a}{n}$　(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\log n)^{\log n}}$　(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{a}{n}$

3. 次の級数の収束半径を求めよ. ただし, (1) の k は自然数とし, (24) の a は負の整数ではないとする.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^k}{(kn)!}x^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n$　(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^{n^2}x^n$　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n x^n$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^{n^2}x^n$　(6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n!}x^n$　(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{n}\right)^{n^2}x^{2n}$　(8) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^n}x^{2n+1}$

(9) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n^2}}{(n+1)!}x^n$　(10) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n)!}{(n!)^3}x^{3n}$　(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2+2}\right)^n x^n$　(12) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\left(\tan^{-1}n\right)^n}$

(13) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^{2n}$　(14) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!!}x^n$　(15) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$　(16) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$

(17) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\log n}$　(18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^n$　(19) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n^2-n+1}}$　(20) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)x^n$

(21) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4^{\sqrt{n}}}$　(22) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a^k b^{n-k}\right)x^n$　(23) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2}\right)x^n$　(24) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!x^n}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$

4. 次の級数の収束半径を求め, さらに x の絶対値が収束半径に一致する場合の級数の収束性を判定せよ. ただし, (4) と (8) では a の値によって場合分けをすること.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tan\frac{n+1}{3^n}\right)x^{2n}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2^n+1)}x^{2n+1}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^a x^n$　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n}-\sqrt{n-1}}{n}x^n$

(5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2n+1}x^{2n+1}$　(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2+1}x^n$　(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^a+1}$　(8) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n^3-n+1}}$

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}\right)x^n$　(10) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right)x^n$

5. $s>0$ とするとき, 次の級数の収束発散を判定せよ.　(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^s}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)(\log(\log n))^s}$

6. 一般項が $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\log n$ で与えられる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について次の問いに答えよ.

(1) $\log x=\displaystyle\int_1^x\frac{dt}{t}$ であることを用いて, $a_n>\log(n+1)-\log n$ が成り立つことを示せ.

(2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列であることを示すことにより, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ.

(3) $\dfrac{1}{2}<\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n<\frac{5}{6}$ であることを示せ.

7. 次の整級数によって表される関数を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}x^n$　(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$　(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

第 13 回の演習問題の解答

1. (1) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ とおくと $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$ だからダランベールの判定法から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ は収束する.

(2) $a_n = \dfrac{((n+1)!)^2}{(2n)!}$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1$ だからダランベールの判定法によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n+1)!)^2}{(2n)!}$ は収束する.

(3) $a_n = \dfrac{\log n}{2^n}$ とおく. 第 8 回の問題 3 の (7) の解答から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n} = 1$ より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$
$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{2\log n} = \frac{1}{2} < 1$ だからダランベールの判定法によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{2^n}$ は収束する.

(4) $a_n = \dfrac{\log n}{n!}$ とおくと, 第 8 回の問題 3 の (7) の解答から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}\frac{1}{n+1} = 0 < 1$ だからダランベールの判定法によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n!}$ は収束する.

(5) $a_n = n\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}\right)^{-1} = \frac{1}{2} < 1$ だからダランベールの判定法によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{\pi}{2^n}$ は収束する.

(6) $a_n = \dfrac{n^k}{n!}$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{k-1}}{n^k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1} = 0 < 1$ だからダランベールの判定法によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n!}$ は収束する.

(7) $a_n = \left|\dfrac{a^n}{n^2+1}\right|$ とおくと. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}(n^2+1)}{a^n((n+1)^2+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|a|\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}} = |a|$ だから, ダランベールの判定法により $|a| < 1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^2+1}$ は絶対収束する. $a = \pm 1$ ならば $a_n = \dfrac{1}{n^2+1} < \dfrac{1}{n^2}$ で, 教科書の 119 ページの結果により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束するため, 教科書の定理 4.6 の (1) によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^2+1}$ は絶対収束する. $|a| > 1$ ならば, 教科書の例題 1.2 の注により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{|a|^n} = \lim_{n\to\infty}(n^2|a|^{-n} + |a|^{-n}) = 0$ だから, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^2+1}$ は 0 に収束しない. 従って教科書の定理 1.5 の (2) によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^2+1}$ は収束しない.

(8) $a_n = \left|\dfrac{n^k}{a^n}\right|$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k|a|^n}{n^k|a|^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|a|}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{|a|}$ である.

$|a| > 1$ の場合, ダランベールの判定法により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{a^n}$ は絶対収束する.

$0 < |a| < 1$ の場合, 教科書の問 1.4 の (2) により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^k} = 0$ となるため, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}$ は 0 に収束しない. 従って, 教科書の定理 1.5 の (2) により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{a^n}$ は収束しない.

$a = \pm 1$ の場合, $k < -1$ ならば教科書の 119 ページの結果により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{a^n}$ は絶対収束する. $k \geqq 0$ ならば $\{n^k\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束しないため, 教科書の定理 1.5 の (2) により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{a^n}$ は収束しない.

$a=-1$ の場合, $k<0$ ならば $\{n^k\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する単調減少数列だから, ライプニッツの定理によって, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$ は収束する.

$a=1$ の場合, $-1 \leqq k<0$ ならば教科書の 119 ページの結果により $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$ は収束しない.

(9) $a_n = \left|\frac{a^n (n!)^2}{(2n)!}\right|$ とおくと, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|^{n+1}(2n)!((n+1)!)^2}{|a|^n(2n+2)!(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|(n+1)}{2(2n+1)} = \frac{|a|}{4}$. ダランベールの判定法により $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n(n!)^2}{(2n)!}$ は $|a|<4$ ならば絶対収束し, $|a|>4$ ならば収束しない. $|a|=4$ のとき, $|a_n| = \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} = \frac{((2n)!!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} > 1$ だから $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束しないため, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n(n!)^2}{(2n)!}$ は発散する.

(10) $a_n = \left|\frac{a^n}{a^{2n}+1}\right|$ とおくと, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|(a^{2n}+1)}{a^2a^{2n}+1} = \begin{cases} |a| & |a|<1 \\ 1 & a=\pm 1 \\ \frac{1}{|a|} & |a|>1 \end{cases}$ だからダランベールの判定法によって $a \neq \pm 1$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{a^{2n}+1}$ は絶対収束する. $a=\pm 1$ のとき, $a_n = \frac{(-1)^n}{2}$ となり, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束しないため, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{a^{2n}+1}$ は発散する.

(11) $a_n = \frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}$ とおくと, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)a+1)}{((n+1)b+1)} = \frac{a}{b}$ だから, ダランベールの判定法によって $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}$ は $a<b$ ならば収束し, $b<a$ ならば発散する. $a=b$ の場合は, 常に $a_n=1$ だから $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}$ は発散する.

2. (1) $\sqrt{n^2+1}-n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$ であり, 右辺の分母からなる数列は単調増加数列だから $\left\{\sqrt{n^2+1}-n\right\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する単調減少数列である. よって, ライプニッツの定理により, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ は収束する. 一方 $3n^2>1$ だから $\sqrt{n^2+1}-n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} > \frac{1}{\sqrt{4n^2}+n} = \frac{1}{3n}$ であり, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散するため, 教科書の定理 4.6 の (2) によって $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ も発散する. 故に $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ は絶対収束しない.

(2) 2 の (3) の結果から $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{2^n}$ は絶対収束する.

(3) $\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束する単調減少数列だからライプニッツの定理により, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$ は収束する. 一方 $n \geqq 1$ ならば $(n+1)^2-\left(\sqrt{n^2+3}\right)^2 = 2n-2 \geqq 0$ だから $\frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \geqq \frac{1}{n+1}$ であり, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-1$ は発散するため, 教科書の定理 4.6 の (2) によって $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ も発散する. 故に $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$ は絶対収束しない.

(4) n が自然数 ならば $0<\frac{\pi}{2n} \leqq \frac{\pi}{2}$ だから $0 \leqq \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ であり, 教科書の 119 ページの結果から, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束するため, 教科書の定理 4.6 の (1) から $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{n^2+1}$ も収束する. 従って $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{n^2+1}$ は絶対収束する.

(5) $\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{n\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ であり, 教科書の 119 ページの結果より $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ は収束するため, 教科書の定理 4.6 の (1) から $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n}$ も収束する. 従って $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n}$ は絶対収束する.

(6) $n \geqq 3$ ならば $\log n \geqq \log 3$ だから $(\log n)^n \geqq (\log 3)^n$ が成り立つため, $\frac{n-1}{(\log n)^n} \leqq \frac{n}{(\log 3)^n}$ である. $\log 3 > 1$

だから, $a_n = \dfrac{n}{(\log 3)^n}$ とおけば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n\log 3} = \frac{1}{\log 3} < 1$ となり, ダランベールの判定法によって $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{(\log 3)^n}$ は収束する. 故に教科書の定理 4.6 の (1) から, 級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{(\log n)^n}$ は収束する. 従って $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{(\log n)^n}$ は絶対収束する.

(7) $a > 1$ だから $\left\{\dfrac{1}{a^{\log n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列で, 0 に収束する. 故にライプニッツの定理により, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^{\log n}}$ は収束する. $a^{\log n} = \left(e^{\log a}\right)^{\log n} = e^{\log a\log n} = \left(e^{\log n}\right)^{\log a} = n^{\log a}$ だから, 教科書の 119 ページの結果によって, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\log n}}$ は $1 < a \leqq e$ のとき発散し, $a > e$ のとき収束する. 故に級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^{\log n}}$ は $1 < a \leqq e$ のとき収束はするが絶対収束せず, $a > e$ のとき絶対収束する.

(8) $\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ の分母と分子を n^n で割れば, $\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)}$ が得られる. 数列 $\{n+1\}_{n=1}^{\infty}$ と $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ はともに単調増加数列だから, $\left\{\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列であり, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{e}\cdot 0 = 0$ となるため, ライプニッツの定理により, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^n}{(n+1)^{n+1}}$ は収束する. 一方, 任意の自然数 n に対して $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$ だから $\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)} > \dfrac{1}{e(n+1)}$ であり, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e(n+1)} = \frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \frac{1}{e}$ は発散するため, 教科書の定理 4.6 の (2) によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ も発散する. 故に $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^n}{(n+1)^{n+1}}$ は絶対収束しない.

(9) $a_n = \left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}\right)^{n\sqrt{n}}$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}}$. である. ここで $m = [\sqrt{n}]$ とおけば $m \leqq \sqrt{n} < m+1$ だから $1+\dfrac{1}{m+1} < 1+\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqq 1+\dfrac{1}{m}$ である. この各辺を $\sqrt{n}$ 乗すれば $\left(1+\dfrac{1}{m+1}\right)^{\sqrt{n}} < \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \leqq \left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{\sqrt{n}}$ であり, 再度 $m \leqq \sqrt{n} < m+1$ を用いると (左辺) $\geqq \left(1+\dfrac{1}{m+1}\right)^m$, (右辺) $< \left(1+\dfrac{1}{m+1}\right)^{m+1}$ となるため, $\left(1+\dfrac{1}{m+1}\right)^m < \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \leqq \left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{m+1}$ が成り立つ. 第 1 回の演習問題 1 の (3) の結果から $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m = e$ であり, $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\left(1+\frac{1}{m}\right) = e\cdot 1 = e$ だから, $n \to \infty$ のとき $m \to \infty$ となることに注意すれば, はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = e$ である. 故に $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{e} < 1$ だから, コーシーの判定法によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)^{n\sqrt{n}}$ は収束する. 従って $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)^{n\sqrt{n}}$ は絶対収束する.

(10) x の関数 $x-\sin x$ の増減を調べることにより, 任意の正の実数 x に対して $\sin x < x$ が成り立つことがわかる. よって, $a > 0$ ならば任意の自然数 n に対して $0 < \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{a}{n} < \dfrac{a}{n^{\frac{3}{2}}}$ が成り立ち, 教科書の 119 ページの結果から, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^{\frac{3}{2}}}$ は収束するため, 教科書の定理 4.6 の (1) から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{a}{n}$ も収束する. 従って $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sin\frac{a}{n}$ は絶対収束する. $\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{a}{n}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{|a|}{n}$ だから, 上で示したことから, $a < 0$ の場合も $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\sin\frac{a}{n}$ は絶対収束する.

(11) $n \geqq 16$ ならば $\dfrac{1}{(\log n)^{\log n}} \leqq \dfrac{1}{(\log 16)^{\log n}}$ であり, $16 > e^e = 15.154262241\cdots$ だから $\log 16 > e$ となるため, (7) の結果から級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\log 16)^{\log n}}$ は収束する. よって, 教科書の定理 4.6 の (1) から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ は収束するため, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\log n)^{\log n}}$ は絶対収束する.

(12) $a>0$ の場合, $n \geqq \dfrac{2a}{\pi}$ ならば $0<\dfrac{a}{n+1}<\dfrac{a}{n} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ だから $\sin\dfrac{a}{n+1}<\sin\dfrac{a}{n}$ となるため, $\dfrac{2a}{\pi}$ 以上である最小の自然数を N_a とおけば $\left\{\sin\dfrac{a}{n}\right\}_{n=N_a}^{\infty}$ は単調減少数列で, 0 に収束する. 故にライプニッツの定理により, 級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{a}{n}$ は収束する. $\sin x$ のグラフは $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で上に凸であるため, 原点と点 $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ を通る直線 $y=\dfrac{2}{\pi}x$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin x$ のグラフより下にある. 従って $0<x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ならば $\sin x \geqq \dfrac{2}{\pi}x$ が成り立つため, N_a 以上の自然数 n に対して $\sin\dfrac{a}{n} \geqq \dfrac{2a}{\pi n}$ が成り立つ. 級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2a}{\pi n}=\dfrac{2a}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ は発散するため, 教科書の定理 4.6 の (2) によって $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{a}{n}$ は発散する. よって $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{a}{n}$ は絶対収束しない. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{a}{n}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{-a}{n}$ であることに注意すれば, 上で示したことから, $a<0$ の場合も $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{a}{n}$ は収束はするが, 絶対収束はしない.

3. (1) $a_n=\left|\dfrac{(n!)^k}{(kn)!}\right|$ とおくと, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(kn+k)!(n!)^k}{(kn)!((n+1)!)^k}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k(kn+k-1)(kn+k-2)\cdots(kn+1)}{(n+1)^{k-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k\left(k+\frac{k-1}{n}\right)\left(k+\frac{k-2}{n}\right)\cdots\left(k+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1}}=k^k$. よって与えられた級数の収束半径は k^k である.

(2) $a_n=\left|\dbinom{2n}{n}\right|$ とおくと, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n+2}{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!((n+1)!)^2}{(n!)^2(2n+2)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\dfrac{1}{4}$. 故に $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dbinom{2n}{n}x^n$ の収束半径は $\dfrac{1}{4}$ である.

(3) $a_n=\left(\dfrac{1+n}{2+n}\right)^{n^2}$ とおけば $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+n}{1+n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+n}\right)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{1+n}\right)^{-1}=e$ となり, 与えられた級数の収束半径は e である.

(4) $a_n=\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$ とおけば $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)=2$ となり, 与えられた級数の収束半径は 2 である.

(5) $a_n=|a^{n^2}|$ とおくと, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}|a|^n=\begin{cases}0 & |a|<1\\ 1 & a=\pm1\\ +\infty & |a|>1\end{cases}$ である. 従って $|a|<1$ の場合, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{n^2}x^n$ の収束半径は無限大であり, $a=\pm1$ の場合, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{n^2}x^n$ の収束半径は 1 である. $|a|>1$ の場合, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{n^2}x^n$ の収束半径は 0 である.

(6) $a_n=\dfrac{(n+1)^n}{n!}$ とおけば $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^n(n+1)!}{n!(n+2)^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}=\dfrac{1}{e}$ だから, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)^n}{n!}x^n$ の収束半径は $\dfrac{1}{e}$ である.

(7) $a_n=\left(\dfrac{n+4}{n}\right)^{n^2}$ とおけば $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(\frac{n+4}{n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(\left(1+\frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}}\right)^4}=\dfrac{1}{e^4}$ だから, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+4}{n}\right)^{n^2}y^n$ の収束半径は $\dfrac{1}{e^4}$ である. 従って $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+4}{n}\right)^{n^2}x^{2n}$ は $|x^2|<\dfrac{1}{e^4}$ で収束し, $|x^2|>\dfrac{1}{e^4}$ 発散するため, この級数の収束半径は $\dfrac{1}{e^2}$ である.

(8) $a_n=\dfrac{n!}{(n+1)^n}$ とおけば $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e$ だから, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!}{(n+1)^n}y^n$ の収束半径は e である. 従って $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!}{(n+1)^n}x^{2n}$ は $|x^2|<e$ で収束し, $|x^2|>e$ で発散するため $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!}{(n+1)^n}x^{2n+1}$ の収束半径は $\sqrt{e}$ である.

(9) $a_n = \dfrac{2^{n^2}}{(n+1)!}$ とおけば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n^2}(n+2)!}{2^{(n+1)^2}(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2^{2n+1}} = 0$ だから, 与えられた級数の収束半径は 1 である.

(10) $a_n = \dfrac{(3n)!}{(n!)^3}$ とおけば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n)!((n+1)!)^3}{(3n+3)!(n!)^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3(3n+2)(3n+1)} = \frac{1}{27}$ だから, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n)!}{(n!)^3}y^n$ の収束半径は $\dfrac{1}{27}$ である. 従って $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n)!}{(n!)^3}x^{3n}$ は $|x^3| < \dfrac{1}{27}$ で収束し, $|x^3| > \dfrac{1}{27}$ で発散するため, この級数の収束半径は $\dfrac{1}{3}$ である.

(11) $a_n = \left(\dfrac{n}{n^2+2}\right)^n$ とおけば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n} = \infty$ だから, 与えられた級数の収束半径は ∞ である.

(12) $a_n = \dfrac{1}{(\tan^{-1}n)^n}$ とおけば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty}\tan^{-1}n = \frac{\pi}{2}$ だから, 与えられた級数の収束半径は $\dfrac{\pi}{2}$ である.

(13) $a_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ とおくと $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!((n+1)!)^2}{(n!)^2(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1}{4}$ となるため, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}y^n$ の収束半径は $\dfrac{1}{4}$ である. 従って $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ は $|x^2| < \dfrac{1}{4}$ で収束, $|x^2| > \dfrac{1}{4}$ で発散するため, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ の収束半径は $\dfrac{1}{2}$ である.

(14) $a_n = \left|\dfrac{n!}{(2n+1)!!}\right|$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)!!n!}{(2n+1)!!(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1} = 2$. 故に $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!!}x^n$ の収束半径は 2 である.

(15) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$ とおく. 第 1 回の演習問題 1 の (9) の結果を用いると, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n(n+1)!}{n!(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{e}$ となり, 与えられた級数の収束半径は $\dfrac{1}{e}$ である.

(16) $a_n = \left|\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right|$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+1} = 1$.
故に $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$ の収束半径は 1 である.

(17) $a_n = \left|\dfrac{1}{\log n}\right|$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)-\log n+\log n}{\log n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\log n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+1\right) = 1$. 故に $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\log n}$ の収束半径は 1 である.

(18) $a_n = \left|\dfrac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}\right|$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!(2n+3)(2n+2)!!}{(2n+1)(2n)!!(2n+1)!!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)(2n+2)}{(2n+1)^2} = 1$. 故に $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^n$ の収束半径は 1 である.

(19) $a_n = \left|\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n+1}}\right|$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n+1)^2-(n+1)+1}}{\sqrt{n^2-n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}} = 1$. 故に $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n^2-n+1}}$ の収束半径は 1 である.

(20) $a_n = \left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right|$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = 1$. 故に $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)x^n$ の収束半径は 1 である.

(21) $a_n = \dfrac{1}{4^{\sqrt{n}}}$ とおけば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^{\sqrt{n+1}}}{4^{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}4^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}4^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} = 1$ となるため, 与えられた級数の収束半径は 1 である.

(22) $a_n = \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a^kb^{n-k}\right|$ とおく. $a \neq b$ ならば $a_n = \left|\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}\right|$ だから $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \left|\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b^{n+2}-a^{n+2}}\right|$ である. 従って

$|a| < |b|$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{b-a\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}\right| = \frac{1}{|b|}$, $|a| > |b|$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}-1}{b\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}-a}\right| = \frac{1}{|a|}$ である．また $a=-b$ ならば $a_n = \begin{cases} a^n & n\text{ は偶数} \\ 0 & n\text{ は偶数}\end{cases}$ だから，与えられた級数は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(ax)^{2n}$ となるため，収束半径は $\dfrac{1}{|a|}$ である．$a=b\neq 0$ ならば $a_n=(n+1)|a|^n$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)|a|^n}{(n+2)|a|^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+2)|a|} = \frac{1}{|a|}$ である．以上から，与えられた級数の収束半径は $|a|<|b|$ ならば $\dfrac{1}{|b|}$, $|a| \geqq |b|$ かつ $a\neq 0$ ならば $\dfrac{1}{|a|}$, $a=b=0$ ならば ∞ である．

(23) $a_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2}$ とおくと $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{n}{k^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\frac{1}{n}\right) = \int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx = \frac{1}{2}$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{(n+1)a_{n+1}}\frac{n+1}{n} = 1$ となるため $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2}\right)x^n$ の収束半径は 1 である．

(24) $a_n = \left|\dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}\right|$ とおくと $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!(a+1)(a+2)\cdots(a+n+1)}{(n+1)!(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a+n+1}{n+1}\right| = 1$. 故に $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!x^n}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$ の収束半径は 1 である．

4. (1) $a_n = \tan\dfrac{n+1}{3^n}$ とおくと，$n\to\infty$ のとき，$\dfrac{n+1}{3^n}$, $\dfrac{n+2}{3^{n+1}}$ はともに 0 に収束するため．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{n+1}{3^n}}{\tan\frac{n+2}{3^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)}{n+2}\frac{\cos\frac{n+2}{3^{n+1}}}{\cos\frac{n+1}{3^n}}\frac{\sin\frac{n+1}{3^n}}{\frac{n+1}{3^n}}\left(\frac{\sin\frac{n+2}{3^{n+1}}}{\frac{n+2}{3^{n+1}}}\right)^{-1} = 3$ である．従って $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tan\frac{n+1}{3^n}\right)y^n$ の収束半径は 3 である．故に $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tan\frac{n+1}{3^n}\right)x^{2n}$ は $|x^2|<3$ で収束し，$|x^2|>3$ 発散でするため，この級数の収束半径は $\sqrt{3}$ である．$b_n = 3^n\tan\dfrac{n+1}{3^n}$ によって数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos\frac{n+1}{3^n}}\frac{\sin\frac{n+1}{3^n}}{\frac{n+1}{3^n}} = 1$ となるため，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ である．故に，教科書の定理 1.5 の (2) によって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}3^n\tan\frac{n+1}{3^n}$ は発散するため，$x=\pm\sqrt{3}$ の場合には $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tan\frac{n+1}{3^n}\right)x^{2n}$ は発散する．

(2) $a_n = \dfrac{1}{n(2^n+1)}$ とおけば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2^{n+1}+1)}{n(2^n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{2+2^{-n}}{1+2^{-n}} = 2$ だから $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2^n+1)}y^n$ の収束半径は 2 である．従って $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2^n+1)}x^{2n}$ は $|x^2|<2$ で収束し，$|x^2|>2$ で発散するため，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2^n+1)}x^{2n+1}$ の収束半径は $\sqrt{2}$ である．また，任意の n に対して $2^n\sqrt{2} > 2^n+1$ だから $\dfrac{2^n\sqrt{2}}{n(2^n+1)} > \dfrac{1}{n}$ が成り立つ．ここで $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散するため，教科書の定理 4.6 の (2) によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sqrt{2}}{n(2^n+1)}$ も発散する．故に $x=\pm\sqrt{2}$ の場合，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2^n+1)}x^{2n+1}$ は発散する．

(3) $a_n = |n^a|$ とおくと，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^a}{(n+1)^a} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^a = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^a = 1$ だから，与えられた級数の収束半径は 1 である．$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n^ax^n$ の収束半径は 1 である．$x=1$ のとき，教科書の 119 ページの結果から $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n^ax^n$ は $a<-1$ ならば収束し，$a\geqq -1$ ならば発散する．$x=-1$ のとき，ライプニッツの定理から $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n^ax^n$ は $a<0$ ならば収束し，$a\geqq 0$ ならば発散する．

(4) $a_n = \dfrac{\sqrt{2n}-\sqrt{n-1}}{n}$ とおくと，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\left(\sqrt{2n}-\sqrt{n-1}\right)}{n\left(\sqrt{2n+2}-\sqrt{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{2+\frac{2}{n}}-1} = 1$ だから，与えられた級数の収束半径は 1 である．$b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ によって数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} =$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{2n}-\sqrt{n-1}\right)}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)=\sqrt{2}-1\neq 0$ であり, 教科書の 119 ページの結果によって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ は発散するため, 教科書の定理 4.7 から $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ も発散する．故に $x=1$ の場合は, 与えられた級数は発散する．$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{n-1}}$ だから, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束し, 数列 $\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ と $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ はともに正の値をとる単調減少数列だから, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ も単調減少数列である．従ってライプニッツの定理から, $x=-1$ の場合は, 与えられた級数は収束する．

(5) $a_n=\dfrac{2^n}{2n+1}$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(2n+3)}{2^{n+1}(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2(2n+1)}=\frac{1}{2}$ だから, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2n+1}y^n$ の収束半径は $\dfrac{1}{2}$ である．従って $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n+1}x^{2n}$ は $|x^2|<\dfrac{1}{2}$ で収束し, $|x^2|>\dfrac{1}{2}$ で発散するため, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2n+1}x^{2n+1}$ の収束半径は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である．任意の自然数 n に対して $\dfrac{2^n}{2n+1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}(2n+1)}>\dfrac{1}{4n}$ が成り立ち, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散するため, 教科書の定理 4.6 の (2) によって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}$ は発散する．故に, 与えられた級数は $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の場合は発散する．

(6) $a_n=\dfrac{\log n}{n^2+1}$ とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n+\log\frac{n+1}{n}}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right)=1$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)^2+1)\log n}{(n^2+1)\log(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\frac{\log(n+1)}{\log n}}=1$ となるため, 与えられた級数の収束半径は 1 である．$b_n=\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ によって数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めれば, 教科書の問 1.18 から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\sqrt{n}}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}=0$ となるため, 自然数 N で条件「$n\geqq N$ ならば $\dfrac{a_n}{b_n}\leqq 1$」を満たすものが存在する．従って $n\geqq N$ ならば $a_n\leqq b_n$ であり, 教科書の 119 ページの結果によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ は収束するため, 教科書の定理 4.6 の (1) によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ も収束する．故に, 与えられた級数は $x=\pm 1$ の場合は絶対収束する．

(7) $a_n=\dfrac{1}{n^a+1}$ とおくと, $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{(n+1)^a+1}{n^a+1}=\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a+\frac{1}{n^a}}{1+\frac{1}{n^a}}$ だから a が負でも, 0 以上でも $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1$ となるため, 与えられた級数の収束半径は 1 である．$a>1$ の場合, $a_n<\dfrac{1}{n^a}$ であり, 教科書の 119 ページの結果によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ は収束するため, 教科書の定理 4.6 の (1) から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する．故に, $a>1$ の場合, 与えられた級数は $x=\pm 1$ のときに絶対収束する．$0<a\leqq 1$ の場合, $b_n=\dfrac{1}{n^a}$ によって数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めれば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^a}{n^a+1}=1\neq 0$ であり, 教科書の 119 ページの結果によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ は発散するため, 教科書の定理 4.7 から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ も発散する．また, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調に減少して 0 に収束するため, ライプニッツの定理から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ は収束する．従って, $0<a\leqq 1$ の場合には, 与えられた級数は $x=1$ ならば発散し, $x=-1$ ならば収束する．$a\leqq 0$ の場合は, $x=\pm 1$ ならば数列 $\left\{\dfrac{x^n}{n^a+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束しないため, 教科書の定理 1.5 の (2) によって, 与えられた級数は発散する．

(8) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^3-n+1}}$ とおけば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n+1)^3-n}}{\sqrt{n^3-n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3-\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}=1$ だから, 与えられた級数の収束半径は 1 である．$b_n=\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ によって数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n^3-n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}=1\neq 0$ であり, 教科書の 119 ページの結果によって $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ は収束するため, 教科書の定理 4.7

から $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束する. 故に $x=\pm 1$ のとき, 与えられた級数は絶対収束する.

(9) $a_n = \frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}$ とおけば $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cos\frac{1}{n}}{n\cos\frac{1}{n+1}} = 1$ だから, 与えられた級数の収束半径は 1 である. 任意の自然数 n に対して $\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n} > \frac{1}{n}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}n}$ であり, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散するため, 教科書の定理 4.6 の (2) によって $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}\right)x^n$ は $x=1$ の場合は発散する. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n} = 0$ だから, 数列 $\left\{\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が単調減少数列であることを示せば, ライプニッツの定理によって $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}\right)x^n$ は $x=1$ の場合には収束することがわかる.

関数 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $f(x) = x\cos x$ によって定める. $f'(x) = \cos x - x\sin x = \cos x(1 - x\tan x)$ より, $g(x) = 1 - x\tan x$ とおけば, $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ における $f'(x)$ の符号は $g(x)$ の符号と一致する. この区間で $\tan x$, x はともに 0 以上の値をとり, 単調に増加するため, $g(x)$ は単調に減少して, $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$ だから, $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ において $g(x)$ は常に正である. 故に f は $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ で単調に増加する. $n \geqq 2$ ならば $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}$ はともに f が単調増加している区間 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ に属するため, $\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n} = f\left(\frac{1}{n}\right) > f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\cos\frac{1}{n+1}$ が成り立つ. さらに, $\cos 1 > \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} > \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}$ より, $\left\{\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少数列である.

(10) $a_n = \sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}$ とおけば $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}}{\sqrt{(n+1)^3+1}-\sqrt{(n+1)^3-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n+1)^3+1}+\sqrt{(n+1)^3-1}}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}} = 1$ だから, 与えられた級数の収束半径は 1 である. $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ によって数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を定めれば $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}} = 1 \neq 0$ であり, 教科書の 119 ページの結果によって $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は収束するため, 教科書の定理 4.7 から $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束する. 故に $x=\pm 1$ のとき, 与えられた級数は絶対収束する.

5. (1) $f:(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ を $f(x) = \frac{\log x}{x^s}$ で定めれば $f'(x) = \frac{1 - s\log x}{x^{s+1}}$ だから $\left[e^{\frac{1}{s}}, \infty\right)$ において f は単調減少である. 第 12 回の演習問題 1 の (38) から $s > 1$ の場合は $\int_1^{\infty}\frac{\log x}{x^s}dx$ は収束する. よって, $s > 1$ ならば $e^{\frac{1}{s}} < 3$ であることに注意すれば, 教科書の定理 4.8 から, $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\log n}{n^s}$ は収束するため $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^s}$ も収束する.

$s \leqq 1$ の場合, $n \geqq 3$ ならば $\log n \geqq 1$ だから, $\frac{\log n}{n^s} \geqq \frac{1}{n^s}$ である. 教科書の 119 ページの結果によって $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ は発散するため, 定理 4.6 の (2) によって $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\log n}{n^s}$ は発散する. 従って $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^s}$ も発散する.

(2) $f:(e,\infty)\to\boldsymbol{R}$ を $f(x) = \frac{1}{x\log x(\log\log x)^s}$ で定める. x, $\log x$, $(\log\log x)^s$ はすべて (e,∞) において正の値をとる単調増加関数であるため, f は正の値をとる単調減少関数である. $\log(\log x) = t$ とおくと $\frac{1}{x\log x}dx = dt$ より $\int\frac{1}{x\log x(\log\log x)^s}dx = \int\frac{1}{t^s}dt = \begin{cases}\log|t| & s=1\\ \frac{t^{1-s}}{1-s} & s\neq 1\end{cases}$ だから $\int\frac{1}{x\log x(\log\log x)^s}dx = \begin{cases}\log|\log(\log x)| & s=1\\ \frac{(\log(\log x))^{1-s}}{1-s} & s\neq 1\end{cases}$. 故に $s=1$ の場合, $\int_3^{\infty}\frac{1}{x\log x(\log\log x)^s}dx = \lim_{r\to\infty}\left[\log|\log(\log x)|\right]_3^{\infty} = \lim_{r\to\infty}\left(\log|\log(\log r) - \log|\log(\log 3)|\right) = \infty$ であり, $s\neq 1$ の場合, $\int_3^{\infty}\frac{1}{x\log x(\log\log x)^s}dx = \lim_{r\to\infty}\frac{(\log(\log r))^{1-s} - (\log(\log 3))^{1-s}}{1-s} = \begin{cases}\infty & s<1\\ \frac{(\log(\log 3))^{1-s}}{s-1} & s>1\end{cases}$

である．以上から $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x\log x(\log\log x)^s}dx$ は $s\leqq 1$ ならば発散し，$s>1$ ならば $\dfrac{(\log(\log 3))^{1-s}}{s-1}$ に収束する．故に教科書の定理 4.8 から，$\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)(\log(\log n))^s}$ は $s\leqq 1$ ならば発散し，$s>1$ ならば収束する．

6. (1) $x>k$ ならば $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{k}$ だから $\log(k+1)-\log k=\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx=\frac{1}{k}$ である．この不等式に $k=1,2,\dots,n$ を代入したものを辺々加えると，$\log(n+1)<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ が得られ，この両辺から $\log n$ を引けば $\log(n+1)-\log n<a_n$ が得られる．

(2) $x<k+1$ ならば $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{k+1}$ だから $\log(k+1)-\log k=\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx>\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dx=\frac{1}{k+1}$ である．故に $a_{k+1}-a_k=\dfrac{1}{k+1}-\log(k+1)+\log k<0$ だから，$\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は単調減少数列である．(1) の結果から $a_n>\log(n+1)-\log n>0$ であるため，$\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は下に有界である．故に連続性の公理から $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は収束する．

(3) $a_3=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\log 3<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\log e=\dfrac{5}{6}$ であり，$\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は単調減少数列だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n<\frac{5}{6}$ である．n を 8 以上の自然数とし，(1) で得た不等式 $\log(k+1)-\log k<\dfrac{1}{k}$ に $k=7,8,\dots,n-1$ を代入したものを辺々加えると，$\log n-\log 7<\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}$ が得られ，この両辺に $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{n}-\log n$ を加えて，右辺と左辺を入れ替えれば $a_n>\dfrac{49}{20}-\log 7+\dfrac{1}{n}$ が得られる．従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n\geqq\frac{49}{20}-\log 7$ である．ここで，$\log 7=1.9459...<1.95=\dfrac{39}{20}$ だから $\dfrac{49}{20}-\log 7=\dfrac{1}{2}+\dfrac{39}{20}-\log 7>\dfrac{1}{2}$ となるため，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n>\frac{1}{2}$ である．
(Gauss 全集第 3 巻, 154 ページによると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0.577215664901532860606512090082402431042 1....$)

7. (1) $(1+x)^m$ の級数展開 $(1+x)^m=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n$ において $m=-\dfrac{1}{2}$ として，x を $-4x$ で置き換えれば

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-4x}}&=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(2n-1)!!}{n!}x^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^nn!(2n-1)!!}{(n!)^2}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!(2n-1)!!}{(n!)^2}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n\end{aligned}$$

だから $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n=\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ (ただし $|x|<\dfrac{1}{4}$) である．

(2) $\dfrac{1}{1-x}$ の級数展開 $\dfrac{1}{1-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ において，両辺の導関数を考えれば $\dfrac{1}{(1-x)^2}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ が得られる．この両辺に x を掛けた等式 $\dfrac{x}{(1-x)^2}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ の両辺の導関数を考えれば $\dfrac{1+x}{(1-x)^3}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ が得られるため，この等式のこの両辺に x を掛ければ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$ が得られる．

(3) e^x の級数展開 $e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ において，両辺の導関数を考えれば $e^x=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n-1}$ が得られる．この両辺に x を掛けた等式 $xe^x=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n$ の両辺の導関数を考えれば $(1+x)e^x=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1}$ が得られる．この等式の両辺に x を掛ければ $(x+x^2)e^x=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n$ が得られ，この両辺の導関数を考えれば $(1+3x+x^2)e^x=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}x^{n-1}$ が得られる．さらにこの等式の両辺に x を掛ければ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}x^n=(x+3x^2+x^3)e^x$ が得られる．

(4) e^x の級数展開 $e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ において，x を $-x$ で置き換えれば $e^{-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n$ が得られる．従って $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ だから $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\cosh x$ である．

(5) $\log(1+x)$ の級数展開 $\log(1+x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ において，x を $-x$ で置き換えて，両辺を -1 倍すれ

ば $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$ が得られる．故に $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + x = -x\log(1-x) + \log(1-x) + x = (1-x)\log(1-x) + x$ である．

[別解] $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ とおけば $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$ だから $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x (-\log(1-t))dt = \int_0^x ((1-t))' \log(1-t)dt = [(1-t)\log(1-t)]_0^x - \int_0^x (-1)dt = (1-x)\log(1-x) + x$

微積分学 I 演習問題　第 14 回　面積・曲線の長さ・回転体の体積

1. a, b $(a \geqq b)$ を正の実数, m, n を自然数とするとき, 以下の領域の面積を求めよ.

(1) 楕円の内部 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1$ と $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2} \leqq 1$ の共通部分.

(2) 第一象限の $x^{\frac{1}{m}}+y^{\frac{1}{n}} \leqq 1$ を満たす部分.

(3) 極座標で表された曲線 $r=a+b\cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で囲まれた部分.

(4) 極座標で表された曲線 $r=a\sin n\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{n})$ で囲まれた部分.

(5) 媒介変数表示された曲線 $\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$ と y 軸で囲まれた部分.

(6) 媒介変数表示された曲線 $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれた部分.

(7) 媒介変数表示された曲線 $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれた部分.

(8) 媒介変数表示された曲線 $\begin{cases} x=2a\cos t+a\cos 2t \\ y=2a\sin t-a\sin 2t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で囲まれた部分.

(9) 媒介変数表示された曲線 $\begin{cases} x=2a\cos t-a\cos 2t \\ y=2a\sin t-a\sin 2t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で囲まれた部分.

2. 次の曲線の長さを求めよ. ただし a, b, p, q は実数の定数で, (6), (8), (18), (19), (20) では $a>0$ とし, (13), (14) の n は自然数とする.

(1) $y=ax^{\frac{3}{2}}$ $\quad (0 \leqq x \leqq b)$

(2) $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\log x$ $\quad (1 \leqq x \leqq 2)$

(3) $y=\log(x^2-1)$ $\quad (2 \leqq x \leqq 3)$

(4) $y=\log(\cos x)$ $\quad (0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4})$

(5) $y=e^x$ $\quad (0 \leqq x \leqq \log 2)$

(6) $y=a^2e^{\frac{x}{2ab}}+b^2e^{-\frac{x}{2ab}}$ $\quad (2abp \leqq x \leqq 2abq)$

(7) $y=\log x$ $\quad (a \leqq x \leqq b)$

(8) $y=\dfrac{3a}{2}x^{\frac{2}{3}}$ $\quad (0 \leqq x \leqq b)$

(9) $y=(1-\sqrt{x})^2$ $\quad (0 \leqq x \leqq 1)$

(10) $y=(a-x)\sqrt{\dfrac{x}{3a}}$ $\quad (0 \leqq x \leqq a)$

(11) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}t^4-t^2 \\ y=\frac{4}{3}t^3 \end{cases}$ $\quad (-1 \leqq t \leqq 2)$

(12) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}t^2-\log t \\ y=\frac{1}{3}t^3-t \end{cases}$ $\quad (1 \leqq t \leqq 2\sqrt{2})$

(13) $\begin{cases} x=t^2+2t \\ y=\frac{2}{3}t^3+t^2 \end{cases}$ $\quad (0 \leqq t \leqq \sqrt{3})$

(14) $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$ $\quad (0 \leqq t \leqq \sqrt{3})$

(15) $\begin{cases} x=(a-b)\cos t+b\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right) \\ y=(a-b)\sin t-b\sin\left(\frac{a-b}{b}t\right) \end{cases}$ $\quad (0 \leqq t \leqq \frac{\pi bn}{a})$

(16) $\begin{cases} x=(a+b)\cos t-b\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right) \\ y=(a+b)\sin t-b\sin\left(\frac{a+b}{b}t\right) \end{cases}$ $\quad (0 \leqq t \leqq \frac{\pi bn}{a})$

(17) $r=e^{a\theta}$ $(\theta \leqq b)$

(18) $r=a\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq b)$

(19) $r=a\theta^2$ $(0 \leqq \theta \leqq b)$

(20) $r=\dfrac{a}{\theta}$ $(1 \leqq \theta \leqq b)$

3. 次の回転体の体積を求めよ.

(1) 極座標で表された曲線 $r=a(1+\cos\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を x 軸を軸として 1 回転して得られる回転体.

(2) 双曲線 $xy=1$ と y 軸と直線 $y=1$ で囲まれた部分を y 軸を軸として 1 回転して得られる回転体.

(3) 曲線 $x=a\log\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right)-\sqrt{a^2-y^2}$ $(a>0)$ と x 軸と y 軸で囲まれた部分を x 軸を軸として 1 回転して得られる回転体.

第 14 回の演習問題の解答

1. (1) 対称性から第 1 象限の $x \leqq y \leqq b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$ を満たす部分の面積を求めれば, 与えられた図形の面積はその値の 8 倍である．$0 \leqq x \leqq b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$ が成り立つのは $0 \leqq x \leqq \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ のときであり, $x = a\sin t$ とおけば $0 \leqq t \leqq \sin^{-1}\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $dx = a\cos t\,dt$ だから, 求める面積は $8\displaystyle\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}-x\right)dx =$
$8\displaystyle\int_0^{\sin^{-1}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} ab\cos^2 t\,dt - [4x^2]_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}} = 4\int_0^{\sin^{-1}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} ab(1+\cos 2t)\,dt - \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2} =$
$2\,[ab(2t+\sin 2t)]_0^{\sin^{-1}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} - \dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2} = 2ab\left(2\sin^{-1}\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \sin\left(2\sin^{-1}\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right) - \dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2} =$
$4ab\sin^{-1}\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + 4ab\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) - \dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2} = 4ab\sin^{-1}\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である．

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ かつ $0 \leqq y \leqq \left(1-x^{\frac{1}{m}}\right)^n$ を満たす部分の面積を求めればよい．この面積を $S_{m,n}$ とおき, $t = x^{\frac{1}{m}}$ とおけば $0 \leqq t \leqq 1$, $dx = mt^{m-1}dt$ だから, $S_{m,n} = \displaystyle\int_0^1 \left(1-x^{\frac{1}{m}}\right)^n dx = m\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^n dx$ である．$m \geqq 2$ ならば部分積分法により $S_{m,n} = \left[-\dfrac{m}{n+1}t^{m-1}(1-t)^{n+1}\right]_0^1 + \dfrac{m(m-1)}{n+1}\displaystyle\int_0^1 t^{m-2}(1-t)^{n+1}dx = \dfrac{m}{n+1}S_{m-1,n+1}$ を得る．故に $S_{m,n} = \dfrac{m}{n+1}S_{m-1,n+1} = \dfrac{m(m-1)}{(n+1)(n+2)}S_{m-2,n+2} = \cdots = \dfrac{m(m-1)\cdots 2}{(n+1)(n+2)\cdots(m+n-1)}S_{1,m+n-1}$ であり, $S_{1,m+n-1} = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{m+n-1}dx = \left[-\frac{(1-t)^{m+n}}{m+n}\right]_0^1 = \frac{1}{m+n}$ だから, $S_{m,n} = \dfrac{m(m-1)\cdots 2}{(n+1)(n+2)\cdots(m+n)} = \dfrac{m!n!}{(m+n)!}$ が得られる．

(3) 教科書の定理 4.18 より, 求める面積は $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}(a+b\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a^2+2ab\cos\theta+\frac{b^2(1+\cos 2\theta)}{2}\right)d\theta =$
$\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2a^2+b^2}{2}\theta + 2ab\sin\theta + \dfrac{b^2}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \dfrac{\pi(2a^2+b^2)}{2}$.

(4) 教科書の定理 4.18 より, 求める面積は $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} a^2\sin^2 n\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{a^2}{4}(1-\cos 2n\theta)\,d\theta = \frac{a^2}{4}\left[\theta - \frac{\sin 2n\theta}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{n}} = \frac{\pi a^2}{4n}$.

(5) y は 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで単調に増加するため, 求める面積は $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{dy}{dt}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t(\sin t + t\cos t)dt =$
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(t\sin 2t + t^2(1+\cos 2t))dt = \frac{\pi^3}{48} + \left[\frac{1}{4}(-t\cos 2t + t^2\sin 2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}(\cos 2t - 2t\sin 2t)dt =$
$\dfrac{\pi^3}{48} + \dfrac{\pi}{8} + \left[\dfrac{\sin 2t}{8} + \dfrac{t\cos 2t}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2t}{8}dt = \frac{\pi^3}{48}$.
[別解] $\sqrt{x^2+y^2} = t$ だから, 与えられた曲線を極座標で表せば $r = \theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2})$ となるため, 教科書の定理 4.18 より求める面積は $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2\theta d\theta = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{3}\theta^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{48}$ である．

(6) $\sqrt{x^2+y^2} = e^t$ だから, 与えられた曲線を極座標で表せば $r = e^\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ となるため, 教科書の定理 4.18 より求める面積は $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2\theta}d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2\theta}\right]_0^{\pi} = \frac{e^{2\pi}-1}{4}$ である．

(7) $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ならば $\sin t = y$ より $0 \leqq y \leqq 1$, $t = \sin^{-1} y$ であり, $\cos t \geqq 0$ だから $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対応する与えられた曲線の部分を C_1 とすれば, C_1 は方程式 $x = \sqrt{1-y^2} + y\sin^{-1} y$ が定める曲線である．$\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$ ならば $\sin(\pi - t) = y$ より $0 \leqq y \leqq 1$, $t = \pi - \sin^{-1} y$ であり, $\cos t \leqq 0$ だから $\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$ に対応する与えられた曲線の部分を C_2 とすれば, C_2 は方程式 $x = -\sqrt{1-y^2} + y(\pi - \sin^{-1} y)$ が定める曲線である．ここで関数 $f, g : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を $f(y) = \sqrt{1-y^2} + y\sin^{-1} y$, $g(y) = -\sqrt{1-y^2} + y(\pi - \sin^{-1} y)$ で定めれ

ば, $0 \leqq y < 1$ ならば $\dfrac{d}{dy}(f(y)-g(y)) = 2\sin^{-1}y - \pi < 0$ だから $f(y)-g(y)$ は y の単調減少関数であり, $f(1)-g(1)=0$ だから $0 \leqq y \leqq 1$ に対して $g(y) \leqq f(y)$ が成り立つ. 故に C_1, C_2 と x 軸で囲まれた部分の面積は $\displaystyle\int_0^1 (f(y)-g(y))\,dy = \int_0^1 \Big(2\sqrt{1-y^2}+2y\sin^{-1}y-\pi y\Big)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(2\cos^2\theta + 2\theta\sin\theta\cos\theta\big)\,d\theta - \int_0^1 \pi y\,dy =$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\sin 2\theta\,d\theta - \frac{\pi}{2} = \left[-\frac{\theta\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{\pi}{4}$ である.

(8) 与えられた曲線の $\pi \leqq t \leqq 2\pi$ に対応する部分を x 軸に関して対称移動した曲線は $\begin{cases} x = 2a\cos t + a\cos 2t \\ y = -2a\sin t + a\sin 2t \end{cases}$ $(\pi \leqq t \leqq 2\pi)$ によってパラメータ表示されるが, $t = 2\pi - s$ $(0 \leqq s \leqq \pi)$ としてパラメータを t から s に置き換えれば, 上の曲線は $\begin{cases} x = 2a\cos s + a\cos 2s \\ y = 2a\sin s - a\sin 2s \end{cases}$ $(0 \leqq s \leqq \pi)$ によってパラメータ表示されるため, 与えられた曲線の $0 \leqq t \leqq \pi$ に対応する部分に一致する. 従って与えられた曲線で囲まれた部分は x 軸に関して対称だから, 与えられた曲線の $0 \leqq t \leqq \pi$ に対応する部分と x 軸で囲まれた部分の面積を求め, それを 2 倍したものが求める面積である.

$\dfrac{dx}{dt} = -2a\sin t - 2a\sin 2t = -2a\sin t(1+2\cos t)$ だから $0 \leqq t \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ のときに x は $3a$ から $-\dfrac{3a}{2}$ まで単調に減少し, $\dfrac{2\pi}{3} \leqq t \leqq \pi$ のときに x は $-\dfrac{3a}{2}$ から $-a$ まで単調に増加する. $0 \leqq t \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ に対応する与えられた曲線の部分を C_1, $\dfrac{2\pi}{3} \leqq t \leqq \pi$ に対応する与えられた曲線の部分を C_2 とする.

$$\begin{aligned} 2a\sin t - a\sin 2t + \sqrt{3}(2a\cos t + a\cos 2t) &= 4a\Big(\cos t\cos\frac{\pi}{6} + \sin t\sin\frac{\pi}{6}\Big) - 2a\Big(\sin 2t\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2t\sin\frac{\pi}{3}\Big) \\ &= 4a\cos\Big(t-\frac{\pi}{6}\Big) - 2a\sin\Big(2t-\frac{\pi}{3}\Big) = 4a\cos\Big(t-\frac{\pi}{6}\Big)\Big(1-\sin\Big(t-\frac{\pi}{6}\Big)\Big) \end{aligned}$$

だから $0 \leqq t \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ ならば $2a\sin t - a\sin 2t \geqq -\sqrt{3}(2a\cos t + a\cos 2t)$ であり, $\dfrac{2\pi}{3} \leqq t \leqq \pi$ ならば $2a\sin t - a\sin 2t \leqq -\sqrt{3}(2a\cos t + a\cos 2t)$ である. 従って C_1 は直線 $y = -\sqrt{3}x$ より上にあり, C_2 は直線 $y = -\sqrt{3}x$ より下にあるため x 座標が $-\dfrac{3a}{2} \leqq x \leqq -a$ の範囲で C_1 は C_2 より上にある. また, $0 \leqq t \leqq \pi$ ならば $y = 2a\sin t - a\sin 2t = 2a\sin t(1-\cos t) \geqq 0$ だから, 与えられた曲線の $0 \leqq t \leqq \pi$ に対応する部分と x 軸で囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{3a}{2}}^{3a} y\,dx - \int_{-\frac{3a}{2}}^{-a} y\,dx &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{0} y\frac{dx}{dt}dt - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} y\frac{dx}{dt}dt \\ &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{0} (2a\sin t - a\sin 2t)(-2a\sin t - 2a\sin 2t)dt - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (2a\sin t - a\sin 2t)(-2a\sin t - 2a\sin 2t)dt \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} a^2(2\sin t - \sin 2t)(2\sin t + 2\sin 2t)dt + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} a^2(2\sin t - \sin 2t)(2\sin t + 2\sin 2t)dt \\ &= \int_0^{\pi} a^2(4\sin^2 t + 2\sin t\sin 2t - 2\sin^2 2t)dt = \int_0^{\pi} a^2(1 - 2\cos 2t + 4\sin^2 t\cos t + \cos 4t)dt \\ &= a^2\left[t - \sin 2t + \frac{4}{3}\sin^3 t + \frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{\pi} = \pi a^2. \end{aligned}$$

である. 故に求める面積は $2\pi a^2$ である.

(9) 与えられた曲線の $\pi \leqq t \leqq 2\pi$ に対応する部分を x 軸に関して対称移動した曲線は $\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t \\ y = -2a\sin t + a\sin 2t \end{cases}$ $(\pi \leqq t \leqq 2\pi)$ によってパラメータ表示されるが, $t = 2\pi - s$ $(0 \leqq s \leqq \pi)$ としてパラメータを t から s に置き換えれば, 上の曲線は $\begin{cases} x = 2a\cos s - a\cos 2s \\ y = 2a\sin s - a\sin 2s \end{cases}$ $(0 \leqq s \leqq \pi)$ によってパラメータ表示されるため, 与えられた曲線の $0 \leqq t \leqq \pi$ に対応する部分に一致する. 従って与えられた曲線で囲まれた部分は x 軸に関して対称だから, 与えられた曲線の $0 \leqq t \leqq \pi$ に対応する部分と x 軸で囲まれた部分の面積を求め, それを 2 倍したものが求める面積である.

$\dfrac{dx}{dt} = -2a\sin t + 2a\sin 2t = -2a\sin t(1-2\cos t)$ だから $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{3}$ のときに x は a から $\dfrac{3a}{2}$ まで単調に増加し, $\dfrac{\pi}{3} \leqq t \leqq \pi$ のときに x は $\dfrac{3a}{2}$ から $-3a$ まで単調に減少する. また, $\dfrac{dy}{dt} = 2a\cos t - 2a\cos 2t = 2a(1-\cos t)(1+2\cos t)$ だから $0 \leqq t \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ のときに y は 0 から $\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$ まで単調に増加し, $\dfrac{2\pi}{3} \leqq t \leqq \pi$ のときに x は $\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$ から 0 まで単調に減少する. $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{3}$ に対応する与えられた曲線の部分を C_1, $\dfrac{\pi}{3} \leqq t \leqq \pi$ に対応する与えられた曲線の部分を C_2 とすれば, C_1 は x 座標が $a \leqq x \leqq \dfrac{3a}{2}$ の範囲に含まれ, $t = \dfrac{\pi}{2}$ のとき, $x = a$ だから, C_2 の x 座標が $a \leqq x \leqq \dfrac{3a}{2}$ の範囲に含まれる部分は, $\dfrac{\pi}{3} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対応する部分である. $0 \leqq t \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ の範囲で y は単調に増加しているので, C_2 の x 座標が $a \leqq x \leqq \dfrac{3a}{2}$ の範囲に含まれる部分は, C_1 より上にある. また, $0 \leqq t \leqq \pi$ ならば $y = 2\sin t - \sin 2t = 2\sin t(1-\cos t) \geqq 0$ だから, 与えられた曲線の $0 \leqq t \leqq \pi$ に対応する部分と x 軸で囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned}
\int_{-3a}^{\frac{3a}{2}} y\,dx - \int_{a}^{\frac{3a}{2}} y\,dx &= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{dt}dt - \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{dt}dt \\
&= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{3}} (2a\sin t - a\sin 2t)(-2a\sin t + 2a\sin 2t)dt - \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (2a\sin t - a\sin 2t)(-2a\sin t + 2a\sin 2t)dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} a^2(2\sin t - \sin 2t)(2\sin t - 2\sin 2t)dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} a^2(2\sin t - \sin 2t)(2\sin t - 2\sin 2t)dt \\
&= \int_{0}^{\pi} a^2(4\sin^2 t - 6\sin t\sin 2t + 2\sin^2 2t)dt = \int_{0}^{\pi} a^2(3 - 2\cos 2t - 12\sin^2 t\cos t - \cos 4t)dt \\
&= a^2\left[3t - \sin 2t - 4\sin^3 t - \frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{\pi} = 3\pi a^2.
\end{aligned}$$

である. 故に求める面積は $6\pi a^2$ である.

2. (1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3a}{2}\sqrt{x}$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_0^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_0^b \sqrt{1 + \frac{9a^2}{4}x}dx = \left[\frac{8}{27a^2}\left(1 + \frac{9a^2}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^b = \frac{8}{27a^2}\left(\left(1 + \frac{9a^2}{4}b\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{\left(4 + 9a^2 b\right)^{\frac{3}{2}} - 8}{27a^2}$.

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2x}$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_1^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)dx = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{\log x}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{4} + \frac{\log 2}{2}$.

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{x^2-1}$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_2^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_2^3 \frac{x^2+1}{x^2-1}dx = \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = [x + \log(x-1) - \log(x+1)]_2^3 = 1 - \log 2 + \log 3$.

(4) $\dfrac{dy}{dx} = -\tan x$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}dx$ で与えられる. $t = \sin x$ とおけば, $\cos x dx = dt$ であり, x が 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ まで動けば, t は 0 から $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ まで動くため, $(*) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1-t^2}dt = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)dt = \left[\frac{1}{2}(\log(1+t) - \log(1-t))\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \log\left(\sqrt{2}+1\right)$.

(5) $\dfrac{dy}{dx} = e^x$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_0^{\log 2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_0^{\log 2} \sqrt{1 + e^{2x}}dx \cdots (*)$. $t = \sqrt{1 + e^{2x}}$ とおけば $x = \dfrac{1}{2}\log(t^2-1)$, $dx = \dfrac{t}{t^2-1}dt$ であり, x が 0 から $\log 2$ まで動くとき, t は $\sqrt{2}$ から $\sqrt{5}$ まで動くため, $(*) = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{t^2}{t^2-1}dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \left(1 + \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)}\right)dt = \left[1 + \frac{1}{2}\log(t-1) - \frac{1}{2}\log(t+1)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \sqrt{5} - \sqrt{2} +$

$\dfrac{1}{2}\log\left(\sqrt{5}-1\right)-\dfrac{1}{2}\log\left(\sqrt{5}+1\right)-\dfrac{1}{2}\log\left(\sqrt{2}-1\right)+\dfrac{1}{2}\log\left(\sqrt{2}+1\right)=\sqrt{5}-\sqrt{2}+\log\left(\sqrt{5}-1\right)+\log\left(\sqrt{2}+1\right)-\log 2.$

(6) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ae^{\frac{x}{2ab}}}{2b}-\dfrac{be^{\frac{-x}{2ab}}}{2a}$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_{2abp}^{2abq}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_{2abp}^{2abq}\sqrt{1+\left(\frac{ae^{\frac{x}{2ab}}}{2b}-\frac{be^{\frac{-x}{2ab}}}{2a}\right)^2}dx$ $\displaystyle=\int_{2abp}^{2abq}\left(\frac{ae^{\frac{x}{2ab}}}{2b}+\frac{be^{\frac{-x}{2ab}}}{2a}\right)dx=\left[a^2e^{\frac{x}{2ab}}-b^2e^{\frac{-x}{2ab}}\right]_{2abp}^{2abq}=(e^q-e^p)\left(a^2+\frac{b^2}{e^{p+q}}\right).$

(7) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_a^b\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx\cdots(*)$ で与えられる. $t=\sqrt{x^2+1}$ とおけば $xdx=tdt$ だから, $\displaystyle(*)=\int_a^b\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx=\int_{\sqrt{a^2+1}}^{\sqrt{b^2+1}}\frac{t^2}{t^2-1}dt=\int_{\sqrt{a^2+1}}^{\sqrt{b^2+1}}\left(1+\frac{1}{2(t-1)}-\frac{1}{2(t+1)}\right)dt=$ $\displaystyle\left[t+\frac{1}{2}\log\frac{t-1}{t+1}\right]_{\sqrt{a^2+1}}^{\sqrt{b^2+1}}=\sqrt{b^2+1}-\sqrt{a^2+1}+\log\left(\sqrt{b^2+1}-1\right)-\log\left(\sqrt{a^2+1}-1\right)-\log b+\log a.$

(8) 与えられた曲線は $\begin{cases}x=t^3\\ y=\frac{3a}{2}t^2\end{cases}$ $(0\leqq t\leqq\sqrt[3]{b})$ とパラメータ表示される. $\dfrac{dx}{dt}=3t^2$, $\dfrac{dy}{dt}=3at$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{b}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^{\sqrt[3]{b}}3t\sqrt{t^2+a^2}\,dt=\left[(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt[3]{b}}=\left(b^{\frac{2}{3}}+a^2\right)^{\frac{3}{2}}-a^3.$

(9) 与えられた曲線は $\begin{cases}x=t^2\\ y=(1-t)^2\end{cases}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とパラメータ表示される. $\dfrac{dx}{dt}=2t$, $\dfrac{dy}{dt}=2t-2$ だから, 求める曲線の長さは, 教科書の 104 ページの結果から $\displaystyle\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^1 2\sqrt{2}\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}dt=$ $\displaystyle\sqrt{2}\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\log\left(t-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\right)\right]_0^1=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\log\left(1+\sqrt{2}\right).$

(10) 与えられた曲線は $\begin{cases}x=at^2\\ y=\frac{a}{\sqrt{3}}t(1-t^2)\end{cases}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とパラメータ表示される. $\dfrac{dx}{dt}=2at$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}(1-3t^2)$ だから, 求める曲線の長さは, $\displaystyle\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^1\frac{a}{\sqrt{3}}(1+3t^2)dt=\frac{a}{\sqrt{3}}[t+t^3]_0^1=\frac{2a}{\sqrt{3}}.$

(11) $\dfrac{dx}{dt}=2t^3-2t$, $\dfrac{dy}{dt}=4t^2$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_{-1}^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_{-1}^2 2|t^3+t|dt=$ $\displaystyle\int_{-1}^0 2(-t^3-t)dt+\int_0^2 2(t^3+t)dt=\left[-\frac{t^4}{2}-t^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{t^4}{2}+t^2\right]_0^2=\frac{27}{2}.$

(12) $\dfrac{dx}{dt}=t-\dfrac{1}{t}$, $\dfrac{dy}{dt}=t^2-1$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_1^{2\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_1^{2\sqrt{2}}\frac{(t^2-1)\sqrt{t^2+1}}{t^2}tdt$ $\cdots(*)$ で与えられる. $s=\sqrt{t^2+1}$ とおくと, $t^2=s^2-1$, $tdt=sds$ であり, t が 1 から $2\sqrt{2}$ まで動くとき, s は $\sqrt{2}$ から 3 まで動くため, $\displaystyle(*)=\int_{\sqrt{2}}^3\frac{s^2(s^2-2)}{s^2-1}ds=\int_{\sqrt{2}}^3\left(s^2-1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right)\right)ds=$ $\displaystyle\left[\frac{s^3}{3}-s-\frac{1}{2}(\log(s-1)-\log(s+1))\right]_{\sqrt{2}}^3=6+\frac{\sqrt{2}}{3}+\log\left(2-\sqrt{2}\right).$

(13) $\dfrac{dx}{dt}=2t+2$, $\dfrac{dy}{dt}=2t^2+2t$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^{\sqrt{3}}2(t+1)\sqrt{1+t^2}dt$ $\cdots(*)$ で与えられる. $s=t^2$ とおくと, $2tdt=ds$ であり, t が 0 から $\sqrt{3}$ まで動くとき, s は 0 から 3 まで動くため, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}2t\sqrt{1+t^2}dt=\int_0^3\sqrt{1+s}ds=\left[\frac{2}{3}(1+s)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=\frac{14}{3}$ である. また, 教科書の 104 ページの結果から $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}2\sqrt{1+t^2}dt=\left[t\sqrt{1+t^2}+\log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_0^{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}+\log\left(\sqrt{3}+2\right)$ だから $(*)=\dfrac{14}{3}+2\sqrt{3}+\log\left(\sqrt{3}+2\right).$

(14) $\dfrac{dx}{dt}=6t$, $\dfrac{dy}{dt}=3-3t^2$ だから, 求める曲線の長さは, 教科書の 104 ページの結果から $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\sqrt{3}}3(1+t^2)\,dt=[3t+t^3]_0^{\sqrt{3}}=6\sqrt{3}$.

(15) $\dfrac{dx}{dt}=-(a-b)\left(\sin t+\sin\left(\dfrac{a-b}{b}t\right)\right)$, $\dfrac{dy}{dt}=(a-b)\left(\cos t-\cos\left(\dfrac{a-b}{b}t\right)\right)$ だから, $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=2(a-b)^2\left(1+\sin t\sin\left(\dfrac{a-b}{b}t\right)-\cos t\cos\left(\dfrac{a-b}{b}t\right)\right)=2(a-b)^2\left(1-\cos\left(\dfrac{a}{b}t\right)\right)=4(a-b)^2\sin^2\left(\dfrac{a}{2b}t\right)$ である. 従って, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_0^{\frac{b\pi n}{a}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\frac{b\pi n}{a}}2|a-b|\left|\sin\left(\frac{a}{2b}t\right)\right|dt\cdots(*)$ で与えられる. $\theta=\dfrac{a}{2b}t$ とおけば, $dt=\dfrac{2b}{a}d\theta$ であり, t が 0 から $\dfrac{b\pi n}{a}$ まで動けば, θ は 0 から $\dfrac{\pi n}{2}$ まで動くため, $\displaystyle(*)=\int_0^{\frac{\pi n}{2}}\frac{4b|a-b|}{a}|\sin\theta|d\theta=\frac{4b|a-b|}{a}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{\pi(k-1)}{2}}^{\frac{\pi k}{2}}|\sin\theta|d\theta$ が成り立つ. 任意の整数 k に対して $\displaystyle\int_{\frac{\pi(k-1)}{2}}^{\frac{\pi k}{2}}|\sin\theta|d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta=1$ だから, 上式から求める曲線の長さは $\dfrac{4bn|a-b|}{a}$ である.

(16) $\dfrac{dx}{dt}=-(a+b)\left(\sin t-\sin\left(\dfrac{a+b}{b}t\right)\right)$, $\dfrac{dy}{dt}=(a+b)\left(\cos t-\cos\left(\dfrac{a+b}{b}t\right)\right)$ だから, $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=2(a+b)^2\left(1-\sin t\sin\left(\dfrac{a+b}{b}t\right)-\cos t\cos\left(\dfrac{a+b}{b}t\right)\right)=2(a+b)^2\left(1-\cos\left(\dfrac{a}{b}t\right)\right)=4(a+b)^2\sin^2\left(\dfrac{a}{2b}t\right)$ である. 従って, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_0^{\frac{b\pi n}{a}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\frac{b\pi n}{a}}2|a+b|\left|\sin\left(\frac{a}{2b}t\right)\right|dt\cdots(*)$ で与えられる. $\theta=\dfrac{a}{2b}t$ とおけば, $dt=\dfrac{2b}{a}d\theta$ であり, t が 0 から $\dfrac{b\pi n}{a}$ まで動けば, θ は 0 から $\dfrac{\pi n}{2}$ まで動くため, $\displaystyle(*)=\int_0^{\frac{\pi n}{2}}\frac{4b|a+b|}{a}|\sin\theta|d\theta=\frac{4b|a+b|}{a}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{\pi(k-1)}{2}}^{\frac{\pi k}{2}}|\sin\theta|d\theta$ が成り立つ. 任意の整数 k に対して $\displaystyle\int_{\frac{\pi(k-1)}{2}}^{\frac{\pi k}{2}}|\sin\theta|d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta=1$ だから, 上式から求める曲線の長さは $\dfrac{4bn|a+b|}{a}$ である.

(17) $\dfrac{dr}{d\theta}=ae^{a\theta}$ だから, 求める曲線の長さは $\displaystyle\int_{-\infty}^{b}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,dt=\int_{-\infty}^{b}\sqrt{1+a^2}e^{a\theta}d\theta=\left[\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}e^{a\theta}\right]_{-\infty}^{b}=\lim_{\theta\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}e^{ab}-\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}e^{a\theta}\right)=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}e^{ab}$.

(18) $\dfrac{dr}{d\theta}=a$ だから, 求める曲線の長さは, 教科書の 104 ページの結果から $\displaystyle\int_0^{b}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,dt=\int_0^b a\sqrt{\theta^2+1}d\theta=\left[\frac{a\theta}{2}\sqrt{1+\theta^2}+\frac{a}{2}\log\left(\theta+\sqrt{1+\theta^2}\right)\right]_0^b=\frac{a}{2}\left(b\sqrt{1+b^2}+\log\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)\right)$.

(19) $\dfrac{dr}{d\theta}=2a\theta$ だから, 求める曲線の長さは, $\displaystyle\int_0^{b}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,dt=\int_0^b a\theta\sqrt{\theta^2+4}d\theta\cdots(*)$ で与えられる. $s=\theta^2$ とおくと, $\theta dt=\dfrac{1}{2}ds$ であり, θ が 0 から b まで動くとき, s は 0 から b^2 まで動くため, $\displaystyle(*)=\int_0^{b^2}\frac{a}{2}\sqrt{s+4}ds=\left[\frac{a}{3}(s+4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{b^2}=\frac{a}{3}\left((b^2+4)^{\frac{3}{2}}-8\right)$.

(20) $\dfrac{dr}{d\theta}=-\dfrac{a}{\theta^2}$ だから, 求める曲線の長さは, $\displaystyle\int_1^{b}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta=\int_1^b\sqrt{\left(\frac{a}{\theta}\right)^2+\left(-\frac{a}{\theta^2}\right)^2}d\theta=\int_1^b\frac{a\sqrt{\theta^2+1}}{\theta^2}d\theta\cdots(*)$ で与えられる. $t=\theta+\sqrt{\theta^2+1}$ とおくと $\theta=\dfrac{t^2-1}{2t}$, $\sqrt{\theta^2+1}=\dfrac{t^2+1}{2t}$, $d\theta=\dfrac{t^2+1}{2t^2}dt$ であり, θ が 1 から b まで動くとき, t は $1+\sqrt{2}$ から $b+\sqrt{b^2+1}$ まで動くため, $\displaystyle(*)=\int_{1+\sqrt{2}}^{b+\sqrt{b^2+1}}\frac{a(t^2+1)^2}{t(t^2-1)^2}dt=$

$a\displaystyle\int_{1+\sqrt{2}}^{b+\sqrt{b^2+1}} \frac{(t^2-1)^2+4t^2}{t(t^2-1)^2}dt = a\int_{1+\sqrt{2}}^{b+\sqrt{b^2+1}}\left(\frac{1}{t}+\frac{4t}{(t^2-1)^2}\right)dt = a\left[\log t-\frac{2}{t^2-1}\right]_{1+\sqrt{2}}^{b+\sqrt{b^2+1}} =$
$a\left(\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{b^2+1}}{b}+\log\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)-\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$

3. (1) 与えられた曲線は θ を媒介変数として $\begin{cases} x=a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y=a(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$ と表される．与えられた曲線は x 軸に関して対称だから，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の部分を x 軸の回りに回転させればよい．$x = a\left(\left(\cos\theta+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\right)$ だから $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ で x は $2a$ から $-\dfrac{a}{4}$ まで単調に減少し，$\dfrac{2\pi}{3} \leqq \theta \leqq \pi$ で x は $-\dfrac{a}{4}$ から 0 まで単調に増加する．また，$\dfrac{dy}{d\theta} = a(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$ だから $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ の範囲で y は 0 から $\dfrac{3\sqrt{3}a}{4}$ まで単調に増加して，$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で y は $\dfrac{3\sqrt{3}a}{4}$ から 0 まで単調に減少する．従って θ が 0 から $\dfrac{2\pi}{3}$ まで動いて得られる曲線の部分を C_1 とし，$\dfrac{2\pi}{3}$ から π まで動いて得られる曲線の部分を C_2 とすれば，C_2 は第 2 象限の $-\dfrac{a}{4} \leqq x \leqq 0$ の範囲に含まれて，直線 $y=\dfrac{\sqrt{3}a}{4}$ より下にあり，C_1 の第 2 象限に含まれる部分は 直線 $y=\dfrac{\sqrt{3}a}{4}$ より上にあるため，与えられた曲線を x 軸の回りに回転させて得られる回転体は C_1 を x 軸の回りに回転させて得られる回転体から C_2 を x 軸の回りに回転させて得られる回転体を除いた部分である．C_1 を x 軸の回りに回転させて得られる回転体の体積は $\displaystyle\int_{-\frac{a}{4}}^{2a}\pi y^2\,dx = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{0}\pi y^2\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{2\pi}{3}}\pi a^3(1+\cos\theta)^2(1-\cos^2\theta)(1+2\cos\theta)\sin\theta\,d\theta =$ $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\pi a^3(1+t)^2(1-t^2)(1+2t)\,dt$ であり，C_2 を x 軸の回りに回転させて得られる回転体の体積は $\displaystyle\int_{-\frac{a}{4}}^{0}\pi y^2\,dx =$ $\displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\pi y^2\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = -\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\pi a^3(1+\cos\theta)^2(1-\cos^2\theta)(1+2\cos\theta)\sin\theta\,d\theta = -\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\pi a^3(1+t)^2(1-t^2)(1+2t)\,dt$ である．以上から求める回転体の体積は $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\pi a^3(1+t)^2(1-t^2)(1+2t)\,dt-\left(-\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\pi a^3(1+t)^2(1-t^2)(1+2t)\,dt\right) =$ $\displaystyle\int_{-1}^{1}\pi a^3(1+4t+4t^2-2t^3-5t^4-2t^5)\,dt = 2\int_0^1\pi a^3(1+4t^2-5t^4)\,dt = \frac{8\pi a^3}{3}$ である．

(2) $y=t$ のときの回転体の断面の半径は $\dfrac{1}{t}$ だから，求める体積は $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\pi}{t^2}\,dt = \lim_{s\to\infty}\left[-\frac{\pi}{t}\right]_1^s = \lim_{s\to\infty}\left(\pi-\frac{\pi}{s}\right) = \pi.$

(3) 関数 $g:(0,a]\to\boldsymbol{R}$ を $g(y)=\log\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right)-\sqrt{a^2-y^2}$ で定めれば，$y\in(0,a)$ に対し，$g'(y) = -\dfrac{\sqrt{a^2-y^2}}{y} < 0$ だから g は単調減少関数であり，$\displaystyle\lim_{y\to+0}g(y)=\infty$, $g(a)=0$ である．従って g は $(0,a]$ から $[0,\infty)$ への全単射である．$f:[0,\infty)\to(0,a]$ を g の逆関数とし，$x=g(y)$ とおいて置換積分を行えば，求める回転体の体積は，$\displaystyle\int_0^{\infty}\pi f(x)^2\,dx = \int_a^0\pi f(g(y))^2\frac{dx}{dy}\,dy = \int_0^a\pi y\sqrt{a^2-y^2}\,dy = \left[-\frac{\pi}{3}(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{\pi a^3}{3}$ である．

微積分学 I 演習問題　第 15 回　微分方程式

1. 以下の微分方程式の一般解を求めよ．ただし (7), (8), (10) の a は 0 でないとする．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = x^n(1+y^2)$　(2) $\dfrac{dy}{dx} = ry\left(1-\dfrac{y}{K}\right)$　(3) $\dfrac{dy}{dx} = \cos x(y-a)$　(4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2+y}{x}$

(5) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1+y}{1+x}$　(6) $\dfrac{dy}{dx} = (\sin x)y$　(7) $\dfrac{dy}{dx} = b^2 - a^2y^2$　(8) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ax(1+y^2)}{y(1+x^2)}$

(9) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$　(10) $\dfrac{dy}{dx} = ax^my^n$　(11) $\dfrac{dy}{dx} = -(\tan x)y$　(12) $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{1+y}{1+x}\right)^2$

2. 以下の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x}$　(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2}$　(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$　(4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy+y^2}{x^2+y^2}$

(5) $\dfrac{dy}{dx} = (x+y)^2$　(6) $\dfrac{dy}{dx} = (4x+y+1)^2$

3. 以下の微分方程式の一般解を求めよ．ただし (16) の α はつねに正の値をとる関数とする．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 2xy + x$　(2) $\dfrac{dy}{dx} = y + \sin x$　(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x+1} + x + 1$　(4) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x} + \sin x$

(5) $\dfrac{dy}{dx} = 2y + x$　(6) $\dfrac{dy}{dx} = 2y + x^2$　(7) $\dfrac{dy}{dx} = -y + \cos x$　(8) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x}{x^2+1}y + \cos x$

(9) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y+x}{x+1}$　(10) $\dfrac{dy}{dx} = xy + x$　(11) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-1}{x^2}y + 1$　(12) $\dfrac{dy}{dx} = -2xy + 2x^2 + 1$

(13) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy+1}{x^2+1}$　(14) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - 1$　(15) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{n}{x}y + x^ne^x$　(16) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}y + k\alpha(x)$

4. 微分方程式 $3\dfrac{d^2y}{dx^2}\dfrac{d^4y}{dx^4} = 5\left(\dfrac{dy^3}{dx^3}\right)^2$ の一般解を求めよ．

5. 以下の微分方程式の解のマクローリン展開の 6 次の項まで求めよ．

(1) $(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + (\sin x)y = 0$　(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - a(x+b)y = 0$

6. 以下の微分方程式の解のマクローリン展開を求めよ．ただし k は 0 以上の整数とする．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 2y + 1$　(2) $(x+1)\dfrac{dy}{dx} = 2xy + x$　(3) $(x+1)\dfrac{dy}{dx} = y + x + 1$

(4) $\dfrac{dy}{dx} = y + x(x+1)$　(5) $\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - y = 0$　(6) $(1+x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + (a+1)y = 0$

(7) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x^ky = 0$　(8) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + ay = 0$　(9) $(x^2-1)\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} + 2ay = 0$

第 15 回の演習問題の解答

1. (1) 与えられた方程式の両辺に $\dfrac{1}{y^2+1}$ をかければ $\dfrac{1}{y^2+1}\dfrac{dy}{dx} = x^n$ が得られる．この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int \frac{1}{y^2+1}\frac{dy}{dx}dx = \int x^n\,dx$ となり，左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{y^2+1}dy = \tan^{-1} y$，右辺は $n \neq -1$ ならば $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$，$n = -1$ ならば $\displaystyle\int x^n\,dx = \log|x| + C$ となるため，$\tan^{-1} y = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$，$\tan^{-1} y = \log|x| + C\ (n = -1)$ が成り立つ．従って $n \neq -1$ ならば $y = \tan\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)$，$n = -1$ ならば $y = \tan(\log|x| + C)$ が求める解である．

(2) つねに値が 0 である定数値関数と，つねに値が K である定数値関数は与えられた微分方程式の解である．それ以外の解を求めるために与えられた方程式の両辺に $\dfrac{K}{y(K-y)}$ をかければ $\dfrac{K}{y(K-y)}\dfrac{dy}{dx} = r$ が得られる．この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int \frac{K}{y(K-y)}\frac{dy}{dx}dx = \int r\,dx$ となり，左辺は $\displaystyle\int \frac{K}{y(K-y)}\,dy = \int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-K}\right)dy = \log|y| - \log|y-K|$，右辺は $\displaystyle\int r\,dx = rx + C$ となるため，$\log\left|\dfrac{y}{y-K}\right| = rx + C$ が成り立つ．従って $\left|\dfrac{y}{y-K}\right| = e^{rx+C}$ だから，$\pm e^C$ を改めて C とおけば $\dfrac{y}{y-K} = Ce^{rx}$ が得られ，y について解けば，解 $y = \dfrac{CKe^{rx}}{Ce^{rx}-1} = \dfrac{CK}{C-e^{-rx}}$ が得られる．

(3) つねに値が a である定数値関数は与えられた微分方程式の解である．それ以外の解を求めるために与えられた方程式の両辺に $\dfrac{1}{y-a}$ をかければ $\dfrac{1}{y-a}\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ が得られる．この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int \frac{1}{y-a}\frac{dy}{dx}dx = \int \cos x\,dx$ となり，左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{y-a}\,dy = \log|y-a|$，右辺は $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$ となるため，$\log|y-a| = \sin x + C$ が成り立つ．従って $|y-a| = e^{\sin x + C}$ だから，$\pm e^C$ を改めて C とおいて $y = Ce^{\sin x} + a$ が求める解である．

(4) つねに値が 0 である定数値関数と，つねに値が -1 である定数値関数は与えられた微分方程式の解である．それ以外の解を求めるために与えられた方程式の両辺に $\dfrac{1}{y(y+1)}$ をかければ $\dfrac{1}{y(y+1)}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$ が得られる．この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int \frac{1}{y(y+1)}\frac{dy}{dx}dx = \int \frac{1}{x}\,dx$ となり，左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{y(y+1)}\,dy = \int\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right)dy = \log|y| - \log|y+1|$，右辺は $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$ となるため，$\log\left|\dfrac{y}{y+1}\right| = \log|x| + C$ が成り立つ．従って $\left|\dfrac{y}{y+1}\right| = e^C|x|$ だから，$\pm e^C$ を改めて C とおけば $\dfrac{y}{y+1} = Cx$ が得られ，y について解けば，解 $y = \dfrac{Cx}{1-Cx}$ が得られる．

(5) つねに値が -1 である定数値関数は与えられた微分方程式の解である．それ以外の解を求めるために与えられた方程式の両辺に $\dfrac{1}{1+y}$ をかければ $\dfrac{1}{1+y}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{1+x}$ が得られる．この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int\frac{1}{y+1}\frac{dy}{dx}dx = \int\frac{-1}{1+x}\,dx$ となり，左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{y+1}\,dy = \log|1+y|$，右辺は $\displaystyle\int \frac{-1}{1+x}\,dx = -\log(1+x) + C$ となるため，$\log|1+y| = -\log|1+x| + C$ が成り立つ．従って $|1+y| = \dfrac{e^C}{|1+x|}$ だから，$\pm e^C$ を改めて C とおけば $1+y = \dfrac{C}{1+x}$ が得られ，$y = \dfrac{C}{1+x} - 1$ が求める解である．

(6) つねに値が 0 である定数値関数は与えられた微分方程式の解である．それ以外の解を求めるために与えられた方程式の両辺に $\dfrac{1}{y}$ をかければ $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = \sin x$ が得られる．この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx = \int \sin x\,dx$ となり，左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \log|y|$，右辺は $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ となるため，$\log|y| = -\cos x + C$ が成り立つ．従って $|y| = e^{-\cos x + C}$ だから，$\pm e^C$ を改めて C とおいて $y = Ce^{-\cos x}$ が求める解である．

(7) つねに値が $\dfrac{b}{a}$ である定数値関数と，つねに値が $-\dfrac{b}{a}$ である定数値関数は与えられた微分方程式の解である．それ以外の解を求めるために与えられた方程式の両辺に $\dfrac{1}{b^2-a^2y^2}$ をかければ $\dfrac{1}{b^2-a^2y^2}\dfrac{dy}{dx} = 1$ が得られる．この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int \frac{1}{b^2-a^2y^2}\frac{dy}{dx}dx = \int dx$ となり，左辺は $b = 0$ ならば $\displaystyle\int \frac{1}{-a^2y^2}\,dy = \frac{1}{a^2y}$，$b \neq 0$ ならば $\displaystyle\int \frac{1}{b^2-a^2y^2}\,dy = \int \frac{1}{2b}\left(\frac{1}{ay+b} - \frac{1}{ay-b}\right)dy = \frac{\log|ay+b| - \log|ay-b|}{2ab}$，右辺は $\displaystyle\int dx = x + C$ となるた

め, $b=0$ ならば $y=\dfrac{1}{a^2(x+C)}$ が求める解であり, $b\neq 0$ ならば $\log\left|\dfrac{ay+b}{ay-b}\right|=2ab(x+C)$ が成り立つ. 従って $\left|\dfrac{ay+b}{ay-b}\right|=e^{2ab(x+C)}$ だから, $\pm e^{2abC}$ を改めて C とおけば $\dfrac{ay+b}{ay-b}=Ce^{2abx}$ が得られ, y について解けば, 解 $y=\dfrac{b(Ce^{2abx}+1)}{a(Ce^{2abx}-1)}$ が得られる.

(8) 与えられた方程式の両辺に $\dfrac{2y}{y^2+1}$ をかければ $\dfrac{2y}{y^2+1}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2ax}{x^2+1}$ が得られる. この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int\frac{2y}{y^2+1}\frac{dy}{dx}dx=\int\frac{2ax}{x^2+1}dx$ となり, 左辺は $\displaystyle\int\frac{2y}{y^2+1}dy=\log(y^2+1)$, 右辺は $\displaystyle\int\frac{2ax}{x^2+1}dx=a\log(x^2+1)+C$ となるため, $\log(y^2+1)=a\log(x^2+1)+C$ が成り立つ. 従って

$$y^2+1=e^{a\log(x^2+1)+C}=e^Ce^{a\log(x^2+1)}=e^Ce^{\log(x^2+1)^a}=e^C(x^2+1)^a$$

だから e^C を改めて C とおいて $y^2=C(x^2+1)^a-1$ を得る. 従って求める解は $y=\sqrt{C(x^2+1)^a-1}$ または $y=-\sqrt{C(x^2+1)^a-1}$ である.

(9) 与えられた方程式の両辺に $\dfrac{1}{y^2+1}$ をかければ $\dfrac{1}{y^2+1}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x^2+1}$ が得られる. この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int\frac{1}{y^2+1}\frac{dy}{dx}dx=\int\frac{1}{x^2+1}dx$ となり, 左辺は $\displaystyle\int\frac{1}{y^2+1}dy=\tan^{-1}y$, 右辺は $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+1}dx=\tan^{-1}x+C$ となるため, $\tan^{-1}y=\tan^{-1}x+C$ が成り立つ. 従って $y=\tan(\tan^{-1}x+C)$ が求める解である.

(10) $n>0$ の場合は, つねに値が 0 である定数値関数は与えられた微分方程式の解である. それ以外の解を求めるために与えられた方程式の両辺に $\dfrac{1}{y^n}$ をかければ $\dfrac{1}{y^n}\dfrac{dy}{dx}=ax^m$ が得られる. この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}dx=\int ax^m\,dx$ となり, 左辺は $n\neq 1$ ならば $\displaystyle\int\frac{1}{y^n}\,dy=\frac{y^{1-n}}{1-n}$, $n=1$ ならば $\displaystyle\int\frac{1}{y}\,dy=\log|y|$ となり, 右辺は $m\neq -1$ ならば $\displaystyle\int ax^m\,dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+C$, $m=-1$ ならば $\displaystyle\int\frac{a}{x}\,dx=a\log|x|+C$ となるため, $m\neq -1$ かつ $n\neq 1$ の場合は $\dfrac{y^{1-n}}{1-n}=\dfrac{x^{m+1}}{m+1}+C$ より, $y=\left(\dfrac{1-n}{1+m}x^{m+1}+C\right)^{\frac{1}{1-n}}$, $m=-1$ かつ $n\neq 1$ の場合は $\dfrac{y^{1-n}}{1-n}=\log|x|+C$ より, $y=((1-n)\log|x|+C)^{\frac{1}{1-n}}$, $m\neq -1$ かつ $n=1$ の場合は $\log|y|=\dfrac{x^{m+1}}{m+1}+C$ より, e^C を改めて C とおけば $y=Ce^{\frac{x^{m+1}}{m+1}}$, $m=-1$ かつ $n=1$ の場合は $\log|y|=a\log|x|+C$ より $|y|=e^C|x|^a$ だから $\pm e^C$ を改めて C とおけば $y=C|x|^a$ が求める解である.

(11) つねに値が 0 である定数値関数は与えられた微分方程式の解である. それ以外の解を求めるために与えられた方程式の両辺に $\dfrac{1}{y}$ をかければ $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}=-\tan x$ が得られる. この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx=\int(-\tan x)\,dx$ となり, 左辺は $\displaystyle\int\frac{1}{y}\,dy=\log|y|$, 右辺は $\displaystyle\int(-\tan x)\,dx=\log\cos x+C$ となるため, $\log|y|=\log\cos x+C$ が成り立つ. 従って $|y|=e^{\log\cos x+C}$ だから, $\pm e^C$ を改めて C とおいて $y=C\cos x$ が求める解である.

(12) つねに値が -1 である定数値関数は与えられた微分方程式の解である. それ以外の解を求めるために与えられた方程式の両辺に $\dfrac{1}{(1+y)^2}$ をかければ $\dfrac{1}{(1+y)^2}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{(1+x)^2}$ が得られる. この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int\frac{1}{(y+1)^2}\frac{dy}{dx}dx=\int\frac{1}{(1+x)^2}\,dx$ となり, 左辺は $\displaystyle\int\frac{1}{(y+1)^2}\,dy=-\frac{1}{1+y}$, 右辺は $\displaystyle\int\frac{1}{(1+x)^2}\,dx=-\frac{1}{1+x}-C$ となるため, $-\dfrac{1}{1+y}=-\dfrac{1}{1+x}-C$ が成り立つ. 従って $1+y=\dfrac{1+x}{1-C(1+x)}$ だから, $y=\dfrac{C+(C+1)x}{1-C(1+x)}$ が求める解である.

2. (1) $z=\dfrac{y}{x}$ とおけば $y=xz$ だから $\dfrac{dy}{dx}=z+x\dfrac{dz}{dx}$ である. これを与えられた方程式に代入すれば, $z+x\dfrac{dz}{dx}=1+z$ より $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{x}$ が得られる. この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int\frac{dz}{dx}dx=\int\frac{1}{x}\,dx$ となり, 左辺は z, 右辺は $\displaystyle\int\frac{1}{x}\,dx=\log|x|+C$ となるため, $z=\log|x|+C$ が成り立つ. 従って $\dfrac{y}{x}=\log|x|+C$ だから, $y=x(\log x+C)$ が

求める解である.

(2) $z=\dfrac{y}{x}$ とおけば $y=xz$ だから $\dfrac{dy}{dx}=z+x\dfrac{dz}{dx}$ である. これを与えられた方程式に代入すれば, $z+x\dfrac{dz}{dx}=1+z+z^2$ より $\dfrac{1}{1+z^2}\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{x}$ が得られる. この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int\frac{1}{1+z^2}\frac{dz}{dx}dx=\int\frac{1}{x}\,dx$ となり, 左辺は $\displaystyle\int\frac{1}{1+z^2}\,dz=\tan^{-1}z$, 右辺は $\displaystyle\int\frac{1}{x}\,dx=\log|x|+C$ となるため, $\tan^{-1}z=\log|x|+C$ が成り立つ. 従って $\dfrac{y}{x}=z=\tan^{-1}(\log|x|+C)$ だから, $y=x\tan^{-1}(\log|x|+C)$ が求める解である.

(3) $z=\dfrac{y}{x}$ とおけば $y=xz$ だから $\dfrac{dy}{dx}=z+x\dfrac{dz}{dx}$ である. これを与えられた方程式に代入すれば, $z+x\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{z}+z$ より $2z\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2}{x}$ が得られる. この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int 2z\frac{dz}{dx}dx=\int\frac{2}{x}\,dx$ となり, 左辺は $\displaystyle\int 2z\,dz=z^2$, 右辺は $\displaystyle\int\frac{2}{x}\,dx=2\log|x|+C$ となるため, $z^2=2\log|x|+C$ が成り立つ. 従って $\dfrac{y}{x}=z=\pm\sqrt{2\log|x|+C}$ だから, $y=x\sqrt{\log x+C}$, $y=-x\sqrt{\log x+C}$ が求める解である.

(4) $z=\dfrac{y}{x}$ とおけば $y=xz\cdots(i)$ だから $\dfrac{dy}{dx}=z+x\dfrac{dz}{dx}\cdots(ii)$ である. (i), (ii) を与えられた方程式に代入すれば $\dfrac{1+z^2}{z^2-z^3}\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{x}\cdots(ii)$ が得られる. $\dfrac{1+z^2}{z^2-z^3}=\dfrac{a}{z}+\dfrac{b}{z^2}+\dfrac{c}{z-1}$ とおけば, この右辺は $\dfrac{-(a+c)z^2+(a-b)z+b}{z^2-z^3}$ に等しいため, $a=b=1$, $c=-2$ だから $\displaystyle\int\frac{1+z^2}{z^2-z^3}dz=\int\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z-1}\right)dz=\log|z|-\frac{1}{z}-2\log|z-1|$. 故に (iii) の両辺を x で積分すれば, C を任意の定数として, $\log|z|-\dfrac{1}{z}-2\log|z-1|=\log|x|+C$ が得られる. この等式に $z=\dfrac{y}{x}$ を代入すれば, 与えられた微分方程式の解は, C を任意の定数として, $\log|y|-\dfrac{x}{y}-2\log|y-x|=C$ から定まる陰関数であることがわかる.

(5) $z=x+y$ とおけば $y=z-x$ だから $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx}-1$ である. これを与えられた方程式に代入すれば, $\dfrac{dz}{dx}-1=z^2$ より $\dfrac{1}{1+z^2}\dfrac{dz}{dx}=1$ が得られる. この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int\frac{1}{1+z^2}\frac{dz}{dx}dx=\int dx$ となり, 左辺は $\displaystyle\int\frac{1}{1+z^2}\,dz=\tan^{-1}z$, 右辺は $\displaystyle\int dx=x+C$ となるため, $\tan^{-1}z=x+C$ が成り立つ. 従って $x+y=z=\tan(x+C)$ だから, $y=\tan(x+C)-x$ が求める解である.

(6) $z=4x+y+1$ とおけば $y=z-4x-1$ だから $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx}-4$ である. これを与えられた方程式に代入すれば, $\dfrac{dz}{dx}-4=z^2$ より $\dfrac{1}{4+z^2}\dfrac{dz}{dx}=1$ が得られる. この両辺を x で積分すれば $\displaystyle\int\frac{2}{4+z^2}\frac{dz}{dx}dx=\int 2dx$ となり, 左辺は $\displaystyle\int\frac{2}{4+z^2}\,dz=\tan^{-1}\frac{z}{2}$, 右辺は $\displaystyle\int dx=x+C$ となるため, $\tan^{-1}\dfrac{z}{2}=x+C$ が成り立つ. 従って $4x+y+1=z=2\tan(x+C)$ だから, $y=2\tan(x+C)-4x-1$ が求める解である.

3. (1) $\displaystyle\int 2x\,dx=x^2$, $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ より, 求める解は $y=e^{x^2}\left(-\dfrac{1}{2}e^{2x}+C\right)=Ce^{x^2}-\dfrac{1}{2}$ である.

(2) $\displaystyle\int dx=x$, $\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)$ より, 求める解は $y=e^{x}\left(-\dfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C\right)=Ce^x-\dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x)$ である.

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{x+1}dx=\log|1+x|$, $\displaystyle\int e^{-\log|1+x|}(x+1)\,dx=\int\frac{1+x}{|1+x|}\,dx=|1+x|$ より, 求める解は
$y=e^{\log|1+x|}(|1+x|+C)=(1+x)^2+C|1+x|$ である.

(4) $\displaystyle\int\frac{-1}{x}dx=-\log|x|$, $\displaystyle\int e^{\log|x|}\sin x\,dx=\int|x|\sin x\,dx=\begin{cases}\sin x-x\cos x & x\geqq 0\\ -\sin x+x\cos x & x\leqq 0\end{cases}$ であり,

$e^{-\log|x|}=\begin{cases}\frac{1}{x} & x>0\\ -\frac{1}{x} & x<0\end{cases}$ であることに注意すれば, 求める解は $y=\dfrac{\sin x-x\cos x+C}{x}$ である.

(5) $\displaystyle\int 2dx=2x$, $\displaystyle\int xe^{-2x}\,dx=-\frac{x}{2}e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}$ より, 求める解は

$y = e^{2x}\left(-\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C\right) = Ce^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ である.

(6) $\int 2dx = 2x$, $\int x^2 e^{-2x}\,dx = -\frac{x^2}{2}e^{-2x} - \frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$ より, 求める解は
$y = e^{2x}\left(-\frac{x^2}{2}e^{-2x} - \frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C\right) = Ce^{2x} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ である.

(7) $\int (-1)dx = -x$, $\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x)$ より, 求める解は
$y = e^{-x}\left(\frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + C\right) = Ce^{-x} - \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$ である.

(8) $\int \left(-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx = -\log(1+x^2)$, $\int e^{\log(1+x^2)}\cos x\,dx = \int (1+x^2)\cos x\,dx = (x^2-1)\sin x + 2x\cos x$ より, 求める解は $y = e^{-\log(1+x^2)}\big((x^2-1)\sin x + 2x\cos x + C\big) = \frac{C}{1+x^2} + \frac{(x^2-1)\sin x + 2x\cos x}{1+x^2}$ である.

(9) $\int \left(-\frac{1}{x+1}\right)dx = -\log|1+x|$, $\int \frac{xe^{\log|x+1|}}{x+1}dx = \int \frac{x|x+1|}{x+1}dx = \frac{1}{2}(x-1)|x+1|$ より, 求める解は
$y = e^{-\log|1+x|}\left(\frac{1}{2}(x-1)|x+1| + C\right) = \frac{C}{|1+x|} + \frac{1}{2}(x-1)$ である.

(10) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$, $\int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = -e^{-\frac{x^2}{2}}$ より, 求める解は $y = e^{\frac{x^2}{2}}\left(-e^{-\frac{x^2}{2}} + C\right) = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$ である.

(11) $\int \frac{2x-1}{x^2}dx = 2\log|x| + \frac{1}{x}$, $\int e^{-2\log|x| - \frac{1}{x}}dx = \int \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx = e^{-\frac{1}{x}}$ より, 求める解は
$y = e^{2\log|x| + \frac{1}{x}}\left(e^{-\frac{1}{x}} + C\right) = Cx^2e^{\frac{1}{x}} + x^2$ である.

(12) $\int (-2x)\,dx = -x^2$, $\int e^{x^2}(2x^2+1)dx = xe^{x^2}$ より, 求める解は $y = e^{-x^2}\left(xe^{x^2} + C\right) = Ce^{-x^2} + x$ である.

(13) $\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1)$ であり, $x = \tan\theta$ と変数変換を行えば, $\int \frac{e^{-\frac{1}{2}\log(x^2+1)}}{x^2+1}dx = \int (x^2+1)^{-\frac{3}{2}}dx = \int (\tan^2\theta + 1))^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int \cos\theta\,d\theta = \sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ より, 求める解は
$y = e^{\frac{1}{2}\log(x^2+1)}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C\right) = C\sqrt{x^2+1} + x$ である.

(14) $\int \frac{1}{x}dx = \log|x|$, $\int \left(-e^{-\log|x|}\right)dx = -\int \frac{1}{|x|}dx = \begin{cases} -\log|x| & x > 0 \\ \log|x| & x < 0 \end{cases}$ より, $e^{\log|x|} = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ であることに注意すれば, 求める解は $y = -x\log|x| + C|x|$ である.

(15) $\int \frac{n}{x}dx = n\log|x|$, $\int e^{-n\log|x|}x^n e^x dx = \begin{cases} e^x & x > 0 \\ -e^x & x < 0 \end{cases}$ より, $e^{n\log|x|} = |x|^n = \begin{cases} x^n & x > 0 \\ (-x)^n & x < 0 \end{cases}$ であることに注意すれば, 求める解は $y = \begin{cases} Cx^n + x^n e^x & x > 0 \\ C(-x)^n - (-x)^n e^x & x < 0 \end{cases}$ である.

(16) $\int \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}dx = \log\alpha(x)$, $\int e^{-\log\alpha(x)}k\alpha(x)\,dx = \int k\,dx = kx$ より, 求める解は
$y = e^{\log\alpha(x)}(kx + C) = \alpha(x)(kx + C)$ である.

4. (1) $z = \frac{y}{x}$ とおけば $y = xz \cdots (i)$ だから $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} \cdots (ii)$ である. (i), (ii) を与えられた方程式に代入すれば $\frac{1+z^2}{z^2-z^3}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdots (ii)$ が得られる. $\frac{1+z^2}{z^2-z^3} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z-1}$ とおけば, この右辺は $\frac{-(a+c)z^2 + (a-b)z + b}{z^2-z^3}$ に等しいため, $a = b = 1$, $c = -2$ だから $\int \frac{1+z^2}{z^2-z^3}dz = \int \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z-1}\right)dz = \log|z| - \frac{1}{z} - 2\log|z-1|$. 故に (iii) の両辺を x で積分すれば, C を任意の定数として, $\log|z| - \frac{1}{z} - 2\log|z-1| = \log|x| + C$ が得られる. この等式に $z = \frac{y}{x}$ を代入すれば, 与えられた微分方程式の解は, C を任意の定数として, $\log|y| - \frac{x}{y} - 2\log|y-x| = C$ から定まる陰関数であることがわかる.

(2) $z=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とおけば z は $3z\dfrac{d^2z}{dx^2}=5\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2$ を満たす．この両辺を $z\dfrac{dz}{dx}$ で割った方程式 $\dfrac{3}{\frac{dz}{dx}}\dfrac{d^2z}{dx^2}=\dfrac{5}{z}\dfrac{dz}{dx}$ の両辺を積分すれば $3\log\left|\dfrac{dz}{dx}\right|=5\log|z|+c$ となり $\dfrac{dz}{dx}=Az^{\frac{5}{3}}$ という形になる．さらに $\dfrac{1}{z^{\frac{5}{3}}}\dfrac{dz}{dx}=A$ の両辺を積分すれば $-\dfrac{3}{2z^{\frac{2}{3}}}=Ax+B$ が得られ, 任意定数を置き換えれば $\dfrac{d^2y}{dx^2}=z=\pm(ax+b)^{-\frac{3}{2}}$ となる．$a=0$ の場合は y は x の 2 次関数であり, $a\neq 0$ の場合は $\dfrac{dy}{dx}=\pm\dfrac{2}{a\sqrt{ax+b}}+c$, $y=\pm\dfrac{4\sqrt{ax+b}}{a^2}+cx+d$ が得られる．以上から, 与えられた微分方程式の解は 2 次関数 ax^2+bx+c であるか, $\sqrt{ax+b}+cx+d$ または $-\sqrt{ax+b}+cx+d$ という形の関数である．

5. 与えられた微分方程式の解のマクローリン展開を $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ とおけば, 以下の等式が成り立つ．

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\ \cdots(i),\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n\ \cdots(ii)$$

(1) $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ と (ii) を与えられた方程式に代入して, $(1-x)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$ が成り立つように a_n を定めればよい．上式の左辺は $2a_2+a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}((n+1)(n+2)a_{n+2}-n(n+1)a_{n+1}+a_n)x^n$ に等しいため, $2a_2+a_0=0$, $(n+1)(n+2)a_{n+2}-n(n+1)a_{n+1}+a_n=0$ $(n\geqq 1)$ が得られる．従って $a_0=\alpha$, $a_1=\beta$ とおけば, $a_2=-\dfrac{\alpha}{2}$, $a_{n+2}=\dfrac{n(n+1)a_{n+1}-a_n}{(n+1)(n+2)}$ より, $a_3=-\dfrac{\alpha}{6}-\dfrac{\beta}{6}$, $a_4=-\dfrac{\alpha}{24}-\dfrac{\beta}{12}$, $a_5=-\dfrac{\alpha}{60}-\dfrac{\beta}{24}$, $a_6=-\dfrac{7\alpha}{720}-\dfrac{\beta}{40}$ が得られる．故に 与えられた方程式の解のマクローリン展開は以下で与えられる．

$$y=\alpha\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24}-\frac{x^5}{60}-\frac{7x^6}{720}-\cdots\right)+\beta\left(x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^5}{24}-\frac{x^6}{40}-\cdots\right)$$

(2) $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ と (ii) を与えられた方程式に代入して, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)=0$ が成り立つように a_n を定めればよい．上式の左辺は $2a_2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left((n+1)(n+2)a_{n+2}+\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\dfrac{(-1)^ia_{n-2i-1}}{(2i+1)!}\right)x^n$ に等しいため, $a_2=0$ であり $n\geqq 1$ ならば $a_{n+2}=\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\dfrac{(-1)^{i+1}a_{n-2i-1}}{(n+1)(n+2)(2i+1)!}$ が成り立つ．$a_0=\alpha$, $a_1=\beta$ とおけば, $a_3=-\dfrac{\alpha}{6}$, $a_4=-\dfrac{\beta}{12}$, $a_5=\dfrac{\alpha}{120}$, $a_6=\dfrac{\alpha}{180}+\dfrac{\beta}{180}$ だから, 与えられた方程式の解のマクローリン展開は以下で与えられる．

$$y=\alpha\left(1-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{180}+\cdots\right)+\beta\left(x-\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{180}+\cdots\right)$$

(3) $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ と (ii) を与えられた方程式に代入して, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n-a(x+b)\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$ が成り立つように a_n を定めればよい．上式の左辺は $2a_2-aba_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}((n+1)(n+2)a_{n+2}-aa_{n-1}-aba_n)x^n$ に等しいため, $2a_2-ba_0=0$, $a_{n+2}=\dfrac{aa_{n-1}+aba_n}{(n+1)(n+2)}$ $(n\geqq 1)$ が得られる．$a_0=\alpha$, $a_1=\beta$ とおけば, $a_2=\dfrac{\alpha ab}{2}$ であり, $a_3=\dfrac{\alpha a}{6}+\dfrac{\beta ab}{6}$, $a_4=\dfrac{\alpha a^2b^2}{24}+\dfrac{\beta a}{12}$, $a_5=\dfrac{\alpha a^2b}{30}+\dfrac{\beta a^2b^2}{120}$, $a_6=\dfrac{\alpha(4a^2+a^3b^3)}{720}+\dfrac{\beta a^2b}{120}$ だから, 与えられた方程式の解のマクローリン展開は以下でで与えられる．

$$y=\alpha\left(1+\frac{ab}{2}x^2+\frac{a}{6}x^3+\frac{a^2b^2}{24}x^4+\frac{a^2b}{30}x^5+\frac{4a^2+a^3b^3}{720}x^6+\cdots\right)+\beta\left(x+\frac{ab}{6}x^3+\frac{\beta a^2b^2}{120}x^4+\frac{a^2b^2}{120}x^5+\frac{a^2b}{120}x^6+\cdots\right)$$

6. 与えられた微分方程式の解のマクローリン展開を $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とおけば, 以下の等式が成り立つ.

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \ \cdots(i),\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n \ \cdots(ii)$$

(1) $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と (i) を与えられた方程式に代入して, $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}2a_n x^n=1$ が成り立つように a_n を定めればよい. 上式の左辺は $\sum_{n=0}^{\infty}((n+1)a_{n+1}-2a_n)x^n$ に等しいため, 両辺の x^n の係数を比較すれば, $a_1-2a_0=1$, $(n+1)a_{n+1}-2a_n=0$ $(n\geqq 1)$ が得られる. 従って $a_1=c$ とおけば, $a_0=\frac{c-1}{2}$, $a_{n+1}=\frac{2}{n+1}a_n$ $(n\geqq 1)$ だから $a_n=\frac{2}{n}a_{n-1}=\frac{2}{n}\frac{2}{n-1}a_{n-2}=\cdots=\frac{2^{n-1}}{n!}a_1=\frac{2^{n-1}c}{n!}$ が得られる. 以上から解のマクローリン展開は $\frac{c-1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}c}{n!}x^n$ で与えられる.

(2) 与えられた方程式の両辺を $x+1$ で割れば $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x+1}y+\frac{x}{x+1}$ だから, $\int\frac{2x}{x+1}\,dx=2x-2\log|x+1|$, $\int e^{-2x+2\log|x+1|}\frac{x}{x+1}\,dx=\int e^{-2x}(x^2+x)\,dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2+x)-\frac{1}{4}e^{-2x}(2x+1)-\frac{1}{4}e^{-2x}=-\frac{e^{-2x}}{2}(x+1)^2$ より, 求める解は $y=e^{2x-2\log|x+1|}\left(-\frac{e^{-2x}}{2}(x+1)^2+C\right)=\frac{Ce^{2x}}{(x+1)^2}-\frac{1}{2}$ である. ここで, $e^{2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$, $\frac{1}{(x+1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$ だから, 上で得た解のマクローリン展開は以下で与えられる.

$y=C\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2^i}{i!}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(j+1)x^j\right)-\frac{1}{2}=C-\frac{1}{2}+C\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{2^i}{i!}(-1)^{n-i}(n-i+1)\right)x^n$

(3) 与えられた方程式の両辺を $x+1$ で割れば $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+1}y+1$ だから, $\int\frac{1}{x+1}\,dx=\log|x+1|$, $\int e^{-\log|x+1|}\,dx=\int\frac{1}{|x+1|}\,dx=\log(x+1)$ $(x>-1)$ より, 求める解は $x>-1$ の範囲では $y=e^{\log|x+1|}(\log(x+1)+C)=C(x+1)+(x+1)\log(x+1)$ で与えられる. ここで, $\log(x+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ だから, 上で得た解のマクローリン展開は $y=C(x+1)+(x+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=C+(C+1)x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$ で与えられる.

(4) $\int dx=x$, $\int e^{-x}x(x+1)\,dx=-e^{-x}(x^2+x)-e^{-x}(2x+1)-2e^{-x}=-e^{-x}(x^2+3x+3)$ より, 求める解は $y=e^x(-e^{-x}(x^2+3x+3)+C)=Ce^x-x^2-3x-3$ である. ここで, $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ だから, 上で得た解のマクローリン展開は $y=C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-x^2-3x-3=C-3+(C-3)x+\left(\frac{C}{2}-1\right)x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ で与えられる.

(5) $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ と (i), (ii) を与えられた方程式に代入して,

$$\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

が成り立つように a_n を定めればよい. 上式の左辺は $-a_0+2a_2+6a_3x+\sum_{n=2}^{\infty}((n+1)(n+2)a_{n+2}-\frac{1}{2}(n-2)(n-1)a_n)x^n$ に等しいため, $-a_0+2a_2=6a_3=0$, $(n+1)(n+2)a_{n+2}-\frac{1}{2}(n-2)(n-1)a_n=0$ $(n\geqq 2)$ が得られる. $a_3=0$ であり, $n\geqq 2$ ならば $a_{n+2}=\frac{(n-2)(n-1)}{2(n+1)(n+2)}a_n$ だから, $a_4=0$ が得られ, 帰納的に $n\geqq 3$ ならば $a_n=0$ であることが示される. 従って与えられた方程式の解のマクローリン展開は, $a_0=\alpha$, $a_1=\beta$ とおけば, $y=\alpha\left(1+\frac{x^2}{2}\right)+\beta x$ で与えられる.

(6) $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ と (i), (ii) を与えられた方程式に代入して,

$$(1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n-x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+(a+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

が成り立つように a_n を定めればよい. 上式の左辺は

$$4a_0+2a_2+(3a_1+6a_3)x+\sum_{n=2}^{\infty}((n+1)(n+2)a_{n+2}+((n-1)^2+a)a_n)x^n$$

に等しいため, $4a_0+2a_2=3a_1+6a_3=0$, $(n+1)(n+2)a_{n+2}+((n-1)^2+a)a_n=0$ $(n\geqq 2)$ が得られる. $a_0=\alpha$, $a_1=\beta$ とおけば, $a_2=-2\alpha$, $a_3=-\dfrac{\beta}{2}$ であり, $a_{n+2}=-\dfrac{(n-1)^2+a}{(n+1)(n+2)}a_n$ だから,

$$\begin{aligned}
a_{2n}&=-\frac{(2n-3)^2+a}{(2n)(2n-1)}a_{2(n-1)}=(-1)^2\frac{((2n-3)^2+a)((2n-5)^2+a)}{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)}a_{2(n-2)}=\cdots\\
&=(-1)^{n-1}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}((2n-2i-1)^2+a)}{(2n)(2n-1)\cdots4\cdot3}a_2=\frac{4\alpha(-1)^n}{(2n)!}\prod_{i=1}^{n-1}((2i-1)^2+a)\\
a_{2n+1}&=-\frac{(2n-2)^2+a}{(2n+1)(2n)}a_{2(n-1)+1}=(-1)^2\frac{((2n-2)^2+a)((2n-4)^2+a)}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)}a_{2(n-2)+1}=\cdots\\
&=(-1)^{n-1}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}((2n-2i)^2+a)}{(2n+1)(2n)\cdots5\cdot4}a_3=\frac{3\beta(-1)^n}{(2n+1)!}\prod_{i=1}^{n-1}((2i)^2+a)
\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って与えられた方程式の解のマクローリン展開は以下で与えられる.

$$y=\alpha\left(1-2x^2+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^n}{(2n)!}\prod_{i=1}^{n-1}((2i-1)^2+a)\right)x^{2n}\right)+\beta\left(x-\frac{1}{2}x^3+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3(-1)^n}{(2n+1)!}\prod_{i=1}^{n-1}((2i)^2+a)\right)x^{2n+1}\right)$$

(7) $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ と (ii) を与えられた方程式に代入して, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+x^k\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$ が成り立つように a_n を定めればよい. 上式の左辺は $\sum\limits_{n=0}^{k-1}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+\sum\limits_{n=k}^{\infty}((n+1)(n+2)a_{n+2}+a_{n-k})x^n$ に等しいため, $i=2,3,\ldots,k+1$ に対して $a_i=0$ であり, $n\geqq k$ ならば $(n+1)(n+2)a_{n+2}+a_{n-k}=0$ である. $a_0=\alpha$, $a_1=\beta$ とおけば, $a_{n+k+2}=-\dfrac{1}{(n+k+2)(n+k+1)}a_n$ だから,

$$\begin{aligned}
a_{(k+2)n}&=\frac{-a_{(k+2)(n-1)}}{((k+2)n)((k+2)n-1)}=\frac{(-1)^2a_{(k+2)(n-2)}}{((k+2)n)((k+2)n-1)((k+2)(n-1))((k+2)(n-1)-1)}=\cdots\\
&=\frac{(-1)^na_0}{((k+2)n)((k+2)n-1)\cdots(k+2)(k+1)}=\frac{\alpha(-1)^n}{(k+2)^nn!\prod\limits_{i=1}^{n}((k+2)i-1)}\\
a_{(k+2)n+1}&=\frac{-a_{(k+2)(n-1)+1}}{((k+2)n+1)((k+2)n)}=\frac{(-1)^2a_{(k+2)(n-2)+1}}{((k+2)n+1)((k+2)n)((k+2)(n-1)+1)((k+2)(n-1))}=\cdots\\
&=\frac{(-1)^na_1}{((k+2)n+1)((k+2)n)\cdots(k+3)(k+2)}=\frac{\beta(-1)^n}{(k+2)^nn!\prod\limits_{i=1}^{n}((k+2)i+1)}
\end{aligned}$$

$$a_{(k+2)n+l}=0\quad(l=2,3,\ldots,k+1)$$

が成り立つ. 従って与えられた方程式の解のマクローリン展開は以下で与えられる.

$$y=\alpha\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(k+2)^nn!\prod\limits_{i=1}^{n}((k+2)i-1)}\right)x^{(k+2)n}\right)+\beta\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(k+2)^nn!\prod\limits_{i=1}^{n}((k+2)i+1)}\right)x^{(k+2)n+1}\right)$$

(8) $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, (i), (ii) を与えられた方程式に代入し，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n-x\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}aa_nx^n=0$ が成り立つように a_n を定めればよい．上式の左辺は $na_0+2a_2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}((n+1)(n+2)a_{n+2}-(n-a)a_n)x^n$ に等しいため, $aa_0+2a_2=0$, $(n+1)(n+2)a_{n+2}-(n-a)a_n=0$ $(n\geqq 1)$ が得られる．$a_0=\alpha$, $a_1=\beta$ とおけば, $a_2=-\dfrac{a\alpha}{2}$ であり, $a_{n+2}=\dfrac{n-a}{(n+1)(n+2)}a_n$ だから,

$$a_{2n}=\frac{(2n-a-2)a_{2(n-1)}}{(2n)(2n-1)}=\frac{(2n-a-2)(2n-a-4)a_{2(n-2)}}{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)}=\cdots=\frac{a_2\prod\limits_{i=1}^{n-1}(2n-a-2i)}{(2n)(2n-1)\cdots4\cdot3}=\frac{\alpha}{(2n)!}\prod_{i=0}^{n-1}(2i-a)$$

$$a_{2n+1}=\frac{(2n-a-1)a_{2(n-1)+1}}{(2n+1)(2n)}=\frac{(2n-a-1)(2n-a-3)a_{2(n-2)+1}}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)}=\cdots=\frac{a_1\prod\limits_{i=1}^{n}(2n-a-2i+1)}{(2n+1)(2n)\cdots3\cdot2}$$
$$=\frac{\beta}{(2n+1)!}\prod_{i=0}^{n-1}(2i-a+1)$$

が成り立つ．従って与えられた方程式の解のマクローリン展開は以下で与えられる．

$$y=\alpha\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n)!}\prod_{i=0}^{n-1}(2i-a)\right)x^{2n}\right)+\beta\left(x+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)!}\prod_{i=0}^{n-1}(2i-a+1)\right)x^{2n+1}\right)$$

(9) $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ と (i), (ii) を与えられた方程式に代入し,

$$(x^2-1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+2x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}2aa_nx^n=0$$

が成り立つように a_n を定めればよい．上式の左辺は

$$2aa_0-2a_2+((2a+2)a_1-6a_3)x+\sum_{n=2}^{\infty}(n(n-1)a_n-(n+1)(n+2)a_{n+2}+2na_n+2aa_n)x^n$$

に等しいため, $2aa_0-2a_2=(2a+2)a_1-6a_3=0$, $(n+1)(n+2)a_{n+2}-(n(n+1)+2a)a_n=0$ $(n\geqq 2)$ が得られる．$a_0=\alpha$, $a_1=\beta$ とおけば, $a_2=a\alpha$, $a_3=\dfrac{\beta(a+1)}{3}$ であり, $a_{n+2}=\dfrac{n(n+1)+2a}{(n+1)(n+2)}a_n$ だから,

$$a_{2n}=\frac{((2n-2)(2n-1)+2a)a_{2(n-1)}}{(2n)(2n-1)}=\frac{((2n-2)(2n-1)+2a)((2n-4)(2n-3)+2a)a_{2(n-2)}}{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)}=\cdots$$
$$=\frac{a_2\prod\limits_{i=1}^{n-1}((2n-2i)(2n-2i+1)+2a)}{(2n)(2n-1)\cdots4\cdot3}=\frac{\alpha}{(2n)!}\prod_{i=0}^{n-1}((2i)(2i+1)+2a)$$
$$a_{2n+1}=\frac{((2n)(2n-1)+2a)a_{2(n-1)+1}}{(2n+1)(2n)}=\frac{((2n)(2n-1)+2a)((2n-2)(2n-3)+2a)a_{2(n-2)+1}}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)}=\cdots$$
$$=\frac{a_3\prod\limits_{i=0}^{n-2}((2n-2i)(2n-2i-1)+2a)}{(2n+1)(2n)\cdots5\cdot4}=\frac{\beta}{(2n+1)!}\prod_{i=1}^{n}((2i)(2i-1)+2a)$$

が成り立つ．従って与えられた方程式の解のマクローリン展開は以下で与えられる．

$$y=\alpha\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n)!}\prod_{i=0}^{n-1}((2i)(2i+1)+2a)\right)x^{2n}\right)+\beta\left(x+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)!}\prod_{i=1}^{n}((2i)(2i-1)+2a)\right)x^{2n+1}\right)$$

微積分学 I 期末試験過去問題

1. (1) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)$ を求めよ.　　(2) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{2\sin^{-1}(1-x)-\pi}{\sqrt{x}}$ を求めよ.

(3) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=x-1+\sin^{-1}\left(\dfrac{2}{\pi}\tan^{-1}x\right)$ で定義される関数とする. $f(1)$ の値を求め，この値における f の逆関数 f^{-1} の微分係数を求めよ.

(4) 関数 $\log(1+4x^2)$ のマクローリン展開と, その収束半径を求めよ.

2. (1) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\tan\left(\frac{k\pi}{4n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\tan\frac{\pi}{4n}+\tan\frac{2\pi}{4n}+\cdots+\tan\frac{k\pi}{4n}+\cdots+\tan\frac{n\pi}{4n}\right)$ を求めよ.

(2) $\dfrac{x^2-2x-1}{x^2(x^2+1)}$ の原始関数を求めよ.

3. 次の広義積分を求めよ.　(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{\sqrt{x}}dx$　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\log 3}e^{2x}\log(e^x+1)dx$

4. $a>-1$ かつ $a\neq 0$ とするとき, 以下の問いに答えよ. なお, 必要ならば $\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$ を用いてよい.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty\left(\log(x+a)-\log x-\frac{a}{x+a}\right)dx$ の値を求めよ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log\left(1+\frac{a}{n}\right)-\frac{a}{n+a}\right)$ の収束・発散を判定せよ.

微積分学 I 期末試験過去問題解答

1. (1) 第 1 回の演習問題 1 の (12) と同じ問題

(2) 第 4 回の演習問題 1 の (7) と同じ問題

(3) $f(1) = \sin^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}1\right) = \sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ であり, $f'(x) = 1 + \dfrac{2}{\pi(1+x^2)\sqrt{1-\left(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}x\right)^2}}$ より $f'(1) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}\pi} = \frac{\sqrt{3}\pi+2}{\sqrt{3}\pi}$ である. 従って, $(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{6}\right) = (f^{-1})'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt{3}\pi+2}$.

(4) $\log(1+t)$ のマクローリン展開は $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n$ であり, 収束半径は 1 だから, $t = 4x^2$ を代入すれば $\log(1+4x^2)$ のマクローリン展開 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^n}{n}x^{2n}$ が得られる. この整級数は $|4x^2| < 1$ で収束し, $|4x^2| > 1$ で発散するため, 収束半径は $\frac{1}{2}$ である.

2. (1) 第 9 回の演習問題 2 の (6) と同じ問題

(2) $\frac{x^2-2x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ とおくと (右辺) $= \frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+Ax+B}{x^2(x^2+1)}$ だから $A = -2$, $B = -1$, $C = 2$, $D = 2$ である. 従って

$$\int\frac{x^2-2x-1}{x^2(x^2+1)}dx = \int\left(-\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2x+2}{x^2+1}\right)dx = -2\log|x| + \frac{1}{x} + \log(x^2+1) + 2\tan^{-1}x$$

3. (1) 第 14 回の演習問題 1 の (37) の $k = \frac{1}{2}$ の場合

(2) $t = e^x$ とおくと $e^x dx = dt$ であり, x が $-\infty$ から $\log 3$ まで動くとき, t は 0 から 3 まで動くため,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\log 3} e^{2x}\log(e^x+1)dx &= \int_0^3 t\log(t+1)dt = \left[\frac{t^2-1}{2}\log(t+1)\right]_0^3 - \int_0^3\frac{t-1}{2}dt = 8\log 2 - \left[\frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}\right]_0^3 \\ &= 8\log 2 - \frac{3}{4}\end{aligned}$$

4. (1) $\int_1^t\left(\log(x+a) - \log x - \frac{a}{x+a}\right)dx = [(x+a)\log(x+a) - x\log x - a\log(x+a)]_1^t = \left[x\log\left(1+\frac{a}{x}\right)\right]_1^t$ $= t\log\left(1+\frac{a}{t}\right) - \log(1+a)$ だから $\int_1^{\infty}\left(\log(x+a) - \log x - \frac{a}{x+a}\right)dx = \lim_{t\to\infty}\left(t\log\left(1+\frac{a}{t}\right) - \log(1+a)\right) =$ $\lim_{t\to\infty} a\log\left(1+\frac{a}{t}\right)^{\frac{t}{a}} - \log(1+a) = a\log\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{a}{t}\right)^{\frac{t}{a}}\right) - \log(1+a) = a\log e - \log(1+a) = a - \log(1+a)$.

(2) $f : [1,\infty) \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \log\left(1+\frac{a}{x}\right) - \frac{a}{x+a}$ で定めれば, $x > 1$ のとき $f'(x) = \frac{-a^2}{x(x+a)^2} < 0$ となるため f は単調減少関数である. また, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\log\left(1+\frac{a}{x}\right) - \frac{a}{x+a}\right) = 0$ だから $x\to\infty$ のとき f は単調に減少して 0 に収束するため, $x \geqq 1$ ならば $f(x) > 0$ である. (1) の結果から

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty}\left(\log(x+a) - \log x - \frac{a}{x+a}\right)dx$$

は収束するため, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\log\left(1+\frac{a}{n}\right) - \frac{a}{n+a}\right)$ は収束する.

[注意] 与えられた級数が収束することは, (1) の結果を用いなくても, 以下のように示すことができる. 上の解答の前半から, 与えられた級数は正項級数であり, $x > -1$ ならば $\log(1+x) \leqq x$ だから, $n = 1, 2, \ldots$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$\log\left(1+\frac{a}{n}\right) - \frac{a}{n+a} \leqq \frac{a}{n} - \frac{a}{n+a} = \frac{a^2}{n(n+a)}$$

一方, $\frac{a^2}{n^2}$ と $\frac{a^2}{n(n+a)}$ は $n\to\infty$ のとき, 同位の無限小であり, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^2}{n^2}$ は収束するため, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^2}{n(n+a)}$ も収束する. 従って, 上の不等式と教科書の定理 1.7 により, 与えられた級数も収束する.