1　数ベクトル空間と行列

定義 1.1 (1) n 個の実数を縦に並べた $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を n 次元実ベクトルという．このとき x_i を $\boldsymbol{x}$ の第 i 成分と呼ぶ．

(2) $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を n 次元実ベクトルとするとき, これらのベクトルが「等しい」とは, すべての $1 \leqq i \leqq n$ に対して $\boldsymbol{x}$ の第 i 成分 $\boldsymbol{y}$ の第 i 成分が等しくなることで, これを $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ で表す．n 次元実ベクトル全体の集合を $\boldsymbol{R}^n$ で表す．

(3) $\boldsymbol{R}^n$ における加法 $+$ と, スカラー倍 $\cdot$ を次で定義する．

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n,\ r \in \boldsymbol{R} \text{ に対し } \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_j + y_j \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \ r\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} rx_1 \\ \vdots \\ rx_j \\ \vdots \\ rx_n \end{pmatrix}$$

(4) すべての成分が 0 であるベクトルを $\boldsymbol{0}$ で表し, 零ベクトルという．

命題 1.2 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n$, $r, s \in \boldsymbol{R}$ とするとき, 次が成り立つ．

(1) 結合法則 ： $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$, $(rs)\boldsymbol{x} = r(s\boldsymbol{x})$.

(2) 単位元の存在 ： $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ である．

(3) 逆元の存在 ： $-\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x}$ とおけば $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

(4) 交換法則 ： $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$.

(5) 分配法則 ： $r(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = r\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{y}$, $(r + s)\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{x}$.

定義 1.3 上のように加法とスカラー倍の定義された集合 $\boldsymbol{R}^n$ を n 次元数ベクトル空間という．

定義 1.4 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ で定義する．

次の結果は内積の定義から容易に確かめられる．

命題 1.5 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n$, $r \in \boldsymbol{R}$ とするとき, 次のことが成り立つ．

(1) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$.

(2) $(r\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, r\boldsymbol{y})$.

(3) $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

(4) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$ であり, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$ である．

定義 1.6 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ とおいて, $\|\boldsymbol{x}\|$ を $\boldsymbol{x}$ の長さという．

命題 1.7 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の第 i 成分を x_i とするとき, $|x_i| \leqq \|\boldsymbol{x}\| \leqq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ が成り立つ．

定理 1.8 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ のとき, 以下の不等式が成り立つ．

(1) $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|$　(シュワルツの不等式)．　(2) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$　(三角不等式)．

証明 (1) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ならば 両辺はともに 0 になって不等式は成り立つため, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ と仮定する. $\|\boldsymbol{x}\| \neq 0$ に注意して命題 1.5 の (1), (2), (3) を用いれば, 任意の実数 t に対して $(t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x}) + (t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = (t\boldsymbol{x}, t\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x}) + (t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 t^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})t + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 \left(t + \dfrac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\right)^2 + \dfrac{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$ だから $t = \dfrac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$ のとき, $(t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ は最小値 $\dfrac{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$ をとる. 一方, 命題 1.5 の (4) から $(t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \geqq 0$ が成り立つため, この最小値は 0 以上であるから $\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 \geqq 0$ が得られる.

(2) 上の結果から $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqq \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|$ であり, 上の計算で $t = 1$ とすれば, $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 \leqq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2$ だから結果が得られる. □

定義 1.9 $\boldsymbol{R}$ の mn 個の要素 a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ を下のように長方形に並べたものを $m \times n$ 行列という.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

横の並びを上から順に第 1 行 ∼ 第 m 行, 縦の並びを左から順に第 1 列 ∼ 第 n 列と呼ぶ. また, a_{ij} を A の (i, j) 成分といい, A を (a_{ij}) で表すことがある.
2 つの $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ が「等しい」とは, $a_{ij} = b_{ij}$ がすべての $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ について成り立つことをいう.
とくに, $m = n$ の場合 $m \times m$ 行列を m 次正方行列という.

定義 1.10 上から j 番目の成分が 1 で, 他の成分はすべて 0 であるような $\boldsymbol{R}^n$ の要素を $\boldsymbol{e}_j$ で表し, n 個のベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を $\boldsymbol{R}^n$ の基本ベクトルという.

定義 1.11 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ を $m \times n$ 行列, $C = (c_{ij})$ を $l \times m$ 行列, $r \in \boldsymbol{R}$ とする. 行列の和 $A + B$, スカラー倍 rA を $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, $rA = (ra_{ij})$ で定義し, 積 CA を $CA = (p_{ij})$ (但し $p_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{m} c_{ik}a_{kj}$) によって定義する. さらに $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, $\boldsymbol{x}$ を $n \times 1$ 行列とみなして $A\boldsymbol{x}$ が定義される.

命題 1.12 行列の和, スカラー倍, 積, ベクトルとの積に関し, 以下の等式が成り立つ.

(1) $m \times n$ 行列 A, B, C に対し, $(A + B) + C = A + (B + C)$, $A + O = O + A = A$ (ただし O は, すべての成分が 0 である $m \times n$ 行列), $A + (-A) = (-A) + A = O$ (ただし $-A = (-1)A$), $A + B = B + A$.

(2) $m \times n$ 行列 A, B, $r, s \in \boldsymbol{R}$ に対し, $(rs)A = r(sA)$, $1A = A$, $r(A + B) = rA + rB$, $(r + s)A = rA + sA$.

(3) $m \times n$ 行列 A, B, $l \times m$ 行列 C, $n \times k$ 行列 D, $r \in \boldsymbol{R}$ に対し, $(rC)A = r(CA) = C(rA)$, $(CA)D = C(AD)$, $C(A + B) = CA + CB$, $(A + B)D = AD + BD$.

(4) $m \times n$ 行列 A, B, $l \times m$ 行列 C, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$, $r \in \boldsymbol{R}$ に対し, $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y}$, $A(r\boldsymbol{x}) = r(A\boldsymbol{x}) = (rA)\boldsymbol{x}$, $(A + B)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x}$.

補題 1.13 $A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 行列として $M = \sqrt{\sum\limits_{1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n} a_{ij}^2}$ とおくと, $\|A\boldsymbol{x}\| \leqq M\|\boldsymbol{x}\|$ が任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して成り立つ.

証明 $\boldsymbol{x}$ の第 i 成分を x_i とし, A の第 i 行の成分を縦に並べて得られるベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ とすると, シュワルツの不等式から $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2 = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x})^2 \leqq \|\boldsymbol{a}_i\|^2\|\boldsymbol{x}\|^2 = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\|\boldsymbol{x}\|^2$. 従って

$$\|A\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2 \leqq \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\|\boldsymbol{x}\|^2 = M^2\|\boldsymbol{x}\|^2.$$

□

2　写像の微分

定義 2.1 $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$, $r > 0$ に対して $B(\boldsymbol{p}\,;r) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \,|\, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < r\}$ とおき, これを半径 r 中心 $\boldsymbol{p}$ の開球という.

以後, $X \subset \boldsymbol{R}^n$, $Y \subset \boldsymbol{R}^m$ とし, 写像 $f : X \to Y$ を考える.

定義 2.2 $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^m$ とする. どんな $\varepsilon > 0$ に対しても, $\delta > 0$ で条件

「$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;\delta) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \in B(\boldsymbol{q}\,;\varepsilon)$」

を満たすものがあるとき, $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{p}$ に近づけたときの f の極限は $\boldsymbol{q}$ であるといい, これを $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ で表す.

注意 2.3 $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ であることは, 言い換えると, どんな $\varepsilon > 0$ に対しても, $\delta > 0$ で 「$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < \delta$, $\boldsymbol{x} \in X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $\|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| < \varepsilon$」を満たすものがあることである. 従って, このことは $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| = 0$ と同値である.

命題 2.4 $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}^m$, $a, b, c \in \boldsymbol{R}$ とし, 写像 $f, g : X \to Y$ は $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{r}$ を満たし, 関数 $s : X \to \boldsymbol{R}$ は $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} s(\boldsymbol{x}) = c$ を満たすとする. このとき, 次の等式が成り立つ.

(1) $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} (af(\boldsymbol{x}) + bg(\boldsymbol{x})) = a\boldsymbol{q} + b\boldsymbol{r}$　　(2) $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} s(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}) = c\boldsymbol{q}$

証明 (1) 任意の $\boldsymbol{x} \in X$ に対し, 三角不等式から

$$\begin{aligned}\|(af(\boldsymbol{x}) + bg(\boldsymbol{x})) - (a\boldsymbol{q} + b\boldsymbol{r})\| &= \|a(f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}) + b(g(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{r})\| \\ &\leqq \|a(f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q})\| + \|b(g(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{r})\| = |a|\|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| + |b|\|g(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{r}\|\end{aligned}$$

であり, 仮定と注意 2.3 から $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}$ のとき, $\|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\|$ と $\|g(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{r}\|$ はともに 0 に近づくため, 上の不等式から, $\|(af(\boldsymbol{x}) + bg(\boldsymbol{x})) - (a\boldsymbol{q} + b\boldsymbol{r})\|$ も 0 に近づく. 故に, 注意 2.3 により $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} (af(\boldsymbol{x}) + bg(\boldsymbol{x})) = a\boldsymbol{q} + b\boldsymbol{r}$ である.

(2) 任意の $\boldsymbol{x} \in X$ に対し, 三角不等式から

$$\begin{aligned}\|s(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}) - c\boldsymbol{q}\| &= \|s(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}) - cf(\boldsymbol{x}) + cf(\boldsymbol{x}) - c\boldsymbol{q}\| = \|(s(\boldsymbol{x}) - c)f(\boldsymbol{x}) + c(f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q})\| \\ &\leqq |s(\boldsymbol{x}) - c|\|f(\boldsymbol{x})\| + |c|\|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| = |s(\boldsymbol{x}) - c|\|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}\| + |c|\|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| \\ &\leqq |s(\boldsymbol{x}) - c|\,(\|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| + \|\boldsymbol{q}\|) + |c|\|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\|\end{aligned}$$

であり, 仮定と注意 2.3 から $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}$ のとき, $\|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\|$ と $|s(\boldsymbol{x}) - c|$ はともに 0 に近づくため, 上の不等式から, $\|s(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}) - c\boldsymbol{q}\|$ も 0 に近づく. 故に, 注意 2.3 により $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} s(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}) = c\boldsymbol{q}$ である. □

$\boldsymbol{x} \in X$ に対し, $f(\boldsymbol{x}) \in Y$ の第 i 成分を $f_i(\boldsymbol{x})$ で表すことにする. $\boldsymbol{x}$ を $f_i(\boldsymbol{x})$ に対応させることにより, 関数 $f_i : X \to \boldsymbol{R}$ が定まる.

命題 2.5 $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^m$ の第 i 成分を q_i とすれば, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ が成り立つためには, すべての $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f_i(\boldsymbol{x}) = q_i$ が成り立つことが必要十分である.

証明 すべての $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f_i(\boldsymbol{x}) = q_i$ が成り立つならば, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} |f_i(\boldsymbol{x}) - q_i| = 0$ が すべての $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して成り立つため, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \sum_{i=1}^{m} |f_i(\boldsymbol{x}) - q_i| = 0$ である. ここで, 命題 1.7 から $0 \leqq \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| \leqq \displaystyle\sum_{i=1}^{m} |f_i(\boldsymbol{x}) - q_i|$ だから, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| = 0$ が成り立つため, 注意 2.3 により, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ である.

命題 1.7 から, 任意の $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して $|f_i(\boldsymbol{x}) - q_i| < \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\|$ だから, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ ならば, 注意 2.3 により, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| = 0$ が成り立つため, すべての $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f_i(\boldsymbol{x}) = q_i$ である. □

定義 2.6 $\boldsymbol{p} \in X$ に対し, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p})$ が成り立つとき, f は $\boldsymbol{p}$ で連続であるという. すべての $\boldsymbol{p} \in X$ に対し, f が $\boldsymbol{p}$ で連続であるとき f を連続写像という.

注意 2.7 命題 2.4 から, 連続写像の和および連続関数と連続写像の積は連続写像である. また命題 2.5 から, 写像が連続であるためには, 各成分の関数が連続であることが必要十分である.

命題 2.8 $\boldsymbol{p} \in X$ に対し, 正の実数 r, L で条件「$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;r) \cap X$ ならば $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\| \leqq L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|$」を満たすものがあれば, f は $\boldsymbol{p}$ で連続である.

証明 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, δ を r と $\dfrac{\varepsilon}{L}$ の小さい方とすれば, $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;\delta) \cap X$ ならば $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\| \leqq L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < L\delta \leqq \varepsilon$ だから f は $\boldsymbol{p}$ で連続である. □

命題 2.9 $X \subset \boldsymbol{R}^n$, $Y \subset \boldsymbol{R}^m$, $Z \subset \boldsymbol{R}^k$, $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{q} \in Y$ とし, 写像 $f : X \to Y$ は $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ を満たし, 写像 $g : Y \to Z$ は $\boldsymbol{q}$ で連続であるとする. このとき $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}} g(f(\boldsymbol{x})) = g(\boldsymbol{q})$ が成り立つ.

証明 g の $\boldsymbol{q}$ における連続性から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta_1 > 0$ で「$\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{q}\,;\delta_1) \cap Y$ ならば $g(\boldsymbol{y}) \in B(g(\boldsymbol{q})\,;\varepsilon)$」を満たすものがある. また, f についての仮定から, $\delta > 0$ で,「$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;\delta) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \in B(\boldsymbol{q}\,;\delta_1)$」を満たすものがある. 従って $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;\delta) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $g(f(\boldsymbol{x})) \in B(g(\boldsymbol{q})\,;\varepsilon)$ となるため, $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}} g(f(\boldsymbol{x})) = g(\boldsymbol{q})$ が成り立つ. □

定義 2.10 $X \subset \boldsymbol{R}^n$ の点 $\boldsymbol{p}$ に対し, $B(\boldsymbol{p}\,;r) \subset X$ を満たす正の実数 r が存在するとき, $\boldsymbol{p}$ を X の内点という.

定義 2.11 $\boldsymbol{p}$ を X の内点とする. $m \times n$ 行列 A で, 次の等式 $(*)$ を満たすものがあるとき f は $\boldsymbol{p}$ で微分可能であるという.

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|} = \boldsymbol{0} \quad \cdots \ (*)$$

以後,「f は $\boldsymbol{p}$ で微分可能である.」というときは $\boldsymbol{p}$ は f の定義域 X の内点であることは仮定する.

写像 f, $m \times n$ 行列 A, $\boldsymbol{p} \in X$ に対して, 写像 $\varepsilon = \varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}} : X \to \boldsymbol{R}^m$ を

$$\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|} & \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} \end{cases}$$

で定義すれば, この定義と定義 2.11 から次のことがわかる.

命題 2.12 任意の $\boldsymbol{x} \in X$ に対して, 等式

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p}) + A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}) + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})$$

が成り立ち, f が $\boldsymbol{p}$ で微分可能であるためには, $\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}$ が $\boldsymbol{p}$ において連続, すなわち $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}} \varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ となるような, $m \times n$ 行列 A が存在することが必要十分である.

命題 2.13 f が $\boldsymbol{p}$ で微分可能ならば $r, L > 0$ で $B(\boldsymbol{p}\,;r) \subset X$ かつ「$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;r)$ ならば $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\| \leqq L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|$」を満たすものがある. 従って命題 2.8 から f は $\boldsymbol{p}$ で連続である.

証明 $m \times n$ 行列 A は定義 2.11 の $(*)$ を満たすとする. 命題 2.12, 三角不等式および補題 1.13 から $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\| = \|A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}) + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\| \leqq \|A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})\| + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|\|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\| \leqq (M + \|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\|)\,\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| \ \cdots \ (*)$ である. 仮定と命題 2.12 から $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}} \|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\| = 0$ であるため, $r > 0$ で $B(\boldsymbol{p}\,;r) \subset X$ かつ「$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;r)$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $\|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\| < 1$」を満たすものがとれる. 従って $(*)$ から $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,;r)$ ならば $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p})\| < (M+1)\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|$ である. □

定義 2.14 $\boldsymbol{p} \in X$, $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$ とし, 十分小さな $r > 0$ に対して $|t| < r$ ならば $\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v} \in X$ であるとする. 極限

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{p})}{t}$$

が存在するとき, f は $\boldsymbol{p}$ において $\boldsymbol{v}$ 方向に微分可能であるといい, この極限のベクトルを f の $\boldsymbol{p}$ における $\boldsymbol{v}$ 方向の微分という．とくに $Y=\boldsymbol{R}$ $(m=1)$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_j$ の場合, 上の極限値を $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ で表し, f の $\boldsymbol{p}$ における j 番目の変数に関する偏微分といい, このとき, f は j 番目の変数に関して $\boldsymbol{p}$ において偏微分可能であるという．さらに f が X の各点で j 番目の変数に関して偏微分可能なとき, $\boldsymbol{p}\in X$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ に対応させる関数を j 番目の変数に関する偏導関数と呼んで $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}:X\to\boldsymbol{R}$ で表す.

命題 2.15 $f:X\to Y$ が $\boldsymbol{p}$ で微分可能なとき, 任意の $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して f は $\boldsymbol{p}$ において $\boldsymbol{v}$ 方向に微分可能である．このとき定義 2.11 の等式 $(*)$ における $m\times n$ 行列 A は

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{p})}{t}=A\boldsymbol{v}$$

を満たす．とくに A の第 j 列は $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{e}_j)-f(\boldsymbol{p})}{t}$ で与えられるため定義 2.11 の等式 $(*)$ を満たす行列 A は存在すればただ 1 つだけである.

証明 命題 2.12 の等式に $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}$ を代入すれば,

$$f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})=f(\boldsymbol{p})+tA\boldsymbol{v}+|t|\|\boldsymbol{v}\|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})$$

となるため,

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{p})}{t}=A\boldsymbol{v}+\lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t}\|\boldsymbol{v}\|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})\cdots\ (**)$$

である. $\left\|\dfrac{|t|}{t}\|\boldsymbol{v}\|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})\right\|=\|\boldsymbol{v}\|\,\|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})\|$ であり, 仮定と命題 2.12 から $\displaystyle\lim_{t\to 0}\|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})\|=0$ だから $(**)$ から $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{p})}{t}=A\boldsymbol{v}$ が得られる. □

定義 2.16 上の命題から定義 2.11 の等式 $(*)$ を満たす行列 A は f と $\boldsymbol{p}$ を与えればただ *1* つに定まるため, これを $f'(\boldsymbol{p})$ で表して, f の $\boldsymbol{p}$ における微分という.

命題 2.17 写像 $f:X\to Y$ と $\boldsymbol{x}\in X$ に対し, $f(\boldsymbol{x})\in Y$ の第 i 成分を $f_i(\boldsymbol{x})$ で表し, X で定義された実数値関数 $f_i:X\to\boldsymbol{R}$ を考える.

(1) f が $\boldsymbol{p}$ で微分可能ならば, 各 f_i は $\boldsymbol{p}$ で微分可能で, $f'(\boldsymbol{p})$ の (i,j) 成分は $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ である.

(2) 逆に各 f_i が $\boldsymbol{p}$ で微分可能ならば f は $\boldsymbol{p}$ で微分可能である.

証明 (1) $f'(\boldsymbol{p})$ の第 i 行を A_i とすると $\dfrac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})-f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}$ の第 i 成分は $\dfrac{f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{p})-A_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}$ だから

$$\left|\frac{f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{p})-A_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}\right|\leqq\left\|\frac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})-f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}\right\|$$

が成り立つ. $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}$ のとき, 右辺は 0 に近づくため $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\frac{f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{p})-A_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}=0$ となり, f_i は $\boldsymbol{p}$ で微分可能で $f_i'(\boldsymbol{p})=A_i$ である. A の (i,j) 成分は A_i の第 j 列だから命題 2.15 と偏微分の定義から $A_i\boldsymbol{e}_j=\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ に等しくなる.

(2) A を $f_i'(\boldsymbol{p})$ を第 i 行とする $m\times n$ 行列とすれば, m 次元ベクトル $\dfrac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})-A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}$ の第 i 成分は $\dfrac{f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{p})-f_i'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}$ だから仮定と命題 2.5 から $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\frac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})-A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}=\boldsymbol{0}$ である. □

命題 2.18 $X\subset\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{v},\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$ とし, $t\in(a,b)$ ならば $\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}\in X$ であるとする. $\omega:(a,b)\to X$ を $\omega(t)=\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}$ で定め, 関数 $f:X\to\boldsymbol{R}$ は $\omega(t)$ $(t\in(a,b))$ において微分可能であるとする．このとき, $\boldsymbol{v}$ の第 j 成分を v_j とすれば, 次の等式が成り立つ.

$$(f\circ\omega)'(t)=\sum_{j=1}^{n}v_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})$$

証明 命題 2.17 から $f'(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}) \end{pmatrix}$ である. 一方, 命題 2.15 から $(f\circ\omega)'(t) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f((\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})+h\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})}{h} = f'(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$ だから結果を得る. □

定理 2.19 (合成写像の微分法) $X\subset \boldsymbol{R}^n$, $Y\subset\boldsymbol{R}^m$, $Z\subset\boldsymbol{R}^l$ とする. $f:X\to Y$ が $\boldsymbol{p}$ で微分可能であり, $g:Y\to Z$ が $f(\boldsymbol{p})$ で微分可能ならば, 合成写像 $g\circ f:X\to Z$ も $\boldsymbol{p}$ で微分可能で, 次の等式が成り立つ.

$$(g\circ f)'(\boldsymbol{p}) = g'(f(\boldsymbol{p}))f'(\boldsymbol{p})$$

証明 写像 $\varepsilon_{f,f'(\boldsymbol{p}),\boldsymbol{p}}$, $\varepsilon_{g,g'(f(\boldsymbol{p})),f(\boldsymbol{p})}$ を, それぞれ, $\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}$, $\varepsilon_{g,f(\boldsymbol{p})}$ で表すことにすれば, 命題 2.12 から

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{p})+f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) \ \cdots\ (1)\\ g(\boldsymbol{y}) &= g(f(\boldsymbol{p}))+g'(f(\boldsymbol{p}))(\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{p}))+\|\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{p})\|\varepsilon_{g,f(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{y}) \ \cdots\ (2)\end{aligned}$$

が成り立つ. (2) の等式の $\boldsymbol{y}$ に $f(\boldsymbol{x})$ を代入すれば次の等式が得られる.

$$g(f(\boldsymbol{x})) = g(f(\boldsymbol{p}))+g'(f(\boldsymbol{p}))(f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p}))+\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})\|\varepsilon_{g,f(\boldsymbol{p})}(f(\boldsymbol{x}))$$

$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{p}$ として, この等式の右辺の第 2 項の $f(\boldsymbol{x})$ に (1) の右辺を代入して, 両辺を $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|$ で割って整理すれば

$$\frac{(g\circ f)(\boldsymbol{x})-(g\circ f)(\boldsymbol{p})-g'(f(\boldsymbol{p}))f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} = g'(f(\boldsymbol{p}))\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})+\frac{\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}\varepsilon_{g,f(\boldsymbol{p})}(f(\boldsymbol{x})) \ \cdots\ (3)$$

が得られる. 従って $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}$ としたときに, 上式の右辺が $\boldsymbol{0}$ に近づくことが示されれば, $g\circ f:X\to Z$ は $\boldsymbol{p}$ で微分可能で, 定義 2.16 により, $(g\circ f)'(\boldsymbol{p}) = g'(f(\boldsymbol{p}))f'(\boldsymbol{p})$ であることがわかる.

三角不等式から (3) の右辺の長さについて, 次の不等式が成り立つ.

$$\left\|g'(f(\boldsymbol{p}))\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})+\frac{\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}\varepsilon_{g,f(\boldsymbol{p})}(f(\boldsymbol{x}))\right\| \leqq \|g'(f(\boldsymbol{p}))\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\|+\frac{\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}\left\|\varepsilon_{g,f(\boldsymbol{p})}(f(\boldsymbol{x}))\right\| \ \cdots\ (4)$$

まず, $A = g'(f(\boldsymbol{p}))$ として補題 1.13 を用いると $\|g'(f(\boldsymbol{p}))\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\| \leqq M\|\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\|$ を満たす定数 M があり, 仮定と命題 2.12 から $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{p}$ に近づくとき, この不等式の右辺は 0 に近づくため

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\|g'(f(\boldsymbol{p}))\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\| = 0 \ \cdots\ (5)$$

である. 命題 2.13 から, $r, L>0$ で $B(\boldsymbol{p};r)\subset X$ かつ $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|<r$ ならば $\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})\|\leqq L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|$ を満たすものがあるため, $0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|<r$ ならば

$$\frac{\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}\left\|\varepsilon_{g,f(\boldsymbol{p})}(f(\boldsymbol{x}))\right\| \leqq L\left\|\varepsilon_{g,f(\boldsymbol{p})}(f(\boldsymbol{x}))\right\| \ \cdots\ (6)$$

が成り立つ. 命題 2.13 から, f は $\boldsymbol{p}$ で連続だから, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p})$ が成り立つため, 仮定と命題 2.9 から, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\varepsilon_{g,f(\boldsymbol{p})}(f(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$ である. 従って $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}$ のとき, (6) の右辺は 0 に近づくため,

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\frac{\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}\left\|\varepsilon_{g,f(\boldsymbol{p})}(f(\boldsymbol{x}))\right\| = 0 \ \cdots\ (7)$$

が成り立つ. (5), (7) と (4) から, $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}$ のとき, (3) の右辺は $\boldsymbol{0}$ に近づくため, 主張は示された. □

上の定理で $Z=\boldsymbol{R}$ の場合を考える. $\boldsymbol{x}\in X$ に対し $f(\boldsymbol{x})\in Y$ の第 i 成分を $f_i(\boldsymbol{x})$ で表し, 実数値関数 $f_i:X\to\boldsymbol{R}$ を考えれば, 命題 2.17 の (1) から $m\times n$ 行列 $f'(\boldsymbol{p})$ の (i,j) 成分は $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ であり, $1\times m$ 行列 $g'(f(\boldsymbol{p}))$ の $(1,j)$ 成分は $\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(f(\boldsymbol{p}))$ である. 一方 $(g\circ f)'(\boldsymbol{p})$ の $(1,j)$ 成分は $\dfrac{\partial g\circ f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ だから, 上で示した等式 $(g\circ f)'(\boldsymbol{p}) = g'(f(\boldsymbol{p}))f'(\boldsymbol{p})$ の両辺の $(1,j)$ 成分を比較すれば次の結果が得られる.

系 2.20 $f:X\to Y$ が $\boldsymbol{p}$ で微分可能であり, $g:Y\to\boldsymbol{R}$ が $f(\boldsymbol{p})$ で微分可能ならば, 次の等式が成り立つ.

$$\frac{\partial g\circ f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}) = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial x_k}(f(\boldsymbol{p}))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$$

3 偏微分

補題 3.1 $x_1,\ldots,x_n$ を負でない実数とするとき, $x_1+\cdots+x_n \leq \sqrt{n}\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ が成り立つ.

証明 $\left(\sqrt{n}\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\right)^2-(x_1+\cdots+x_n)^2=\sum\limits_{1\leqq i<j\leqq n}(x_i-x_j)^2 \geqq 0$ □

定理 3.2 $f:X\to Y$ を写像とし, $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し $f(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{R}^m$ の第 i 成分を $f_i(\boldsymbol{x})$ で表し, X で定義された実数値関数 $f_i:X\to\boldsymbol{R}$ を考える. $i=1,2,\ldots,m$ に対し, f_i は X の各点ですべての変数に対して微分可能で, 偏導関数 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}:X\to\boldsymbol{R}$ は連続であるとする. このとき, f は X の各点で微分可能である.

証明 命題 2.17 の (2) から $Y=\boldsymbol{R}$ の場合に対して主張を示せばよい. $\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}\in X$ の第 j 成分をそれぞれ x_j, p_j として, $g_i:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ を

$$g_i(t)=f\left(\sum_{j=1}^{i-1}p_j\boldsymbol{e}_j+(p_i+t(x_i-p_i))\boldsymbol{e}_i+\sum_{j=i+1}^{n}x_j\boldsymbol{e}_j\right)$$

で定めると, g_i は $(0,1)$ の各点で微分可能であり,

$$g_i'(t)=(x_i-p_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{i-1}p_j\boldsymbol{e}_j+(p_i+t(x_i-p_i))\boldsymbol{e}_i+\sum_{j=i+1}^{n}x_j\boldsymbol{e}_j\right)\ \cdots\ (*)$$

が成り立つ. さらに $i=2,3,\ldots,n$ に対し, $g_i(1)=g_{i-1}(0)$ であり, $g_1(1)=f(\boldsymbol{x})$, $g_n(0)=f(\boldsymbol{p})$ だから $f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})=\sum\limits_{i=1}^{n}(g_i(1)-g_i(0))$ が成り立つ. 平均値の定理から $g_i(1)-g_i(0)=g_i'(\theta_i)$ を満たす $0<\theta_i<1$ があるため, $\boldsymbol{c}_i=\sum\limits_{j=1}^{i-1}p_j\boldsymbol{e}_j+(p_i+\theta_i(x_i-p_i))\boldsymbol{e}_i+\sum\limits_{j=i+1}^{n}x_j\boldsymbol{e}_j$ とおいて $(*)$ に注意すれば,

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})(x_i-p_i) &= \sum_{i=1}^{n}\left(g_i(1)-g_i(0)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})(x_i-p_i)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(g_i'(\theta_i)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})(x_i-p_i)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}_i)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})\right)(x_i-p_i)\end{aligned}$$

である. $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ の連続性から, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $\delta>0$ で $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{p}\|<\delta$ ならば $i=1,2,\ldots,n$ に対して $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{v})-\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})\right|<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ を満たすものがある. $\|\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{p}\|=\sqrt{\theta_i^2(x_i-p_i)^2+\sum\limits_{j=i+1}^{n}(x_j-p_j)^2}\leqq\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|$ だから $0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|<\delta$ ならば $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}_i)-\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})\right|<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ であり, これと上の計算および補題 3.1 から

$$\left|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})(x_i-p_i)\right|\leqq\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c}_i)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})\right||x_i-p_i|<\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}|x_i-p_i|\leqq\varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|$$

が得られる. これは $A=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{p}) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{p})\end{pmatrix}$ とおけば $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\dfrac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})-A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}=0$ が成り立つことを意味するため, f は $\boldsymbol{p}$ で微分可能である. □

定義 3.3 X を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合とする. 関数 $f:X\to\boldsymbol{R}$ と $1\leqq i_s\leqq n$ $(s=1,2,\ldots,r)$ を満たす数列 $i_1,i_2,\ldots,i_r$ に対し, f の r 次偏導関数

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r}\partial x_{i_{r-1}}\ldots\partial x_{i_1}}:X\longrightarrow\boldsymbol{R}$$

を次のように帰納的に定義する．f が X の各点で i_1 番目の変数に関して偏微分可能であるとき，$\dfrac{\partial^1 f}{\partial x_{i_1}}$ は $\boldsymbol{x} \in X$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(\boldsymbol{x})$ に対応させる関数とする．$\dfrac{\partial^{r-1} f}{\partial x_{i_{r-1}} \ldots \partial x_{i_1}} : X \to \boldsymbol{R}$ $(r \geqq 2)$ が定まり，X の各点で i_r 番目の変数に関して偏微分可能であるとき，$\dfrac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \partial x_{i_{r-1}} \ldots \partial x_{i_1}}$ を

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \partial x_{i_{r-1}} \ldots \partial x_{i_1}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\left(\frac{\partial^{r-1} f}{\partial x_{i_{r-1}} \ldots \partial x_{i_1}}\right)(\boldsymbol{x})$$

によって定義する．

$1 \leqq i_s \leqq n$ $(s = 1, 2, \ldots, r)$ を満たす任意の数列 $i_1, i_2, \ldots, i_r$ に対し，f の r 次偏導関数が定義できるとき，「f は X で r 回偏微分可能である」という．

定理 3.4 $\boldsymbol{p}$ を $X \subset \boldsymbol{R}^n$ の内点とする．また $f : X \to \boldsymbol{R}$ は X の各点で i 番目と j 番目の変数に関して偏微分可能であるとし，$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \dfrac{\partial f}{\partial x_j} : X \to \boldsymbol{R}$ がともに連続であるとする．さらに，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : X \to \boldsymbol{R}$ が存在して，$\boldsymbol{p} \in X$ において連続ならば $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ は $\boldsymbol{p}$ で i 番目の変数に関して偏微分可能であり，$\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\boldsymbol{p}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p})$ が成り立つ．

証明 仮定から $B(\boldsymbol{p}; r) \subset X$ を満たす $r > 0$ がある．$J \subset \boldsymbol{R}^2$ を $J = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, |x|, |y| < \dfrac{r}{\sqrt{2}} \right\}$ で定め，$F : J \to \boldsymbol{R}$ を

$$F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = f(\boldsymbol{p} + x\boldsymbol{e}_i + y\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{p} + x\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{p} + y\boldsymbol{e}_j) + f(\boldsymbol{p})$$

で定義する．$t \in \left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ を固定して $\varphi_t : \left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right) \to \boldsymbol{R}$ を $\varphi_t(x) = f(\boldsymbol{p} + x\boldsymbol{e}_i + t\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{p} + x\boldsymbol{e}_i)$ で定めれば，$\varphi_t'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p} + x\boldsymbol{e}_i + t\boldsymbol{e}_j) - \dfrac{\partial f}{\partial x_i} f(\boldsymbol{p} + x\boldsymbol{e}_i)$ および $\varphi_t(x) - \varphi_t(0) = F\left(\begin{smallmatrix} x \\ t \end{smallmatrix}\right)$ が成り立つ．$s \in \left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ に対し，0 と s で挟まれた区間において平均値の定理を用いると $0 < \theta_1 < 1$ で $\varphi_t(s) - \varphi_t(0) = s\varphi_t'(\theta_1 s)$ をみたすものがあるため，

$$F\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) = s\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p} + \theta_1 s\boldsymbol{e}_i + t\boldsymbol{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p} + \theta_1 s\boldsymbol{e}_i)\right) \cdots (1)$$

が成り立つ．ここで θ_1 は s と t の両方に依存することに注意する．さらに，s, t を固定して $\psi : \left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right) \to \boldsymbol{R}$ を $\psi(u) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p} + \theta_1 s\boldsymbol{e}_i + u\boldsymbol{e}_j)$ で定義すれば，仮定から ψ は微分可能で，0 と t で挟まれる区間で平均値の定理を用いると，$0 < \theta_2 < 1$ で $\psi(t) - \psi(0) = t\psi'(\theta_2 t)$ を満たすものがある．$\psi'(u) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p} + \theta_1 s\boldsymbol{e}_i + u\boldsymbol{e}_j)$ だから

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p} + \theta_1 s\boldsymbol{e}_i + t\boldsymbol{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p} + \theta_1 s\boldsymbol{e}_i) = t\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p} + \theta_1 s\boldsymbol{e}_i + \theta_2 t\boldsymbol{e}_j) \cdots (2)$$

が得られる．(1), (2) から

$$F\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) = st\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p} + \theta_1 s\boldsymbol{e}_i + \theta_2 t\boldsymbol{e}_j) \cdots (3)$$

を満たす $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ の存在が示せたことになる．$s, t \in \left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ を固定して $\lambda_s : \left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right) \to \boldsymbol{R}$ を $\lambda_s(y) = f(\boldsymbol{p} + s\boldsymbol{e}_i + y\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{p} + y\boldsymbol{e}_j)$ で定めて，0 と t で挟まれた区間で平均値の定理を用いれば，$\lambda_s(t) - \lambda_s(0) = t\lambda_s'(\theta_3 t)$ を満たす $0 < \theta_3 < 1$ がある．$\lambda_s(t) - \lambda_s(0) = F\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)$, $\lambda_s'(y) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p} + s\boldsymbol{e}_i + y\boldsymbol{e}_j) - \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p} + y\boldsymbol{e}_j)$ より

$$F\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) = t\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p} + s\boldsymbol{e}_i + \theta_3 t\boldsymbol{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p} + \theta_3 t\boldsymbol{e}_j)\right) \cdots (4)$$

である．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ の $\boldsymbol{p}$ における連続性から $0 < \delta < 1$ で，$x^2 + y^2 < \delta^2$ ならば

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p} + x\boldsymbol{e}_i + y\boldsymbol{e}_j) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p})\right| < \varepsilon \cdots (5)$$

を満たすものがある. 従って, $s^2+t^2<\delta^2$ ならば (3), (4), (5) から

$$\left|\frac{1}{s}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}+s\boldsymbol{e}_i+\theta_3 t\boldsymbol{e}_j)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}+\theta_3 t\boldsymbol{e}_j)\right)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\boldsymbol{p})\right|=\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\boldsymbol{p}+\theta_1 s\boldsymbol{e}_i+\theta_2 t\boldsymbol{e}_j)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\boldsymbol{p})\right|<\varepsilon$$

が成り立つ. $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ の連続性から, 上式で $t\to 0$ とすれば $|s|<\delta$ ならば

$$\left|\frac{1}{s}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}+s\boldsymbol{e}_i)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})\right)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\boldsymbol{p})\right|\leqq\varepsilon$$

が成り立つことが分かる. ε は任意だから上式は定理の主張が成り立つことを示している. □

上の定理から, f が r 回偏微分可能で r 次までの偏導関数がすべて連続ならば r 次偏導関数は偏微分する変数の順序には依存しないことが分かる.

4 多変数関数のテイラーの定理

X を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合, $f:X\to\boldsymbol{R}$ を関数とする. $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^n$ の第 i 成分を v_i とし, f がすべての変数について偏微分可能であるとき, 関数 $\left(v_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}+v_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+v_n\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)f:X\to\boldsymbol{R}$ を

$$\left(\left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+v_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f\right)(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$$

で定義する. 帰納的に, f が r 回偏微分可能であるとき $\left(v_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}+v_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+v_n\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^r f:X\to\boldsymbol{R}$ を

$$\left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+v_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\left(\left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+v_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{r-1}f\right)$$

で定める.

補題 4.1 $f:X\to\boldsymbol{R}$ は r 回偏微分可能で, r 次までの偏導関数がすべて連続であるとする. $\boldsymbol{p}\in X$, $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^n$, $a,b\in\boldsymbol{R}$ $(a<b)$ に対し, $t\in(a,b)$ ならば $\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}\in X$ であるとき, $g:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ を $g(t)=f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})$ で定める. このとき, g の r 次導関数は

$$g^{(r)}(t)=\left(\left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+v_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^r f\right)(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})$$

で与えられる.

証明 定理 3.2 により, f は X の各点で微分可能だから, 命題 2.18 により,

$$g'(t)=\left(\left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+v_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f\right)(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})$$

となり, $r=1$ のとき主張は正しい. $g^{(r-1)}(t)=\left(\left(v_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}+v_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+v_n\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{r-1}f\right)(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})$ が成り立つと仮定して, $h:X\to\boldsymbol{R}$ を

$$h=\left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+v_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{r-1}f$$

によって定義すると, $g^{(r-1)}(t)=h(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})$ である. この両辺 t で微分すれば, 再び命題 2.18 から

$$\begin{aligned}g^{(r)}(t)=h'(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}&=\left(\left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+v_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)h\right)(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})\\&=\left(\left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+v_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^r f\right)(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

となるため, r のときも主張が成り立つ. □

補題 4.2 $l_1, \ldots, l_k$ は正の整数とし, $r = l_1 + \cdots l_k$ とおくと, 次の等式が成り立つ.

$$\sum_{s=1}^{k} \frac{(r-1)!}{l_1! \cdots (l_s-1)! \cdots l_k!} = \frac{r!}{l_1! \cdots l_k!}$$

証明 k による帰納法で示す. $k=1$ のとき, 主張は明らかに成り立つ. $k-1$ のとき, 主張が正しいと仮定すると,

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{k} \frac{(r-1)!}{l_1! \cdots (l_s-1)! \cdots l_k!} &= \sum_{s=1}^{k-1} \frac{(r-l_k-1)!}{l_1! \cdots (l_s-1)! \cdots l_{k-1}!} \frac{(r-1)!}{l_k!(r-l_k-1)!} + \frac{(r-1)!}{l_1! \cdots l_{k-1}!(l_k-1)!} \\ &= \frac{(r-l_k)!}{l_1! \cdots l_{k-1}!} \frac{(r-1)!}{l_k!(r-l_k-1)!} + \frac{(r-1)!}{l_1! \cdots l_{k-1}!(l_k-1)!} = \frac{r!}{l_1! \cdots l_{k-1}! l_k!}\end{aligned}$$

となって, k のときも主張は成り立つ. □

命題 4.3 $f : X \to \boldsymbol{R}$ が r 回偏微分可能で, r 次までの偏導関数がすべて連続であるとき, $\boldsymbol{x} \in X$ に対し, 次の等式が成り立つ.

$$\left(\left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^r f\right)(\boldsymbol{x}) = \sum_{i_1+\cdots+i_n=r} \frac{r!}{i_1! \cdots i_n!} v_1^{i_1} \cdots v_n^{i_n} \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{x})$$

証明 r による帰納法で示す. $r=1$ のときは主張は明らかに成り立つ. $r-1$ のとき主張が正しいと仮定すると,

$$\left(\left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^r f\right)(\boldsymbol{x}) = \sum_{j_1+\cdots+j_n=r-1} \frac{(r-1)!}{j_1! \cdots j_n!} \left(\sum_{s=1}^{n} v_1^{j_1} \cdots v_s^{j_s+1} \cdots v_n^{j_n} \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_s^{j_s+1} \cdots \partial x_n^{j_n}}(\boldsymbol{x})\right)$$

ここで $i_1 + \cdots + i_n = r$ を満たす負でない整数 $i_1, \ldots, i_n$ に対して, 上式の $v_1^{i_1} \cdots v_n^{i_n} \dfrac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{x})$ の項を集めると, その係数は $\displaystyle\sum_{1 \leq s \leq n, i_s \neq 0} \frac{(r-1)!}{i_1! \cdots (i_s-1)! \cdots i_n!}$ だから補題 4.2 により, $\dfrac{r!}{i_1! \cdots i_n!}$ に等しくなる. 従って, 上式の左辺は $\displaystyle\sum_{i_1+\cdots+i_n=r} \frac{r!}{i_1! \cdots i_n!} v_1^{i_1} \cdots v_n^{i_n} \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{x})$ となって r のときも主張が成り立つ. □

定理 4.4 *(テイラーの定理)* $f : X \to \boldsymbol{R}$ が r 回偏微分可能で, r 次までの偏導関数がすべて連続であるとする. $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x} \in X$ に対し, $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{x}$ を結ぶ線分は X に含まれるとするとき, $0 < \theta < 1$ で,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{p}) + \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{i_1+\cdots+i_n=k} \frac{1}{i_1! \cdots i_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p})(x_1-p_1)^{i_1} \cdots (x_n-p_n)^{i_n} \\ &\quad + \sum_{i_1+\cdots+i_n=r} \frac{1}{i_1! \cdots i_n!} \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p}+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))(x_1-p_1)^{i_1} \cdots (x_n-p_n)^{i_n} \end{aligned}$$

を満たすものがある. ここで, x_i, p_i はそれぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{p}$ の第 i 成分である.

証明 $g : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を $g(t) = f(\boldsymbol{p} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}))$ で定めれば, g に関するテイラーの定理から,

$$g(1) = g(0) + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \frac{1}{r!} g^{(r)}(\theta)$$

を満たす $0 < \theta < 1$ がある. 補題 4.1, 命題 4.3 により,

$$\begin{aligned} g^{(k)}(t) &= \left(\left((x_1-p_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2-p_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + (x_n-p_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f\right)(\boldsymbol{p}+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})) \\ &= \sum_{i_1+\cdots+i_n=k} \frac{k!}{i_1! \cdots i_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p}+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))(x_1-p_1)^{i_1} \cdots (x_n-p_n)^{i_n} \end{aligned}$$

だから, これを上式に代入すれば結果が得られる. □

補題 4.5

$$(x_1 + \cdots + x_n)^r = \sum_{i_1+\cdots+i_n=r} \frac{r!}{i_1!\cdots i_n!} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$$

証明 n による帰納法で示す. $n=1$ の場合は主張は明らか. $n-1$ のときに主張が成立するならば, 二項定理から,

$$\begin{aligned}(x_1+\cdots+x_n)^r &= \sum_{s+i_n=r}\frac{r!}{s!i_n!}(x_1+\cdots+x_{n-1})^s x_n^{i_n} = \sum_{s+i_n=r}\frac{r!}{s!i_n!}\left(\sum_{i_1+\cdots+i_{n-1}=s}\frac{s!}{i_1!\cdots i_{n-1}!}x_1^{i_1}\cdots x_{n-1}^{i_{n-1}}\right)x_n^{i_n}\\ &= \sum_{i_1+\cdots+i_n=r}\frac{r!}{i_1!\cdots i_n!}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\end{aligned}$$

となって, n のときも主張が成立する. □

系 4.6 定理 4.4 と同じ仮定のもとで, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ で, $0 < \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < \delta$ ならば

$$\left| f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - \sum_{k=1}^{r}\sum_{i_1+\cdots+i_n=k}\frac{1}{i_1!\cdots i_n!}\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p})(x_1-p_1)^{i_1}\cdots(x_n-p_n)^{i_n}\right| < \varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^r$$

を満たすようなものがある.

証明 $\dfrac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}$ の連続性から任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ で, $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < \delta$ ならば $i_1+\cdots+i_n = r$ を満たすすべての負でない整数 $i_1,\ldots,i_n$ に対して

$$\left|\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p})\right| < \frac{r!}{\sqrt{n^r}}\varepsilon$$

を満たすようなものがある. テイラーの定理と補題 4.5, 補題 3.1 を用いると, $0 < \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}&\left| f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - \sum_{k=1}^{r}\sum_{i_1+\cdots+i_n=k}\frac{1}{i_1!\cdots i_n!}\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p})(x_1-p_1)^{i_1}\cdots(x_n-p_n)^{i_n}\right|\\ &= \left|\sum_{i_1+\cdots+i_n=r}\frac{1}{i_1!\cdots i_n!}\left(\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p}+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})) - \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p})\right)(x_1-p_1)^{i_1}\cdots(x_n-p_n)^{i_n}\right|\\ &\leqq \sum_{i_1+\cdots+i_n=r}\frac{1}{i_1!\cdots i_n!}\left|\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p}+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})) - \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p})\right||x_1-p_1|^{i_1}\cdots|x_n-p_n|^{i_n}\\ &< \sum_{i_1+\cdots+i_n=r}\frac{1}{i_1!\cdots i_n!}|x_1-p_1|^{i_1}\cdots|x_n-p_n|^{i_n}\frac{r!}{\sqrt{n^r}}\varepsilon = (|x_1-p_1|+\cdots+|x_n-p_n|)^r\frac{\varepsilon}{\sqrt{n^r}} \leqq \varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^r\end{aligned}$$

□

5 多変数関数の極大・極小

定義 5.1 X を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合, $f : X \to \boldsymbol{R}$ を関数とする. $\boldsymbol{p} \in X$ に対し, $\varepsilon > 0$ で "$\boldsymbol{x} \in X$ かつ $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < \varepsilon$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \leqq f(\boldsymbol{p})$"を満たすものがあるとき, f は $\boldsymbol{p}$ で極大であるといい, $f(\boldsymbol{p})$ を f の極大値という. また, $\varepsilon > 0$ で "$\boldsymbol{x} \in X$ かつ $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < \varepsilon$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \geqq f(\boldsymbol{p})$"を満たすものがあるとき, f は $\boldsymbol{p}$ で極小であるといい, $f(\boldsymbol{p})$ を f の極小値という.

命題 5.2 $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 X で定義された実数値関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ が X の内点 $\boldsymbol{p}$ において微分可能であり, 極大または極小ならば $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}) = 0$ である.

証明 $B(\boldsymbol{p};r)\subset X$ を満たす $r>0$ をとり, $f_j:(-r,r)\to\boldsymbol{R}$ を $f_j(t)=f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{e}_j)$ で定める. f が $\boldsymbol{p}$ で極大 (極小) ならば f_j は 0 で極大 (極小) だから 1 変数関数の場合の結果により $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})=f_j'(0)=0$ となる. □

n 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し, ${}^t\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}$ を $n\times 1$ 行列とみなしたときの転置行列とする. 実数を成分にもつ n 次対称行列 A に対し, 関数 $Q_A:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ を $Q_A(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ で定義する. このとき, $r\in\boldsymbol{R}$ に対して, $Q_A(r\boldsymbol{x})=r^2Q_A(\boldsymbol{x})$ が成り立ち, $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ の第 j 成分を x_j とし, A の (i,j) 成分を a_{ij} とすれば, $a_{ji}=a_{ij}$ より

$$Q_A(\boldsymbol{x})=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+\sum_{1\leqq i<j\leqq n}2a_{ij}x_ix_j$$

が成り立つことがわかる.

また, X を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合とし, X 上の関数 $f:X\to\boldsymbol{R}$ は 2 回偏微分可能で 2 次までの偏導関数がすべて連続であるとする. $\boldsymbol{p}\in X$ に対し, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ が (i,j) 成分であるような n 次正方行列を $f''(\boldsymbol{p})$ とする. すなわち

$$f''(\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{p}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_j}(\boldsymbol{p}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(\boldsymbol{p})\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_1}(\boldsymbol{p}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{p}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_n}(\boldsymbol{p})\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}(\boldsymbol{p}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_j}(\boldsymbol{p}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\boldsymbol{p})\end{pmatrix}.$$

このとき $f''(\boldsymbol{p})$ は n 次対称行列であることに注意する. さらに $\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}\in X$ の第 j 成分をそれぞれ x_j, p_j とすれば, 次の等式が成り立つことが容易に確かめられるため,

$$\begin{aligned}\sum_{i_1+\cdots+i_n=1}\frac{1}{i_1!\cdots i_n!}\frac{\partial f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p})(x_1-p_1)^{i_1}\cdots(x_n-p_n)^{i_n} &= f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\\ \sum_{i_1+\cdots+i_n=2}\frac{1}{i_1!\cdots i_n!}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p})(x_1-p_1)^{i_1}\cdots(x_n-p_n)^{i_n} &= \frac{1}{2}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\end{aligned}$$

$r=2$ の場合の系 4.6 は次のようになる.

系 5.3 X を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合とし, X 上の関数 $f:X\to\boldsymbol{R}$ は 2 回偏微分可能で 2 次までの偏導関数がすべて連続であるとする. 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\delta>0$ で, $0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|<\delta$ ならば次の不等式を満たすものがある.

$$\left|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})-f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})-\frac{1}{2}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\right|<\varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2$$

命題 5.4 X を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合とし, X 上の関数 $f:X\to\boldsymbol{R}$ は 2 回偏微分可能で 2 次までの偏導関数がすべて連続であるとする. さらに $\boldsymbol{p}\in X$ に対し, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{p})=\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{p})=\cdots=\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{p})=0$ が成り立つとする.
(1) $K>0$ で, 任意の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して $Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x})\geqq K\|\boldsymbol{x}\|^2$ を満たすものが存在するとき f は $\boldsymbol{p}$ で極小である.
(2) $K<0$ で, 任意の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して $Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x})\leqq K\|\boldsymbol{x}\|^2$ を満たすものが存在するとき f は $\boldsymbol{p}$ で極大である.
(3) $Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{u})>0$, $Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{v})<0$ を満たす $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^n$ があるとき, f は $\boldsymbol{p}$ で極大でも極小でもない.

証明 仮定と命題 2.17 の (1) から $f'(\boldsymbol{p})=O$ だから, 系 5.3 によって, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\delta>0$ で, $0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|<\delta$ ならば次の不等式 $(*)$ を満たすものがある.

$$\frac{1}{2}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})-\varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2<f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})<\frac{1}{2}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})+\varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2\ \cdots\ (*)$$

(1) $\varepsilon=\dfrac{K}{3}$ に対して $(*)$ を満たすような $\delta>0$ をとる. 仮定より $Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\geqq K\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2$ が成り立つため, $(*)$ によって, $0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|<\delta$ ならば

$$f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})>\frac{1}{2}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})-\frac{K}{3}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2\geqq\frac{K}{6}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2>0$$

が成り立つ. 故に f は $\boldsymbol{p}$ で極小である.

(2) $\varepsilon = -\dfrac{K}{3}$ に対して $(*)$ を満たすような $\delta > 0$ をとる. 仮定より $Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}) \leqq K\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2$ が成り立つため, $(*)$ によって, $0 < \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < \delta$ ならば

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) < \frac{1}{2}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}) - \frac{K}{3}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2 \leqq \frac{K}{6}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2 < 0$$

が成り立つ. 故に f は $\boldsymbol{p}$ で極大である.

(3) 任意の実数 r に対して $Q_{f''(\boldsymbol{p})}(r\boldsymbol{x}) = r^2 Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x})$ が成り立つため, $\dfrac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}$, $\dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$ を, それぞれ $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ とおくことによって $\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\| = 1$ と仮定してよい. $\varepsilon = \dfrac{1}{3}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{u})$ に対して $(*)$ を満たすような $\delta > 0$ をとる. $0 < |t| < \delta$ ならば $0 < \|(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{u})-\boldsymbol{p}\| = |t| < \delta$ だから $(*)$ によって,

$$f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{p}) > \frac{1}{2}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(t\boldsymbol{u}) - \frac{1}{3}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{u})\|t\boldsymbol{u}\|^2 = \frac{1}{2}t^2 Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{u}) - \frac{1}{3}t^2 Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{6}t^2 Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{u}) > 0$$

が成り立つ. 従って $\boldsymbol{p}$ において f は極大ではない. $\varepsilon = -\dfrac{1}{3}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{v})$ に対して $(*)$ を満たすような $\delta > 0$ をとる. $0 < |t| < \delta$ ならば $0 < \|(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})-\boldsymbol{p}\| = |t| < \delta$ だから $(*)$ によって,

$$f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{p}) < \frac{1}{2}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(t\boldsymbol{v}) - \frac{1}{3}Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{v})\|t\boldsymbol{v}\|^2 = \frac{1}{2}t^2 Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{v}) - \frac{1}{3}t^2 Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{6}t^2 Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{v}) < 0$$

が成り立つ. 従って $\boldsymbol{p}$ において f は極小でもない. $\square$

注意 5.5 上の結果から, f が $f'(\boldsymbol{p}) = O$ を満たす点 $\boldsymbol{p} \in X$ で極値をとるかどうかは, n 次対称行列 $A = f''(\boldsymbol{p})$ から定まる, n 変数の「2 次関数」Q_A の挙動から判定できる *(ことがある)*. 実際, 線形代数学の結果を用いると次の (1), (2), (3) は互いに同値, (4), (5), (6) は互いに同値, (7) と (8) は同値であることが示される.

(1) $K > 0$ で, 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $Q_A(\boldsymbol{x}) \geqq K\|\boldsymbol{x}\|^2$ を満たすものが存在する.

(2) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ が零ベクトルでないならば $Q_A(\boldsymbol{x}) > 0$ である.

(3) A の固有値はすべて正の実数である.

(4) $K < 0$ で, 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $Q_A(\boldsymbol{x}) \leqq K\|\boldsymbol{x}\|^2$ を満たすものが存在する.

(5) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ が零ベクトルでないならば $Q_A(\boldsymbol{x}) < 0$ である.

(6) A の固有値はすべて負の実数である.

(7) $Q_A(\boldsymbol{u}) > 0$, $Q_A(\boldsymbol{v}) < 0$ を満たす $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$ がある.

(8) A が正の固有値と負の固有値をもつ.

補題 5.6 2 次対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ に対して次のことが成り立つ.

(1) $a > 0$, $ac - b^2 > 0$ の場合, 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して $Q_A(\boldsymbol{x}) \geqq \dfrac{ac-b^2}{a+c}\|\boldsymbol{x}\|^2$ である.

(2) $a < 0$, $ac - b^2 > 0$ の場合, $Q_A(\boldsymbol{x}) \leqq \dfrac{ac-b^2}{a+c}\|\boldsymbol{x}\|^2$ である.

(3) $ac - b^2 < 0$ ならば $Q_A(\boldsymbol{u}) > 0$, $Q_A(\boldsymbol{v}) < 0$ を満たす $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^2$ がある.

証明 (1) $Q_A\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = a\left(x_1 + \dfrac{b}{a}x_2\right)^2 + \dfrac{ac-b^2}{a}x_2^2$ より $P = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & \frac{b}{\sqrt{a}} \\ 0 & \sqrt{\frac{ac-b^2}{a}} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{x}$ とおけば, P は正則で $Q_A(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{y}\|^2$ である. 補題 1.13 から $\|\boldsymbol{x}\|^2 = \|P^{-1}\boldsymbol{y}\|^2 \leqq \dfrac{a+c}{ac-b^2}\|\boldsymbol{y}\|^2$ だから $Q_A(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{y}\|^2 \geqq \dfrac{ac-b^2}{a+c}\|\boldsymbol{x}\|^2$.

(2) この場合, $-A$ は (1) の条件を満たし, $Q_A(\boldsymbol{x}) = -Q_{-A}(\boldsymbol{x})$ だから (1) より結果が得られる.

(3) $a \neq 0$ ならば $Q_A(\boldsymbol{e}_1)Q_A\left(-\frac{b}{a}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\right) = ac-b^2 < 0$ だから $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{e}_1$, $-\frac{b}{a}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ のいずれかとすればよい．$a=0$ ならば $b \neq 0$ だから $Q_A\left(\left(-\frac{c}{2b}-1\right)\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\right)Q_A\left(\left(-\frac{c}{2b}+1\right)\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\right) = -4b^2 < 0$ だから $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は $\left(-\frac{c}{2b}-1\right)\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\left(-\frac{c}{2b}+1\right)\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ のいずれかとすればよい． □

上の補題で (1) の場合, $a>0$ かつ $ac>b^2 \geqq 0$ だから $c>0$ である．従って $a+c>0$ となるため, $K=\frac{ac-b^2}{a+c}$ とおけば, $K>0$ である．同様に (2) の場合, $a<0$ かつ $ac>b^2 \geqq 0$ だから $c<0$ である．従って $a+c<0$ となるため, $K=\frac{ac-b^2}{a+c}$ とおけば, $K<0$ である．このことから, $X \subset \boldsymbol{R}^2$ の場合, 補題 5.6 を $A=f''(\boldsymbol{p})$ に対して用いると, 命題 5.4 の結果から, 次の定理が得られる．

定理 5.7 $X \subset \boldsymbol{R}^2$ とし, $f : X \to \boldsymbol{R}$ は 2 回偏微分可能で 2 次偏導関数は連続であるとする．$\boldsymbol{p} \in X$ に対し, 十分小さな $r>0$ をとれば「$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < r$ ならば $\boldsymbol{x} \in X$」が成り立ち $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{p}) = 0$ とする．

(1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{p}) > 0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{p})\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{p}) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{p})\right)^2 > 0$ ならば f は $\boldsymbol{p}$ で極大．

(2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{p}) < 0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{p})\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{p}) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{p})\right)^2 > 0$ ならば f は $\boldsymbol{p}$ で極小．

(3) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{p})\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{p}) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{p})\right)^2 < 0$ ならば f は $\boldsymbol{p}$ で極大でも極小でもない．

6 逆写像定理と陰関数定理

まず, 開集合に関するいくつかの性質示す．

命題 6.1 X, Y が $\boldsymbol{R}^n$ の開集合ならば $X \cap Y$ も開集合である．

証明 $\boldsymbol{p} \in X \cap Y$ とする．$r_1, r_2 > 0$ で $B(\boldsymbol{p}\,; r_1) \subset X$, $B(\boldsymbol{p}\,; r_2) \subset Y$ を満たすものがある．r_1, r_2 の小さい方を r とすれば $B(\boldsymbol{p}\,; r) \subset X \cap Y$ となるため, $\boldsymbol{p}$ は $X \cap Y$ の内点である． □

一般に X, Y を集合とし, 写像 $f : X \to Y$ が与えられているとき, Y の部分集合 Z に対し $f^{-1}(Z) = \{x \in X |\, f(x) \in Z\}$ とおいて, これを f による Z の逆像と呼ぶ．

命題 6.2 X, Y をそれぞれ $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ の開集合とする．写像 $f : X \to Y$ が連続ならば, Y に含まれる $\boldsymbol{R}^m$ の任意の開集合 O に対して, $f^{-1}(O)$ は $\boldsymbol{R}^n$ の開集合である．

証明 $\boldsymbol{p} \in f^{-1}(O)$ ならば $f(\boldsymbol{p}) \in O$ だから $\varepsilon > 0$ で $B(f(\boldsymbol{p})\,; \varepsilon) \subset O$ を満たすものがある．f の連続性から $\delta > 0$ で,「$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,; \delta)$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \in B(f(\boldsymbol{p})\,; \varepsilon)$」を満たすものがある．よって $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{p}\,; \delta)$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \in O$ だから $B(\boldsymbol{p}\,; \delta) \subset f^{-1}(O)$ となるため $\boldsymbol{p}$ は $f^{-1}(O)$ の内点である．従って $f^{-1}(O)$ は開集合である． □

1 変数の連続関数の場合と同ように, 多変数関数の場合も次の「最大値・最小値の定理」が成り立つ．

定理 6.3 X が $\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合ならば, X で定義された連続な実数値関数は最大値と最小値をもつ．

$M_n(\boldsymbol{R})$ を実数を成分とする n 次正方行列全体からなる集合とする．これを n^2 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^{n^2}$ と同一視して, 内積を定義すると, 行列式を対応させる関数 $\det : M_n(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ は連続である．

補題 6.4 X を $\boldsymbol{R}^k$ の開集合とし, 連続写像 $f : X \to M_n(\boldsymbol{R})$ が与えられているとき, $f(\boldsymbol{x})$ が正則行列であるようなベクトル全体からなる X の部分集合は $\boldsymbol{R}^k$ の開集合である．

証明 $\boldsymbol{R}-\{0\}$ は $\boldsymbol{R}$ の開集合であり, 連続写像の合成写像 $f\circ\det : X \to \boldsymbol{R}$ は連続だから, 命題 6.2 により $(f\circ\det)^{-1}(\boldsymbol{R}-\{0\})$ は X の開集合である. この集合は $f(\boldsymbol{x})$ が正則行列であるようなベクトル全体からなる X の部分集合に他ならない. □

$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 X の任意の 2 点を結ぶ線分が X に含まれるとき X は凸であると言う.

定義 6.5 X を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合, Y を $\boldsymbol{R}^m$ の部分集合とする. 写像 $f : X \to Y$ が与えられたとき $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し, $f(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{R}^m$ の第 i 成分を $f_i(\boldsymbol{x})$ で表すことにする. $\boldsymbol{x}$ を $f_i(\boldsymbol{x})$ に対応させることにより, 関数 $f_i : X\to\boldsymbol{R}$ が定まるが, f_i が r 次までのすべての偏導関数をもち, それらがすべて連続であるとき, f を C^r 級写像という.

補題 6.6 X を $\boldsymbol{R}^n$ の凸である開集合, Y を $\boldsymbol{R}^m$ の部分集合, $f : X\to Y$ を C^1 級写像とする. 実数 M は, すべての $\boldsymbol{x}\in X$ と $i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n$ に対して $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\right| \leqq M$ を満たすとする. このとき, すべての $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\| \leqq mnM\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$$

証明 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X$ の第 j 成分をそれぞれ $x_j,\ y_j$ として, $g_{ik} : [0,1]\to\boldsymbol{R}$ を

$$g_{ik}(t) = f_i\left(\sum_{j=1}^{k-1} y_j\boldsymbol{e}_j + (y_k+t(x_k-y_k))\boldsymbol{e}_k + \sum_{j=k+1}^{n} x_j\boldsymbol{e}_j\right)$$

で定めると, g_{ik} は $(0,1)$ の各点で微分可能であり,

$$g'_{ik}(t) = (x_k-y_k)\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{k-1} y_j\boldsymbol{e}_j + (y_k+t(x_k-y_k))\boldsymbol{e}_k + \sum_{j=k+1}^{n} x_j\boldsymbol{e}_j\right) \cdots (*)$$

が成り立つ. さらに $k=2,3,\ldots,n$ に対し, $g_{ik}(1)=g_{i\,k-1}(0)$ であり, $g_{i1}(1)=f_i(\boldsymbol{x}),\ g_{in}(0)=f_i(\boldsymbol{y})$ だから $f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{y}) = \sum\limits_{k=1}^{n}(g_{ik}(1)-g_{ik}(0))$ が成り立つ. 平均値の定理から $g_{ik}(1)-g_{ik}(0)=g'_{ik}(\theta_{ik})$ を満たす $0<\theta_{ik}<1$ があるため, $\boldsymbol{c}_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{k-1} y_j\boldsymbol{e}_j + (y_k+\theta_{ik}(x_k-y_k))\boldsymbol{e}_k + \sum\limits_{j=k+1}^{n} x_j\boldsymbol{e}_j$ とおいて $(*)$ に注意すれば,

$$|f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{y})| = \left|\sum_{k=1}^{n}(g_{ik}(1)-g_{ik}(0))\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} g'_{ik}(\theta_{ik})\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{c}_{ik})(x_k-y_k)\right| \leqq \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{c}_{ik})\right||x_k-y_k|$$

より, $|f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{y})| \leqq \sum\limits_{k=1}^{n} M|x_k-y_k|$ である. 従って命題 1.7 により

$$\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\| \leqq \sum_{i=1}^{m}|f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{y})| \leqq \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} M|x_k-y_k| \leqq mnM\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|.$$

□

定理 6.7 (逆写像定理) X, Y を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合, $f : X\to Y$ を C^r 級写像 ($r\geqq 1$) とする. $\boldsymbol{p}\in X$ に対し, $f'(\boldsymbol{p})$ が正則行列ならば, $\boldsymbol{p}$ を含む開集合 U と $f(\boldsymbol{p})$ を含む開集合 V で, f は U から V の上への 1 対 1 写像であり, 逆写像 $f^{-1} : V\to U$ も C^r 級写像になるものがとれる. このとき, $\boldsymbol{x}\in U$ に対し, $(f^{-1})'(f(\boldsymbol{x})) = f'(\boldsymbol{x})^{-1}$ が成り立つ.

証明 $f'(\boldsymbol{p}) = E_n$ を満たす f に対して主張が示されたとする. 一般の f に対しては, $g : X\to\boldsymbol{R}^n$ を $g(\boldsymbol{x}) = f'(\boldsymbol{p})^{-1}f(\boldsymbol{x})$ で定めれば, $g'(\boldsymbol{p}) = f'(\boldsymbol{p})^{-1}f'(\boldsymbol{p}) = E_n$, $f = T\circ g$ ($T : \boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ は $T(\boldsymbol{x}) = f'(\boldsymbol{p})\boldsymbol{x}$ で与えられる同型写像) だから f に対する主張が示される. 従って以下では $f'(\boldsymbol{p}) = E_n$ の場合を考える.

もし, $r_1>0$ で「$\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{p};r_1)$ かつ $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{p}$ ならば $f(\boldsymbol{x})\neq f(\boldsymbol{p})$」を満たすものが存在しないならば, 各 $n=1,2,\ldots$ に対して $\boldsymbol{x}_n\in B\bigl(\boldsymbol{p};\frac{1}{n}\bigr)$, $\boldsymbol{x}_n\neq\boldsymbol{p}$ で $f(\boldsymbol{x}_n)=f(\boldsymbol{p})$ を満たすものがある. このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{p}$ であるが,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|f(\boldsymbol{x}_n)-f(\boldsymbol{p})-f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{p})\|}{\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{p}\|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{p}\|}{\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{p}\|}=1$$

となるため, これは $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\frac{\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})-f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}=0$ と矛盾する. よって

[1] $\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{p};r_1)$ かつ $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{p}$ ならば $f(\boldsymbol{x})\neq f(\boldsymbol{p})$

を満たす $r_1>0$ は存在する. $f':X\to M_n(\boldsymbol{R})$ に対し補題 6.4 を用いると, $f'(\boldsymbol{p})$ は正則行列だから $r_2>0$ で

[2] $\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{p};r_2)$ ならば $f'(\boldsymbol{x})$ は正則行列.

を満たすものがある. また, f は C^1 級写像だから $r_3>0$ で

[3] $\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{p};r_3)$ ならば, すべての $i,j=1,2,\ldots,n$ に対して $\displaystyle\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})\right|<\frac{1}{2n^2}$

を満たすものがとれる.

$\varphi(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}$ で定義される写像 $\varphi:B(\boldsymbol{p};r_3)\to\boldsymbol{R}^n$ に補題 6.6 を用いると, $\varphi'(\boldsymbol{x})=f'(\boldsymbol{x})-E_n=f'(\boldsymbol{x})-f'(\boldsymbol{p})$ と [3] により $M=\dfrac{1}{2n^2}$ ととれるため, $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in B(\boldsymbol{p};r_3)$ に対して $\|(f(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{x}_1)-(f(\boldsymbol{x}_2)-\boldsymbol{x}_2)\|\leqq\dfrac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|$ が成り立つ. 三角不等式により $\|(f(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{x}_1)-(f(\boldsymbol{x}_2)-\boldsymbol{x}_2)\|+\|f(\boldsymbol{x}_2)-f(\boldsymbol{x}_1)\|\geqq\|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1\|$ だから上の不等式から $\dfrac{1}{2}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2\|\geqq\|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}\|-\|f(\boldsymbol{x}_2)-f(\boldsymbol{x})\|$ が得られ, 次の主張が成り立つ.

[4] $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in B(\boldsymbol{p};r_3)$ ならば $\|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1\|\leqq 2\|f(\boldsymbol{x}_2)-f(\boldsymbol{x}_1)\|$

r を $\dfrac{r_1}{2},\dfrac{r_2}{2},\dfrac{r_3}{2}$ の中で一番小さいものとする. $S(\boldsymbol{p};\varepsilon)$ を $\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n|\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|=\varepsilon\}$ で定めれば, これは $\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合である. 実際 $S(\boldsymbol{p};\varepsilon)$ が有界であることは明らかであり, 補集合 $\boldsymbol{R}^n-S(\boldsymbol{p};\varepsilon)$ の各点はすべて内点であるため, $\boldsymbol{R}^n-S(\boldsymbol{p};\varepsilon)$ は開集合である. $\psi:S(\boldsymbol{p};r)\to\boldsymbol{R}$ を $\psi(\boldsymbol{x})=\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})\|$ で定義すれば最大値・最小値の定理によって, ψ は最小値をとる. この最小値を d とすれば [1] から $d>0$ である. $\boldsymbol{x}\in S(\boldsymbol{p};r)$, $\boldsymbol{y}\in B\bigl(\boldsymbol{p};\frac{d}{2}\bigr)$ ならば $\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})\|\geqq d$, $\|\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{p})\|<\dfrac{d}{2}$ より $\|\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{x})\|\geqq\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})\|-\|\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{p})\|>d-\dfrac{d}{2}=\dfrac{d}{2}$. 従って

[5] $\boldsymbol{x}\in S(\boldsymbol{p};r)$, $\boldsymbol{y}\in B\bigl(\boldsymbol{p};\frac{d}{2}\bigr)$ ならば $\|\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{x})\|>\dfrac{d}{2}$.

各 $\boldsymbol{y}\in B\bigl(\boldsymbol{p};\frac{d}{2}\bigr)$ に対し, $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ を満たす $\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{p};r)$ がただ 1 つ存在することを示す. $\overline{B}(\boldsymbol{p};\varepsilon)$ を $\overline{B}(\boldsymbol{p};\varepsilon)=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n|\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\leqq\varepsilon\}$ で定めれば, これは $\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合である. そこで $\xi:\overline{B}(\boldsymbol{p};r)\to\boldsymbol{R}$ を $\xi(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{x})\|^2$ で定めると, 最大値・最小値の定理によって, ξ は最小値をとる. $\boldsymbol{x}\in S(\boldsymbol{p};r)$ ならば [5] と $\boldsymbol{y}\in B\bigl(\boldsymbol{p};\frac{d}{2}\bigr)$ から $\xi(\boldsymbol{x})>\left(\dfrac{d}{2}\right)^2>\xi(\boldsymbol{p})$ となるため, ξ は $\overline{B}(\boldsymbol{p};r)$ の部分集合 $S(\boldsymbol{p};r)$ においては最小値をとらない. 従って ξ は $\overline{B}(\boldsymbol{p};r)$ の内点において最小値をとるため, 命題 5.2 から, $\xi'(\boldsymbol{x})=O$ を満たす $\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{p};r)$ がある. ここで $\xi'(\boldsymbol{x})=-2({}^t\boldsymbol{y}-{}^tf(\boldsymbol{x}))f'(\boldsymbol{x})$ であり, [2] によって $f'(\boldsymbol{x})$ は正則行列だから, $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$ である. さらに [4] により, $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$ を満たす $\boldsymbol{x}$ はただ 1 つである.

$U=B(\boldsymbol{p};r)\cap f^{-1}\left(B\bigl(\boldsymbol{p};\frac{d}{2}\bigr)\right)$, $V=B\bigl(\boldsymbol{p};\frac{d}{2}\bigr)$ とおくと, 命題 6.2 と, 命題 6.1 により U, V は $\boldsymbol{R}^n$ の開集合であり, f は U から V の上への 1 対 1 写像である. この逆写像を $f^{-1}:V\to U$ とすると $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in V$ に対し, $\boldsymbol{x}=f^{-1}(\boldsymbol{y}_1)$, $\boldsymbol{x}_2=f^{-1}(\boldsymbol{y}_2)$ とおくと $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_2\in U$ だから [4] により

[6] $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in V$ ならば $\|f^{-1}(\boldsymbol{y}_2)-f^{-1}(\boldsymbol{y}_1)\|\leqq 2\|\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_1\|$.

故に f^{-1} は連続である.

最後に f^{-1} の $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{x}\in U$) における微分可能性を示す. f は $\boldsymbol{x}$ で微分可能だから, $\varepsilon_{\boldsymbol{x}}:U\to\boldsymbol{R}^n$ を

$$\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})=\begin{cases}\dfrac{f(\boldsymbol{z})-f(\boldsymbol{x})-f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}\|} & \boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}\end{cases}$$

で定めれば $\lim_{\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{x}}\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{0}$ であり, 任意の $\boldsymbol{z}\in U$ に対して $\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}\|\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})=f(\boldsymbol{z})-f(\boldsymbol{x})-f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x})$ が成り立つ. $\boldsymbol{x}=f^{-1}(\boldsymbol{y})$ であり, $\boldsymbol{w}=f(\boldsymbol{z})$ とおくと $\boldsymbol{z}=f^{-1}(\boldsymbol{w})$ だから, 上式より次の等式が得られる.

$$\|f^{-1}(\boldsymbol{w})-f^{-1}(\boldsymbol{y})\|\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(f^{-1}(\boldsymbol{w}))=\boldsymbol{w}-\boldsymbol{y}-f'(\boldsymbol{x})(f^{-1}(\boldsymbol{w})-f^{-1}(\boldsymbol{y}))\ \cdots(*)$$

[2] により, $f'(\boldsymbol{x})$ は正則行列だから $(*)$ の両辺に左から $f'(\boldsymbol{x})^{-1}$ をかけることによって

$$\|f^{-1}(\boldsymbol{w})-f^{-1}(\boldsymbol{y})\|f'(\boldsymbol{x})^{-1}\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(f^{-1}(\boldsymbol{w}))=f'(\boldsymbol{x})^{-1}(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{y})-(f^{-1}(\boldsymbol{w})-f^{-1}(\boldsymbol{y}))$$

が得られる. この等式の両辺を $\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{y}\|$ で割って, 適当に移項すれば

$$\frac{f^{-1}(\boldsymbol{w})-(f^{-1}(\boldsymbol{y})+f'(\boldsymbol{x})^{-1}(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{y}))}{\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{y}\|}=-\frac{\|f^{-1}(\boldsymbol{w})-f^{-1}(\boldsymbol{y})\|}{\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{y}\|}f'(\boldsymbol{x})^{-1}\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(f^{-1}(\boldsymbol{w}))$$

と変形される. 従って $\lim_{\boldsymbol{w}\to\boldsymbol{y}}\dfrac{\|f^{-1}(\boldsymbol{w})-f^{-1}(\boldsymbol{y})\|}{\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{y}\|}f'(\boldsymbol{x})^{-1}\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(f^{-1}(\boldsymbol{w}))=\boldsymbol{0}$ を示せば f^{-1} は $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$ において微分可能で, $(f^{-1})'(f(\boldsymbol{x}))=f'(\boldsymbol{x})^{-1}$ が得られる. $\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\in U$ ならば $\boldsymbol{y},\boldsymbol{w}\in V$ だから [6] により $\boldsymbol{w}\neq\boldsymbol{y}$ ならば $\dfrac{\|f^{-1}(\boldsymbol{w})-f^{-1}(\boldsymbol{y})\|}{\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{y}\|}\leqq 2$ である. また補題 1.13 により $\|f'(\boldsymbol{x})^{-1}\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(f^{-1}(\boldsymbol{w}))\|\leqq M\|\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(f^{-1}(\boldsymbol{w}))\|$ を満たす定数 M があるため, 次の不等式が成り立つ.

$$\left\|\frac{\|f^{-1}(\boldsymbol{w})-f^{-1}(\boldsymbol{y})\|}{\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{y}\|}f'(\boldsymbol{x})^{-1}\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(f^{-1}(\boldsymbol{w}))\right\|\leqq 2M\|\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(f^{-1}(\boldsymbol{w}))\|\ \cdots(**)$$

[6] により f^{-1} は連続だから $\lim_{\boldsymbol{w}\to\boldsymbol{y}}f^{-1}(\boldsymbol{w})=f^{-1}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}$ であり, $\lim_{\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{x}}\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{0}$ だから命題 2.9 により

$$\lim_{\boldsymbol{w}\to\boldsymbol{y}}\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(f^{-1}(\boldsymbol{w}))=\boldsymbol{0}$$

が成り立つ. 故に $(**)$ から $\lim_{\boldsymbol{w}\to\boldsymbol{y}}\dfrac{\|f^{-1}(\boldsymbol{w})-f^{-1}(\boldsymbol{y})\|}{\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{y}\|}f'(\boldsymbol{x})^{-1}\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(f^{-1}(\boldsymbol{w}))=\boldsymbol{0}$ が示されたことになる.

上で示したことから $\boldsymbol{y}\in V$ に対し, $(f^{-1})'(\boldsymbol{y})=f'(f^{-1}(\boldsymbol{y}))^{-1}$ だから, f は f^{-1}, f' と $A\mapsto A^{-1}$ で与えられる写像の合成写像である. すでに示したように f^{-1} は連続写像であり, f は C^r 級写像 $(r\geqq 1)$ だから $(f^{-1})'$ は C^{r-1} 級写像となるため連続写像である. また $A\mapsto A^{-1}$ で与えられる写像も連続写像である. 従って, $(f^{-1})'$ は連続写像の合成写像になるため, 連続写像だから f^{-1} は C^1 級写像である. 帰納的に f^{-1} が C^{k-1} 級写像 $(2\leqq k\leqq r)$ であると仮定すれば, f' と $A\mapsto A^{-1}$ で与えられる写像も C^{k-1} 級写像であることから $(f^{-1})'$ は C^{k-1} 級写像の合成写像になるため, C^{k-1} 級写像である. 従って f^{-1} は C^k 級写像となるため, 帰納法によって f^{-1} は C^r 級写像である.□

$\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ の第 j 成分を x_j, $\boldsymbol{R}^m$ のベクトル $\boldsymbol{y}$ の第 j 成分を y_j とするとき, $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)$ によって, 第 j 成分が $j\leqq n$ ならば x_j, $j\geqq n+1$ ならば y_{j-n} である $\boldsymbol{R}^{n+m}$ のベクトルを表すことにする. さらに $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 X, $\boldsymbol{R}^m$ の部分集合 Y に対し, $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の部分集合 $X\times Y$ を $X\times Y=\{\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)\,|\,\boldsymbol{x}\in X,\ \boldsymbol{y}\in Y\}$ によって定義する.

補題 6.8 $r,r_1,r_2>0$, $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{R}^m$ に対し, $r\leqq r_1,r_2$ ならば

$$B\big(\boldsymbol{p}\,;\tfrac{r}{\sqrt{2}}\big)\times B\big(\boldsymbol{q}\,;\tfrac{r}{\sqrt{2}}\big)\subset B(\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\\boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right);r)\subset B(\boldsymbol{p}\,;r_1)\times B(\boldsymbol{q}\,;r_2)$$

が成り立つ. 従って $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\\boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right)$ が $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の部分集合 X の内点ならば $B(\boldsymbol{p}\,;r)\times B(\boldsymbol{q}\,;r)\subset X$ を満たす $r>0$ がある.

証明 $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)\in B\big(\boldsymbol{p}\,;\tfrac{r}{\sqrt{2}}\big)\times B\big(\boldsymbol{q}\,;\tfrac{r}{\sqrt{2}}\big)$ ならば $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2+\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{q}\|^2<\left(\dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)^2=r^2$ だから $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)\in B(\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\\boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right);r)$.

$\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)\in B(\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\\boldsymbol{q}\end{smallmatrix}\right);r)$ ならば $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2\leqq\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2+\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{q}\|^2<r^2\leqq r_1^2$, $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{q}\|^2\leqq\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2+\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{q}\|^2<r^2\leqq r_2^2$ だから $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{smallmatrix}\right)\in B(\boldsymbol{p}\,;r_1)\times B(\boldsymbol{q}\,;r_2)$. □

命題 6.9 X, Y がそれぞれ $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ の開集合ならば $X\times Y$ は $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の開集合である.

証明 任意の $\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}} \in X \times Y$ に対し, $B(\boldsymbol{p}\,;r_1) \subset X$, $B(\boldsymbol{q}\,;r_2) \subset Y$ を満たす $r_1, r_2 > 0$ が存在する. r を r_1, r_2 の小さい方とすれば, 補題 6.8 から, $B(\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}\,;r) \subset B(\boldsymbol{p}\,;r_1) \times B(\boldsymbol{q}\,;r_2) \subset X \times Y$ となるため $\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}$ は $X \times Y$ の内点である.□

X, Y をそれぞれ $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ の開集合とし, Z を $\boldsymbol{R}^k$ の部分集合とする. C^r 級写像 $F : X \times Y \to Z$ と $\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \in X \times Y$ に対し $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}$ $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ を (i, j) 成分とする $k \times n$ 行列を $D_1F\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}$, $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_{n+j}}\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ を (i, j) 成分とする $k \times m$ 行列を $D_2F\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}$ で表すことにする.

補題 6.10 X, Y をそれぞれ $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ の開集合, Z を $\boldsymbol{R}^k$ の部分集合とする. C^1 級写像 $F : X \times Y \to Z$ と $f : X \to Y$ に対し, 写像 $\psi : X \to Z$ を $\psi(\boldsymbol{x}) = F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}$ で定めると, ψ の $\boldsymbol{x} \in X$ における微分 $\psi'(\boldsymbol{x})$ は以下で与えられる.

$$\psi'(\boldsymbol{x}) = D_1F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})} + D_2F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})} f'(\boldsymbol{x})$$

証明 ψ は $g(\boldsymbol{x}) = \binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}$ によって定められる写像 $g : X \to X \times Y$ と $F : X \times Y \to Z$ の合成写像である.

$$F'\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} D_1F\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} & D_2F\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \end{pmatrix}, \qquad g'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} E_n \\ f'(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

となるため, 定理 2.19 から $\psi'(\boldsymbol{x}) = F'(g(\boldsymbol{x}))g'(\boldsymbol{x}) = F'\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})} g'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} D_1F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})} & D_2F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n \\ f'(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = D_1F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})} + D_2F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})} f'(\boldsymbol{x})$. □

定理 6.11 (陰関数定理) X, Y をそれぞれ $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ の開集合とし, $F : X \times Y \to \boldsymbol{R}^m$ を C^r 級写像とする. $\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}} \in X \times Y$ は $F\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}$ を満たし, $D_2F\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}$ が正則ならば, $\boldsymbol{p}$ を含み, X に含まれる $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U, $\boldsymbol{q}$ を含み, Y に含まれる $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 V と C^r 級写像 $f : U \to V$ で, $f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{q}$ かつ, すべての $\boldsymbol{x} \in U$ に対して $D_2F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}$ は正則であり, $F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})} = \boldsymbol{0}$ を満たすものがある. さらに $\boldsymbol{x} \in U$ に対し $f'(\boldsymbol{x}) = -D_2F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}^{-1} D_1F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}$ が成り立つ.

証明 $G : X \times Y \to \boldsymbol{R}^{n+m}$ を

$$G\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ F\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \end{pmatrix}$$

で定めれば, これは C^r 級写像であり, $D_2F\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}$ は正則だから,

$$G'\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} E_n & O \\ D_1F\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}} & D_2F\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}} \end{pmatrix}$$

は正則行列である. 従って定理 6.7 から $\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}$ を含む開集合 W と $\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{0}}$ を含む開集合 Z で, G が W から Z の上への 1 対 1 写像であり, 逆写像 $G^{-1} : Z \to W$ が C^r 級写像になるものが存在する.

補題 6.8 から $B(\boldsymbol{p}\,;r_1) \times B(\boldsymbol{q}\,;r_1) \subset W$ を満たす $r_1 > 0$ がある. 命題 6.9 から $B(\boldsymbol{p}\,;r_1) \times B(\boldsymbol{q}\,;r_1)$ は $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の開集合だから $(G^{-1})^{-1}(B(\boldsymbol{p}\,;r_1) \times B(\boldsymbol{q}\,;r_1))$ は G^{-1} の連続性と命題 6.2 から $\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{0}}$ を含む $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の開集合である. 再び補題 6.8 から $B(\boldsymbol{p}\,;r_2) \times B(\boldsymbol{0}\,;r_2) \subset (G^{-1})^{-1}(B(\boldsymbol{p}\,;r_1) \times B(\boldsymbol{q}\,;r_1))$ を満たす $0 < r_2 \leqq r_1$ をとれば $B(\boldsymbol{p}\,;r_2) \times B(\boldsymbol{0}\,;r_2)$ は命題 6.9 により $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の開集合である. $W' = G^{-1}(B(\boldsymbol{p}\,;r_2) \times B(\boldsymbol{0}\,;r_2))$ とおくと G の連続性と命題 6.2 から W' も $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の開集合である. $\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \in W'$ ならば $G\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \in B(\boldsymbol{p}\,;r_2) \times B(\boldsymbol{0}\,;r_2) \subset (G^{-1})^{-1}(B(\boldsymbol{p}\,;r_1) \times B(\boldsymbol{0}\,;r_1))$ だから $\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} = G^{-1}\left(G\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right) \in B(\boldsymbol{p}\,;r_1) \times B(\boldsymbol{q}\,;r_1)$ となるため, $W' \subset B(\boldsymbol{p}\,;r_1) \times B(\boldsymbol{q}\,;r_1)$ が成り立つ.

各 $\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \in B(\boldsymbol{p}\,;r_2) \times B(\boldsymbol{0}\,;r_2)$ に対し, $G^{-1}\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} g_1\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \\ g_2\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \end{pmatrix}$ とおくと, $G\left(G^{-1}\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right) = \binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}$ だから $g_1\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x}$, $F\begin{pmatrix} g_1\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \\ g_2\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}$ である. $\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \in B(\boldsymbol{p}\,;r_2) \times B(\boldsymbol{0}\,;r_2)$ ならば $G^{-1}\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \in B(\boldsymbol{p}\,;r_1) \times B(\boldsymbol{q}\,;r_1)$ より $g_2\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \in B(\boldsymbol{q}\,;r_1)$ である. そこで, $U = B(\boldsymbol{p}\,;r_2)$, $V = B(\boldsymbol{q}\,;r_1)$ とおいて, $f : U \to V$ を $f(\boldsymbol{x}) = g_2\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{0}}$ で定めると, 上のことから

$F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}=\boldsymbol{0}$ が成り立ち, G^{-1} が C^r 級写像であることから f も C^r 級写像である. また, $G\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}=\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{0}}$ だから $G^{-1}\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{0}}=\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}$ である. 従って $f(\boldsymbol{p})=g_2\binom{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{0}}=\boldsymbol{q}$ である.

写像 $\mu : B(\boldsymbol{p}\,; r_2)\to M_m(\boldsymbol{R})$ を $\mu(\boldsymbol{x})=D_2F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}$ で定めると, μ は連続で, $\mu(\boldsymbol{p})$ は正則だから補題 6.4 により, $0<r_3\leqq r_2$ で, $\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{p}\,;r_3)$ ならば $D_2F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}$ は正則行列になるものが取れる. 従って r_2 を r_3 で置き換えて, U の各点で $D_2F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}$ は正則行列であるとしてよい.

写像 F, f に対して写像 $\psi : U\to\boldsymbol{R}^m$ を補題 6.10 のように定めれば, $\psi'(\boldsymbol{x})=D_1F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}+D_2F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}f'(\boldsymbol{x})$ であるが, ψ は恒等的に $\boldsymbol{0}$ である写像だから, 任意の $\boldsymbol{x}\in U$ に対して $\psi'(\boldsymbol{x})=O$ である. 故に $D_2F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}f'(\boldsymbol{x})=-D_1F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}$ が得られ, $\boldsymbol{x}\in U$ に対し $D_2F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}$ は正則行列であったので, $f'(\boldsymbol{x})=-D_2F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}^{-1}D_1F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}$ が成り立つ. □

注意 6.12 定理 6.11 の条件の下で, U', V' を, それぞれ $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ を含む $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ の開集合とし, $g : U'\to V'$ を C^r 級写像 で, $g(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{q}$ かつ, すべての $\boldsymbol{x}\in U'$ に対して $F\binom{\boldsymbol{x}}{g(\boldsymbol{x})}=\boldsymbol{0}$ を満たすものとする. 定理 6.11 の証明における写像 $G : X\times Y\to\boldsymbol{R}^{n+m}$ を考えると, $\boldsymbol{x}\in U\cap U'$ ならば $\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{0}}\in U\times\{\boldsymbol{0}\}\subset B(\boldsymbol{p}\,;r_2)\times B(\boldsymbol{0}\,;r_2)\subset W$ だから $G\binom{\boldsymbol{x}}{g(\boldsymbol{x})}=\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{0}}=G\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}$ の各辺を G^{-1} で写すことによって, $\binom{\boldsymbol{x}}{g(\boldsymbol{x})}=G^{-1}\binom{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{0}}=\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}$ を得る. 従って, $\boldsymbol{x}\in U\cap U'$ ならば $g(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})$ となるため, 定理 6.11 の条件を満たす写像が *2* つあれば, それらの定義域の共通部分に属する各ベクトルを同じベクトルに写す.

定理 6.11 において, とくに $m=1$ で Y が $\boldsymbol{R}$ の開集合の場合を考える.

定理 6.13 X, Y をそれぞれ $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}$ の開集合とし, $F : X\times Y\to\boldsymbol{R}$ を C^r 級関数とする. $\binom{\boldsymbol{p}}{q}\in X\times Y$ は $F\binom{\boldsymbol{p}}{q}=0$ を満たし, $\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\binom{\boldsymbol{p}}{q}\neq 0$ ならば, $\boldsymbol{p}$ を含む $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U と C^r 級関数 $f : U\to Y$ で, $f(\boldsymbol{p})=q$ かつ, すべての $\boldsymbol{x}\in U$ に対して $\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}\neq 0$ であり, $F\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}=0$ を満たすものがある. さらに $\boldsymbol{x}\in U$ と $j=1,2,\dots,n$ に対し $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_j}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}}$ が成り立ち, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x})$ は次で与えられる.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}\right)^{-3}\Bigg(&\frac{\partial F}{\partial x_i}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}\frac{\partial^2 F}{\partial x_j\partial x_{n+1}}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}+\frac{\partial F}{\partial x_j}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_{n+1}}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}\\&-\frac{\partial F}{\partial x_i}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}\frac{\partial F}{\partial x_j}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}\frac{\partial^2 F}{\partial x_{n+1}^2}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}-\left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}\Bigg)\end{aligned}$$

証明 最後の主張以外は, 定理 6.13 で $m=1$ とした場合である.

U を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合, V を $\boldsymbol{R}^m$ の開集合とし, C^r 級写像 $G : U\times V\to\boldsymbol{R}^m$ と $g : U\to V$ に対し, 写像 $\psi : U\to\boldsymbol{R}^m$ を $\psi(\boldsymbol{x})=G\binom{\boldsymbol{x}}{g(\boldsymbol{x})}$ で定めたとき, 補題 6.10 より $\psi'(\boldsymbol{x})=D_1G\binom{\boldsymbol{x}}{g(\boldsymbol{x})}+D_2G\binom{\boldsymbol{x}}{g(\boldsymbol{x})}g'(\boldsymbol{x})$ が成り立つ. とくに $m=1$ の場合は, 両辺の $(1,i)$ 成分を比較すれば次の等式が得られる.

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial G}{\partial x_i}\binom{\boldsymbol{x}}{g(\boldsymbol{x})}+\frac{\partial G}{\partial x_{n+1}}\binom{\boldsymbol{x}}{g(\boldsymbol{x})}\frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$$

従って $\psi_j : U\to\boldsymbol{R}$ $(j=1,2,\dots,n+1)$ を $\psi_j(\boldsymbol{x})=\dfrac{\partial F}{\partial x_j}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}$ で定めれば,

$$\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}+\frac{\partial^2 F}{\partial x_j\partial x_{n+1}}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$$

が得られるため, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_j}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}}=-\dfrac{\psi_j(\boldsymbol{x})}{\psi_{n+1}(\boldsymbol{x})}$ の両辺を x_i で偏微分すれば,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x})&=-\frac{\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\psi_{n+1}(\boldsymbol{x})-\psi_j(\boldsymbol{x})\frac{\partial\psi_{n+1}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})}{(\psi_{n+1}(\boldsymbol{x}))^2}\\&=\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_{n+1}}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}+\frac{\partial^2 F}{\partial x_{n+1}^2}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\right)-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}+\frac{\partial^2 F}{\partial x_j\partial x_{n+1}}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\right)\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\binom{\boldsymbol{x}}{f(\boldsymbol{x})}\right)^2}\end{aligned}$$

が得られる．さらに，$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)}$ だから，これを上式に代入して，分母と分子に $\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\boldsymbol{x})\end{smallmatrix}\right)$ をかければ，最後の主張が正しいことがわかる． □

注意 6.14 定理 6.13 の仮定のもとで，$\boldsymbol{p} \in U$ と $j = 1, 2, \ldots, n$ に対し $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}) = 0$ が成り立つとき，$\dfrac{\partial F}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ f(\boldsymbol{p})\end{smallmatrix}\right) = -\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ f(\boldsymbol{p})\end{smallmatrix}\right)\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}) = 0$ だから，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{p}) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ q\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ q\end{smallmatrix}\right)}$ が成り立つ．従って，$F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{x}\\ x_{n+1}\end{smallmatrix}\right) = 0$ によって定まる陰関数の極値を求めるには，まず $F\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ q\end{smallmatrix}\right) = \dfrac{\partial F}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ q\end{smallmatrix}\right) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ を満たす $\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ q\end{smallmatrix}\right) \in X \times Y$ を求める．次に，それらのうちで $\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ q\end{smallmatrix}\right) \neq 0$ を満たすものについて，$-\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ q\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ q\end{smallmatrix}\right)}$ を (i, j) 成分とする n 次正方行列 $f''(\boldsymbol{p})$ を考えて，命題 5.4 を用いれば $\boldsymbol{p}$ において f が極値をとるかどうかを判定できる (かもしれない)．