微積分学 II 演習問題

目 次

微積分学 II 演習問題　第 1 回　2 変数関数の極限と連続性

1. 次の極限が存在する場合はその値を求め, 存在しない場合はその理由を答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{2}{1}} \frac{\cos(\pi xy)}{1+2xy}$　(2) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{e^y\sin(xy)}{xy}$　(3) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^3-3xy}{x^2+y^2}$　(5) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{2x^3-y^3}{4x^2+y^2}$　(6) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

(7) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{\sqrt{x^4+2y^4}}{x^2+y^2}$　(8) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^3+y^4}{x^2+4y^2}$　(9) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2}$

(10) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy}{x^4+y^2}$　(11) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy^3}{x^2+y^4}$　(12) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(13) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$　(14) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$　(15) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$

(16) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$　(17) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(18) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} (x^2+y^2)\log(x^2+y^2)$

2. 前問の問 (n) $(n=3,4,\dots,18)$ で極限を考えた, $\boldsymbol{R}^2$ から原点を除いた集合で定義される関数を f_n とする. (例えば, f_3 は $f_3\binom{x}{y} = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ で与えられる関数.) 関数 $\bar{f}_n : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を

$$\bar{f}_n\binom{x}{y} = \begin{cases} f_n\binom{x}{y} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$$

で定めるとき, 各 $n=3,4,\dots,18$ について, $\bar{f}_n$ の原点における連続性について調べよ.

3. (発展問題) (1) $\boldsymbol{R}^2$ で定義される関数 $\bar{f}_2$ を

$$\bar{f}_2\binom{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{e^y\sin(xy)}{xy} & xy \neq 0 \\ e^y & xy = 0 \end{cases}$$

で定義するとき, 集合 $\left\{\binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, xy=0\right\}$ の各点における $\bar{f}_2$ の連続性について調べよ.

(2) $\boldsymbol{R}^2$ で定義される関数 $\bar{f}_1$ を

$$\bar{f}_1\binom{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{\cos(\pi xy)}{1+2xy} & xy \neq -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} & xy = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

で定義するとき, 集合 $\left\{\binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, xy=-\frac{1}{2}\right\}$ の各点における $\bar{f}_1$ の連続性について調べよ.

第 1 回の演習問題の解答

1. (1) $f:\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\, xy\neq-\frac{1}{2}\right\}\to\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$, $g:\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\infty\right)\to\boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y}=xy$, $g(t)=\dfrac{\cos(\pi t)}{1+2t}$ で定めれば, f, g はともに連続関数 だから, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{2}{1}}\frac{\cos(\pi xy)}{1+2xy}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{2}{1}}g\left(f\binom{x}{y}\right)=g\left(\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{2}{1}}f\binom{x}{y}\right)=g\left(f\binom{2}{1}\right)=g(2)=\frac{1}{5}$.

(2) $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$, $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y}=xy$, $g(t)=\begin{cases}\frac{\sin t}{t} & t\neq 0\\ 1 & t=0\end{cases}$ で定めれば, 明らかに f は連続関数であり, $\displaystyle\lim_{t\to 0}g(t)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1=g(0)$ より, g は 0 で連続である. 従って $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{\sin(xy)}{xy}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}g\left(f\binom{x}{y}\right)=g\left(\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}f\binom{x}{y}\right)=g(0)=1$ となるため, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{e^y\sin(xy)}{xy}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}e^y\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{\sin(xy)}{xy}=1$.

(3) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ が存在すると仮定して, この値を c とおき, 関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y}=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}\\ c & \binom{x}{y}=\binom{0}{0}\end{cases}$ で定めると, f は $\binom{0}{0}$ で連続である. 従って, $\displaystyle\lim_{t\to 0}g(t)=\binom{0}{0}$ を満たす任意の写像 $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ に対して, $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(g(t))=f\binom{0}{0}=c$ となるはずである. ところが, 実数 k に対し, g を $g(t)=(t,kt)$ で定めれば, $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(g(t))=\lim_{t\to 0}\frac{t^2-k^2t^2}{t^2+k^2t^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}$ となり, $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(g(t))$ が $\displaystyle\lim_{t\to 0}g(t)=\binom{0}{0}$ を満たす写像 g に依存しない値 c であることと矛盾する. 故に, 極限値 $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ は存在しない.

(4) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{x^3-3xy}{x^2+y^2}$ が存在すると仮定して, この値を c とおき, 関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y}=\begin{cases}\frac{x^3-3xy}{x^2+y^2} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}\\ c & \binom{x}{y}=\binom{0}{0}\end{cases}$ で定めると, f は $\binom{0}{0}$ で連続である. 従って, $\displaystyle\lim_{t\to 0}g(t)=\binom{0}{0}$ を満たす任意の写像 $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ に対して, $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(g(t))=f\binom{0}{0}=c$ となるはずである. ところが, 実数 k に対し, g を $g(t)=(t,kt)$ で定めれば, $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(g(t))=\lim_{t\to 0}\frac{t^3-3kt^2}{t^2+k^2t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{t-3k}{1+k^2}=\frac{-3k}{1+k^2}$ となり, $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(g(t))$ が $\displaystyle\lim_{t\to 0}g(t)=\binom{0}{0}$ を満たす写像 g に依存しない値 c であることと矛盾する. 故に, 極限値 $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{x^3-xy}{x^2+y^2}$ は存在しない.

(5) $x^2\leqq 4x^2+y^2$, $y^2\leqq 4x^2+y^2$ より, $|2x^3|\leqq 2|x|(4x^2+y^2)$, $|y^3|\leqq|y|(4x^2+y^2)$ である. よって $|2x^3-y^3|\leqq|2x^3|+|y^3|\leqq(2|x|+|y|)(4x^2+y^2)$ となるため, $\binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}$ ならば $\left|\dfrac{2x^3-y^3}{4x^2+y^2}\right|\leqq 2|x|+|y|$ が成り立つ. ここで, $\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}$ のとき, $2|x|+|y|\to 0$ だから, 上の不等式から, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{2x^3-y^3}{4x^2+y^2}=0$ である.

(6) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ が存在すると仮定して, この値を c とおき, 関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y}=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}\\ c & \binom{x}{y}=\binom{0}{0}\end{cases}$ で定めると, f は $\binom{0}{0}$ で連続である. 従って, $\displaystyle\lim_{t\to 0}g(t)=\binom{0}{0}$ を満たす任意の写像 $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ に対して $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(g(t))=f\binom{0}{0}=c$ となるはずである. ところが, 実数 k に対し, g を $g(t)=(kt^2,t)$ で定めれば, $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(g(t))=\lim_{t\to 0}\frac{kt^4}{k^2t^4+t^4}=\frac{k}{k^2+1}$ となり, $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(g(t))$ が $\displaystyle\lim_{t\to 0}g(t)=\binom{0}{0}$ を満たす写像 g に依存しない値 c であることと矛盾する. 故に, 極限値 $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ は存在しない.

(7) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{\sqrt{x^4+2y^4}}{x^2+y^2}$ が存在すると仮定して, この値を c とおき, 関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y}=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^4+2y^4}}{x^2+y^2} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}\\ c & \binom{x}{y}=\binom{0}{0}\end{cases}$ で定めると, f は $\binom{0}{0}$ で連続である. 従って, $\displaystyle\lim_{t\to 0}g(t)=\binom{0}{0}$ を満たす任意の写像 $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ に対して, $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(g(t))=f\binom{0}{0}=c$ となるはずである. ところが, 実数 k に対し, g を $g(t)=(t,kt)$ で定めれば, $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(g(t))=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^4+2k^4t^4}}{t^2+k^2t^2}=\frac{\sqrt{1+2k^4}}{1+k^2}$ となり, $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(g(t))$ が $\displaystyle\lim_{t\to 0}g(t)=\binom{0}{0}$ を満たす写像 g に依存しない値 c であることと矛盾する. 故に, 極限値 $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{\sqrt{x^4+2y^4}}{x^2+y^2}$ は存在しない.

(8) $x^2\leqq x^2+4y^2$, $y^2\leqq x^2+4y^2$ より, $|x^3|\leqq|x|(x^2+4y^2)$, $|y^4|\leqq y^2(x^2+4y^2)$ である. よって $|x^3+y^4|\leqq|x^3|+|y^4|\leqq(|x|+y^2)(x^2+4y^2)$ となるため, $\binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}$ ならば $\left|\dfrac{x^3+y^4}{x^2+4y^2}\right|\leqq|x|+y^2$ が成り立つ. ここで, $\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}$ のとき, $|x|+y^2\to 0$ だから, 上の不等式から, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{x^3+y^4}{x^2+4y^2}=0$ である.

(9) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2}$ が存在すると仮定して, この値を c とおき, 関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y}=\begin{cases}\frac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}\\ c & \binom{x}{y}=\binom{0}{0}\end{cases}$ で定めると, g は $\binom{0}{0}$ で連続である. 従って, $\displaystyle\lim_{t\to 0}g(t)=\binom{0}{0}$ を満たす任意の写像 $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ に対して, $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(g(t))=f\binom{0}{0}=c$ となるはずである. ところが, 実数 k に対し, g を $g(t)=(t,kt)$ で定めれば, $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(g(t))=\lim_{t\to 0}\frac{t^2-2k^2t^2}{3t^2+k^2t^2}=\frac{1-2k^2}{3+k^2}$ となり, $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(g(t))$ が $\displaystyle\lim_{t\to 0}g(t)=\binom{0}{0}$ を満たす写像 g に依存しない値 c であることと矛盾する. 故に, 極限値 $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2}$ は存在しない.

(10) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{xy}{x^4+y^2}$ が存在すると仮定して, この値を c とおき, 関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y}=\begin{cases}\frac{xy}{x^4+y^2} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}\\ c & \binom{x}{y}=\binom{0}{0}\end{cases}$ で定めると, f は $\binom{0}{0}$ で連続である. 従って, $\displaystyle\lim_{t\to 0}g(t)=\binom{0}{0}$ を満たす任意の写像 $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ に対して, $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(g(t))=f\binom{0}{0}=c$ となるはずである. ところが, 実数 k に対し, g を $g(t)=(t,kt^3)$ で定めれば, $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(g(t))=\lim_{t\to 0}\frac{kt^4}{t^4+k^2t^6}=\lim_{t\to 0}\frac{k}{1+k^2t^2}=k$ となり, $\displaystyle\lim_{t\to 0}f(g(t))$ が $\displaystyle\lim_{t\to 0}g(t)=\binom{0}{0}$ を満たす写像 g に依存しない値 c であることと矛盾する. 故に, 極限値 $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{xy}{x^4+y^2}$ は存在しない.

(11) (相加平均) $\geqq$ (相乗平均) より $\dfrac{x^2+y^4}{2}\geqq\sqrt{x^2y^4}=|x|y^2$. よって $\binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}$ ならば $\dfrac{|x|y^2}{x^2+y^4}\leqq\dfrac{1}{2}$ となるため, $\left|\dfrac{2xy^3}{x^2+y^4}\right|\leqq\dfrac{|y|}{2}$ が成り立つ. ここで, $\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}$ のとき, $|y|\to 0$ だから, 上の不等式から, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{xy^3}{x^2+y^4}=0$ である.

(12) $\left|\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqq 1$ だから $\left|xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqq|xy|$ である. ここで, $\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}$ のとき, $|xy|\to 0$ だから, 上の不等式から, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ である.

(13) $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$, $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y}=x^2+y^2$, $g(t)=\begin{cases}\frac{e^t-1}{t} & t\neq 0\\ 1 & t=0\end{cases}$ で定めれば, 明らかに f は連続関数であり, $\displaystyle\lim_{t\to 0}g(t)=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1=g(0)$ より, g は 0 で連続である. 従って $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}g(f\binom{x}{y}))=$

$g\left(\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right) = g(0) = 1$ である.

(14) $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$ が存在すると仮定して, この値を c とおき, 関数 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ c & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$ で定めると, f は $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で連続である. 従って, $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(t) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ を満たす任意の写像 $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ に対して, $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(g(t)) = f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) = c$ となるはずである. ところが, 0 でない実数 k に対し, g を $g(t) = (t, kt)$ で定めれば, $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(g(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(kt^2)}{t^2+k^2t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(kt^2)}{kt^2}\frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}$ となり, $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(g(t))$ が $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(t) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ を満たす写像 g に依存しない値 c であることと矛盾する. 故に, 極限値 $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$ は存在しない.

(15) $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \sqrt{x^2+y^2}$, $g(t) = \begin{cases} \frac{1-\cos t}{t^2} & t \neq 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \end{cases}$ で定めれば, 明らかに f は連続関数であり, 教科書の例題 2.7 の (2) により, $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2} = g(0)$ より, g は 0 で連続である. 従って $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} g\left(f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right) = g\left(\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right) = g(0) = \frac{1}{2}$ である.

(16) (相加平均) $\geqq$ (相乗平均) より $\dfrac{x^2+y^4}{2} \geqq \sqrt{x^2y^4} = |x|y^2$. よって $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ ならば $\dfrac{|x|y^2}{x^2+y^4} \leqq \dfrac{1}{2}$ となるため, $0 \leqq \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} \leqq \dfrac{|x|}{2}$ が成り立つ. ここで, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ のとき, $|x| \to 0$ だから, 上の不等式から, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} = 0$ である.

(17) $x^2 \leqq x^2+y^2$, $y^2 \leqq x^2+y^2$ より, 両辺の平方根をとれば $|x| \leqq \sqrt{x^2+y^2}$, $|y| \leqq \sqrt{x^2+y^2}$ である. これらの両辺はともに 0 以上だから辺々かけあわせて $|xy| \leqq x^2+y^2$ が得られる. さらにこの両辺を $\sqrt{x^2+y^2}$ で割れば, $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqq \sqrt{x^2+y^2}$ を得る. ここで, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ のとき, $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$ だから, 上の不等式から, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ である.

(18) $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = x^2+y^2$, $g(t) = \begin{cases} t\log|t| & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$ で定めれば, 明らかに f 連続関数であり, 教科書の問 2.11 より $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} t\log|t| = 0 = g(0)$ だから, g は 0 で連続である. 従って $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} (x^2+y^2)\log(x^2+y^2) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} g\left(f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right) = g\left(\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right) = g(0) = 0$ である.

2. (3) 前問の (3) より, 極限値 $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \bar{f}_3\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} f_3\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ は存在しないため, $\bar{f}_3$ は原点で連続ではない.

(4) 前問の (4) より, 極限値 $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \bar{f}_4\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} f_4\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \frac{x^3-xy}{x^2+y^2}$ は存在しないため, $\bar{f}_4$ は原点で連続ではない.

(5) 前問の (5) より, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \bar{f}_5\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} f_5\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \frac{2x^3-y^3}{4x^2+y^2} = 0 = \bar{f}_5\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ となるため, $\bar{f}_5$ は原点で連続である.

(6) 前問の (6) より, 極限値 $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \bar{f}_6\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} f_6\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ は存在しないため, $\bar{f}_6$ は原点で連続ではない.

(7) 前問の (7) より, 極限値 $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \bar{f}_7\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f_7\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{\sqrt{x^4+2y^4}}{x^2+y^2}$ は存在しないため, $\bar{f}_7$ は原点で連続ではない.

(8) 前問の (8) より, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \bar{f}_8\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f_8\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^3+y^4}{x^2+4y^2} = 0 = \bar{f}_8\binom{0}{0}$ となるため, $\bar{f}_8$ は原点で連続である.

(9) 前問の (9) より, 極限値 $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \bar{f}_9\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f_9\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2}$ は存在しないため, $\bar{f}_9$ は原点で連続ではない.

(10) 前問の (10) より, 極限値 $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \bar{f}_{10}\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f_{10}\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy}{x^4+y^2}$ は存在しないため, $\bar{f}_{10}$ は原点で連続ではない.

(11) 前問の (11) より, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \bar{f}_{11}\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f_{11}\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy^3}{x^2+y^4} = 0 = \bar{f}_{11}\binom{0}{0}$ となるため, $\bar{f}_{11}$ は原点で連続である.

(12) 前問の (12) より, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \bar{f}_{12}\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f_{12}\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = \bar{f}_{12}\binom{0}{0}$ となるため, $\bar{f}_{12}$ は原点で連続である.

(13) 前問の (13) より, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \bar{f}_{13}\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f_{13}\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} = 1 \neq 0 = \bar{f}_{13}\binom{0}{0}$ となるため, $\bar{f}_{13}$ は原点で連続ではない.

(14) 前問の (14) より, 極限値 $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \bar{f}_{14}\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f_{14}\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$ は存在しないため, $\bar{f}_{14}$ は原点で連続ではない.

(15) 前問の (15) より, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \bar{f}_{15}\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f_{15}\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = \bar{f}_{15}\binom{0}{0}$ となるため, $\bar{f}_{15}$ は原点で連続ではない.

(16) 前問の (16) より, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \bar{f}_{16}\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f_{16}\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} = 0 = \bar{f}_{16}\binom{0}{0}$ となるため, $\bar{f}_{16}$ は原点で連続である.

(17) 前問の (17) より, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \bar{f}_{17}\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f_{17}\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = \bar{f}_{17}\binom{0}{0}$ となるため, $\bar{f}_{17}$ は原点で連続である.

(18) 前問の (18) より, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \bar{f}_{18}\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f_{18}\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} (x^2+y^2)\log(x^2+y^2) = 0 = \bar{f}_{18}\binom{0}{0}$ となるため, $\bar{f}_{18}$ は原点で連続である.

3. (1) 関数 f, g を 1 の (2) のように定めれば, これらは連続関数だから, 合成関数 $g\circ f$ も連続関数である. また, 関数 $p : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ をそれぞれ $p\binom{x}{y} = y$, $h(t) = e^t$ で定めれば, p, h はともに連続関数であるため, 合成関数 $h\circ p$ も連続関数である. さらに, 任意の $\binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して $\bar{f}_2\binom{x}{y} = (h\circ p)\binom{x}{y}(g\circ f)\binom{x}{y}$ が成り立ち, $\bar{f}_2$ は連続関数の $h\circ p$ と $g\circ f$ の積であるため, $\bar{f}_2$ は連続関数ある. 従って $\bar{f}_2$ は $\left\{\binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, xy = 0\right\}$ の各点で連続である.

(2) $s = 1+2t$ とおくと, $t = \dfrac{s-1}{2}$ であり, $t \to -\dfrac{1}{2}$ のとき $s \to 0$ だから $\displaystyle\lim_{t\to-\frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi t)}{1+2t} = \lim_{s\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi(s-1)}{2}\right)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{\pi}{2}\frac{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{\frac{\pi s}{2}} = \frac{\pi}{2}$ が成り立つ. 従って $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $g(t) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi t)}{1+2t} & t \neq -\frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{2} & t = -\frac{1}{2} \end{cases}$ で定めれば, g は連続関数である. さらに $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y} = xy$ で定めれば, f は連続関数であり, $\bar{f}_1 = g\circ f$ が成り立つ. 従って $\bar{f}_1$ は連続関数の合成だから連続関数になるため, $\left\{\binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, xy = -\frac{1}{2}\right\}$ の各点で連続である.

微積分学 II 演習問題　第 2 回　偏微分と微分可能性

1. 次で定められる関数 f の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(1) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \sin(xy)\cos y$　(2) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \log(x^3y^4)$　(3) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \sin^{-1}(x+y)$

(4) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = xy(ax^2+by^2-1)$　(5) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = (3x^2+y^2)e^{-(x^2+2y^2)}$　(6) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \tan^{-1}(xy^2)$

(7) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$　(8) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = e^{x-2y}\cos(x^2+4xy)$　(9) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \log(x^2-2xy+3y^2)$

2. 下の式で定義される $\left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x>0, x+y>0\right\}$ 上の関数 f に対し $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ y \end{smallmatrix}\right)$ を求めよ.

$$f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^{x^{x^{x^y}}} + (\log x)\tan^{-1}(\tan^{-1}(\tan^{-1}(\sin(\cos(xy)) - \log(x+y))))$$

3. $\boldsymbol{v} = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ を零でない $\boldsymbol{R}^2$ のベクトルとする. 以下の各問で与えられる関数 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分を求めよ. また, 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求め, それらが原点でも定義されている場合は, 原点における連続性を調べよ. さらに, f の原点での微分可能性を調べて, f が原点で微分可能ならば, 原点における微分 $f'\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ を求めよ.

(1) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^4+y^2} & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \end{cases}$　(2) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^4+2y^4}}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \end{cases}$

(3) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{2x^3-y^3}{4x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \end{cases}$　(4) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \end{cases}$

(5) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \end{cases}$　(6) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ 1 & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \end{cases}$

(7) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \end{cases}$　(8) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2$

第 2 回の演習問題の解答

1. (1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy)\cos y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy)\cos y - \sin(xy)\sin y$.

(2) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \log(x^3y^4) = 3\log x + 4\log|y|$ に注意すれば $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{3}{x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{4}{y}$.

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}$.

(4) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y(3ax^2+by^2-1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x(ax^2+3by^2-1)$.

(5) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x(3-3x^2-y^2)e^{-(x^2+2y^2)}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y(1-6x^2-2y^2)e^{-(x^2+2y^2)}$.

(6) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^2}{1+x^2y^4}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2xy}{1+x^2y^4}$.

(7) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

(8) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{x-2y}(\cos(x^2+4xy)-(2x+4y)\sin(x^2+4xy))$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2e^{x-2y}(\cos(x^2+4xy)+2x\sin(x^2+4xy))$.

(9) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x-2y}{x^2-2xy+3y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-2x+6y}{x^2-2xy+3y^2}$.

2. 任意の $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ y \end{smallmatrix}\right) \in X$ に対して $f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ y \end{smallmatrix}\right) = 1$ だから $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ y \end{smallmatrix}\right) = \displaystyle\lim_{t\to 0}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ y+t \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ y \end{smallmatrix}\right)}{t} = 0$.

3. (1) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix} at \\ bt \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}{t} = \lim_{t\to 0}\dfrac{ab}{t(a^4t^2+b^2)}$ だから, a と b が両方とも 0 でなければ f は原点において $\boldsymbol{v}$ 方向に方向微分不可能であり, a または b が 0 ならば f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 である.

$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \dfrac{-3x^4y+y^3}{(x^4+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \dfrac{x^5-xy^2}{(x^4+y^2)^2}$ であり, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ の場合は, 上で $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 0$ である. また, $\displaystyle\lim_{t\to+0}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ t \end{smallmatrix}\right) = \lim_{t\to+0}\dfrac{1}{t} = \infty \neq 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\displaystyle\lim_{t\to+0}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \lim_{t\to+0}\dfrac{1}{t^3} = \infty \neq 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ となるため, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに原点で連続ではない.

第 1 回の演習問題 2 の (10) により, f は原点で連続ではないため, f は原点で微分不可能である.

(2) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix} at \\ bt \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}{t} = \lim_{t\to 0}\dfrac{t\sqrt{a^4+2b^4}}{a^2+b^2} = 0$ だから, f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 である.

$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \dfrac{2x^3y^2-4xy^4}{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^4+2y^4}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \dfrac{4x^2y^3-2x^4y}{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^4+2y^4}}$ であり, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ の場合は, 上で $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 0$ である. また, $\displaystyle\lim_{t\to+0}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} t \\ t \end{smallmatrix}\right) = \lim_{t\to+0}\dfrac{-2}{2\sqrt{3}t} = -\infty \neq 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\displaystyle\lim_{t\to+0}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} t \\ t \end{smallmatrix}\right) = \lim_{x\to+0}\dfrac{2}{2\sqrt{3}t} = \infty \neq 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ となるため, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに原点で連続ではない.

第 1 回の演習問題 2 の (7) により, f は原点で連続ではないため, f は原点で微分不可能である.

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix} at \\ bt \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}{t} = \dfrac{2a^3-b^3}{4a^2+b^2}$ だから, f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は $\dfrac{2a^3-b^3}{4a^2+b^2}$ である.

$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \dfrac{8x^4+6x^2y^2+8xy^3}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \dfrac{-4x^3y-12x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}$ であり, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ の場合は, 上で $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = -1$ である. また, $\displaystyle\lim_{t\to 0}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ t \end{smallmatrix}\right) = 0 \neq \dfrac{1}{2} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\displaystyle\lim_{t\to 0}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 0 \neq -1 = \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ となるため, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに原点で連続ではない.

f が原点で微分可能ならば $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) - f'\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)}{\left\|\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right\|} = 0$ が成り立ち, 上の結果から $f'\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) - f'\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)}{\left\|\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right\|} = \lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}\dfrac{2x^3-y^3}{(4x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$

が成り立つ．従って，もし $f'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ が存在すれば，$\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{2x^3-y^3}{(4x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=0$ が成り立つため，関数 $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $g\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{cases}\frac{2x^3-y^3}{(4x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\end{cases}$ で定めると，g は原点で連続である．ところが，$h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ を $h(t)=\left(\begin{smallmatrix}t\\0\end{smallmatrix}\right)$ で定めれば，$\displaystyle\lim_{t\to+0}h(t)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ だから，g の原点における連続性から，$\displaystyle\lim_{t\to+0}g(h(t))=g\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=0$ である一方，$t>0$ ならば $g(h(t))=\dfrac{1}{2}$ だから $\displaystyle\lim_{t\to+0}g(h(t))=\frac{1}{2}$ となって矛盾が生じる．故に f は原点で微分不可能である．

(4) $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{f\left(\begin{smallmatrix}at\\bt\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=\lim_{t\to0}abt\sin\frac{1}{t^2(a^2+b^2)}$ であり，0 でない任意の実数 t に対して $\left|abt\sin\dfrac{1}{t^2(a^2+b^2)}\right|\leqq|abt|$ が成り立つため，$\displaystyle\lim_{t\to0}abt\sin\frac{1}{t^2(a^2+b^2)}=0$ だから，f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 である．

$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$ であり，$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ の場合は，上で $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=0$ である．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\\\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\end{pmatrix}=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ であるが，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\\\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\end{pmatrix}=\lim_{n\to\infty}(-\sqrt{\pi n})=-\infty\neq0=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\\\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\end{pmatrix}=\lim_{n\to\infty}(-\sqrt{\pi n})=-\infty\neq0=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ となるため，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに原点で連続ではない．

f が原点で微分可能ならば，上の結果から $f'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)=\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}$ が成り立つため，f が原点で微分可能であるためには $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)-(0\ \ 0)\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)}{\left\|\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\|}=0$ が成り立つことが必要十分である．ここで，$|x|=\sqrt{x^2}\leqq\sqrt{x^2+y^2}$ であることに注意すれば，$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ ならば $\left|\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)-(0\ \ 0)\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)}{\left\|\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\|}\right|=\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\leqq\dfrac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqq|y|$ であり，$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ のとき，$|y|\to0$ だから $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)-(0\ \ 0)\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)}{\left\|\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\|}=0$ が成り立つことがわかる．従って f は原点で微分可能であり，$f'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}$．

(5) $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{f\left(\begin{smallmatrix}at\\bt\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{a^2-2b^2}{t(3a^2+b^2)}$ だから，$a\neq\pm\sqrt{2}b$ ならば，原点において f は $\boldsymbol{v}$ 方向には方向微分不可能であり，$a=\pm\sqrt{2}b$ ならば，f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 である．

$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{14xy^2}{(3x^2+y^2)^2}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=-\dfrac{14x^2y}{(3x^2+y^2)^2}$ であり，原点において f は $\boldsymbol{e}_1$ 方向と $\boldsymbol{e}_1$ 方向には方向微分不可能だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ は存在しない．

第 1 回の演習問題 2 の (9) により，f は原点で連続ではないため，f は原点で微分不可能である．

(6) $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{f\left(\begin{smallmatrix}at\\bt\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{e^{t^2(a^2+b^2)}-1-t^2(a^2+b^2)}{t^3(a^2+b^2)}$ であり，$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ であることに注意すれば，上式の右辺は $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{2}t^4(a^2+b^2)^2+o(t^4(a^2+b^2)^2)}{t^3(a^2+b^2)}=0$ に等しいため，f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 である．

$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{2x\left(1+(x^2+y^2-1)e^{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^2}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{2y\left(1+(x^2+y^2-1)e^{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^2}$ であり，$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ の場合は，上で $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=0$ である．また，$\displaystyle\lim_{z\to0}\frac{1+(z-1)e^z}{z^2}=\lim_{z\to0}\frac{1+(z-1)\left(1+z+\frac{z^2}{2}+o(z^2)\right)}{z^2}=\lim_{z\to0}\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2}+(z-1)\frac{o(z^2)}{z^2}\right)=\frac{1}{2}$ だから $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$，$h:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$

を $g(z)=\begin{cases}\frac{1+(z-1)e^z}{z^2} & z\neq 0\\ \frac{1}{2} & z=0\end{cases}$, $h\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^2+y^2$ で定めれば, g は 0 で連続, h は $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で連続であるため,
$\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{\left(1+(x^2+y^2-1)e^{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}g\left(h\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right)=g(0)=\frac{1}{2}$ が成り立つ. よって, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=2xg\left(h\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=2yg\left(h\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right)$ が成り立つことに注意すれば, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ であることがわかる. 従って $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに原点で連続である.

f が原点で微分可能ならば, 上の結果から $f'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$ が成り立つため, f が原点で微分可能であるためには $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)-(0\ \ 0)\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)}{\left\|\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\|}=0$ が成り立つことが必要十分である. ここで,
$\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)-(0\ \ 0)\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)}{\left\|\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\|}=\dfrac{e^{x^2+y^2}-1-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ であり, $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1-z}{z^{\frac{3}{2}}}=\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{z}\left(\frac{z^2}{2}+o(z^2)\right)}{z^2}=\left(\lim_{z\to 0}\sqrt{z}\right)\left(\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{2}+\frac{o(z^2)}{z^2}\right)\right)=0\cdot\frac{1}{2}=0$ が成り立つため, 関数 $p:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $p(z)=\begin{cases}\frac{e^z-1-z}{z^{\frac{3}{2}}} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$ で定めれば p は 0 で連続だから, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)-(0\ \ 0)\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)}{\left\|\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\|}=\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}p\left(h\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right)=p(0)=0$ が成り立つ. 従って f は原点で微分可能であり, $f'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$.

(7) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\begin{smallmatrix}at\\bt\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{abt}{|t|\sqrt{a^2+b^2}}$ だから, $ab\neq 0$ ならば, 原点において f は $\boldsymbol{v}$ 方向には方向微分不可能であり, $ab=0$ ならば, f の原点における $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は 0 である.

$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ であり, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ の場合は, 上で $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ とした場合だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=0$ である. また, $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\t\end{smallmatrix}\right)=1\neq 0=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}t\\0\end{smallmatrix}\right)=1\neq 0=\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ となるため, $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ はともに原点で連続ではない.

原点において f が $\boldsymbol{v}$ 方向に方向微分不可能であるようなベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在するため, f は原点で微分不可能である.

(8) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\begin{smallmatrix}at\\bt\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(|t|\sqrt{a^2+b^2}-1\right)^2-1}{t}=\lim_{t\to 0}\left(t(a^2+b^2)-\frac{2|t|}{t}\sqrt{a^2+b^2}\right)$ は存在しないため, 原点において f は $\boldsymbol{v}$ 方向には方向微分不可能である.

$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ の場合は $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{2x\left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{2y\left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ であり, 原点において f は $\boldsymbol{e}_1$ 方向と $\boldsymbol{e}_2$ 方向には方向微分不可能であるため, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ はどちらも存在しない.

原点において f が $\boldsymbol{v}$ 方向に方向微分不可能であるようなベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在するため, f は原点で微分不可能である.

微積分学 II 演習問題　第 3 回　写像の微分と偏導関数

1. 以下で定められる関数 f の 2 次偏導関数をすべて求め, それぞれの場合に, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ と $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ が一致することを確かめよ. ただし, a, b は定数とする.

(1) $xy^3(1+x^2-y)$　(2) $\sqrt{y^2-x}$　(3) $\sin x^2 y$　(4) $\dfrac{x+y}{x-y}$　(5) $\log(x^2+y^4)$
(6) $\log(x^2+2xy-y^2)$　(7) $\cos(x^2+xy^3)$　(8) $e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}$　(9) $\sin^{-1} x^2 y$　(10) $e^{ax}\sin by$
(11) $\log(e^x+e^{2y})$　(12) $\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$　(13) $e^{3x}\cos(x+2y)$　(14) $\tan^{-1}\dfrac{x-y}{x+y}$　(15) x^y

2. $X = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x > 0 \right\}$, $Y = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x > 0 \right\}$, $Z = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x, y > 0 \right\}$, $W = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x+y > 0 \right\}$ とする. f が (1)〜(9) で与えられるとき, f の定義域の各点 ((1), (2), (4) では $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$, (3), (5)〜(9) では $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$) における微分を求めよ.

(1) $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \sin(x \sin y)$.　(2) $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \sin(xy)$.
(3) $f : X \to \boldsymbol{R}$, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = x^y$.　(4) $f : Y \to \boldsymbol{R}^3$, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sin(xy) \\ \sin(x \sin y) \\ x^y \end{pmatrix}$.
(5) $f : X \to \boldsymbol{R}^2$, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x^y \\ z \end{smallmatrix}\right)$.　(6) $f : Z \to \boldsymbol{R}$, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = x^{y^z}$.
(7) $f : X \to \boldsymbol{R}$, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = x^{y+z}$.　(8) $f : W \to \boldsymbol{R}$, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = (x+y)^z$.
(9) $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \sin(x \sin(y \sin z))$.

3. $g, h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ が微分可能なとき, (1) から (4) で与えられる $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を g, h を用いて表せ. ただし, (5) では g は常に正の値をとるとする.

(1) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = g(x)$　(2) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = g(y)$　(3) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = g(x+y)$　(4) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = g(x)h(y)$　(5) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = g(x)^{h(y)}$

4. (発展問題) $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - x y^3}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \end{cases}$ で定める. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求め, さらに, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ であることを示せ.

5. (発展問題) $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \end{cases}$ で定める. f の 2 次偏導関数をすべて求め, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ であることを示せ. さらに f の各 2 次偏導関数の原点における連続性を調べよ.

6. (発展問題) $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とするとき, (1) から (4) で与えられる $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を g を用いて表せ. また, $X = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x > 0 \right\}$ として $f : X \to \boldsymbol{R}$ が (5) で与えられるとき, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ を g を用いて表せ.

(1) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \displaystyle\int_a^{x+y} g(t)\,dt$　(2) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \displaystyle\int_x^{y} g(t)\,dt$　(3) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \displaystyle\int_a^{xy} g(t)\,dt$
(4) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \displaystyle\int_a^{\left(\int_x^y g(s)ds\right)} g(t)\,dt$　(5) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \displaystyle\int_{x^y}^{\sin(x \sin(y \sin z))} g(t)\,dt$

第 3 回の演習問題の解答

1. (1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^3 + 3x^2y^3 - y^4$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 + 3x^3y^2 - 4xy^3$ より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(y^3 + 3x^2y^3 - y^4) = 6xy^3, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}(y^3 + 3x^2y^3 - y^4) = 3y^2 + 9x^2y^2 - 4y^3, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(3xy^2 + 3x^3y^2 - 4xy^3) = 3y^2 + 9x^2y^2 - 4y^3, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(3xy^2 + 3x^3y^2 - 4xy^3) = 6xy + 6x^3y - 12xy^2.
\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-1}{2(y^2-x)^{\frac{1}{2}}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{(y^2-x)^{\frac{1}{2}}}$ より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{-1}{2(y^2-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-1}{4(y^2-x)^{\frac{3}{2}}}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{-1}{2(y^2-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y}{2(y^2-x)^{\frac{3}{2}}}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{(y^2-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y}{2(y^2-x)^{\frac{3}{2}}}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{(y^2-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y^2}{(y^2-x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(y^2-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-x}{(y^2-x)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy\cos x^2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2\cos x^2y$ より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}2xy\cos x^2y = 2y\cos x^2y - 4x^2y^2\sin x^2y, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}2xy\cos x^2y = 2x\cos x^2y - 2x^3y\sin x^2y, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}x^2\cos x^2y = 2x\cos x^2y - 2x^3y\sin x^2y, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}x^2\cos x^2y = -x^4\sin x^2y.
\end{aligned}$$

(4) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-2y}{(x-y)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2x}{(x-y)^2}$ より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{-2y}{(x-y)^2} = \frac{4y}{(x-y)^3}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{-2y}{(x-y)^2} = \frac{-2(x-y)^2 - 4y(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{-2x-2y}{(x-y)^3}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{2(x-y)^2 - 4x(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{-2x-2y}{(x-y)^3}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{4x}{(x-y)^3}.
\end{aligned}$$

(5) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2+y^4},\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{4y^3}{x^2+y^4}$ より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{2x}{x^2+y^4} = \frac{2(x^2+y^4)-4x^2}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2(-x^2+y^4)}{(x^2+y^4)^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{2x}{x^2+y^4} = \frac{-8xy^3}{(x^2+y^4)^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{4y^3}{x^2+y^4} = \frac{-8xy^3}{(x^2+y^4)^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{4y^3}{x^2+y^4} = \frac{12y^2(x^2+y^4)-16y^6}{(x^2+y^4)^2} = \frac{4y^2(3x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2}.
\end{aligned}$$

(6) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x+2y}{x^2+2xy-y^2},\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2x-2y}{x^2+2xy-y^2}$ より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{2x+2y}{x^2+2xy-y^2} = \frac{2(x^2+2xy-y^2)-(2x+2y)^2}{(x^2+2xy-y^2)^2} = \frac{-2x^2-4xy-6y^2}{(x^2+2xy-y^2)^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{2x+2y}{x^2+2xy-y^2} = \frac{2(x^2+2xy-y^2)-(4x^2-4y^2)}{(x^2+2xy-y^2)^2} = \frac{-2x^2+2xy+y^2}{(x^2+2xy-y^2)^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{2x-2y}{x^2+2xy-y^2} = \frac{2(x^2+2xy-y^2)-(4x^2-4y^2)}{(x^2+2xy-y^2)^2} = \frac{-2x^2+2xy+y^2}{(x^2+2xy-y^2)^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{2x-2y}{x^2+2xy-y^2} = \frac{-2(x^2+2xy-y^2)-(2x-2y)^2}{(x^2+2xy-y^2)^2} = \frac{-6x^2+4xy-2y^2}{(x^2+2xy-y^2)^2}.
\end{aligned}$$

(7) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -(2x+y^3)\sin(x^2+xy^3),\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -3xy^2\sin(x^2+xy^3)$ より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(-(2x+y^3)\sin(x^2+xy^3)) = -2\sin(x^2+xy^3)-(2x+y^3)^2\cos(x^2+xy^3),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}(-(2x+y^3)\sin(x^2+xy^3)) = -3y^2\sin(x^2+xy^3)-3xy^2(2x+y^3)\cos(x^2+xy^3),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(-3xy^2\sin(x^2+xy^3)) = -3y^2\sin(x^2+xy^3)-3xy^2(2x+y^3)\cos(x^2+xy^3),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(-3xy^2\sin(x^2+xy^3)) = -6xy\sin(x^2+xy^3)-9x^2y^4\cos(x^2+xy^3).
\end{aligned}$$

(8) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2(ax+by)e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)},\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2(bx+cy)e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}$ より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-2(ax+by)e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\right) = (4(ax+by)^2-2a)e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-2(ax+by)e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\right) = (4(ax+by)(bx+cy)-2b)e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-2e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\right) = (4(ax+by)(bx+cy)-2b)e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-2(bx+cy)e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\right) = (4(bx+cy)^2-2c)e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}.
\end{aligned}$$

(9) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2xy}{(1-x^4y^2)^{\frac{1}{2}}},\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^2}{(1-x^4y^2)^{\frac{1}{2}}}$ より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{2xy}{(1-x^4y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2y}{(1-x^4y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{4x^4y^3}{(1-x^4y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2y+2x^4y^3}{(1-x^4y^2)^{\frac{3}{2}}},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{2xy}{(1-x^4y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2x}{(1-x^4y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2x^5y^2}{(1-x^4y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x}{(1-x^4y^2)^{\frac{3}{2}}},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2}{(1-x^4y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2x}{(1-x^4y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2x^5y^2}{(1-x^4y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x}{(1-x^4y^2)^{\frac{3}{2}}},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{x^2}{(1-x^4y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^6y}{(1-x^4y^2)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

(10) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = ae^{ax}\sin by,\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = be^{ax}\cos by$ より

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} ae^{ax}\sin by = a^2e^{ax}\sin by,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} ae^{ax}\sin by = abe^{ax}\cos by,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} be^{ax}\cos by = abe^{ax}\cos by,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} be^{ax}\cos by = -b^2e^{ax}\sin by.
\end{aligned}
$$

(11) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{e^x}{e^x+e^{2y}},\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2e^{2y}}{e^x+e^{2y}}$ より

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{e^x}{e^x+e^{2y}} = \frac{e^x(e^x+e^{2y})-e^{2x}}{(e^x+e^{2y})^2} = \frac{e^{x+2y}}{(e^x+e^{2y})^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{e^x}{e^x+e^{2y}} = \frac{-2e^{x+2y}}{(e^x+e^{2y})^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{2e^{2y}}{e^x+e^{2y}} = \frac{-2e^{x+2y}}{(e^x+e^{2y})^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{2e^{2y}}{e^x+e^{2y}} = \frac{4e^{2y}(e^x+e^{2y})-4e^{4y}}{(e^x+e^{2y})^2} = \frac{4e^{x+2y}}{(e^x+e^{2y})^2}.
\end{aligned}
$$

(12) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2}\dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \dfrac{-y}{x^2+y^2},\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ より

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}
$$

(13) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{3x}(3\cos(x+2y)-\sin(x+2y)),\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2e^{3x}\sin(x+2y)$ より

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}e^{3x}(3\cos(x+2y)-\sin(x+2y)) = e^{3x}(9\cos(x+2y)-6\sin(x+2y)-\cos(x+2y)),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}e^{3x}(3\cos(x+2y)-\sin(x+2y)) = e^{3x}(-6\sin(x+2y)-2\cos(x+2y)),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(-2e^{3x}\sin(x+2y)) = e^{3x}(-6\sin(x+2y)-2\cos(x+2y)),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(-2e^{3x}\sin(x+2y)) - 6e^{3x}\cos(x+2y).
\end{aligned}
$$

(14) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2} = \dfrac{-x}{x^2+y^2}$ より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{-x}{x^2+y^2} = \frac{-(x^2+y^2)+2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{-x}{x^2+y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

(15) $x^y = e^y \log x$ だから, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{y\log x}\log x = x^y \log x$ より,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} yx^{y-1} = y(y-1)x^{y-2}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} yx^{y-1} = x^{y-1} + yx^{y-1}\log x, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} x^y \log x = x^{y-1} + yx^{y-1}\log x, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} x^y \log x = x^y (\log x)^2.
\end{aligned}$$

2. (1) $\dfrac{\partial}{\partial x}\sin(x\sin y) = \sin y\cos(x\sin y)$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\sin(x\sin y) = x\cos y\cos(x\sin y)$ より
$f'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sin y\cos(x\sin y) & x\cos y\cos(x\sin y) \end{pmatrix}$.

(2) $\dfrac{\partial}{\partial x}\sin(xy) = y\cos(xy)$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\sin(xy) = x\cos(xy)$ より $f'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \end{pmatrix}$.

(3) $\dfrac{\partial}{\partial x}x^y = yx^{y-1}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}x^y = x^y\log x$, $\dfrac{\partial}{\partial z}x^y = 0$ より $f'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y\log x & 0 \end{pmatrix}$.

(4) (1), (2), (3) の結果から $f'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ \sin y\cos(x\sin y) & x\cos y\cos(x\sin y) \\ yx^{y-1} & x^y\log x \end{pmatrix}$.

(5) (3) の結果と $\dfrac{\partial}{\partial z}x^y = \dfrac{\partial}{\partial x}z = \dfrac{\partial}{\partial y}z = 0$, $\dfrac{\partial}{\partial z}z = 1$ より $f'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y\log x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(6) $\dfrac{\partial}{\partial x}x^{y^z} = y^z x^{y^z-1}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}x^{y^z} = \dfrac{\partial}{\partial y}e^{y^z\log x} = zy^{z-1}(\log x)e^{y^z\log x} = zy^{z-1}x^{y^z}\log x$,
$\dfrac{\partial}{\partial z}x^{y^z} = \dfrac{\partial}{\partial z}e^{y^z\log x} = y^z(\log x\log y)e^{y^z\log x} = y^z x^{y^z}\log x\log y$ より
$f'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y^z x^{y^z-1} & zy^{z-1}x^{y^z}\log x & y^z x^{y^z}\log x\log y \end{pmatrix}$.

(7) $\dfrac{\partial}{\partial x}x^{y+z} = (y+z)x^{y+z-1}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}x^{y+z} = \dfrac{\partial}{\partial z}x^{y+z} = x^{y+z}\log x$ より $f'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (y+z)x^{y+z-1} & x^{y+z} & x^{y+z} \end{pmatrix}$.

(8) $\dfrac{\partial}{\partial x}(x+y)^z = \dfrac{\partial}{\partial y}(x+y)^z = z(x+y)^{z-1}$, $\dfrac{\partial}{\partial z}(x+y)^z = (x+y)^z\log(x+y)$ より
$f'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z(x+y)^{z-1} & z(x+y)^{z-1} & (x+y)^z\log(x+y) \end{pmatrix}$.

(9) $\dfrac{\partial}{\partial x}\sin(x\sin(y\sin z)) = \sin(y\sin z)\cos(x\sin(y\sin z))$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\sin(x\sin(y\sin z)) =$
$x\sin z\cos(y\sin z)\cos(x\sin(y\sin z))$, $\dfrac{\partial}{\partial z}\sin(x\sin(y\sin z)) = xy\cos z\cos(y\sin z)\cos(x\sin(y\sin z))$ より
$f'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sin(y\sin z)\cos(x\sin(y\sin z)) & x\sin z\cos(y\sin z)\cos(x\sin(y\sin z)) & xy\cos z\cos(y\sin z)\cos(x\sin(y\sin z)) \end{pmatrix}$.

3. (1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = g'(x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = g'(y)$

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = g'(x+y)$

(4) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = g'(x)h(y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = g(x)h'(y)$.

(5) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = g'(x)h(y)g(x)^{h(y)-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = g(x)^{h(y)}h'(y)\log g(x)$.

4. $\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$ の場合, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = \dfrac{x^4y - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} = \dfrac{x^5 - xy^4 - 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$. また $f\binom{x}{0} = f\binom{0}{y} = 0$ だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\binom{x}{0} - f\binom{0}{0}}{x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f\binom{0}{y} - f\binom{0}{0}}{y} = 0$. 従って $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\binom{0}{0} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{y} - \frac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-y^4}{y^4} = -1$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{0} - \frac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^4} = 1$ だから $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\binom{0}{0} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{0}{0}$ である.

5. $\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$ の場合, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{y} = \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{y} = \dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y} = -\dfrac{2(3x^2y^4 - y^6)}{(x^2+y^2)^3}$, $\dfrac{\partial f^2}{\partial y\partial x}\binom{x}{y} = \dfrac{\partial f^2}{\partial x\partial y}\binom{x}{y} = \dfrac{8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y} = \dfrac{2(x^6 - 3x^4y^2)}{(x^2+y^2)^3}$. $f\binom{x}{0} = f\binom{0}{y} = 0$ だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\binom{x}{0} - f\binom{0}{0}}{x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f\binom{0}{y} - f\binom{0}{0}}{y} = 0$. 故に $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}\binom{x}{0} - \frac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}}{x} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\binom{0}{0} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{y} - \frac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}}{y} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}\binom{x}{0} - \frac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}}{x} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{0} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{y} - \frac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}}{x} = 0$ である. 従って $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{t} = 2 \neq 0 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0}$, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\binom{t}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{t}{t} = 1 \neq 0 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{0}{0} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\binom{0}{0}$, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{t}{0} = 2 \neq 0 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{0}$ となるため, f の 2 次偏導関数はすべて原点で連続ではない.

6. (1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = g(x+y)$

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -g(x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = g(y)$

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yg(xy)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = xg(xy)$

(4) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_x^y g(s)ds\right) g\left(\displaystyle\int_x^y g(s)ds\right) = -g(x)g\left(\displaystyle\int_x^y g(s)ds\right)$,
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \left(\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_x^y g(s)ds\right) g\left(\displaystyle\int_x^y g(s)ds\right) = g(y)g\left(\displaystyle\int_x^y g(s)ds\right)$

(5) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\sin(x\sin(y\sin z))\right) g(\sin(x\sin(y\sin z))) - \left(\dfrac{\partial}{\partial x}x^y\right) g(x^y) =$
$\sin(y\sin z)\cos(x\sin(y\sin z))g(\sin(x\sin(y\sin z))) - yx^{y-1}g(x^y)$,
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \left(\dfrac{\partial}{\partial y}\sin(x\sin(y\sin z))\right) g(\sin(x\sin(y\sin z))) - \left(\dfrac{\partial}{\partial y}x^y\right) g(x^y) =$
$x\sin z\cos(y\sin z)\cos(x\sin(y\sin z))g(\sin(x\sin(y\sin z))) - x^y\log x g(x^y)$,
$\dfrac{\partial f}{\partial z} = \left(\dfrac{\partial}{\partial z}\sin(x\sin(y\sin z))\right) g(\sin(x\sin(y\sin z))) - \left(\dfrac{\partial}{\partial z}x^y\right) g(x^y) =$
$xy\cos z\cos(y\sin z)\cos(x\sin(y\sin z))g(\sin(x\sin(y\sin z)))$

微積分学 II 演習問題　第 4 回　合成写像の微分

1. $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $g : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = ye^{\sqrt{x^2+y^2}}$, $g\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \end{pmatrix}$ により定める.

   (1) f の $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2$ における微分と g の $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2$ における微分を求めよ.

   (2) 合成写像 $f \circ g : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ の $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$ における微分と $\dfrac{\partial f \circ g}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial f \circ g}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$ を求めよ.

2. $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$, $g : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2y^2 - 2y^3 \\ x^2 + xy - y^2 \end{pmatrix}$, $g\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u^3 - u^2v + v^2 \\ u^2 - uv^3 \end{pmatrix}$ により定める.

   (1) f の $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2$ における微分と g の $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2$ における微分を求めよ.

   (2) 合成写像 $f \circ g : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ の $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ における微分を求めよ.

3. $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $g : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$, $h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ を $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \log(x^2 + xy + y^2 + 1)$, $g\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right)$, $h(t) = \left(\begin{smallmatrix} e^t + e^{-t} \\ e^t - e^{-t} \end{smallmatrix}\right)$ により定める.

(1) f, g, h のそれぞれ $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)$, t における微分を求めよ.

(2) 合成写像 $f \circ g : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ の $\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)$ における微分を求め, $f \circ g$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f \circ g}{\partial r}$, $\dfrac{\partial f \circ g}{\partial \theta}$ を求めよ.

(3) 合成写像 $f \circ h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ の導関数を求めよ.

4. (発展問題) $g, h, k : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $G : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ が微分可能なとき, (1), (2) で与えられる $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を g, h, k, F, G を用いて表せ. また (3) で与えられる $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, (4) で与えられる $f : X \to \boldsymbol{R}$ (ただし $X = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x, y, z > 0 \right\}$) に対して $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ を g, h, k, F, G を用いて表せ.

   (1) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = F\left(\begin{smallmatrix} g(x)k(y) \\ g(x)+h(y) \end{smallmatrix}\right)$　(2) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = G\left(\begin{smallmatrix} x \\ g(x) \\ F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \end{smallmatrix}\right)$　(3) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = F\left(\begin{smallmatrix} g(x+y) \\ h(y+z) \end{smallmatrix}\right)$　(4) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = G\left(\begin{smallmatrix} x^y \\ y^z \\ z^x \end{smallmatrix}\right)$

第 4 回の演習問題の解答

1. (1) $f'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{xye^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} & e^{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+1\right)\end{pmatrix}$, $g'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{pmatrix}$

(2) (1) より $f'\left(g\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)\right)=f'\left(\begin{smallmatrix}u\cos v\\u\sin v\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}|u|e^{|u|}\cos v\sin v & e^{|u|}\left(|u|\sin^2 v+1\right)\end{pmatrix}$ であり, 合成写像の微分法から

$$\begin{aligned}(f\circ g)'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)&=f'\left(g\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)\right)g'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}|u|e^{|u|}\cos v\sin v & e^{|u|}\left(|u|\sin^2 v+1\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(|u|+1)e^{|u|}\sin v & ue^{|u|}\cos v\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$(f\circ g)'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f\circ g}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right) & \frac{\partial f\circ g}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix}$ だから, $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=(|u|+1)e^{|u|}\sin v$, $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=ue^{|u|}\cos v$.

2. (1) $f'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2xy^2 & 2x^2y-6y^2\\ 2x+y & x-2y\end{pmatrix}$, $g'\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3u^2-2uv & -u^2+2v\\ 2u-v^3 & -3uv^2\end{pmatrix}$

(2) (1) より $f'\left(g\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\right)=f'\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $g'\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ であり, 合成写像の微分法から

$$(f\circ g)'\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)=f'\left(g\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\right)g'\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 7 & -3\end{pmatrix}$$

3. (1) $g(\boldsymbol{r})=\begin{pmatrix}g_1(\boldsymbol{r})\\g_2(\boldsymbol{r})\end{pmatrix}$, $h(t)=\begin{pmatrix}h_1(t)\\h_2(t)\end{pmatrix}$ のとき, f, g, h のそれぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{r}$, t における微分 $f'(\boldsymbol{x})$, $g'(\boldsymbol{r})$, $h'(t)$ は

$$f'(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x})\end{pmatrix},\quad g'(\boldsymbol{r})=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial r}(\boldsymbol{r}) & \frac{\partial g_1}{\partial \theta}(\boldsymbol{r})\\ \frac{\partial g_2}{\partial r}(\boldsymbol{r}) & \frac{\partial g_2}{\partial \theta}(\boldsymbol{r})\end{pmatrix},\quad h'(t)=\begin{pmatrix}\frac{dh_1}{dt}(t)\\ \frac{dh_2}{dt}(t)\end{pmatrix}$$

で与えられる. ここで,

$$f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\log(x^2+xy+y^2+1),\ \ g_1\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=r\cos\theta,\ \ g_2\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=r\sin\theta,\ \ h_1(t)=e^t+e^{-t},\ \ h_2(t)=e^t-e^{-t}$$

だから

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2+1},\quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{x+2y}{x^2+xy+y^2+1},\quad \frac{\partial g_1}{\partial r}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=\cos\theta,\quad \frac{\partial g_1}{\partial \theta}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=-r\sin\theta,\\&\frac{\partial g_2}{\partial r}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=\sin\theta,\quad \frac{\partial g_2}{\partial \theta}\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=r\cos\theta,\quad \frac{dh_1}{dt}(t)=e^t-e^{-t},\quad \frac{dh_2}{dt}(t)=e^t+e^{-t}\end{aligned}$$

である. 従って $f'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$, $g'\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)$, $h'(t)$ は次のようになる.

$$f'\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2+1} & \frac{x+2y}{x^2+xy+y^2+1}\end{pmatrix},\quad g'\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix},\quad h'(t)=\begin{pmatrix}e^t-e^{-t}\\ e^t+e^{-t}\end{pmatrix}$$

(2) 合成写像 $f\circ g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ の $\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)$ における微分 $(f\circ g)'\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)$ は合成写像の微分法と (1) の結果から

$$\begin{aligned}(f\circ g)'\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)&=f'\left(g\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\right)g'\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)=f'\left(\begin{smallmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)g'\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\\&=\begin{pmatrix}\frac{2r\cos\theta+r\sin\theta}{r^2+r^2\cos\theta\sin\theta+1} & \frac{r\cos\theta+2r\sin\theta}{r^2+r^2\cos\theta\sin\theta+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{2r+2r\cos\theta\sin\theta}{r^2+r^2\cos\theta\sin\theta+1} & \frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2+r^2\cos\theta\sin\theta+1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

で与えられる. 従って $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial r}=\dfrac{2r+2r\cos\theta\sin\theta}{r^2+r^2\cos\theta\sin\theta+1}$, $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial \theta}=\dfrac{r^2}{r^2+r^2\cos\theta\sin\theta+1}$ である.

(3) 合成写像 $f \circ h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ の t における微分 $(f \circ h)'(t)$ は合成写像の微分法と (1) の結果から

$$\begin{aligned}(f\circ h)'(t) &= f'(h(t))h'(t) = f'\left(\begin{smallmatrix} e^t+e^{-t} \\ e^t-e^{-t}\end{smallmatrix}\right)h'(t) \\ &= \left(\tfrac{3e^t+e^{-t}}{3e^{2t}+e^{-2t}+1} \quad \tfrac{3e^t-e^{-t}}{3e^{2t}+e^{-2t}+1}\right)\begin{pmatrix} e^t-e^{-t} \\ e^t+e^{-t}\end{pmatrix} = \frac{6e^{2t}-2e^{-2t}}{3e^{2t}+e^{-2t}+1}\end{aligned}$$

で与えられる．よって $f \circ h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ の導関数は $\dfrac{d(f\circ h)}{dt} = \dfrac{6e^{2t}-2e^{-2t}}{3e^{2t}+e^{-2t}+1}$ である．

4. (1) $\varphi\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} g(x)k(y) \\ g(x)+h(y)\end{pmatrix}$ で $\varphi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を定義すれば $\varphi'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} g'(x)k(y) & g(x)k'(y) \\ g'(x) & h'(y)\end{pmatrix}$, $f = F\circ\varphi$ より
$f'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right) = F'\left(\varphi\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right)\right)\varphi'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix} g(x)k(y) \\ g(x)+h(y)\end{smallmatrix}\right) \quad \frac{\partial F}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} g(x)k(y) \\ g(x)+h(y)\end{smallmatrix}\right)\right)\begin{pmatrix} g'(x)k(y) & g(x)k'(y) \\ g'(x) & h'(y)\end{pmatrix} =$
$\left(g'(x)k(y)\frac{\partial F}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix} g(x)k(y) \\ g(x)+h(y)\end{smallmatrix}\right) + g'(x)\frac{\partial F}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} g(x)k(y) \\ g(x)+h(y)\end{smallmatrix}\right) \quad g(x)k'(y)\frac{\partial F}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix} g(x)k(y) \\ g(x)+h(y)\end{smallmatrix}\right) + h'(y)\frac{\partial F}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} g(x)k(y) \\ g(x)+h(y)\end{smallmatrix}\right)\right)$. 故に
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = g'(x)k(y)\dfrac{\partial F}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix} g(x)k(y) \\ g(x)+h(y)\end{smallmatrix}\right) + g'(x)\dfrac{\partial F}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} g(x)k(y) \\ g(x)+h(y)\end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = g(x)k'(y)\dfrac{\partial F}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix} g(x)k(y) \\ g(x)+h(y)\end{smallmatrix}\right) + h'(y)\dfrac{\partial F}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} g(x)k(y) \\ g(x)+h(y)\end{smallmatrix}\right)$.

(2) $\psi\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ g(x) \\ F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right)$ によって $\psi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ を定義すれば $f = G\circ\psi$, $\psi'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ g'(x) & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right) & \frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right)$ より
$f'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right) = G'\left(\psi\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right)\right)\psi'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right) = \left(\frac{\partial G}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix} x \\ g(x) \\ F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right) \quad \frac{\partial G}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} x \\ g(x) \\ F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right) \quad \frac{\partial G}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix} x \\ g(x) \\ F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right)\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ g'(x) & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right) & \frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right) =$
$\left(\frac{\partial G}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix} x \\ g(x) \\ F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right) + g'(x)\frac{\partial G}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} x \\ g(x) \\ F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right) + \frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial G}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix} x \\ g(x) \\ F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right) \quad \frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right)\frac{\partial G}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix} x \\ g(x) \\ F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right)\right)$. 故に
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial G}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix} x \\ g(x) \\ F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right) + g'(x)\dfrac{\partial G}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} x \\ g(x) \\ F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right) + \dfrac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right)\dfrac{\partial G}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix} x \\ g(x) \\ F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right)\dfrac{\partial G}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix} x \\ g(x) \\ F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right)$.

(3) $\lambda\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} g(x+y) \\ h(y+z)\end{pmatrix}$ で $\lambda : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ を定義すれば $f = F\circ\lambda$, $\lambda'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} g'(x+y) & g'(x+y) & 0 \\ 0 & h'(y+z) & h'(y+z)\end{pmatrix}$
より $f'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z\end{smallmatrix}\right) = F'\left(\lambda\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z\end{smallmatrix}\right)\right)\lambda'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z\end{smallmatrix}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix} g(x+y) \\ h(y+z)\end{smallmatrix}\right) \quad \frac{\partial F}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} g(x+y) \\ h(y+z)\end{smallmatrix}\right)\right)\begin{pmatrix} g'(x+y) & g'(x+y) & 0 \\ 0 & h'(y+z) & h'(y+z)\end{pmatrix} =$
$\left(g'(x+y)\frac{\partial F}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix} g(x+y) \\ h(y+z)\end{smallmatrix}\right) \quad g'(x+y)\frac{\partial F}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix} g(x+y) \\ h(y+z)\end{smallmatrix}\right) + h'(y+z)\frac{\partial F}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} g(x+y) \\ h(y+z)\end{smallmatrix}\right) \quad h'(y+z)\frac{\partial F}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} g(x+y) \\ h(y+z)\end{smallmatrix}\right)\right)$. 故に
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = g'(x+y)\dfrac{\partial F}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix} g(x+y) \\ h(y+z)\end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = g'(x+y)\dfrac{\partial F}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix} g(x+y) \\ h(y+z)\end{smallmatrix}\right) + h'(y+z)\dfrac{\partial F}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} g(x+y) \\ h(y+z)\end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = h'(y+z)\dfrac{\partial F}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} g(x+y) \\ h(y+z)\end{smallmatrix}\right)$.

(4) $\mu\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x^y \\ y^z \\ z^x\end{smallmatrix}\right)$ で $\mu : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を定義すれば $f = G\circ\mu$, $\mu'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} yx^{y-1} & x^y\log x & 0 \\ 0 & zy^{z-1} & y^z\log y \\ z^x\log z & 0 & xz^{x-1}\end{smallmatrix}\right)$ より
$f'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z\end{smallmatrix}\right) = G'\left(\mu\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z\end{smallmatrix}\right)\right)\mu'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z\end{smallmatrix}\right) = \left(\frac{\partial G}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix} x^y \\ y^z \\ z^x\end{smallmatrix}\right) \quad \frac{\partial G}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} x^y \\ y^z \\ z^x\end{smallmatrix}\right) \quad \frac{\partial G}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix} x^y \\ y^z \\ z^x\end{smallmatrix}\right)\right)\left(\begin{smallmatrix} yx^{y-1} & x^y\log x & 0 \\ 0 & zy^{z-1} & y^z\log y \\ z^x\log z & 0 & xz^{x-1}\end{smallmatrix}\right) =$
$\left(yx^{y-1}\frac{\partial G}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix} x^y \\ y^z \\ z^x\end{smallmatrix}\right) + z^x\log z\frac{\partial G}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix} x^y \\ y^z \\ z^x\end{smallmatrix}\right) \quad x^y\log x\frac{\partial G}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix} x^y \\ y^z \\ z^x\end{smallmatrix}\right) + zy^{z-1}\frac{\partial G}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} x^y \\ y^z \\ z^x\end{smallmatrix}\right) \quad y^z\log y\frac{\partial G}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} x^y \\ y^z \\ z^x\end{smallmatrix}\right) + xz^{x-1}\frac{\partial G}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix} x^y \\ y^z \\ z^x\end{smallmatrix}\right)\right)$.
故に $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}\dfrac{\partial G}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix} x^y \\ y^z \\ z^x\end{smallmatrix}\right) + z^x\log z\dfrac{\partial G}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix} x^y \\ y^z \\ z^x\end{smallmatrix}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^y\log x\dfrac{\partial G}{\partial u}\left(\begin{smallmatrix} x^y \\ y^z \\ z^x\end{smallmatrix}\right) + zy^{z-1}\dfrac{\partial G}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} x^y \\ y^z \\ z^x\end{smallmatrix}\right)$,
$\dfrac{\partial f}{\partial z} = y^z\log y\dfrac{\partial G}{\partial v}\left(\begin{smallmatrix} x^y \\ y^z \\ z^x\end{smallmatrix}\right) + xz^{x-1}\dfrac{\partial G}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix} x^y \\ y^z \\ z^x\end{smallmatrix}\right)$.

微積分学 II 演習問題　第 5 回　高次偏導関数とテイラーの定理

1. 以下で定められる関数 f に対し, $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ と $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ においてテイラーの定理を用いた場合に f を近似する x, y の 2 次以下の多項式をそれぞれ求めよ.

(1) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \log(x^2+y^2)$　(2) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(3) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

2. 以下で定められる関数 f に対し, $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ においてテイラーの定理を用いた場合に f を近似する x, y の 3 次以下の多項式をそれぞれ求めよ.

(1) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = e^{-x}\log(1+2y)$　(2) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \log(1+3x+y^2)$

3. $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = e^{x-y}\sin x$ で与えられる関数 f に対し, $\dfrac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i \partial y^j}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ を求め, さらに $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ においてテイラーの定理を用いた場合に f を近似する x, y の 4 次以下の多項式を求めよ.

4. (発展問題) 写像 $\varphi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を $\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ で定める. 関数 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ が連続な 2 次以下の偏導関数をもつとき, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\varphi + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\varphi$ を $\dfrac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial^2 r}$, $\dfrac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial\theta^2}$, $\dfrac{\partial f\circ\varphi}{\partial r}$ と r, θ を用いて表せ.

5. (発展問題) 写像 $\psi : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を $\psi\begin{pmatrix} r\\\theta\\\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$ で定める. 関数 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ が連続な 2 次以下の偏導関数をもつとき, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\circ\psi$ を $\dfrac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial^2 r}$, $\dfrac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial^2\theta}$, $\dfrac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial^2\varphi}$, $\dfrac{\partial f\circ\psi}{\partial r}$, $\dfrac{\partial f\circ\psi}{\partial\theta}$ と r, θ, φ を用いて表せ.

第 5 回の演習問題の解答

1. 一般に $\binom{p}{q}$ において f を近似する 2 次の多項式は

$$f\binom{p}{q}+\frac{\partial f}{\partial x}\binom{p}{q}(x-p)+\frac{\partial f}{\partial y}\binom{p}{q}(y-q)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{p}{q}(x-p)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{p}{q}(x-p)(y-q)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{p}{q}(y-q)^2$$

で与えられるため, (1), (2), (3) で与えられた f に対して, 上式の p, q にそれぞれ「$p=1,\ q=0$」,「$p=q=1$」を代入すればよい.

(1) 第 3 回の演習問題 1 の (4) の結果から $f\binom{1}{0}=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{1}{0}=2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{1}{0}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{0}=-2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{1}{0}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{1}{0}=2$ より, $\binom{1}{0}$ において f を近似する 2 次の多項式は $2(x-1)-(x-1)^2+y^2=-3+4x-x^2+y^2$ である.

$f\binom{1}{1}=\log 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{1}{1}=\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{1}{1}=1$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{1}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{1}{1}=-1$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{1}{1}=0$ より, $\binom{1}{1}$ において f を近似する 2 次の多項式は $\log 2+(x-1)+(y-1)-(x-1)(y-1)=\log 2-3+2x+2y-xy$ である.

(2) 第 3 回の演習問題 1 の (6) の結果から $f\binom{1}{0}=1$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{1}{0}=-1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{1}{0}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{0}=2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{1}{0}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{1}{0}=-1$ より, $\binom{1}{0}$ において f を近似する 2 次の多項式は $1-(x-1)+(x-1)^2-\dfrac{1}{2}y^2=3-3x+x^2-\dfrac{1}{2}y^2$ である.

$f\binom{1}{1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{1}{1}=\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{1}{1}=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{1}=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{1}{1}=\dfrac{3}{4\sqrt{2}}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{1}{1}=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$ より, $\binom{1}{1}$ において f を近似する 2 次の多項式は
$\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(x-1)-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(y-1)+\dfrac{1}{8\sqrt{2}}(x-1)^2+\dfrac{3}{4\sqrt{2}}(x-1)(y-1)+\dfrac{1}{8\sqrt{2}}(y-1)^2=$
$\dfrac{3}{\sqrt{2}}-\dfrac{3}{2\sqrt{2}}x-\dfrac{3}{2\sqrt{2}}y+\dfrac{1}{8\sqrt{2}}x^2+\dfrac{3}{4\sqrt{2}}xy+\dfrac{1}{8\sqrt{2}}y^2$ である.

(3) 第 3 回の演習問題 1 の (17) の結果から $f\binom{1}{0}=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{1}{0}=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{1}{0}=1$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{0}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{1}{0}=-1$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{1}{0}=0$ より, $\binom{1}{0}$ において f を近似する 2 次の多項式は $y-(x-1)y=2y-xy$ である.

$f\binom{1}{1}=\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{1}{1}=-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{1}{1}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{1}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{1}{1}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{1}{1}=-\dfrac{1}{2}$ より, $\binom{1}{1}$ において f を近似する 2 次の多項式は $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}(x-1)+\dfrac{1}{2}(y-1)+\dfrac{1}{4}(x-1)^2-\dfrac{1}{4}(y-1)^2=\dfrac{\pi}{4}-x+y+\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{4}y^2$ である.

2. 一般に $\binom{0}{0}$ において f を近似する 3 次の多項式は次のように与えられる.

$$\begin{aligned}&f\binom{0}{0}+\frac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}x+\frac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}y+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0}x^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{0}{0}xy+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{0}y^2\\&\quad+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\binom{0}{0}x^3+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\binom{0}{0}x^2y+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\binom{0}{0}xy^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\binom{0}{0}y^3\end{aligned}$$

(1) $f\binom{x}{y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{-x}\log(1+2y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}=-e^{-x}\log(1+2y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\dfrac{2e^{-x}}{1+2y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{-2e^{-x}}{1+2y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{-4e^{-x}}{(1+2y)^2}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=\dfrac{4e^{-x}}{(1+2y)^2}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}=\dfrac{16e^{-x}}{(1+2y)^3}$ より $f\binom{0}{0}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0}=\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}\binom{0}{0}=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}=\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\binom{0}{0}=2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\binom{0}{0}=-2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{0}=-4$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\binom{0}{0}=4$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}\binom{0}{0}=16$ となる. 従って求める多項式は $2y-2xy-2y^2+x^2y+2xy^2+\dfrac{8}{3}y^3$ である.

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{3}{1+3x+y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{2y}{1+3x+y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{-9}{(1+3x+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{-6y}{(1+3x+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{2+6x-2y^2}{(1+3x+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\dfrac{54}{(1+3x+y^2)^3}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\dfrac{36y}{(1+3x+y^2)^3}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=\dfrac{18y^2-18x-6}{(1+3x+y^2)^3}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}=\dfrac{-12y-36xy+4y^3}{(1+3x+y^2)^3}$ より

$f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=3,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=-9,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=2,\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=54,\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=-6$ となる. 従って求める多項式は $3x-\dfrac{9}{2}x^2y+y^2+9x^3-3xy^2$ である.

3. $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=(e^x\sin x)e^{-y}$ だから, $\dfrac{\partial^j f}{\partial y^j}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=(e^x\sin x)\dfrac{\partial^j}{\partial y^j}e^{-y}=(-1)^j(e^x\sin x)e^{-y}$ である. さらに, 第 7 回の演習問題 1 の (12) から $\dfrac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i\partial y^j}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=(-1)^je^{-y}\dfrac{\partial^i}{\partial x^i}(e^x\sin x)=(-1)^j\left(\sqrt{2}\right)^ie^{x-y}\sin\left(x+\dfrac{\pi i}{4}\right)$ が得られる.

一般に $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ において f を近似する 4 次の多項式は次のように与えられる.

$$\begin{aligned}&f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)+\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)x+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)y+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)x^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)xy+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)y^2\\&\quad+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)x^3+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)x^2y+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)xy^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)y^3\\&\quad+\frac{1}{24}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)x^4+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)x^3y+\frac{1}{4}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)x^2y^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^3}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)xy^3+\frac{1}{24}\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)y^4\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i\partial y^j}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=(-1)^j\left(\sqrt{2}\right)^i\sin\dfrac{\pi i}{4}$ だから $j=0,1,2,\dots$ に対して $\dfrac{\partial^j f}{\partial y^j}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial^{j+4} f}{\partial x^4\partial y^j}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=0,\ \dfrac{\partial^{j+1} f}{\partial x\partial y^j}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=(-1)^j,$ $\dfrac{\partial^{j+2} f}{\partial x^2\partial y^j}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{\partial^{j+3} f}{\partial x^3\partial y^j}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=2(-1)^j$ が成り立つため, 上式から, 求める 4 次の多項式は次のようになる.

$$x+x^2-xy+\frac{1}{3}x^3-x^2y+\frac{1}{2}xy^2-\frac{1}{3}x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{1}{6}xy^3$$

4. 第 4 回の演習問題 4 の結果から,

$$\frac{\partial f\circ\varphi}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi \qquad\cdots(1)$$
$$\frac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial r^2}=\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\varphi+\sin 2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\varphi+\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\varphi \qquad\cdots(2)$$
$$\frac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial \theta^2}=r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\varphi-r^2\sin 2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\varphi+r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\varphi-r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi \qquad\cdots(3)$$

であるが, (2) に (3) の両辺を $\dfrac{1}{r^2}$ 倍したものを加えて, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\varphi$ を含む項を消去すれば

$$\frac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial^2 r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\varphi+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\varphi-\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi$$

が得られる. この等式に (1) の両辺を $\dfrac{1}{r}$ 倍したものを加えて, 左辺と右辺を入れ換えれば, 次の結果が得られる.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\varphi+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\varphi=\frac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial^2 r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f\circ\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f\circ\varphi}{\partial r}$$

5. 第 4 回の演習問題 4 の結果から,

$$\frac{\partial f\circ\psi}{\partial r}=\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi+\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi+\cos\theta\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi \qquad\cdots(1)$$
$$\frac{\partial f\circ\psi}{\partial \theta}=r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi+r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi \qquad\cdots(2)$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial r^2}&=\sin^2\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi+\sin^2\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi+\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\circ\psi\\&\quad+\sin^2\theta\sin 2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi+\sin 2\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\circ\psi+\sin 2\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\circ\psi \qquad\cdots(3)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial\theta^2} = r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi + r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\circ\psi$$
$$+ r^2\cos^2\theta\sin 2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi - r^2\sin 2\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\circ\psi - r^2\sin 2\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\circ\psi$$
$$- r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi - r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi - r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi \qquad \cdots(4)$$
$$\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial\varphi^2} = r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi - r^2\sin^2\theta\sin 2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi$$
$$- r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi - r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi \qquad \cdots(5)$$

であるが, (3) に (4) の両辺を $\frac{1}{r^2}$ 倍したものを加えて, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\circ\varphi$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\circ\varphi$ を含む項を消去すれば

$$\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial\theta^2} = \cos^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi + \sin^2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\circ\psi + \sin 2\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\psi$$
$$- \frac{1}{r}\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi - \frac{1}{r}\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi - \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi$$

が得られる. この等式に (5) の両辺を $\frac{1}{r^2\sin\theta}$ 倍したものを加えて, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\circ\varphi$ を含む項を消去すれば

$$\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial\varphi^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\circ\psi - \frac{(\sin^2\theta+1)\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi$$
$$- \frac{(\sin^2\theta+1)\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi \qquad \cdots(6)$$

が得られる. そこで

$$\frac{(\sin^2\theta+1)\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi + \frac{(\sin^2\theta+1)\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi = X\frac{\partial f\circ\psi}{\partial r} + Y\frac{\partial f\circ\psi}{\partial\theta}$$

が成り立つように X と Y を定める. (1), (2) から上式の右辺は

$$\cos\varphi((\sin\theta)X + r(\cos\theta)Y)\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi + \sin\varphi((\sin\theta)X + r(\cos\theta)Y)\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi + ((\cos\theta)X - r(\sin\theta)Y)\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi$$

に等しいため, $\frac{\partial f}{\partial x}\circ\psi$, $\frac{\partial f}{\partial y}\circ\psi$, $\frac{\partial f}{\partial z}\circ\psi$ の係数を比較して, 連立 1 次方程式 $\begin{cases}(\sin\theta)X + r(\cos\theta)Y = \frac{\sin^2\theta+1}{r\sin\theta} \\ (\cos\theta)X - r(\sin\theta)Y = \frac{\cos\theta}{r}\end{cases}$ を得る. この解は $\begin{cases}X = \frac{2}{r} \\ Y = \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\end{cases}$ で与えられるため, (6) より

$$\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial\varphi^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\circ\psi - \frac{2}{r}\frac{\partial f\circ\psi}{\partial r} - \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial f\circ\psi}{\partial\theta}$$

が得られる. この右辺の最後の 2 つの項を左辺に移項して, 左辺と右辺を入れ換えれば, 次の結果が得られる.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\circ\psi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\circ\psi + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\circ\psi = \frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial^2 r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial^2\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f\circ\psi}{\partial^2\varphi} + \frac{2}{r}\frac{\partial f\circ\psi}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial f\circ\psi}{\partial\theta}$$

微積分学 II 演習問題　第 6 回　2 変数関数の極大・極小

1. $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ が以下の式で与えられるとき，f の極値を求めよ．ただし (21) では $0 < a < b$, (24) では $a > 0$ とする．

(1) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 2x^3 + 2y^3 - 3x^2 - 3y^2$　(2) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^2 - 2x^3 + y^2 - 2y^4$

(3) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 2x^3 + 3x^2y + xy^2 + 2x^2 + xy$　(4) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 2x^3 - 3x^2y + y^3 - 6y^2 + 9y$

(5) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - 3x$　(6) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^3 + 3xy^2 + 6xy - 9x$

(7) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^4 + y^4 - 4xy$　(8) $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^4 - 2x^2y^2 + y^3 - \dfrac{13}{2}y^2 + 14y$

2. $X \subset \boldsymbol{R}^2$ と $f : X \to \boldsymbol{R}$ が以下の式で与えられるとき，f の極値を求めよ．

(1) $X = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, xy \neq 0 \right\}$,　$f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^2 + y^2 + xy - \dfrac{3}{x} - \dfrac{3}{y}$

(2) $X = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, xy \neq 0 \right\}$,　$f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = xy^2 + x^2 - 3\log|x| - 2\log|y|$

(3) $X = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x + 2y \neq 0 \right\}$,　$f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = xy^2 + \dfrac{9}{x + 2y}$

(4) $X = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, |xy| \leqq 1 \right\}$,　$f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \sin^{-1} xy$

(5) $X = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$,　$f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

3. $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ が $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 3ax^3 + bxy^2 + xy$ で与えられるとき，定数 a, b の値によって場合分けして f の極値を求めよ．

第 6 回の演習問題の解答

1. (1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 6y^2 - 6y$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} 6x(x-1) = 0 & \cdots (i) \\ 6y(y-1) = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(i) から $x = 0, 1$ であり, (ii) から $y = 0, 1$ だから, $\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1}$ で f は極値をとる可能性がある. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x - 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y - 6$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{x}{y}\right)^2 = 36(2x-1)(2y-1)$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{0} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{0}{0}\right)^2 = 36 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0} = -6 < 0$ より $\binom{0}{0}$ で f は極大値 0 をとる.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{1} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{0}{1}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{0}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{1}{0} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{1}{0}\right)^2 = -36 < 0$ より $\binom{0}{1}, \binom{1}{0}$ で f は極値をとらない.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{1}{1} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{1}{1}\right)^2 = 36 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{1} = 6 > 0$ より $\binom{1}{1}$ で f は極小値 -2 をとる.

(2) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 6x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 8y^3$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} 2x(1-3x) = 0 & \cdots (i) \\ 2y(1-4y^2) = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(i) から $x = 0, \frac{1}{3}$ であり, (ii) から $y = 0, \pm\frac{1}{2}$ だから, $\binom{0}{0}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - 12x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 - 24y^2$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{x}{y}\right)^2 = 4(6x-1)(12y^2-1)$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{0} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{0}{0}\right)^2 = 4 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0} = 2 > 0$ より $\binom{0}{0}$ で f は極小値 0 をとる.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} 0 \\ \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} 0 \\ \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} 0 \\ \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)^2 = -8 < 0$ より $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ で f は極値をとらない.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}\right)^2 = -4 < 0$ より $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ で f は極値をとらない.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)^2 = 8 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -2 < 0$ より $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \pm\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ で f は極大値 $\frac{35}{216}$ をとる.

(3) $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 6xy + y^2 + 4x + y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 2xy + x$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} 6x^2 + 6xy + y^2 + 4x + y = 0 & \cdots (i) \\ x(3x + 2y + 1) = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(ii) から $x = 0$ または $x = \frac{1}{3}(-2y-1)$. $x = 0$ の場合, (i) から $y^2 + y = 0$ だから $y = 0, -1$. $x = \frac{1}{3}(-2y-1)$ の場合, (i) から $y^2 + 3y + 2 = 0$ だから $y = -1, -2$. 従って $\binom{0}{0}, \binom{0}{-1}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}, \binom{1}{-2}$ で f は極値をとる可能性がある. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x + 6y + 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x + 2y + 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{x}{y}\right)^2 = 4x(6x+3y+2) - (6x+2y+1)^2$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{0} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{0}{0}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{-1} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{0}{-1}\right)^2 = -1 < 0$ より $\binom{0}{0}, \binom{0}{-1}$ で f は極値をとらない.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}\right)^2 = \frac{1}{3} > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix} = 2 > 0$ より $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ で f は極小値 $-\frac{1}{27}$ をとる.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{-2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{1}{-2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{1}{-2}\right)^2 = -1 < 0$ より $\binom{1}{-2}$ で f は極値をとらない.

(4) $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6xy$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2 + 3y^2 - 12y + 9$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} 6x(x-y) = 0 & \cdots (i) \\ x^2 - y^2 + 4y - 3 = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(i) から $x = 0$ または $x = y$. $x = 0$ の場合, (ii) より $y = 1$ または $y = 3$. $x = y$ の場合, (ii) より $y = \frac{3}{4}$. 従って $\binom{0}{1}$ $\binom{0}{3}, \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性がある.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x - 6y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y - 12$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{x}{y}\right)^2 = 36(2xy + 2y - 4x - x^2 - y^2)$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{1} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{0}{1}\right)^2 = 36 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{1} = -6 < 0$ より $\binom{0}{1}$ で f は極大値 4 をとる.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{3} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{0}{3}\right)^2 = -108 < 0$ より $\binom{0}{3}$ で f は極値をとらない.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}\right)^2 = -54 < 0$ より $\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$ で f は極値をとらない.

(5) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6xy + 3y^2 - 3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2 + 6xy$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0 & \cdots (i) \\ x(x - 2y) = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(ii) より $x = 0$ または $x = 2y$ である. $x = 0$ の場合は (i) より $y = \pm 1$ であり, $x = 2y$ の場合は (i) より $y^2 - 1 = 0$ だから $y = \pm 1$ である. 従って, $\pm\binom{0}{1}$, $\pm\binom{2}{1}$ で f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 6y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6x + 6y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{x}{y}\right)^2 = 36y(x - y)$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{\pm 1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{\pm 1} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{0}{\pm 1}\right)^2 = -36 < 0$ より f は $\pm\binom{0}{1}$ で極値をとらない.
$\binom{x}{y} = \pm\binom{2}{1}$ ならば $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{x}{y}\right)^2 = 36 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{2}{1} = 6 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{-2}{-1} = -6 < 0$ だから f は $\binom{2}{1}$ において極小値 -4 をとり, $\binom{-2}{-1}$ において極大値 4 をとる.

(6) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 + 6y - 9$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy + 6x$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0 & \cdots (i) \\ x(y + 1) = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(ii) から $x = 0$ または $y = -1$. $x = 0$ の場合, (i) より $y = 1$ または $y = -3$. $y = -1$ の場合, (i) より $x = \pm 2$. 従って, $\binom{0}{1}$, $\binom{0}{-3}$, $\binom{\pm 2}{-1}$ で f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y + 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{x}{y}\right)^2 = 36(x^2 - (y + 1)^2)$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{1} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{0}{1}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{-3}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{-3} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{0}{-3}\right)^2 = -144 < 0$ より, $\binom{0}{1}$, $\binom{0}{-3}$ では f は極値をとらない.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{2}{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{2}{-1} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{2}{-1}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{-2}{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{-2}{-1} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{-2}{-1}\right)^2 = 144 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{2}{-1} = 12 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{-2}{-1} = -12 < 0$ より $\binom{2}{-1}$ で f は極小値 -16 をとり, $\binom{-2}{-1}$ で f は極大値 16 をとる.

(7) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 & \cdots (i) \\ 4y^3 - 4x = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(i) から $y = x^3$ だから (ii) に代入して $x^9 - x = 0$. よって $x = 0$ または $x = \pm 1$. $x = 0, 1, -1$ の場合, (ii) よりそれぞれ $y = 0, 1, -1$ である. 従って, $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \binom{-1}{-1}$ で f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{x}{y}\right)^2 = 144x^2y^2 - 16$.
$\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$ の場合, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{0} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{0}{0}\right)^2 = -16 < 0$ より $\binom{0}{0}$ で f は極値をとらない.
$\binom{x}{y} = \binom{1}{1}$ の場合, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{1} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{0}{1}\right)^2 = 128 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{1} = 12 > 0$ より $\binom{1}{1}$ で f は極小値 $f\binom{1}{1} = -2$ をとる.
$\binom{x}{y} = \binom{-1}{-1}$ の場合, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{-1}{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{1} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{0}{1}\right)^2 = 128 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{1} = 12 > 0$ より $\binom{-1}{-1}$ で f は極小値 $f\binom{1}{1} = -2$ をとる.

(8) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4xy^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -4x^2y + 3y^2 - 13y + 14$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} x(x-y)(x+y) = 0 & \cdots (i) \\ -4x^2y + 3y^2 - 13y + 14 = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(i) から $x = 0$ または $x = y$ または $x = -y$. $x = 0$ の場合, (ii) より $y = 2$ または $y = \frac{7}{3}$. $x = y$ の場合, (ii) より $y = 1$. $x = -y$ の場合, (ii) より $y = 1$. 従って $\binom{0}{2}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$, $\binom{1}{1}$, $\binom{-1}{1}$ で f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4y^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -8xy$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4x^2 + 6y - 13$ だから
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{x}{y}\right)^2 = 4((3x^2 - y^2)(-4x^2 + 6y - 13) - 16x^2y^2)$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{0}{2}\right)^2 = 16 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{2} = -16 < 0$ より $\binom{0}{2}$ で f は極大値 10 をとる.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}\right)^2 = -\frac{252}{9} < 0$ より $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$ で f は極値をとらない.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{1}{1} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{1}{1}\right)^2 = -152 < 0$ より $\binom{1}{1}$ で f は極値をとらない.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{-1}{1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{-1}{1} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{-1}{1}\right)^2 = -152 < 0$ より $\binom{-1}{1}$ で f は極値をとらない.

2. (1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y + \frac{3}{x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y + \frac{3}{y^2}$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} 2x + y + \frac{3}{x^2} = 0 & \cdots (i) \\ x + 2y + \frac{3}{y^2} = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(i) から $y = -2x - \frac{3}{x^2}$ であり, (ii) より $xy^2 + 2y^3 + 3 = 0$ だから, この式の y に $-2x - \frac{3}{x^2}$ を代入して, 両辺に x^6 をかければ $x^3(2x^3+3)^2 - 2(2x^3+3)^3 + 3 = 0$ となる. $X = 2x^3 + 3$ とおいて, x^3 に $\frac{X-3}{2}$ を代入すると $\frac{X^2(X-3)}{2} - 2X^3 + 3 = 0$ だから X についての 3 次方程式 $X^3 + X^2 - 2 = 0$ が得られ, この左辺は $(X-1)(X^2+2X+2)$ と因数分解するため, 実数解は $X = 1$ のみである. 故に $2x^3 + 3 = 1$ で, x は実数だから $x = -1$ となるため, $y = -1$ である. 従って, $\binom{-1}{-1}$ で f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - \frac{6}{x^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 - \frac{6}{y^3}$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{-1}{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{-1}{-1} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{-1}{-1}\right)^2 = 63 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{-1}{-1} = 8 > 0$.
よって f は $\binom{-1}{-1}$ において極小値 9 をとる.

(2) $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 2x - \frac{3}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - \frac{2}{y}$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} y^2 + 2x - \frac{3}{x} = 0 & \cdots (i) \\ xy - \frac{1}{y} = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(ii) から $x = \frac{1}{y^2}$ であり, これを (i) に代入して両辺に y^2 をかければ $y^4 - 1 = 0$ が得られるため, $y = \pm 1$ である. 従って, $\binom{1}{\pm 1}$ で f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + \frac{3}{x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x + \frac{2}{y^2}$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{\pm 1}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{1}{\pm 1} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{1}{\pm 1}\right)^2 = 16 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{1}{\pm 1} = 5 > 0$.
よって f は $\binom{1}{\pm 1}$ において極小値 2 をとる.

(3) $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - \frac{9}{(x+2y)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - \frac{18}{(x+2y)^2}$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} y^2 - \frac{9}{(x+2y)^2} = 0 & \cdots (i) \\ xy - \frac{9}{(x+2y)^2} = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

$(i) - (ii)$ から $y(y - x) = 0$ だから $y = 0$ または $y = x$. $y = 0$ の場合は (i) を満たす x は存在しない. $y = x$ の場合は (i) $x^2 - \frac{1}{x^2} = 0$ だから $x = \pm 1$ である. 従って, $\binom{x}{y} = \pm\binom{1}{1}$ で f は極値をとる可能性がある. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{18}{(x+2y)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y + \frac{36}{(x+2y)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x + \frac{72}{(x+2y)^3}$ だから $\binom{x}{y} = \pm\binom{1}{1}$ のとき $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{x}{y}\right)^2 = -\frac{78}{9} < 0$ となるため, f は極値をとらない.

(4) $|xy| < 1$ の場合, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと $x = y = 0$ である. 従って, $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$ で f は極値をとる可能性がある. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{xy^3}{(1-x^2y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(1-x^2y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^3y}{(1-x^2y^2)^{\frac{3}{2}}}$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{0}{0}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{0}{0} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{0}{0}\right)^2 = -1 < 0$ となるため, $\left\{\binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, |xy| < 1\right\}$ の範囲では f は極値をとらない.
任意の $\binom{x}{y} \in X$ に対し, $-\frac{\pi}{2} \leqq f\binom{x}{y} \leqq \frac{\pi}{2}$ であり, t を 0 でない任意の実数とするとき, $f\begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix} = \frac{\pi}{2}$, $f\begin{pmatrix} t \\ -\frac{1}{t} \end{pmatrix} = -\frac{\pi}{2}$ となるため, f は $\begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}$ で最大値 $\frac{\pi}{2}$ をとり, $\begin{pmatrix} t \\ -\frac{1}{t} \end{pmatrix}$ で最小値 $-\frac{\pi}{2}$ をとる.

(5) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1-x^2-y^2}}$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ を満たす x, y は存在しないため, $\left\{\binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\, 0 < x^2 + y^2 < 1\right\}$ において, f は極値をとらない. 任意の $\binom{x}{y} \in X$ に対し, $0 \leqq \sqrt{1 - x^2 - y^2} \leqq 1$ だから $0 \leqq f\binom{x}{y} \leqq \frac{\pi}{2}$ であり, 任意の $0 \leqq \theta < 2\pi$ に対して $f\binom{\cos\theta}{\sin\theta} = 0$, $f\binom{0}{0} = \frac{\pi}{2}$ だから f は $\binom{0}{0}$ で最大値 $\frac{\pi}{2}$ をとり, $f\binom{\cos\theta}{\sin\theta}$ で最小値 0 をとる.

3. $\frac{\partial f}{\partial x} = 9ax^2 + by^2 + y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2bxy + x$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} 9ax^2 + by^2 + y = 0 & \cdots(i) \\ x(2by + 1) = 0 & \cdots(ii) \end{cases}$$

(ii) より $x = 0$ または $y = -\frac{1}{2b}$ ($b \neq 0$ の場合) である. $x = 0$ ならば (i) より $y = 0$ または $y = -\frac{1}{b}$ ($b \neq 0$ の場合) である. $y = -\frac{1}{2b}$ ならば (i) より $9ax^2 = \frac{1}{4b}$ だから $a = 0$ または $ab < 0$ ならば (i) を満たす実数 x は存在せず, $ab > 0$ ならば $x = \pm\frac{1}{6\sqrt{ab}}$ である. 従って, $ab > 0$ ならば $\binom{0}{0}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{b} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \pm\frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性があり, $b \neq 0$ かつ $ab \leqq 0$ ならば $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{b} \end{pmatrix}$ で f は極値をとる可能性があり, $b = 0$ ならば $\binom{0}{0}$ のみで f は極値をとる可能性がある.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 9ax$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2by + 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2bx$ だから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{x}{y}\right)^2 = 18abx^2 - (2by + 1)^2$ である.
$\binom{x}{y} = \binom{0}{0}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{b} \end{pmatrix}$ ならば $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\binom{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\binom{x}{y} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\binom{x}{y}\right)^2 = -1 < 0$ だから f は $\binom{0}{0}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{b} \end{pmatrix}$ では極値をとらない.
$ab > 0$ の場合, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \pm\frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\begin{pmatrix} \pm\frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} \pm\frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}\right)^2 = \frac{1}{2} > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \pm\frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix} = \pm\frac{3a}{2\sqrt{ab}}$ (複号同順) である. 故に $a > 0$ ならば $\begin{pmatrix} \frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}$ において f は極小値 $-\frac{1}{36b\sqrt{ab}}$ をとり, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}$ において f は極大値 $\frac{1}{36b\sqrt{ab}}$ をとり, $a < 0$ ならば $\begin{pmatrix} \frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}$ において f は極大値 $-\frac{1}{36b\sqrt{ab}}$ をとり, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}$ において f は極小値 $\frac{1}{36b\sqrt{ab}}$ をとる. 以上から $ab \leqq 0$ ならば f は極値をとらず, $a > 0$ かつ $b > 0$ ならば $\begin{pmatrix} \frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}$ において f は極小値 $-\frac{1}{36b\sqrt{ab}}$ をとり, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}$ において f は極大値 $\frac{1}{36b\sqrt{ab}}$ をとり, $a < 0$ かつ $b < 0$ ならば $\begin{pmatrix} \frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}$ において f は極大値 $-\frac{1}{36b\sqrt{ab}}$ をとり, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{6\sqrt{ab}} \\ -\frac{1}{2b} \end{pmatrix}$ において f は極小値 $\frac{1}{36b\sqrt{ab}}$ をとる.

微積分学 II 演習問題　第 7 回　陰関数の極値

1. y を x の関数とみなしたとき, 次の関係式で与えられる陰関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ.

(1) $x^2 - 2xy^2 + 6xy + 16 = 0$　(2) $2xy^2 + x^2y - 8 = 0$　(3) $x^3 - 2y^3 + 3x^2y + 2 = 0$

(4) $\log(x^2 + y^2) - 2\tan^{-1}\dfrac{y}{x} = 0$　(5) $x + 2\log y - e^x y^3 = 0$　(6) $x^3 + y^3 - 3x^2y - 1 = 0$

(7) $x^2y - 2y^3 + x^2 + y^2 + y = 0$　(8) $x^3y^3 - x + y = 0$　(9) $x^3 - 3xy + 2y^2 - 4y = 0$

(10) $x^2y + 4xy^2 + 4y^3 + x^2 + 4xy + 3y^2 + 2y = 0$　(11) $x^4 + 4xy^3 - 3y = 0$　(12) $x^4 + 2x^2 + y^3 - y = 0$

(13) $(y + 1)x^2 - 2y(y - 1)x + y(y^2 - 1) = 0$

第 7 回の演習問題の解答

1. (1) $F\binom{x}{y} = x^2-2xy^2+6xy+16$ によって $F:\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x-2y^2+6y$ だから $F\binom{x}{y} = \frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y} = 0$ とおくと, $\begin{cases} x^2-2xy^2+6xy+16=0 & \cdots(i) \\ x-y^2+3y=0 & \cdots(ii) \end{cases}$. (ii) から $x=y^2-3y$ より (i) に代入して $-y^4+6y^3-9y^2+16=0$ より $(y+1)(y-4)(y^2-3y+4)=0$ を得るため, $y=-1,4$ である. 従って $F\binom{x}{y} = \frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y} = 0$ が成り立つのは $\binom{x}{y} = \binom{4}{-1}, \binom{4}{4}$ の場合である.

$\frac{\partial F}{\partial y} = -4xy+6x$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2$ より f が $f(4)=-1$ を満たす場合, $f''(4) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\binom{4}{-1}}{\frac{\partial F}{\partial y}\binom{4}{-1}} = -\dfrac{1}{20} < 0$ となるため, f は 4 で極大値 -1 をとり, f が $f(4)=4$ を満たす場合, $f''(4) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\binom{4}{4}}{\frac{\partial F}{\partial y}\binom{4}{4}} = \dfrac{1}{20} > 0$ となるため, f は 4 で極小値 4 をとる.

(2) $F\binom{x}{y} = 2xy^2+x^2y-8$ によって $F:\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x} = 2y^2+2xy$ だから $F\binom{x}{y} = \frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y} = 0$ とおくと, $\begin{cases} 2xy^2+x^2y-8=0 & \cdots(i) \\ y(y+x)=0 & \cdots(ii) \end{cases}$. (ii) から $y=0$ または $y=-x$. $y=0$ の場合, (i) を満たす x は存在しない. $y=-x$ の場合, (i) より $x=2$ である. 従って, $F\binom{x}{y} = \frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y} = 0$ が成り立つのは $\binom{x}{y} = \binom{2}{-2}$ の場合である.

$\frac{\partial F}{\partial y} = 4xy+x^2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2y$ より f が $f(2)=-2$ を満たす場合, $f''(2) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\binom{2}{-2}}{\frac{\partial F}{\partial y}\binom{2}{-2}} = -\dfrac{1}{3} < 0$ となるため, f は 2 で極大値 -2 をとる.

(3) $F\binom{x}{y} = x^3-2y^3+3x^2y+2$ によって $F:\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2+6xy$ だから $F\binom{x}{y} = \frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y} = 0$ とおくと, $\begin{cases} x^3-2y^3+3x^2y+2=0 & \cdots(i) \\ x(x+2y)=0 & \cdots(ii) \end{cases}$. (ii) から $x=0$ または $x=-2y$. $x=0$ の場合, (i) より $y=1$ であり, $x=-2y$ の場合, (i) より $y=-1$ である. 従って, $F\binom{x}{y} = \frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y} = 0$ が成り立つのは $\binom{x}{y} = \binom{0}{1}, \binom{2}{-1}$ の場合である.

$\frac{\partial F}{\partial y} = -6y^2+3x^2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x+6y$ より f が $f(0)=1$ を満たす場合, $f''(0) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\binom{0}{1}}{\frac{\partial F}{\partial y}\binom{0}{1}} = 1 > 0$ となるため, f は 0 で極小値 1 をとり, f が $f(2)=-1$ を満たす場合, $f''(2) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\binom{2}{-1}}{\frac{\partial F}{\partial y}\binom{2}{-1}} = -1 < 0$ となるため, f は 2 で極大値 -1 をとる.

(4) $F\binom{x}{y} = \log(x^2+y^2) - 2\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ によって $F:\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2(x+y)}{x^2+y^2}$ だから $F\binom{x}{y} = \frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y} = 0$ とおくと, $\begin{cases} \log(x^2+y^2) - 2\tan^{-1}\dfrac{y}{x} = 0 & \cdots(i) \\ x+y=0 & \cdots(ii) \end{cases}$. (ii) から $y=-x$. (i) に代入すれば, $2\log|x| + \log 2 + \frac{\pi}{2} = 0$ だから, $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$ である. 従って, $F\binom{x}{y} = \frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y} = 0$ が成り立つのは $\binom{x}{y} = \pm\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}} \end{pmatrix}$ の場合である. $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2(-x+y)}{x^2+y^2}$,

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{2(-x^2-2xy+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ より f が $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$ を満たす場合, $f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}\right) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}} \end{pmatrix}}{\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}} \end{pmatrix}} = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} > 0$ となるため, f は $\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$ で極小値 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$ をとり, f が $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$ を満たす場合, $f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}\right) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}} \end{pmatrix}}{\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}} \end{pmatrix}} = -\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} < 0$ となるため, f は $-\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$ で極大値 $\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$ をとる.

(5) $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x+2\log y-e^xy^3$ によって $F:\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x\in\boldsymbol{R},\,y>0\right\}\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x}=1-e^xy^3$ だから $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ とおくと, $\begin{cases}x+2\log y-e^xy^3=0 & \cdots(i)\\ 1-e^xy^3=0 & \cdots(ii)\end{cases}$. (ii) から $y=e^{-\frac{x}{3}}$. (i) に代入すれば, $\frac{x}{3}-1=0$ だから, $x=3$ である. 従って, $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ が成り立つのは $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\\frac{1}{e}\end{pmatrix}$ の場合である. $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2}{y}-3e^xy^2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-e^xy^3$ より f が $f(3)=\frac{1}{e}$ を満たす場合, $f''(3)=-\dfrac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\begin{pmatrix}3\\\frac{1}{e}\end{pmatrix}}{\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}3\\\frac{1}{e}\end{pmatrix}}=-\dfrac{1}{e}<0$ となるため, f は 3 で極大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる.

(6) $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^3+y^3-3x^2y-1$ によって $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2-6xy$ だから $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ とおくと, $\begin{cases}x^3+y^3-3x^2y-1=0 & \cdots(i)\\ x(x-2y)=0 & \cdots(ii)\end{cases}$. (ii) から $x=0$ または $x=2y$. $x=0$ の場合, (i) より $y=1$ であり, $x=2y$ の場合, (i) より $-3y^3-1=0$ だから $y=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ である. 従って, $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ が成り立つのは $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right),\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}\\-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\end{pmatrix}$ の場合である.

$\frac{\partial F}{\partial y}=3y^2-3x^2$, $\frac{\partial^2F}{\partial x^2}=6x-6y$ より f が $f(0)=1$ を満たす場合, $f''(0)=-\dfrac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)}=2>0$ となるため, f は 0 で極小値 1 をとり, f が $f\left(-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ を満たす場合, $f''\left(-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}\right)=-\dfrac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}\\-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\end{pmatrix}}{\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}\\-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\end{pmatrix}}=-\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}}<0$ となるため, f は $-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$ で極大値 $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ をとる.

(7) $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^2y-2y^3+x^2+y^2+y$ によって $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x}=2xy+2x$ だから $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ とおくと,

$$\begin{cases}x^2y-2y^3+x^2+y^2+y=0 & \cdots(i)\\ x(y+1)=0 & \cdots(ii)\end{cases}.$$

(ii) から $x=0$ または $y=-1$. $x=0$ の場合は (i) から $y(y-1)(2y+1)=0$ だから $y=0,1,-\frac{1}{2}$ である. $y=-1$ の場合は (i) を満たす x は存在しない. 従って, $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ が成り立つのは $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ の場合である.

$\frac{\partial F}{\partial y}=x^2-6y^2+2y+1$ より $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=1\neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)=-3\neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=-\frac{3}{2}\neq 0$ だから, 方程式 $x^2y-2y^3+x^2+y^2+y=0$ により定まる陰関数 f_0, f_1, $f_{-\frac{1}{2}}$ で, $f_0(0)=0$, $f_1(0)=1$, $f_{-\frac{1}{2}}(0)=-\frac{1}{2}$ を満たすものがある.

$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}=2y+2$ より $f_0''(0)=-\dfrac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}=-2<0$ となるため, f_0 は 0 で極大値 0 をとる.

$f_1''(0)=-\dfrac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)}=\frac{4}{3}>0$ となるため, f_1 は 0 で極小値 1 をとる.

$f_{-\frac{1}{2}}''(0)=-\dfrac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}}{\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}}=\frac{2}{3}>0$ となるため, $f_{-\frac{1}{2}}$ は 0 で極小値 $-\frac{1}{2}$ をとる.

(8) $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^3y^3-x+y$ によって $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2y^3-1$ だから $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ とおくと, $\begin{cases}x^3y^3-x+y=0 & \cdots(i)\\ 3x^2y^3-1=0 & \cdots(ii)\end{cases}$. (ii) より $x^3y^3=\dfrac{x}{3}$ だから, (i) に代入して $y=\dfrac{2x}{3}$ を得る. (ii) に代入すれば, $\dfrac{8x^5}{9}=1$ より $x=2^{-\frac{3}{5}}3^{\frac{2}{5}}$ である. 従って, $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ が成り立つのは $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2^{-\frac{3}{5}}3^{\frac{2}{5}}\\2^{\frac{2}{5}}3^{-\frac{3}{5}}\end{pmatrix}$ の場合である.

$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^3y^2+1$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6xy^3$ より f が $f\left(2^{-\frac{3}{5}}3^{\frac{2}{5}}\right) = 2^{\frac{2}{5}}3^{-\frac{3}{5}}$ を満たす場合, $f''\left(2^{-\frac{3}{5}}3^{\frac{2}{5}}\right) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix} 2^{-\frac{3}{5}}3^{\frac{2}{5}} \\ 2^{\frac{2}{5}}3^{-\frac{3}{5}} \end{pmatrix}}{\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} 2^{-\frac{3}{5}}3^{\frac{2}{5}} \\ 2^{\frac{2}{5}}3^{-\frac{3}{5}} \end{pmatrix}} = -\frac{4\sqrt[5]{8}}{5\sqrt[5]{9}} < 0$ となるため, f は $2^{-\frac{3}{5}}3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\frac{9}{8}}$ で極大値 $2^{\frac{2}{5}}3^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{\frac{4}{27}}$ をとる.

(9) $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^3-3xy+2y^2-4y$ によって $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2-3y$ だから $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0$ とおくと, $\begin{cases} x^3-3xy+2y^2-4y=0 & \cdots(i) \\ x^2-y=0 & \cdots(ii) \end{cases}$. (ii) から $y = x^2$ より (i) に代入して $2x^4-2x^3-4x^2 = 0$ より $x^2(x+1)(x-2) = 0$ を得るため, $x = -1, 0, 2$ である. 従って, $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0$ が成り立つのは $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ の場合である.

$\frac{\partial F}{\partial y} = -3x+4y-4$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x$ より f が $f(-1) = 1$ を満たす場合, $f''(-1) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} = 2 > 0$ となるため, f は 4 で極小値 1 をとる. f が $f(0) = 0$ を満たす場合, $f''(0) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} = 0$ となるため, f の 0 における高次の微分係数を調べる. $x^3-3xf(x)+2f(x)^2-4f(x) = 0$ の両辺を 3 回 x で微分すれば, ライプニッツの公式から $3-3xf'''(x)-9f''(x)+4f'(x)^2+4f(x)f''(x)-4f'''(x) = 0$ だから $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ より $f'''(0) = \dfrac{3}{4} > 0$ を得る. 従って f'' は 0 の付近で単調に増加するため, 0 の前後で負から正に符号が変わる. 故に f' は 0 で極小値 0 をとるため, f' は 0 を除いた 0 の付近では正の値をとり, f は 0 の付近では単調に増加する. よって, $f(0) = 0$ を満たす場合の f は 0 で極値をとらない. f が $f(2) = 4$ を満たす場合, $f''(2) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)} = -2 < 0$ となるため, f は 2 で極大値 4 をとる.

(10) $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^2y+4xy^2+4y^3+x^2+4xy+3y^2+2y$ によって $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy+4y^2+2x+4y$ だから $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0$ とおくと,

$$\begin{cases} x^2y+4xy^2+4y^3+x^2+4xy+3y^2+2y=0 & \cdots(i) \\ xy+2y^2+x+2y=0 & \cdots(ii) \end{cases}.$$

(ii) から $(x+2y)(y+1) = 0$ だから $x = -2y$ または $y = -1$ である. $x = -2y$ の場合, (i) から $-y^2+2y = 0$ だから $y = 0$ または $y = 2$ である. $y = -1$ の場合, (i) に $y = -1$ を代入すれば $-3 = 0$ となって矛盾が生じるため, $y = -1$ である解は存在しない.

従って, $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0$ が成り立つのは $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ の場合である.
$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2+8xy+12y^2+4x+6y+2$ より $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 2 \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = -2 \neq 0$ だから, 方程式 $x^2y+4xy^2+4y^3+x^2+4xy+3y^2+2y = 0$ により定まる陰関数 f_0, f_1 で, $f_0(0) = 0$, $f_1(-4) = 2$ を満たすものがある.
$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2y+2$ より $f_0''(0) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} = -1 < 0$ となるため, f_0 は 0 で極大値 0 をとる.
$f_1''(-4) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)} = 3 > 0$ となるため, f_1 は -4 で極小値 2 をとる.

(11) $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^4+4xy^3-3y$ によって $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3+4y^3$ だから $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0$ とおくと, $\begin{cases} x^4+4xy^3-3y=0 & \cdots(i) \\ x^3+y^3=0 & \cdots(ii) \end{cases}$. (ii) から $y = -x$. (i) に代入すれば, $-3x^4+3x = 0$ だから $x = 0, 1$ である. 従って, $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0$ が成り立つのは $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ の場合である.
$\frac{\partial F}{\partial y} = 12xy^2-3$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 12x^2$ より f が $f(1) = -1$ を満たす場合, $f''(1) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)} = -\frac{4}{3} < 0$ となるため, f は 1 で極大値 -1 をとる. f が $f(0) = 0$ を満たす場合, $f''(0) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} = 0$ となるため, f の 0 における高次の微分係数を調べる. $x^4+4xf(x)^3-3f(x) = 0$ の両辺を 3 回 x で微分すれば, ライプニッツの公式から

$24x+4x(f(x)^3)'''+12(f(x)^3)''-3f'''(x)=0$ であり, $(f(x)^3)''=3f''(x)f(x)^2+6f'(x)^2f(x)$ かつ $f(0)=0$ だから $f'''(0)=0$ となることがわかる. さらにもう 1 回微分すれば $24+4x(f(x)^3)^{(4)}+16(f(x)^3)'''-3f^{(4)}(x)=0$ であり, $(f(x)^3)'''=3f'''(x)f(x)^2+18f''(x)f'(x)f(x)+6f'(x)^3$ かつ $f(0)=f'(0)=0$ だから $f^{(4)}(0)=8>0$ となることがわかる. 従って f''' は 0 の付近で単調に増加し, $f'''(0)=0$ より, 0 の前後で f''' の値の符号は負から正に変わる. 故に f'' は 0 で極小値 0 をとるため, f'' は 0 を除いた 0 の付近では正の値をとる. よって, f' は 0 の付近では単調に増加し, $f'(0)=0$ より f' の値の符号は負から正に変わるため, f は 0 で極小値 0 をとる.

(12) $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^4+2x^2+y^3-y$ によって $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x}=4x^3+4x$ だから $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ とおくと, $\begin{cases}x^4+2x^2+y^3-y=0 & \cdots(i)\\ x(x^2+1)=0 & \cdots(ii)\end{cases}$. (ii) から $x=0$ だから (i) から $y=0,\pm1$ である. 従って, $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ が成り立つのは $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right),\pm\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ の場合である.

$\frac{\partial F}{\partial y}=3y^2-1$ より $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=-1\neq0$, $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)=2\neq0$, $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right)=2\neq0$ だから, 方程式 $x^4+2x^2+y^3-y=0$ により定まる陰関数 f_0, f_1, f_{-1} で, $f_0(0)=0$, $f_1(0)=1$, $f_{-1}(0)=-1$ を満たすものがある.

$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}=12x^2+4$ より $f_0''(0)=-\dfrac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}=4>0$ となるため, f_0 は 0 で極小値 0 をとる.

$f_1''(0)=-\dfrac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)}=-2<0$ となるため, f_1 は 0 で極大値 1 をとる.

$f_{-1}''(0)=-\dfrac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right)}=-2<0$ となるため, f_{-1} は 0 で極大値 -1 をとる.

(13) $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=(y+1)x^2-2y(y-1)x+y(y^2-1)$ によって $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial F}{\partial x}=2(y+1)x-2y(y-1)$ だから $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ とおくと, $\begin{cases}(y+1)x^2-2y(y-1)x+y(y^2-1)=0 & \cdots(i)\\ 2(y+1)x-2y(y-1)=0 & \cdots(ii)\end{cases}$. $y=-1$ ならば (ii) は成立しないので, $y\neq-1$ である. 従って (ii) から $x=\dfrac{y(y-1)}{y+1}$. これを (i) に代入して両辺に $y-1$ をかければ, $-y^2(y-1)^2+y(y-1)(y+1)^2=0$ が得られる. この左辺を因数分解すれば $y(y-1)(3y+1)=0$ となるため, $y=0,1,-\frac{1}{3}$ である. 従って, $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ が成り立つのは $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{smallmatrix}\right)$ の場合である.

$\frac{\partial F}{\partial y}=x^2-2(2y-1)x+3y^2-1$ より $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=-1\neq0$, $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)=2\neq0$, $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{smallmatrix}\right)=2\neq0$ だから, 方程式 $(y+1)x^2-2y(y-1)x+y(y^2-1)=0$ により定まる陰関数 f_0, f_1, $f_{-\frac{1}{3}}$ で, $f_0(0)=0$, $f_1(0)=1$, $f_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{3}$ を満たすものがある.

$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}=2y+2$ より $f_0''(0)=-\dfrac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}=2>0$ となるため, f_0 は 0 で極小値 0 をとる.

$f_1''(0)=-\dfrac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)}=-2<0$ となるため, f_1 は 0 で極大値 1 をとる.

$f_{-\frac{1}{3}}''(0)=-\dfrac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{smallmatrix}\right)}=-\dfrac{2}{3}<0$ となるため, $f_{-\frac{1}{3}}$ は $\dfrac{2}{3}$ で極大値 $-\dfrac{1}{3}$ をとる.

微積分学 II 演習問題　第 8 回　条件付き極値

1. 以下の各問で与えられた $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 X で定義された関数 f の最大値と最小値を求めよ.

(1) $X = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \, x^2 - 4 \leqq y \leqq x + 2 \right\}$, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^3 - 3xy + 3y$

(2) $X = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \, 2x^2 + y^2 \leqq 2 \right\}$, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = xy + \sqrt{2}x$

(3) $X = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \, 0 \leqq y \leqq 3 - 2x^2 \right\}$, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = y^2 + 2x^2 y + 2x^4 - 2y$

(4) $X = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \, x^2 + y^2 \leqq 5 \right\}$, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^4 + y^4 - (x + y)^2$

2. 以下の各問で与えられた条件のもとで, 関数 f の極値を求めよ.

(1) $2xy^2 + x^2 y = 8$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x + 2y$ で定義される $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$.

(2) $x + 2\log y + e^x y^2 = 1$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x + y^2$ で定義される $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$.

(3) $y^4 - y^2 + x^2 = 0$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = xy$ で定義される $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$.

(4) $x^2 - 2xy^2 + 4xy + 1 = 0$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x + 2y$ で定義される $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$.

(5) $2x^4 - 2xy + y^2 + 6y + 5 = 0$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x - y$ で定義される $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$.

(6) $2x^3 + y^3 - 3x^2 y + 2 = 0$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^2 + y$ で定義される $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$.

第 8 回の演習問題の解答

1. f の最大値, 最小値はそれぞれ f の極大値, 極小値であるため, f が極値をとる候補の点をすべて求め, それらの点における f の値のうちで最大のものが f の最大値であり, 最小のものが f の最小値である. f が極値をとる候補の点を求めるには, f の定義域 X を内部と境界に分けて考え, それぞれにおいて極値の候補になる点を求める.

(1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 3$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 & \cdots (i) \\ -3x + 3 = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(i) から $x = 1$ であり, (ii) に代入すれば $y = 1$ が得られるため, X の内部に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\binom{1}{1}$ のみである.

X の境界は $\left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \, y = x^2 - 4, \, -2 \leqq x \leqq 3 \right\}$ と $\left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \, y = x + 2, \, -2 \leqq x \leqq 3 \right\}$ の合併集合だから, X の境界に f の定義域を制限した関数の極値は, $f_1(t) = f\left(\binom{t}{t^2-4} \right)$, $f_2(t) = f\left(\binom{t}{t+2} \right)$ によって定められる関数 $f_1, f_2 : [-2, 3] \to \boldsymbol{R}$ の極値になっている. $f_1(t) = -2t^3 + 3t^2 + 12t - 12$ だから $f_1'(t) = -6(t+1)(t-2)$ となるため, f_1 は $[-2, -1]$, $[2, 3]$ で減少, $[-1, 2]$ で増加する. $f_2(t) = t^3 - 3t^2 - 3t + 6$ だから $f_2'(t) = 3(t^2 - 2t - 1)$ となるため, f_2 は $\left[-2, 1 - \sqrt{2}\right]$, $\left[1 + \sqrt{2}, 3\right]$ で増加, $\left[1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right]$ で減少する. 故に, X の境界に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\binom{-2}{0}$, $\binom{-1}{-3}$, $\binom{2}{0}$, $\binom{3}{5}$, $\binom{1-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$, $\binom{1+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$ のみである.

$f\binom{1}{1} = 1$, $f\binom{-2}{0} = -8$, $f\binom{-1}{-3} = -19$, $f\binom{2}{0} = 8$, $f\binom{3}{5} = 3$, $f\binom{1-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = 1 + 4\sqrt{2}$, $f\binom{1+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = 1 - 4\sqrt{2}$, であるため, f は $\binom{2}{0}$ において最大値 2 をとり, $\binom{-1}{-3}$ において最小値 -19 をとる.

(2) $\frac{\partial f}{\partial x} = y + \sqrt{2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと $x = 0$, $y = -\sqrt{2}$ であるが, $\binom{0}{-\sqrt{2}}$ は X の内部の点ではない. 従って f は X の内部では極値をとらない.

$F\binom{x}{y} = 2x^2 + y^2 - 2$ で $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定義する. $\frac{\partial F}{\partial x} = 4x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$ だから $\frac{\partial F}{\partial x}$ と $\frac{\partial F}{\partial y}$ は原点以外では同時に 0 にはならないが, 原点は X 上にはない. また, $\frac{\partial f}{\partial x} = y + \sqrt{2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$ より f が点 $\binom{x}{y}$ において極値をとるならば, $\lambda \in \boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 2 = 0 & \cdots (i) \\ y + \sqrt{2} = 4\lambda x & \cdots (ii) \\ x = 2\lambda y & \cdots (iii) \end{cases}$$

(ii) の両辺に y をかけた式から (iii) の両辺に $2x$ をかけた式を辺々引くと $y^2 + \sqrt{2}y - 2x^2 = 0$ だから, この等式と (i) を辺々加えれば $2y^2 + \sqrt{2}y - 2 = 0$ が得られる. 2 次方程式の解の公式から $y = -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ がこの方程式の解である. (i) から, $y = -\sqrt{2}$ の場合は $x = 0$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ の場合は, $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ である. 故に, f が極値をとる可能性があるのは $\binom{0}{-\sqrt{2}}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ のみである.

$f\binom{0}{-\sqrt{2}} = 0$, $f\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$, $f\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = -\frac{3\sqrt{6}}{4}$ であるため, f は $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ において最大値 $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ をとり, $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ において最小値 $-\frac{3\sqrt{6}}{4}$ をとる.

(3) $\frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 + 4xy$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 2y - 2$ より $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ とおくと

$$\begin{cases} 8x^3 + 4xy = 0 & \cdots (i) \\ 2x^2 + 2y - 2 = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$$

(ii) から $y = 1 - x^2$ であり, (i) に代入すれば $4x(x^2 + 1) = 0$ が得られるため, $x = 0$ である. よって X の内部に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\binom{0}{1}$ のみである.

X の境界は $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,y=0,\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\leqq x\leqq\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$ と $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,y=3-2x^2,\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\leqq x\leqq\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$ の合併集合だから, X の境界に f の定義域を制限した関数の極値は, $f_1(t)=f\left(\begin{smallmatrix}t\\0\end{smallmatrix}\right)$, $f_2(t)=f\left(\begin{smallmatrix}t\\3-2t^2\end{smallmatrix}\right)$ によって定められる関数 $f_1,f_2:\left[-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right]\to\boldsymbol{R}$ の極値になっている. $f_1(t)=2t^4$ だから f_1 は $\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ で最大になり, 0 で最小である. $f_2(t)=2t^4-2t^2+3$ だから $f_2'(t)=4t(2t^2-1)$ となるため, f_2 は $\left[-\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ で減少, $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right]$, $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ で増加する. 故に, X の境界に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix}\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\\2\end{pmatrix}$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\3\end{smallmatrix}\right)$ のみである.

$f\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)=-1$, $f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=0$, $f\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{2}\\0\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{2}\\0\end{pmatrix}=\frac{9}{2}$, $f\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\2\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\2\end{pmatrix}=\frac{3}{2}$, $f\left(\begin{smallmatrix}0\\3\end{smallmatrix}\right)=3$ であるため, f は $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{2}\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{2}\\0\end{pmatrix}$ において最大値 $\frac{9}{2}$ をとり, $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ において最小値 -1 をとる.

(4) $\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3-2x-2y$, $\frac{\partial f}{\partial y}=4y^3-2x-2y$ より $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ とおくと

$$\begin{cases}4x^3-2x-2y=0 & \cdots(i)\\ 4y^3-2x-2y=0 & \cdots(ii)\end{cases}$$

$(i)-(ii)$ から $4(x^3-y^3)=0$ だから, $x=y$ である. よって (i) から $x^3-x=0$ だから, $x=0,\pm1$ が得られ, X の内部に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ のみである.

$F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^2+y^2-5$ で $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定義する. $\frac{\partial F}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}=2y$ だから $\frac{\partial F}{\partial x}$ と $\frac{\partial F}{\partial y}$ は原点以外では同時に 0 にはならないが, 原点は X の境界上にはない. 従って, X の境界に f の定義域をを制限した関数が点 $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ において極値をとるならば, $\lambda\in\boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases}x^2+y^2-5=0 & \cdots(i)\\ 4x^3-2x-2y=2\lambda x & \cdots(ii)\\ 4y^3-2x-2y=2\lambda y & \cdots(iii)\end{cases}$$

$(ii)-(iii)$ より $2(x-y)(2x^2+2xy+2y^2-\lambda)=0$ が得られるため, $x=y$ または $\lambda=2x^2+2xy+2y^2$ である. $x=y$ の場合は (i) から $x=y=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$ である. $\lambda=2x^2+2xy+2y^2$ の場合, (ii) に代入すれば $(x+y)(2xy+1)=0$ が得られるため, $x=-y$ または $y=-\frac{1}{2x}$ である. $x=-y$ の場合は (i) から $x=-y=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$ である. $y=-\frac{1}{2x}$ の場合は (i) から $4x^4-20x^2+1=0$ だから $x^2=\frac{10\pm4\sqrt{6}}{4}=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\pm1\right)^2$, 従って $x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\pm1$ (複号任意) である. 故に, X の境界に f の定義域を制限した関数が極値をとる可能性があるのは $\pm\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{10}}{2}\\\frac{\sqrt{10}}{2}\end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{10}}{2}\\-\frac{\sqrt{10}}{2}\end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{2}+1\\-\frac{\sqrt{6}}{2}+1\end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{2}-1\\-\frac{\sqrt{6}}{2}-1\end{pmatrix}$ のみである.

$f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=0$, $f\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)=f\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right)=-2$, $f\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{10}}{2}\\\frac{\sqrt{10}}{2}\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{10}}{2}\\-\frac{\sqrt{10}}{2}\end{pmatrix}=\frac{5}{2}$, $f\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{10}}{2}\\-\frac{\sqrt{10}}{2}\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{10}}{2}\\\frac{\sqrt{10}}{2}\end{pmatrix}=\frac{25}{2}$, $f\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{2}+1\\-\frac{\sqrt{6}}{2}+1\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{2}-1\\\frac{\sqrt{6}}{2}-1\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{2}-1\\-\frac{\sqrt{6}}{2}-1\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{2}+1\\\frac{\sqrt{6}}{2}+1\end{pmatrix}=\frac{41}{2}$ であるため, f は $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{2}+1\\-\frac{\sqrt{6}}{2}+1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{2}-1\\\frac{\sqrt{6}}{2}-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{2}-1\\-\frac{\sqrt{6}}{2}-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{2}+1\\\frac{\sqrt{6}}{2}+1\end{pmatrix}$ において最大値 $\frac{41}{2}$ をとり, $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ において最小値 -2 をとる.

2. (1) $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=2xy^2+x^2y-8$ で $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定義する. $\frac{\partial F}{\partial x}=2y^2+2xy$, $\frac{\partial F}{\partial y}=4xy+x^2$ だから $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=0$ を満たす点は原点のみであるが, 原点は条件 $2xy^2+x^2y=8$ を満たさない. 故に f が条件 $2xy^2+x^2y=8$ のもとで, 点 $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ において極値をとるならば, $\frac{\partial f}{\partial x}=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2$ より $\lambda\in\boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases}2xy^2+x^2y=8 & \cdots(i)\\ 1=\lambda(2y^2+2xy) & \cdots(ii)\\ 2=\lambda(4xy+x^2) & \cdots(iii)\end{cases}$$

(ii) を (iii) で辺々割ると $\frac{4xy+x^2}{2y^2+2xy}=2$ が得られるため, $x^2-4y^2=0$ である. 従って $x=\pm2y$ となり, (i) より

$x=2y$ の場合は $y=1$ で, $x=-2y$ の場合は (i) は成り立たない. 故に f が条件 $2xy^2+x^2y=8$ のもとで極値をとる可能性があるのは $\binom{2}{1}$ のみである.

$f\binom{x}{y}=z$ とおけば $x=z-2y$ だから, 点 $\binom{x}{y}$ が条件 $2xy^2+x^2y=8$ を満たすならば $yz^2-2y^2z=8$ が成り立つ. $G\binom{y}{z}=yz^2-2y^2z-8$ によって $G:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial G}{\partial z}=2yz-2y^2$ であり, $f\binom{2}{1}=4$ であることに注意すれば $\frac{\partial G}{\partial z}\binom{1}{4}=6\neq 0$ である. 従って, 陰関数定理により z を $yz^2-2y^2z=8$ から定まる, 1 を含む開区間で定義され, $g(1)=4$ を満たす陰関数 g とみなして, 1 で g が極値 4 をとるかどうかを以下で判定する.

$\frac{\partial G}{\partial y}=z^2-4yz$, $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}=-4z$ だから $g'(1)=-\frac{\frac{\partial G}{\partial y}\binom{1}{4}}{\frac{\partial G}{\partial z}\binom{1}{4}}=0$, $g''(1)=-\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\binom{1}{4}}{\frac{\partial G}{\partial z}\binom{1}{4}}=\frac{8}{3}>0$ となるため, g は 1 で極小値 4 をとる. 故に f は与えられた条件のもとで, $\binom{2}{1}$ において極小値 4 をとる.

(2) $F\binom{x}{y}=x+2\log y+e^xy^2-1$ で $F:\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\, y>0\right\}\to\boldsymbol{R}$ を定義すると $\frac{\partial F}{\partial x}=1+e^xy^2$, $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2(1+e^xy^2)}{y}$ である. 従って, F の定義域に属する任意の点 $\binom{x}{y}$ において $\frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y}>0$ だから, f が条件 $x^2-2xy^2+4xy+1=0$ のもとで, 点 $\binom{x}{y}$ において極値をとるならば, $\frac{\partial f}{\partial x}=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2y$ より $\lambda\in\boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases} x+2\log y+e^xy^2-1=0 & \cdots(i) \\ 1=\lambda(1+e^xy^2) & \cdots(ii) \\ 2y=\frac{2\lambda(1+e^xy^2)}{y} & \cdots(iii) \end{cases}$$

(ii) を (iii) で辺々割ると $2y=2$ だから, $y=1$ である. 従って (i) より $x+e^x-1=0$ となり, この左辺は x の単調増加関数で, $x=0$ のときの値は 0 であるため, この方程式の解は 0 のみである. 故に f が条件 $x+2\log y+e^xy^2=1$ のもとで極値をとる可能性があるのは $\binom{0}{1}$ のみである.

$f\binom{x}{y}=z$ とおけば $y^2=z-x$ だから, 点 $\binom{x}{y}$ が条件 $x+2\log y+e^xy^2=1$ を満たすならば $x+\log(z-x)+e^x(z-x)=1$ が成り立つ. $G\binom{x}{z}=x+\log(z-x)+e^x(z-x)-1$ によって $G:\left\{\binom{x}{z}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\, z>x\right\}\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial G}{\partial z}=\frac{1}{z-x}+e^x$ であり, $f\binom{0}{1}=1$ であることに注意すれば $\frac{\partial G}{\partial z}\binom{0}{1}=1\neq 0$ である. 従って, 陰関数定理により z を $x+\log(z-x)+e^x(z-x)=1$ から定まる, 0 を含む開区間で定義され, $g(0)=1$ を満たす陰関数 g とみなして, 0 で g が極値 1 をとるかどうかを以下で判定する.

$\frac{\partial G}{\partial x}=1-\frac{1}{z-x}+e^x(z-x-1)$, $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=-\frac{1}{(z-x)^2}+e^x(z-x-2)$ だから $g'(0)=-\frac{\frac{\partial G}{\partial x}\binom{0}{1}}{\frac{\partial G}{\partial z}\binom{0}{1}}=0$, $g''(1)=-\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\binom{0}{1}}{\frac{\partial G}{\partial z}\binom{0}{1}}=1>0$ となるため, g は 0 で極小値 2 をとる. 故に f は与えられた条件のもとで, $\binom{0}{1}$ において極小値 1 をとる.

(3) $F\binom{x}{y}=y^4-y^2+x^2$ で $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定義する. $\frac{\partial F}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}=4y^3-2y$ だから $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=0$ とおくと, $x=0, 2y^3-y=0$ である. よって $\binom{0}{0}$, $\begin{pmatrix}0\\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ において $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=0$ であるが, これらのうち条件 $y^4-y^2+x^2=0$ を満たすものは原点 $\binom{0}{0}$ のみである.

点 $\binom{x}{y}$ が曲線 $y^4-y^2+x^2=0$ 上で x 座標が正の部分にあるとき, $x=|y|\sqrt{1-y^2}$ $(y\in[-1,1])$ と表される. このとき $f\binom{x}{y}=y|y|\sqrt{1-y^2}$ だから, 点 $\binom{x}{y}$ が曲線 $y^4-y^2+x^2=0$ 上で x 座標が正の部分を動きながら y が負から正に増大するとき, $f\binom{x}{y}$ は負から正に符号を変えるため, 条件 $y^4-y^2+x^2=0$ のもとで, f は原点において極値をとらない.

原点以外の点 $\binom{x}{y}$ で f が条件 $y^4-y^2+x^2=0$ のもとで極値をとるならば, $\frac{\partial f}{\partial x}=y$, $\frac{\partial f}{\partial y}=x$ より $\lambda\in\boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases} y^4-y^2+x^2=0 & \cdots(i) \\ y=2\lambda x & \cdots(ii) \\ x=\lambda(4y^3-2y) & \cdots(iii) \end{cases}$$

$x=0$ ならば (ii) より $y=0$ となるため $\binom{x}{y}$ が原点と異なるという仮定に反する. よって $x\neq 0$ だから (ii) を (iii) で辺々割ると $\frac{y}{x}=\frac{x}{2y^3-y}$ である. この両辺に $x(2y^3-y)$ をかけて移項すれば $y(2y^3-y)=x^2$ となるため, (i) に代入して $y^2(3y^2-2)=0$ を得る. $y=0$ ならば (iii) より $y=0$ となり, 仮定に反するため, $y\neq 0$ である. 従って $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ であり, (i) より $x=\pm y\sqrt{1-y^2}$ だから $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$ である. よって f が条件 $y^4-y^2+x^2=0$ のもとで極値をとる可能性がある点は $\begin{pmatrix}\pm\frac{\sqrt{2}}{3}\\ \pm\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$ (複号任意) のみである.

曲線 $y^4 - y^2 + x^2 = 0$ の $x = y\sqrt{1-y^2}$ で表される部分を C_+, $x = -y\sqrt{1-y^2}$ で表される部分を C_- とする．

点 $\binom{x}{y}$ が C_+ 上にある場合, $g_+ : [-1,1] \to \boldsymbol{R}$ を $g_+(y) = f\begin{pmatrix} y\sqrt{1-y^2} \\ y \end{pmatrix} = y^2\sqrt{1-y^2}$ で定めれば, $g_+'(y) = \frac{y(\sqrt{2}-\sqrt{3}y)(\sqrt{2}+\sqrt{3}y)}{\sqrt{1-y^2}}$ だから g_+ の増減表は次のようになる．

y	-1		$-\frac{\sqrt{6}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{6}}{3}$		1
g_+'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
g_+	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

従って g_+ は $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ において最大になるため, f は条件 $y^4 - y^2 + x^2 = 0$ のもとで, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$ において最大値 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ をとる．

点 $\binom{x}{y}$ が C_- 上にある場合, $g_- : [-1,1] \to \boldsymbol{R}$ を $g_-(y) = f\begin{pmatrix} -y\sqrt{1-y^2} \\ y \end{pmatrix} = -y^2\sqrt{1-y^2}$ で定めれば, $g_-'(y) = -\frac{y(\sqrt{2}-\sqrt{3}y)(\sqrt{2}+\sqrt{3}y)}{\sqrt{1-y^2}}$ だから g_- の増減表は次のようになる．

y	-1		$-\frac{\sqrt{6}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{6}}{3}$		1
g_-'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g_-	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	0

従って g_- は $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ において最小になるため, f は条件 $y^4 - y^2 + x^2 = 0$ のもとで, $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$ において最小値 $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ をとる．

(4) $F\binom{x}{y} = x^2 - 2xy^2 + 4xy + 1$ で $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定義する．$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2y^2 + 4y$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -4xy + 4x$ より $F\binom{x}{y} = \frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y} = \frac{\partial F}{\partial y}\binom{x}{y} = 0$ とおくと, 次の連立方程式を得る．

$$\begin{cases} x^2 - 2xy^2 + 4xy + 1 = 0 & \cdots(i) \\ x - y^2 + 2y = 0 & \cdots(ii) \\ x(y-1) = 0 & \cdots(iii) \end{cases}$$

(iii) より $x = 0$ または $y = 1$ であるが, $x = 0$ のときは (i) は成立しないため $y = 1$ である．故に (ii) から $x = -1$ となり, $F\binom{x}{y} = \frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y} = \frac{\partial F}{\partial y}\binom{x}{y} = 0$ を満たす点は $\binom{-1}{1}$ のみである．従って, $\binom{-1}{1}$ 以外の点 $\binom{x}{y}$ で f が条件 $x^2 - 2xy^2 + 4xy + 1 = 0$ のもとで極値をとるならば, $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2$ より $\lambda \in \boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ．

$$\begin{cases} x^2 - 2xy^2 + 4xy + 1 = 0 & \cdots(iv) \\ 1 = \lambda(2x - 2y^2 + 4y) & \cdots(v) \\ 2 = \lambda(-4xy + 4x) & \cdots(vi) \end{cases}$$

(vi) を (v) で辺々割ると $\frac{-xy+x}{x-y^2+2y} = 1$ が得られるため, $y(y - x - 2) = 0$ である．よって $y = 0$ または $y = x + 2$ であるが, $y = 0$ の場合は (iv) を満たす実数 x は存在しないため, $y = x + 2$ である．(iv) に代入して整理すれば $(x+1)^2(2x-1) = 0$ となるため $x = -1$ または $x = \dfrac{1}{2}$ である．ここで, $x = -1$ ならば $y = 1$ となるが, この場合は (v) を満たす λ は存在しない．故に, 条件 $x^2 - 2xy^2 + 4xy + 1 = 0$ のもとで f が極値をとる $\binom{-1}{1}$ 以外の候補の点は $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ のみである．

$f\binom{x}{y} = z$ とおけば $x = z - 2y$ だから, 点 $\binom{x}{y}$ が条件 $x^2 - 2xy^2 + 4xy + 1 = 0$ を満たすならば $4y^3 - 2y^2z - 4y^2 + z^2 + 1 = 0$ が成り立つ．$G\binom{y}{z} = 4y^3 - 2y^2z - 4y^2 + z^2 + 1$ によって $G : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial G}{\partial z} = -2y^2 + 2z$ であり, $f\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \frac{11}{2}$ であることに注意すれば $\frac{\partial G}{\partial z}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \neq 0$ である．従って, 陰関数定理により z を $4y^3 - 2y^2z - 4y^2 + z^2 + 1 = 0$ から定まる, $\frac{5}{2}$ を含む開区間で定義され, $g\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{11}{2}$ を満たす陰関数 g とみな

して, $\frac{5}{2}$ で g が極値 $\frac{11}{2}$ をとるかどうかを以下で判定する. $\frac{\partial G}{\partial y}=12y^2-4yz-8y$, $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}=24y-4z-8$ だから $g'\left(\frac{5}{2}\right)=-\dfrac{\frac{\partial G}{\partial y}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{11}{2}\end{pmatrix}}{\frac{\partial G}{\partial z}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{11}{2}\end{pmatrix}}=0$, $g''\left(\frac{5}{2}\right)=-\dfrac{\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{11}{2}\end{pmatrix}}{\frac{\partial G}{\partial z}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{11}{2}\end{pmatrix}}=20>0$ となるため, g は $\frac{5}{2}$ で極小値 $\frac{11}{2}$ をとる. 故に f は与えられた条件のもとで, $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix}$ において極小値 $\frac{11}{2}$ をとる.

$x^2-2xy^2+4xy+1=0$ を x についての 2 次方程式とみると, その判別式は

$$4(y-1)^2\left(y-1-\sqrt{2}\right)\left(y-1+\sqrt{2}\right)$$

と因数分解されるため, $1-\sqrt{2}<y<1$ または $1<y<1+\sqrt{2}$ ならば $x^2-2xy^2+4xy+1=0$ を満たす実数 x は存在しない. 故に, 開集合 $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \middle| 1-\sqrt{2}<y<1+\sqrt{2}\right\}$ に含まれ, 条件 $x^2-2xy^2+4xy+1=0$ を満たす点は $\left(\begin{smallmatrix}-1\\ 1\end{smallmatrix}\right)$ だけであるので, $x^2-2xy^2+4xy+1=0$ を満たす $\boldsymbol{R}^2$ の点 $\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)$ 全体からなる集合の中で $\left(\begin{smallmatrix}-1\\ 1\end{smallmatrix}\right)$ は孤立した点である. 従って f はこの点で極大かつ極小値 1 とる.

(5) $F\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)=2x^4-2xy+y^2+6y+5$ で $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定義する. $\frac{\partial F}{\partial x}=8x^3-2y$, $\frac{\partial F}{\partial y}=-2x+2y+6$ だから $F\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)=0$ とおくと, 次の連立方程式を得る.

$$\begin{cases}2x^4-2xy+y^2+6y+5=0 & \cdots(i)\\ 4x^3-y=0 & \cdots(ii)\\ -x+y+3=0 & \cdots(iii)\end{cases}$$

(iii) より $y=x-3$ であり, (ii) に代入して $(x+1)((2x-1)^2+2)=0$ を得る. 従って $x=-1$ だから $y=-4$ であるが, このとき (i) は成り立たない. 故に f が条件 $2x^4-2xy+y^2+6y+5=0$ のもとで, 点 $\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)$ において極値をとるならば, $\frac{\partial f}{\partial x}=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-1$ より $\lambda\in\boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases}2x^4-2xy+y^2+6y+5=0 & \cdots(iv)\\ 1=\lambda(8x^3-2y) & \cdots(v)\\ -1=\lambda(-2x+2y+6) & \cdots(vi)\end{cases}$$

(v) を (vi) で辺々割ると $\frac{-x+y+3}{4x^3-y}=-1$ が得られるため, $4x^3-x+3=0$ である. 従って $(x+1)((2x-1)^2+2)=0$ となるため, $x=-1$ である. (iv) より $y=-1$ または $y=-7$ である. 故に f が条件 $2x^4-2xy+y^2+6y+5=0$ のもとで極値をとる可能性があるのは $\left(\begin{smallmatrix}-1\\ -1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}-1\\ -7\end{smallmatrix}\right)$ のみである.

$f\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)=z$ とおけば $y=x-z$ だから, 点 $\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)$ が条件 $2x^4-2xy+y^2+6y+5=0$ を満たすならば $2x^4-x^2+6x+z^2-6z+5=0$ が成り立つ. $G\left(\begin{smallmatrix}y\\ z\end{smallmatrix}\right)=2x^4-x^2+6x+z^2-6z+5$ によって $G:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial G}{\partial z}=2z-6$ であり, $f\left(\begin{smallmatrix}-1\\ -1\end{smallmatrix}\right)=0$, $f\left(\begin{smallmatrix}-1\\ -7\end{smallmatrix}\right)=6$ であることに注意すれば $\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}-1\\ 0\end{smallmatrix}\right)=-6\neq 0$, $\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}-1\\ 6\end{smallmatrix}\right)=6\neq 0$ である. 従って, 陰関数定理により, $2x^4-x^2+6x+z^2-6z+5=0$ から定まる, -1 を含む開区間で定義され, $g_1(-1)=0$ を満たす陰関数 g_1 と, -1 を含む開区間で定義され, $g_2(-1)=6$ を満たす陰関数 g_2 が存在する.

$\frac{\partial G}{\partial x}=8x^3-2x+6$, $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=24x^2-2$ だから $g_1'(-1)=-\dfrac{\frac{\partial G}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}-1\\ 0\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}-1\\ 0\end{smallmatrix}\right)}=0$, $g_1''(-1)=-\dfrac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}-1\\ 0\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}-1\\ 0\end{smallmatrix}\right)}=\frac{10}{3}>0$ となるため, g_1 は -1 で極小値 0 をとる. また $g_2'(-1)=-\dfrac{\frac{\partial G}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}-1\\ 6\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}-1\\ 6\end{smallmatrix}\right)}=0$, $g_2''(-1)=-\dfrac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}-1\\ 6\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}-1\\ 6\end{smallmatrix}\right)}=-\frac{10}{3}<0$ となるため, g_2 は -1 で極大値 6 をとる. 故に f は与えられた条件のもとで, $\left(\begin{smallmatrix}-1\\ -1\end{smallmatrix}\right)$ において極小値 0 をとり, $\left(\begin{smallmatrix}-1\\ -7\end{smallmatrix}\right)$ において極大値 6 をとる.

(6) $F\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)=2x^3+y^3-3x^2y+2$ で $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定義する. $\frac{\partial F}{\partial x}=6x^2-6xy$, $\frac{\partial F}{\partial y}=3y^2-3x^2$ だから $F\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)=0$ とおくと, 次の連立方程式を得る.

$$\begin{cases}2x^3+y^3-3x^2y+2=0 & \cdots(i)\\ x(x-y)=0 & \cdots(ii)\\ (x+y)(x-y)=0 & \cdots(iii)\end{cases}$$

(ii) より $x=0$ または $x=y$ である. $x=0$ の場合は (iii) より $y=0$ であるが, このときは (i) は成り立たない. $x=y$ の場合も (i) は成り立たない. 故に f が条件 $2x^3+y^3-3x^2y+2=0$ のもとで, 点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ において極値をとるならば, $\frac{\partial f}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=1$ より $\lambda \in \boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases} 2x^3+y^3-3x^2y+2=0 & \cdots (iv) \\ 2x=\lambda(6x^2-6xy) & \cdots (v) \\ 1=\lambda(3y^2-3x^2) & \cdots (vi) \end{cases}$$

(vi) を (v) で辺々割ると $\frac{2x}{-x-y}=2x$ が得られるため, $x(x+y+1)=0$ である. 従って $x=0$ または $x=-y-1$ であり, (iv) から $x=0$ の場合は $y=-\sqrt[3]{2}$, $x=-y-1$ の場合は $y(2y+3)^2=0$, すなわち $y=0$ または $y=-\frac{3}{2}$ である. 故に f が条件 $2x^3+y^3-3x^2y+2=0$ のもとで極値をとる可能性があるのは $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -\sqrt[3]{2} \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{smallmatrix}\right)$ である.

$f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=z$ とおけば $y=z-x^2$ だから, 点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ が条件 $2x^3+y^3-3x^2y+2=0$ を満たすならば $z^3-3x^2z^2+3x^4z-3x^2z-x^6+3x^4+2x^3+2=0$ が成り立つ. $G\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right)=z^3-3x^2z^2+3x^4z-3x^2z-x^6+3x^4+2x^3+2$ によって $G:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{\partial G}{\partial z}=3z^2-6x^2z+3x^4-3x^2$ であり, $f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -\sqrt[3]{2} \end{smallmatrix}\right)=-\sqrt[3]{2}$, $f\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)=1$, $f\left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{smallmatrix}\right)=-\frac{5}{4}$ であることに注意すれば $\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -\sqrt[3]{2} \end{smallmatrix}\right)=3\sqrt[3]{4}\neq 0$, $\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)=-3\neq 0$, $\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} \end{smallmatrix}\right)=6\neq 0$ である. 従って, 陰関数定理により, $z^3-3x^2z^2+3x^4z-3x^2z-x^6+3x^4+2x^3+2=0$ から定まる, 0 を含む開区間で定義され, $g_1(0)=-\sqrt[3]{2}$ を満たす陰関数 g_1, -1 を含む開区間で定義され, $g_2(-1)=1$ を満たす陰関数 g_2, $\frac{1}{2}$ を含む開区間で定義され, $g_3\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}$ を満たす陰関数 g_3 が存在する.

$\frac{\partial G}{\partial x}=-6xz^2+12x^3z-6xz-6x^5+12x^3+6x^2$, $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=-6z^2+36x^2z-6z-30x^4+36x^2+12x$ だから $g_1'(0)=-\dfrac{\frac{\partial G}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -\sqrt[3]{2} \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -\sqrt[3]{2} \end{smallmatrix}\right)}=0$, $g_1''(0)=-\dfrac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \sqrt[3]{2} \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \sqrt[3]{2} \end{smallmatrix}\right)}=2>0$ となるため, g_1 は 0 で極小値 $-\sqrt[3]{2}$ をとり, $g_2'(-1)=-\dfrac{\frac{\partial G}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}=0$, $g_2''(-1)=-\dfrac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}=6>0$ となるため, g_2 は -1 で極小値 1 をとる. さらに $g_3'\left(\frac{1}{2}\right)=-\dfrac{\frac{\partial G}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} \end{smallmatrix}\right)}=0$, $g_3''\left(\frac{1}{2}\right)=-\dfrac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} \end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} \end{smallmatrix}\right)}=-\frac{15}{4}<0$ となるため, g_3 は $\frac{1}{2}$ で極大値 $-\frac{5}{4}$ をとる. 故に f は与えられた条件のもとで, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -\sqrt[3]{2} \end{smallmatrix}\right)$ において極小値 $-\sqrt[3]{2}$, $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ において極小値 1 をとり, $\left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{smallmatrix}\right)$ において極大値 $-\frac{5}{4}$ をとる.

微積分学 II 演習問題　第 9 回　長方形の領域での重積分

1. 次の積分を求めよ．ただし α は正の実数とする．

(1) $I = [0,1] \times [0,2]$, $\displaystyle\iint_I (x+y)dxdy$　(2) $I = [0,2] \times [0,1]$, $\displaystyle\iint_I (x^2+y^2)dxdy$

(3) $I = [0,1] \times [0,1]$, $\displaystyle\iint_I x^3y^2dxdy$　(4) $I = [0,1] \times [-1,1]$, $\displaystyle\iint_I xy^2dxdy$

(5) $I = [-1,1] \times [0,1]$, $\displaystyle\iint_I 12x^2y^3dxdy$　(6) $I = [0,1] \times [0,\pi]$, $\displaystyle\iint_I e^x \sin y dxdy$

(7) $I = \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, $\displaystyle\iint_I \sin x \cos y dxdy$　(8) $I = [0,1] \times [0,1]$, $\displaystyle\iint_I \frac{1}{x+y+1}dxdy$

(9) $I = \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\displaystyle\iint_I \sin(x+y)dxdy$　(10) $I = [0,1] \times [0,1]$, $\displaystyle\iint_I ye^{xy}dxdy$

(11) $I = [0,1] \times [1,e-1]$, $\displaystyle\iint_I \frac{y}{xy+1}dxdy$　(12) $I = [0,1] \times [0,1]$, $\displaystyle\iint_I \frac{y}{x^2y^2+1}dxdy$

(13) $I = [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\displaystyle\iint_I y\cos(xy)dxdy$　(14) $I = [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\displaystyle\iint_I \frac{x}{\cos^2(xy)}dxdy$

(15) $I = [0,1] \times [0,1]$, $\displaystyle\iint_I y(x+y)^\alpha dxdy$　(16) $I = [0,2] \times [0,3] \times [0,4]$, $\displaystyle\iiint_I xy^2z^3dxdydz$

第 9 回の演習問題の解答

1. (1) $\displaystyle\iint_I (x+y)dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^1 (x+y)dx\right) dy = \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^2 \left(y + \frac{1}{2}\right) dy = \left[\frac{y^2}{2} + \frac{y}{2}\right]_0^2 = 3$

(2) $\displaystyle\iint_I (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^2 (x^2+y^2)dx\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2\right]_{x=0}^{x=2} dy = \int_0^1 \left(2y^2 + \frac{8}{3}\right) dy = \left[\frac{2y^3}{3} + \frac{8y}{3}\right]_0^1 = \frac{10}{3}$

(3) $\displaystyle\iint_I x^3y^2dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^3y^2dx\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^4y^2}{4}\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{y^2}{4}dy = \left[\frac{y^3}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$

(4) $\displaystyle\iint_I xy^2dxdy = \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 xy^2dx\right) dy = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^2y^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_{-1}^1 \frac{y^2}{2}dy = \left[\frac{y^3}{6}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3}$

(5) $\displaystyle\iint_I 12x^2y^3dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 12x^2y^3dx\right) dy = \int_0^1 [4x^3y^3]_{x=-1}^{x=1}dy = \int_0^1 8y^3dy = [2y^4]_0^1 = 2$

(6) $\displaystyle\iint_I e^x \sin ydxdy = \int_0^\pi \left(\int_0^1 e^x \sin ydx\right) dy = \int_0^\pi [e^x \sin y]_{x=0}^{x=1}dy = \int_0^\pi (e-1)\sin ydy = [(1-e)\cos y]_0^\pi = 2e-2$

(7) $\displaystyle\iint_I \sin x \cos ydxdy = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos ydx\right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{6}} [-\cos x \cos y]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{3}} dy = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos y}{2}dy = \left[\frac{\sin y}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{4}$

(8) $\displaystyle\iint_I \frac{1}{x+y+1}dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{x+y+1}dx\right) dy = \int_0^1 [\log(x+y+1)]_{x=0}^{x=1}dy =$
$\displaystyle\int_0^1 (\log(y+2) - \log(y+1))dy = [(y+2)\log(y+2) - (y+1)\log(y+1)]_0^1 = 3\log 3 - 4\log 2$

(9) $\displaystyle\iint_I \sin(x+y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(x+y)dx\right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} [-\cos(x+y)]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{3}} dy =$
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\cos\left(y+\frac{\pi}{3}\right) + \cos y\right) dy = \left[-\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right) + \sin y\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(10) $\displaystyle\iint_I ye^{xy}dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 ye^{xy}dx\right) dy = \int_0^1 [e^{xy}]_{x=0}^{x=1}dy = \int_0^1 (e^y-1)dy = [e^y - y]_0^1 = e-2$

(11) $\displaystyle\iint_I \frac{y}{xy+1}dxdy = \int_0^{e-1} \left(\int_0^1 \frac{y}{xy+1}dx\right) dy = \int_0^{e-1} [\log(xy+1)]_{x=0}^{x=1}dy = \int_0^{e-1} \log(y+1)dy =$
$\displaystyle[(y+1)\log(y+1)]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} dy = 1$

(12) $\displaystyle\iint_I \frac{y}{x^2y^2+1}dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y}{(xy)^2+1}dx\right) dy = \int_0^1 [\tan^{-1}(xy)]_{x=0}^{x=1}dy = \int_0^1 \tan^{-1} ydy =$
$\displaystyle[y\tan^{-1} y]_0^1 - \int_0^1 \frac{y}{1+y^2}dy = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\log(1+y^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\log 2}{2}$

(13) $\displaystyle\iint_I y\cos(xy)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 y\cos(xy)dx\right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(xy)]_{x=0}^{x=1}dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin ydy = [-\cos y]_0^1 = 1$

(14) $\displaystyle\iint_I \frac{x}{\cos^2(xy)}dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(xy)}dy\right) dx = \int_0^1 [\tan(xy)]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{4}} dy = \int_0^1 \tan\frac{\pi x}{4}dy =$
$\displaystyle\left[-\frac{4}{\pi}\log\left(\cos\frac{\pi x}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\log 2}{\pi}$

(15) $\displaystyle\iint_I y(x+y)^\alpha dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 y(x+y)^\alpha dx\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{y(x+y)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{y\left((1+y)^{\alpha+1} - y^{\alpha+1}\right)}{\alpha+1}dy =$
$\displaystyle\left[\frac{y\left((1+y)^{\alpha+2} - y^{\alpha+2}\right)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(1+y)^{\alpha+2} - y^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}dy = \frac{2^{\alpha+2}-1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \left[\frac{(1+y)^{\alpha+3} - y^{\alpha+3}}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\right]_0^1 = \frac{2^{\alpha+2}-1}{(\alpha+2)(\alpha+3)}$

(16) $\displaystyle\iiint_I xy^2z^3dxdydz = \int_0^4 \left(\int_0^3 \left(\int_0^2 xy^2z^3dx\right) dy\right) dz = \int_0^4 \left(\int_0^3 \left[\frac{1}{2}x^2y^2z^3\right]_{x=0}^{x=2} dy\right) dz =$
$\displaystyle\int_0^4 \left(\int_0^3 2y^2z^3dy\right) dz = \int_0^4 \left[\frac{2}{3}y^3z^3\right]_{y=0}^{y=3} dz = \int_0^4 18z^3dz = \left[\frac{9}{2}z^4\right]_0^4 = 1152$

微積分学 II 演習問題　第 10 回　縦線図形における重積分

1. 以下の積分を計算せよ．

(1) $D=\left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 2,\ -x\leqq y\leqq x\right\}$, $\displaystyle\iint_D xe^{2y}dxdy$

(2) $D=\left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 3x^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{2y}{1+x}dxdy$

(3) $D=\left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 1\leqq x\leqq 2,\ x\leqq y\leqq \sqrt{3}x\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy$

(4) $D=\left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq y\leqq 2-x\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{y}{(x+1)^2}dxdy$

(5) $D=\left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\ x^2\leqq y\leqq 1\right\}$, $\displaystyle\iint_D y^3e^{xy}dxdy$

(6) $D=\left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 1\leqq x\leqq \sqrt{2},\ x\leqq y\leqq x^3\right\}$, $\displaystyle\iint_D x^4e^{xy}dxdy$

(7) $D=\left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\leqq 1\right\}$, $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2}dxdy$

(8) $D=\left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq y\leqq \tfrac{x}{2}\leqq 1\right\}$, $\displaystyle\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}dxdy$

(9) $D=\left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x^3\right\}$, $\displaystyle\iint_D e^{x^2}dxdy$

(10) $D=\left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\ 1\leqq y\leqq e^x\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{xe^x}{y}dxdy$

(11) $D=\left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\ x^2\leqq y\leqq 1\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{4x}{1+y^4}dxdy$

(12) $D=\left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\ x^3\leqq y\leqq x\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{3y^2}{x^4+1}dxdy$

(13) $D=\left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x\right\}$, $\displaystyle\iint_D x^2\sqrt{x^2+y^2}dxdy$

(14) $D=\left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, y\geqq x^2,\ x\geqq 0,\ 1\leqq y\leqq 3\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{2x}{x^2+y^2}dxdy$

(15) $D=\left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq \sqrt[3]{\pi},\ 0\leqq y\leqq 3x^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D \sin\left(x^3\right)dxdy$

(16) $D=\left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{x^7}{\sqrt{1+x^3y}}dxdy$

(17) $D=\left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq \sqrt{y}\right\}$, $\displaystyle\iint_D 6x\sqrt{1+y^2}dxdy$

(18) $D=\left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq y\leqq 3,\ \sqrt{\tfrac{y}{3}}\leqq x\leqq 1\right\}$, $\displaystyle\iint_D x\sqrt{x^2+y}dxdy$

(19) $D=\left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq y\leqq 3x,\ y\leqq 4x-x^3\right\}$, $\displaystyle\iint_D \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dxdy$

2. 次の累次積分を計算せよ．ただし (7) では $m+n>0$ とする．

(1) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_y^1 3x^4\sin\left(x^2y\right)dx\right)dy$　(2) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{x^2}^1 xe^{y^2}dy\right)dx$　(3) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 5x^6e^{x^2y}dx\right)dy$

(4) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 5x^6\cos\left(x^2y\right)dx\right)dy$　(5) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{\sqrt[3]{x}}^1 y^{10}e^{xy^4}dy\right)dx$　(6) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\left(\int_{y^2}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x}\sin\left(y\sqrt{x}\right)dx\right)dy$

(7) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{y^{\frac{1}{m}}}^1 x^{2n+m-1}e^{x^ny}dx\right)dy$　(8) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{\sqrt{x}}^1 xy^7e^{x^2y^2}dy\right)dx$　(9) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{x^2}^1 x\cos\left(\frac{\pi}{2}y^2\right)dy\right)dx$

(10) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{x^2}^1 x\sin\left(\frac{\pi}{2}y^2\right)dy\right)dx$　(11) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{1-x}^1 e^{y^2}dy\right)dx$　(12) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{1-x}^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}y^2\right)dy\right)dx$

(13) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{2}}}\left(\int_{x^2}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x\tan\left(\frac{\pi}{2}y^2\right)dy\right)dx$　(14) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{1+x^3}dx\right)dy$　(15) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt{1+x^4}dx\right)dy$

第 10 回の演習問題の解答

1. (1) $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq x \leqq 2,\ -x \leqq y \leqq x \right\}$ より $\displaystyle\iint_D xe^{2y}dxdy = \int_0^2 \left(\int_{-x}^{x} xe^{2y}dy \right) dx = \int_0^2 \left[\frac{xe^{2y}}{2} \right]_{y=-x}^{y=x} dx =$ $\displaystyle\int_0^2 \left(\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{xe^{-2x}}{2} \right) dx = \left[\frac{xe^{2x}}{4} + \frac{xe^{-2x}}{4} \right]_0^2 - \int_0^2 \left(\frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} \right) dx = \frac{e^4 + e^{-4}}{2} - \left[\frac{e^{2x}}{8} - \frac{e^{-2x}}{8} \right]_0^2 = \frac{3e^4 + 5e^{-4}}{8}$

(2) $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 3x^2 \right\}$ より $\displaystyle\iint_D \frac{2y}{1+x}dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{3x^2} \frac{2y}{1+x}dy \right) dx =$
$\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{y^2}{1+x} \right]_{y=0}^{y=3x^2} dx = \int_0^1 \frac{9x^4}{1+x}dx = \int_0^1 9 \left(x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx =$
$\displaystyle\left[\frac{9x^4}{4} - 3x^3 + \frac{9x^2}{2} - 9x + 9\log(1+x) \right]_0^1 = 9\log 2 - \frac{21}{4}$

(3) $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 1 \leqq x \leqq 2,\ x \leqq y \leqq \sqrt{3}x \right\}$ より $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy = \int_1^2 \left(\int_x^{\sqrt{3}x} \frac{1}{x^2+y^2}dy \right) dx =$
$\displaystyle\int_1^2 \left[\frac{1}{x}\tan^{-1}\frac{y}{x} \right]_{y=x}^{y=\sqrt{3}x} dx = \int_1^2 \frac{\pi}{12x}dx = \left[\frac{\pi}{12}\log x \right]_1^2 = \frac{\pi\log 2}{12}$

(4) $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq x \leqq 1, x \leqq y \leqq 2-x \right\}$ より $\displaystyle\iint_D \frac{y}{(x+1)^2}dxdy = \int_0^1 \left(\int_x^{2-x} \frac{y}{(x+1)^2}dy \right) dx =$
$\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{y^2}{2(x+1)^2} \right]_{y=x}^{y=2-x} dx = \int_0^1 \frac{2-2x}{(x+1)^2}dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} \right) dx = \left[-\frac{4}{x+1} - 2\log(x+1) \right]_0^1 = 2 - 2\log 2$

(5) $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq \sqrt{y} \right\}$ より $\displaystyle\iint_D y^3e^{xy}dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} y^3e^{xy}dx \right) dy =$
$\displaystyle\int_0^1 \left[y^2e^{xy} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \left(y^2e^{y^{\frac{3}{2}}} - y^2 \right) dy = \int_0^1 y^2e^{y^{\frac{3}{2}}}dy - \int_0^1 y^2dy$ である. $t = y^{\frac{3}{2}}$ とおけば $y = t^{\frac{2}{3}}$, $dy = \dfrac{2}{3t^{\frac{1}{3}}}dt$ であり, y が 0 から 1 まで動くとき, t も 0 から 1 まで動くため, $\displaystyle\int_0^1 y^2e^{y^{\frac{3}{2}}}dy = \int_0^1 \frac{2te^t}{3}dt = \left[\frac{2te^t}{3} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2e^t}{3}dt =$ $\displaystyle\frac{2e}{3} - \left[\frac{2e^t}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$ である. 従って $\displaystyle\iint_D y^3e^{xy}dxdy = \frac{2}{3} - \int_0^1 y^2dy = \frac{1}{3}$

(6) $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 1 \leqq x \leqq \sqrt{2},\ x \leqq y \leqq x^3 \right\}$ より $\displaystyle\iint_D x^4e^{xy}dxdy = \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_x^{x^3} x^4e^{xy}dy \right) dy =$
$\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \left[x^3e^{xy} \right]_{y=x}^{y=x^3} dx = \int_1^{\sqrt{2}} \left(x^3e^{x^4} - x^3e^{x^2} \right) dy = \int_1^{\sqrt{2}} x^3e^{x^4}dx - \int_1^{\sqrt{2}} x^3e^{x^2}dy$ である. $s = x^4$ とおけば $x^3dx =$ $\dfrac{1}{4}ds$ であり, x が 1 から $\sqrt{2}$ まで動くとき, s は 1 から 4 まで動くため, $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} x^3e^{x^4}dx = \int_1^4 \frac{1}{4}e^sds = \frac{e^4}{4} - \frac{e}{4}$ である. $t = x^2$ とおけば $x^3dx = \dfrac{t}{2}dt$ であり, x が 1 から $\sqrt{2}$ まで動くとき, t は 1 から 2 まで動くため, $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} x^3e^{x^2}dx = \int_1^2 \frac{te^t}{2}dt = \left[\frac{te^t}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{e^t}{2}dt = \frac{e^2}{2}$ である. 従って $\displaystyle\iint_D x^4e^{xy}dxdy = \frac{e^4}{4} - \frac{e^2}{2} - \frac{e}{4}.$

(7) $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ -1 \leqq x \leqq 1, -\sqrt{1-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2} \right\}$ より
$\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2}dxdy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}dy \right) dx = \int_{-1}^1 2\left(1-x^2\right) dx = \left[2x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}$

(8) $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle| 0 \leqq x \leqq 2, 0 \leqq y \leqq \frac{x}{2} \right\}$ より $\displaystyle\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{x}{2}} y\sqrt{x^2+y^2}dy \right) dx =$
$\displaystyle\int_0^2 \left[\frac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_{y=0}^{y=\frac{x}{2}} dx = \int_0^2 \left(\frac{5\sqrt{5}}{24} - \frac{1}{3} \right) x^3dx = \left[\left(\frac{5\sqrt{5}}{24} - \frac{1}{3} \right) \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{5\sqrt{5}}{6} - \frac{4}{3}$

(9) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x^3\right\}$ より $\displaystyle\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{x^3}e^{x^2}dy\right)dx=\int_0^1 x^3e^{x^2}dx$ である．$t=x^2$ とおけば $x^3dx=\dfrac{t}{2}dt$ であり，x が 0 から 1 まで動くとき，t も 0 から 1 まで動くため，
$\displaystyle\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1 x^3e^{x^2}dx=\int_0^1\frac{te^t}{2}dt=\left[\frac{te^t}{2}\right]_0^1-\int_0^1\frac{e^t}{2}dt=\frac{1}{2}$ である．

(10) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 1,\ 1\leqq y\leqq e^x\right\}$ より $\displaystyle\iint_D\frac{xe^x}{y}dxdy=\int_0^1\left(\int_1^{e^x}\frac{xe^x}{y}dy\right)dx=\int_0^1\left[xe^x\log y\right]_{y=1}^{y=e^x}dx$
$\displaystyle=\int_0^1 x^2e^xdx=\left[x^2e^x\right]_0^1-\int_0^1 2xe^xdx=e-\left[2xe^x\right]_0^1+\int_0^1 2e^xdx=-e+\left[2e^x\right]_0^1=e-2$

(11) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq\sqrt{y}\right\}$ より
$\displaystyle\iint_D\frac{4x}{1+y^4}dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{y}}\frac{4x}{1+y^4}dx\right)dy=\int_0^1\left[\frac{2x^2}{1+y^4}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}}dy=\int_0^1\frac{2y}{1+y^4}dy=\left[\tan^{-1}\left(y^2\right)\right]_0^1=\frac{\pi}{4}$

(12) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 1,\ x^3\leqq y\leqq x\right\}$ より $\displaystyle\iint_D\frac{3y^2}{x^4+1}dxdy=\int_0^1\left(\int_{x^3}^{x}\frac{3y^2}{x^4+1}dy\right)dx=$
$\displaystyle\int_0^1\left[\frac{y^3}{x^4+1}\right]_{y=x^3}^{y=x}dx=\int_0^1\left(\frac{x^3}{x^4+1}-\frac{x^9}{x^4+1}\right)dx=\int_0^1\frac{x^3}{x^4+1}dx-\int_0^1\frac{x^9}{x^4+1}dx$ である．$s=x^4+1$ とおけば $x^3dx=\dfrac{1}{4}ds$ であり，x が 0 から 1 まで動くとき，s は 1 から 2 まで動くため，$\displaystyle\int_0^1\frac{x^3}{x^4+1}dx=\int_1^2\frac{1}{4s}ds=\left[\frac{\log s}{4}\right]_1^2=\frac{\log 2}{4}$ である． $t=x^2$ とおけば $xdx=\dfrac{1}{2}dt$ であり，x が 0 から 1 まで動くとき，t も 0 から 1 まで動くため，$\displaystyle\int_0^1\frac{x^9}{x^4+1}dx=\int_0^1\frac{t^4}{2(t^2+1)}dt=\int_0^1\frac{1}{2}\left(t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}-t+\tan^{-1}t\right]_0^1=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}$ である． 従って $\displaystyle\iint_D\frac{3y^2}{x^4+1}dxdy=\frac{\log 2}{4}-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{3}$.

(13) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x\right\}$ より $\displaystyle\iint_D x^2\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^1\left(\int_0^x x^2\sqrt{x^2+y^2}dy\right)dx=$
$\displaystyle\int_0^1\left[\frac{x^2y}{2}\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x^4}{2}\log\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]_{y=0}^{y=x}dx=\int_0^1\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right)x^4dx=\frac{\sqrt{2}+\log\left(1+\sqrt{2}\right)}{10}$
(教科書の例題 4.26 の結果を用いた.)

(14) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,1\leqq y\leqq 3,\ 0\leqq x\leqq\sqrt{y},\right\}$ より $\displaystyle\iint_D\frac{2x}{x^2+y^2}dxdy=\int_1^3\left(\int_0^{\sqrt{y}}\frac{2x}{x^2+y^2}dx\right)dy=$
$\displaystyle\int_1^3\left[\log\left(x^2+y^2\right)\right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}}dx=\int_1^3(\log(1+y)-\log y)dx=\left[(1+y)\log(1+y)-y\log y\right]_1^3=6\log 2-3\log 3$

(15) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq\sqrt[3]{\pi},\ 0\leqq y\leqq 3x^2\right\}$ より
$\displaystyle\iint_D\sin\left(x^3\right)dxdy=\int_0^{\sqrt[3]{\pi}}\left(\int_0^{3x^2}\sin\left(x^3\right)dy\right)dx=\int_0^{\sqrt[3]{\pi}}3x^2\sin\left(x^3\right)dx=\left[-\cos\left(x^3\right)\right]_0^{\sqrt[3]{\pi}}=2$

(16) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x^2\right\}$ より $\displaystyle\iint_D\frac{x^7}{\sqrt{1+x^3y}}dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{x^2}\frac{x^7}{\sqrt{1+x^3y}}dy\right)dx=$
$\displaystyle\int_0^1\left[2x^4\sqrt{1+x^3y}\right]_{y=0}^{y=x^2}dx=\int_0^1\left(2x^4\sqrt{1+x^5}-2x^4\right)dx=\left[\frac{4}{15}\left(1+x^5\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{2x^5}{5}\right]_0^1=\frac{8\sqrt{2}}{15}-\frac{2}{3}$

(17) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq y\leqq 1,0\leqq x\leqq\sqrt{y}\right\}$ より $\displaystyle\iint_D 6x\sqrt{1+y^2}dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{y}}6x\sqrt{1+y^2}dx\right)dy=$
$\displaystyle\int_0^1\left[3x^2\sqrt{1+y^2}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}}dy=\int_0^1 3y\sqrt{1+y^2}dy=\left[\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=2\sqrt{2}-1$

(18) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq y\leqq 3,\ \sqrt{\frac{y}{3}}\leqq x\leqq 1\right\}$ より $\displaystyle\iint_D x\sqrt{x^2+y}dxdy=\int_0^3\left(\int_{\sqrt{\frac{y}{3}}}^1 x\sqrt{x^2+y}dx\right)dy=$ $\displaystyle\int_0^3\left[\frac{1}{3}\left(x^2+y\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=\sqrt{\frac{y}{3}}}^{x=1}dy=\int_0^3\left(\frac{1}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}}-\frac{8}{9\sqrt{3}}y^{\frac{3}{2}}\right)dy=\left[\frac{2}{15}(1+y)^{\frac{5}{2}}-\frac{16}{45\sqrt{3}}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^3=\frac{14}{15}$

(19) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\, 0\leqq y\leqq 3x\right\}\cup\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 1\leqq x\leqq 2,\, 0\leqq y\leqq 4x-x^3\right\}$ より $\displaystyle\iint_D\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{3x}\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dy\right)dx+\int_1^2\left(\int_0^{4x-x^3}\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dy\right)dx=\int_0^1 3x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx+$ $\displaystyle\int_1^2\left(4x-x^3\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx=\int_0^1 3x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx+\int_1^2 4x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx-\int_1^2 x^3\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx$ である.
$\displaystyle\int_0^1 3x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx=\left[\frac{3}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\right]_0^1=\frac{3}{\pi},\ \int_1^2 4x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx=\left[\frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\right]_1^2=-\frac{4}{\pi}$ であり, $t=x^2$ とおけば $x^3dx=\dfrac{t}{2}dt$ であり, x が 1 から 2 まで動くとき, t は 1 から 4 まで動くため, $\displaystyle\int_1^2 x^3\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx=$ $\displaystyle\int_1^4\frac{t}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt=\left[\frac{t}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]_1^4-\int_1^4\frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt=-\frac{1}{\pi}+\left[\frac{2}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]_1^4=-\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi^2}$ である. 以上から $\displaystyle\iint_D\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dxdy=\frac{3}{\pi}-\frac{4}{\pi}-\left(-\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi^2}\right)=-\frac{2}{\pi^2}.$

2. (1) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq y\leqq 1,\, y\leqq x\leqq 1\right\}$ とおけば $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\, 0\leqq y\leqq x\right\}$ でもあるから, $\displaystyle\int_0^1\left(\int_y^1 3x^4\sin\left(x^2y\right)dx\right)dy=\iint_D 3x^4\sin\left(x^2y\right)dxdy=\int_0^1\left(\int_0^x 3x^4\sin\left(x^2y\right)dy\right)dx=$ $\displaystyle\int_0^1\left[-3x^2\cos\left(x^2y\right)\right]_{y=0}^{y=x}dx=\int_0^1\left(-3x^2\cos\left(x^3\right)+3x^2\right)dx=\left[-\sin\left(x^3\right)+x^3\right]_0^1=1-\sin 1.$

(2) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\, x^2\leqq y\leqq 1\right\}$ とおけば $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq y\leqq 1,\, 0\leqq x\leqq\sqrt{y}\right\}$ でもあるから, $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{x^2}^1 xe^{y^2}dy\right)dx=\iint_D xe^{y^2}dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{y}}xe^{y^2}dx\right)dy=\int_0^1\left[\frac{x^2}{2}e^{y^2}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}}dy=\int_0^1\frac{y}{2}e^{y^2}dy=\left[\frac{1}{4}e^{y^2}\right]_0^1$ $\displaystyle=\frac{e-1}{4}.$

(3) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq y\leqq 1,\ \sqrt[3]{y}\leqq x\leqq 1\right\}$ とおけば $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\, 0\leqq y\leqq x^3\right\}$ でもあるから, $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 5x^6e^{x^2y}dx\right)dy=\iint_D 5x^6e^{x^2y}dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{x^3}5x^6e^{x^2y}dy\right)dx=\int_0^1\left[5x^4e^{x^2y}\right]_{y=0}^{y=x^3}dx=$ $\displaystyle\int_0^1\left(5x^4e^{x^5}-5x^4\right)dx=\left[e^{x^5}-x^5\right]_0^1=e-2.$

(4) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq y\leqq 1,\ \sqrt[3]{y}\leqq x\leqq 1\right\}$ とおけば $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\, 0\leqq y\leqq x^3\right\}$ でもあるから, $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 5x^6\cos\left(x^2y\right)dx\right)dy=\iint_D 5x^6\cos\left(x^2y\right)dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{x^3}5x^6\cos\left(x^2y\right)dy\right)dx=$ $\displaystyle\int_0^1\left[5x^4\sin\left(x^2y\right)\right]_{y=0}^{y=x^3}dx=\int_0^1 5x^4\sin\left(x^5\right)dx=\left[-\cos\left(x^5\right)\right]_0^1=1-\cos 1.$

(5) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\ \sqrt[3]{x}\leqq y\leqq 1\right\}$ とおけば $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq y\leqq 1,\, 0\leqq x\leqq y^3\right\}$ でもあるから, $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{\sqrt[3]{x}}^1 y^{10}e^{xy^4}dy\right)dx=\iint_D y^{10}e^{xy^4}dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{y^3}y^{10}e^{xy^4}dx\right)dy=\int_0^1\left[y^6e^{xy^4}\right]_{x=0}^{x=y^3}dy=$ $\displaystyle\int_0^1\left(y^6e^{y^7}-y^6\right)dy=\left[\frac{1}{7}\left(e^{y^7}-y^7\right)\right]_0^1=\frac{e-2}{7}.$

(6) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq y\leqq\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ y^2\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right\}$ とおけば $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2},\ 0\leqq y\leqq\sqrt{x}\right\}$ でもあるから, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\left(\int_{y^2}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x}\sin\left(y\sqrt{x}\right)dx\right)dy=\iint_D\sqrt{x}\sin\left(y\sqrt{x}\right)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sqrt{x}}\sqrt{x}\sin\left(y\sqrt{x}\right)dy\right)dx=$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\cos\left(y\sqrt{x}\right)\right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)dx=\left[x-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1.$

(7) $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq y \leqq 1,\ y^{\frac{1}{m}} \leqq x \leqq 1 \right\}$ とおけば $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x^m \right\}$ でもあるから，

$$\int_0^1 \left(\int_{y^{\frac{1}{m}}}^1 x^{2n+m-1} e^{x^n y} dx \right) dy = \iint_D x^{2n+m-1} e^{x^n y} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^m} x^{2n+m-1} e^{x^n y} dy \right) dx =$$

$$\int_0^1 \left[x^{n+m-1} e^{x^n y} \right]_{y=0}^{y=x^m} dx = \int_0^1 \left(x^{n+m-1} e^{x^{n+m}} - x^{n+m-1} \right) dx = \left[\frac{1}{n+m} \left(e^{x^{n+m}} - x^{n+m} \right) \right]_0^1 = \frac{e-2}{n+m}.$$

(8) $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, 0 \leqq x \leqq 1,\ \sqrt{x} \leqq y \leqq 1 \right\}$ とおけば $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq y^2 \right\}$ でもあるから，

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 xy^7 e^{x^2 y^2} dy \right) dx = \iint_D xy^7 e^{x^2 y^2} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} xy^7 e^{x^2 y^2} dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{y^5}{2} e^{x^2 y^2} \right]_{x=0}^{x=y^2} dy =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{y^5}{2} e^{y^6} - \frac{y^5}{2} \right) dy = \left[\frac{1}{12} e^{y^6} - \frac{y^6}{12} \right]_0^1 = \frac{e-2}{12}.$$

(9) $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, 0 \leqq x \leqq 1,\ x^2 \leqq y \leqq 1 \right\}$ とおけば $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq \sqrt{y} \right\}$ でもあるから，

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 x \cos\left(\frac{\pi}{2} y^2 \right) dy \right) dx = \iint_D x \cos\left(\frac{\pi}{2} y^2 \right) dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} x \cos\left(\frac{\pi}{2} y^2 \right) dx \right) dy =$$

$$\int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} y^2 \right) \right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \frac{y}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} y^2 \right) dy = \left[\frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} y^2 \right) \right]_0^1 = \frac{1}{2\pi}.$$

(10) $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq x \leqq 1,\ x^2 \leqq y \leqq 1 \right\}$ とおけば $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq \sqrt{y} \right\}$ でもあるから，

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 x \sin\left(\frac{\pi}{2} y^2 \right) dy \right) dx = \iint_D x \sin\left(\frac{\pi}{2} y^2 \right) dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} x \sin\left(\frac{\pi}{2} y^2 \right) dx \right) dy =$$

$$\int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} y^2 \right) \right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \frac{y}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} y^2 \right) dy = \left[-\frac{1}{2\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} y^2 \right) \right]_0^1 = \frac{1}{2\pi}.$$

(11) $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 1-x \leqq y \leqq 1 \right\}$ とおけば $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 1-y \leqq x \leqq 1 \right\}$ でもあるから，$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 e^{y^2} dy \right) dx = \iint_D e^{y^2} dxdy = \int_0^1 \left(\int_{1-y}^1 e^{y^2} dx \right) dy = \int_0^1 y e^{y^2} dy = \left[\frac{1}{2} e^{y^2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}.$

(12) $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 1-x \leqq y \leqq 1 \right\}$ とおけば $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 1-y \leqq x \leqq 1 \right\}$ でもあるから，$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 \sin\left(\frac{\pi}{2} y^2 \right) dy \right) dx = \iint_D \sin\left(\frac{\pi}{2} y^2 \right) dxdy = \int_0^1 \left(\int_{1-y}^1 \sin\left(\frac{\pi}{2} y^2 \right) dx \right) dy = \int_0^1 y \sin\left(\frac{\pi}{2} y^2 \right) dy =$

$$\left[-\frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} y^2 \right) \right]_0^1 = \frac{1}{\pi}.$$

(13) $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq \frac{1}{\sqrt[4]{2}},\ x^2 \leqq y \leqq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ とおけば $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq y \leqq \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0 \leqq x \leqq \sqrt{y} \right\}$ でもあるから，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{2}}} \left(\int_{x^2}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x \tan\left(\frac{\pi}{2} y^2 \right) dy \right) dx = \iint_D x \tan\left(\frac{\pi}{2} y^2 \right) dxdy = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\int_0^{\sqrt{y}} x \tan\left(\frac{\pi}{2} y^2 \right) dx \right) dy =$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\frac{x^2}{2} \tan\left(\frac{\pi}{2} y^2 \right) \right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{y}{2} \tan\left(\frac{\pi}{2} y^2 \right) dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \tan\left(\frac{\pi}{2} t \right) dt = \left[-\frac{1}{2\pi} \log\cos\left(\frac{\pi}{2} t \right) \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\log 2}{4\pi}.$$

(14) $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq y \leqq 1,\ \sqrt{y} \leqq x \leqq 1 \right\}$ とおけば $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x^2 \right\}$ でもあるから，

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{1+x^3} dx \right) dy = \iint_D \sqrt{1+x^3} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \sqrt{1+x^3} dy \right) dx = \int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^3} dx =$$

$$\left[\frac{2}{9} (1+x^3)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{4\sqrt{2}-2}{9}.$$

(15) $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq y \leqq 1,\ \sqrt[3]{y} \leqq x \leqq 1 \right\}$ とおけば $D = \left\{ \binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle|\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x^3 \right\}$ でもあるから，

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt{1+x^4} dx \right) dy = \iint_D \sqrt{1+x^4} dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^3} \sqrt{1+x^4} dy \right) dx = \int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^4} dx =$$

$$\left[\frac{1}{6} (1+x^4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{6}.$$

微積分学 II 演習問題　第 11 回　重積分の変数変換

1. 以下の積分を計算せよ．ただし a, b は正の実数で $a < b$ を満たし，p は実数，q は分母が奇数で分子が偶数である正の有理数とする．

(1) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x,\ x^2+y^2 \leqq 4 \right\}$, $\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2} dxdy$

(2) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x\log(x^2+y^2) dxdy$

(3) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, -x \leqq y \leqq \sqrt{3}x,\ 1 \leqq x^2+y^2 \leqq e^2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$

(4) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2-2x \leqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2} dxdy$

(5) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2-2x-2y \leqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \sqrt{8-x^2-y^2} dxdy$

(6) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x \leqq x^2+y^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dxdy$

(7) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leqq 2(x+y),\ 0 \leqq x \leqq y \right\}$, $\displaystyle\iint_D xydxdy$

(8) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D 2(x+y)^a(x-y)^q dxdy$

(9) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq 1-2y \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{(x-2y)^4}{(x+2y)^2+1} dxdy$

(10) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x+2y \leqq 1,\ 0 \leqq x-4y \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x^a dxdy$

(11) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left((a+1)(x+y)^a + (x-y)^{a+1}\right) dxdy$

(12) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x+y \leqq 1,\ 1 \leqq x-y \leqq 2 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x^2e^{x-y} dxdy$

(13) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 3x \right\}$, $\displaystyle\iint_D (3x+y)(3x-y)^a dxdy$

(14) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 1,\ -x+1 \leqq 2y \leqq x+1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left((x+2y)^a - (x-2y)^q\right) dxdy$

(15) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x \right\}$, $\displaystyle\iint_D (x+y)^a(x-y) dxdy$

(16) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D (x+y)(x-y)^q dxdy$

(17) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ \sqrt{x}+\sqrt{2y} \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x^2 dxdy$

(18) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \leqq 1,\ y \geqq 0 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(x^2+y\right) dxdy$

(19) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 1 \leqq x^2+4y^2 \leqq 3 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{y^2}{\sqrt{4-x^2-4y^2}} dxdy$

(20) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 2x \right\}$, $\displaystyle\iint_D xydxdy$

(21) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2+x+y \leqq \frac{3}{2} \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(x^2+y^2+x+y\right) dxdy$

(22) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, (x-1)^2+(y-1)^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(x^2+y^2\right) dxdy$

(23) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, (x-2)^2+y^2 \leqq 4 \right\}$, $\displaystyle\iint_D xdxdy$

(24) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq y \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}x,\ 0 \leqq \frac{x^2}{4}+y^2 \leqq 1 \right\}$, $\displaystyle\iint_D x(x^2+4y^2)^2 dxdy$

(25) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, -2x \leqq y \leqq 2\sqrt{3}x,\ 1 \leqq x^2+\frac{y^2}{4} \leqq 4 \right\}$, $\displaystyle\iint_D y^2(4x^2+y^2)^2 dxdy$

(26) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x \geqq y,\ 5x^2+6xy+5y^2 \leqq 4 \right\}$, $\displaystyle\iint_D (x-y)(x+y)^6 dxdy$

第 11 回の演習問題の解答

1. (1) から (7) では写像 $\varphi:[0,\infty)\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\to\boldsymbol{R}^2$ を $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r\\ \theta\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{smallmatrix}\right)$ により定めると, $\det\varphi'\left(\begin{smallmatrix} r\\ \theta\end{smallmatrix}\right)=r$ である.

(1) $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r\\ \theta\end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには $0\leqq r\leqq 2$, $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ であることが必要十分である. 従って $E=[0,2]\times\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy=\iint_E re^{r^2}drd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_0^2 re^{r^2}dr\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^2 d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\left(e^4-1\right)d\theta=\frac{\pi}{6}\left(e^4-1\right)$.

(2) $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r\\ \theta\end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには $1\leqq r\leqq 2$, $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であることが必要十分である. 従って $E=[1,2]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_D x\log(x^2+y^2)dxdy=\iint_E r\cos\theta\log(r^2)rdrd\theta=\int_1^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}2r^2\cos\theta\log r d\theta\right)dr=\int_1^2\left[2r^2\sin\theta\log r\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}dr$ $\displaystyle=\int_1^2 2r^2\log rdr=\left[\frac{2}{3}r^3\log r\right]_1^2-\int_1^2\frac{2}{3}r^2dr=\frac{16}{3}\log 2-\left[\frac{2}{9}r^3\right]_1^2=\frac{16}{3}\log 2-\frac{14}{9}$.

(3) $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r\\ \theta\end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには $1\leqq r\leqq e$, $-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ であることが必要十分である. 従って $E=[1,e]\times\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_D\frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint_E 2\log rdrd\theta=\int_1^e\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}2\log rd\theta\right)dr=\int_1^e\frac{7\pi}{6}\log rdr=$ $\displaystyle\left[\frac{7\pi}{6}(r\log r-r)\right]_1^e=\frac{7\pi}{6}$.

(4) $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r\\ \theta\end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$, $0\leqq r\leqq 2\cos\theta$ であることが必要十分である. 従って $E=\left\{\left(\begin{smallmatrix} r\\ \theta\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2},\,0\leqq r\leqq 2\cos\theta\right\}$ とおけば, $\displaystyle\iint_D\sqrt{4-x^2-y^2}dxdy=\iint_E r\sqrt{4-r^2}drd\theta=$ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\cos\theta}r\sqrt{4-r^2}dr\right)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=2\cos\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\left(1-\left|\sin^3\theta\right|\right)d\theta=$ $\displaystyle\frac{8\pi}{3}-\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta=\frac{8\pi}{3}-\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta=\frac{8\pi}{3}-\frac{16}{3}\left[-\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8\pi}{3}-\frac{32}{9}$.

(5) $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r\\ \theta\end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには $-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{3\pi}{4}$, $0\leqq r\leqq 2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ であることが必要十分である. 従って $E=\left\{\left(\begin{smallmatrix} r\\ \theta\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{3\pi}{4},\,0\leqq r\leqq 2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$ とおけば, $\displaystyle\iint_D\sqrt{8-x^2-y^2}dxdy=\iint_E r\sqrt{8-r^2}drd\theta=$ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\int_0^{2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}r\sqrt{8-r^2}dr\right)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left[-\frac{1}{3}\left(8-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{2^{\frac{9}{2}}}{3}\left(1-\left|\cos^3\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)d\theta$ $\displaystyle=\frac{2^{\frac{9}{2}}\pi}{3}-\int_0^{\pi}\frac{2^{\frac{9}{2}}}{3}\left|\cos^3\theta\right|d\theta=\frac{2^{\frac{9}{2}}\pi}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2^{\frac{9}{2}}}{3}\left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{2^{\frac{9}{2}}}{3}\left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta d\theta=$ $\displaystyle\frac{2^{\frac{9}{2}}\pi}{3}-\frac{2^{\frac{9}{2}}}{3}\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{2^{\frac{9}{2}}}{3}\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}-\frac{64\sqrt{2}}{9}$.

(6) $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r\\ \theta\end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$, $\cos\theta\leqq r\leqq 1$ であることが必要十分である. 従って $E=\left\{\left(\begin{smallmatrix} r\\ \theta\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2},\,\cos\theta\leqq r\leqq 1\right\}$ とおけば, $\displaystyle\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\iint_E r^2drd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\cos\theta}^1 r^2dr\right)d\theta=$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{\cos\theta}^1 d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^3\theta}{3}d\theta=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta d\theta=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}$.

(7) $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r\\ \theta\end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには $-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$, $0\leqq r\leqq 2(\cos\theta+\sin\theta)$ であることが必要十分である. 従って $E=\left\{\left(\begin{smallmatrix} r\\ \theta\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4},\,r\leqq 2(\cos\theta+\sin\theta)\right\}$ とおけば, $\displaystyle\iint_D xydxdy=\iint_E r^3\cos\theta\sin\theta drd\theta=$ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)}\frac{r^3}{2}\sin 2\theta dr\right)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{r^4}{8}\sin 2\theta\right]_{r=0}^{r=2(\cos\theta+\sin\theta)}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}2(\cos\theta+\sin\theta)^4\sin 2\theta d\theta=$ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}2\left(\sin 2\theta+2\sin^2 2\theta+\sin^3 2\theta\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}4(1-\cos 4\theta)d\theta=\left[4\theta-\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi$.

(8) $z=x-y$, $w=x+y$ とおけば, $\begin{cases} x=\frac{z}{2}+\frac{w}{2}\\ y=-\frac{z}{2}+\frac{w}{2}\end{cases}$ である. 写像 $\psi:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} z\\ w\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} \frac{z}{2}+\frac{w}{2}\\ -\frac{z}{2}+\frac{w}{2}\end{smallmatrix}\right)$ により定めると,

$\det\psi'\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)=\frac{1}{2}$ であり, $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには「$z+w\geqq 0$ かつ $-z+w\geqq 0$ かつ $w\leqq 1$」すなわち「$0\leqq w\leqq 1$ かつ $-w\leqq z\leqq w$」が成り立つことが必要十分である．従って $E=\left\{\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\, 0\leqq w\leqq 1,\, -w\leqq z\leqq w\right\}$ とおけば $\displaystyle\iint_D 2(x+y)^a(x-y)^q dxdy=\iint_E z^q w^a dzdw=\int_0^1\left(\int_{-w}^{w} z^q w^a dz\right)dw=\int_0^1\left[\frac{z^{q+1}w^a}{q+1}\right]_{z=-w}^{z=w}dw=$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{2w^{a+q+1}}{q+1}dw=\left[\frac{2w^{a+q+2}}{(q+1)(a+q+2)}\right]_0^1=\frac{2}{(q+1)(a+q+2)}$.

(9) $z=x-2y$, $w=x+2y$ とおけば, $\begin{cases} x=\frac{z}{2}+\frac{w}{2} \\ y=-\frac{z}{4}+\frac{w}{4} \end{cases}$ である．写像 $\psi:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix} \frac{z}{2}+\frac{w}{2} \\ -\frac{z}{4}+\frac{w}{4} \end{pmatrix}$ により定めると, $\det\psi'\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)=\frac{1}{4}$ であり, $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには「$0\leqq -z+w\leqq 4$ かつ $0\leqq z+w\leqq 2+z-w$」すなわち「$0\leqq w\leqq 1$ かつ $-w\leqq z\leqq w$」が成り立つことが必要十分である．従って $E=\left\{\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\, 0\leqq w\leqq 1,\, -w\leqq z\leqq w\right\}$ とおけば $\displaystyle\iint_D \frac{(x-2y)^4}{(x+2y)^2+1}dxdy=\iint_E \frac{z^4}{4(w^2+1)}dzdw=\int_0^1\left(\int_{-w}^{w}\frac{z^4}{4(w^2+1)}dz\right)dw=\int_0^1\left[\frac{z^5}{20(w^2+1)}\right]_{z=-w}^{z=w}dw$ $\displaystyle=\int_0^1\frac{w^5}{10(w^2+1)}dw=\frac{1}{10}\int_0^1\left(w^3-w+\frac{w}{w^2+1}\right)dw=\frac{1}{10}\left[\frac{w^4}{4}-\frac{w^2}{2}+\frac{1}{2}\log\left(w^2+1\right)\right]_0^1=\frac{\log 2}{20}-\frac{1}{40}$.

(10) $z=x-4y$, $w=x+2y$ とおけば, $\begin{cases} x=\frac{z}{2}+w \\ y=-\frac{z}{6}+\frac{w}{6} \end{cases}$ である．写像 $\psi:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix} \frac{z}{2}+w \\ -\frac{z}{6}+\frac{w}{6} \end{pmatrix}$ により定めると, $\det\psi'\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)=\frac{1}{4}$ であり, $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには「$0\leqq z\leqq 1$ かつ $0\leqq w\leqq 1$」が成り立つことが必要十分である．従って $E=[0,1]\times[0,1]$ とおけば $\displaystyle\iint_D x^a dxdy=\iint_E\frac{1}{4}\left(\frac{z}{2}+w\right)^a dzdw=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{1}{4}\left(\frac{z}{2}+w\right)^a dz\right)dw=$ $\displaystyle\int_0^1\left[\frac{1}{2(a+1)}\left(\frac{z}{2}+w\right)^{a+1}\right]_{z=0}^{z=1}dw=\int_0^1\frac{1}{2(a+1)}\left(\left(\frac{1}{2}+w\right)^{a+1}-w^{a+1}\right)dw=$ $\displaystyle\frac{1}{2(a+1)(a+2)}\left[\left(\frac{1}{2}+w\right)^{a+2}-w^{a+2}\right]_0^1=\frac{3^{a+2}-2^{a+2}-1}{2^{a+3}(a+1)(a+2)}$.

(11) 写像 $\psi:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を (8) と同様に定めれば, $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには「$0\leqq z+w\leqq 2$ かつ $0\leqq -z+w\leqq z+w$」すなわち「$0\leqq z\leqq 1$ かつ $z\leqq w\leqq 2-z$」が成り立つことが必要十分である．従って $E=\left\{\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\, 0\leqq z\leqq 1,\, z\leqq w\leqq 2-z\right\}$ とおけば $\displaystyle\iint_D\left((a+1)(x+y)^a+(x-y)^{a+1}\right)dxdy=$ $\displaystyle\iint_E\frac{1}{2}\left((a+1)w^a+z^{a+1}\right)dzdw=\int_0^1\left(\int_z^{2-z}\frac{1}{2}\left((a+1)w^a+z^{a+1}\right)dw\right)dz=\int_0^1\left[\frac{1}{2}\left(w^{a+1}+z^{a+1}w\right)\right]_{w=z}^{w=2-z}dz$ $\displaystyle=\int_0^1\frac{1}{2}\left((2-z)^{a+1}-z^{a+1}+2z^{a+1}-2z^{a+2}\right)dz=\left[\frac{-(2-z)^{a+2}-z^{a+2}}{2(a+2)}+\frac{z^{a+2}}{a+2}-\frac{z^{a+3}}{a+3}\right]_0^1=\frac{2^{a+1}}{a+2}-\frac{1}{a+3}$.

(12) 写像 $\psi:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を (8) と同様に定めれば, $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには「$1\leqq z\leqq 2$ かつ $0\leqq w\leqq 1$」が成り立つことが必要十分である．従って $E=[1,2]\times[0,1]$ とおけば $\displaystyle\iint_D x^2e^{x-y}dxdy=\iint_E\frac{1}{8}(z+w)^2e^z dzdw=$ $\displaystyle\int_1^2\left(\int_0^1\frac{1}{8}(z+w)^2e^z dw\right)dz=\int_1^2\left[\frac{1}{24}(z+w)^3e^z\right]_{w=0}^{w=1}dz=\int_1^2\frac{e^z}{24}\left(3z^2+3z+1\right)dz=\left[\frac{e^z}{24}\left(3z^2+3z+1\right)\right]_1^2-$ $\displaystyle\int_1^2\frac{e^z}{8}(2z+1)dz=\frac{19e^2-7e}{24}-\left[\frac{e^z}{8}(2z+1)\right]_1^2+\int_1^2\frac{e^z}{4}dz=\frac{19e^2-7e}{24}-\frac{5e^2-3e}{8}+\left[\frac{e^z}{4}\right]_1^2=\frac{5e^2-2e}{12}$.

(13) $z=3x-y$, $w=3x+y$ とおけば, $\begin{cases} x=\frac{z}{6}+\frac{w}{6} \\ y=-\frac{z}{2}+\frac{w}{2} \end{cases}$ である．写像 $\psi:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix} \frac{z}{6}+\frac{w}{6} \\ -\frac{z}{2}+\frac{w}{2} \end{pmatrix}$ により定めると, $\det\psi'\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)=\frac{1}{6}$ であり, $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)\in D$ であるためには「$0\leqq z+w\leqq 6$ かつ $0\leqq -z+w\leqq z+w$」すなわち「$0\leqq z\leqq 3$ かつ $z\leqq w\leqq 6-z$」が成り立つことが必要十分である．従って $E=\left\{\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\, 0\leqq z\leqq 1,\, z\leqq w\leqq 6-z\right\}$ とおけば $\displaystyle\iint_D(3x+y)(3x-y)^a dxdy=\iint_E\frac{1}{6}z^a wdzdw=\int_0^3\left(\int_z^{6-z}\frac{1}{6}z^a wdw\right)dz=\int_0^3\left[\frac{1}{12}z^a w^2\right]_{w=z}^{w=6-z}dz=$

$\displaystyle\int_0^3 \left(3z^a - z^{a+1}\right) dz = \left[\frac{3z^{a+1}}{a+1} - \frac{z^{a+2}}{a+2}\right]_0^3 = \frac{3^{a+2}}{(a+1)(a+2)}$.

(14) 写像 $\psi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を (9) と同様に定めれば, $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには「$0 \leqq z + w \leqq 2$ かつ $-z - w + 2 \leqq -z + w \leqq z + w + 2$」すなわち「$-1 \leqq z \leqq 1$ かつ $1 \leqq w \leqq 2 - z$」が成り立つことが必要十分である. 従って $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| -1 \leqq z \leqq 1,\, 1 \leqq w \leqq 2 - z\right\}$ とおけば $\displaystyle\iint_D ((x+2y)^a - (x-2y)^q)\, dxdy = \iint_E \frac{1}{4}(w^a - z^q)\, dzdw =$ $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\int_1^{2-z} \frac{1}{4}(w^a - z^q)\, dw\right) dz = \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{4}\left(\frac{w^{a+1}}{a+1} - z^q w\right)\right]_{w=1}^{w=2-z} dz = \int_{-1}^1 \frac{1}{4}\left(\frac{(2-z)^{a+1}-1}{a+1} - z^q + z^{q+1}\right) dz$ $\displaystyle= \frac{1}{4}\left[-\frac{(2-z)^{a+2}}{(a+1)(a+2)} - \frac{z}{a+1} - \frac{z^{q+1}}{q+1} + \frac{z^{q+2}}{q+2}\right]_{-1}^1 = \frac{3^{a+2}-1}{4(a+1)(a+2)} - \frac{1}{2(a+1)} - \frac{1}{2(q+1)}$.

(15) 写像 $\psi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を (8) と同様に定めれば, $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには「$0 \leqq z + w \leqq 2$ かつ $0 \leqq -z + w \leqq z + w$」すなわち「$0 \leqq z \leqq 1$ かつ $z \leqq w \leqq 2 - z$」が成り立つことが必要十分である. 従って $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| 0 \leqq z \leqq 1,\, z \leqq w \leqq 2 - z\right\}$ とおけば $\displaystyle\iint_D (x+y)^a(x-y)dxdy = \iint_E \frac{1}{2}zw^a dzdw =$ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_z^{2-z} \frac{1}{2}zw^a dw\right) dz = \int_0^1 \left[\frac{zw^{a+1}}{2(a+1)}\right]_{w=z}^{w=2-z} dz = \int_0^1 \frac{z\left((2-z)^{a+1} - z^{a+1}\right)}{2(a+1)} dz = \left[\frac{z\left(-(2-z)^{a+2} - z^{a+2}\right)}{2(a+1)(a+2)}\right]_0^1$ $\displaystyle+ \int_0^1 \frac{(2-z)^{a+2} + z^{a+2}}{2(a+1)(a+2)} dz = -\frac{1}{(a+1)(a+2)} + \left[\frac{-(2-z)^{a+3} + z^{a+3}}{2(a+1)(a+2)(a+3)}\right]_0^1 = \frac{2^{a+2} - a - 3}{(a+1)(a+2)(a+3)}$.

(16) 写像 $\psi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を (8) と同様に定めれば, $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには「$0 \leqq z + w \leqq 2$ かつ $0 \leqq -z + w \leqq 2$」すなわち「$-1 \leqq z \leqq 0$ かつ $-z \leqq w \leqq z + 2$」または「$0 \leqq z \leqq 1$ かつ $z \leqq w \leqq 2 - z$」が成り立つことが必要十分である. 従って $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| -1 \leqq z \leqq 0,\, -z \leqq w \leqq z + 2\right\} \cup \left\{\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| 0 \leqq z \leqq 1,\, z \leqq w \leqq 2 - z\right\}$ とおけば $\displaystyle\iint_D (x+y)(x-y)^q dxdy = \iint_E \frac{1}{2}z^q wdzdw = \int_{-1}^0 \left(\int_{-z}^{2+z} \frac{1}{2}z^q wdw\right) dz + \int_0^1 \left(\int_z^{2-z} \frac{1}{2}z^q wdw\right) dz =$ $\displaystyle\int_{-1}^0 \left[\frac{1}{4}z^q w^2\right]_{w=-z}^{w=2+z} dz + \int_0^1 \left[\frac{1}{4}z^q w^2\right]_{w=z}^{w=2-z} dz = \int_{-1}^0 \left(z^q + z^{q+1}\right) dz + \int_0^1 \left(z^q - z^{q+1}\right) dz =$ $\displaystyle\left[\frac{z^{q+1}}{q+1} + \frac{z^{q+2}}{q+2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{z^{q+1}}{q+1} - \frac{z^{q+2}}{q+2}\right]_0^1 = \frac{2}{(q+1)(q+2)}$.

(17) 写像 $\psi : [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty) \times [0,\infty)$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z^2 \\ \frac{w^2}{2} \end{pmatrix}$ により定めると, $\det \psi'\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) = 2zw$ であり, $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには「$z \geqq 0$ かつ $w \geqq 0$ かつ $z + w \leqq 1$」すなわち「$0 \leqq z \leqq 1$ かつ $0 \leqq w \leqq 1 - z$」が成り立つことが必要十分である. 従って $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| 0 \leqq z \leqq 1,\, 0 \leqq w \leqq 1 - z\right\}$ とおけば $\displaystyle\iint_D x^2 dxdy =$ $\displaystyle\iint_E 2z^5 wdzdw = \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} 2z^5 wdw\right) dz = \int_0^1 \left[z^5 w^2\right]_{w=0}^{w=1-z} dz = \int_0^1 \left(z^5 - 2z^6 + z^7\right) dz = \frac{1}{168}$.

(18) 写像 $\psi : [0,\infty) \times [0, 2\pi] \to \boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2r\cos\theta \\ 3r\sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ により定めると, $\det \psi'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = 6r$ であり, $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$ であることが必要十分である. 従って $E = [0,1] \times [0,\pi]$ とおけば, $\displaystyle\iint_D \left(x^2 + y\right) dxdy = \iint_E 6r\left(4r^2\cos^2\theta + 3r\sin\theta\right) drd\theta = \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(12r^3(1 + \cos 2\theta) + 18r^2\sin\theta\right) d\theta\right) dr =$ $\displaystyle\int_0^1 \left(12\pi r^3 + 36r^2\right) dr = 3\pi + 12$.

(19) 写像 $\psi : [0,\infty) \times [0, 2\pi] \to \boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ により定めると, $\det \psi'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = 2r$ であり, $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには $\frac{1}{2} \leqq r \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ であることが必要十分である. 従って $E = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \times [0, 2\pi]$ とおけば, $\displaystyle\iint_D \frac{y^2}{\sqrt{4 - x^2 - 4y^2}} dxdy = \iint_E \frac{r^3\sin^2\theta}{\sqrt{1-r^2}} drd\theta = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{r^3(1 - \cos 2\theta)}{2\sqrt{1-r^2}} d\theta\right) dr = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\pi r^3}{\sqrt{1-r^2}} dr$ である. $r = \sin t$ とおけば $dr = \cos t dt$ であり t が $\frac{\pi}{6}$ から $\frac{\pi}{3}$ まで動けば r は $\frac{1}{2}$ から $\frac{\sqrt{3}}{2}$ まで動くため, (上式) $\displaystyle= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \pi\sin^3 t dt$

$= \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \pi\bigl(1-\cos^2 t\bigr)\sin t dt = \pi\left[-\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \pi\left(\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{11}{24}\right).$

(20) 写像 $\psi : [0,\infty)\times[0,2\pi] \to \boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta+1 \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ により定めると, $\det\psi'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = r$ であり, $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$ であることが必要十分である. 従って $E = [0,1]\times[0,\pi]$ とおけば,
$\displaystyle\iint_D xydxdy = \iint_E r^2\sin\theta(r\cos\theta+1)drd\theta = \int_0^1\left(\int_0^\pi r^2(r\cos\theta+1)\sin\theta d\theta\right)dr =$
$\displaystyle\int_0^1\left[r^2\left(-\frac{1}{2}r\cos^2\theta - \cos\theta\right)\right]_0^\pi dr = \int_0^1 2r^2dr = \frac{2}{3}.$

(21) 写像 $\psi : [0,\infty)\times[0,2\pi] \to \boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta-\frac{1}{2} \\ r\sin\theta-\frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right)$ により定めると, $\det\psi'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = r$ であり, $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには $0 \leqq r \leqq \sqrt{2}$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ であることが必要十分である. 従って $E = \bigl[0,\sqrt{2}\bigr]\times[0,2\pi]$ とおけば,
$\displaystyle\iint_D \bigl(x^2+y^2+x+y\bigr)dxdy = \iint_E r\left(r^2-\frac{1}{2}\right)drd\theta = \int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left(r^3-\frac{r}{2}\right)d\theta\right)dr = \int_0^{\sqrt{2}}\pi\bigl(2r^3-r\bigr)dr = \pi.$

(22) 写像 $\psi : [0,\infty)\times[0,2\pi] \to \boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta+1 \\ r\sin\theta+1 \end{smallmatrix}\right)$ により定めると, $\det\psi'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = r$ であり, $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ であることが必要十分である. 従って $E = [0,1]\times[0,2\pi]$ とおけば,
$\displaystyle\iint_D \bigl(x^2+y^2\bigr)dxdy = \iint_E r\bigl(r^2+2r(\cos\theta+\sin\theta)+2\bigr)drd\theta = \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\bigl(r^3+2r^2(\cos\theta+\sin\theta)+2r\bigr)d\theta\right)dr =$
$\displaystyle\int_0^1 2\pi\bigl(r^3+2r\bigr)dr = \frac{5\pi}{2}.$

(23) 写像 $\psi : [0,\infty)\times[0,2\pi] \to \boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta+2 \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ により定めると, $\det\psi'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = r$ であり, $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには $0 \leqq r \leqq 2$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ であることが必要十分である. 従って $E = [0,2]\times[0,2\pi]$ とおけば,
$\displaystyle\iint_D xdxdy = \iint_E r(r\cos\theta+2)drd\theta = \int_0^2\left(\int_0^{2\pi}\bigl(r^2\cos\theta+2r\bigr)d\theta\right)dr = \int_0^2 4\pi rdr = 8\pi.$

(24) 写像 $\psi : [0,\infty)\times[0,2\pi] \to \boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ により定めると, $\det\psi'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = 2r$ であり, $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ であることが必要十分である. 従って $E = [0,1]\times\bigl[0,\frac{\pi}{3}\bigr]$ とおけば,
$\displaystyle\int_D x(x^2+4y^2)^2dxdy = \iint_E 4r^2\cos\theta\bigl(4r^2\cos^2\theta+4r^2\sin^2\theta\bigr)^2drd\theta = \int_0^1\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} 64r^6\cos\theta d\theta\right)dr =$
$\displaystyle\int_0^1 \bigl[64r^6\sin\theta\bigr]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{3}}dr = \int_0^1 32\sqrt{3}r^6dr = \frac{32\sqrt{3}}{7}.$

(25) 写像 $\psi : [0,\infty)\times[-\pi,\pi] \to \boldsymbol{R}^2$ を $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta \\ 2r\sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ により定めると, $\det\psi'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = 2r$ であり, $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには $1 \leqq r \leqq 2$, $-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ であることが必要十分である. 従って $E = [1,2]\times\bigl[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\bigr]$ とおけば,
$\displaystyle\int_D y^2\bigl(4x^2+y^2\bigr)^2dxdy = \iint_E 8r^3\sin^2\theta\bigl(4r^2\cos^2\theta+4r^2\sin^2\theta\bigr)^2drd\theta = \int_1^2\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 64r^7(1-\cos 2\theta)d\theta\right)dr =$
$\displaystyle\int_1^2 \bigl[32r^7(2\theta-\sin 2\theta)\bigr]_{\theta=-\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{3}}dr = \int_1^2 32r^7\left(\frac{7\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)dr = 170\Bigl(7\pi-3\sqrt{3}-6\Bigr).$

(26) 写像 $\psi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を (8) と同様に定めれば, $\psi\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには「$z \geqq 0$ かつ $\frac{z^2}{4}+w^2 \leqq 1$」が成り立つことが必要十分である. 従って $E = \left\{\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, z \geqq 0,\ \frac{z^2}{4}+w^2 \leqq 1\right\}$ とおけば $\displaystyle\iint_D (x-y)(x+y)^6dxdy = \iint_E \frac{zw^6}{2}dzdw$ が成り立つ. さらに写像 $\rho : [0,\infty)\times[-\pi,\pi] \to \boldsymbol{R}^2$ を $\rho\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ により定めると, $\det\psi'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = 2r$ であり, $\psi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \in D$ であるためには $0 \leqq r \leqq 1$, $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ であることが必要十分である. 従って $F = [0,1]\times\bigl[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\bigr]$ とおけば, $\displaystyle\iint_E \frac{zw^6}{2}dzdw = \iint_F 2r^8\cos\theta\sin^6\theta drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 2r^8\cos\theta\sin^6\theta dr\right)d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{9}\cos\theta\sin^6\theta d\theta =$
$\displaystyle\left[\frac{2\sin^7\theta}{63}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{63}$ が得られるため, $\displaystyle\iint_D (x-y)(x+y)^6dxdy = \frac{4}{63}$ である.

微積分学 II 演習問題　第 12 回　3 重積分

1. a, b, c を正の実数とし, $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, z \geqq 0,\, \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} \leqq 1 \right\}$ とするとき, 次の積分を計算せよ. ただし (6) では $k \neq 0, \dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{b}$ とする.

(1) $\displaystyle\iiint_D dxdydz$　(2) $\displaystyle\iiint_D xzdxdydz$　(3) $\displaystyle\iiint_D y^2dxdydz$

(4) $\displaystyle\iiint_D xyzdxdydz$　(5) $\displaystyle\iiint_D xyz\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)dxdydz$　(6) $\displaystyle\iiint_D e^{x+ky+z}dxdydz$

2. a を正の実数とし, $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, z \geqq 0,\, x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2 \right\}$ とするとき, 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iiint_D zdxdydz$　(2) $\displaystyle\iiint_D yzdxdydz$　(3) $\displaystyle\iiint_D xyzdxdydz$

3. a, b, c を正の実数とし, $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqq 1 \right\}$ とするとき, 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iiint_D dxdydz$　(2) $\displaystyle\iiint_D x^2dxdydz$　(3) $\displaystyle\iiint_D x^2z^2dxdydz$

(4) $\displaystyle\iiint_D y^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}dxdydz$　(5) $\displaystyle\iiint_D z^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}dxdydz$

4. $a > b > 0$ とし, $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; b^2 \leqq x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2 \right\}$ とするとき, 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}dxdydz$　(2) $\displaystyle\iiint_D \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz$　(3) $\displaystyle\iiint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz$

5. a, b, c を正の実数とし, $\boldsymbol{R}^3$ の領域 D_1, D_2, D_3 を $D_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1,\, 0 \leqq z \leqq c \right\}$,
$D_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq \dfrac{z^2}{c^2},\, 0 \leqq z \leqq c \right\}$, $D_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq \dfrac{z}{c},\, 0 \leqq z \leqq c \right\}$ で定めるとき, 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iiint_{D_1} z^2dxdydz$　(2) $\displaystyle\iiint_{D_1} x^2z^2dxdydz$　(3) $\displaystyle\iiint_{D_1} y^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}dxdydz$

(4) $\displaystyle\iiint_{D_2} z^2dxdydz$　(5) $\displaystyle\iiint_{D_2} x^2z^2dxdydz$　(6) $\displaystyle\iiint_{D_2} y^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}dxdydz$

(7) $\displaystyle\iiint_{D_3} z^2dxdydz$　(8) $\displaystyle\iiint_{D_3} x^2z^2dxdydz$　(9) $\displaystyle\iiint_{D_3} y^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}dxdydz$

6. $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqq z^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1,\ z \geqq 0 \right\}$ とするとき $\displaystyle\iiint_D z^2dxdydz$ を計算せよ.

第 12 回の演習問題の解答

1. $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; 0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq b - \dfrac{b}{a}x,\ 0 \leqq z \leqq c - \dfrac{c}{a}x - \dfrac{c}{b}y \right\}$ だから

(1) $\displaystyle\iiint_D dxdydz = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left(\int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} dz \right) dy \right) dx = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left(c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y \right) dy \right) dx =$
$\displaystyle\int_0^a \left[cy - \frac{c}{a}xy - \frac{c}{2b}y^2 \right]_{y=0}^{y=b-\frac{b}{a}x} dx = \int_0^a \frac{bc}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 dx = \left[-\frac{abc}{6}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^3 \right]_0^a = \frac{abc}{6}$

(2) $\displaystyle\iiint_D xzdxdydz = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left(\int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} xzdz \right) dy \right) dx = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \frac{x}{2}\left(c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y \right)^2 dy \right) dx =$
$\displaystyle\int_0^a \left[-\frac{bc^2x}{6}\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^3 \right]_{y=0}^{y=b-\frac{b}{a}x} dx = \int_0^a \frac{bc^2x}{6}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^3 dx = \left[-\frac{abc^2x}{24}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^4 \right]_0^a + \int_0^a \frac{abc^2}{24}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^4 dx =$
$\displaystyle\left[-\frac{a^2bc^2}{120}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^5 \right]_0^a = \frac{a^2bc^2}{120}$

(3) $\displaystyle\iiint_D y^2dxdydz = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left(\int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} y^2dz \right) dy \right) dx = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} y^2\left(c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y \right) dy \right) dx =$
$\displaystyle\int_0^a \left(\left[\frac{cy^3}{3}\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \right]_{y=0}^{y=b-\frac{b}{a}x} + \int_0^{b-\frac{b}{a}x} \frac{cy^3}{3b}dy \right) dx = \int_0^a \frac{b^3c}{12}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^4 dx = \left[-\frac{ab^3c}{60}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^5 \right]_0^a = \frac{ab^3c}{60}$

(4) $\displaystyle\iiint_D xyzdxdydz = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left(\int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} xyzdz \right) dy \right) dx = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \frac{xy}{2}\left(c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y \right)^2 dy \right) dx =$
$\displaystyle\int_0^a \left(\left[-\frac{bc^2xy}{6}\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^3 \right]_{y=0}^{y=b-\frac{b}{a}x} + \int_0^{b-\frac{b}{a}x} \frac{bc^2x}{6}\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^3 dy \right) dx =$
$\displaystyle\int_0^a \left[-\frac{b^2c^2x}{24}\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^4 \right]_{y=0}^{y=b-\frac{b}{a}x} dx = \int_0^a \frac{b^2c^2x}{24}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^4 dx =$
$\displaystyle\left[-\frac{ab^2c^2x}{120}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^5 \right]_0^a + \int_0^a \frac{ab^2c^2}{120}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^5 dx = \left[\frac{a^2b^2c^2}{720}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^6 \right]_0^a = \frac{a^2b^2c^2}{720}$

(5) $\displaystyle\iiint_D xyz\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) dxdydz = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left(\int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} xyz\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) dz \right) dy \right) dx =$
$\displaystyle\int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left(\left[-\frac{cxyz}{2}\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)^2 \right]_{z=0}^{z=c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} + \int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} \frac{cxy}{2}\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)^2 dz \right) dy \right) dx =$
$\displaystyle\int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left[-\frac{c^2xy}{6}\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)^3 \right]_{z=0}^{z=c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} dy \right) dx = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \frac{c^2xy}{6}\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^3 dy \right) dx =$
$\displaystyle\int_0^a \left(\left[-\frac{bc^2xy}{24}\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^4 \right]_{y=0}^{y=b-\frac{b}{a}x} + \int_0^{b-\frac{b}{a}x} \frac{bc^2x}{24}\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^4 dy \right) dx =$
$\displaystyle\int_0^a \left[-\frac{b^2c^2x}{120}\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^5 \right]_{y=0}^{y=b-\frac{b}{a}x} dx = \int_0^a \frac{b^2c^2x}{120}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^5 dx =$
$\displaystyle\left[-\frac{ab^2c^2x}{720}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^6 \right]_0^a + \int_0^a \frac{ab^2c^2}{720}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^6 dx = \left[-\frac{a^2b^2c^2}{5040}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^7 \right]_0^a = \frac{a^2b^2c^2}{5040}$

(6) $\displaystyle\iiint_D e^{x+ky+z}dxdydz = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left(\int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} e^{x+ky+z}dz \right) dy \right) dx =$
$\displaystyle\int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left[e^{x+ky+z} \right]_{z=0}^{z=c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} dy \right) dx = \int_0^a \left(\int_0^{b-\frac{b}{a}x} \left(e^{\frac{a-c}{a}x+\frac{bk-c}{b}y+c} - e^{x+ky} \right) dy \right) dx =$

$$\int_0^a \left[\frac{be^{\frac{a-c}{a}x+\frac{bk-c}{b}y+c}}{bk-c}-\frac{e^{x+ky}}{k}\right]_{y=0}^{y=b-\frac{b}{a}x} dx = \int_0^a \left(\frac{be^{\frac{a-bk}{a}x+bk}}{bk-c}-\frac{e^{\frac{a-bk}{a}x+bk}}{k}-\frac{be^{\frac{a-c}{a}x+c}}{bk-c}+\frac{e^x}{k}\right)dx \cdots (*)$$

$a \neq c$ の場合 $(*) = \left[\frac{abe^{\frac{a-bk}{a}x+bk}}{(a-bk)(bk-c)}-\frac{ae^{\frac{a-bk}{a}x+bk}}{k(a-bk)}-\frac{abe^{\frac{a-c}{a}x+c}}{(a-c)(bk-c)}+\frac{e^x}{k}\right]_0^a =$

$\frac{ac\left(e^a-e^{bk}\right)}{k(a-bk)(bk-c)}-\frac{ab(e^a-e^c)}{(a-c)(bk-c)}+\frac{e^a-1}{k}$

$a = c$ の場合 $(*) = \left[\frac{abe^{\frac{a-bk}{a}x+bk}}{(a-bk)(bk-c)}-\frac{ae^{\frac{a-bk}{a}x+bk}}{k(a-bk)}-\frac{be^c x}{bk-c}+\frac{e^x}{k}\right]_0^a = \frac{a^2\left(e^{bk}-e^a\right)}{k(a-bk)^2}-\frac{abe^a}{bk-a}+\frac{e^a-1}{k}$

2. 写像 $\rho : [0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi] \to \boldsymbol{R}^2$ を $\rho\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\end{pmatrix}$ により定めると, $\det\rho'\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} = r^2\sin\theta$ である. $\rho\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} \in D$ であるためには $0 \leqq r \leqq a$, $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ であることが必要十分である. そこで $E = [0,a]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ とおく.

(1) $\iiint_D zdxdydz = \iiint_E r^3\cos\theta\sin\theta drd\theta d\varphi = \int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^3}{2}\sin 2\theta d\varphi\right)d\theta\right)dr =$
$\int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi r^3}{4}\sin 2\theta d\theta\right)dr = \int_0^a\left[-\frac{\pi r^3}{8}\cos 2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}dr = \int_0^a\frac{\pi r^3}{4}dr = \frac{\pi a^4}{16}$

(2) $\iiint_D yzdxdydz = \iiint_E r^4\cos\theta\sin^2\theta\sin\varphi drd\theta d\varphi = \int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4\cos\theta\sin^2\theta\sin\varphi d\varphi\right)d\theta\right)dr =$
$\int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4\cos\theta\sin^2\theta d\theta\right)dr = \int_0^a\left[\frac{r^4}{3}\sin^3\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}dr = \int_0^a\frac{r^4}{3}dr = \frac{a^5}{15}$

(3) $\iiint_D xyzdxdydz = \iiint_E r^5\cos\theta\sin^3\theta\cos\varphi\sin\varphi drd\theta d\varphi = \int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^5}{2}\cos\theta\sin^3\theta\sin 2\varphi d\varphi\right)d\theta\right)dr =$
$\int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{r^5}{4}\cos\theta\sin^3\theta\cos 2\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}d\theta\right)dr = \int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^5}{2}\cos\theta\sin^3\theta d\theta\right)dr = \int_0^a\left[\frac{r^5}{8}\sin^4\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}dr =$
$\int_0^a\frac{r^5}{8}dr = \frac{a^6}{48}$

3. 写像 $\rho : [0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi] \to \boldsymbol{R}^2$ を $\rho\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar\sin\theta\cos\varphi \\ br\sin\theta\sin\varphi \\ cr\cos\theta\end{pmatrix}$ により定めると, $\det\rho'\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} = abcr^2\sin\theta$ である. $\rho\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} \in D$ であるためには $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ であることが必要十分である. そこで $E = [0,1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$ とおく.

(1) $\iiint_D dxdydz = \iiint_E abcr^2\sin\theta drd\theta d\varphi = \int_0^1\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi} abcr^2\sin\theta d\varphi\right)d\theta\right)dr =$
$\int_0^1\left(\int_0^{\pi} 2\pi abcr^2\sin\theta d\theta\right)dr = \int_0^1 4\pi abcr^2 dr = \frac{4\pi abc}{3}$

(2) $\iiint_D x^2dxdydz = \iiint_E a^3bcr^4\sin^3\theta\cos^2\varphi drd\theta d\varphi = \int_0^1\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{a^3bcr^4}{2}\sin^3\theta(1+\cos 2\varphi)d\varphi\right)d\theta\right)dr =$
$\int_0^1\left(\int_0^{\pi}\pi a^3bcr^4\left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta\right)dr = \int_0^1\left[\pi a^3bcr^4\left(-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}dr = \int_0^1\frac{4\pi a^3bcr^4}{3}dr = \frac{4\pi a^3bc}{15}$

(3) $\iiint_D x^2z^2dxdydz = \iiint_E a^3bc^3r^6\cos^2\theta\sin^3\theta\cos^2\varphi drd\theta d\varphi =$
$\int_0^1\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{a^3bc^3r^6}{2}\cos^2\theta\sin^3\theta(1+\cos 2\varphi)d\varphi\right)d\theta\right)dr = \int_0^1\left(\int_0^{\pi}\pi a^3bc^3r^6\left(\cos^2\theta-\cos^4\theta\right)\sin\theta d\theta\right)dr =$
$\int_0^1\left[\pi a^3bc^3r^6\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}+\frac{\cos^5\theta}{5}\right)\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}dr = \int_0^1\frac{4\pi a^3bc^3r^6}{15}dr = \frac{4\pi a^3bc^3}{105}$

(4) $\iiint_D y^2\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}dxdydz = \iiint_E ab^3cr^5\sin^4\theta\sin^2\varphi drd\theta d\varphi =$
$\int_0^1\Bigl(\int_0^\pi\Bigl(\int_0^{2\pi}\dfrac{ab^3cr^5}{8}\left(1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right)(1-\cos 2\varphi)d\varphi\Bigr)d\theta\Bigr)dr =$
$\int_0^1\Bigl(\int_0^\pi\dfrac{\pi ab^3cr^5}{8}(3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta)\,d\theta\Bigr)dr = \int_0^1\dfrac{3\pi^2ab^3cr^5}{8}dr = \dfrac{\pi^2ab^3c}{16}$

(5) $\iiint_D z^2\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}dxdydz = \iiint_E abc^3r^5\cos^2\theta\sin^2\theta drd\theta d\varphi = \int_0^1\Bigl(\int_0^\pi\Bigl(\int_0^{2\pi}\dfrac{abc^3r^5}{4}\sin^2 2\theta d\varphi\Bigr)d\theta\Bigr)dr =$
$\int_0^1\Bigl(\int_0^\pi\dfrac{\pi abc^3r^5}{4}(1-\cos 4\theta)\,d\theta\Bigr)dr = \int_0^1\dfrac{\pi^2abc^3r^5}{4}dr = \dfrac{\pi^2abc^3}{24}.$

4. 写像 $\rho : [0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}^2$ を $\rho\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi\\ r\sin\theta\sin\varphi\\ r\cos\theta\end{pmatrix}$ により定めると，$\det\rho'\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} = r^2\sin\theta$ である．$\rho\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix}\in D$ であるためには $b\leqq r\leqq a$, $0\leqq\theta\leqq\pi$, $0\leqq\varphi\leqq 2\pi$ であることが必要十分である．そこで $E=[b,a]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$ とおく．

(1) $\iiint_D\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz = \iiint_E r\sin\theta drd\theta d\varphi = \int_b^a\Bigl(\int_0^\pi\Bigl(\int_0^{2\pi}r\sin\theta d\varphi\Bigr)d\theta\Bigr)dr =$
$\int_b^a\Bigl(\int_0^\pi 2\pi r\sin\theta d\theta\Bigr)dr = \int_b^a 4\pi rdr = 2\pi\left(a^2-b^2\right)$

(2) $\iiint_D\dfrac{z^2}{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \iiint_E r^2\cos^2\theta\sin\theta drd\theta d\varphi = \int_b^a\Bigl(\int_0^\pi\Bigl(\int_0^{2\pi}r^2\cos^2\theta\sin\theta d\varphi\Bigr)d\theta\Bigr)dr =$
$\int_b^a\Bigl(\int_0^\pi 2\pi r^2\cos^2\theta\sin\theta d\theta\Bigr)dr = \int_b^a\left[-\dfrac{2\pi r^2}{3}\cos^3\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}dr = \int_b^a\dfrac{4\pi r^2}{3}dr = \dfrac{4\pi\left(a^3-b^3\right)}{9}$

(3) $\iiint_D\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \iiint_E r\sin^2\theta drd\theta d\varphi = \int_b^a\Bigl(\int_0^\pi\Bigl(\int_0^{2\pi}\dfrac{r}{2}(1-\cos 2\theta)d\varphi\Bigr)d\theta\Bigr)dr =$
$\int_b^a\Bigl(\int_0^\pi \pi r(1-\cos 2\theta)d\theta\Bigr)dr = \int_b^a\pi^2rdr = \dfrac{\pi^2\left(a^2-b^2\right)}{2}$

5. 写像 $\rho : [0,\infty)\times[0,2\pi]\times(-\infty,\infty)\to\boldsymbol{R}^2$ を $\rho\begin{pmatrix} r\\ \varphi\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar\cos\varphi\\ ar\sin\varphi\\ t\end{pmatrix}$ により定めると，$\det\rho'\begin{pmatrix} r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} = abr$ である．$\rho\begin{pmatrix} r\\ \varphi\\ t\end{pmatrix}\in D_1$ であるためには $0\leqq r\leqq 1$, $0\leqq\varphi\leqq 2\pi$, $0\leqq t\leqq c$ であることが必要十分であり，$\rho\begin{pmatrix} r\\ \varphi\\ t\end{pmatrix}\in D_1$ であるためには $0\leqq r\leqq\frac{t}{c}$, $0\leqq\varphi\leqq 2\pi$, $0\leqq t\leqq c$ であることが必要十分であり，$\rho\begin{pmatrix} r\\ \varphi\\ t\end{pmatrix}\in D_1$ であるためには $0\leqq r\leqq\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{c}}$, $0\leqq\varphi\leqq 2\pi$, $0\leqq t\leqq c$ であることが必要十分である．そこで $E_1=[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,c]$, $E_2=\left\{\begin{pmatrix} r\\ \varphi\\ t\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,0\leqq\varphi\leqq 2\pi,\,0\leqq t\leqq c,\,0\leqq r\leqq\frac{t}{c}\right\}$, $E_3=\left\{\begin{pmatrix} r\\ \varphi\\ t\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,0\leqq\varphi\leqq 2\pi,\,0\leqq t\leqq c,\,0\leqq r\leqq\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{c}}\right\}$ とおく．

(1) $\iiint_{D_1}z^2dxdydz = \iiint_{E_1}abrt^2drd\varphi dt = \int_0^c\Bigl(\int_0^1\Bigl(\int_0^{2\pi}abrt^2d\varphi\Bigr)dr\Bigr)dt = \int_0^c\Bigl(\int_0^1 2\pi abrt^2dr\Bigr)dt =$
$\int_0^c\pi abt^2dt = \dfrac{\pi abc^3}{3}$

(2) $\iiint_{D_1}x^2z^2dxdydz = \iiint_{E_1}a^3br^3t^2\cos^2\varphi drd\varphi dt = \int_0^c\Bigl(\int_0^1\Bigl(\int_0^{2\pi}\dfrac{a^3br^3t^2}{2}(1+\cos 2\varphi)d\varphi\Bigr)dr\Bigr)dt =$
$\int_0^c\Bigl(\int_0^1\pi a^3br^3t^2dr\Bigr)dt = \int_0^c\dfrac{\pi a^3bt^2}{4}dt = \dfrac{\pi a^3bc^3}{12}$

(3) $\iiint_{D_1}y^2\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}dxdydz = \iiint_{E_1}ab^3r^4\sin^2\varphi drd\varphi dt = \int_0^c\Bigl(\int_0^1\Bigl(\int_0^{2\pi}\dfrac{ab^3r^4}{2}(1-\cos 2\varphi)d\varphi\Bigr)dr\Bigr)dt =$
$\int_0^c\Bigl(\int_0^1\pi ab^3r^4dr\Bigr)dt = \int_0^c\dfrac{\pi ab^3}{5}dt = \dfrac{\pi ab^3c}{5}$

(4) $\iiint_{D_2} z^2 dxdydz = \iiint_{E_2} abrt^2 drd\varphi dt = \int_0^c \left(\int_0^{\frac{t}{c}} \left(\int_0^{2\pi} abrt^2 d\varphi\right) dr\right) dt = \int_0^c \left(\int_0^{\frac{t}{c}} 2\pi abrt^2 dr\right) dt =$
$\int_0^c \left[\pi abr^2 t^2\right]_{r=0}^{r=\frac{t}{c}} dt = \int_0^c \frac{\pi abt^4}{c^2} dt = \frac{\pi abc^3}{5}$

(5) $\iiint_{D_2} x^2 z^2 dxdydz = \iiint_{E_2} a^3 br^3 t^2 \cos^2\varphi drd\varphi dt = \int_0^c \left(\int_0^{\frac{t}{c}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{a^3 br^3 t^2}{2}(1+\cos 2\varphi) d\varphi\right) dr\right) dt =$
$\int_0^c \left(\int_0^{\frac{t}{c}} \pi a^3 br^3 t^2 dr\right) dt = \int_0^c \frac{\pi a^3 bt^6}{4c^4} dt = \frac{\pi a^3 bc^3}{28}$

(6) $\iiint_{D_2} y^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}} dxdydz = \iiint_{E_2} ab^3 r^4 \sin^2\varphi drd\varphi dt = \int_0^c \left(\int_0^{\frac{t}{c}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{ab^3 r^4}{2}(1-\cos 2\varphi) d\varphi\right) dr\right) dt =$
$\int_0^c \left(\int_0^{\frac{t}{c}} \pi ab^3 r^4 dr\right) dt = \int_0^c \frac{\pi ab^3 t^5}{5c^5} dt = \frac{\pi ab^3 c}{30}$

(7) $\iiint_{D_3} z^2 dxdydz = \iiint_{E_3} abrt^2 drd\varphi dt = \int_0^c \left(\int_0^{\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{c}}} \left(\int_0^{2\pi} abrt^2 d\varphi\right) dr\right) dt = \int_0^c \left(\int_0^{\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{c}}} 2\pi abrt^2 d\varphi dr\right) dt =$
$\int_0^c \left[\pi abr^2 t^2\right]_{r=0}^{r=\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{c}}} dt = \int_0^c \frac{\pi abt^3}{c} dt = \frac{\pi abc^3}{4}$

(8) $\iiint_{D_3} x^2 z^2 dxdydz = \iiint_{E_3} a^3 br^3 t^2 \cos^2\varphi drd\varphi dt = \int_0^c \left(\int_0^{\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{c}}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{a^3 br^3 t^2}{2}(1+\cos 2\varphi) d\varphi\right) dr\right) dt =$
$\int_0^c \left(\int_0^{\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{c}}} \pi a^3 br^3 t^2 dr\right) dt = \int_0^c \frac{\pi a^3 bt^4}{4c^2} dt = \frac{\pi a^3 bc^3}{20}$

(9) $\iiint_{D_3} y^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}} dxdydz = \iiint_{E_3} ab^3 r^4 \sin^2\varphi drd\varphi dt = \int_0^c \left(\int_0^{\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{c}}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{ab^3 r^4}{2}(1-\cos 2\varphi) d\varphi\right) dr\right) dt =$
$\int_0^c \left(\int_0^{\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{c}}} \pi ab^3 r^4 dr\right) dt = \int_0^c \frac{\pi ab^3 t^{\frac{5}{2}}}{5c^{\frac{5}{2}}} dt = \frac{2\pi ab^3 c}{35}$

6. 極座標変換 $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ を行うと, D は $E = [0,1]\times\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\times[0,2\pi]$ に対応するため, $\iiint_D z^2 dxdydz = \iiint_E r^4 \sin\theta\cos^2\theta drd\theta d\varphi = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} r^4 \sin\theta\cos^2\theta d\varphi\right) d\theta\right) dr =$
$\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\pi r^4 \sin\theta\cos^2\theta d\theta\right) dr = \int_0^1 \left[-\frac{2\pi r^4}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} dr = \int_0^1 \frac{\pi\left(2\sqrt{2}-1\right) r^4}{3\sqrt{2}} dr = \frac{\pi\left(4-\sqrt{2}\right)}{30}.$

微積分学 II 演習問題　第 13 回　重積分の広義積分

1. 以下の広義積分を計算せよ．ただし α, a は正の実数とする．

(1) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1,\ x+y>0\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y)^{\frac{3}{2}}}dxdy$

(2) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0< x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{2y}{x^2+y^2}dxdy$

(3) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0< x\leqq 1,\ x\leqq y\leqq \sqrt{3}x\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}dxdy$

(4) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\ -x< y\leqq 1\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x+y}}dxdy$

(5) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 1\leqq x\leqq y\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}dxdy$

(6) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1,\ x\neq 0 \text{ または } y\neq 0\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy$

(7) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0< x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{2y}{x^2+y^2}dxdy$

(8) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\geqq 1,\ -x\leqq y\leqq \sqrt{3}x\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

(9) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2> 1,\ -x< y< \sqrt{3}x\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

(10) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0< x^2+y^2\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{x\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy$

(11) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x\neq 0 \text{ または } y\neq 0\right\}$, $\displaystyle\iint_D \left(x^2+y^2\right)^{\alpha-1}e^{-(x^2+y^2)^{\alpha}}dxdy$

(12) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0< x^2+y^2\leqq 1\right\}$, $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)dxdy$

(13) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x>0,\ 0\leqq y\leqq x\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x}e^{-\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

(14) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2+1)^{\alpha}}$

(15) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2>1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2-1}}dxdy$

(16) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0< x^2+y^2< 1,\ 0\leqq x\leqq y\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$

(17) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\geqq 1,\ 0\leqq y\leqq x\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy$

(18) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$, $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)^2}dxdy$

(19) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2+a^2)\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

(20) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\leqq a^2,\ x>0,\ y\geqq 0\right\}$, $\displaystyle\iint_D \tan^{-1}\frac{y}{x}dxdy$

(21) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0< y< 1,\ y^3\leqq x< y^2\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{y^4-x^2}}dxdy$

(22) $D=\left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\ y> x^3\right\}$, $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{x^4+y^2}dxdy$

第 13 回の演習問題の解答

1. (8) から (20) では写像 $\varphi : [0,\infty)\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\to \boldsymbol{R}^2$ を $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ により定めると, $\det\varphi'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)=r$ である.

(1) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{n}\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x\right\}\cup\left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{n}\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq y\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=2}^{\infty}$ は D の近似増加列であり, $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{(x+y)^{\frac{3}{2}}}dxdy=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_0^x\frac{1}{(x+y)^{\frac{3}{2}}}dy\right)dx+\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_0^y\frac{1}{(x+y)^{\frac{3}{2}}}dx\right)dy=$
$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\frac{-2}{\sqrt{x+y}}\right]_{y=0}^{y=x}dx+\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\frac{-2}{\sqrt{x+y}}\right]_{x=0}^{x=y}dy=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{x}}dx+\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{y}}dy=$
$\displaystyle\left[2\left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}+\left[2\left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{y}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}=4\left(2-\sqrt{2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ だから
$\displaystyle\iint_D\frac{1}{(x+y)^{\frac{3}{2}}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{(x+y)^{\frac{3}{2}}}dxdy=\lim_{n\to\infty}4\left(2-\sqrt{2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=4\left(2-\sqrt{2}\right)$

(2) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{n}< x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x^2\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列であり,
$\displaystyle\iint_{D_n}\frac{2y}{x^2+y^2}dxdy=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_0^{x^2}\frac{2y}{x^2+y^2}dy\right)dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\log\left(x^2+y^2\right)\right]_{y=0}^{y=x^2}dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\log\left(1+x^2\right)dx=$
$\displaystyle\left[x\log\left(1+x^2\right)\right]_{\frac{1}{n}}^{1}-\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(2-\frac{2}{1+x^2}\right)dx=\log 2-\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-\left[2x-2\tan^{-1}x\right]_{\frac{1}{n}}^{1}=$
$\displaystyle\log 2-\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-2+\frac{\pi}{2}+\frac{2}{n}-2\tan^{-1}\frac{1}{n}$ だから $\displaystyle\iint_D\frac{2y}{x^2+y^2}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{2y}{x^2+y^2}dxdy=$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\log 2-\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-2+\frac{\pi}{2}+\frac{2}{n}-2\tan^{-1}\frac{1}{n}\right)=\log 2-2+\frac{\pi}{2}.$

(3) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\ \ x\leqq y\leqq\sqrt{3}x\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列であり,
$\displaystyle\iint_{D_n}\frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}dxdy=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_x^{\sqrt{3}x}\frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}dy\right)dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\tan^{-1}\frac{y}{x}\right]_{y=x}^{y=\sqrt{3}x}dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\pi}{12\sqrt{x}}dx=\left[\frac{\pi}{6}\sqrt{x}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}=$
$\displaystyle\frac{\pi}{6}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ だから $\displaystyle\iint_D\frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2}dxdy=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{6}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{\pi}{6}.$

(4) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\ \frac{1}{n}-x< y\leqq 1\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列であり,
$\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{x+y}}dxdy=\int_0^1\left(\int_{\frac{1}{n}-x}^{1}\frac{1}{\sqrt{x+y}}dy\right)dx=\int_0^1\left[2\sqrt{x+y}\right]_{y=\frac{1}{n}-x}^{y=1}dx=\int_0^1\left(2\sqrt{x+1}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)dx=$
$\displaystyle\left[\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2x}{\sqrt{n}}\right]_0^1=\frac{8\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{4}{3}$ だから $\displaystyle\iint_D\frac{1}{\sqrt{x+y}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{x+y}}dxdy=$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{4}{3}\right)=\frac{8\sqrt{2}}{3}-\frac{4}{3}.$

(5) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 1\leqq y\leqq n,\ 1\leqq x\leqq y\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列であり,
$\displaystyle\iint_{D_n}\frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}dxdy=\int_1^n\left(\int_1^y\frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx\right)dy=\int_1^n\left[\frac{-1}{x^2+y^2}\right]_{x=1}^{x=y}dy=\int_1^n\left(\frac{1}{1+y^2}-\frac{1}{2y^2}\right)dy=$
$\displaystyle\left[\tan^{-1}y+\frac{1}{2y}\right]_1^n=\tan^{-1}n+\frac{1}{2n}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ だから
$\displaystyle\iint_D\frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}dxdy=\lim_{n\to\infty}\left(\tan^{-1}n+\frac{1}{2n}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$

(6) $D_n=\left(\left[\frac{1}{n},1\right]\times\left[0,\frac{1}{n}\right]\right)\cup\left([0,1]\times\left[\frac{1}{n},1\right]\right)$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列であり, $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy=$
$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy\right)dx+\int_0^1\left(\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy\right)dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\frac{-x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_{y=0}^{y=\frac{1}{n}}dx+\int_0^1\left[\frac{-x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_{y=\frac{1}{n}}^{y=1}dx=$
$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(1-\frac{x}{\left(x^2+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)dx+\int_0^1\left(\frac{x}{\left(x^2+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\right)dx=\left[x-\left(x^2+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}+$

$\left[\left(x^2+\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1=\left(2-\sqrt{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ だから
$\displaystyle\iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\left(2-\sqrt{2}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)=2-\sqrt{2}.$

(7) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ \frac{1}{n}\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列であり，$\displaystyle\iint_{D_n}\frac{2y}{x^2+y^2}dxdy=$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_0^1\frac{2y}{x^2+y^2}dy\right)dx=\int_{\frac{1}{n}}^1\left[\log(x^2+y^2)\right]_{y=0}^{y=1}dx=\int_{\frac{1}{n}}^1\left[\log(x^2+y^2)\right]_{y=0}^{y=1}dx=\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\log(x^2+1)-\log x^2\right)dx=$ $\displaystyle\left[x(\log(x^2+1)-2\log x)\right]_{\frac{1}{n}}^1-\int_{\frac{1}{n}}^1 x\left(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x}\right)dx=\log 2+\frac{1}{n}\left(-\log\left(\frac{1}{n^2}+1\right)+2\log n\right)+\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{2}{x^2+1}dx=$ $\displaystyle\log 2+\frac{\log(n^2+1)}{n}+\left[2\tan^{-1}x\right]_{\frac{1}{n}}^1=\log 2+\frac{4\log n-\log(n^2+1)}{n}+\frac{\pi}{2}-2\tan^{-1}\frac{1}{n}$ である．$\displaystyle 0\leqq\frac{\log(n^2+1)}{n}\leqq\frac{\log(n+1)^2}{n}$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)^2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\log(n+1)}{n+1}\frac{n+1}{n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=0\cdot 1=0$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n^2+1)}{n}=0$ である．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\tan^{-1}\frac{1}{n}=\tan^{-1}0=0$ だから
$\displaystyle\iint_D\frac{2y}{x^2+y^2}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{2y}{x^2+y^2}dxdy=\lim_{n\to\infty}\left(\log 2+\frac{4\log n-\log(n^2+1)}{n}+\frac{\pi}{2}-2\tan^{-1}\frac{1}{n}\right)=\log 2+\frac{\pi}{2}$

(8) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ 1\leqq x^2+y^2\leqq n^2,\ -x\leqq y\leqq\sqrt{3}x\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ は D の近似増加列である．$\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in D_n$ であるためには $1\leqq r\leqq n,\ -\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ であることが必要十分である．従って $E_n=[1,n]\times\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint_{E_n}\frac{1}{r^3\cos^2\theta}rdrd\theta=\int_1^n\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{r^2\cos^2\theta}d\theta\right)dr=\int_1^n\left[\frac{1}{r^2}\tan\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}dr=$ $\displaystyle\int_1^n\frac{\sqrt{3}+1}{r^2}dr=\left[-\frac{\sqrt{3}+1}{r}\right]_1^n=\left(\sqrt{3}+1\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$ である．故に
$\displaystyle\iint_D\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)=\sqrt{3}+1.$

(9) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\leqq x^2+y^2\leqq n^2,\ x\tan\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)\leqq y\leqq x\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{n}\right)\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=2}^{\infty}$ は D の近似増加列である．$\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in D_n$ であるためには $1+\frac{1}{n}\leqq r\leqq n,\ -\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}-\frac{1}{n}$ であることが必要十分である．従って $E_n=\left[1+\frac{1}{n},n\right]\times\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n},\frac{\pi}{3}-\frac{1}{n}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint_{E_n}\frac{1}{r^2\cos^2\theta}drd\theta=$ $\displaystyle\int_{1+\frac{1}{n}}^n\left(\int_{-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{3}-\frac{1}{n}}\frac{1}{r^2\cos^2\theta}d\theta\right)dr=\int_{1+\frac{1}{n}}^n\left[\frac{\tan\theta}{r^2}\right]_{\theta=-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}}^{\theta=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{n}}dr=\int_{1+\frac{1}{n}}^n\frac{1}{r^2}\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{n}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n}\right)\right)dr=$ $\displaystyle\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}-\frac{1}{n^2}\right)\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{n}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n}\right)\right)$ だから $\displaystyle\iint_D\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}-\frac{1}{n^2}\right)\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{n}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n}\right)\right)=\sqrt{3}+1.$

(10) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ \frac{1}{n^2}\leqq x^2+y^2\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である．$\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in D_n$ であるためには $\frac{1}{n}\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であることが必要十分である．従って $E_n=\left[\frac{1}{n},1\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{x\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy=\iint_{E_n}\frac{r\cos\theta\log(r^2)}{r^2}rdrd\theta=\int_{\frac{1}{n}}^1\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos\theta\log r d\theta\right)dr=\int_{\frac{1}{n}}^1\left[2\sin\theta\log r\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}dr=$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 2\log r dr=\left[2r\log r\right]_{\frac{1}{n}}^1-\int_{\frac{1}{n}}^1 2dr=\frac{2\log n}{n}-2+\frac{2}{n}$ である．故に
$\displaystyle\iint_D\frac{x\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{x\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\log n}{n}-2+\frac{2}{n}\right)=-2.$

(11) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ \frac{1}{n^2}\leqq x^2+y^2\leqq n^2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である．$\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in D_n$ であるためには $\frac{1}{n}\leqq r\leqq n,\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であることが必要十分である．従って $E_n=\left[\frac{1}{n},n\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ とおけば

$\displaystyle\iint_{D_n}(x^2+y^2)^{\alpha-1}e^{-(x^2+y^2)^\alpha}dxdy=\iint_{E_n}r^{2\alpha-1}e^{-r^{2\alpha}}drd\theta=\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^{2\alpha-1}e^{-r^{2\alpha}}d\theta\right)dr=\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{\pi r^{2\alpha-1}}{2}e^{-r^{2\alpha}}dr=$ $\displaystyle\left[-\frac{\pi}{4\alpha}e^{-r^{2\alpha}}\right]_{\frac{1}{n}}^{n}=\frac{\pi}{4\alpha}\left(e^{-\frac{1}{n^{2\alpha}}}-e^{-n^{2\alpha}}\right)$ となるため,
$\displaystyle\iint_{D}(x^2+y^2)^{\alpha-1}e^{-(x^2+y^2)^\alpha}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}(x^2+y^2)^{\alpha-1}e^{-(x^2+y^2)^\alpha}dxdy=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4\alpha}\left(e^{-\frac{1}{n^{2\alpha}}}-e^{-n^{2\alpha}}\right)=\frac{\pi}{4\alpha}.$

(12) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{n^2}\leqq x^2+y^2\leqq 1\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である. $\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in D_n$ であるためには $\frac{1}{n}\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi$ であることが必要十分である. 従って $E_n=\left[\frac{1}{n},1\right]\times[0,2\pi]$ とおけば $\displaystyle\iint_{D_n}\log(x^2+y^2)dxdy=\iint_{E_n}r\log(r^2)drd\theta=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_0^{2\pi}2r\log r\right)dr=\int_{\frac{1}{n}}^{1}4\pi r\log rdr=$
$\displaystyle\left[2\pi r^2\log r\right]_{\frac{1}{n}}^{1}-\int_{\frac{1}{n}}^{1}2\pi rdr=\frac{2\pi\log n}{n^2}-[\pi r^2]_{\frac{1}{n}}^{1}=\frac{2\pi\log n}{n^2}+\frac{\pi}{n^2}-\pi$ となるため,
$\displaystyle\iint_{D}\log(x^2+y^2)dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\log(x^2+y^2)dxdy=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\pi\log n}{n^2}+\frac{\pi}{n^2}-\pi\right)=-\pi.$

(13) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{n^2}\leqq x^2+y^2\leqq n^2,\ 0\leqq y\leqq x\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=2}^{\infty}$ は D の近似増加列である. $\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in D_n$ であるためには $\frac{1}{n}\leqq r\leqq n,\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ であることが必要十分である. 従って $E_n=\left[\frac{1}{n},n\right]\times\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{y}{x}e^{-\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint_{E_n}r\tan\theta e^{-r}drd\theta=\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}r\tan\theta e^{-r}d\theta\right)dr=\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left[-re^{-r}\log\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}dr=$
$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{r\log 2}{2}e^{-r}dr=\left[-\frac{r\log 2}{2}e^{-r}\right]_{\frac{1}{n}}^{n}+\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{\log 2}{2}e^{-r}dr=\frac{\log 2}{2}\left(\frac{1}{n}e^{-\frac{1}{n}}-(n+1)e^{-n}+e^{-\frac{1}{n}}\right)$ だから
$\displaystyle\iint_{D}\frac{y}{x}e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{y}{x}e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\frac{\log 2}{2}\left(\frac{1}{n}e^{-\frac{1}{n}}-(n+1)e^{-n}+e^{-\frac{1}{n}}\right)=\frac{\log 2}{2}$
(14) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x^2+y^2\leqq n^2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である. $\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in D_n$ であるためには $0\leqq r\leqq n,\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であることが必要十分である. 従って $E_n=[0,n]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{dxdy}{(x^2+y^2+1)^\alpha}=\iint_{E_n}\frac{r}{(r^2+1)^\alpha}drd\theta=\int_0^n\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r}{(r^2+1)^\alpha}d\theta\right)dr=\int_0^n\frac{\pi r}{2(r^2+1)^\alpha}dr$ が得られる.
$\alpha\neq 1$ の場合は $\displaystyle\int_0^n\frac{\pi r}{2(r^2+1)^\alpha}dr=\left[\frac{\pi}{4(1-\alpha)(r^2+1)^{\alpha-1}}\right]_0^n=\frac{\pi}{4(\alpha-1)}\left(1-\frac{1}{(n^2+1)^{\alpha-1}}\right)$ であり, $\alpha=1$ の場合は $\displaystyle\int_0^n\frac{\pi r}{2(r^2+1)^\alpha}dr=\left[\frac{\pi}{4}\log\left(r^2+1\right)\right]_0^n=\frac{\pi}{4}\log\left(n^2+1\right)$ であるため,
$\alpha>1$ ならば $\displaystyle\iint_{D}\frac{dxdy}{(x^2+y^2+1)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{dxdy}{(x^2+y^2+1)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4(\alpha-1)}\left(1-\frac{1}{(n^2+1)^{\alpha-1}}\right)=\frac{\pi}{4(\alpha-1)}.$
$\alpha<1$ ならば $\displaystyle\iint_{D}\frac{dxdy}{(x^2+y^2+1)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{dxdy}{(x^2+y^2+1)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4(1-\alpha)}\left(\left(n^2+1\right)^{1-\alpha}-1\right)=\infty.$
$\alpha=1$ ならば $\displaystyle\iint_{D}\frac{dxdy}{(x^2+y^2+1)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{dxdy}{(x^2+y^2+1)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\log\left(n^2+1\right)=\infty.$

(15) $D_n=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\leqq x^2+y^2\leqq n^2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=2}^{\infty}$ は D の近似増加列である. $\varphi\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in D_n$ であるためには $1+\frac{1}{n}\leqq r\leqq n, 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であることが必要十分である. 従って $E_n=\left[1+\frac{1}{n},n\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2-1}}dxdy=\iint_{E_n}\frac{r}{r^2\sqrt{r^2-1}}drd\theta=\int_{1+\frac{1}{n}}^{n}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r}{r^2\sqrt{r^2-1}}d\theta\right)dr=$
$\displaystyle\int_{1+\frac{1}{n}}^{n}\frac{\pi r}{2r^2\sqrt{r^2-1}}dr.$ $t=\sqrt{r^2-1}$ と変数変換をすれば, r が $1+\dfrac{1}{n}$ から n まで動けば t は $\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$ から $\sqrt{n^2-1}$ まで動き, $\dfrac{r}{\sqrt{r^2-1}}dr=dt, r^2=t^2+1$ だから $\displaystyle\int_{1+\frac{1}{n}}^{n}\frac{\pi r}{2r^2\sqrt{r^2-1}}dr=\int_{\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}^{\sqrt{n^2-1}}\frac{\pi}{2(t^2+1)}dt=\left[\frac{\pi}{2}\tan^{-1}t\right]_{\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}^{\sqrt{n^2-1}}=$
$\displaystyle\frac{\pi}{2}\left(\tan^{-1}\sqrt{n^2-1}-\tan^{-1}\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)$ である. 故に $\displaystyle\iint_{D}\frac{1}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2-1}}dxdy=$

$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2-1}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\left(\tan^{-1}\sqrt{n^2-1}-\tan^{-1}\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)=\frac{\pi^2}{4}$ である.

(16) $D_n=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\frac{1}{n^2}\leqq x^2+y^2\leqq\left(1-\frac{1}{n}\right)^2,\ 0\leqq x\leqq y\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=3}^{\infty}$ は D の近似増加列である. $\varphi\binom{r}{\theta}\in D_n$ であるためには $\frac{1}{n}\leqq r\leqq 1-\frac{1}{n}$, $\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であることが必要十分である. 従って $E_n=\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]\times\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ とおけば $\iint_{D_n}\frac{1}{y\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=\iint_{E_n}\frac{1}{r\sin\theta\sqrt{1-r^2}}rdrd\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sin\theta\sqrt{1-r^2}}dr\right)d\theta=$ $\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\theta}d\theta\right)\left(\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}dr\right)$ である. ここで $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}d\theta=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0}\frac{-1}{1-t^2}dt=$ $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt=\left[\frac{1}{2}(\log(1+t)-\log(1-t))\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\log\left(\sqrt{2}+1\right)$,
$\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}dr=\left[\sin^{-1}r\right]_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}=\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)-\sin^{-1}\frac{1}{n}$ だから

$$\iint_{D_n}\frac{1}{y\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=\log\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)-\sin^{-1}\frac{1}{n}\right)$$

である. 故に $\iint_{D}\frac{1}{y\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{y\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy=$ $\lim_{n\to\infty}\log\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)-\sin^{-1}\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{2}\log\left(\sqrt{2}+1\right)$.

(17) $D_n=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,1\leqq x^2+y^2\leqq n^2,\ 0\leqq y\leqq x\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=2}^{\infty}$ は D の近似増加列である. $\varphi\binom{r}{\theta}\in D_n$ であるためには $0\leqq r\leqq n$, $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ であることが必要十分である. 従って $E_n=[1,n]\times\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ とおけば $\iint_{D_n}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy=\iint_{E_n}\frac{r}{r^2\cos^2\theta\sqrt{1+r^2}}drd\theta=\int_1^n\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{r\cos^2\theta\sqrt{1+r^2}}d\theta\right)dr=$ $\int_1^n\left[\frac{\tan^2\theta}{r\sqrt{1+r^2}}\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}dr=\int_1^n\frac{1}{r\sqrt{1+r^2}}dr$ である. ここで $t=\sqrt{1+r^2}$ と変数変換すれば, r が 0 から n まで動くとき, t は $\sqrt{2}$ から $\sqrt{1+n^2}$ まで動き, $r=\sqrt{t^2-1}$ だから $dr=\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$ である. 故に $\int_1^n\frac{1}{r\sqrt{1+r^2}}dr=$ $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+n^2}}\frac{1}{t^2-1}dt=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+n^2}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\left[\frac{1}{2}\log\frac{t-1}{t+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+n^2}}\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+n^2}-1}{\sqrt{1+n^2}+1}-\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=$ $\log\left(\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}-\frac{1}{n}\right)+\log\left(\sqrt{2}+1\right)$ となるため, $\iint_{D}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy=$ $\lim_{n\to\infty}\left(\log\left(\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}-\frac{1}{n}\right)+\log\left(\sqrt{2}+1\right)\right)=\log\left(\sqrt{2}+1\right)$.

(18) $D_n=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x^2+y^2\leqq n^2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である. $\varphi\binom{r}{\theta}\in D_n$ であるためには $0\leqq r\leqq n$, $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であることが必要十分である. 従って $E_n=[0,n]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ とおけば $\iint_{D_n}e^{-(x^2+y^2)^2}dxdy=\iint_{E_n}re^{-r^4}drd\theta=\int_0^n\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}re^{-r^4}d\theta\right)dr=\int_0^n\frac{\pi r}{2}e^{-r^4}dr$ が得られる. ここで $t=r^2$ と変数変換すれば, r が 0 から n まで動くとき, t は 0 から n^2 まで動き, $rdr=\frac{1}{2}dt$ である. 故に $\int_0^n\frac{\pi r}{2}e^{-r^4}dr=\frac{\pi}{4}\int_0^{n^2}e^{-t^2}dt$ だから, $\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いると,
$\iint_{D}e^{-(x^2+y^2)^2}dxdy=\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}e^{-(x^2+y^2)^2}dxdy=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\int_0^{n^2}e^{-t^2}dt=\frac{\pi}{4}\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\pi\sqrt{\pi}}{8}$

(19) $D_n=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq x^2+y^2\leqq n^2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である. $\varphi\binom{r}{\theta}\in D_n$ であるためには $0\leqq r\leqq n$, $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であることが必要十分である. 従って $E_n=[0,n]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ とおけば $\iint_{D_n}\frac{1}{(x^2+y^2+a^2)\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint_{E_n}\frac{1}{r^2+a^2}drd\theta=\int_0^n\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{r^2+a^2}d\theta\right)dr=\int_0^n\frac{\pi}{2(r^2+a^2)}dr=$

$\left[\dfrac{\pi}{2a}\tan^{-1}\dfrac{r}{a}\right]_0^n = \dfrac{\pi}{2a}\tan^{-1}\dfrac{n}{a}$ である．従って
$\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2+a^2)\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{(x^2+y^2+a^2)\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2a}\tan^{-1}\frac{n}{a} = \frac{\pi^2}{4a}.$

(20) $D_n = \left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{n^2} \leqq x^2+y^2 \leqq a^2,\, 0\leqq y \leqq x\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D の近似増加列である．$\varphi\binom{r}{\theta}\in D_n$ であるためには $\frac{1}{n}\leqq r\leqq a,\, 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}$ であることが必要十分である．従って $E_n = \left[\frac{1}{n}, a\right]\times\left[0, \frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right]$ とおけば $\displaystyle\iint_{D_n}\tan^{-1}\frac{y}{x}dxdy = \iint_{E_n} r\tan^{-1}(\tan\theta)drd\theta = \int_{\frac{1}{n}}^{a}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} r\theta d\theta\right)dr = \int_{\frac{1}{n}}^{a}\left[\frac{r\theta^2}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} dr =$
$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{a}\frac{r}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)^2 dr = \left[\frac{r^2}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)^2\right]_{\frac{1}{n}}^{a} = \frac{1}{4}\left(a^2-\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)^2$ である．従って
$\displaystyle\iint_D \tan^{-1}\frac{y}{x}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\tan^{-1}\frac{y}{x}dxdy = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(a^2-\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2a^2}{16}.$

(21) $D_n = \left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{n}\leqq y \leqq 1-\frac{1}{n},\ y^3 \leqq x \leqq \left(1-\frac{1}{n}\right)y^2\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=2}^{\infty}$ は D の近似増加列であり，
$\displaystyle\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{y^4-x^2}}dxdy = \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\left(\int_{y^3}^{\left(1-\frac{1}{n}\right)y^2}\frac{1}{\sqrt{y^4-x^2}}dx\right)dy = \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\left[\sin^{-1}\frac{x}{y^2}\right]_{x=y^3}^{x=\left(1-\frac{1}{n}\right)y^2} dy =$
$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\left(\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)-\sin^{-1}y\right)dy = \left(1-\frac{2}{n}\right)\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right) - \left[y\sin^{-1}y\right]_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy =$
$\displaystyle -\frac{3}{n}\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\sin^{-1}\frac{1}{n}+\left[-\sqrt{1-y^2}\right]_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} = -\frac{3}{n}\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\sin^{-1}\frac{1}{n}-\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}+$
$\displaystyle\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$ だから $\displaystyle\iint_D\frac{1}{\sqrt{y^4-x^2}}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{1}{\sqrt{y^4-x^2}}dxdy =$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{n}\sin^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\sin^{-1}\frac{1}{n}-\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right) = 1$

(22) $D_n = \left\{\binom{x}{y}\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{n}\leqq x\leqq 1,\ x^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqq y\leqq n^2x\right\}$ とおけば $\{D_n\}_{n=2}^{\infty}$ は D の近似増加列であり，
$\displaystyle\iint_{D_n}\frac{x^2}{x^4+y^2}dxdy = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_{x^3\left(1+\frac{1}{n}\right)}^{n^2x}\frac{x^2}{x^4+y^2}dy\right)dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\tan^{-1}\frac{y}{x^2}\right]_{y=x^3\left(1+\frac{1}{n}\right)}^{y=n^2x}dx =$
$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\tan^{-1}\frac{n^2}{x}-\tan^{-1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)x\right)\right)dx = \left[x\tan^{-1}\frac{n^2}{x}-x\tan^{-1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)x\right)\right]_{\frac{1}{n}}^{1}+$
$\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\frac{n^2x}{x^2+n^4}+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)x}{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2x^2}\right)dx = \tan^{-1}n^2-\tan^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{\tan^{-1}n^3}{n}+\frac{1}{n}\tan^{-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+$
$\displaystyle\left[\frac{n^2}{2}\log\left(x^2+n^4\right)+\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}\log\left(1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2x^2\right)\right]_{\frac{1}{n}}^{1} = \tan^{-1}n^2-\tan^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{\tan^{-1}n^3}{n}+$
$\displaystyle\frac{1}{n}\tan^{-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{n^2}{2}\log\frac{1+n^4}{\frac{1}{n^2}+n^4}+\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}\log\frac{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n^2}}$ である．$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e$ を用いれば
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2}\log\frac{1+n^4}{\frac{1}{n^2}+n^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2}\log\frac{1+\frac{1}{n^4}}{1+\frac{1}{n^6}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}\log\left(1+\frac{1}{n^4}\right)^{n^4}-\frac{1}{n^4}\log\left(1+\frac{1}{n^6}\right)^{n^6}\right) = 0$ だから
$\displaystyle\iint_D\frac{x^2}{x^4+y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}\frac{x^2}{x^4+y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\left(\tan^{-1}n^2-\tan^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{\tan^{-1}n^3}{n}+\right.$
$\displaystyle\left.\frac{1}{n}\tan^{-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{n^2}{2}\log\frac{1+n^4}{\frac{1}{n^2}+n^4}+\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}\log\frac{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n^2}}\right) = \frac{\pi}{4}+\frac{\log 2}{2}.$

微積分学 II 演習問題　第 14 回　体積と曲面積

1. 次の (1) から (8) の曲線を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積を求めよ．また, (1) から (7) の曲線を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の表面積を求めよ．

(1) $x^2 + y^2 = r^2$ $(-r \leqq a < b \leqq r,\ a \leqq x \leqq b)$　(2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0,\ a \neq b)$

(3) $y = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$　(4) $y = \tan x$ $(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4})$

(5) $y = e^x$ $(0 \leqq x \leqq \log 2)$　(6) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0,\ 0 \leqq t \leqq 2\pi)$

(7) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(a > 0)$　(8) $y = \log x$ $(1 \leqq x \leqq e)$

2. a, b, c を正の定数とする．

(1) 楕円放物面 $z = \dfrac{x^2}{2a} + \dfrac{y^2}{2b}$ と xy 平面ではさまれた領域で, 楕円柱 $E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2c^2} + \dfrac{y^2}{b^2c^2} \leqq 1 \right\}$ に含まれる部分の体積を求めよ．また, 上の楕円放物面の E に含まれる部分の面積を求めよ．

(2) 平面 $z = 2x + 3y$ と 楕円放物面 $z = 4x^2 + 3y^2$ で囲まれたの部分の体積を求めよ．また, 平面 $z = 2x + 3y$ のうち, 楕円放物面 $z = 4x^2 + 3y^2$ の内部にある部分の面積を求めよ．

(3) 円柱面 $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$, 円放物面 $x^2 + y^2 = z$ と xy 平面に平行な平面 $z = 1$ で囲まれた部分の体積を求めよ．また, 円柱面 $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$ のうち, $x^2 + y^2 \leqq z \leqq 1$ を満たす部分の面積を求めよ．

(4) 円柱面 $x^2 + y^2 = a^2$, 曲面 $z = \dfrac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x^2+y^2}} + e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ と xy 平面で囲まれた部分の体積を求めよ．また, 曲面 $z = \dfrac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x^2+y^2}} + e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ のうち, 円柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ の内部にある部分の面積を求めよ．

(5) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq a^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$ とおくとき, $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in D,\ 0 \leqq z \leqq xy \right\}$ の体積を求めよ．また, 曲面 $z = xy$ のうち, D の上にある部分の面積を求めよ．

3. 以下の各問で与えられた領域 D と E の共通部分の体積と表面積を求めよ．

(1) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leqq 3 \right\}$, $E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leqq 1 \right\}$

(2) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leqq 4 \right\}$, $E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$

(3) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + (z-3)^2 \leqq 5 \right\}$, $E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq z \right\}$

(4) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq 2 - z \right\}$, $E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq 1,\ z \geqq 0 \right\}$

(5) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq 2z^2,\ z \geqq 0 \right\}$, $E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq 3 - z \right\}$

(6) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq (1-z)^2,\ 0 \leqq z \leqq 1 \right\}$, $E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq x \right\}$

(7) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2 \right\}$, $E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 \leqq \dfrac{a^2}{4} \right\}$

(8) D は xy 平面上の円板 $x^2 + (y-2)^2 \leqq 1$ を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体,
$E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leqq 3 \right\}$

4. (発展問題) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} \leqq a^{\frac{2}{3}} \right\}$ $(a > 0)$ とするとき, D の体積を求めよ．

5. (発展問題) a を正の定数とするとき, 次の方程式で与えられる曲面の面積を求めよ．

(1) $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$　(2) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

第 14 回の演習問題の解答

1. (1) $y=\sqrt{r^2-x^2}$ の $a \leqq x \leqq b$ の部分を x 軸のまわりに回転させてできる図形の体積は
$\displaystyle\int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi(r^2-x^2)dx = \pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{\pi(b-a)}{3}(3r^2-(a^2+ab+b^2))$ であり, 面積は
$\displaystyle\int_a^b 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx = \int_a^b 2\pi\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}dx = \int_a^b 2\pi r dx = 2\pi r(b-a)$ である.

(2) $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ $(-a \leqq x \leqq a)$ を x 軸のまわりに回転させてできる図形の体積は
$\displaystyle\pi\int_{-a}^a y^2dx = \pi\int_{-a}^a \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx = \pi\left[\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\right]_{-a}^a = \frac{4}{3}\pi ab^2.$
$a>b$ の場合, $\displaystyle\int\sqrt{A^2-x^2}dx = \frac{A^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{A}+\frac{x}{2}\sqrt{A^2-x^2}$ (ただし $A>0$) であることを用いると, 面積は
$\displaystyle 2\pi\int_{-a}^a y\sqrt{1+y'^2}dx = 2\pi\int_{-a}^a\frac{b}{a^2}\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}dx = 2\pi\int_{-a}^a\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}\sqrt{\frac{a^4}{a^2-b^2}-x^2}dx =$
$\displaystyle\frac{\pi b\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}\left[\frac{a^4}{a^2-b^2}\sin^{-1}\frac{\sqrt{a^2-b^2}x}{a^2}+x\sqrt{\frac{a^4}{a^2-b^2}-x^2}\right]_{-a}^a = \frac{2\pi a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\sin^{-1}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}+2\pi b^2.$
$a<b$ の場合は教科書の例題 4.26 の結果から, 面積は $\displaystyle 2\pi\int_{-a}^a y\sqrt{1+y'^2}dx = 2\pi\int_{-a}^a\frac{b}{a^2}\sqrt{(b^2-a^2)x^2+a^4}dx =$
$\displaystyle 2\pi\int_{-a}^a\frac{b\sqrt{b^2-a^2}}{a^2}\sqrt{x^2+\frac{a^4}{b^2-a^2}}dx = \frac{\pi b\sqrt{b^2-a^2}}{a^2}\left[\frac{a^4}{b^2-a^2}\log\left(x+\sqrt{x^2+\frac{a^4}{b^2-a^2}}\right)+x\sqrt{x^2+\frac{a^4}{b^2-a^2}}\right]_{-a}^a =$
$\displaystyle\frac{2\pi a^2b}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\left(\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right)+2\pi b^2.$

(3) $y=\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ を x 軸のまわりに回転させてできる図形の体積は $\displaystyle\int_0^\pi \pi y^2dx = \int_0^\pi \pi\sin^2 x dx =$
$\displaystyle\int_0^\pi\frac{\pi(1-\cos 2x)}{2}dx = \left[\frac{\pi x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$ であり, 面積は $\displaystyle\int_0^\pi 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx = \int_0^\pi 2\pi\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx =$
$\displaystyle\int_1^{-1}\left(-2\pi\sqrt{1+t^2}\right)dt = \pi\left[t\sqrt{1+t^2}+\log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_{-1}^1 = \pi\left(2\sqrt{2}+\log\left(\sqrt{2}+1\right)-\log\left(\sqrt{2}-1\right)\right) =$
$2\pi\left(\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)\right)$ である.

(4) $y=\tan x$ $(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4})$ を x 軸のまわりに回転させてできる図形の体積は $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y^2+1}$ より
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\pi y^2dx = \int_0^1\pi y^2\frac{dx}{dy}dy = \int_0^1\frac{\pi y^2}{y^2+1}dy = \int_0^1\pi\left(1-\frac{1}{y^2+1}\right)dy = \pi\left[y-\tan^{-1}y\right]_0^1 = \pi-\frac{\pi^2}{4}$ であり, 面積は
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx = \int_0^1 2\pi y\sqrt{1+(1+y^2)^2}\frac{dx}{dy}dy = \int_0^1\frac{2\pi y\sqrt{1+(y^2+1)^2}}{y^2+1}dy$ である. $t=\sqrt{1+(1+y^2)^2}$ と
おくと, $2y(y^2+1)dy = tdt$ だから (上式) $\displaystyle = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{\pi t^2}{t^2-1}dy = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\pi\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right)dt =$
$\displaystyle\pi\left[1+\frac{1}{2}(\log(t-1)-\log(t+1))\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \pi\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}+\log\left(\sqrt{5}-1\right)-\log 2+\log\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$ である.

(5) $y=e^x$ $(0 \leqq x \leqq \log 2)$ を x 軸のまわりに回転させてできる図形の体積は $\displaystyle\int_0^{\log 2}\pi y^2dx = \int_0^{\log 2}\pi e^{2x}dx =$
$\displaystyle\left[\frac{\pi}{2}e^{2x}\right]_0^{\log 2} = \frac{3\pi}{2}$ であり, 面積は $\displaystyle\int_0^{\log 2}2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx = \int_0^{\log 2}2\pi e^x\sqrt{1+e^{2x}}dx = \int_1^2 2\pi\sqrt{1+t^2}dt =$
$\displaystyle\pi\left[t\sqrt{1+t^2}+\log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_1^2 = \pi\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}+\log\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\right).$

(6) $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a>0,\ 0 \leqq t \leqq 2\pi)$ を x 軸のまわりに回転させてできる図形の体積は $\displaystyle\int_0^{2\pi a} \pi y^2 dx = \int_0^{2\pi} \pi y^2 \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{2\pi} \pi a^3 (1-\cos t)^3 dt = \int_0^{2\pi} \pi a^3 (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt =$ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \pi a^3 \left(\frac{5}{2} + \frac{3\cos 2t}{2}\right) dt = 5\pi^2 a^3$ であり, 面積は $\displaystyle\int_0^{2\pi a} 2\pi y \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^{2\pi} 2\pi y \sqrt{1+(y')^2} \frac{dx}{dt} dt =$ $\displaystyle\int_0^{2\pi} 2\pi a^2 (1-\cos t)^2 \sqrt{1+\left(\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}\right)^2} dt = \int_0^{2\pi} 8\pi a^2 \sin^3 \frac{t}{2} dt = \int_0^{2\pi} 8\pi a^2 \left(1-\cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2} dt =$ $\displaystyle\int_1^{-1} (-16\pi a^2 (1-t^2)) dt = \left[16\pi a^2 \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\right]_{-1}^{1} = \frac{64\pi a^2}{3}.$

(7) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$ は x 軸について対称だから, この曲線を x 軸のまわりに回転させてできる図形は, この曲線の $y \geqq 0$ の部分 $y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ $(-a \leqq x \leqq a)$ を x 軸のまわりに回転させてできる図形に一致する. 従って, この図形の体積は $\displaystyle\int_{-a}^{a} \pi y^2 dx = \int_{-a}^{a} \pi \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx = \int_{-a}^{a} \pi \left(a^2 - 3a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} - x^2\right) dx =$ $\displaystyle\pi \left[a^2 x - \frac{9}{5} a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7} a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{7}{3}} - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{32\pi a^3}{105}$ であり, 面積は

$\displaystyle\int_{-a}^{a} 2\pi y \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_{-a}^{a} 2\pi \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+\left(-x^{-\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^a 4\pi a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} dx =$ $\displaystyle\int_0^{a^{\frac{2}{3}}} 6\pi a^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - t\right)^{\frac{3}{2}} dt = \left[-\frac{12}{5}\pi a^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - t\right)^{\frac{5}{2}}\right]_0^{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{12}{5}\pi a^2.$

(8) $y = \log x$ $(1 \leqq x \leqq e)$ を x 軸のまわりに回転させてできる図形の体積は $\displaystyle\int_1^e \pi y^2 dx = \int_1^e \pi (\log x)^2 dx = [\pi x (\log x)^2]_1^e - \int_1^e 2\pi \log x dx = e\pi - [2\pi x \log x]_1^e + \int_1^e 2\pi dx = \pi(e-2)$ である.

2. (1) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2c^2} + \dfrac{y^2}{b^2c^2} \leqq 1 \right\}$ とおけば, 楕円放物面 $z = \dfrac{x^2}{2a} + \dfrac{y^2}{2b}$ と xy 平面ではさまれた領域で, E に含まれる部分は縦線集合 $A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in D,\ 0 \leqq z \leqq \dfrac{x^2}{2a} + \dfrac{y^2}{2b} \right\}$ である. $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0,$ $0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $[0,c] \times [0,2\pi]$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は $\left|\begin{smallmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{smallmatrix}\right| = abr$ だから, A の体積は $\displaystyle\iiint_A dxdydx = \iint_D \left(\frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}\right) dxdy =$ $\displaystyle\iint_{[0,c]\times[0,2\pi]} \frac{abr^3}{2} \left(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta\right) drd\theta = \int_0^c \left(\int_0^{2\pi} \frac{abr^3}{4} (a(1+\cos 2\theta) + b(1-\cos 2\theta)) d\theta\right) dr =$ $\displaystyle\int_0^c \frac{\pi abr^3(a+b)}{2} dr = \frac{\pi abc^3(a+b)}{8}$ である. また, $z = \dfrac{x^2}{2a} + \dfrac{y^2}{2b}$ のとき $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{a}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{b}$ だから, 与えられた楕円放物面の E に含まれる部分の面積は, 上と同様の変数変換を行えば $\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy =$ $\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}} dxdy = \iint_{[0,c]\times[0,2\pi]} abr\sqrt{1+r^2} drd\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^c abr\sqrt{1+r^2} dr\right) d\theta =$ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left[\frac{ab}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^c d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{ab}{3}\left((1+c^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right) d\theta = \frac{2\pi ab}{3}\left((1+c^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right)$ である.

(2) $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 4x^2 + 3y^2 \leqq 2x + 3y \right\}$ とおけば, $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 3\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leqq 1 \right\}$ であり, 与えられた平面と楕円放物面で囲まれた部分は縦線集合 $A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in D,\ 4x^2 + 3y^2 \leqq z \leqq 2x + 3y \right\}$ である. $\begin{cases} x = \frac{r}{2}\cos\theta + \frac{1}{4} \\ y = \frac{r}{\sqrt{3}}\sin\theta + \frac{1}{2} \end{cases}$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $[0,1] \times [0,2\pi]$ と 1 対

1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は $\begin{vmatrix} \frac{\cos\theta}{2} & -\frac{r\sin\theta}{2} \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{3}} & \frac{r\cos\theta}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}r}{6}$ だから, A の体積は $\displaystyle\iiint_A dxdydx =$
$\displaystyle\iint_D \left(2x+3y-4x^2-3y^2\right)dxdy = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{\sqrt{3}r^3}{6}drd\theta = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{3}r^3}{6}d\theta\right)dr = \int_0^1 \frac{\pi r^3}{\sqrt{3}}dr = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$ である.
また, 平面 $z = 2x+3y$ のうち, 楕円放物面 $z = 4x^2+3y^2$ の内部にある部分の面積は, 上と同様の変数変換を行えば,
$\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy = \iint_D \sqrt{1+2^2+3^2}dxdy = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{\sqrt{42}r}{6}drd\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \frac{\sqrt{42}r}{6}dr\right)d\theta$
$= \dfrac{\sqrt{42}\pi}{6}$ である.

(3) $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \leqq \frac{1}{4}\right\}$ とおけば, 円柱面 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2 = \dfrac{1}{4}$, 円放物面 $x^2+y^2 = z$ と xy 平面に平行な平面 $z = 1$ で囲まれた部分は縦線集合 $A = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in D,\, x^2+y^2 \leqq z \leqq 1\right\}$ である.
$\begin{cases} x = r\cos\theta+\frac{1}{2} \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0,\, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $\left[0,\frac{1}{2}\right]\times[0,2\pi]$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は $\left|\begin{smallmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{smallmatrix}\right| = r$ だから, A の体積は $\displaystyle\iiint_A dxdydx = \iint_D \left(1-x^2-y^2\right)dxdy =$
$\displaystyle\iint_{\left[0,\frac{1}{2}\right]\times[0,2\pi]} r\left(\frac{3}{4}-r\cos\theta-r^2\right)drd\theta = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{2\pi} r\left(\frac{3}{4}-r\cos\theta-r^2\right)d\theta\right)dr = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3\pi r}{2}-2\pi r^3\right)dr =$
$\displaystyle\left[\frac{3\pi r^2-2\pi r^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{5\pi}{32}$ である. また, 円柱面 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2 = \dfrac{1}{4}$ で, $x^2+y^2 \leqq z \leqq 1$ を満たす部分のうち $y \geqq 0$ である部分を S, $y \leqq 0$ である部分を T とすれば, T は S を xz 平面に関して対称移動したものだから, S と T の面積は等しい. $x^2+y^2 \leqq z \leqq 1$ かつ $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2 = \dfrac{1}{4}$ を満たす点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ の x 座標は 0 以上であり, $y^2 = \dfrac{1}{4}-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$ だから $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0,\, x^2+\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \leqq z \leqq 1\right\} = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq z \leqq 1\right\}$ とおけば S は $y = \sqrt{\dfrac{1}{4}-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}$ かつ $\left(\begin{smallmatrix} x \\ z \end{smallmatrix}\right) \in D$ を満たす点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ 全体からなるため, S の面積は

$$\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}dxdz = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{-\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\right)^2}dxdz = \int_0^1\left(\int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}dx\right)dz =$$
$\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{1}{2}\sin^{-1}(2x-1)\right]_0^z dz = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\sin^{-1}(2z-1)+\frac{\pi}{2}\right)dz = \int_{-1}^1 \frac{1}{4}\left(\sin^{-1}w+\frac{\pi}{2}\right)dw = \frac{\pi}{4}$ となる. 従って, 求める面積は S の面積の 2 倍になるため, $\dfrac{\pi}{2}$ である.

(4) $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leqq a^2\right\}$ とおく. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $[0,a]\times[0,2\pi]$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は r だから, 求める体積は
$\displaystyle\iint_D \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x^2+y^2}}+e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy = \iint_{[0,a]\times[0,2\pi]} \frac{r}{2}\left(e^r+e^{-r}\right)drd\theta = \int_0^a\left(\int_0^{2\pi} \frac{r}{2}\left(e^r+e^{-r}\right)d\theta\right)dr =$
$\displaystyle\int_0^a \pi r\left(e^r+e^{-r}\right)dr = \left[\pi r\left(e^r-e^{-r}\right)\right]_0^a - \int_0^a \pi\left(e^r-e^{-r}\right)dr = \pi a\left(e^a-e^{-a}\right)-\left[\pi\left(e^r+e^{-r}\right)\right]_0^a =$
$2\pi+\pi e^a(a-1)-\pi e^{-a}(a+1)$ である.
$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left(e^{\sqrt{x^2+y^2}}-e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\left(e^{\sqrt{x^2+y^2}}-e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ だから, 求める面積は
$\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy = \iint_D \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x^2+y^2}}+e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy = 2\pi+\pi e^a(a-1)-\pi e^{-a}(a+1)$ である.

(5) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0,\, 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと, $\binom{x}{y} \in D$ であるためには $\binom{r}{\theta} \in [0, a] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ であることが必要十分である．この変数変換のヤコビ行列式は r だから, 求める体積は $\displaystyle\iint_D xydxdy = \iint_{[0,a]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} r^3 \sin\theta\cos\theta drd\theta$ $\displaystyle\int_0^a \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{2}\sin 2\theta d\theta\right) dr = \int_0^a \left[-\frac{r^3}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \int_0^a \frac{r^3}{2} dr = \frac{a^4}{8}$ である．

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = y,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x$ だから, 求める面積は, $\displaystyle\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy =$ $\displaystyle\iint_{[0,a]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} r\sqrt{1 + r^2} drd\theta = \int_0^a \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sqrt{1 + r^2} d\theta\right) dr = \int_0^a \frac{\pi}{2} r\sqrt{1 + r^2} dr = \left[\frac{\pi}{6}\left(1 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a =$ $\dfrac{\pi}{6}\left(\left(1 + a^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right)$.

3. (1) $D \cap E$ は xz 平面の曲線 $x = \begin{cases} \sqrt{2z - z^2} & 0 \leqq z \leqq \frac{3}{2} \\ \sqrt{3 - z^2} & \frac{3}{2} \leqq z \leqq \sqrt{3} \end{cases}$ を z 軸の回りに 1 回転した回転体である．従って, $D \cap E$ の体積は $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \pi x^2 dz = \int_0^{\frac{3}{2}} \pi\left(2z - z^2\right) dz + \int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}} \pi\left(3 - z^2\right) dz = \left[\pi\left(z - \frac{z^3}{3}\right)\right]_0^{\frac{3}{2}} + \left[\pi\left(3z - \frac{z^3}{3}\right)\right]_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}} =$ $\pi\left(2\sqrt{3} - 3\right)$ であり, 面積は $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} dz = \int_0^{\frac{3}{2}} 2\pi\sqrt{2z - z^2}\sqrt{1 + \left(\frac{1 - z}{\sqrt{2z - z^2}}\right)^2} dz +$ $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}} 2\pi\sqrt{3 - z^2}\sqrt{1 + \left(\frac{-z}{\sqrt{3 - z^2}}\right)^2} dz = \int_0^{\frac{3}{2}} 2\pi dz + \int_{\frac{3}{2}}^{\sqrt{3}} 2\sqrt{3}\pi dz = 3\pi\left(3 - \sqrt{3}\right)$ である．

(2) $A = \left\{\binom{x}{y} \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \, x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$ とおけば, $D \cap E$ は縦線集合 $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \middle| \binom{x}{y} \in A,\, |z| \leqq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right\}$ である．$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0,\, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と変数変換すれば A は面積 0 の部分を除いて $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は $\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$ だから, $D \cap E$ の体積は $\displaystyle\iiint_{D\cap E} dxdydz =$ $\displaystyle\iint_A \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\right) dxdy = \iint_A 2\sqrt{4 - x^2 - y^2} dxdy = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} 2r\sqrt{4 - r^2} drd\theta =$ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} 2r\sqrt{4 - r^2} d\theta\right) dr = \int_0^1 4\pi r\sqrt{4 - r^2} dr = \left[-\frac{4\pi}{3}\left(4 - r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}\left(8 - 3\sqrt{3}\right)$ である．D の表面と E の表面の交わりは, 平面 $z = \sqrt{3}$ と $z = -\sqrt{3}$ 上にあるため, $D \cap E$ の表面のうち, E の表面の部分は, xz 平面の直線 $x = 1$ の $-\sqrt{3} \leqq z \leqq \sqrt{3}$ の部分を z 軸の回りに 1 回転した円柱面である．従って, その部分の面積は $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 2\pi dz = 4\sqrt{3}\pi$ である．また, $D \cap E$ の表面のうち, D の表面の部分は, xz 平面の円 $x^2 + z^2 = 4$ の $-2 \leqq z \leqq -\sqrt{3}$ と $\sqrt{3} \leqq z \leqq 2$ の部分を z 軸の回りに 1 回転した回転体であるため, その部分の面積は問題 1 の (1) の結果から $8\pi\left(2 - \sqrt{3}\right)$ である．以上から $D \cap E$ の表面積は $4\sqrt{3}\pi + 8\pi\left(2 - \sqrt{3}\right) = 4\pi\left(4 - \sqrt{3}\right)$ である．

(3) $D \cap E$ は xz 平面の曲線 $x = \begin{cases} \sqrt{5 - (z - 3)^2} & 3 - \sqrt{5} \leqq z \leqq 1,\, 4 \leqq z \leqq 3 + \sqrt{5} \\ \sqrt{z} & 1 \leqq z \leqq 4 \end{cases}$ を z 軸の回りに 1 回転した回転体だから, $D \cap E$ の体積は $\displaystyle\int_{3-\sqrt{5}}^{3+\sqrt{5}} \pi x^2 dz = \int_{3-\sqrt{5}}^1 \pi\left(5 - (z - 3)^2\right) dz + \int_1^4 \pi z dz + \int_4^{3+\sqrt{5}} \pi\left(5 - (z - 3)^2\right) dz =$ $\displaystyle\left[\pi\left(5z - \frac{(z - 3)^3}{3}\right)\right]_{3-\sqrt{5}}^1 + \left[\frac{\pi z^2}{2}\right]_1^4 + \left[\pi\left(5z - \frac{(z - 3)^3}{3}\right)\right]_4^{3+\sqrt{5}} = \pi\left(\frac{20\sqrt{5}}{3} - \frac{9}{2}\right)$ であり, 面積は

$\displaystyle\int_{3-\sqrt{5}}^{3+\sqrt{5}}2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}dz=\int_{3-\sqrt{5}}^{1}2\pi\sqrt{5-(z-3)^2}\sqrt{1+\left(\frac{-z+3}{\sqrt{5-(z-3)^2}}\right)^2}dz+\int_1^4 2\pi\sqrt{z}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{z}}\right)^2}dz+$ $\displaystyle\int_4^{3+\sqrt{5}}2\pi\sqrt{5-(z-3)^2}\sqrt{1+\left(\frac{-z+3}{\sqrt{5-(z-3)^2}}\right)^2}dz=\int_{3-\sqrt{5}}^{1}2\sqrt{5}\pi dz+\int_1^4\pi\sqrt{4z+1}dz+\int_4^{3+\sqrt{5}}2\sqrt{5}\pi dz=$ $\displaystyle 2\sqrt{5}\pi\bigl(\sqrt{5}-2\bigr)+\left[\frac{\pi}{6}(4z+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4+2\sqrt{5}\pi\bigl(\sqrt{5}-1\bigr)=\pi\left(20+\frac{17\sqrt{17}}{6}-\frac{41\sqrt{5}}{6}\right)$ である.

(4) $D\cap E$ は xz 平面の曲線 $x=\begin{cases}1 & 0\leqq z\leqq 1\\ \sqrt{2-z} & 1\leqq z\leqq 2\end{cases}$ を z 軸の回りに 1 回転した回転体だから, $D\cap E$ の体積は $\displaystyle\int_0^2\pi x^2dz=\int_0^1\pi dz+\int_1^2\pi(2-z)dz=\pi+\left[-\frac{\pi(2-z)^2}{2}\right]_1^2=\frac{3\pi}{2}$ である. D の表面と E の表面の交わりは, 平面 $z=1$ 上にあるため, $D\cap E$ の表面のうち, E の表面の部分は, xz 平面の直線 $x=1$ の $0\leqq z\leqq 1$ の部分を z 軸の回りに 1 回転した円柱面と xy 平面上の原点を中心とする単位円板である. 従って, その部分の面積は $\displaystyle\int_0^1 2\pi dz+\pi=3\pi$ である. また, $D\cap E$ の表面のうち, D に含まれる部分は, xz 平面の放物線 $x=\sqrt{2-z}$ の $1\leqq z\leqq 2$ の部分を z 軸の回りに 1 回転した回転体であるため, その部分の面積は $\displaystyle\int_1^2 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}dz=\int_1^2 2\pi\sqrt{2-z}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{2\sqrt{2-z}}\right)^2}dz=$ $\displaystyle\int_1^2\pi\sqrt{9-4z}dz=\left[-\frac{\pi}{6}(9-4z)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=\frac{\pi}{6}\bigl(5\sqrt{5}-1\bigr)$ である. 以上から $D\cap E$ の表面積は $3\pi+\dfrac{\pi}{6}\bigl(5\sqrt{5}-1\bigr)=\dfrac{\pi}{6}\bigl(5\sqrt{5}+17\bigr)$ である.

(5) $D\cap E$ は xz 平面の曲線 $x=\begin{cases}\sqrt{2}x & 0\leqq z\leqq 1\\ \sqrt{3-z} & 1\leqq z\leqq 3\end{cases}$ を z 軸の回りに 1 回転した回転体だから, $D\cap E$ の体積は $\displaystyle\int_0^3\pi x^2dz=\int_0^1 2\pi x^2dz+\int_1^3\pi(3-z)dz=\left[\frac{2\pi x^3}{3}\right]_0^1+\left[-\frac{\pi(3-z)^2}{2}\right]_1^3=\frac{8\pi}{3}$ である. D の表面と E の表面の交わりは, 平面 $z=1$ 上にあるため, $D\cap E$ の表面のうち, E の表面の部分は, xz 平面の直線 $x=\sqrt{2}z$ の $0\leqq z\leqq 1$ の部分を z 軸の回りに 1 回転した円錐面である. 従って, その部分の面積は $\displaystyle\int_0^1 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}dz=\int_0^1 2\sqrt{6}\pi z=\sqrt{6}\pi$ である. また, $D\cap E$ の表面のうち, D の表面の部分は, xz 平面の放物線 $x=\sqrt{3-z}$ の $1\leqq z\leqq 3$ の部分を z 軸の回りに 1 回転した回転体であるため, その部分の面積は $\displaystyle\int_1^3 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}dz=\int_1^3 2\pi\sqrt{3-z}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{2\sqrt{3-z}}\right)^2}dz=$ $\displaystyle\int_1^3\pi\sqrt{13-4z}dz=\left[-\frac{\pi}{6}(13-4z)^{\frac{3}{2}}\right]_1^3=\frac{13\pi}{3}$ である. 以上から $D\cap E$ の表面積は $\sqrt{6}\pi+\dfrac{13\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}\bigl(3\sqrt{6}+13\bigr)$ である.

(6) $A=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2\leqq x\right\}$ とおけば, $D\cap E$ は縦線集合 $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in A,\ 0\leqq z\leqq 1-\sqrt{x^2+y^2}\right\}$ である. $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ $(r\geqq 0,\ -\pi\leqq\theta\leqq\pi)$ と変数変換すれば A は面積 0 の部分を除いて $r\theta$ 平面の縦線集合 $B=\left\{\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2},\ 0\leqq r\leqq\cos\theta\right\}$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は $\left|\begin{smallmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{smallmatrix}\right|=r$ だから, $D\cap E$ の体積は $\displaystyle\iiint_{D\cap E}dxdydz=\iint_A\left(\int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}}dz\right)dxdy=\iint_A\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=$ $\displaystyle\iint_B r(1-r)\,drd\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\cos\theta}\bigl(r-r^2\bigr)\,dr\right)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=\cos\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2\theta}{2}-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)d\theta=$ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{4}-\frac{\cos\theta(1-\sin^2\theta)}{3}\right)d\theta=\left[\frac{\theta}{4}+\frac{\sin 2\theta}{8}-\frac{\sin\theta}{3}+\frac{\sin^3\theta}{9}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}-\frac{4}{9}$ である.

$D\cap E$ の表面のうち, E の表面の部分は, $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,x^2+y^2=x\leqq(1-z)^2,\ 0\leqq z\leqq 1\right\}$ だから, xz 平面上の

縦線集合 $C=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,0\leqq z\leqq 1,\,0\leqq x\leqq(1-z)^2\right\}$ を考えると, $S=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)\in C,\,y=\sqrt{x-x^2}\right\}$ と $T=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)\in C,\,y=-\sqrt{x-x^2}\right\}$ の合併集合である. S の面積は $\displaystyle\iint_C\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}dxdz=$ $\displaystyle\iint_C\sqrt{1+\left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}\right)^2}dxdz=\int_0^1\left(\int_0^{(1-z)^2}\frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}dx\right)dz=\int_0^1\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}(2x-1)\right]_{x=0}^{x=(1-z)^2}dz=$ $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2}\sin^{-1}\bigl(2z^2-4z+1\bigr)\,dz+\int_0^1\frac{\pi}{4}dz=\left[\frac{z-1}{2}\sin^{-1}\bigl(2z^2-4z+1\bigr)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1-z}{\sqrt{2z-z^2}}dz+\frac{\pi}{4}=$ $\displaystyle\frac{\pi}{2}-\left[\sqrt{2z-z^2}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}-1$ であり, T は xz 平面に関して S と対称な曲面であるため, その面積は S の面積と等しい. 従って, $D\cap E$ の表面のうち, E の表面の部分の面積は $\pi-2$ である. $D\cap E$ の表面のうち, D の表面の部分は, A と円錐面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ で A の上にある部分の合併集合である. A は半径 $\dfrac{1}{2}$ の円板だから, その面積は $\dfrac{\pi}{4}$ であり, 円錐面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ で A の上にある部分の面積は, $\displaystyle\iint_A\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=$ $\displaystyle\iint_A\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}dxdy=\sqrt{2}\iint_A dxdy=\sqrt{2}(A\text{ の面積})=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ である. 故に $D\cap E$ の表面のうち, D の表面の部分の面積は $\dfrac{\pi}{4}\bigl(1+\sqrt{2}\bigr)$ である. 以上から $D\cap E$ の表面積は $\pi-2+\dfrac{\pi}{4}\bigl(1+\sqrt{2}\bigr)=\dfrac{\pi}{4}\bigl(5+\sqrt{2}\bigr)-2$ である.

(7) $A=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\leqq\frac{a^2}{4}\right\}$ とおけば, $D\cap E$ は縦線集合 $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in A,\,|z|\leqq\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right\}$ である. $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$ $(r\geqq 0,\,-\pi\leqq\theta\leqq\pi)$ と変数変換すれば A は面積 0 の部分を除いて $r\theta$ 平面の縦線集合 $B=\left\{\left(\begin{smallmatrix}r\\\theta\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2},\,0\leqq r\leqq a\cos\theta\right\}$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は $\left|\begin{smallmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\\sin\theta & r\cos\theta\end{smallmatrix}\right|=r$ だから, $D\cap E$ の体積は $\displaystyle\iiint_{D\cap E}dxdydz=\iint_A\left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dz\right)dxdy=\iint_A 2\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy=$ $\displaystyle\iint_B 2r\sqrt{a^2-r^2}drd\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{a\cos\theta}2r\sqrt{a^2-r^2}dr\right)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{2}{3}\bigl(a^2-r^2\bigr)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=a\cos\theta}d\theta=$ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a^3}{3}\bigl(1-\bigl|\sin^3\theta\bigr|\bigr)\,d\theta=\frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\bigl(1-\sin\theta\bigl(1-\cos^2\theta\bigr)\bigr)\,d\theta=\frac{4a^3}{3}\left[\theta+\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2a^3(3\pi-4)}{9}$ である. $D\cap E$ の表面のうち, E の表面の部分は, $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,x^2+y^2=ax\leqq a^2-z^2,\,-a\leqq z\leqq a\right\}$ だから, xz 平面上の縦線集合 $C=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,-a\leqq z\leqq a,\,0\leqq x\leqq a-\frac{z^2}{a}\right\}$ を考えると, $S=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)\in C,\,y=\sqrt{ax-x^2}\right\}$ と $T=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\,\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)\in C,\,y=-\sqrt{ax-x^2}\right\}$ の合併集合である. S の面積は $\displaystyle\iint_C\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}dxdz=$ $\displaystyle\iint_C\sqrt{1+\left(\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}\right)^2}dxdz=\int_{-a}^a\left(\int_0^{a-\frac{z^2}{a}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{a}-1\right)^2}}dx\right)dz=\int_{-a}^a\left[\frac{a}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x}{a}-1\right)\right]_{x=0}^{x=a-\frac{z^2}{a}}dz=$ $\displaystyle\int_{-a}^a\frac{a}{2}\sin^{-1}\left(1-\frac{2z^2}{a^2}\right)dz+\int_{-a}^a\frac{\pi a}{4}dz=\int_0^a a\sin^{-1}\left(1-\frac{2z^2}{a^2}\right)dz+\frac{\pi a^2}{2}=\left[az\sin^{-1}\left(1-\frac{2z^2}{a^2}\right)\right]_0^a-$ $\displaystyle\int_0^a\frac{-2az}{\sqrt{a^2-z^2}}dz+\frac{\pi a^2}{2}=-\left[2a\sqrt{a^2-z^2}\right]_0^a=2a^2$ であり, T は xz 平面に関して S と対称な曲面であるため, その面積は S の面積と等しい. 従って, $D\cap E$ の表面のうち, E の表面の部分の面積は $4a^2$ である. $D\cap E$ の表面のうち, D の表面の部分は, A の上下にある半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ の部分の合併集合である. 上と同様の変数変換を行えば, 半球面 $z=\sqrt{a-x^2-y^2}$ で A の上にある部分の面積は, $\displaystyle\iint_A\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=$

$\iint_A \sqrt{1+\left(\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\dfrac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2}dxdy = \iint_A \dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy = \iint_B \dfrac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}drd\theta =$
$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{a\cos\theta}\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}dr\right)d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-a\sqrt{a^2-r^2}\right]_{r=0}^{r=a\cos\theta}d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^2(1-|\sin\theta|)d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2(1-\sin\theta)d\theta =$
$2\left[a^2(\theta+\cos\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2(\pi-2)$ である．半球面 $z=-\sqrt{a-x^2-y^2}$ で A の下にある部分は, 半球面 $z=\sqrt{a-x^2-y^2}$ で A の上にある部分と xy 平面に関して対称な曲面であるため, その面積は半球面 $z=\sqrt{a-x^2-y^2}$ で A の上にある部分の面積と等しい．故に $D\cap E$ の表面のうち, D の表面の部分の面積は $2a^2(\pi-2)$ である．以上から $D\cap E$ の表面積は $4a^2+2a^2(\pi-2)=2\pi a^2$ である．

(8) $D\cap E$ は xy 平面上の縦線集合 $A=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2\,\middle|\, -\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq x\leqq\frac{\sqrt{3}}{2},\ 2-\sqrt{1-x^2}\leqq y\leqq\sqrt{3-x^2}\right\}$ を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体である．$x=\sin t$ とおけば, $dx=\cos t dt$ であり, t が $-\dfrac{\pi}{3}$ から $\dfrac{\pi}{3}$ まで動けば, x は $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ まで動くため, 体積は $\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\pi\left(\sqrt{3-x^2}\right)^2dx-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\pi\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)^2dx =$
$\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\pi\left(4\sqrt{1-x^2}-2\right)dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\pi\left(4\cos^2 t-2\cos t\right)dt = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\pi(2+2\cos 2t-2\cos t)\,dt =$
$\pi\left[2t+\sin 2t-2\sin t\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{4\pi^2}{3}-\sqrt{3}\pi$ である．$D\cap E$ の表面のうち, E の表面の部分は, xy 平面の半円 $y=\sqrt{3-x^2}$ の $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の部分を x 軸の回りに 1 回転した回転体であるため, その部分の面積は問題 1 の (1) の結果から 6π である．また, $D\cap E$ の表面のうち, D の表面の部分は, xy 平面の半円 $y=2-\sqrt{1-x^2}$ の $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の部分を x 軸の回りに 1 回転した回転体であるため, その部分の面積は $\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx =$
$\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}2\pi\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}dx = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}2\pi\left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)dx = \left[2\pi\left(2\sin^{-1}x-x\right)\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$
$\dfrac{8\pi^2}{3}-2\sqrt{3}\pi$ である．以上から $D\cap E$ の表面積は $6\pi+\dfrac{8\pi^2}{3}-2\sqrt{3}\pi=\dfrac{8\pi^2}{3}+2\pi\left(3-\sqrt{3}\right)$ である．

4. $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ を $f\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u^3\\v^3\\w^3\end{pmatrix}$ により定めると, $f\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\in D$ であるためには $u^2+v^2+w^2\leqq a^{\frac{2}{3}}$ であることが必要十分である．従って $E=\left\{\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\,\middle|\, u^2+v^2+w^2\leqq a^{\frac{2}{3}}\right\}$ とおけば, f は E を D の上に 1 対 1 に写す．$f'\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3u^2&0&0\\0&3v^2&0\\0&0&3w^2\end{pmatrix}$ だから $\det f'\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=27u^2v^2w^2$ である．従って, D の体積は, $\iiint_D dxdydz=\iiint_E 27u^2v^2w^2dudvdw$ である．そこで $u=r\sin\theta\cos\varphi$, $v=r\sin\theta\sin\varphi$, $w=r\cos\theta$ ($r\geqq 0$, $0\leqq\theta\leqq\pi$, $0\leqq\varphi\leqq 2\pi$) とおくと, $\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\in E$ であるためには $0\leqq r\leqq a^{\frac{1}{3}}$, $0\leqq\theta\leqq\pi$, $0\leqq\varphi\leqq 2\pi$ であることが必要十分である．よって, $F=\left[0,a^{\frac{1}{3}}\right]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$ とおけば $\iiint_E 27u^2v^2w^2dudvdw=$

$\displaystyle\iiint_F 27r^8\sin^5\theta\cos^2\theta\cos^2\varphi\sin^2\varphi drd\theta d\varphi = \int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{27}{4}r^8\sin^5\theta\cos^2\theta\sin^2 2\varphi d\varphi\right)d\theta\right)dr =$
$\displaystyle\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{27}{8}r^8\sin^5\theta\cos^2\theta(1-\cos 4\varphi)d\varphi\right)d\theta\right)dr = \int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\left(\int_0^{\pi}\frac{27\pi}{4}r^8\sin^5\theta\cos^2\theta d\theta\right)dr =$
$\displaystyle\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\left(\int_0^{\pi}\frac{27\pi}{4}r^8\left(1-\cos^2\theta\right)^2\cos^2\theta\sin\theta d\theta\right)dr = \int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\left(\int_0^{\pi}\frac{27\pi}{4}r^8\left(\cos^2\theta-2\cos^4\theta+\cos^6\theta\right)\sin\theta d\theta\right)dr =$
$\displaystyle\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\left[\frac{27\pi}{4}r^8\left(-\frac{1}{3}\cos^3\theta+\frac{2}{5}\cos^5\theta-\frac{1}{7}\cos^7\theta\right)\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}dr = \int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\frac{36\pi}{35}r^8dr = \frac{4\pi}{35}a^3$ となり, 求める体積は $\dfrac{4\pi}{35}a^3$ である．

5. (1) $\boldsymbol{R}^3$ の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が $(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ で与えられる曲面 S 上にあるためには $x^2+y^2 \leqq a^2$ かつ $z=\pm\Bigl(a^{\frac{2}{3}}-(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}\Bigr)^{\frac{3}{2}}$ を満たすことが必要十分である．S_+ を S の z-座標が 0 以上である点全体からなる部分, S_- を S の z-座標が 0 以下である点全体からなる部分とすれば, これらの面積は等しく, S の面積はこれらの面積の和になる．$z=\Bigl(a^{\frac{2}{3}}-(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}\Bigr)^{\frac{3}{2}}$ ならば

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-x(x^2+y^2)^{-\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-y(x^2+y^2)^{-\frac{2}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}}$$

だから, $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \middle|\, x^2+y^2\leqq a^2\right\}$ とおくと S_+ の面積は $\displaystyle\iint_D\sqrt{1+\Bigl(\frac{\partial z}{\partial x}\Bigr)^2+\Bigl(\frac{\partial z}{\partial y}\Bigr)^2}dxdy=$ $\displaystyle\iint_D a^{\frac{1}{3}}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{6}}dxdy$ で与えられる．$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $(r\geqq 0,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $E=[0,a]\times[0,2\pi]$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は r だから $\displaystyle\iint_D a^{\frac{1}{3}}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{6}}dxdy=$ $\displaystyle\iint_E a^{\frac{1}{3}}r^{-\frac{1}{3}}rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a a^{\frac{1}{3}}r^{\frac{2}{3}}dr\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{3}{5}a^{\frac{1}{3}}r^{\frac{5}{3}}\right]_0^a d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{3}{5}a^2d\theta=\frac{6\pi a^2}{5}$ となるため, S_+ の面積は $\dfrac{6\pi a^2}{5}$ である．従って S の面積は $\dfrac{12\pi a^2}{5}$ である．

(2) $\boldsymbol{R}^3$ の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ で与えられる曲面 S 上にあるためには $x^2\geqq y^2$, $x^2+y^2\leqq a\sqrt{x^2-y^2}$ かつ $z=\pm\sqrt{a\sqrt{x^2-y^2}-x^2-y^2}$ を満たすことが必要十分である．S_+ を S の z-座標が 0 以上である点全体からなる部分, S_- を S の z-座標が 0 以下である点全体からなる部分とすれば, これらの面積は等しく, S の面積はこれらの面積の和になる．さらに T_+ を S_+ の x-座標が 0 以上である点全体からなる部分, T_- を S_+ の x-座標が 0 以下である点全体からなる部分とすれば, これらの面積は等しく, S_+ の面積はこれらの面積の和になる．$z=\sqrt{a\sqrt{x^2-y^2}-x^2-y^2}$ ならば

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{ax-2x\sqrt{x^2-y^2}}{2\sqrt{a(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}-x^4+y^4}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-ay-2y\sqrt{x^2-y^2}}{2\sqrt{a(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}-x^4+y^4}}$$

だから, $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x\geqq 0,\ x^2\geqq y^2,\ x^2+y^2\leqq a\sqrt{x^2-y^2}\right\}$ とおくと T_+ の面積は $\displaystyle\iint_D\sqrt{1+\Bigl(\frac{\partial z}{\partial x}\Bigr)^2+\Bigl(\frac{\partial z}{\partial y}\Bigr)^2}dxdy=\frac{1}{2}\iint_D\sqrt{\frac{a^2(x^2+y^2)}{a(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}-x^4+y^4}}dxdy$ で与えられる．$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $(r\geqq 0,$ $-\pi\leqq\theta\leqq\pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $E=\left\{\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, -\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4},\ 0\leqq r\leqq a\sqrt{\cos 2\theta}\right\}$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は r だから $\displaystyle\iint_D\sqrt{\frac{a^2(x^2+y^2)}{a(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}-x^4+y^4}}dxdy=$ $\displaystyle\iint_E\sqrt{\frac{a^2r}{a(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}-r\cos 2\theta}}drd\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\sqrt{\frac{r}{a\sqrt{\cos 2\theta}-r}}dr\right)d\theta$. $t=\sqrt{\dfrac{r}{a\sqrt{\cos 2\theta}-r}}$ とおけば, r が 0 から $a\sqrt{\cos 2\theta}$ まで動くと t は 0 から ∞ まで動き, $r=\dfrac{a\sqrt{\cos 2\theta}t^2}{1+t^2}$ だから $dr=\dfrac{2a\sqrt{\cos 2\theta}t}{(1+t^2)^2}dt$ である．従って $\displaystyle\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\sqrt{\frac{r}{a\sqrt{\cos 2\theta}-r}}dr=\int_0^{\infty}\frac{2a^2t^2}{(1+t^2)^2}dt$ となり, さらに $t=\tan\varphi$ とおいて置換積分を行えば, t は 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動き, $dt=\dfrac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$ だから $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{2a^2t^2}{(1+t^2)^2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2a^2\sin^2\varphi d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2(1-\cos 2\varphi)d\varphi=$ $\left[a^2\varphi-\dfrac{a^2\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi a^2}{2}$ である．故に $\displaystyle\iint_D\sqrt{\frac{a^2(x^2+y^2)}{a(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}-x^4+y^4}}dxdy=\frac{\pi^2a^2}{4}$ となるため, T_+ の面積は $\dfrac{\pi^2a^2}{8}$ である．ここで, S_+ の面積は T_+ の面積の 2 倍, S の面積は S_+ の面積の 2 倍だから, 求める S の面積は $\dfrac{\pi^2a^2}{2}$ である．

微積分学 II 演習問題　第 15 回　復習

1. 以下の各問で与えられる関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ が $\binom{0}{0}$ で微分可能ならば, $\binom{0}{0}$ における微分 $f'\binom{0}{0}$ を求め, 微分不可能ならば, その理由を述べよ.

(1) $f\binom{x}{y}=\begin{cases}2x-y+\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}\\ 0 & \binom{x}{y}=\binom{0}{0}\end{cases}$　(2) $f\binom{x}{y}=\begin{cases}x+2y+\dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}\\ 0 & \binom{x}{y}=\binom{0}{0}\end{cases}$

(3) $f\binom{x}{y}=\begin{cases}2x+3y+\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}\\ 0 & \binom{x}{y}=\binom{0}{0}\end{cases}$　(4) $f\binom{x}{y}=\begin{cases}4x-5y+\dfrac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}\\ 0 & \binom{x}{y}=\binom{0}{0}\end{cases}$

(5) $f\binom{x}{y}=\begin{cases}x-y+\dfrac{\sqrt{|x|}y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}\\ 0 & \binom{x}{y}=\binom{0}{0}\end{cases}$

2. $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$, $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を $f\binom{x}{y}=\begin{pmatrix}x^3+y^2\\ x^2y+xy-2y^2\end{pmatrix}$, $g\binom{z}{w}=\begin{pmatrix}e^z\cos w\\ e^z\sin w\end{pmatrix}$ により定める.
(1) f, g のそれぞれ $\binom{x}{y}$, $\binom{z}{w}$ における微分を求めよ.
(2) 合成写像 $f\circ g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ の $\binom{z}{w}$ における微分を求めよ.

3. $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$, $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$, $h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ を $f\binom{x}{y}=\log(x^2+xy+y^2+1)$, $g\binom{r}{\theta}=\begin{pmatrix}r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{pmatrix}$, $h(t)=\begin{pmatrix}e^t+e^{-t}\\ e^t-e^{-t}\end{pmatrix}$ により定める.
(1) f, g, h のそれぞれ $\binom{x}{y}$, $\binom{r}{\theta}$, t における微分を求めよ.
(2) 合成写像 $f\circ g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ の $\binom{r}{\theta}$ における微分を求め, $f\circ g$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial r}$, $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial\theta}$ を求めよ.
(3) 合成写像 $f\circ h:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ の導関数を求めよ.

4. 写像 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ と関数 $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y}=\begin{pmatrix}3x^3-2x^2y+y^3\\ x^2y-2xy^2\end{pmatrix}$, $g\binom{z}{w}=z^2w^4-4zw^3-5z^2w^2$ で定める.
(1) f の $\binom{x}{y}$ における微分 $f'\binom{x}{y}$ と g の $\binom{z}{w}$ における微分 $g'\binom{z}{w}$ を求めよ.
(2) $\binom{2}{-1}$ における g の $\binom{-1}{1}$ 方向の方向微分を求めよ.
(3) 合成写像 $g\circ f$ の $\binom{1}{1}$ における微分 $(g\circ f)'\binom{1}{1}$ を求めよ.

5. 写像 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ と関数 $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y}=\begin{pmatrix}2x^3-y^3\\ x^2y-2xy^2\end{pmatrix}$, $g\binom{z}{w}=z^3w^3+zw^2-z^2w$ で定める.
(1) f の $\binom{x}{y}$ における微分 $f'\binom{x}{y}$ と g の $\binom{z}{w}$ における微分 $g'\binom{z}{w}$ を求めよ.
(2) $\binom{1}{1}$ における g の $\binom{1}{2}$ 方向の方向微分を求めよ.
(3) 合成写像 $g\circ f$ の $\binom{1}{1}$ における微分 $(g\circ f)'\binom{1}{1}$ を求め, さらに $\dfrac{\partial g\circ f}{\partial x}\binom{1}{1}$ と $\dfrac{\partial g\circ f}{\partial y}\binom{1}{1}$ の値を求めよ.

6. $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$, $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を $f\binom{x}{y}=\tan^{-1}(x^2+xy+2y^2)$, $g\binom{r}{\theta}=\begin{pmatrix}r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{pmatrix}$ により定める. 合成写像 $f\circ g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ の $\binom{1}{\pi}$ における微分を求め, $f\circ g$ の $\binom{1}{\pi}$ における偏微分 $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial r}\binom{1}{\pi}$, $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial\theta}\binom{1}{\pi}$ を求めよ.

7. 累次積分 $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 e^{x^2}dx\right)dy$ を計算せよ.

8. 以下の積分を計算せよ.
(1) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ x^2\leqq y\leqq x+2\right\}$, $\displaystyle\iint_D(2x+3y)dxdy$
(2) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ x^2\leqq y\leqq 2-x\right\}$, $\displaystyle\iint_D\left(24x^2+84y^2\right)dxdy$
(3) $D=\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2\middle|\ x^2+y^2\leqq 1\right\}$, $\displaystyle\iint_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$

9. $0<a<b$, $0<c<d$ とする. 曲面 $z=\sqrt{2xy}$ $(x,y\geqq 0)$ のうち, $[a,b]\times[c,d]$ の上にある部分の面積を求めよ.

第 15 回の演習問題の解答

1. (1) f の定義から $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\displaystyle\lim_{t\to 0}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}t\\0\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\displaystyle\lim_{t\to 0}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}0\\t\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=-1$ だから, f が $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で微分可能ならば, $f'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}2 & -1\end{smallmatrix}\right)$ となる. 故に f が $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で微分可能であることを示すには $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}}\dfrac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{0})-\left(\begin{smallmatrix}2 & -1\end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}=0$ が成り立つことを示せばよい.

$\boldsymbol{x}=\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\boldsymbol{0}$ に対して, $\dfrac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{0})-\left(\begin{smallmatrix}2 & -1\end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ である. ここで, $x^2\leqq x^2+y^2$ より, この両辺に $\dfrac{|y|}{x^2+y^2}\geqq 0$ をかければ $0\leqq\dfrac{|x^2y|}{x^2+y^2}\leqq|y|$ が得られる. $\boldsymbol{x}=\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\boldsymbol{0}$ のとき, $|y|\to 0$ だから

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}}\frac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{0})-\left(\begin{smallmatrix}2 & -1\end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}=\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$$

である. 故に f は $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で微分可能であり, $f'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}2 & -1\end{smallmatrix}\right)$ である.

(2) f の定義から $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\displaystyle\lim_{t\to 0}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}t\\0\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\displaystyle\lim_{t\to 0}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}0\\t\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=2$ だから, もし f が $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で微分可能ならば, $f'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\end{smallmatrix}\right)$ となる. 従って f が $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で微分可能であることを示すには $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}}\dfrac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{0})-\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}=0$ が成り立つことを示せばよい.

$\boldsymbol{x}=\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\boldsymbol{0}$ に対して, $\dfrac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{0})-\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ である. ここで, $x^2\leqq x^2+y^2$ より, この両辺に $\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\geqq 0$ をかければ $0\leqq\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leqq|y|$ が得られる. $\boldsymbol{x}=\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\boldsymbol{0}$ のとき, $|y|\to 0$ だから

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}}\frac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{0})-\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}=\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$$

である. 故に f は $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で微分可能であり, $f'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\end{smallmatrix}\right)$ である.

(3) f の定義から $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\displaystyle\lim_{t\to 0}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}t\\0\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\displaystyle\lim_{t\to 0}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}0\\t\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=3$ だから, もし f が $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で微分可能ならば, $f'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}2 & 3\end{smallmatrix}\right)$ となる. 従って f が $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で微分可能であることを示すには $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}}\dfrac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{0})-\left(\begin{smallmatrix}2 & 3\end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}=0$ が成り立つことを示せばよい.

$\boldsymbol{x}=\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\boldsymbol{0}$ に対して, $\dfrac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{0})-\left(\begin{smallmatrix}2 & 3\end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ である. ここで, $y^2\leqq x^2+y^2$ より, この両辺に $\dfrac{|x|}{x^2+y^2}\geqq 0$ をかければ $0\leqq\left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right|\leqq|x|$ が得られる. $\boldsymbol{x}=\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\boldsymbol{0}$ のとき, $|x|\to 0$ だから

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}}\frac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{0})-\left(\begin{smallmatrix}2 & 3\end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}=\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=0$$

である. 故に f は $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で微分可能であり, $f'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}2 & 3\end{smallmatrix}\right)$ である.

(4) f の定義から $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\displaystyle\lim_{t\to 0}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}t\\0\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=4$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\displaystyle\lim_{t\to 0}\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}0\\t\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=-5$ だから, f が $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で微分可能ならば, $f'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}4 & -5\end{smallmatrix}\right)$ となる. 故に f が $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で微分可能であることを示すには $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}}\dfrac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{0})-\left(\begin{smallmatrix}4 & -5\end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}=0$ が成り立つことを示せばよい.

$\boldsymbol{x}=\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\boldsymbol{0}$ に対して, $\dfrac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{0})-\left(\begin{smallmatrix}4 & -5\end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}=\dfrac{x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ である. ここで, $0\leqq x^2\leqq x^2+y^2$, $0\leqq y^2\leqq x^2+y^2$ より, 各辺をかけあわせれば, $0\leqq x^2y^2\leqq\left(x^2+y^2\right)^2$ が得られ, さらに, 各辺に $\dfrac{|y|}{\left(x^2+y^2\right)^2}\geqq 0$ をかければ $0\leqq\left|\dfrac{x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right|\leqq|y|$ が得られる. $\boldsymbol{x}=\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\boldsymbol{0}$ のとき, $|y|\to 0$ だから

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}}\frac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{0})-\left(\begin{smallmatrix}4 & -5\end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}=\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}=0$$

である．故に f は $\binom{0}{0}$ で微分可能であり，$f'\binom{0}{0}=(4\ -5)$ である．

(5) f の定義から $\dfrac{\partial f}{\partial x}\binom{0}{0}=\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f\binom{t}{0}-f\binom{0}{0}}{t}=1$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}\binom{0}{0}=\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f\binom{0}{t}-f\binom{0}{0}}{t}=-1$ だから，f が $\binom{0}{0}$ で微分可能ならば，$f'\binom{0}{0}=(1\ -1)$ となる．従って f が $\binom{0}{0}$ で微分可能であることを示すには $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}}\frac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{0})-(1\ -1)\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}=0$ が成り立つことを示せばよい．

$\boldsymbol{x}=\binom{x}{y}\neq\boldsymbol{0}$ に対して，$\dfrac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{0})-(1\ -1)\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}=\dfrac{\sqrt{|x|}y^2}{x^2+y^2}$ である．ここで $y^2\leqq x^2+y^2$ より，この両辺に $\dfrac{\sqrt{|x|}}{x^2+y^2}\geqq 0$ をかければ $0\leqq\dfrac{\sqrt{|x|}y^2}{x^2+y^2}\leqq\sqrt{|x|}$ が得られる．$\boldsymbol{x}=\binom{x}{y}\to\boldsymbol{0}$ のとき，$\sqrt{|x|}\to 0$ だから

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}}\frac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{0})-(1\ -1)\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}=\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}}\frac{\sqrt{|x|}y^2}{x^2+y^2}=0$$

である．故に f は $\binom{0}{0}$ で微分可能であり，$f'\binom{0}{0}=(1\ -1)$ である．

2. (1) $f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}f_1(\boldsymbol{x})\\ f_2(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}$，$g(\boldsymbol{z})=\begin{pmatrix}g_1(\boldsymbol{z})\\ g_2(\boldsymbol{z})\end{pmatrix}$ のとき，f, g の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}$ における微分 $f'(\boldsymbol{x})$, $g'(\boldsymbol{z})$ は

$$f'(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\boldsymbol{x})\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\boldsymbol{x})\end{pmatrix},\qquad g'(\boldsymbol{z})=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial z}(\boldsymbol{z}) & \frac{\partial g_1}{\partial w}(\boldsymbol{z})\\ \frac{\partial g_2}{\partial z}(\boldsymbol{z}) & \frac{\partial g_2}{\partial w}(\boldsymbol{z})\end{pmatrix}$$

で与えられる．ここで，$f_1\binom{x}{y}=x^3+y^2$, $f_2\binom{x}{y}=x^2y+xy-2y^2$, $g_1\binom{z}{w}=e^z\cos w$, $g_2\binom{z}{w}=e^z\sin w$ だから

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f_1}{\partial x}\binom{x}{y}=3x^2, &&\frac{\partial f_1}{\partial y}\binom{x}{y}=2y, &&\frac{\partial f_2}{\partial x}\binom{x}{y}=2xy+y, &&\frac{\partial f_2}{\partial y}\binom{x}{y}=x^2+x-4y,\\ &\frac{\partial g_1}{\partial z}\binom{z}{w}=e^z\cos w, &&\frac{\partial g_1}{\partial w}\binom{z}{w}=-e^z\sin w, &&\frac{\partial g_2}{\partial z}\binom{z}{w}=e^z\sin w, &&\frac{\partial g_2}{\partial w}\binom{z}{w}=e^z\cos w\end{aligned}$$

である．従って $f'\binom{x}{y}$, $g'\binom{z}{w}$ は以下で与えられる．

$$f'\binom{x}{y}=\begin{pmatrix}3x^2 & 2y\\ 2xy+y & x^2+x-4y\end{pmatrix},\qquad g'\binom{z}{w}=\begin{pmatrix}e^z\cos w & -e^z\sin w\\ e^z\sin w & e^z\cos w\end{pmatrix}$$

(2) 合成写像 $f\circ g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ の $\binom{z}{w}$ における微分 $(f\circ g)'\binom{z}{w}$ は合成写像の微分法と (1) の結果から

$$\begin{aligned}(f\circ g)'\binom{z}{w}&=f'(g\binom{z}{w})\,g'\binom{z}{w}=f'\begin{pmatrix}e^z\cos w\\ e^z\sin w\end{pmatrix}g'\binom{z}{w}\\ &=\begin{pmatrix}3e^{2z}\cos^2 w & 2e^z\sin w\\ 2e^{2z}\cos w\sin w+e^z\sin w & e^{2z}\cos^2 w+e^z\cos w-4e^z\sin w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^z\cos w & -e^z\sin w\\ e^z\sin w & e^z\cos w\end{pmatrix}\\ &=e^{2z}\begin{pmatrix}3e^z\cos^2 w & 2\sin w\\ 2e^z\cos w\sin w+\sin w & e^z\cos^2 w+\cos w-4\sin w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos w & -\sin w\\ \sin w & \cos w\end{pmatrix}\\ &=e^{2z}\begin{pmatrix}3e^z\cos^3 w+2\sin^2 w & -3e^z\cos^2 w\sin w+\sin 2w\\ 3e^z\cos^2 w\sin w+\sin 2w-4\sin^2 w & e^z\cos w(3\cos^2 w-2)+\cos 2w-2\sin 2w\end{pmatrix}\end{aligned}$$

で与えられる．

3. (1) $g(\boldsymbol{r})=\begin{pmatrix}g_1(\boldsymbol{r})\\ g_2(\boldsymbol{r})\end{pmatrix}$，$h(t)=\begin{pmatrix}h_1(t)\\ h_2(t)\end{pmatrix}$ のとき，f, g, h のそれぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{r}$, t における微分 $f'(\boldsymbol{x})$, $g'(\boldsymbol{r})$, $h'(t)$ は

$$f'(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x})\end{pmatrix},\quad g'(\boldsymbol{r})=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial r}(\boldsymbol{r}) & \frac{\partial g_1}{\partial\theta}(\boldsymbol{r})\\ \frac{\partial g_2}{\partial r}(\boldsymbol{r}) & \frac{\partial g_2}{\partial\theta}(\boldsymbol{r})\end{pmatrix},\quad h'(t)=\begin{pmatrix}\frac{dh_1}{dt}(t)\\ \frac{dh_2}{dt}(t)\end{pmatrix}$$

で与えられる．ここで，

$$f\binom{x}{y}=\log(x^2+xy+y^2+1),\ \ g_1\binom{r}{\theta}=r\cos\theta,\ \ g_2\binom{r}{\theta}=r\sin\theta,\ \ h_1(t)=e^t+e^{-t},\ \ h_2(t)=e^t-e^{-t}$$

だから

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{2x+y}{x^2+xy+y^2+1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{x+2y}{x^2+xy+y^2+1}, \quad \frac{\partial g_1}{\partial r}\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \cos\theta, \quad \frac{\partial g_1}{\partial \theta}\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = -r\sin\theta,$$
$$\frac{\partial g_2}{\partial r}\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \sin\theta, \quad \frac{\partial g_2}{\partial \theta}\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = r\cos\theta, \quad \frac{dh_1}{dt}(t) = e^t - e^{-t}, \quad \frac{dh_2}{dt}(t) = e^t + e^{-t}$$

である. 従って $f'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$, $g'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)$, $h'(t)$ は次のようになる.

$$f'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2x+y}{x^2+xy+y^2+1} & \frac{x+2y}{x^2+xy+y^2+1} \end{pmatrix}, \quad g'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad h'(t) = \begin{pmatrix} e^t - e^{-t} \\ e^t + e^{-t} \end{pmatrix}$$

(2) 合成写像 $f\circ g : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ の $\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)$ における微分 $(f\circ g)'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)$ は合成写像の微分法と (1) の結果から

$$\begin{aligned}
(f\circ g)'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) &= f'\left(g\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)\right) g'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = f'\left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right) g'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2r\cos\theta + r\sin\theta}{r^2+r^2\cos\theta\sin\theta+1} & \frac{r\cos\theta+2r\sin\theta}{r^2+r^2\cos\theta\sin\theta+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2r+2r\cos\theta\sin\theta}{r^2+r^2\cos\theta\sin\theta+1} & \frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2+r^2\cos\theta\sin\theta+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

で与えられる. 従って $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial r} = \dfrac{2r+2r\cos\theta\sin\theta}{r^2+r^2\cos\theta\sin\theta+1}$, $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial \theta} = \dfrac{r^2}{r^2+r^2\cos\theta\sin\theta+1}$ である.

(3) 合成写像 $f\circ h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ の t における微分 $(f\circ h)'(t)$ は合成写像の微分法と (1) の結果から

$$\begin{aligned}
(f\circ h)'(t) &= f'(h(t))h'(t) = f'\begin{pmatrix} e^t+e^{-t} \\ e^t-e^{-t} \end{pmatrix} h'(t) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3e^t+e^{-t}}{3e^{2t}+e^{-2t}+1} & \frac{3e^t-e^{-t}}{3e^{2t}+e^{-2t}+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t - e^{-t} \\ e^t + e^{-t} \end{pmatrix} = \frac{6e^{2t} - 2e^{-2t}}{3e^{2t}+e^{-2t}+1}
\end{aligned}$$

で与えられる. よって $f\circ h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ の導関数は $\dfrac{d(f\circ h)}{dt} = \dfrac{6e^{2t}-2e^{-2t}}{3e^{2t}+e^{-2t}+1}$ である.

4. (1) $f'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 9x^2-4xy & -2x^2+3y^2 \\ 2xy-2y^2 & x^2-4xy \end{pmatrix}$, $g'\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2zw^4-4w^3-10zw^2 & 4z^2w^3-12zw^2-10z^2w \end{pmatrix}$
(2) $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ における g の $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ 方向の方向微分は $g'\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ で与えられる. (1) の結果より, 求める値は $g'\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -12 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 12$ である.
(3) 合成写像の微分法から $(g\circ f)'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = g'\left(f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) f'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = g'\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) f'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -12 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -60 & -12 \end{smallmatrix}\right)$.

5. (1) $f'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6x^2 & -3y^2 \\ 2xy-2y^2 & x^2-4xy \end{pmatrix}$, $g'\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3z^2w^3+w^2-2zw & 3z^3w^2+2zw-z^2 \end{pmatrix}$
(2) $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ における g の $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ 方向の方向微分は $g'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ で与えられる. (1) の結果より, 求める値は $g'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = 10$ である.
(3) 合成写像の微分法から $(g\circ f)'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = g'\left(f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) f'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = g'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) f'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
$(g\circ f)'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g\circ f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) & \frac{\partial g\circ f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix}$ だから, 上の結果から $\dfrac{\partial g\circ f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \dfrac{\partial g\circ f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 0$ である.

6. $g_1\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = r\cos\theta$, $g_2\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = r\sin\theta$ とおけば, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \dfrac{2x+y}{1+(x^2+xy+2y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \dfrac{x+4y}{1+(x^2+xy+2y^2)^2}$, $\dfrac{\partial g_1}{\partial r}\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \cos\theta$, $\dfrac{\partial g_1}{\partial \theta}\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = -r\sin\theta$, $\dfrac{\partial g_2}{\partial r}\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \sin\theta$, $\dfrac{\partial g_2}{\partial \theta}\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = r\cos\theta$ である. また, $g\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \pi \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ だから,
$f'\left(g\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \pi \end{smallmatrix}\right)\right) = f'\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) & \frac{\partial f_1}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $g'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \pi \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \pi \end{smallmatrix}\right) & \frac{\partial g_1}{\partial \theta}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \pi \end{smallmatrix}\right) \\ \frac{\partial g_2}{\partial r}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \pi \end{smallmatrix}\right) & \frac{\partial g_2}{\partial \theta}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \pi \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である.
合成写像 $f\circ g : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ の $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \pi \end{smallmatrix}\right)$ における微分 $(f\circ g)'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \pi \end{smallmatrix}\right)$ は, 合成写像の微分法から

$$(f\circ g)'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \pi \end{smallmatrix}\right) = f'\left(g\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \pi \end{smallmatrix}\right)\right) g'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \pi \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

で与えられる. 従って $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial r}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \pi \end{smallmatrix}\right) = 1$, $\dfrac{\partial f\circ g}{\partial \theta}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \pi \end{smallmatrix}\right) = \dfrac{1}{2}$ である.

7. $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2\,\middle|\, 0\leqq y\leqq 1,\ \sqrt[3]{y}\leqq x\leqq 1\right\}$ とおけば $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2\,\middle|\, 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x^3\right\}$ でもあるから, $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 e^{x^2}dx\right)dy=\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{x^3} e^{x^2}dy\right)dx=\int_0^1 x^3e^{x^2}dx$ である. $t=x^2$ とおいて置換積分を行えば, (上式) $\displaystyle =\int_0^1\frac{1}{2}te^tdt=\left[\frac{1}{2}te^t\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}e^tdt=\frac{e}{2}-\frac{1}{2}[e^t]_0^1=\frac{1}{2}.$

8. (1) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2\,\middle|\, -1\leqq x\leqq 2,\ x^2\leqq y\leqq x+2\right\}$ だから $\displaystyle\iint_D(2x+3y)dxdy=\int_{-1}^2\left(\int_{x^2}^{x+2}(2x+3y)dy\right)dx=\int_{-1}^2\left[2xy+\frac{3y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=x+2}dx=\int_{-1}^2\left(6+10x+\frac{7x^2}{2}-2x^3-\frac{3x^4}{2}\right)dx=\left[6x+5x^2+\frac{7x^3}{6}-\frac{x^4}{2}-\frac{3x^5}{10}\right]_{-1}^2=\frac{261}{10}$

(2) $D=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in \boldsymbol{R}^2\,\middle|\, -2\leqq x\leqq 1,\ x^2\leqq y\leqq 2-x\right\}$ だから $\displaystyle\iint_D\left(24x^2+84y^2\right)dxdy=$
$\displaystyle\int_{-2}^1\left(\int_{x^2}^{2-x}\left(24x^2+84y^2\right)dy\right)dx=\int_{-2}^1\left[24x^2y+28y^3\right]_{y=x^2}^{y=2-x}dx=\int_{-1}^2\left(48x^2-24x^3+28(2-x)^3-24x^4-28x^6\right)dx$
$\displaystyle=\left[16x^3-6x^4-7(2-x)^4-\frac{24x^5}{5}-4x^7\right]_{-2}^1=\frac{6723}{5}$

(3) 極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を行うと, D は $E=[0,1]\times[0,2\pi]$ に対応する. さらに $t=r^2$ と変数変換して, 問 4.26 の (1) より $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt=\sin^{-1}t+\sqrt{1-t^2}$ が成り立つことに注意すれば,
$\displaystyle\iint_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy=\iint_E r\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}drd\theta=\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}r\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}d\theta\right)dr=\int_0^1\pi\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}2rdr=$
$\displaystyle\int_0^1\pi\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt=\pi\left[\sin^{-1}t+\sqrt{1-t^2}\right]_0^1=\frac{\pi^2}{2}-\pi.$

9. $\displaystyle\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{\frac{y}{2x}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{\frac{x}{2y}}$ だから, 求める面積は

$$\begin{aligned}\iint_{[a,b]\times[c,d]}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy&=\iint_{[a,b]\times[c,d]}\sqrt{1+\frac{y}{2x}+\frac{x}{2y}}dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d\sqrt{\frac{2xy+y^2+x^2}{2xy}}dy\right)dx\\&=\int_a^b\left(\int_c^d\frac{x+y}{\sqrt{2xy}}dy\right)dx=\int_a^b\left(\int_c^d\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2x}}\right)dy\right)dx\\&=\int_a^b\left[\sqrt{2xy}+\frac{y\sqrt{2y}}{3\sqrt{x}}\right]_{y=c}^{y=d}dx=\int_0^a\left(\sqrt{2dx}-\sqrt{2cx}+\frac{d\sqrt{2d}}{3\sqrt{x}}-\frac{c\sqrt{2c}}{3\sqrt{x}}\right)dx\\&=\left[\frac{2x\sqrt{2dx}}{3}-\frac{2x\sqrt{2cx}}{3}+\frac{2d\sqrt{2dx}}{3}-\frac{2c\sqrt{2cx}}{3}\right]_a^b\\&=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left((b+d)\sqrt{bd}-(b+c)\sqrt{bc}-(a+d)\sqrt{ad}+(a+c)\sqrt{ac}\right)\\&=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{d}-\sqrt{c}\right)\left(a+b+c+d+\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\right).\end{aligned}$$