解析学ノート

目次

1 ノルム空間

V を実数 $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とする.

定義 1.1　実数値関数 $\rho : V \to \boldsymbol{R}$ で, 次の条件を満たすものを V のノルムという.

(*i*) $x \in V$ に対して $\rho(x) \geqq 0$ であり, $\rho(x) = 0$ となるのは $x = 0$ の場合に限る.
(*ii*) $x, y \in V$ に対し, $\rho(x+y) \leqq \rho(x) + \rho(y)$ (三角不等式) が成り立つ.
(*iii*) $r \in \boldsymbol{R}$, $x \in V$ に対し, $\rho(rx) = |r|\rho(x)$ が成り立つ.

ノルムが定義されているベクトル空間をノルム空間という. また, ベクトル $x \in V$ のノルム $\rho(x)$ を長さともいい, ノルム ρ をとくに明示する必要がない場合は, たんに V をノルム空間といって, $x \in V$ のノルムを $\|x\|$ により表すことが多い.

(V, ρ) をノルム空間とするとき, V の距離関数 $d : V \times V \to \boldsymbol{R}$ が $d_\rho(x, y) = \rho(x - y)$ により定義され, (V, d_ρ) は距離空間になる. (V, d_ρ) が完備距離空間であるとき, ノルム空間 (V, ρ) を Banach 空間と呼ぶ.

例 1.2　以下では p を 1 以上の実数または $p = \infty$ とする.

(1) n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ において $\rho_p : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ を

$$\rho_p(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} & p \neq \infty \\ \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} & p = \infty \end{cases}$$

により定義する. このとき $(\boldsymbol{R}^n, \rho_p)$ は Banach 空間になる.

(2) $a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a < b)$ に対し, $C[a, b]$ により閉区間 $[a, b]$ で連続な実数値関数全体の集合を表す. $C[a, b]$ を, 関数の和・実数倍により $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とみなし, $\rho_p : C[a, b] \to \boldsymbol{R}$ を

$$\rho_p(f) = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} & p \neq \infty \\ \max\{f(t) \,|\, a \leqq t \leqq b\} & p = \infty \end{cases}$$

により定義する. このとき $(C[a, b], \rho_p)$ はノルム空間になる. $(C[a, b], \rho_\infty)$ は Banach 空間であるが, $p \neq \infty$ のとき $(C[a, b], \rho_p)$ は完備ではないため, Banach 空間ではない.

命題 1.3　(V, ρ) をノルム空間とするとき, 加法 $+ : V \times V \to V$, $(x, y) \mapsto x + y$ とスカラー倍 $\cdot : \boldsymbol{R} \times V \to V$, $(r, x) \mapsto rx$ は一様連続である.

補題 1.4　(V, ρ), (W, ν) をノルム空間とする.

(1) V が有限次元ならば, 線型写像 $f : V \to W$ は一様連続である.

(2) 条件「任意の $r \in \boldsymbol{R}$, $x \in V$ に対し $f(rx) = rf(x)$」を満たす写像 (例えば線型写像) $f : V \to W$ が $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 0$ を満たせば, $f = 0$ である.

証明 (1) は V に有限個の基底が存在することと, (1.3) から示される. (2) を示すために $x \in V$ を任意にとる. 仮定から任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ で「$\|y\| \leqq \delta$ ならば $\|f(y)\| \leqq \varepsilon\|y\|$」を満たすものがある. 従って $x \neq 0$ ならば $y = \dfrac{\delta x}{\|x\|}$ とすると $\|f(x)\| \leqq \varepsilon\|x\|$ となり, x は固定していて ε は任意だから $f(x) = 0$ が得られる. また, $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0f(0) = 0$ だから, すべての $x \in V$ に対し $f(x) = 0$ である. □

命題 1.5 (V,ρ), (W,ν) をノルム空間, $f:V\to W$ は条件「任意の $r\in\boldsymbol{R}$, $x\in V$ に対し $f(rx)=rf(x)$」を満たす写像 (例えば線型写像) とする. f が連続であることと, 正の実数 a で, すべての $x\in V$ に対し $\|f(x)\|\leqq a\|x\|$ を満たすものが存在することと同値である.

証明 f が連続であるとする. f は 0 において連続だから, 正の実数 δ で, 条件「$\|x\|\leqq\delta$ ならば $\|f(x)\|\leqq 1$」を満たすものがある. $x\in V$ に対し, $x\neq 0$ ならば $\dfrac{\delta x}{\|x\|}$ のノルムは δ だから $\left\|f\left(\dfrac{\delta x}{\|x\|}\right)\right\|\leqq 1$. 従って $a=\dfrac{1}{\delta}$ とおくと, $\|f(x)\|\leqq a\|x\|$ が成り立つ. 仮定から $f(0)=f(0x)=0f(x)=0$ だから, $\|f(0)\|=0=a\|0\|$ で, $x=0$ のときも $\|f(x)\|\leqq a\|x\|$ が成り立つ. 逆に, 正の実数 a で, すべての $x\in V$ に対し $\|f(x)\|\leqq a\|x\|$ を満たすものが存在するとする. $x,x_0\in V$ に対し, $\|f(x-x_0)\|\leqq a\|x-x_0\|$ だから, 任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta=\dfrac{\varepsilon}{a}$ とおけば, 条件「$\|x-x_0\|\leqq\delta$ ならば $\|f(x-x_0)\|<\varepsilon$」が成り立つため, f は (一様) 連続である. □

注意 1.6 上の命題の条件を満たす $f:V\to W$ が 0 において連続ならば, f は一様連続である.

定義 1.7 ベクトル空間 V に, 二つのノルム ρ_1, ρ_2 が与えられているとする. ρ_1, ρ_2 により V に定義される位相が一致するとき ρ_1 と ρ_2 は同値であるという.

命題 1.8 ρ_1, ρ_2 を V のノルムとし, ρ_1, ρ_2 から定義される V の位相をそれぞれ, $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ とする.

(1) $\mathcal{O}_2$ が $\mathcal{O}_1$ より強い位相であるためには, 実数 a で, すべての $x\in V$ に対して $\rho_1(x)\leqq a\rho_2(x)$ を満たすものが存在することが必要十分である.

(2) ρ_1 と ρ_2 が同値であるためには, 実数 a,b で, すべての $x\in V$ に対し, 「$\rho_1(x)\leqq a\rho_2(x)$ かつ $\rho_2(x)\leqq b\rho_1(x)$」を満たすものが存在することが必要十分である.

証明 (1) $\mathcal{O}_2$ が $\mathcal{O}_1$ より強い位相ならば, 恒等写像 $id_V:(V,\mathcal{O}_2)\to(V,\mathcal{O}_1)$ は連続な線型写像だから, (1.5) により $a\in\boldsymbol{R}$ ですべての $x\in V$ に対し, $\rho_1(x)\leqq a\rho_2(x)$ を満たすものが存在する. 逆に実数 a で, すべての $x\in V$ に対して $\rho_1(x)\leqq a\rho_2(x)$ を満たすものが存在すれば (1.5) により恒等写像 $id_V:(V,\mathcal{O}_2)\to(V,\mathcal{O}_1)$ は連続写像だから $\mathcal{O}_2$ は $\mathcal{O}_1$ より強い位相である.

(2) (1) の結果より, $\mathcal{O}_2$ は $\mathcal{O}_1$ より強い位相であり, $\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より強い位相だから $\mathcal{O}_1=\mathcal{O}_2$ である. □

命題 1.9 有限次元ベクトル空間のノルムはすべて同値である.

証明 ρ_1, ρ_2 を有限次元ベクトル空間 V のノルムとする. 恒等写像 $id_V:(V,\rho_2)\to(V,\rho_1)$, $id_V:(V,\rho_1)\to(V,\rho_2)$ はともに線型写像だから (1.4) の (1) により連続である. 従って ρ_1 と ρ_2 は同値である. □

定義 1.10 (V_i,ρ_i) $(i=1,2,\dots n)$ をノルム空間とすると, 直積 $V_1\times V_2\times\cdots\times V_n$ は成分ごとの加法 $(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)$, スカラー倍 $r(x_1,x_2,\dots,x_n)=(rx_1,rx_2,\dots,rx_n)$ によりベクトル空間になる. $\rho:V_1\times V_2\times\cdots\times V_n\to\boldsymbol{R}$ を $\rho(x_1,x_2,\dots,x_n)=\max\{\rho_i(x_i)|\,1\leqq i\leqq n\}$ により定めれば, $(V_1\times V_2\times\cdots\times V_n,\rho)$ はノルム空間になり, これをノルム空間 (V_i,ρ_i) $(i=1,2,\dots n)$ の直積という.

命題 1.11 (1) ρ から定まる $V_1\times V_2\times\cdots\times V_n$ の位相は $V_1,V_2,\dots,V_n$ の直積位相に一致する. 従って射影 $p_i:V_1\times V_2\times\cdots\times V_n\to V_i$ は連続な線型写像である.

(2) 写像 $\iota_i:V_i\to V_1\times V_2\times\cdots\times V_n$ を $\iota_i(x)=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ (ただし $x_i=x$, $j\neq i$ のとき $x_j=0$) によって定めれば, ι_i は $V_1\times V_2\times\cdots\times V_n$ の閉部分空間 $\displaystyle\bigcap_{j\neq i}p_j^{-1}(0)$ の上への同相写像で, ノルムを保つ.

証明 (1) ρ から定まる $V_1\times\cdots\times V_n$ の位相を $\mathcal{O}_1$, $V_1,\dots,V_n$ の直積位相を $\mathcal{O}_2$ とする. 任意の $(x_1,\dots,x_n)\in V_1\times\cdots\times V_n$ と $\varepsilon>0$ に対し, $V_1\times\cdots\times V_n$ における中心 $(x_1,\dots,x_n)$, 半径 ε の開球 $B((x_1,\dots,x_n);\varepsilon)$ は V_i における中心 x_i, 半径 ε の開球の直積 $B(x_1;\varepsilon)\times\cdots\times B(x_n;\varepsilon)$ に一致するため $\mathcal{O}_1\subset\mathcal{O}_2$ である. また, 任意の $x_i\in V_i$, $\varepsilon_i>0$ と $(y_1,\dots,y_n)\in B(x_1;\varepsilon_1)\times\cdots\times B(x_n;\varepsilon_n)$ に対し, $\varepsilon=\min\{\varepsilon_i-\|y_i-x_i\|\,|\,1\leqq i\leqq n\}$ とおくと

$B(y_i;\varepsilon)\subset B(x_i;\varepsilon_i)$ だから上のことから $B((y_1,\dots,y_n);\varepsilon)\subset B(x_1;\varepsilon_1)\times\cdots\times B(x_n;\varepsilon_n)$ が成り立つため $\mathcal{O}_2\subset\mathcal{O}_1$ である.
(2) p_i の連続性より $\bigcap_{j\neq i} p_i^{-1}(0)$ は閉部分空間である. ι_i がノルムを保つことは $V_1\times\cdots\times V_n$ のノルムの定義より明らか. □

命題 1.12 (V_i,ρ_i) $(i=1,2,\dots n)$, (W,λ) をノルム空間とする. 多重線型写像 $u:V_1\times V_2\times\cdots\times V_n\to W$ が連続である必要十分条件は, 正の実数 a ですべての $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in V_1\times V_2\times\cdots\times V_n$ に対して次の不等式を満たすものが存在することである.

$$\|u(x_1,x_2,\dots,x_n)\|\leqq a\|x_1\|\cdot\|x_2\|\cdots\|x_n\|$$

証明 (十分性) $(x_1,\dots,x_n),(c_1,\dots,c_n)\in V_1\times\cdots\times V_n$ に対し, 等式

$$u(x_1,\dots,x_n)-u(c_1,\dots,c_n)=\sum_{i=1}^{n}u(c_1,\dots,c_{i-1},x_i-c_i,x_{i+1},\dots,x_n)$$

が成り立つため, 仮定により次の不等式を得る.

$$\|u(x_1,\dots,x_n)-u(c_1,\dots,c_n)\|\leqq\sum_{i=1}^{n}a\|c_1\|\cdots\|c_{i-1}\|\cdot\|x_i-c_i\|\cdot\|x_{i+1}\|\cdots\|x_n\|$$

$\delta>0$ に対し, $\|x_i-c_i\|\leqq\delta$ $(i=1,2,\dots n)$ で $\delta<1$ ならば, $\|x_i\|\leqq\|c_i\|+1$ だから, $K=\max\{\|c_i\|+1|\,1\leqq i\leqq n\}$ とおくと, $\|u(x_1,\dots,x_n)-u(c_1,\dots,c_n)\|\leqq anK^{n-1}\delta$ だから u の $(c_1,\dots,c_n)$ における連続性がわかる.
(必要性) u が $(0,\dots,0)$ で連続ならば $0<\delta<1$ で条件「$\|x_i\|\leqq\delta$ $(i=1,2,\dots n)$ ならば $\|u(x_1,\dots,x_n)\|\leqq 1$」を満たすものがある. そこで $a=\delta^{-n}$ とおけば, すべての $1\leqq i\leqq n$ に対し, $x_i\neq 0$ ならば $\left\|\dfrac{\delta x_i}{\|x_i\|}\right\|=\delta$ だから $\left\|u\left(\dfrac{\delta x_1}{\|x_1\|},\dfrac{\delta x_2}{\|x_2\|},\cdots,\dfrac{\delta x_n}{\|x_n\|}\right)\right\|\leqq 1$. 従って, $\|u(x_1,x_2,\dots,x_n)\|\leqq a\|x_1\|\|x_2\|\cdots\|x_n\|$ が成り立つ. $x_i=0$ となる i がある場合は $u(x_1,\dots,x_n)=0$ だから上の不等式は両辺とも 0 になって成立する. □

定義 1.13 (V_i,ρ_i) $(i=1,2,\dots n)$, (W,λ) をノルム空間とする. $\mathcal{L}(V_1,\dots,V_n;W)$ により $V_1\times\cdots\times V_n$ から W への連続な多重線型写像全体のなす集合を表す. このとき $\mathcal{L}(V_1,\dots,V_n;W)$ は写像の加法とスカラー倍によりベクトル空間になる. $\nu:\mathcal{L}(V_1,\dots,V_n;W)\to\boldsymbol{R}$ を $u\in\mathcal{L}(V_1,\dots,V_n;W)$ に対し,

$$\nu(u)=\|u\|=\inf\{a\in\boldsymbol{R}\,|\,^{\forall}(x_1,\dots,x_n)\in V_1\times\cdots\times V_n\,(\|u(x_1,\dots,x_n)\|\leqq a\|x_1\|\cdots\|x_n\|)\}$$

で定める. これにより $(\mathcal{L}(V_1,\dots,V_n;W),\nu)$ はノルム空間になる.

命題 1.14 (1) 任意の $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in V_1\times V_2\times\cdots\times V_n$ と $u\in\mathcal{L}(V_1,V_2,\dots,V_n;W)$ に対して

$$\|u(x_1,x_2,\dots,x_n)\|\leqq\|u\|\cdot\|x_1\|\cdot\|x_2\|\cdots\|x_n\|$$

が成り立つため, 写像 $(V_1\times\cdots\times V_n)\times\mathcal{L}(V_1,\dots,V_n;W)\to W$, $((x_1,\dots,x_n),u)\mapsto u(x_1,\dots,x_n)$ は連続である.
(2) $u\in\mathcal{L}(V_1,\dots,V_n;W)$ に対し, 以下の等式が成り立つ.

$$\|u\|=\sup\{\|u(x_1,\dots,x_n)\|\,|\,\|x_i\|=1(1\leqq i\leqq n)\}=\sup\{\|u(x_1,\dots,x_n)\|\,|\,\|x_i\|\leqq 1(1\leqq i\leqq n)\}$$

(3) $u\in\mathcal{L}(V;W)$, $v\in\mathcal{L}(W;Z)$ に対し, $\|v\circ u\|\leqq\|v\|\cdot\|u\|$ が成り立つ. 従って線型写像の合成 $\mathcal{L}(V;W)\times\mathcal{L}(W;Z)\to\mathcal{L}(V;Z)$, $(u,v)\mapsto v\circ u$ は連続である.

証明 (1) 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $\|u\|$ の定義より, $\|u(x_1,\dots,x_n)\|\leqq(\|u\|+\varepsilon)\|x_1\|\cdots\|x_n\|$ だから $\|u(x_1,\dots,x_n)\|\leqq\|u\|\cdot\|x_1\|\cdots\|x_n\|$ を得る.

(2) $s_1 = \sup\{\|u(x_1,\ldots,x_n)\| \,|\, \|x_i\| = 1 (1 \leqq i \leqq n)\}$, $s_2 = \sup\{\|u(x_1,\ldots,x_n)\| \,|\, \|x_i\| \leqq 1 (1 \leqq i \leqq n)\}$ とおくと, $s_1 \leqq s_2$ は明らか. (1) より $s_2 \leqq \|u\|$ が成り立つ. $\|u\|$ の定義より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\|u(x_1,\ldots,x_n)\| > (\|u\| - \varepsilon)\|x_1\|\cdots\|x_n\|$ を満たす $(x_1,\ldots,x_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n$ が存在し, このときすべての $1 \leqq i \leqq n$ に対して $x_i \neq 0$ である. $\frac{\delta x_i}{\|x_i\|}$ を x_i で置き換えることにより, $\|x_i\| = 1$ $(1 \leqq i \leqq n)$ で, $\|u(x_1,\ldots,x_n)\| > \|u\| - \varepsilon$ を満たすものがあるため, $s_1 > \|u\| - \varepsilon$ である. 従って, $\|u\| \leqq s_1$ を得る.

(3) $x \in V$ に対し, 1) から $\|v \circ u(x)\| = \|v(u(x))\| \leqq \|v\| \cdot \|u(x)\| \leqq \|v\| \cdot \|u\| \cdot \|x\|$ が成り立つことから結果を得る. □

命題 1.15 W が完備ならば $\mathcal{L}(V_1,\ldots,V_n;W)$ も完備である.

証明 $(u_i)_{i\in \boldsymbol{N}}$ を $\mathcal{L}(V_1,\ldots,V_n;W)$ の Cauchy 列とする. $(x_1,\ldots,x_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n$ に対し, $\|u_j(x_1,\ldots,x_n) - u_i(x_1,\ldots,x_n)\| \leqq \|u_j - u_i\|\|(x_1,\ldots,x_n)\|$ だから $(u_i(x_1,\ldots,x_n))_{i\in \boldsymbol{N}}$ は W の Cauchy 列である. 従って, 極限 $\lim_{n\to\infty} u_i(x_1,\ldots,x_n)$ は存在して, これを $v(x_1,\ldots,x_n)$ とおけば $v : V_1 \times \cdots V_n \to W$ が多重線型写像であることは容易に確かめられる. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, "$i, j \geqq N \Rightarrow \|u_j - u_i\| \leqq \varepsilon$"を満たす $N \in \boldsymbol{N}$ があるから $\|x_k\| \leqq 1$ $(1 \leqq k \leqq n)$ かつ $i, j \geqq N$ ならば $\|u_i(x_1,\ldots,x_n) - u_j(x_1,\ldots,x_n)\| \leqq \varepsilon$ である. 従って $\|v(x_1,\ldots,x_n)\| \leqq \|u_N(x_1,\ldots,x_n)\| + \varepsilon \leqq \|u_N\| + \varepsilon$ だから集合 $\{\|v(x_1,\ldots,x_n)\| \,|\, \|x_k\| \leqq 1 (1 \leqq i \leqq n)\}$ は有界になるため v は連続である. さらに上式より $\|x_k\| \leqq 1$ $(1 \leqq k \leqq n)$ かつ $j \geqq N$ ならば $\|v(x_1,\ldots,x_n) - u_j(x_1,\ldots,x_n)\| \leqq \varepsilon$ だから $\|v - u_j\| \leqq \varepsilon$ である. 従って $\lim_{n\to\infty} u_i = v$ となる. □

定理 1.16 $u \in \mathcal{L}(V,W;Z)$ と $x \in V$ に対し, $u_x : W \to Z$ を $u_x(w) = u(x,w)$ で定めると $u_x \in \mathcal{L}(W;Z)$ である. さらに $\tilde{u} : V \to \mathcal{L}(W,Z)$ を $\tilde{u}(x) = u_x$ で定めれば $\tilde{u} \in \mathcal{L}(V;\mathcal{L}(W;Z))$ である. そこで $\Phi : \mathcal{L}(V,W;Z) \to \mathcal{L}(V;\mathcal{L}(W;Z))$ を $\Phi(u) = \tilde{u}$ により定めれば, Φ はベクトル空間の同型写像であり, ノルムを保つ. すなわち, すべての $u \in \mathcal{L}(V,W;Z)$ に対し, $\|\Phi(u)\| = \|u\|$ が成り立つ.

証明 $\|u_x(y)\| = \|u(x,y)\| \leqq \|u\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$ より u_x は連続で, $\|u_x\| = \sup_{\|y\|\leqq 1} \|u(x,y)\|$ となる. 従って $\sup_{\|x\|\leqq 1} \|u_x\| = \sup_{\|x\|\leqq 1, \|y\|\leqq 1} \|u(x,y)\| = \|u\|$ が成り立つため $\tilde{u}$ は連続であり, Φ はノルムを保つ. さらに $v \in \mathcal{L}(V;\mathcal{L}(W;Z))$ に対し, $u : V \times W \to Z$ を $u(x,y) = (v(x))(y)$ で定めれば u は双線型で $\|(v(x))(y)\| \leqq \|v(x)\| \cdot \|y\| \leqq \|v\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$ だから u は連続である. u の定め方から $\Phi(u) = v$ となり, Φ は全射である. Φ はノルムを保つから単射であり, 逆写像も連続である. □

注意 1.17 上の定理を用いると帰納法により, ノルム空間 $V_1, V_2, \ldots, V_n, W$ に対し, ノルムを保つベクトル空間の同型写像 $\mathcal{L}(V_1, V_2, \ldots, V_n; W) \to \mathcal{L}(V_1; \mathcal{L}(V_2; \cdots; \mathcal{L}(V_n; W)\cdots))$ が存在することがわかる. この同型写像により, これらの二つの空間を同一視することがある.

S を集合, (V,d) を距離空間とし, 各 $n \in \boldsymbol{N}$ に対し写像 $f_n : S \to V$ が与えられているとする.

定義 1.18 1) 各 $x \in S$ に対し, V の点列 $(f_n(x))_{n\in \boldsymbol{N}}$ が 収束するとき, 写像の列 $(f_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ は各点収束するという.

2) 写像の列 $(f_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ が各点収束し, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とおく. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, "$n \geqq N \Rightarrow$ 任意の $x \in S$ に対して $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$"が成り立つような $N \in \boldsymbol{N}$ が存在するとき, $(f_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ は f に一様収束するという.

3) S が位相空間の場合, 写像の列 $(f_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ が各点収束し, 任意の $x \in S$ に対し, x の近傍 U で, 各 f_n の U への制限が一様収束するようなものが存在するとき, $(f_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ は f に S で広義一様収束するという.

命題 1.19 S を位相空間, (V,d) を距離空間とするとき, S から V への連続写像の列 $(f_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ が写像 $f : S \to V$ に S で広義一様収束すれば f は連続である.

証明 $(f_i)_{i\in \boldsymbol{N}}$ は $f \in \mathcal{B}(S;W)$ に広義一様収束するとする. 任意の $p \in S$ と p の近傍 U で, 各 f_n の U への制

限が一様収束するようなものが取れる．従って，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，“$x \in U \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$” となる $N \in \boldsymbol{N}$ と，p の近傍 U' で “$x \in U' \Rightarrow d(f_N(x), f_N(p)) < \frac{\varepsilon}{3}$”を満たすものがある．このとき，$x \in U \cap U'$ ならば $d(f(x), f(p)) \leqq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(p)) + d(f_N(p), f(p)) < \varepsilon$ だから f の p における連続性がわかる．□

定義 1.20　S を集合，(W, d) を距離空間とするとき，$\mathcal{B}(S; W)$ を S から W への有界な写像全体の集合とする．すなわち，$\mathcal{B}(S; W) = \{f : S \to W | \sup_{x,y \in S} d(f(x), f(y)) < +\infty\}$ とする．$\mathcal{B}(S; W)$ は $\rho(f, g) = \sup_{x,y \in S} d(f(x), g(x))$ で定められる距離関数 ρ により距離空間になる．W がノルム空間の場合，$\mathcal{B}(S; W)$ は写像の加法，スカラー倍によりベクトル空間になり，ノルムを $f \in \mathcal{B}(S; W)$ に対して $\|f\| = \sup_{x \in S} \|f(x)\|$ で定める．
S が位相空間の場合，連続写像全体よりなる $\mathcal{B}(S; W)$ の部分集合を $\mathcal{B}_c(S; W)$ で表すことにする．このとき，W がノルム空間ならば $\mathcal{B}_c(S; W)$ は $\mathcal{B}(S; W)$ の部分ベクトル空間になる．

注意 1.21　ノルム空間 V に対し，$S^V = \{x \in V | \|x\| = 1\}$ とおく．$V_1, V_2, \dots, V_n, W$ をノルム空間とするとき，$u \in \mathcal{L}(V_1, \dots, V_n; W)$ に対して u の $S^{V_1} \times \cdots \times S^{V_n}$ への制限を対応させれば，(1.14) によりノルムを保つ線型写像 $\Psi : \mathcal{L}(V_1, \dots, V_n; W) \to \mathcal{B}_c(S^{V_1} \times \cdots \times S^{V_n}; W)$ が得られる．W が Banach 空間ならば (1.15) より，Ψ の像は $\mathcal{B}_c(S^{V_1} \times \cdots \times S^{V_n}; W)$ の閉集合である．

命題 1.22　1) W が Banach 空間ならば $\mathcal{B}(S; W)$ も Banach 空間である．
2) S が位相空間の場合，$\mathcal{B}_c(S; W)$ は $\mathcal{B}(S; W)$ の閉集合である．従って，W が Banach 空間ならば $\mathcal{B}_c(S; W)$ も Banach 空間である．

証明　1) $(f_i)_{i \in \boldsymbol{N}}$ を $\mathcal{B}(S; W)$ の Cauchy 列とすると任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$i, j \geqq N$ ならば $\|f_i - f_j\| < \varepsilon$ を満たすような $N \in \boldsymbol{N}$ がある．任意の $x \in S$ に対し，$\|f_i(x) - f_j(x)\| \leqq \|f_i - f_j\|$ だから $(f_i(x))_{i \in \boldsymbol{N}}$ は W の Cauchy 列になり，W の完備性から $\lim_{i \to \infty} f_i(x) = g(x)$ により，写像 $g : S \to W$ を定めることができる．$i, j \geqq N$ のとき，不等式 $\|f_i(x) - f_j(x)\| < \varepsilon$ において $j \to +\infty$ とすれば，$i \geqq N$ ならば，すべての $x \in S$ に対して $\|f_i(x) - g(x)\| \leqq \varepsilon$ が成り立つ．従って，$\|g(x)\| \leqq \|g(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x)\| \leqq \varepsilon + \|f_N\|$ がすべての $x \in S$ に対して成り立つから $g \in \mathcal{B}(S; W)$ であり，$i \geqq N$ ならば $\|f_i - g\| \leqq \varepsilon$ だから $(f_i)_{i \in \boldsymbol{N}}$ は g に収束する．
2) (1.19) より明らか．□

定義 1.23　$(x_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ をノルム空間 V の点列とする．$s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ とおき，点列 $(s_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ が収束する場合，その極限を $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ で表し，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ は収束するという．

命題 1.24　$(x_n)_{n \in \boldsymbol{N}}, (y_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ をノルム空間 V の点列，$\lambda \in \boldsymbol{R}$ とする．級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ がともには収束すれば，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$, $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda x_n$ は収束して，それぞれ $\sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n$, $\lambda \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ に等しい．

命題 1.25　V を Banach 空間，$(x_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ を V の点列とする．$t_n = \sum_{k=0}^{n} \|x_k\|$ とおくとき，実数列 $(t_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ が収束すれば，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ は収束する．

定義 1.26　V をノルム空間とする．
1) $(x_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ を V の点列とし，$t_n = \sum_{k=0}^{n} \|x_k\|$ とおく．実数列 $(t_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ が収束し，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ が収束すれば，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ は絶対収束するという．
2) 集合 M に対し，$\mathcal{F}(M)$ で M の有限部分集合全体の集合を表すことにする．集合 I で添数づけられた V の点列 $(x_i)_{i \in I}$ に対し，$s_A = \sum_{i \in A} x_i$ $(A \in \mathcal{F}(I))$ とおくとき，$s_\infty \in V$ で，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，“$B \in \mathcal{F}(I)$ かつ $B \supset A$

ならば $\|s_B - s_\infty\| < \varepsilon$" が成り立つような $A \in \mathcal{F}(I)$ が存在するとき, 点列 $(x_i)_{i\in I}$ の和が存在するという. このとき, s_∞ を $(x_i)_{i\in I}$ の和と呼んで, $\sum_{i\in I} x_i$ で表す.

M が無限集合ならば $\mathcal{F}(M)$ の基数と M の基数は等しくなることに注意する.

命題 1.27 ノルム空間 V の点列 $(x_i)_{i\in I}$ の和が存在すれば, 高々可算個の i を除いて $x_i = 0$ である.

証明 点列 $(x_i)_{i\in I}$ の和を α とすると, 各 $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $A_n \in \mathcal{F}(I)$ で, $B \in \mathcal{F}(I)$, $B \supset A_n$ ならば $\|\sum_{i\in B} x_i - \alpha\| < 2^{-n}$ となるものがある. $A_\infty = \bigcup_{n\in \boldsymbol{N}} A_n$ とおくと, A_∞ は高々可算な I の部分集合である. $j \in I - A_\infty$ ならば 任意の $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $\|x_j + \sum_{i\in A_n} x_i - \alpha\| < 2^{-n}$ だから $\|x_j\| \leqq \|x_j + \sum_{i\in A_n} x_i - \alpha\| + \| - (\sum_{i\in A_n} x_i - \alpha)\| < 2^{-n+1}$ となる. n は任意だから $x_j = 0$ である. □

命題 1.28 Banach 空間 V の点列 $(x_i)_{i\in I}$ に対し, 実数の部分集合 $\{\sum_{i\in A} \|x_i\| \,|\, A \in \mathcal{F}(I)\}$ が有界であれば, 点列 $(x_i)_{i\in I}$ の和が存在する.

証明 $s = \sup\{\sum_{i\in A} \|x_i\| \,|\, A \in \mathcal{F}(I)\}$ とおくと, 実数の点列 $(\|x_i\|)_{i\in I}$ の和が s になることは和の定義から直ちにわかる. 従って (1.27) から I の要素の列 $(i_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ で, $i \in I - \{i_0, i_1, \dots\}$ ならば $x_i = 0$ となるものがある. このとき, 実数列 $(t_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ を $t_n = \sum_{\nu=0}^{n} \|x_{i_\nu}\|$ で定めれば, これは上に有界な増加数列だから収束する. 故に, (1.25) から V の級数 $\sum_{\nu=0}^{\infty} x_{i_\nu}$ は収束する. この級数の和を α とすれば, 点列 $(x_i)_{i\in I}$ の和も α になることがわかる. □

命題 1.29 V を Banach 空間, $(x_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ を V の点列とする.

1) $A \in \mathcal{F}(\boldsymbol{N})$ に対して $u_A = \sum_{k\in A} \|x_k\|$ とおく. このとき集合 $\{u_A |\, A \in \mathcal{F}(\boldsymbol{N})\}$ が有界であることと, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ が絶対収束することは同値である.

2) 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ が絶対収束すれば, 点列 $(x_i)_{i\in I}$ の和が存在して, 級数の和と一致する.

命題 1.30 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ は絶対収束すると仮定する.

1) $f : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ を単射とするとき, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_{f(n)}$ は絶対収束し, f が全単射ならば $\sum_{n=0}^{\infty} x_{f(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ である.

2) $\boldsymbol{N} = \bigcup_{m=0}^{\infty} N_m$ で, $l \neq m$ ならば $N_l \cap N_m = \phi$ であるとする. このとき, 各点列 $(x_n)_{n\in N_m}$ の和が存在し, $\sigma_m = \sum_{n\in N_m} x_n$ とおくと, 級数 $\sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m$ は絶対収束して, $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ に等しくなる.

要するに上の命題は, 絶対収束する級数では項の順序や括弧のくくり方をかえても同じ値に収束することをいってる.

2 微分の定義と性質

(V, ρ), (W, ν) をノルム空間, U を V の開集合とする.

定義 2.1 U の点 a に対し, 写像 $f, g : U \to W$ が, $\lim_{x\to a} \frac{\|f(x)-g(x)\|}{\|x-a\|} = 0$ を満たすとき, f と g は a において接するという.

f, g がともに a で連続であり, a において接すれば必然的に $f(a) = g(a)$ である.

命題 2.2 1) ρ と ρ' は V の同値なノルム, ν と ν' は W の同値なノルムとする. 写像 $f, g : U \to W$ がノルム ρ, ν に関して $a \in U$ において接すれば, ノルム ρ', ν' に関しても f と g は a において接する.

2) $\mathrm{Map}(U,W)$ を U から W への写像全体の集合とする. $\mathrm{Map}(U,W)$ における関係 $\sim$ を "$f \sim g \iff f$ と g は a において接する" により定めれば, $\sim$ は同値関係である.

3) $a \in U$ において $f : U \to W$ と接する写像で $x \mapsto f(a) + A(x-a)$ ($A : V \to W$ は線型写像) という形をしたものはたかだか一つしかない.

証明 1) と 2) は容易. 3) を示す. $x \mapsto f(a) + A(x-a)$ と $x \mapsto f(a) + B(x-a)$ ($A, B : V \to W$ は線型写像) が a で接するとすると $\lim\limits_{x \to a} \frac{\|(A-B)(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$. (1.4) から $A - B = 0$ すなわち $A = B$ が得られる. □

定義 2.3 $f : U \to W$ と $a \in U$ において接する写像で $x \mapsto f(a) + A(x-a)$ ($A : V \to W$ は線型写像) という形をしたものが存在するとき f は a で微分可能であるという. このような線型写像 $A : V \to W$ を f の a における微分といい, $Df(a)$ や $f'(a)$ で表す. 特に, $V = \boldsymbol{R}$ の場合, 対応 $A \mapsto A(1)$ により $\boldsymbol{R}$ から W への線型写像の全体と W は一対一に対応するため, これらを同一視して $Df(a)$ を W の要素とみなすことにする.

命題 2.4 1) $f : U \to W$ が $a \in U$ において微分可能であることと, $f(x) = f(a) + A(x-a) + o(x)$ かつ $\lim\limits_{x \to a} \frac{\|o(x)\|}{\|x-a\|} = 0$ を満たす線型写像 $A : V \to W$ と写像 $o : U \to W$ が存在することは同値である. さらに $V = \boldsymbol{R}$ の場合, f が a で微分可能であることと, 極限 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が存在することは同値であり, 上の同一視によりこの極限は $Df(a)$ に一致する.

2) f が $a \in U$ において微分可能であるとき, a で f が連続であることと, a における微分 $Df(a) : V \to W$ が連続であることは同値である.

証明 1) f が $a \in U$ において微分可能であれば $A = Df(a)$, $o(x) = f(x) - f(a) - A(x-a)$ とおくと, 定義よりただちに $\lim\limits_{x \to a} \frac{\|o(x)\|}{\|x-a\|} = 0$ が得られる. 逆は明らか. 後半は, もし極限 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が存在すれば, これを A とおき, 上と同様に $o(x)$ を定めれば $\lim\limits_{x \to a} \frac{\|o(x)\|}{\|x-a\|} = 0$ が示される. 逆は前半より明らか.
2) f の a における連続性と微分可能性から任意の $\varepsilon > 0$ に対して $0 < \delta < 1$ で, $\|t\| \leqq \delta \to \|f(a+t) - f(a)\| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ かつ $\|f(a+t) - f(a) - Df(a)(t)\| \leqq \frac{\varepsilon}{2}\|t\|$ を満たすものがある. これより $\|t\| \leqq \delta$ ならば $\|Df(a)(u)\| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\|t\| \leqq \varepsilon$ となるため $Df(a)$ は 0 で連続である. 故に $Df(a)$ は連続である. 逆は 1) から明らかである. □

注意 2.5 上の 1) をいいかえると, $f : U \to W$ が $a \in U$ において微分可能であることは, 線型写像 $A : V \to W$ が存在して, 任意の $\varepsilon >$ に対し, $r > 0$ で "$\|x-a\| \leqq r \Rightarrow \|f(x) - f(a) - A(x-a)\| \leqq \varepsilon\|x-a\|$ "を満たすものがあることと同値である.

定義 2.6 V, W をノルム空間, U を V の開集合とする. 連続写像 $f : U \to W$ が U の各点で微分可能であるとき, f は U で微分可能であるという. このとき, 写像 $U \to \mathcal{L}(V; W)$, $x \mapsto Df(x)$ を Df または f' で表す.

命題 2.7 $V_1, V_2, \ldots, V_n, W$ をノルム空間とする. $u \in \mathcal{L}(V_1, V_2, \ldots, V_n; W)$ は, 任意の $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ において微分可能で, $Du(a_1, a_2, \ldots, a_n) : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to W$ は $(Du(a_1, a_2, \ldots, a_n))(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} u(a_1, \ldots, a_{i-1}, v_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ により与えられる. 特に $n = 1$ の場合, $Du(x) = u$ $(x \in V_1)$ である.

証明 $(x_1, \ldots, x_n), (a_1, \ldots, a_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n$ に対し,

$$\begin{aligned} u(x_1, \ldots, x_n) - u(a_1, \ldots, a_n) - &\sum_{i=1}^{n} u(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i - a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \\ &= \sum_{i<j} u(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i - a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, x_j - a_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, $\|(x_1, \ldots, x_n) - (a_1, \ldots, a_n)\| \leqq 1$ ならば $K = \max\{\|a_i\| + 1 | 1 \leqq i \leqq n\}$ とおくと, 上式の右辺のノルムは $\frac{n(n-1)}{2} K^{n-2} \|u\| \cdot \|(x_1, \ldots, x_n) - (a_1, \ldots, a_n)\|^2$ 以下だから, 結果が得られる. □

命題 2.8　1) V, W, Z をノルム空間とする．$(u,v)\mapsto v\circ u$ で与えられる写像 $\mathcal{L}(V;W)\times\mathcal{L}(W;Z)\to\mathcal{L}(V;Z)$ は微分可能で (u_0,v_0) における微分は $(s,t)\mapsto v_0\circ s+t\circ u_0$ で与えられる写像である．

2) V, W を Banach 空間とし，$\mathcal{H}(V;W)$ を V から W への線型写像かつ同相写像であるもの全体の集合とする．このとき $\mathcal{H}(V;W)$ は $\mathcal{L}(V;W)$ の開集合であり，$u\mapsto u^{-1}$ で定義される写像 $\mathcal{H}(V;W)\to\mathcal{H}(W;V)$ は連続かつ微分可能で，$u_0\in\mathcal{H}(V;W)$ における微分は $s\mapsto -u_0^{-1}\circ s\circ u_0^{-1}$ で与えられる線型写像である．

証明　1) $(u,v)\mapsto v\circ u$ は双線型で (1.14) の 3) から連続である．従って (2.7) から結果が得られる．
2) まず $V=W$ の場合を考える．1_V を V の恒等写像とすれば $\|w\|<1$ のとき $1_V+w\in\mathcal{H}(V;V)$ である．実際 $s_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^iw^i$ とおけば，$\|s_{n+k}-s_n\|\leqq\sum_{i=1}^{k}\|w\|^n\|w\|^i\leqq\frac{\|w\|^n}{1-\|w\|}$ だから $(s_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は $\mathcal{H}(V;V)$ の Cauchy 列である．V の完備性から (1.15) よりこの点列は収束する．$v=\lim_{n\to\infty}s_n$ とおくと，$s_n(1_V+w)=(1_V+w)s_n=1_V+(-1)^nw^n$ で $\lim_{n\to\infty}w^n=0$ だから $v(1_V+w)=(1_V+w)v=1_V$ を得る．従って 1_V を中心とした半径 1 の開球 $B(1_V;1)$ は $\mathcal{H}(V;V)$ に含まれる．任意の $u\in\mathcal{H}(V;V)$ に対し，写像 $u_*:\mathcal{L}(V;V)\to\mathcal{L}(V;V)$, $u_*(w)=u\circ w$ は $\mathcal{H}(V;V)$ を $\mathcal{H}(V;V)$ に写す同相写像だから $u_*(B(1_V;1))$ は u の開近傍で $\mathcal{H}(V;V)$ に含まれる．故に $\mathcal{H}(V;V)$ は開集合である．一般の場合 $u\in\mathcal{H}(V;W)$ をとれば $u_*:\mathcal{L}(V;V)\to\mathcal{L}(V;W)$, $u_*(w)=u\circ w$ は $\mathcal{H}(V;V)$ を $\mathcal{H}(V;W)$ に写す同相写像だから上の結果から $\mathcal{H}(V;W)$ は開集合である．
$u_0\in\mathcal{H}(V;W)$, $s\in\mathcal{L}(V;W)$ に対し，$\|s\|\cdot\|u_0^{-1}\|<1$ ならば $1_V+u_0^{-1}\circ s\in\mathcal{H}(V;V)$ だから $u_0+s=u_0(1_V+u_0^{-1}\circ s)\in\mathcal{H}(V;W)$ である．従って $(u_0+s)^{-1}=(1_V+u_0^{-1}\circ s)^{-1}u_0^{-1}$ であり，上で示したことから $(1_V+u_0^{-1}\circ s)^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i(u_0^{-1}\circ s)^i$ が成り立つ．これらを用いれば，$\|(u_0+s)^{-1}-u_0^{-1}+u_0^{-1}su_0^{-1}\|\leqq\|\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i(u_0^{-1}\circ s)^i)(u_0^{-1}\circ s)^2\|\cdot\|u_0^{-1}\|\leqq\sum_{i=0}^{\infty}\|u_0^{-1}\circ s\|^i\|s\|^2\|u_0^{-1}\|^3=\|s\|^2\|u_0^{-1}\|^3(1-\|u_0^{-1}\circ s\|)^{-1}$．そこで $c=2\|u_0^{-1}\|^3$ とおけば，$\|s\|\leqq\frac{1}{\|u_0^{-1}\|}$ ならば $\|(u_0+s)^{-1}-u_0^{-1}+u_0^{-1}su_0^{-1}\|\leqq c\|s\|^2$ となり，写像 $u\mapsto u^{-1}$ の u_0 における微分可能性と，その微分が $s\mapsto -u_0^{-1}\circ s\circ u_0^{-1}$ で与えられることが示された．(1.14) の 3) により写像 $s\mapsto -u_0^{-1}\circ s\circ u_0^{-1}$ は連続だから (2.4) の 2) から写像 $u\mapsto u^{-1}$ の u_0 における連続性がわかる．□

命題 2.9　$V,W_1,W_2,\ldots,W_m$ をノルム空間，U を V の開集合とする．写像 $f:U\to W_1\times W_2\times\cdots\times W_m$ が $a\in U$ で微分可能であるための必要十分条件は，すべての $1\leqq i\leqq m$ に対し，合成写像 $p_i\circ f:U\to W_i$ (ただし $p_i:W_1\times\cdots\times W_m\to W_i$ は i-成分への射影) が a で微分可能であることである．このとき $Df(a):V\to W_1\times\cdots\times W_m$ は，$Df(a)=(D(p_1\circ f)(a),\ldots,D(p_m\circ f)(a))$ で与えられる．

証明　f が a で微分可能ならば (2.4) から $f(x)=f(a)+A(x-a)+o(x)$ かつ $\lim_{x\to a}\frac{\|o(x)\|}{\|x-a\|}=0$ を満たす線型写像 $A:V\to W_1\times\cdots\times W_m$ と写像 $o:U\to W_1\times\cdots\times W_m$ が存在する．従って，各 i に対し $p_i\circ f(x)=p_i\circ f(a)+p_i\circ A(x-a)+p_i\circ o(x)$ かつ $\lim_{x\to a}\frac{\|p_i\circ o(x)\|}{\|x-a\|}=0$ が成り立つため，$p_i\circ f$ は a で微分可能である．
逆に，各 $p_i\circ f$ が a で微分可能ならば，$p_i\circ f(x)=p_i\circ f(a)+A_i(x-a)+o_i(x)$ かつ $\lim_{x\to a}\frac{\|o_i(x)\|}{\|x-a\|}=0$ を満たす線型写像 $A_i:V\to W_i$ と写像 $o_i:U\to W_i$ が存在するから $f(x)=f(a)+(A_1(x-a),\ldots,A_m(x-a))+(o_1(x),\ldots,o_m(x))$ であり，$\lim_{x\to a}\frac{\|(o_1(x),\ldots,o_m(x))\|}{\|x-a\|}=0$ が成り立つ．従って f は a において微分可能で，$Df(a)=(D(p_1\circ f)(a),\ldots,D(p_m\circ f)(a))$ である．□

命題 2.10　$f,g:U\to W$ を $a\in U$ で微分可能な写像とすれば，$f+g,rf:U\to W$ $(r\in\boldsymbol{R})$ も a で微分可能であり，$D(f+g)(a)=Df(a)+Dg(a)$, $D(rf)(a)=rDf(a)$ が成り立つ．

命題 2.11　(合成写像の微分) V, W, Z をノルム空間，U, T をそれぞれ V, W の開集合とする．写像 $f:U\to T$ が $a\in U$ で連続かつ微分可能，$g:T\to Z$ が $f(a)\in T$ で連続かつ微分可能ならば，合成写像 $g\circ f:U\to W$ は a で微分可能で，$D(g\circ f)(a)=Dg(f(a))\circ Df(a)$ が成り立つ．特に $V=\boldsymbol{R}$ の場合，$Df(a)\in W$, $D(g\circ f)(a)\in Z$ とみなすと，$D(g\circ f)(a)=Dg(f(a))(Df(a))$ である．

証明 仮定と (2.4), (1.5) より $c, d \in \boldsymbol{R}$ で, 任意の $s \in V$, $t \in W$ に対して $\|Df(a)(s)\| \leqq c\|s\|$, $\|Dg(f(a))(t)\| \leqq d\|t\|$, を満たすものがある. (2.4) から $f(x) = f(a) + Df(a)(x-a) + o_1(x)$, $\lim\limits_{x \to a} \frac{\|o_1(x)\|}{\|x-a\|} = 0$, $g(y) = g(f(a)) + Dg(f(a))(y - f(a)) + o_2(y)$, $\lim\limits_{y \to f(a)} \frac{\|o_2(y)\|}{\|y-f(a)\|} = 0$ を満たす o_1, o_2 がある. 任意の $0 < \varepsilon < 1$ に対し, $\delta_1 > 0$ で $\|y - f(a)\| \leqq \delta_1$ ならば, $\|o_2(y)\| \leqq \varepsilon\|y - f(a)\|$ となるものがあり, $\delta > 0$ で $\|x - a\| \leqq \delta$ ならば, $\|f(x) - f(a)\| \leqq \delta_1$, かつ $\|o_1(x)\| \leqq \varepsilon\|x - a\|$ を満たすものがある. このとき $o_3(x) = Dg(f(a))(o_1(x)) + o_2(f(x))$ とおくと, $(g \circ f)(x) = g(f(a)) + (Dg(f(a)) \circ Df(a))(x - a) + o_3(x)$ であり, $\|x - a\| \leqq \delta$ ならば, $\|o_3(x)\| \leqq \|Dg(f(a))(o_1(x))\| + \|o_2(f(x))\| \leqq d\|o_1(x)\| + \varepsilon\|f(x) - f(a)\| \leqq d\|o_1(x)\| + \|Df(a)(x-a)\| + \|o_1(x)\| \leqq \varepsilon(c + d + 1)\|x - a\|$ となる. 故に $\lim\limits_{x \to a} \frac{\|o_3(x)\|}{\|x-a\|} = 0$, が成り立つため $g \circ f$ は a で微分可能で, $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$ が成り立つ. □

命題 2.12 (逆写像の微分) V, W をノルム空間とする. f は $x_0 \in V$ のある開近傍から, $f(x_0) \in W$ のある開近傍への同相写像であり, x_0 において微分可能かつ $Df(x_0)$ は同相写像であるとする. このとき f の逆写像 f^{-1} は $f(x_0)$ で微分可能であり, $Df^{-1}(f(x_0)) = (Df(x_0))^{-1}$ が成り立つ.

証明 仮定から $F(s) = f(x_0 + s) - f(x_0)$ で与えられる写像 F は $0 \in V$ のある近傍 U_1 から $0 \in W$ のある近傍 U_2 への同相写像であり, 逆写像 $F^{-1} : U_2 \to U_1$ は $F^{-1}(t) = f^{-1}(f(x_0) + t) - f^{-1}(f(x_0))$ で与えられる. 仮定より $Df(x_0)$ の逆写像 $(Df(x_0))^{-1}$ の連続性から $\|(Df(x_0))^{-1}(t)\| \leqq c\|t\|$ が任意の $t \in W$ に対して成り立つような $c > 0$ がある ((1.5)). f の x_0 における微分可能性から任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $r > 0$ で "$\|s\| \leqq r \Rightarrow \|F(s) - Df(x_0)(s)\| \leqq \varepsilon\|s\|$" を満たすものがある. f^{-1} の連続性より $r' > 0$ で "$\|t\| \leqq r' \Rightarrow F^{-1}(t) \in B_V(0; r)$ を満たすものがある. $\|t\| \leqq r'$ のとき $s = F^{-1}(t)$ とおけば, $\|s\| \leqq r$ であり, $t = F(s)$ だから $\|F^{-1}(t) - (Df(x_0))^{-1}(t)\| = \|(Df(x_0))^{-1}(Df(x_0)(s) - F(s))\| \leqq c\|F(s) - Df(x_0)(s)\| \leqq c\varepsilon\|s\|$ となる. 従って $\varepsilon \leqq \frac{1}{2c}$ ならば上式より $\|s - (Df(x_0))^{-1}(t)\| \leqq \frac{1}{2}\|s\|$ を得るため, 三角不等式 $\|s\| \leqq \|s - (Df(x_0))^{-1}(t)\| + \|(Df(x_0))^{-1}(t)\|$ を用いると, $\|s\| \leqq 2\|(Df(x_0))^{-1}(t)\| \leqq 2c\|t\|$ が得られる. 以上から $\|t\| \leqq r'$ ならば $\|f^{-1}(f(x_0) + t) - f^{-1}(f(x_0)) - (Df(x_0))^{-1}(t)\| \leqq 2c^2\varepsilon\|t\|$ を得るため主張が示される. □

定義 2.13 V, W をベクトル空間とする. 写像 $\alpha : V \to W$ が $\alpha(x) = c + u(x)$ ($c \in W$, $u : V \to W$ は線型写像) で与えられるとき α を affine 写像という.

(2.11), (2.7) から次の結果を得る.

命題 2.14 V, W, Z をノルム空間, U を V の開集合とする. $\alpha : Z \to V$ は $\alpha(x) = c + u(x)$ ($c \in V$, $u : Z \to V$ は線型写像) で与えられる affine 写像, $f : U \to V$ は $\alpha(a)$ ($a \in \alpha^{-1}(U)$) で微分可能な写像とすると, 合成 $f \circ \alpha : \alpha^{-1}(U) \to W$ は a で微分可能であり, $D(f \circ \alpha)(a) = Df(c + u(a)) \circ u$ が成り立つ.

定義 2.15 1) V, W をノルム空間, U を V の開集合とする. $v \in V$, $a \in U$ と写像 $f : U \to W$ に対し, 極限 $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$ が存在するとき f は a において v 方向に微分可能であるという. このとき上の極限を $D_v f(a)$ で表す.

2) V_i $(1 \leqq i \leqq n)$, W をノルム空間, U を $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ の開集合とする. $(a_1, \ldots, a_n) \in U$ と $1 \leqq i \leqq n$ に対し, $U_i = \{x \in V_i | (a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in U\}$ とおくと U_i は a_i を含む V_i の開集合である. 写像 $f : U \to W$ に対し, $f_i(x) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ で定義される写像 $f_i : U_i \to W$ が a_i で微分可能であるとき f は $(a_1, \ldots, a_n)$ において i-番目の変数に関し偏微分可能であるといい, $Df_i(a_i)$ を $D_i f(a_1, \ldots, a_n)$ で表す.

命題 2.16 1) 上の 1) において, $\alpha(t) = a + tv$ で定義される affine 写像 $\alpha : \boldsymbol{R} \to V$ を考えると f が a において v 方向に微分可能であることと, 合成 $f \circ \alpha : \alpha^{-1}(U) \to W$ が 0 で微分可能であることは同値であり, $D_v f(a) = D(f \circ \alpha)(0)$ が成り立つ. さらに f が a で連続かつ微分可能ならば, 任意の $v \in V$ に対して, $D_v f(a) = Df(a)(v)$ が成り立つ.

2) 上の 2) において, $\alpha_i(x) = (a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ で定義される affine 写像 $\alpha_i : V_i \to V_1 \times \cdots \times V_n$ を

考えると f が $(a_1,\ldots,a_n)$ において i-番目の変数に関し偏微分可能であることと, 合成 $f\circ\alpha_i : U_i \to W$ が a_i で微分可能であることは同値であり, $D_if(a_1,\ldots,a_n) = D(f\circ\alpha_i)(a_i)$ が成り立つ. さらに f が $(a_1,\ldots,a_n)$ で連続かつ微分可能ならば, すべての変数に関して偏微分可能で $D_if(a_1,\ldots,a_n) = Df(a_1,\ldots,a_n)\circ\iota_i$ (ただし ι_i は (1.11) と同じもの) である.

証明 1) の前半は (2.4) の 1) から明らか. 後半は (2.14) からただちに得られる. 2) の前半は定義より明らかで, 後半は $D\alpha_i = \iota_i$ だから (2.11) を用いればよい. □

命題 2.17 V をノルム空間, U を V の開集合とする. 実数値関数 $f : U \to \boldsymbol{R}$ が $a \in U$ において連続かつ微分可能で, 極大または極小であれば $Df(a) = 0$ である.

証明 任意の $v \in V$ に対し, $\alpha(t) = a + tv$ で定義される affine 写像 $\alpha : \boldsymbol{R} \to V$ を考えると, 合成関数 $f\circ\alpha : \alpha^{-1}(U) \to W$ は 0 で微分可能で, 極大または極小である. 従って (2.16) の 1) より $Df(a)(v) = D(f\circ\alpha)(0) = 0$ だから $Df(a) = 0$ である. □

3 平均値の定理とその応用

命題 3.1 I を $\boldsymbol{R}$ の閉区間 $[\alpha,\beta]$, V をノルム空間とする. $f : I \to V$, $\varphi : I \to \boldsymbol{R}$ がともに連続で, a, b を含む可算集合 S が存在して, $I - S$ の各点 t で微分可能であり, $\|Df(t)\| \leqq \varphi'(t)$ が成り立てば, $\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leqq \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$ である.

証明 仮定から全単射 $\sigma : \boldsymbol{N} \to S$ がある. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leqq \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\beta - \alpha + 2)$ が成り立つことを示せばよい.
$A = \{\xi \in I \,|\, \alpha \leqq \zeta < \xi \Rightarrow \|f(\zeta) - f(\alpha)\| \leqq \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\zeta - \alpha + \sum_{n\in\sigma^{-1}[\alpha,\zeta)} 2^{-n})\}$ とおくと, $\alpha \in A$ であり, “$\xi \in A, \xi' \leqq \xi \Rightarrow \xi' \in A$ ”が成り立つため $\gamma = \sup A$ とおけば, $A = [\alpha,\gamma)$ または $A = [\alpha,\gamma]$ である.
$\alpha \leqq \zeta < \gamma$ ならば $\zeta < \frac{\zeta+\gamma}{2} < \gamma$ だから $\frac{\zeta+\gamma}{2} \in A$ であり, $\|f(\zeta) - f(\alpha)\| \leqq \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\zeta - \alpha + \sum_{n\in\sigma^{-1}[\alpha,\zeta)} 2^{-n})$ が成り立つ. 従って A の定義から $\gamma \in A$ となるため $A = [\alpha,\gamma]$ である. このとき f, φ の γ における連続性から $\|f(\gamma) - f(\alpha)\| \leqq \varphi(\gamma) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\gamma - \alpha + \sum_{n\in\sigma^{-1}[\alpha,\gamma)} 2^{-n})$ が成り立つことに注意する. これにより $\gamma = \beta$ であることを示せばよい. $\gamma < \beta$ と仮定する.
$\gamma = \sigma(j) \in S$ ならば f, φ の γ における連続性から $\delta > \gamma$ で “$\zeta \in [\gamma,\delta) \Rightarrow \|f(\zeta) - f(\gamma)\| \leqq 2^{-j-1}\varepsilon$ かつ $|\varphi(\zeta) - \varphi(\gamma)| \leqq 2^{-j-1}\varepsilon$ ”を満たすものがある. このとき $\|f(\zeta) - f(\alpha)\| \leqq \|f(\zeta) - f(\gamma)\| + \|f(\gamma) - f(\alpha)\| \leqq 2^{-j-1}\varepsilon + \varphi(\gamma) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\gamma - \alpha + \sum_{n\in\sigma^{-1}[\alpha,\gamma)} 2^{-n}) \leqq \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\zeta - \alpha + \sum_{n\in\sigma^{-1}[\alpha,\zeta)} 2^{-n})$ となるため $\xi \in A$ となり, γ の極大性に反する.
$\gamma \notin S$ ならば, f, φ の γ における微分可能性から $\delta > \gamma$ で “$\zeta \in [\gamma,\delta) \Rightarrow \|f(\zeta) - f(\gamma) - Df(\gamma)(\zeta-\gamma)\| \leqq \frac{\varepsilon}{2}(\zeta-\gamma)$ かつ $|\varphi(\zeta) - \varphi(\gamma) - \varphi'(\gamma)(\zeta-\gamma)| \leqq \frac{\varepsilon}{2}(\zeta-\gamma)$ ”を満たすものがある. 従って, $\|f(\zeta) - f(\gamma)\| \leqq \|Df(\gamma)\|(\zeta-\gamma) + \frac{\varepsilon}{2}(\zeta-\gamma) \leqq \varphi'(\gamma)(\zeta-\gamma) + \frac{\varepsilon}{2}(\zeta-\gamma) \leqq \varphi(\zeta) - \varphi(\gamma) + \varepsilon(\zeta-\gamma)$. 上の注意から $\|f(\zeta) - f(\alpha)\| \leqq \|f(\zeta) - f(\gamma)\| + \|f(\gamma) - f(\alpha)\| \leqq \varphi(\zeta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\zeta - \alpha + \sum_{n\in\sigma^{-1}[\alpha,\zeta)} 2^{-n})$ が成り立って $\zeta \in A$ となり, γ の極大性に反する. □

上において特に, $\varphi(t) = Mt$ の場合, 次が成り立つ.

系 3.2 $I - S$ の各点 t で $\|Df(t)\| \leqq M$ ならば, $\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leqq M(\beta - \alpha)$ である.

定理 3.3 (平均値の定理) V, W をノルム空間, $a, b \in V$, S を a と b を結ぶ線分 $\{a + t(b-a) \,|\, 0 \leqq t \leqq 1\}$ とする. U が S を含む V の開集合で $f : U \to W$ は連続かつ $S - \{a,b\}$ の各点で微分可能ならば, $\|f(b) - f(a)\| \leqq$

$\|b-a\| \sup_{0<t<1} \|Df(b+t(b-a))\|$ が成り立つ.

証明 $g:[0,1] \to W$ を $g(t)=f(a+t(b-a))$ で定めれば, $Dg(t)=Df(a+t(b-a))(b-a)$ だから $\|Dg(t)\| \leqq \|b-a\| \sup_{0<t<1} \|Df(a+t(b-a))\|$ である. これに (3.2) を用いればよい. □

系 3.4 V, W をノルム空間, $a, b \in V$, S を a と b を結ぶ線分とする. U が S を含む V の開集合で $f: U \to W$ は連続かつ $S-\{a,b\}$ の各点および $x_0 \in U$ で微分可能ならば, $\|f(b)-f(a)-Df(x_0)(b-a)\| \leqq \|b-a\| \sup_{0<t<1} \|Df(b+t(b-a))-Df(x_0)\|$ が成り立つ.

証明 $g: U \to W$ を $g(x)=f(x)-Df(x_0)(x)$ で定めれば $x \in S-\{a,b\}$ に対し, $Dg(x)=Df(x)-Df(x_0)$ である. この g に (3.3) を用いればよい. □

命題 3.5 U をノルム空間 V の連結な開集合とする. f が U からノルム空間 W への連続写像で U の各点 x で $Df(x)=0$ であれば, f は定数値写像である.

証明 $x_0 \in U$ をとり, $A=\{x \in U \mid f(x)=f(x_0)\}$ とおくと, $x_0 \in A$ だから A は空集合ではなく, f の連続性から A は U の閉集合である. 任意の $x \in A$ に対し, 中心 x の開球 B で U に含まれるものをとれば, B の各点 y と x を結ぶ線分は B に含まれるため (3.3) から $f(y)=f(x)$ である. 従って $y \in A$ となるため A は U の開集合である. U の連結性から $A=U$ を得る. □

命題 3.6 U をノルム空間 V の連結な開集合, $(f_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ を U から Banach 空間 W への連続写像で U の各点で微分可能な写像の列とする. さらに, (1) $(f_n(x_0))_{n \in \boldsymbol{N}}$ が W で収束するような U の点 x_0 が存在し, (2) 各 $a \in U$ に対し, a を中心とし U に含まれる開球 $B(a)$ で, $(Df_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ が $B(a)$ において一様に収束するようなものが存在すると仮定する. このとき, 各 $a \in U$ に対し, $(f_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ は $B(a)$ において一様に収束し, 各 $x \in U$ に対し, $f(x)=\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ は微分可能で, $g(x)=\lim_{n \to \infty} Df_n(x)$ とおけば $Df(x)=g(x)$ が成り立つ.

証明 $x, y \in B(a)$ に対し, x と y を結ぶ線分は $B(a)$ に含まれるため, (3.3) から $\|(f_n(x)-f_m(x))-(f_n(y)-f_m(y))\| \leqq \|x-y\| \sup_{z \in B(a)} \|Df_n(z)-Df_m(z)\|$ が成り立つ. $B(a)$ の半径を r とすれば上式から $\|f_n(x)-f_m(x)\| \leqq \|f_n(y)-f_m(y)\| + 2r \sup_{z \in B(a)} \|Df_n(z)-Df_m(z)\|$ を得る. $(Df_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ が $B(a)$ において一様に収束するため, $(f_n(y))_{n \in \boldsymbol{N}}$ が収束すれば上式により $(f_n(x))_{n \in \boldsymbol{N}}$ が W の Cauchy 列になることがわかる. W の完備性から $(f_n(x))_{n \in \boldsymbol{N}}$ も収束する. 従って $(f_n(y))_{n \in \boldsymbol{N}}$ が収束するような $y \in B(a)$ があれば, すべての $x \in B(a)$ に対して, $(f_n(x))_{n \in \boldsymbol{N}}$ は収束するため, $(f_n(x))_{n \in \boldsymbol{N}}$ が収束するような $x \in U$ の全体は U の開かつ閉集合である. 仮定によりこの集合は空でないため, U の連結性から, すべての $x \in U$ に対して $(f_n(x))_{n \in \boldsymbol{N}}$ は収束する. 仮定から任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $n_0 \in \boldsymbol{N}$ で $n, m \geqq n_0$ ならば任意の $z \in B(a)$ に対して, $\|Df_n(z)-Df_m(z)\| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$ および $\|g(a)-Df_n(a)\| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$ となるようなものが存在する. 最初の不等式において $y=a$, $m \to \infty$ とすれば $n \geqq n_0$, $x \in B(a)$ のとき $\|(f(x)-f(a))-(f_n(x)-f_n(a))\| \leqq \varepsilon\|x-a\|$ が成り立つ. 一方, f_n の a における微分可能性から $0<r'<r$ で $\|x-a\| \leqq r'$ ならば $\|f_n(x)-f_n(a)-Df_n(a)(x-a)\| \leqq \frac{\varepsilon}{3}\|x-a\|$ となるものがある. 以上から $\|x-a\| \leqq r'$ ならば $\|(f(x)-f(a))-g(a)(x-a)\| \leqq \|(f(x)-f(a))-(f_n(x)-f_n(a))\| + \|f_n(x)-f_n(a)-Df_n(a)(x-a)\| + \|(Df_n(a)-g(a))(x-a)\| \leqq \varepsilon\|x-a\|$ となるため f は a で微分可能で, $Df(a)=g(a)$ が成り立つ. □

命題 3.7 I を $\boldsymbol{R}$ の区間 $[a,b]$, $(f_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ を I から Banach 空間 V への連続写像の列とする. 各 f_n は I のある可算集合 D_n の補集合 $I-D_n$ の各点で微分可能であり, 写像 $g_n: I \to V$ は $I-D_n$ において Df_n に一致するものとする. さらに, (1) $(f_n(x_0))_{n \in \boldsymbol{N}}$ が V で収束するような I の点 x_0 が存在し, (2) 各 $t \in I$ に対し, I における t の開近傍 U_t で, $(g_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ が U_t において一様に収束するようなものが存在すると仮定する. このとき, 各

$t \in I$ に対し, $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は U_t において一様に収束し, 各 $x \in I - \bigcup_{n\in\boldsymbol{N}} D_n$ に対し, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ は微分可能で, $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ とおけば $Df(x) = g(x)$ が成り立つ.

証明 (3.3) のかわりに (3.2) を用いれば (3.6) と同様にして示される. □

4 偏微分・高階微分

定義 4.1 f をノルム空間 V の開集合 U からノルム空間 W への微分可能な写像とする. $Df : U \to \mathcal{L}(V;W)$ が連続写像のとき f は連続微分可能であるという.

定理 4.2 $V_1, V_2, \ldots, V_n$, W をノルム空間, U を $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ の開集合, $f : U \to W$ を連続写像とする. f が U で連続微分可能であるための必要十分条件は f が U の各点ですべての変数に関して偏微分可能であり, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto D_i f(x_1, \ldots, x_n)$ で与えられる写像 $U \to \mathcal{L}(V_i;W)$ が連続であることである. このとき, $p_i : V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ を i-成分への射影とすれば, f の微分は $Df(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(x_1, \ldots, x_n) \circ p_i$ で与えられる.

証明 (必要性) f が U で連続微分可能ならば (2.14) の 2) より, f が U の各点ですべての変数に関して偏微分可能であり, $D_i f(x_1, \ldots, x_n) = Df(x_1, \ldots, x_n) \circ \iota_i$ だから Df の連続性と (1.14) の 3) から $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto D_i f(x_1, \ldots, x_n)$ は連続である.
(十分性) $(x_1, \ldots, x_n) \in U$, ε を任意の正の数とする. i 番目の変数に関する f の偏微分可能性より, (3.4) から

$$\begin{aligned}&\|f(x_1+t_1, \ldots, x_i+t_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1+t_1, \ldots, x_{i-1}+t_{i-1}, x_i, \ldots, x_n)\\ &\qquad\qquad\qquad - D_i f(x_1+t_1, \ldots, x_{i-1}+t_{i-1}, x_i, \ldots, x_n) t_i\|\\ &\leqq \|t_i\| \sup_{0<\theta_i<1} \|D_i f(x_1+t_1, \ldots, x_{i-1}+t_{i-1}, x_i+\theta_i t_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - D_i f(x_1+t_1, \ldots, x_{i-1}+t_{i-1}, x_i, \ldots, x_n)\|\end{aligned}$$

を得る. 一方 $D_i f$ の連続性から $r > 0$ で $\|t_j\| \leqq r$ $(1 \leqq j \leqq n)$ ならば, すべての i に対し,

$$\|D_i f(x_1+t_1, \ldots, x_n+t_n) - D_i f(x_1, \ldots, x_n)\| \leqq \frac{\varepsilon}{3n}$$

が成り立つようなものがあるから $\|f(x_1+t_1, \ldots, x_i+t_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1+t_1, \ldots, x_{i-1}+t_{i-1}, x_i, \ldots, x_n) - D_i f(x_1+t_1, \ldots, x_{i-1}+t_{i-1}, x_i, \ldots, x_n) t_i\| \leqq \frac{2\varepsilon}{3n}\|t_i\|$. さらに

$$\|D_i f(x_1+t_1, \ldots, x_{i-1}+t_{i-1}, x_i, \ldots, x_n) t_i - D_i f(x_1, \ldots, x_n) t_i\| \leqq \frac{\varepsilon}{3n}\|t_i\|$$

だから $\|f(x_1+t_1, \ldots, x_i+t_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1+t_1, \ldots, x_{i-1}+t_{i-1}, x_i, \ldots, x_n) - D_i f(x_1, \ldots, x_n) t_i\| \leqq \frac{\varepsilon}{n}\|t_i\|$ が成り立つ. 以上から $\|f(x_1+t_1, \ldots, x_n+t_n) - f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} D_i f(x_1, \ldots, x_n) t_i\| \leqq \sum_{i=1}^{n} \|f(x_1+t_1, \ldots, x_i+t_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1+t_1, \ldots, x_{i-1}+t_{i-1}, x_i, \ldots, x_n) - D_i f(x_1, \ldots, x_n) t_i\| \leqq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n}\|t_i\| \leqq \varepsilon\|(t_1, \ldots, t_n)\|$ が得られるから f は U の各点で微分可能で, $Df(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(x_1, \ldots, x_n) \circ p_i$ が成り立つ. $D_i f$ は連続だから, この式と (1.14) の 3) から Df は連続である. □

命題 4.3 V, W, Z をノルム空間, U を $V \times W$ の開集合とし, $f : U \to Z$ を U で連続微分可能な写像とする. $D_1 f : U \to \mathcal{L}(V;Z)$, $D_2 f : U \to \mathcal{L}(W;Z)$ は U の各点においてそれぞれ, 二番目, 一番目の変数に関して偏微分可能とする. $x_0 \in U$ で $D_2(D_1 f) : U \to \mathcal{L}(W;\mathcal{L}(V;Z)) = \mathcal{L}(W \times V;Z)$ と, $D_1(D_2 f) : U \to \mathcal{L}(V;\mathcal{L}(W;Z)) = \mathcal{L}(V \times W;Z)$ が連続ならば, $D_1(D_2 f)(x_0) = D_2(D_1 f)(x_0) \circ T$ (ただし $T : V \times W \to W \times V$ は $T(s,t) = (t,s)$ で与えられる写像.) が成り立つ.

証明 $x_0=(a,b)$ とし, $B_V(a;r)\times B_W(b;r)\subset U$ となる $r>0$ をとる. $t\in B_W(b;r)$ に対し, $g: B_V(0;r)\times B_W(0;r)\to Z$ を $g(x,y)=f(a+x,b+y)-f(a+x,b)$ で定めると $D_1g(x,y)=D_1f(a+x,b+y)-D_1f(a+x,b)$ であり, (3.4) から $\|g(s,t)-g(0,t)-D_1g(0,t)(s)\|\leqq\|s\|\sup_{0<\xi<1}\|D_1g(\xi s,t)-D_1g(0,t)\|$ が成り立つ. $h(y)=D_1f(a+\xi s,b+y)-D_1f(a,b+y)$ により $h: B_W(0;r)\to\mathcal{L}(V;Z)$ を定めると, $D_1g(\xi s,t)-D_1g(0,t)=h(t)-h(0)$ であり, 仮定から h は連続で $B_W(0;r)$ において微分可能だから, (3.3) から $\|h(t)-h(0)\|\leqq\|t\|\sup_{0<\zeta<1}\|Dh(\zeta t)\|$ が得られる. $D_2(D_1f)$ は x_0 で連続だから任意の $\varepsilon>0$ に対し, $r'>0$ で $\|x\|,\|y\|\leqq r'$ ならば

$$\|D_2(D_1f)(a+x,b+y)-D_2(D_1f)(a,b)\|\leqq\varepsilon$$

を満たすものがある. $Dh(y)=D_2(D_1f)(a+\xi s,b+y)-D_2(D_1f)(a,b+y)$ に注意すれば, $\|s\|,\|t\|\leqq r'$ ならば上の議論から次の不等式を得る;

$$(1)\quad \|g(s,t)-g(0,t)-D_1g(0,t)(s)\|\leqq 2\varepsilon\|s\|\cdot\|t\|$$

D_1f に (3.4) を用いると, $\|t\|\leqq r'$ ならば

$$\|D_1f(a,b+t)-D_1f(a,b)-D_2(D_1f)(a,b)(t)\|\leqq\|t\|\sup_{0<\theta<1}\|D_2(D_1f)(a,b+\theta t)-D_2(D_1f)(a,b)\|\leqq\varepsilon\|t\|$$

が成り立つ. 従って, $s\in V$ に対し, $\|D_1g(0,t)(s)-D_2(D_1f)(a,b)(t,s)\|\leqq\varepsilon\|s\|\cdot\|t\|$ が成り立つため, (1) から $\|s\|,\|t\|\leqq r'$ ならば次の不等式が得られる;

$$(2)\quad \|g(s,t)-g(0,t)-D_2(D_1f)(a,b)(t,s)\|\leqq 3\varepsilon\|s\|\cdot\|t\|.$$

上の g のかわりに $g'(x,y)=f(a+x,b+y)-f(a,b+y)$ で定義される $g': B_V(0;r)\times B_W(0;r)\to Z$ を考えると, ある $r''>0$ が存在して, $\|s\|,\|t\|\leqq r''$ ならば次の不等式が成り立つ;

$$(3)\quad \|g'(s,t)-g'(s,0)-D_1(D_2f)(a,b)(s,t)\|\leqq 3\varepsilon\|s\|\cdot\|t\|.$$

$g(s,t)-g(0,t)=f(a+s,b+t)-f(a+s,b)-f(a,b+t)+f(a,b)=g'(s,t)-g'(s,0)$ だから (2) と (3) から $\|s\|,\|t\|\leqq\min\{r',r''\}$ ならば $\|D_1(D_2f)(a,b)(s,t)-D_2(D_1f)(a,b)\circ T(s,t)\|\leqq 6\varepsilon\|s\|\cdot\|t\|$ が成り立つ. $\|s\|=\|t\|=1$ の場合 $c=\min\{r',r''\}$ とおくと上式で s, t を cs, ct でおきかえたものが成り立ち, さらにその両辺を c^2 で割ると $\|(D_1(D_2f)(a,b)-D_2(D_1f)(a,b)\circ T)(s,t)\|\leqq 6\varepsilon$ が得られる. 従って $\|D_1(D_2f)(a,b)-D_2(D_1f)(a,b)\circ T\|\leqq 6\varepsilon$ で, ε は任意だから $D_1(D_2f)(a,b)=D_2(D_1f)(a,b)\circ T$ である. □

ノルム空間 V, W と $p\in\boldsymbol{N}$ に対し, $\mathcal{L}_p(V;W)=\mathcal{L}(\overbrace{V,V,\dots,V}^{p\text{ 個}};W)$ とおくことにする. (ただし $\mathcal{L}_0(V;W)=W$ とする.)

定義 4.4 V, W をノルム空間, U を V の開集合とする. 写像 $f: U\to W$ が U において微分可能で, さらに f の微分 $Df: U\to\mathcal{L}(V;W)$ が $x_0\in U$ において微分可能であるとき f は x_0 で二回微分可能であるという. f が U の各点で二回微分可能であるとき, 写像 $D(Df): U\to\mathcal{L}(V;\mathcal{L}(V;W))$ を f の二階微分と呼んで D^2f で表す. (1.16) により $\mathcal{L}(V;\mathcal{L}(V;W))$ を $\mathcal{L}_2(V;W)$ と同一視して D^2f を U から $\mathcal{L}_2(V;W)$ への写像とみなす. 帰納的に写像 $D^{p-1}f: U\to\mathcal{L}_{p-1}(V;W)$ が定義されたとする. $D^{p-1}f$ が $x_0\in U$ において微分可能であるとき f は x_0 で p 回微分可能であるという. U において微分可能ならば f は U で p 回微分可能であるといい, 写像 $D(D^{p-1}f): U\to\mathcal{L}(V;\mathcal{L}_{p-1}(V;W))=\mathcal{L}_p(V;W)$ を f の p 階微分と呼んで D^pf で表す.

補題 4.5 $f: U\to W$ は $x_0\in U$ で p 回微分可能であるとする. $t_2,\dots,t_p\in V$ に対し, 写像 $U\to W$, $x\mapsto D^{p-1}f(x)(t_2,\dots,t_p)$ の x_0 における微分は $t_1\mapsto D^pf(x_0)(t_1,t_2,\dots,t_p)$ で与えられる.

証明 写像 $x\mapsto D^{p-1}f(x)(t_2,\dots,t_p)$ は写像 $U\to\mathcal{L}_{p-1}(V;W)$, $x\mapsto Df^{p-1}(x)$ と, 線型写像 $\mathcal{L}_{p-1}(V;W)\to W$, $u\mapsto u(t_2,\dots,t_p)$ の合成だから (2.11), (2.7) より結果が得られる. □

定理 4.6 連続写像 $f:U\to W$ が U で微分可能であり, $x_0\in U$ で 2 回微分可能ならば双線型写像 $V\times V\to W$, $(s,t)\mapsto D^2f(x_0)(s,t)$ は対称である. すなわち任意の $(s,t)\in V\times V$ に対して $D^2f(x_0)(s,t)=D^2f(x_0)(t,s)$ が成り立つ.

証明 まず $B(x_0;r)\subset U$ であるような $r>0$ をとり, $\|s\|\leqq\frac{1}{2}r$, $\|t\|\leqq\frac{1}{2}r$ であるとする. 写像 $g:[0,1]\to W$ を $g(\xi)=f(x_0+\xi s+t)-f(x_0+\xi s)$ で定義すると (3.4) から $\|g(1)-g(0)-g'(0)\|\leqq\sup\limits_{0<\xi<1}\|g'(\xi)-g'(0)\|$ が成り立つ. 仮定から任意の $\varepsilon>0$ に対し, $0<r'\leqq r$ で $\|s\|,\|t\|\leqq\frac{1}{2}r'$ ならば $\|Df(x_0+\xi s+t)-Df(x_0)-D^2f(x_0)(\xi s+t)\|\leqq\varepsilon(\|s\|+\|t\|)$ かつ $\|Df(x_0+\xi s)-Df(x_0)-D^2f(x_0)(\xi s)\|\leqq\varepsilon\|s\|$ を満たすものがある. 従って, $g'(\xi)=(Df(x_0+\xi s+t)-Df(x_0+\xi s))(s)=((Df(x_0+\xi s+t)-Df(x_0))-(Df(x_0+\xi s)-Df(x_0)))(s)$ より, $\|g'(\xi)-(D^2f(x_0)(t))(s)\|\leqq\varepsilon\|s\|(2\|s\|+\|t\|)\leqq2\varepsilon\|s\|(\|s\|+\|t\|)$ および $\|g'(\xi)-g'(0)\|\leqq\{\varepsilon(\|s\|+\|t\|)+\varepsilon\|s\|+\varepsilon\|t\|\}\|s\|=\varepsilon\|s\|(\|s\|+\|t\|)$ が得られる. 以上から $\|g(1)-g(0)-(D^2f(x_0)(t))(s)\|\leqq\|g(1)-g(0)-g'(0)\|+\|g'(0)-(D^2f(x_0)(t))(s)\|\leqq3\varepsilon\|s\|(\|s\|+\|t\|)$ を得る. $g(1)-g(0)=f(x_0+s+t)-f(x_0+t)-f(x_0+s)-f(x_0)$ は s,t について対称だから s と t をいれかえた不等式を考えれば, $\|s\|,\|t\|\leqq\frac{1}{2}r'$ ならば $\|(D^2f(x_0)(t))(s)-(D^2f(x_0)(s))(t)\|\leqq3\varepsilon(\|s\|+\|t\|)^2$ が得られる. $\|s\|=\|t\|=1$ の場合, 上式で s,t をそれぞれ $\frac{2}{r'}s$, $\frac{2}{r'}t$ でおきかえたものが成り立ち, さらにその両辺に $\frac{r'^2}{4}$ をかければ, この場合も上の不等式が成り立つことがわかる. 従って, $T:V\times V\to V\times V$ を $T(s,t)=(t,s)$ で定めると, $\|D^2f(x_0)\circ T-D^2f(x_0)\|\leqq12\varepsilon$ が成り立ち, ε は任意だから $D^2f(x_0)\circ T=D^2f(x_0)$ である. □

定理 4.7 $f:U\to W$ が $x_0\in U$ において p 回微分可能ならば p 重線型写像 $D^pf(x_0)$ は対称である.

証明 p による帰納法で示す. $t_3,\ldots,t_p\in V$ を固定し, 写像 $x\mapsto g(x)=D^{p-2}f(t_3,\ldots,t_p)$ を考える. (4.5) から g の x_0 における二階微分は $(t_1,t_2)\mapsto D^pf(x_0)(t_1,t_2,t_3,\ldots,t_p)$ で与えられる. 従って (4.6) から

$$D^pf(x_0)(t_2,t_1,t_3,\ldots,t_p)=D^pf(x_0)(t_1,t_2,t_3,\ldots,t_p)$$

が成り立つ. 一方, $\{2,3,\ldots,p\}$ の任意の置換 σ に対し, 帰納法の仮定より $x\in U$ に対し,

$$D^{p-1}f(x)(t_{\sigma(2)},t_{\sigma(3)},\ldots,t_{\sigma(p)})=D^{p-1}f(x)(t_1,t_2,t_3,\ldots,t_p)$$

である. 各 t_i を固定して両辺の x_0 での微分を考えると,

$$D^pf(x_0)(t_1,t_{\sigma(2)},t_{\sigma(3)},\ldots,t_{\sigma(p)})=D^pf(x_0)(t_1,t_2,t_3,\ldots,t_p)$$

が得られる. $\{1,2,3,\ldots,p\}$ の任意の置換は 1 と 2 の互換と $\{2,3,\ldots,p\}$ の置換の積になるため上式より $D^pf(x_0)$ は対称であることがわかる. □

命題 4.8 f が U で p 回微分可能, D^pf が U で q 回微分可能ならば f は U で $p+q$ 回微分可能であり, $D^{p+q}f=D^q(D^pf)$ が成り立つ.

証明 $q=1$ の場合は定義そのものである. q による帰納法で容易に示される. □

命題 4.9 $V,W_1,W_2,\ldots,W_m$ をノルム空間, U を V の開集合とする. 写像 $f:U\to W_1\times W_2\times\cdots\times W_m$ が U で p 回微分可能であるための必要十分条件は, すべての $1\leqq i\leqq m$ に対し, 合成写像 $p_i\circ f:U\to W_i$ (ただし $p_i:W_1\times\cdots\times W_m\to W_i$ は i-成分への射影) が a で p 回微分可能であることである. このとき Df^p は, $Df(x)=(D^p(p_1\circ f)(x),\ldots,D^p(p_m\circ f)(x))$ で与えられる.

証明 (2.9) を用いて p による帰納法で示される. □

定義 4.10 連続写像 $f:U\to W$ が U において r 回微分可能であり, 各 $i\leqq r$ に対し, $D^if:U\to\mathcal{L}_i(V;W)$ が連続であるとき f は U において r 回連続微分可能であるという. さらに, すべての $r\geqq1$ に対して p 回連続微分可能

な写像を無限回連続微分可能な写像という．また, r 回連続微分可能な写像を C^r-写像, 無限回連続微分可能な写像を C^∞-写像ということがある．

命題 4.11　連続な n 重線型写像は無限回連続微分可能で, $r > n$ ならば n 重線型写像の r 階微分は 0 である．

証明　$u : V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ を連続な n 重線型写像とする．$u_i : V_1 \times \cdots \times V_{i-1} \times V_{i+1} \times \cdots \times V_n \to \mathcal{L}(V_i; W)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ を $u_i(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)(v_i) = u(a_1, \ldots, a_{i-1}, v_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ で定めると, (1.16) により u_i は連続な $n-1$ 重線型写像である．(ただし 0 重線型写像とは定値写像を意味するものとする.) (2.7) より, $Du = \sum_{i=1}^{n} u_i$ だから連続な n 重線型写像の微分は連続な $n-1$ 重線型写像の和で表されるから n による帰納法で主張が示される．□

命題 4.12　V, W, Z をノルム空間, U, T をそれぞれ V, W の開集合とする．写像 $f : U \to T$ が U で p 回連続微分可能, $g : T \to Z$ が T で p 回連続微分可能ならば, 合成写像 $g \circ f : U \to W$ は U で p 回連続微分可能である．

証明　$p = 1$ の場合は (2.11), (1.14) の 3) から結果が得られる．$p-1$ の場合に主張が成立すると仮定する．$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x)$ だから $D(g \circ f)$ は次の三つの写像の合成と考えられる; 線型写像 $V \to V \times V$, $x \mapsto (x, x)$ の U への制限, 写像 $V \times V \to \mathcal{L}(W; Z) \times \mathcal{L}(V; W)$, $(x, y) \mapsto ((Dg) \circ f(x), Df(y))$, 写像 $\mathcal{L}(W; Z) \times \mathcal{L}(V; W) \to \mathcal{L}(V; Z)$, $(u, v) \mapsto u \circ v$. Dg, f は $p-1$ 回連続微分可能だから帰納法の仮定により $(Dg) \circ f$ は $p-1$ 回連続微分可能である．従って (4.9) から二つめの写像は $p-1$ 回連続微分可能である．一つめと三つめの写像は (4.11) から無限回連続微分可能だから帰納法の仮定により, これらの合成 $D(g \circ f)$ は $p-1$ 回連続微分可能である．故に $g \circ f$ は p 回連続微分可能である．□

命題 4.13　V, W を Banach 空間とすると, $\iota(u) = u^{-1}$ で定義される写像 $\iota : \mathcal{H}(V; W) \to \mathcal{H}(W; V)$ は無限回連続微分可能である．

証明　p による帰納法で ι が p 回連続微分可能であることを示す．$p = 1$ の場合は (2.8) の 2) から主張は成り立つ．$f : \mathcal{L}(W; V) \times \mathcal{L}(W; V) \to \mathcal{L}(\mathcal{L}(V; W); \mathcal{L}(W; V))$ を $f(v, w)(t) = -v \circ t \circ w$ で定めれば f は双線型で (2.8) の 2) と (1.16) から f は連続だから (4.11) より f は無限回連続微分可能である．(2.8) の 2) より, $D\iota$ は次の三つの写像の合成である; 線型写像 $\mathcal{L}(V; W) \to \mathcal{L}(V; W) \times \mathcal{L}(V; W)$, $u \mapsto (u, u)$ の $\mathcal{H}(V; W)$ への制限, 写像 $\mathcal{H}(V; W) \times \mathcal{H}(V; W) \to \mathcal{H}(W; V) \times \mathcal{H}(W; V)$, $(v, w) \mapsto (\iota(v), \iota(w))$, および写像 f. 一つめと三つめの写像は無限回連続微分可能で, 帰納法の仮定と (4.9) により二つめの写像は $p-1$ 回連続微分可能である．従って (4.12) から $D\iota$ は $p-1$ 回連続微分可能になるため ι は p 回連続微分可能である．□

5 Riemann 積分

定義 5.1　有限閉区間 $[a, b]$ に対し, 有限実数列 $\Delta = (x_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ で $a = x_0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_{n-1} \leqq x_n = b$ であるものを $[a, b]$ の分割といい, $\max\{x_i - x_{i-1} | 1 \leqq i \leqq n\}$ をこの分割の粗さと呼んで, $|\Delta|$ で表す．
$[a, b]$ の分割 $(x_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ に対し, 実数列 $(t_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ で各 i に対して $x_{i-1} \leqq t_i \leqq x_i$ を満たすものを分割 $(x_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ と両立する代表系と呼ぶことにする．このとき集合 $\{(\Delta, \Xi) | \Delta$ は $[a, b]$ の分割で, Ξ は Δ と両立する代表系である.$\}$ を $\mathrm{PR}[a, b]$ で表すことにする．
$[a, b]$ からノルム空間 V への写像 f と $(\Delta, \Xi) = ((x_i)_{i=0,1,\ldots,n}, (t_i)_{i=1,2,\ldots,n}) \in \mathrm{PR}[a, b]$ に対し, $S(f; \Delta, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i)$ とおく．
V の要素 I で次の条件を満たすものが存在するとき, f は Riemann 積分可能であるという．

任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ で "$(\Delta, \Xi) \in \mathrm{PR}[a, b]$ に対し, $|\Delta| \leqq \delta \Rightarrow \|S(f; \Delta, \Xi) - I\| \leqq \varepsilon$" を満たすものがある．

このような $I \in V$ は存在してもただ一つだけで, これを $\int_a^b f$ または $\int_a^b f(x)dx$ で表し, f の $[a,b]$ での Riemenn 積分と呼ぶ.

命題 5.2 1) V, W をノルム空間, $u : V \to W$ を連続な線型写像とする. $f : [a,b] \to V$ が $[a,b]$ で Riemmann 積分可能ならば, 合成写像 $u \circ f : [a,b] \to W$ も Riemann 積分可能で, $\int_a^b u \circ f(x)dx = u(\int_a^b f(x)dx)$ が成り立つ.

2) $V_1, V_2, \dots, V_m$ をノルム空間とする. $f : [a,b] \to V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_m$ が $[a,b]$ で Riemann 積分可能であるためには各 $1 \leqq j \leqq m$ に対し, j-成分への射影 $p_j : V_1 \times \cdots \times V_m \to V_j$ との合成 $p_j \circ f : [a,b] \to V_j$ が Riemann 積分可能であることが必要十分である. このとき $\int_a^b f(x)dx = (\int_a^b p_1 \circ f(x)dx, \dots, \int_a^b p_m \circ f(x)dx)$ が成り立つ.

3) $f : [a,b] \to V$ が開区間 (a,b) において一定の値 v をとれば f は Riemann 積分可能で, $\int_a^b f(x)dx = (b-a)v$ である.

証明 1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ で "$(\Delta, \Xi) \in \mathrm{PR}[a,b]$ に対し, $|\Delta| \leqq \delta \Rightarrow \|S(f; \Delta, \Xi) - \int_a^b f(x)dx\| \leqq \frac{\varepsilon}{\|u\|}$" を満たすものをとる. $S(u \circ f; \Delta, \Xi) = u(S(f; \Delta, \Xi))$ だから $|\Delta| \leqq \delta$ ならば $\|S(u \circ f; \Delta, \Xi) - u(\int_a^b f(x)dx)\| \leqq \|u\| \cdot \|S(f; \Delta, \Xi) - \int_a^b f(x)dx\| \leqq \varepsilon$ となるため主張が成り立つ.
2) p_j は連続な線型写像だから 1) より必要性がわかる. 各 $p_j \circ f$ が Riemann 積分可能であるとすると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ で "$(\Delta, \Xi) \in \mathrm{PR}[a,b]$ と $1 \leqq j \leqq m$ に対し, $|\Delta| \leqq \delta \Rightarrow \|S(p_j \circ f; \Delta, \Xi) - \int_a^b p_j \circ f dx\| \leqq \varepsilon$" を満たすものがとれる. このとき $\|S(f; \Delta, \Xi) - (\int_a^b p_1 \circ f(x)dx, \dots, \int_a^b p_m \circ f(x)dx)\| = \max_{1 \leqq j \leqq m} \|S(p_j \circ f; \Delta, \Xi) - \int_a^b p_j \circ f dx\| \leqq \varepsilon$ より結果が得られる.
3) $(\Delta, \Xi) = ((x_i)_{i=0,1,\dots,n}, (t_i)_{i=1,2,\dots,n}) \in \mathrm{PR}[a,b]$ に対し, $p = \min\{i | \, x_i > a\}$, $q = \min\{i | \, x_i = b\}$ とおくと仮定から, $S(f; \Delta, \Xi) - (b-a)v = (x_p - a)(f(t_p) - v) + (b - x_{q-1})(f(t_q) - v)$ となる. $M = \max\{\|v\|, \|f(a)\|, \|f(b)\|\}$ とおくと, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $|\Delta| \leqq \frac{\varepsilon}{4M}$ ならば $\|S(f; \Delta, \Xi) - (b-a)v\| \leqq \frac{\varepsilon}{4M}(\|f(t_p) - v\| + \|f(t_q) - v\|) \leqq \varepsilon$ となるため f は Riemann 積分可能で, $\int_a^b f(x)dx = (b-a)v$ である. □

系 5.3 $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ と Riemann 積分可能な写像 $f, g : [a,b] \to V$ に対し, 写像 $\alpha f + \beta g : [a,b] \to V$, $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ は Riemann 積分可能で, $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$ が成り立つ.

証明 $\alpha f + \beta g$ は写像 $V \to V \times V$, $x \mapsto (f(x), g(x))$ と連続な線型写像 $u : V \times V \to V$, $u(x,y) = \alpha x + \beta y$ の合成である. 従って (5.2) の 1), 2) より結果が得られる. □

補題 5.4 $f : [a,b] \to V$ が Riemmann 積分可能であり, $M > 0$ が存在して任意の $x \in [a,b]$ に対して $\|f(x)\| \leqq M$ が成り立てば, $\|\int_a^b f(x)dx\| \leqq (b-a)M$ である.

証明 $(\Delta, \Xi) = ((x_i)_{i=0,1,\dots,n}, (t_i)_{i=1,2,\dots,n}) \in \mathrm{PR}[a,b]$ に対し, $\|S(f; \Delta, \Xi)\| \leqq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\|f(t_i)\| \leqq (b-a)M$ だから $|\Delta| \to 0$ とすれば結果が得られる. □

定理 5.5 V を Banach 空間とし, $f_k : [a,b] \to V$ は各 $k \in \boldsymbol{N}$ に対して Riemann 積分可能であるとする. $(f_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ が $[a,b]$ において一様に $f : [a,b] \to V$ に収束するならば, f は Riemann 積分可能で, 極限 $\lim_{k \to \infty} \int_a^b f_k(x)dx$ が存在して $\int_a^b f(x)dx$ に一致する.

証明 $(f_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ が一様に f に収束するため $N > 0$ で $k \geqq N$ ならば $\|f_k(x) - f(x)\| \leqq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ がすべての $x \in [a,b]$ に対して成り立つようなものがある. 従って $k, l \geqq N$ ならば $\|f_k(x) - f_l(x)\| \leqq \frac{\varepsilon}{(b-a)}$ となるため $I_k = \int_a^b f_k(x)dx$ とおくと (5.3), (5.4) から $\|I_k - I_l\| \leqq \varepsilon$ が成り立つ. 従って $(I_k)_{k=1,2,\dots}$ は Cauchy 列で, V の完備性から $\lim_{k \to \infty} I_k$ は存在し, 以下でこの値を I で表すことにする.
各 $k \in \boldsymbol{N}$ に対し, 仮定から任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta_k > 0$ で "$(\Delta, \Xi) \in \mathrm{PR}[a,b]$ が $|\Delta| \leqq \delta_k$ を満たせば $\|S(f_k; \Delta, \Xi) - I_k\| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$" が成り立つものがとれる. また $M > 0$ で $k \geqq M$ ならば $\|I_k - I\| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$ さらに $N > 0$

で $k \geqq N$ ならば $\|f_k(x) - f(x)\| \leqq \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$ がすべての $x \in [a,b]$ に対して成り立つようなものがある．このとき $\|S(f;\Delta,\Xi) - S(f_k;\Delta,\Xi)\| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$ が成り立つ．従って $k = \max\{M, N\}$ とおくと $(\Delta,\Xi) \in \mathrm{PR}[a,b]$ に対し，$|\Delta| \leqq \delta_k$ ならば $\|S(f;\Delta,\Xi) - I\| \leqq \|S(f;\Delta,\Xi) - S(f_k;\Delta,\Xi)\| + \|S(f_k;\Delta,\Xi) - I_k\| + \|I_k - I\| \leqq \varepsilon$ となるため $\int_a^b f(x)dx = I$ が得られる． □

命題 5.6 $f : [a,b] \to V$ が Riemann 積分可能ならば有界である．すなわち，$M \in \boldsymbol{R}$ ですべての $x \in [a,b]$ に対し，$\|f(x)\| \leqq M$ となるものがある．

証明 仮定から $\delta > 0$ で $(\Delta,\Xi) = ((x_i)_{i=0,1,\dots,n}, (t_i)_{i=1,2,\dots,n}) \in \mathrm{PR}[a,b]$ が $|\Delta| < \delta$ を満たせば，$\|S(f;\Delta,\Xi)\| \leqq \|\int_a^b f(x)dx\| + 1$ となるものがある．そこで $|\Delta| < \delta$ を満たす分割 $\Delta = (x_i)_{i=0,1,\dots,n}$ を一つ固定する．もし，ある区間 $[x_{k-1}, x_k]$ で f が有界でないとすると $t_i\ (i \neq k)$ をすべて固定して，$t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ の選び方をかえれば $(x_k - x_{k-1})\|f(t_k)\| - \|\sum_{i \neq k}(x_i - x_{i-1})f(t_i)\| \leqq \|S(f;\Delta,\Xi)\| \leqq \|\int_a^b f(x)dx\| + 1$ より，この左辺はいくらでも大きくなるため矛盾が生じる．従って f は各区間 $[x_{k-1}, x_k]$ で有界だから $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n}[x_{k-1}, x_k]$ において有界である． □

$a \leqq c \leqq b$ のとき $(\Delta_1,\Xi_1) = ((x_i)_{i=0,1,\dots,n}, (t_i)_{i=1,2,\dots,n}) \in \mathrm{PR}[a,c]$ と $(\Delta_2,\Xi_2) = ((x'_i)_{i=0,1,\dots,m}, (t'_i)_{i=1,2,\dots,m}) \in \mathrm{PR}[c,b]$ に対し，$x''_i = x_i\ (0 \leqq i \leqq n)$, $x''_i = x'_{i-n}\ (n \leqq i \leqq m+n)$ で定義される $[a,b]$ の分割 $(x''_i)_{i=0,1,\dots,m+n}$ を $\Delta_1 + \Delta_2$ で表し，$t''_i = t_i\ (1 \leqq i \leqq n)$, $t''_i = t'_{i-n}\ (n+1 \leqq i \leqq m+n)$ で定義される $\Delta_1 + \Delta_2$ と両立する代表系 $(t''_i)_{i=1,2,\dots,m+n}$ を $\Xi_1 + \Xi_2$ で表すことにすると，$S(f;\Delta_1+\Delta_2,\Xi_1+\Xi_2) = S(f;\Delta_1,\Xi_1) + S(f;\Delta_2,\Xi_2)$ である．

命題 5.7 1) $c \in [a,b]$ に対し，$f : [a,b] \to V$ が $[a,c]$ と $[c,b]$ において Riemann 積分可能ならば f は $[a,b]$ において Riemann 積分可能で，$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ が成り立つ．

2) V が Banach 空間の場合，f が $[a,b]$ において Riemann 積分可能ならば f は $[a,c]$ と $[c,b]$ において Riemann 積分可能である．

証明 1) (5.6) より，f は $[a,c]$, $[c,b]$ で有界だから $\|f(x)\|$ の $[a,b]$ における上界 M をとる．仮定から任意の $\varepsilon > 0$ に対し $0 < \delta \leqq \frac{\varepsilon}{4M}$ で次の条件を満たすものが取れる．“$(\Delta_1,\Xi_1) \in \mathrm{PR}[a,c]$, $(\Delta_2,\Xi_2) \in \mathrm{PR}[c,b]$ が $|\Delta_1|, |\Delta_2| \leqq \delta$ を満たせば $\|S(f;\Delta_1,\Xi_1) - \int_a^c f(x)dx\| \leqq \frac{\varepsilon}{4}$ かつ $\|S(f;\Delta_2,\Xi_2) - \int_c^b f(x)dx\| \leqq \frac{\varepsilon}{4}$”．$|\Delta| \leqq \delta$ を満たす $(\Delta,\Xi) = ((x_i)_{i=0,1,\dots,n}, (t_i)_{i=1,2,\dots,n}) \in \mathrm{PR}[a,b]$ に対し $\Delta_1 = (y_i)_{i=0,1,\dots,l}$, $\Delta_2 = (z_i)_{i=0,1,\dots,n-l+1}$ を $x_{l-1} \leqq c \leqq x_l$ ならば $y_i = x_i\ (i < l)$, $y_l = z_0 = c$, $z_i = x_{i+l-1}\ (i > 0)$ で定め，$\Xi_1 = (p_i)_{i=1,2,\dots,l}$, $\Xi_2 = (q_i)_{i=1,2,\dots,n-l+1}$ を $p_i = t_i\ (i < l)$, $p_l = q_1 = c$, $q_i = t_{i+l-1}\ (i > 1)$ で定めれば，$(\Delta_1,\Xi_1) \in \mathrm{PR}[a,c]$, $(\Delta_2,\Xi_2) \in \mathrm{PR}[c,b]$ であり，$|\Delta_1|, |\Delta_2| \leqq \delta$ を満たす．$S(f;\Delta,\Xi) - S(f;\Delta_1,\Xi_1) - S(f;\Delta_2,\Xi_2) = (x_l - x_{l-1})(f(t_l) - f(c))$ に注意すると，$\|S(f;\Delta,\Xi) - \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx\| \leqq (x_l - x_{l-1})\|(f(t_l) - f(c))\| + \|S(f;\Delta_1,\Xi_1) - \int_a^c f(x)dx\| + \|S(f;\Delta_2,\Xi_2) - \int_c^b f(x)dx\| \leqq \varepsilon$ が得られるため，主張が示される．

2) 各 $n \geqq 1$ に対して，$(\Delta_1^n,\Xi_1^n) = ((a + \frac{c-a}{n}i)_{i=0,1,\dots,n}, (a + \frac{c-a}{n}i)_{i=1,2,\dots,n}) \in \mathrm{PR}[a,c]$, $(\Delta_2^n,\Xi_2^n) = ((c + \frac{b-c}{n}i)_{i=0,1,\dots,n}, (c + \frac{b-c}{n}i)_{i=1,2,\dots,n}) \in \mathrm{PR}[c,b]$ とおく．$S_{k,n} = S(f;\Delta_k^n,\Xi_k^n)\ (k = 1,2)$ とおいて，$(S_{k,n})_{n=1,2,\dots}$ は V の Cauchy 列になることを示す．$I = \int_a^b f(x)dx$ とおき，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ で “$(\Delta,\Xi) \in \mathrm{PR}[a,b]$ に対し，$|\Delta| \leqq \delta$ ならば $\|S(f;\Delta,\Xi) - I\| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ ”を満たすものをとる．$n, m > \frac{b-a}{\delta}$ ならば $\|S(f;\Delta_1^n + \Delta_2^m, \Xi_1^n + \Xi_2^m) - I\| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ だから $\|S_{1,n} - S_{1,m}\| = \|S(f;\Delta_1^n + \Delta_2^m, \Xi_1^n + \Xi_2^m) - S(f;\Delta_1^m + \Delta_2^m, \Xi_1^m + \Xi_2^m)\| \leqq \varepsilon$ が成り立つ．同様に，$\|S_{2,n} - S_{2,m}\| \leqq \varepsilon$ が得られる．従って $(S_{k,n})_{n=1,2,\dots}\ (k = 1,2)$ は V の Cauchy 列だから V の完備性により，これらは収束する．そこで，$\lim_{n\to\infty} S_{k,n} = I_k$ とおく．

任意の $\varepsilon > 0$ に対し，上と同様に $\delta > 0$ をとり，n を $n > \frac{b-a}{\delta}$ かつ $\|S_{k,n} - I_k\| \leqq \varepsilon\ (k = 1,2)$ となるようにとっておく．このとき $(\Delta_1,\Xi_1) \in \mathrm{PR}[a,c]$ が $|\Delta_1| \leqq \delta$ を満たせば，$\|S(f;\Delta_1,\Xi_1) - I_1\| \leqq \|S(f;\Delta_1 + \Delta_2^n, \Xi_1 + \Xi_2^n) - S(f;\Delta_1^n + \Delta_2^n, \Xi_1^n + \Xi_2^n)\| + \|S(f;\Delta_1^n,\Xi_1^n) - I_1\| \leqq 2\varepsilon$ となるため，f は $[a,c]$ で Riemann 積分可能であり，$\int_a^c f(x)dx = I_1$ が成り立つ．同様にして f は $[c,b]$ で Riemann 積分可能で，$\int_c^b f(x)dx = I_2$ が成り立つ． □

注意 5.8 1) 上の結果より V が Banach 空間で $f:[a,b]\to V$ が $[a,b]$ において Riemann 積分可能なとき, f は $[a,b]$ に含まれる任意の閉区間で Riemann 積分可能である.

2) $f:[a,b]\to V$ が $[a,b]$ において Riemann 積分可能なとき, $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ と定めることにすれば, V が Banach 空間で f が $[a,b]$ を含む閉区間 $[p,q]$ で Riemann 積分可能ならば任意の $a,b,c\in[p,q]$ に対して上の 1) の等式が成り立つ.

定義 5.9 1) $[a,b]$ の分割 $(x_i)_{i=0,1,\dots,n}$ が存在して, 各開区間 (x_{i-1},x_i) において一定の値をとる写像 $f:[a,b]\to V$ を階段関数と呼ぶ.

2) 写像 $f:[a,b]\to V$ と $c\in[a,b)$ に対し, f の c における右極限が $\alpha\in V$ であるとは, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, “$x\in(c,c+\delta)\Rightarrow\|f(x)-\alpha\|\leqq\varepsilon$ ”を満たす $\delta>0$ が存在することをいう. この α を $f(c+)$ で表すことにする. 同様に $c\in(a,b]$ に対し, f の c における左極限 $f(c-)$ を, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, “$x\in(c-\delta,c)\Rightarrow\|f(x)-\alpha\|\leqq\varepsilon$ ”を満たす $\delta>0$ が存在するような $\alpha\in V$ であると定義する. 言い換えれば, $i:(c,b]\to[a,b]$, $j:[a,c)\to[a,b]$ を包含写像とするとき, $f(c+)=\lim\limits_{x\to c} f\circ i(x)$, $f(c-)=\lim\limits_{x\to c} f\circ j(x)$ である. これらの極限を f の片側極限と呼ぶ.

3) 写像 $f:[a,b]\to V$ が任意の $c\in[a,b)$ に対し, c における右極限をもち, 任意の $c\in(a,b]$ に対し, c における左極限をもつとき f を regulated 写像と呼ぶことにする.

注意 5.10 1) $f:[a,b]\to V$ が連続写像または階段関数ならば regulated である. また, $V=\boldsymbol{R}$ の場合, f が単調増加または単調減少ならば regulated である.

2) $f:[a,b]\to V$ が階段関数ならば (5.2) の 3) と (5.7) の 1) から f は $[a,b]$ において Riemann 積分可能である.

(Y,d) を距離空間, S を Y の部分集合とするとき $\delta(S)=\sup\{d(x,y)\,|\,x,y\in S\}$ とおき, $\delta(S)$ を S の直径という.

定理 5.11 1) 写像 $f:[a,b]\to V$ が regulated ならば区間 $[a,b]$ で f に一様に収束する階段関数の列 $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ が存在する. 従って, $[a,b]$ から V への階段関数全体の集合の $\mathcal{B}([a,b];V)$ における閉包は $\mathcal{B}([a,b];V)$ の regulated 写像をすべて含む.

2) V が Banach 空間のとき, $f:[a,b]\to V$ に一様収束する regulated 写像の列 $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ が存在すれば f も regulated である. 従って, $\mathcal{B}([a,b];V)$ の regulated 写像全体よりなる集合は閉集合である.

証明 1) f が regulated であるとする. 各 $n\in\boldsymbol{N}$ に対し, 階段関数 $f_n:[a,b]\to V$ で $\|f(x)-f_n(x)\|\leqq\frac{1}{n}$ がすべての $x\in[a,b]$ に対して成り立つものを次のように構成する. 任意の $x\in[a,b]$ に対し, $f(x+)$ と $f(x-)$ が存在することから, x を含む開区間 $V(x)=(p(x),q(x))$ で条件 “$s,t\in(p(x),x)\cap[a,b]$ または $s,t\in(x,q(x))\cap[a,b]$ ならば $\|f(s)-f(t)\|\leqq\frac{1}{n}$ ”を満たすものがとれる. $[a,b]\subset\bigcup\limits_{x\in[a,b]}V(x)$ で $[a,b]$ はコンパクトだから $x_1,x_2,\dots,x_l\in[a,b]$ で $[a,b]\subset\bigcup\limits_{i=1}^{l}V(x_i)$ となるものがある. このとき不必要なものを除いて, a, b を含むような $V(x_i)$ はそれぞれ一つずつであるとする. $a,b,x_i,p(x_i),q(x_i)$, $(1\leqq i\leqq l)$ を要素とする集合を $\{c_0,c_1,\dots,c_m\}$ $(c_0<c_1<\cdots<c_m)$ とすると $V(x_i)$ のとり方より, $c_1=a$, $c_{m-1}=b$ である. $1\leqq j\leqq m-1$ ならば各 c_j はある $V(x_i)$ に含まれているため $c_{j+1}\in V(x_i)$ または $c_{j+1}=q(x_i)$ である. 従って $s,t\in(c_j,c_{j+1})\cap[a,b]$ ならば $\|f(s)-f(t)\|\leqq\frac{1}{n}$ だから, $x=c_j$ となる j があるとき, $f_n(x)=f(c_j)$ とし, $x\in(c_j,c_{j+1})$ ならば $f_n(x)=f(\frac{c_j+c_{j+1}}{2})$ で f_n を定めればよい.
2) V は Banach 空間で, f に一様収束する regulated 写像の列 $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ が存在すると仮定する. 任意の $c\in[a,b]$ に対し, $f(c+)$ と $f(c-)$ の存在を示すために, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $s,t\in(c,c+\delta)$ または $s,t\in(c-\delta,c)$ ならば $\|f(s)-f(t)\|\leqq\varepsilon$ となるような $\delta>0$ があることを示す. 仮定からすべての $x\in[a,b]$ に対して $\|f(x)-f_n(x)\|\leqq\frac{\varepsilon}{3}$ を満たすような $n\in\boldsymbol{N}$ がある. $f_n(c+)$ と $f_n(c-)$ が存在することから $\delta>0$ で $s,t\in(c,c+\delta)$ または $s,t\in(c-\delta,c)$ ならば $\|f_n(s)-f_n(t)\|\leqq\frac{\varepsilon}{3}$ となるものがあり, この δ に対して上の主張が成り立つ. 従って, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $\delta(f((c,b]\cap(c-\delta,c+\delta)))\leqq\varepsilon$, $\delta(f([a,c)\cap(c-\delta,c+\delta)))\leqq\varepsilon$ となるような $\delta>0$ があるため, 次の補題より $f(c+)$ と $f(c-)$ の存在がわかる. □

補題 5.12 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, A を X の部分集合とし, $a \in X$ は A の閉包に属し, $\mathcal{V}$ を X における a の1つの基本近傍系とする. (Y, d) を距離空間, $f : A \to Y$ を写像とすると, 次が成り立つ.
1) $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在すれば, $\inf_{V \in \mathcal{V}} \delta(f(V \cap A)) = 0$ である.
2) a が高々可算な基本近傍系をもち, (Y, d) が完備ならば上の逆が成り立つ.

証明 1) $\lim_{x \to a} f \circ i(x) = p$ とすると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 近傍 $V \in \mathcal{V}$ で $x \in V \cap A$ ならば $d(f(x), p) < \frac{\varepsilon}{2}$ となるものがある. 従って, $x, y \in V \cap A$ ならば $d(f(x), f(y)) \leqq d(f(x), p) + d(p, f(y)) < \varepsilon$ だから $\delta(f(V \cap A)) \leqq \varepsilon$ となって, 主張が成り立つ.
2) $(W_j)_{j \in \boldsymbol{N}}$ を高々可算な a の基本近傍系とすると, $W_j \supset W_{j+1}$ と仮定してよい. 各 $i \in \boldsymbol{N}$ に対して $V_i \in \mathcal{V}$ で $\delta(f(V_i \cap A)) \leqq 2^{-i}$ を満たすものがある. 各 $V_i \cap W_i \cap A$ から点 p_i を選ぶと Y の点列 $(f(p_i))_{i \in \boldsymbol{N}}$ は Cauchy 列である. V の完備性より, この極限は存在して p とする.
任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $x, y \in V \cap A$ ならば $d(f(x), f(y)) \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ となるような $V \in \mathcal{V}$ があり, $W_j \subset V$ となる $j \in \boldsymbol{N}$ がある. $i \geqq j$ かつ $d(f(p_i), p) \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ となるような i をとれば, $x \in V_i \cap W_i$ ならば $d(f(x), p) \leqq d(f(x), f(p_i)) + d(f(p_i), p) \leqq \varepsilon$ が成り立つため $\lim_{x \to a} f \circ i(x) = p$ である. □

上の結果に (5.5), (5.10) の 2) を用いると, 次のことがわかる.

定理 5.13 V が Banach 空間で写像 $f : [a, b] \to V$ が regulated ならば f は $[a, b]$ において Riemann 積分可能である.

6 原始関数と積分

定義 6.1 I を $\boldsymbol{R}$ の区間 (連結部分集合), V をノルム空間とする. 写像 $f : I \to V$ に対し, 写像 $g : I \to V$ と I の高々可算な集合 S が存在して, 任意の $x \in I - S$ で g は微分可能であり, $Dg(x) = f(x)$ が成り立つとき g を f の原始関数という.

命題 6.2 $g_1, g_2 : I \to V$ がともに連続で f の原始関数であれば $g_1 - g_2$ は定数値写像である.

証明 S_i $(i = 1, 2)$ を高々可算な集合とし, g_i は任意の $x \in I - S_i$ で微分可能であり, $Dg_i(x) = f(x)$ が成り立つとすると, $g_1 - g_2$ は任意の $x \in I - S_1 \cup S_2$ で微分可能であり, $D(g_1 - g_2)(x) = 0$ が成り立つ. $c \in I$ を固定して, 任意の $x \in I$ に対し, I の連結性から x と c を両端とする閉区間は I に含まれるため, この区間と $g_1 - g_2$ に対して (3.2) を用いると $g_1(x) - g_2(x) = g_1(c) - g_2(c)$ がわかる. □

定理 6.3 V が Banach 空間ならば regulated 写像 $f : [a, b] \to V$ は連続な原始関数をもつ.

証明 (5.11) の 1) により, 区間 $[a, b]$ で f に一様に収束する階段関数の列 $(f_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ が存在する. もし, 各 f_n が原始関数 g_n をもつことが示せれば, $g_n(a) = 0$ であるようにできるから (3.7) により, $g(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x)$ で定義される $g : [a, b] \to V$ は f の原始関数になる.
$f : [a, b] \to V$ を階段関数とし, $[a, b]$ の分割 $(x_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ に対して各開区間 (x_{i-1}, x_i) において一定の値 c_i をとるとする. そこで $g : [a, b] \to V$ を $x \in [x_{i-1}, x_i]$ のとき $g(x) = c_i(x - x_{i-1}) + \sum_{k=1}^{i-1} c_k(x_k - x_{k-1})$ で定めれば g は f の原始関数であることが確かめられる. □

定義 6.4 (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする. 写像 $f : X \to Y$ に対し, $M > 0$ が存在して任意の $x, y \in X$ に対して $d_Y(f(x), f(y)) \leqq M d_X(x, y)$ が成り立つとき, f は Lipschitz 連続であるという.

命題 6.5 V が Banach 空間で $f : [a, b] \to V$ が $[a, b]$ において Riemann 積分可能なとき, $F : [a, b] \to V$ を

$F(t) = \int_a^t f(x)dx$ により定義すると F は Lipschitz 連続である．また f が $p \in (a,b)$ で連続ならば F は p で微分可能であり，$DF(p) = f(p)$ が成り立つ．

証明　まず (5.6) により，$\|f(x)\| \leqq M$ がすべての $x \in [a,b]$ に対して成り立つような $M > 0$ をとる．$t, p \in [a,b]$ に対し，上の注意から $F(t) - F(p) = \int_p^t f(x)dx$ が成り立つため，(5.4) から $\|F(t) - F(p)\| = \|\int_p^t f(x)dx\| \leqq |t-p|M$ を得る．f が $p \in (a,b)$ で連続ならば任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ で "$|t-p| \leqq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(p)\| \leqq \frac{\varepsilon}{b-a}$" を満たすものがあるから $|t-p| \leqq \delta$ ならば $\|F(t) - F(p) - f(p)(t-p)\| = \|\int_p^t (f(x) - f(p))dx\| \leqq |t-p|\varepsilon$ である．これは F は p で微分可能であり，$DF(p) = f(p)$ となることを意味する．□

系 6.6　1) $f : [a,b] \to V$ が Riemann 積分可能で，高々可算個の点を除いた $[a,b]$ の点において連続ならば $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ で定義される写像 $F : [a,b] \to V$ は f の原始関数である．

2) f を 1) と同様とすると，G が f の原始関数ならば $G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx$ が成り立つ．

証明　1) は (6.5) から明らか．(6.2) と 1) から $G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ で 2) が示される．□

命題 6.7　(置換積分法) $\varphi : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ を連続関数で，regulated 関数 φ' の原始関数とし，f を $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ を含む区間 $[c,d]$ から Banach 空間 V への regulated 写像とする．このとき f が連続であるか，φ が単調ならば $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy$ が成り立つ．

証明　まず仮定と regulated 写像の定義から $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ は regulated 写像である．g を f の原始関数とすれば上式の両辺は $g(\varphi(b)) - g(\varphi(a))$ に等しくなる．□

命題 6.8　(部分積分法) $f : [a,b] \to V$, $g : [a,b] \to W$ は連続写像で，regulated 写像 f', g' の原始関数とし，$u : V \times W \to Z$ を連続な双線型写像とすると，$\int_a^b u(f(x), g'(x))dx = u(f(b), g(b)) - u(f(a), g(a)) - \int_a^b u(f'(x), g(x))$ が成り立つ．

証明　$u(f(x), g'(x))$, $u(f'(x), g(x))$ はともに regulated であり，(2.7) から $u(f(x), g(x))$ は $u(f(x), g'(x)) + u(f'(x), g(x))$ の原始関数である．従って (6.6) から結果を得る．□

命題 6.9　$f : [a,b] \to V$ を regulated 写像とすると写像 $\|f\| : [a,b] \to V$, $x \mapsto \|f(x)\|$ も regulated で，$\|\int_a^b f(x)dx\| \leqq \int_a^b \|f(x)\|dx$ が成り立つ．

証明　写像 $\|f\|$ が regulated であることはノルムの連続性から明らか．任意の $(\Delta, \Xi) \in \mathrm{PR}[a,b]$ に対し，三角不等式から $\|S(f; \Delta, \Xi)\| \leqq S(\|f\|; \Delta, \Xi)$ となるため結果が得られる．□

命題 6.10　V をノルム空間，W を Banach 空間，U を V の開集合とする．$f : [a,b] \times U \to W$ が連続写像ならば $F(s,t,z) = \int_s^t f(x,z)dx$ で定義される写像 $F : [a,b] \times [a,b] \times U \to W$ は連続である．

証明　$G : [a,b] \times U \to W$ を $G(s,z) = \int_a^s f(x,z)dx$ で定めれば $F(s,t,z) = G(t,z) - G(s,z)$ だから G が連続であることを示せばよい．$(c,p) \in [a,b] \times U$ における f の連続性から任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta_c > 0$ で，"$|x - c| \leqq \delta_c$ かつ $\|z - p\| \leqq \delta_c$ ならば $\|f(x,z) - f(c,p)\| \leqq \frac{\varepsilon}{2(b-a+1)}$" を満たすものがある．$[a,b] \subset \bigcup_{c \in [a,b]} (c - \delta_c, c + \delta_c)$ だから $[a,b]$ のコンパクト性から $c_1, c_2, \ldots, c_n \in [a,b]$ で，$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^n (c_i - \delta_{c_i}, c_i + \delta_{c_i})$ となるものがある．$\delta = \min\{\delta_{c_1}, \delta_{c_2}, \ldots, \delta_{c_n}\}$ とおくと $p \in U$ に対し，$\|z - p\| \leqq \delta$ ならば $|x - c_i| \leqq \delta$ となる i があるため $\|f(x,z) - f(x,p)\| \leqq \|f(x,z) - f(c_i,p)\| + \|f(x,p) - f(c_i,p)\| \leqq \frac{\varepsilon}{b-a+1}$ が成り立つ．$G(s,z) - G(c,p) = \int_a^s (f(x,z) - f(x,p))dx + \int_c^s f(x,p)dx$ だから $[a,b]$ における $\|f(x,p)\|$ ($p \in U$ は固定) の最大値を M_p とすれば $|s - c| \leqq \frac{\varepsilon}{M_p(b-a+1)}$ かつ $\|z - p\| \leqq \delta$ ならば $\|G(s,z) - G(c,p)\| \leqq \|\int_a^s (f(x,z) - f(x,p))dx\| + \|\int_c^s f(x,p)dx\| \leqq \varepsilon$ だから G は (c,p) において連続である．□

命題 6.11　(6.10) と同じ仮定のもとで f が二番目の変数に関して偏微分可能で, $D_2f : [a,b]\times U \to \mathcal{L}(V;W)$ が連続ならば $g(z)=\int_a^b f(x,z)dx$ で定義される写像 $g:U\to W$ は U において連続微分可能であり $Dg(p)=\int_a^b D_2f(x,p)dx$ が成り立つ.

証明　D_2f の連続性から (6.10) と同様にして, 任意の $p\in U$ と $\varepsilon>0$ に対し, $\delta>0$ で $\|z-p\|\leqq\delta$ ならば任意の $x\in[a,b]$ に対し, $\|D_2f(x,z)-D_2f(x,p)\|\leqq\frac{\varepsilon}{b-a}$ が成り立つものがある. 従って $\|t\|\leqq\delta$ ならば (3.4) から $\|f(x,p+t)-f(x,p)-D_2f(x,p)(t)\|\leqq\|t\|\sup\limits_{0<t<1}\|D_2f(x,tp)-D_2f(x,p)\|\leqq\frac{\varepsilon}{b-a}\|t\|$ が成り立つ.
故に $\|t\|\leqq\delta$ ならば $\|g(p+t)-g(p)-\int_a^b D_2f(x,p)(t)\|\leqq\varepsilon$ が成り立ち, これは g が p において微分可能で, $Dg(p)(t)=\int_a^b D_2f(x,p)(t)dx$ であることを意味する. (5.2) の 1) から $\int_a^b D_2f(x,p)(t)dx=(\int_a^b D_2f(x,p)dx)(t)$ だから上式から $Dg(p)=\int_a^b D_2f(x,p)dx$ が得られる. (6.10) により, Dg は連続である. □

補題 6.12　I を $\boldsymbol{R}$ の開区間とし, V, W, Z をノルム空間とする. $f:I\to V$, $g:I\to W$ を I において p 回微分可能な写像, $u:V\times W\to Z$ を連続な双線型写像とすると, $u(f(x),D^pg(x))-(-1)^pu(D^pf(x),g(x))=D(\sum\limits_{k=1}^{p-1}(-1)^ku(D^kf(x),D^{p-1-k}g(x)))$ である.

証明　(2.7) から右辺を計算すれば左辺に等しくなることがわかる. □

命題 6.13　I を $\boldsymbol{R}$ の開区間とし, V を Banach 空間とする. $f:I\to V$ を I において p 回連続微分可能な写像とすれば任意の $x,a\in I$ に対し, $f(x)=f(a)+\sum\limits_{k=1}^{p-1}(-1)^k\frac{(x-a)^k}{k!}D^kf(a)+\int_a^x\frac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!}D^pf(t)dt$ が成り立つ.

証明　(6.12) を $g(t)=\frac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!}$ と双線型写像 $\boldsymbol{R}\times V\to V$, $(\lambda,v)\mapsto\lambda v$ に対して用いると, $-(-1)^p\frac{(x-t)^{p-1}}{(p-1)!}D^pf(t)=D(\sum\limits_{k=1}^{p-1}(-1)^{p-1}\frac{(x-t)^k}{k!}D^kf(t))$ を得る. この両辺を t に関して a から x まで積分すれば結果が得られる. □

定理 6.14　(Taylor の公式) V をノルム空間, W を Banach 空間とし, U を V の開集合とする. 写像 $f:U\to W$ は U において p 回連続微分可能で $x,x+t\in U$ に対し, x と $x+t$ を結ぶ線分が U に含まれるならば, $f(x+t)=f(x)+\sum\limits_{k=1}^{p-1}(-1)^k\frac{1}{k!}D^kf(x)(t^{(k)})+(\int_0^1\frac{(1-\theta)^{p-1}}{(p-1)!}D^pf(x+\theta t)d\theta)(t^{(p)})$ が成り立つ. ただし, $t^{(k)}=(t,t,\dots,t)$ (k 個) とする. 特に, 任意の $\varepsilon>0$ に対して $r>0$ で, $\|t\|\leqq r$ ならば $\|f(x+t)-f(x)-\sum\limits_{k=1}^{p}(-1)^k\frac{1}{k!}D^kf(x)(t^{(k)})\|\leqq\varepsilon\|t\|^p$ を満たすものがある.

証明　まず $\delta>0$ を $\theta\in(-\delta,1+\delta)$ ならば $x+\theta t\in U$ となるようにとっておく. $g(\theta)=f(x+\theta t)$ により定義される写像 $g:(-\delta,1+\delta)\to W$ は $(-\delta,1+\delta)$ において p 回連続微分可能で, k による帰納法で $D^kg(\theta)=D^kf(x+\theta t)(t^{(k)})$ となることが示される. (6.13) を g に用いると, はじめの公式が得られる. D^pf の連続性から r は $\theta\in[0,1]$, $\|t\|\leqq r$ ならば $\|D^pf(x+\theta t)-D^pf(x)\|\leqq p!\varepsilon$ となるようにとれる. このとき, $\|\frac{(1-\theta)^{p-1}}{(p-1)!}D^pf(x+\theta t)-\frac{(1-\theta)^{p-1}}{(p-1)!}D^pf(x)\|\leqq p\varepsilon(1-\theta)^{p-1}$ となる. 従って, (6.9) から $\|\int_0^1\frac{(1-\theta)^{p-1}}{(p-1)!}D^pf(x+\theta t)d\theta-\frac{1}{(p-1)!}D^pf(x)\|\leqq\varepsilon$ が得られるため (1.14) の 1) とはじめの公式より, 二番目の不等式が示される. □

命題 6.15　V をノルム空間, U を V の開集合とする. 実数値関数 $f:U\to\boldsymbol{R}$ は U において 2 回連続微分可能で $a\in U$ に対し, $Df(a)=0$ であるとする.

1) $D^2f(a)(s_1,s_1)>0$ となる $s_1\in V$ と, $D^2f(a)(s_2,s_2)<0$ となる $s_2\in V$ があれば f は a において極大でも極小でもない.

2) $\inf\limits_{\|t\|=1}D^2f(a)(t,t)>0$ ならば f は a において極小になる.

3) $\sup\limits_{\|t\|=1}D^2f(a)(t,t)<0$ ならば f は a において極大になる.

証明 1) 任意の $r > 0$ に対し, $f(x_1) > f(a)$, $f(x_2) < f(a)$ となる $x_1, x_2 \in B_V(a;r) \cap U$ が存在することを示せばよい. 必要なら s_1, s_2 をスカラー倍したものでおきかえることにより, $\|s_1\| = \|s_2\| = 1$ としてよい. $0 < \varepsilon < \min\{\frac{1}{2}D^2(a)(s_1,s_1), -\frac{1}{2}D^2(a)(s_2,s_2)\}$ に対し, (6.14) から $0 < r' < r$ で $0 < |c| \leqq r'$ ならば $f(a+cs_1) - f(a) \geqq c^2(\frac{1}{2}D^2(a)(s_1,s_1) - \varepsilon) > 0$ かつ $f(a+cs_2) - f(a) \leqq c^2(\frac{1}{2}D^2(a)(s_2,s_2) + \varepsilon) < 0$ を満たすものがある. 従って $x_i = a + r's_i$ とおけばよい.

2) $A = \inf\limits_{\|t\|=1} D^2(a)(t,t) > 0$ とおく. (6.14) から $r > 0$ で $0 < \|t\| \leqq r$ ならば

$$f(a+t) - f(a) \geqq \|t\|^2 \left(\tfrac{1}{2}D^2(a)(\tfrac{1}{\|t\|}t, \tfrac{1}{\|t\|}t) - \tfrac{A}{2}\right) > 0$$

となるものがあるため f は a において極小になる. 3) も同様にして示される. □

7 陰関数定理

補題 7.1 $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, (Y, d) を完備距離空間とし, V を中心 $y_0 \in Y$ 半径 $\beta > 0$ の Y における開球 $B(y_0\,;\beta)$ とする. 連続写像 $v : X \times V \to Y$ に対し, $0 \leqq k < 1$ である k が存在して, すべての $x \in X$, $y_1, y_2 \in V$ に対し, $d(v(x,y_1), v(x,y_2)) \leqq kd(y_1,y_2)$ および $d(v(x,y_0), y_0) < \beta(1-k)$ が成り立つとする. このとき, 写像 $f : X \to V$ ですべての $x \in X$ に対し, $f(x) = v(x, f(x))$ を満たすものがただ一つ存在する. さらに, この写像は連続であり, ある $x_0 \in X$ に対し, $v(x_0, y_0) = y_0$ ならば $f(x_0) = y_0$ である.

証明 各 $x \in X$ に対し, Y の点列 $(f_n(x))_{n \in \boldsymbol{N}}$ を帰納的に $f_0(x) = y_0$, $f_n(x) = v(x, f_{n-1}(x))$ $(n \geqq 1)$ により定める. $f_0(x), \ldots, f_{n-1}(x) \in V$ であると仮定する.
$d(f_m(x), f_{m-1}(x)) = d(v(x, f_{m-1}(x)), v(x, f_{m-2}(x))) \leqq kd(f_{m-1}(x), f_{m-2}(x))$ より
$d(f_m(x), f_{m-1}(x)) \leqq k^{m-1}d(f_1(x), y_0)$ を得る. 従って,
$d(f_{m+n}(x), f_m(x)) \leqq \sum\limits_{i=1}^{n} d(f_{m+i}(x), f_{m+i-1}(x)) \leqq (\sum\limits_{i=1}^{n} k^{m+i-1})d(f_1(x), y_0)$ より,
$d(f_{m+n}(x), f_m(x)) \leqq \frac{1-k^n}{1-k}k^m d(f_1(x), y_0) \leqq \beta k^m(1-k^n)$ が成り立つ. $m = 0$ とすれば上式から $d(f_n(x), y_0) \leqq \beta(1-k^n) < \beta$ だから $f_n(x) \in V$ であり, $(f_n(x))_{n \in \boldsymbol{N}}$ が Y の Cauchy 列になることがわかる. Y の完備性から $(f_n(x))_{n \in \boldsymbol{N}}$ は各 $x \in X$ に対して収束して, $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ とおくとき $f(x) \in V$ である. 実際, 上式で $m = 0$, $n \to \infty$ とすれば $d(f(x), y_0) \leqq \frac{1}{1-k}d(f_1(x), y_0) < \beta$ が成り立つ.
写像 $f : X \to V$, $x \mapsto f(x)$ は連続であることを示すために $p \in X$ と $\varepsilon > 0$ をとる. $d(f_{m+n}(x), f_m(x)) \leqq \beta k^m(1-k^n)$ において $n \to \infty$ とすれば $d(f(x), f_m(x)) \leqq \beta k^m$ が任意の $x \in X$ に対して成り立つため $\beta k^{m_0} < \frac{\varepsilon}{3}$ となるように $m_0 \in \boldsymbol{N}$ をとれば任意の $x \in X$ に対して $d(f(x), f_{m_0}(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ である. 一方, v が連続であることから, n による帰納法で各 $f_n : X \to V$ は連続になることがわかるため p の近傍 W で "$x \in W \Rightarrow d(f_{m_0}(x), f_{m_0}(p)) < \frac{\varepsilon}{3}$" を満たすものがある. 従って $x \in W$ ならば $d(f(x), f(p)) \leqq d(f(x), f_{m_0}(x)) + d(f_{m_0}(x), f_{m_0}(p)) + d(f_{m_0}(p), f(p)) < \varepsilon$ が成り立つため f は任意の $p \in X$ で連続である.
$f_n(x) = v(x, f_{n-1}(x))$ から $n \to \infty$ として $f(x) = v(x, f(x))$ を得る. $v(x_0, y_0) = y_0$ であれば, $f_0(x_0) = y_0$ より, n による帰納法ですべての n に対して $f_n(x_0) = y_0$ となることは容易に示されるため $f(x_0) = y_0$ である.
$y_1, y_2 \in X$ が $y_1 = v(x, y_1)$, $y_2 = v(x, y_2)$ を満たせば, $d(y_1, y_2) = d(v(x, y_1), v(x, y_2)) \leqq kd(y_1, y_2)$ より, $(1-k)d(y_1, y_2) \leqq 0$. $k < 1$ だから $d(y_1, y_2) = 0$ となるため $y_1 = y_2$ である. 従って, 各 $x \in X$ に対し, $f(x) = v(x, f(x))$ を満たす $f(x)$ は一意的に定まる. □

とくに, 上において X が 1 点からなる場合には次の結果を得る.

命題 7.2 (不動点定理) (Y, d) を完備距離空間, $V = B(y_0\,;\beta)$ とする. 写像 $v : V \to Y$ は V の任意の 2 点 y_1, y_2 に対して $0 \leqq k < 1$ であるような k が存在して, 任意の $y_1, y_2 \in V$ に対し, 写像 $v : V \to Y$ が

$d(v(y_1), v(y_2)) \leqq kd(y_1, y_2)$ を満たしており, $d(v(y_0), y_0) < \beta(1-k)$ が成り立つとする．このとき, 点 $z \in V$ で $z = v(z)$ を満たすものがただ一つ存在する．

定理 7.3 (陰関数定理) V をノルム空間, W, Z を Banach 空間とする．f は $V \times W$ の開集合 U から Z への連続微分可能な写像で, U の点 (x_0, y_0) に対し, $f(x_0, y_0) = 0$ かつ偏微分 $D_2 f(x_0, y_0) : W \to Z$ は同相写像であるとする．このとき V における x_0 の開近傍 U_0 が存在して, U_0 に含まれる x_0 の任意の連結な開近傍 U_1 に対し, 連続微分可能な写像 $u : U_1 \to W$ で $u(x_0) = y_0$ かつ, すべての $x \in U_1$ に対して $(x, u(x)) \in U$, $f(x, u(x)) = 0$ を満たすものがただ一つ存在する．さらに u の微分は $Du(x) = -(D_2 f(x, u(x)))^{-1} \circ (D_1 f(x, u(x)))$ により与えられる．

証明 (第一段階) $T_0 = D_2 f(x_0, y_0)$ とおき, $g : U \to W$ を $g(x, y) = y - T_0^{-1}(f(x, y))$ で定義する．このとき g を (x_0, y_0) の十分小さな近傍に制限すれば (7.1) が適用できることを示す．まず $\varepsilon > 0$ を $\varepsilon\|T_0\| \leqq \frac{1}{2}$ であるように選んでおく．f は U で連続微分可能だから中心 x_0, y_0, 半径 α, β の V, W における開球 $U_0 = B_V(x_0; \alpha)$, $V_0 = B_W(y_0; \beta)$ で $U_0 \times V_0 \subset U$ かつ $x' \in U_0$, $y' \in V_0$ ならば $\|Df(x', y') - Df(x, y)\| \leqq \varepsilon$ となるものがある．(3.4), (4.2) から $x \in U_0$, $y_1, y_2 \in V_0$ ならば $\|f(x, y_1) - f(x, y_2) - D_2 f(x_0, y_0)(y_1 - y_2)\| \leqq \varepsilon\|y_1 - y_2\|$ が成り立つため, $\|g(x, y_1) - g(x, y_2)\| = \|T_0^{-1}(D_2 f(x_0, y_0)(y_1 - y_2) - (f(x, y_1) - f(x, y_2)))\| \leqq \varepsilon\|T_0^{-1}\| \cdot \|y_1 - y_2\| \leqq \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|$. さらに f の (x_0, y_0) における連続性より, 必要なら α を小さくとりなおして $x \in U_0$ ならば $\|f(x, y_0)\| \leqq \frac{\beta}{2\|T_0^{-1}\|}$ となるようにできる．このとき, $\|g(x, y_0) - y_0\| = \|-T_0^{-1}(f(x, y_0))\| \leqq \frac{\beta}{2}$ が成り立つ．以上より (7.1) が写像 $g : U_0 \times V_0 \to W$ に適用できて, 写像 $u : U_0 \to V_0$ で, すべての $x \in U_0$ に対し, $g(x, u(x)) = u(x)$ を満たすものがただ一つ存在して u は連続である．$g(x, u(x)) = u(x)$ は $f(x, u(x)) = 0$ と同値で, $f(x_0, y_0) = 0$ だから $g(x_0, y_0) = y_0$ となるため $u(x_0) = y_0$ である．

(第二段階) 次に U_1 を U_0 に含まれる x_0 の連結な開近傍とするとき, 連続写像 $u : U_1 \to W$ で, $u(x_0) = y_0$ かつ, すべての $x \in U_1$ に対し, $(x, u(x)) \in U$, $f(x, u(x)) = 0$ を満たすものはただ一つしかないことを示す．f は連続微分可能だから (4.2) から写像 $U_1 \to \mathcal{L}(W; Z)$, $x \mapsto D_2 f(x, u(x))$ は連続であり, $D_2 f(x_0, y_0) \in \mathcal{H}(W; Z)$ と (2.12) より, この写像による $\mathcal{H}(W; Z)$ の逆像は x_0 の開近傍である．従って必要なら再び α を小さくとりなおすことにより, すべての $x \in U_0$ に対して $D_2 f(x, u(x))$ が同相写像であると仮定してよい．$v : U_1 \to W$ も u と同じ条件を満たすものとする．$M = \{x \in U_1 | \, u(x) = v(x)\}$ とおくと u, v は連続で W は Hausdorff 空間だから M は U_1 の閉集合であり, $u(x_0) = v(x_0) = y_0$ より M は x_0 を含む．$a \in M$ に対し, $b = u(a)$ とおくと $(a, b) \in U$ で $D_2 f(a, b)$ は同相写像だから (x_0, y_0) のかわりに (a, b) に対して第一段階の結果を用いれば a, b の 開近傍 U_a, V_b が存在して, すべての $x \in U_a$ に対して $f(x, w(x)) = 0$ を満たす写像 $w : U_a \to V_b$ はただ一つしかない．$v(a) = u(a) = b = w(a)$ より $U_2 = U_a \cap u^{-1}(V_b) \cap v^{-1}(V_b)$ とおくと U_2 は a の開近傍で, U_2 の各点 x で $f(x, u(x)) = f(x, v(x)) = f(x, w(x)) = 0$ が成り立つため $w(x)$ の一意性から $u(x) = v(x) = w(x)$ である．従って $U_2 \subset M$ となるため M は開集合でもある．U_1 の連結性から $U_1 = M$, すなわち u の一意性が得られる．

(第三段階) u は U_0 で連続微分可能であることを示す．$x \in U_0$ に対し, $S_x = D_1 f(x, u(x))$, $T_x = D_2 f(x, u(x))$ とおくと, (4.2) から任意の $\delta > 0$ に対して $r > 0$ で, $\|s\|, \|t\| < r$ ならば $\|f(x + s, u(x) + t) - f(x, u(x)) - (S_x)(s) - (T_x)(t)\| \leqq \delta(\|s\| + \|t\|)$ となるものがある．$x, x + s \in U_0$ に対し, $t = u(x + s) - u(x)$ とおくと, $f(x + s, u(x) + t) = 0$ であり, u の連続性から $r' > 0$ で, $\|s\| < r'$ ならば $\|t\| < r$ となるものがある．このとき上式は $\|(S_x)(s) + (T_x)(t)\| \leqq \delta(\|s\| + \|t\|)$ となり, T_x は同相写像だから $\|(T_x^{-1} \circ S_x)(s) + t\| \leqq \delta\|T_x^{-1}\|(\|s\| + \|t\|)$ を得る．$\delta \leqq \frac{1}{2\|T_x^{-1}\|}$ ならば $c = 2\|T_x^{-1} \circ S_x\| + 1$ とおくと, $\|t\| - \frac{c-1}{2}\|s\| \leqq \frac{1}{2}(\|s\| + \|t\|)$ すなわち $\|t\| \leqq c\|s\|$ が得られる．故に $\|s\| < r'$ ならば $\|t + (T_x^{-1} \circ S_x)(s)\| \leqq \delta(c + 1)\|T_x^{-1}\| \cdot \|s\|$ が成り立つため t の定義より, これは u が x で微分可能で $Du(x)$ が $-(D_2 f(x, u(x)))^{-1} \circ (D_1 f(x, u(x)))$ により与えられることを意味する．さらに (2.8), (4.2) から写像 $U_0 \to \mathcal{L}(V; W)$, $x \mapsto -(D_2 f(x, u(x)))^{-1} \circ (D_1 f(x, u(x)))$ は連続だから u は U_0 で連続微分可能である．□

命題 7.4 (7.3) の仮定のもとで f が (x_0, y_0) の近傍で p 回連続微分可能ならば u は x_0 の近傍で p 回連続微分可能である．

証明 (7.3) より u は 1 回連続微分可能である. $F(x,y) = -(D_2f(x,y))^{-1}\circ(D_1f(x,y)))$ とおけば (4.11), (4.12) および (4.13) から F は (x_0,y_0) の近傍で $p-1$ 回連続微分可能である. 帰納的に u が k $(1 \leqq k \leqq p-1)$ 回連続微分可能であると仮定すると, (7.3) より $Du(x) = F(x,u(x))$ だから (4.12) から Du は k 回連続微分可能である. 従って (4.8) から u は $k+1$ 回連続微分可能である. □

定理 7.5 (逆写像定理) V, W を Banach 空間, f を $x_0 \in V$ の開近傍 U から W への連続微分可能な写像とする. $Df(x_0)$ が同相写像であれば U に含まれる x_0 の開近傍 U_0 で f の U_0 への制限が W における $y_0 = f(x_0)$ のある開近傍の上への同相写像になるようなものが存在する. さらに f が U_0 において p 回連続微分可能ならば逆写像 $g : f(U_0) \to U_0$ は $f(U_0)$ において p 回連続微分可能である.

証明 $v : U \times W \to W$ を $v(x,y) = f(x) - y$ で定義すれば, $v(x_0,y_0) = 0$ であり, $D_1v(x_0,y_0) = Df(x_0)$ は同相写像だから, (7.3) で x と y を入れかえたものを (7.3) の f に適用できる. (7.4) も用いれば, y_0 の開近傍 U_1 と p 回連続微分可能な写像 $g : U_1 \to U$ で, $g(y_0) = x_0$ かつ任意の $y \in U_1$ に対して $f(g(y)) = y$ を満たすものが存在し, $Dg(y_0) = -(D_1v(x_0,y_0))^{-1}\circ D_2v(x_0,y_0) = Df(x_0)^{-1}$ だから $Dg(y_0)$ は同相写像である. f のかわりに g に対して上の議論を行なうと, x_0 の開近傍 U_0 と p 回連続微分可能な写像 $h : U_0 \to U_1$ で, $h(x_0) = y_0$ かつ任意の $x \in U_0$ に対して $g(h(x)) = x$ を満たすものが存在する. 従って g は U_0 の上への連続な全単射であり, g は f を U_0 に制限したものの逆写像になるため f は U_0 から U_1 の上への同相写像を与える. □

8 常微分方程式の解の存在と一意性

定義 8.1 V を Banach 空間, U を V の開集合, I を $\boldsymbol{R}$ の開集合とする. 写像 $f : I \times U \to V$ と I に含まれる開区間 J に対して, 微分可能な写像 $u : J \to U$ が微分方程式 $x' = f(t,x)$ の解であるとは, 任意の $t \in J$ に対して, $u'(t) = f(t,u(t))$ が成り立つことである. 従って f が連続ならば u は J において連続微分可能である.

補題 8.2 上において f は連続であるとする. $t_0 \in J$ と $x_0 \in U$ に対し, $u : J \to U$ が $u(t_0) = x_0$ を満たす $x' = f(t,x)$ の解であるための必要十分条件は, u は連続かつ $u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,u(s))ds$ がすべての $t \in J$ に対して成り立つことである.

証明 u が $x' = f(t,x)$ の解ならば u' は連続だから (6.6) より $u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^t u'(s)ds = \int_{t_0}^t f(s,u(s))ds$ が得られる. 従って $u(t_0) = x_0$ ならば $u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,u(s))ds$ である. 十分性は (6.5) からわかる. □

定理 8.3 連続写像 $f : I \times U \to V$ が下の条件 $(*)$ を満たせば, 任意の $t_0 \in I$ と $x_0 \in U$ に対し, t_0 を含み I に含まれる開区間 J が存在して, 微分方程式 $x' = f(t,x)$ の J における解 $u : J \to U$ で $u(t_0) = x_0$ を満たすものが存在する.

$(*)$ 任意の $(t,x) \in I \times U$ に対して, t を含み I に含まれる開区間 J と, x を中心として U に含まれる開球 B および $k \geqq 0$ で, $s \in J$, $y_1, y_2 \in B$ ならば $\|f(s,y_1) - f(s,y_2)\| \leqq k\|y_1 - y_2\|$ が成り立つようなものが存在する.

証明 まず, 任意の $(t_0,x_0) \in I \times U$ に対し, 条件 $(*)$ を満たす開区間を J_0, 開球を B, B の半径を β とする. $[t_0-a, t_0+a] \subset J_0$ となる $a > 0$ をとれば, f の連続性から $f([t_0-a,t_0+a] \times \{x_0\})$ は有界で, $\|f([t_0-a,t_0+a] \times \{x_0\})\| < M$ となる $M > 0$ がある.
$0 < r \leqq a$ に対し, $F_r = \mathcal{B}_c([t_0-r,t_0+r];V)$ とおくと, F_r は $[t_0-r,t_0+r]$ から V への連続写像全体の集合で, (1.22) により F_r は Banach 空間である. B_r を $[t_0-r,t_0+r]$ から x_0 への定値写像 y_0 を中心とし, 半径 β の F_r における開球とすると, $s \in [t_0-r,t_0+r]$, $y \in B_r$ ならば $y(s) \in B$ である. 写像 $v : B_r \to F_r$ を $v(y)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,y(s))ds$ で定める.

$y_1, y_2 \in B_r$ と $s \in [t_0 - r, t_0 + r]$ に対し, 仮定より $\|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\| \leqq k\|y_1(s) - y_2(s)\| \leqq k\|y_1 - y_2\|$ である. (5.4) から任意の $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$ に対して, $\|\int_{t_0}^t (f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)))ds\| \leqq kr\|y_1 - y_2\|$ が成り立つ. すなわち $\|v(y_1) - v(y_2)\| \leqq kr\|y_1 - y_2\|$ である.
一方, 任意の $s \in [t_0 - r, t_0 + r]$ に対して $\|f(s, x_0)\| < M$ だから (5.4) から $\|\int_{t_0}^t f(s, x_0)ds\| \leqq Mr$, 従って $\|v(y_0) - y_0\| \leqq Mr$ となる.
$r < \frac{\beta}{(M+k\beta)}$ となるようにとっておけば $kr < 1$ かつ $Mr < \beta(1 - kr)$ となって, (7.2) が v に適用できて $v(u) = u$ となる $u \in B_r$ がある. $J = (t_0 - r, t_0 + r)$ とすれば (8.2) から $u : J \to B$ は $u(t_0) = x_0$ を満たす $x' = f(t, x)$ の解である. □

補題 8.4　X, Y, Z を位相空間とし, X はコンパクトであるとする. A は Y の部分集合で, Z の開集合 U が連続写像 $g : X \times Y \to Z$ による $X \times A$ の像を含めば, A の Y における近傍 W で $g(X \times W) \subset U$ となるようなものが存在する.

証明　$g^{-1}(U)$ は $X \times A$ を含む $X \times Y$ の開集合になるため, 任意の $(x, y) \in X \times A$ に対して x, y の開近傍 $V_{x,y}, W_{x,y}$ で $V_{x,y} \times W_{x,y} \subset g^{-1}(U)$ を満たすものがある. 各 $y \in A$ に対し, X のコンパクト性から $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ で $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i,y}$ となるものがあり, $W_y = \bigcap_{i=1}^{n} W_{x_i,y}$ とおく. このとき $X \times W_y = \bigcup_{i=1}^{n} (V_{x_i,y} \times W_y)$ で, 各 $V_{x_i,y} \times W_y$ は $g^{-1}(U)$ に含まれるから $X \times W_y \subset g^{-1}(U)$ である. W_y は y の開近傍だから $W = \bigcup_{y \in A} W_y$ とおけばよい. □

命題 8.5　写像 $f : I \times U \to V$ が 2 番目の変数に関して偏微分可能で, $D_2 f : I \times U \to \mathcal{L}(V; V)$ が連続ならば, f は (8.3) の条件 $(*)$ を満たす.

証明　$(t, x) \in I \times U$ に対し, $[t - a, t + a] \subset I$ となる $a > 0$ をとると, 仮定から $D_2 f([t - a, t + a] \times \{x\})$ は有界である. B_1 を $\mathcal{L}(V; V)$ において 0 を中心とし, 半径 k の開球で, $D_2 f([t - a, t + a] \times \{x\})$ を含むものとする. (8.4) により, x を中心とした開球 B で, $D_2 f([t - a, t + a] \times B) \subset B_1$ を満たすものがある. $s \in (t - a, t + a)$, $y_1, y_2 \in B$ ならば (3.3) から $\|f(s, y_1) - f(s, y_2)\| \leqq k\|y_1 - y_2\|$ が得られる. □

定義 8.6　ε を負でない実数とする. (8.1) の微分方程式において, I に含まれる開区間 J から U への微分可能な写像 u が任意の $t \in J$ に対し $\|u'(t) - f(t, u(t))\| \leqq \varepsilon$ を満たすとき, u を ε-近似解という.

定理 8.7　$f : I \times U \to V$ は連続で, $k \geqq 0$ が存在して, 任意の $t \in I$, $x_1, x_2 \in U$ に対して $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leqq k\|x_1 - x_2\|$ が成り立つとする. u, v をそれぞれ t_0 を含む開区間 (a, b) における (8.1) の微分方程式の $\varepsilon_1, \varepsilon_2$-近似解とすると, 任意の $t \in (a, b)$ に対して $\|u(t) - v(t)\| \leqq \|u(t_0) - v(t_0)\|e^{k|t - t_0|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}$ が成り立つ. (ただし $k = 0$ の場合は $\frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k} = |t - t_0|$ とする)

証明　$t_0 = 0$, $t \geqq 0$ の場合に上の不等式を示せばよい. 実際 $u_1, v_1 : (a - t_0, b - t_0) \to U$ を $u_1(s) = u(t_0 + cs)$, $v_1(s) = u(t_0 + cs)$ $(c = \pm 1)$ で定めれば, u_1, v_1 は $x' = cf(t_0 + cs, cx)$ の近似解になり, 一般の場合の結果が得られる.
$0 \leqq s \leqq t$ に対し, $\|u'(s) - f(t, u(s))\| \leqq \varepsilon_1$ だから (5.4) から $\|u(t) - u(0) - \int_0^t f(s, u(s))ds\| \leqq \varepsilon_1 t$, 同様にして $\|v(t) - v(0) - \int_0^t f(s, v(s))ds\| \leqq \varepsilon_2 t$ が得られる. 従って, $\|u(t) - v(t)\| \leqq \|u(0) - v(0)\| + \|\int_0^t (f(s, u(s)) - f(s, v(s)))ds\| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t$ が成り立つ. そこで $w(t) = \|u(t) - v(t)\|$ とおくと, 仮定と (6.9) から $w(t) \leqq w(0) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t + k\int_0^t w(s)ds$ となり, 次の補題を示せばよい $(\varphi(t) = w(0) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t$, $\psi(t) = k$ の場合). □

補題 8.8　(Gronwall の補題) $\varphi, \psi : [0, c] \to [0, +\infty)$ を連続関数とする. 連続関数 $w : [0, c] \to [0, +\infty)$ が $[0, c]$ において不等式 $w(t) \leqq \varphi(t) + \int_0^t \psi(s)w(s)ds$ を満たせば, $[0, c]$ の各点で $w(t) \leqq \varphi(t) + \int_0^t \varphi(s)\psi(s)\exp(\int_s^t \psi(\xi)d\xi)ds$ を満たす.

証明 $y(t)=\int_0^t \psi(s)w(s)ds$ で $y:[0,c]\to[0,+\infty)$ を定めると (6.5) より $(0,c)$ において $y'(t)=\psi(t)w(t)$ である．従って仮定 $w(t)\leqq\varphi(t)+y(t)$ から，$y'(t)-\psi(t)y(t)\leqq\varphi(t)\psi(t)$ を得る．$z(t)=y(t)\exp(-\int_0^t\psi(s)ds)$ とおくと，仮定の不等式は $z'(t)\leqq\varphi(t)\psi(t)\exp(-\int_0^t\psi(s)ds)$ と同値．$z(0)=0$ だから，(6.6) より $t\in[0,c]$ ならば $z(t)\leqq\int_0^t\varphi(s)\psi(s)\exp(-\int_0^s\psi(\xi)d\xi)ds$ となるから $z(t)$ の定義より，$y(t)\leqq\int_0^t\varphi(t)\psi(t)\exp(\int_s^t\psi(\xi)d\xi)ds$ が得られる．従って $w(t)\leqq\varphi(t)+y(t)$ から結果を得る． □

定理 8.9 (8.3) の仮定のもとで，$t_0\in I$ を含む開区間 J において u,v が (8.1) の微分方程式の解で，$u(t_0)=v(t_0)$ ならば J で $u=v$ である．

証明 $t\in J$ で $x=u(t)=v(t)$ と仮定し，(t,x) に関して (8.3) の条件 $(*)$ を満たす開区間を J_0，開球を B とする．$u^{-1}(B)\cap v^{-1}(B)\cap J_0$ は t_0 の開近傍だから，$(t-r,t+r)$ がこれに含まれるような $r>0$ がある．このとき $f:(t-r,t+r)\times B\to V$ は (8.7) の条件を満たし，u, v は $x'=f(t,x)$ の $(t-r,t+r)$ における 0-近似解だからこの区間で $u=v$ である．従って $\{t\in J|\,u(t)=v(t)\}$ は J の開集合で，t_0 を含む．また，この集合は J の閉集合でもあるから J の連結性より主張が示される． □

定理 8.10 (8.3) の仮定のもとで，u が $J=(a,b)$ における (8.1) の微分方程式の解で，$[a,b)\subset I$ (resp. $(a,b]\subset I$)，$\overline{u(J)}\subset U$ であり，写像 $J\to V$, $t\mapsto f(t,u(t))$ が有界であるとする．このとき $c<a$ (resp. $d>b$) と $(c,b)\subset I$ (resp. $(a,d)\subset I$) における (8.1) の解 v で，J において u に一致するものがある．

証明 仮定からすべての $t\in J$ に対し，$\|u'(t)\|=\|f(t,u(t))\|\leqq M$ を満たす $M>0$ があるため，(3.2) から任意の $s,t\in J$ に対し，$\|u(s)-u(t)\|\leqq M|s-t|$ となる．従って (5.12) から $u(a+)$ (resp. $u(b-)$) は存在して $\overline{u(J)}\subset U$ に属する．
(8.3) から I に含まれ，a (resp. b) を含む開区間 J_1 で定義された (8.1) の解 $u_1:J_1\to U$ で，$u_1(a)=u(a+)$ (resp. $u_1(b)=u(b-)$) を満たすものがある．u が $J_1\cap J$ において u_1 に一致することを示せばよい．
仮定から，a (resp. b) を含む開区間 I_1, $u(a+)$ (resp. $u(b-)$) を含む開球 B_1 および $k>0$ が存在して，任意の $t\in I_1$, $x_1,x_2\in B_1$ に対して $\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\|\leqq k\|x_1-x_2\|$ が成り立つ．$s,t\in I_1\cap J_1\cap J$ ならば (8.7) より $\|u_1(t)-u(t)\leqq\|u_1(s)-u(s)\|e^{k|t-s|}$ である．ここで $s\to a$, $s>a$ (resp. $s\to b$, $s<b$) とすれば u_1 の連続性より右辺は 0 に近づくため，$I_1\cap J_1\cap J$ において $u_1=u$ である．従って (8.9) により，$J_1\cap J$ において $u_1=u$ である．□

補題 8.11 X, Y を距離空間，Z は X の部分空間で，Z の閉包はコンパクトであるとする．$f:Z\to Y$ を写像とすると，$p\in\overline{f(Z)}$ であることと，Z の閉包の点に収束する Z の点列 $(a_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ で $(f(a_n))_{n\in\boldsymbol{N}}$ が p に収束するようなものがあることは同値である．

証明 $p\in\overline{f(Z)}$ とすると，任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対して $p_n\in Z$ で $d(f(p_n),p)<2^{-n}$ となるものがある．仮定より，Z の閉包の点に収束するような $(p_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ の部分列がある．これを $(a_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ とすればよい．逆は明らか． □

定理 8.12 $f,g:I\times U\to V$ を連続写像とし，f は (8.3) の条件 $(*)$ を満たし，g は (8.7) の仮定を満たすとする．また，任意の $(t,x)\in I\times U$ に対し，$\|f(t,x)-g(t,x)\|\leqq\alpha$ が成り立つと仮定する．$\mu,\beta>0$ に対し，$\varphi:[0,+\infty)\to[\mu,+\infty)$ を $\varphi(\xi)=\mu e^{k\xi}+(\alpha+\beta)\frac{e^{k\xi}-1}{k}$ で定義する．$(t_0,x_0)\in I\times U$ とし，u は t_0 を含む $J=(a,b)\subset I$ で定義された方程式 $x'=g(t,x)$ の β-近似解で，$u(t_0)=x_0$ かつ任意の $t\in J$ に対して $u(t)$ を中心とし半径 $\varphi(|t-t_0|)$ の開球は U に含まれるとする．
このとき $\|y-x_0\|\leqq\mu$ を満たす任意の $y\in U$ に対し，$x'=f(t,x)$ の解 $v:J\to U$ で $v(t_0)=y$ を満たすものがただ一つ存在する．さらにこのとき任意の $t\in J$ に対して $\|u(t)-v(t)\|\leqq\varphi(|t-t_0|)$ が成り立つ．

証明 $A=\{(r,s)\subset J|\,t_0\in(r,s), v(t_0)=y$ を満たす $x'=f(t,x)$ の解 $v:(r,s)\to U$ がある $\}$
とおくと，(8.3) から A は空でない．このとき，各 $L\in A$ に対し，$v(t_0)=y$ を満たす $x'=f(t,x)$ の解 $v:L\to U$

は (8.9) よりただ一つ存在して, これを v_L で表す.
仮定より L において $\|v_L'(t)-g(t,v_L(t))\| \leqq \alpha$ である. すなわち v_L は $x'=f(t,x)$ の α-近似解で, (8.7) から L において $\|u(t)-v_L(t)\| \leqq \varphi(|t-t_0|)$ が成り立つ. 従って g についての仮定から不等式 $\|g(t,v_L(t))\| \leqq \|g(t,u(t))\|+k\varphi(|t-t_0|)$ を得る. また, $L,L' \in A$ ならば, (8.9) より $L\cap L'$ において $v_L=v_{L'}$ となるため, $M=(c,d)$ を A の要素全体の合併とすれば, $M\in A$ であるが $M=J$ となることを示す.
$c>a$ と仮定すると $[c,\frac{c+d}{2}]\subset J$ であり, $t\mapsto g(t,u(t))$ の連続性により, 上の不等式から区間 $(c,\frac{c+d}{2}]$ において写像 $t\mapsto g(t,v_M(t))$ は有界である.
一方, 任意の $z\in\overline{v_M((c,\frac{c+d}{2}])}-v_M((c,\frac{c+d}{2}])$ に対し, (8.11) から c に収束する $(c,\frac{c+d}{2}]$ の点列 $(t_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ で $(v_M(t_n))_{n\in\boldsymbol{N}}$ が z に収束するようなものがある. 従って $\|u(t_n)-v_M(t_n)\|\leqq\varphi(|t_n-t_0|)$ において $n\to\infty$ とすれば $\|u(c)-z\|\leqq\varphi(|c-t_0|)$ となるため, 仮定により $z\in U$ である. 故に $\overline{v_M((c,\frac{c+d}{2}])}\subset U$ となり, (8.10) が v_M の $(c,\frac{c+d}{2})$ への制限に適用できて $c'<c$ と $x'=f(t,x)$ の $(c',\frac{c+d}{2})$ における解 w で, $(c,\frac{c+d}{2})$ において v_M に一致するものがある. これより $(c',d)\in A$ となるため c の定め方に反する.
同様に, $d<b$ としても矛盾が生じるため $M=J$ である. □

命題 8.13 I を開区間 (t_0-r,t_0+r) とし, $f:I\times V\to V$ を連続写像, $k:I\to[0,+\infty)$ を regulated 写像とする. 各 $t\in I$, $x_1,x_2\in V$ に対して $\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\|\leqq k(t)\|x_1-x_2\|$ が成り立てば, 任意の $x_0\in V$ に対して I における微分方程式 $x'=f(t,x)$ の解 $u:I\to V$ で $u(t_0)=x_0$ を満たすものがただ一つ存在する.

証明 $J=(t_0-s,t_0+s)$ とし, $v:J\to V$ を $x'=f(t,x)$ の解で $v(t_0)=x_0$ を満たすものとする. $s<r$ ならば写像 $t\mapsto f(t,v(t))$ は J で有界であることを示す. (5.11) からコンパクトな区間 $\overline{J}$ において k は有界で, f の連続性から $\overline{J}$ において関数 $t\mapsto f(t,x_0)$ も有界である. 従って仮定から $m,h>0$ で, 任意の $t\in J$ と $x\in V$ に対して $\|f(t,x)\|\leqq m\|x\|+h$ を満たすようなものがある. 故に任意の $t\in J$ に対し, $\|f(t,v(t))\|=\|v'(t)\|\leqq m\|v(t)\|+h$ が成り立つ.
$w(\xi)=\|v(t_0+\lambda\xi)\|$ $(\lambda=\pm1,\ 0\leqq\xi\leqq s)$ とおくと (3.1) から $w(\xi)\leqq\|x_0\|+hs+\int_0^\xi w(\xi)d\xi$ が得られる. (8.8) を用いると, $w(\xi)\leqq(\|x_0\|+hs)e^{m\xi}$ だから J において $\|v(t)\|\leqq(\|x_0\|+hs)e^{m|t-t_0|}$ が成り立つため v は J で有界である. 従って $\|f(t,v(t))\|\leqq m\|v(t)\|+h$ も J で有界になる.
明らかに $\overline{u(J)}\subset V$ だから (8.10) により $s<s'\leqq r$ と, (t_0-s',t_0+s') における $x'=f(t,x)$ の解で J において v に一致するものがある. いいかえれば, $A=\{s\in(0,r]\,|\,x'=f(t,x)$ の (t_0-s,t_0+s) における解で $v(t_0)=x_0$ を満たすものがある $\}$ とおくと $\sup A=r$, $r\in A$ である. □

定義 8.14 写像 $A:I\to\mathcal{L}(V;V)$ と $g:I\to V$ に対し, $x'=A(t)(x)+g(t)$ という形の微分方程式を線型微分方程式という.

定理 8.15 $I=(a,b)$ とし, $A:I\to\mathcal{L}(V;V)$, $g:I\to V$ を連続写像とする. 任意の $t_0\in I$ と $x_0\in V$ に対し, (8.14) の I における解 u で $u(t_0)=x_0$ を満たすものがただ一つ存在する.

証明 $f(t,x)=A(t)(x)+g(t)$ とおくと, $\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\|\leqq\|A(t)\|\cdot\|x_1-x_2\|$ が成り立つため, (8.13) から $t_0=\frac{a+b}{2}$ の場合は主張が成り立つ.
一般の場合, $s=\frac{a+b}{2}$, $r=\frac{b-a}{2}$ とおき, $\varphi:I\to I$ を $\varphi(t)=s-\frac{r^2(t-t_0)}{(t_0-s)(t-s)-r^2}$ により定めると, φ は微分可能な同相写像で, $\varphi(t_0)=s$ となる. $\varphi^{-1}(t)=t_0+\frac{(r^2-(t_0-s)^2)(t-s)}{(t_0-s)(t-s)+r^2}$, $(\varphi^{-1})'(t)=\frac{r^2(r^2-(t_0-s)^2)}{((t_0-s)(t-s)+r^2)^2}$ であり, $A_1(t)=(\varphi^{-1})'(t)A(\varphi^{-1}(t))$, $g_1(t)=(\varphi^{-1})'(t)g(\varphi^{-1}(t))$ とおくと, $v:I\to V$ が $v(s)=x_0$ を満たす $x'=A_1(t)(x)+g_1(t)$ の解ならば $u(t)=v(\varphi(t))$ で定められる写像 $u:I\to V$ は $u(t_0)=x_0$ を満たす $x'=A(t)(x)+g(t)$ の解である.
$u_1,u_2:I\to V$ が $u_1(t_0)=u_2(t_0)=x_0$ を満たす $x'=A(t)(x)+g(t)$ の解ならば, $v_i(t)=u_i(\varphi^{-1}(t))$ により v_1,v_2 を定めると, これらは $v_i(s)=x_0$ を満たす $x'=A_1(t)(x)+g_1(t)$ の解だから一意性により, $v_1=v_2$ である. 従って

$u_1 = u_2$ である. □

9 常微分方程式の解のパラメーターと初期値に対する依存

定理 9.1 I を $\boldsymbol{R}$ の開集合, V を Banach 空間, U を V の開集合とし, さらに P, Q を位相空間, $h : I \times P \times Q \to V$ を連続写像とする. 連続写像 $f : I \times U \times P \to V$ が下の条件 $(*)$ を満たせば, 任意の $(s_0, p_0, q_0) \in h^{-1}(U)$ に対し, s_0 を含み I に含まれる開区間 J と p_0 の近傍 W, q_0 の近傍 Z が存在して, 各 $(s, p, q) \in J \times W \times Z$ に対して微分方程式 $x' = f(t, x, p)$ の J における解 $t \mapsto u(t, s, p, q)$ で $u(s, s, p, q) = h(s, p, q)$ を満たすものがただ一つ存在する. さらに, $u : J \times J \times W \times Z \to V$ は有界な連続写像である.
$(*)$ 任意の $(s, p, q) \in h^{-1}(U)$ に対して, s を含み I に含まれる開区間 J, $h(s, p, q)$ を中心として U に含まれる開球 B, p の近傍 W および $k \geqq 0$ で, $t \in J$, $y_1, y_2 \in B$, $w \in W$ ならば $\|f(t, y_1, w) - f(t, y_2, w)\| \leqq k\|y_1 - y_2\|$ が成り立つようなものが存在する.

証明 任意の $(s_0, p_0, q_0) \in h^{-1}(U)$ に対し, 条件 $(*)$ を満たす開区間を J_0, 開球を B, B の半径を β, p_0 の近傍を W_0 とする. また q_0 の近傍 Z_0 をとり, 必要なら J_0 と W_0 を取り直して, $h(J_0 \times W_0 \times Z_0)$ が $h(s_0, p_0, q_0)$ を中心とした半径 $\frac{\beta}{2}$ の開球に含まれるようにする. $[s_0 - a, s_0 + a] \subset J_0$ となる $a > 0$ をとれば, $(t, s, p, q) \mapsto f(t, h(s, p, q), p)$ の連続性から (8.4) を用いると, $M > 0$ と p_0 の近傍 $W \subset W_0$, q_0 の近傍 $Z \subset Z_0$ で, すべての $(t, s, p, q) \in [s_0 - a, s_0 + a] \times [s_0 - a, s_0 + a] \times W \times Z$ について $\|f(t, h(s, p, q), p)\| < M$ が成り立つようなものがある.
$0 < r \leqq a$ に対し, $\mathcal{F}_r = \mathcal{B}_c([s_0 - r, s_0 + r] \times [s_0 - r, s_0 + r] \times W \times Z; V)$ とおくと, (1.22) により $\mathcal{F}_r$ は Banach 空間である. $y_0(t, s, p, q) = h(s, p, q)$ で定義される写像 $y_0 \in \mathcal{F}_r$ を中心とし, 半径 $\frac{\beta}{2}$ の $\mathcal{F}_r$ における開球を B_r とすると, 各 $y \in B_r$ の値域は B に含まれる. 写像 $v : B_r \to \mathcal{F}_r$ を $v(y)(t, s, p, q) = h(s, p, q) + \int_s^t f(\xi, y(\xi, s, p, q), p) d\xi$ で定める. $y_1, y_2 \in B_r$ と $\xi, s \in [s_0 - r, s_0 + r]$, $p \in W$, $q \in Z$ に対し, $\|f(\xi, y_1(\xi, s, p, q), p) - f(\xi, y_2(\xi, s, p, q), p)\| \leqq k\|y_1(\xi, s, p, q) - y_2(\xi, s, p, q)\| \leqq k\|y_1 - y_2\|$ である. 従って (5.4) から任意の $t, s \in [s_0 - r, s_0 + r]$, $p \in W$, $q \in Z$ に対して, $\|\int_s^t (f(\xi, y_1(\xi, s, p, q), p) - f(\xi, y_2(\xi, s, p, q), p)) d\xi\| \leqq 2kr\|y_1 - y_2\|$ が成り立つ. すなわち $\|v(y_1) - v(y_2)\| \leqq 2kr\|y_1 - y_2\|$ である. 一方, 任意の $t, s \in [s_0 - r, s_0 + r]$, $p \in W$, $q \in Z$ に対して $\|f(t, h(s, p, q), p)\| < M$ だから (5.4) から $\|\int_s^t f(\xi, h(s, p, q), p) d\xi\| \leqq 2Mr$, 従って $\|v(y_0) - y_0\| \leqq 2Mr$ となる.
$r < \frac{\beta}{2(M + k\beta)}$ となるようにとっておけば $2kr < 1$ かつ $2Mr < \beta(1 - 2kr)$ となり, (7.2) が v に適用できて $v(u) = u$ となる $u \in B_r$ がある. $J = (s_0 - r, s_0 + r)$ とすれば (8.2) から $t \mapsto u(t, s, p, q)$ は $u(s, s, p, q) = h(p, q)$ を満たす微分方程式 $x' = f(t, x, p)$ の J における解で, $u : J \times J \times W \times Z \to V$ は有界な連続写像である. u の一意性は (8.9) から得られる. □

注意 9.2 (9.1) におけるパラメーター p が $s \in I$ と $q \in Q$ にも依存する場合, すなわち連続写像 $f : I \times U \times I \times P \times Q \to V$ に対し, 微分方程式 $x' = f(t, x, s, p, q)$ を考える. $R = I \times P \times Q$ とおき, $p_1 : R \to I$, $p_2 : R \to P$, $p_3 : R \to Q$ を各成分への射影として, $g : I \times U \times R \to V$ を $g(t, x, r) = f(t, x, p_1(r), p_2(r), p_3(r))$ で定め, $k : I \times R \to V$ を $k(s, r) = h(r)$ で定める. (9.1) により, 任意の $(s_0, r_0) \in k^{-1}(U)$ に対し, s_0 を含み I に含まれる開区間 J と r_0 の近傍 W が存在して, 各 $(s, r) \in J \times W$ に対して微分方程式 $x' = g(t, x, r)$ の J における解 $t \mapsto v(t, s, r)$ で $v(s, s, r) = k(s, r)$ を満たすものがただ一つ存在し, $v : J \times J \times W \to V$ は有界な連続写像である. $u(t, s, p, q) = v(t, s, (s, p, q))$ で $u : J \times W \to V$ を定めると, u は有界な連続写像であり, $t \mapsto u(t, s, p, q)$ は $u(s, s, p, q) = h(s, p, q)$ を満たす微分方程式 $x' = f(t, x, s, p, q)$ の解である.

命題 9.3 写像 $f : I \times U \times P \to V$ が 2 番目の変数に関して偏微分可能で, $D_2 f : I \times U \times P \to \mathcal{L}(V; V)$ が連続ならば, f は (9.1) の条件 $(*)$ を満たす.

証明 $(s, p, q) \in h^{-1}(U)$ に対し, $[s - a, s + a] \subset I$ を満たす $a > 0$ をとると, 仮定から $D_2 f([s - a, s + a] \times \{h(s, p, q)\} \times$

$\{p\})$ は有界である. B_1 を $\mathcal{L}(V;V)$ において 0 を中心とし, 半径 k の開球で, $D_2f([s-a,s+a]\times\{h(s,p,q)\}\times\{p\})$ を含むものとする. (8.4) により, $h(s,p,q)$ を中心とした開球 B と p の近傍 W で, $D_2f([t-a,t+a]\times B\times W)\subset B_1$ を満たすものがある. $t\in(s-a,s+a)$, $y_1,y_2\in B$, $w\in W$ ならば (3.3) から $\|f(t,y_1,w)-f(t,y_2,w)\|\leqq k\|y_1-y_2\|$ が得られる. □

上の結果と (8.15) から次の結果を得る.

定理 9.4 I を開区間, $A:I\times I\times P\times Q\to\mathcal{L}(V;V)$, $g:I\times I\times P\times Q\to V$, $h:I\times P\times Q\to V$ を連続写像とするとき, 任意の $(s,p,q)\in I\times P\times Q$ に対し, 線型微分方程式 $x'=A(t,p)(x)+g(t,p)$ の I における解 $t\mapsto u(t,s,p,q)$ で $u(s,s,p,q)=h(s,p,q)$ を満たすものはただ一つ存在し, $u:I\times I\times P\times Q\to V$ は連続である.

命題 9.5 (9.1) における写像 $u:J\times J\times W\times Z\to V$ に対し, 次の不等式が成り立つ.
1) 任意の $t\in J$, $p\in W$ および $x\in u(J\times J\times W\times Z)$ に対して $\|f(t,x,p)\|\leqq M$ ならば任意の $t_1,t_2\in J$ と $(s,p,q)\in J\times W\times Z)$ に対し, $\|u(t_2,s,p,q)-u(t_1,s,p,q)\|\leqq|t_2-t_1|$ である.
2) 上の仮定のもとで, $k\geqq 0$ で $t\in J$, $x,y\in u(J\times J\times W\times Z)$, $p\in W$ ならば $\|f(t,y,p)-f(t,x,p)\|\leqq k\|y-x\|$ が成り立つようなものが存在し, $J=(a,a+r)$ とすると, 任意の $s_1,s_2\in J$ と $(t,p,q)\in J\times W\times Z)$ に対し, $\|u(t,s_2,p,q)-u(t,s_1,p,q)\|\leqq e^{kr}(M|s_2-s_1|+\|h(s_2,p,q)-h(s_1,p,q)\|$ である.
従って $N\geqq 0$ で $s_1,s_2\in J$, $p\in W$, $q\in Z$ ならば $\|h(s_2,p,q)-h(s_2,p,q)\|\leqq N|s_2-s_1|$ が成り立つようなものが存在すれば, 任意の $s_1,s_2\in J$ と $(t,p,q)\in J\times W\times Z)$ に対し, $\|u(t,s_2,p,q)-u(t,s_1,p,q)\|\leqq e^{kr}(M+N)|s_2-s_1|\|$ である.
3) $p_1,p_2\in W$ に対し, $\delta(p_1,p_2)=\sup\{\|f(t,x,p_2)-f(t,x,p_1)\|\,|\,t\in W, x\in u(J\times J\times W\times Z)\}$ とおくと, 2) の前半の仮定のもとで, 任意の $p_1,p_2\in W$ と $(t,s,q)\in J\times J\times W$ に対し, $\|u(t,s,p_2,q)-u(t,s,p_1,q)\|\leqq e^{kr}\|h(s,p_2,q)-h(s,p_1,q)\|+\frac{e^{kr}-1}{k}\delta(p_1,p_2)$ である.
4) 2) の前半の仮定のもとで, 任意の $q_1,q_2\in W$ と $(t,s,p)\in J\times J\times W$ に対し, $\|u(t,s,p,q_2)-u(t,s,p,q_1)\|\leqq e^{kr}\|h(s,p,q_2)-h(s,p,q_1)\|$ である.

証明 1) は (3.2) から明らか.
$t\mapsto u(t,s_i,p,q)$ $(i=1,2)$ は微分方程式 $x'=f(t,x,p)$ の J における解だから (8.7) から $\|u(t,s_2,p,q)-u(t,s_1,p,q)\|\leqq e^{kr}\|u(s_1,s_2,p,q)-h(s_1,p,q)\|$ である. 1) から $\|h(s_2,p,q)-u(s_1,s_2,p,q)\|\leqq|s_2-s_1|$ だから 2) が示される.
$\|D_1u(t,s,p_2,q)-f(t,u(t,s,p_2,q),p_1)\|=\|f(t,u(t,s,p_2,q),p_2)-f(t,u(t,s,p_2,q),p_1)\|\leqq\delta(p_1,p_2)$ だから $t\mapsto u(t,s,p_2,q)$ は微分方程式 $x'=f(t,x,p_1)$ の J における $\delta(p_1,p_2)$-近似解である. 従って, (8.7) から 3) の 不等式が得られる.
4) は (8.7) から明らか. □

命題 9.6 I を $\boldsymbol{R}$ の開集合, V を Banach 空間, U を V の開集合とし, P をノルム空間 E の開集合, Q を位相空間とする. 連続写像 $f:I\times U\times P\to V$ は 2 番目, 3 番目の変数に関して偏微分可能であり, $D_2f:I\times U\times P\to\mathcal{L}(V;V)$, $D_3f:I\times U\times P\to\mathcal{L}(E;V)$ はともに連続であるとする. さらに連続写像 $h:I\times P\times Q\to V$ は 2 番目の変数に関して偏微分可能であり, $D_2h:I\times P\times Q\to\mathcal{L}(V;V)$ は連続であるとする.
(9.1) により $(s_0,p_0,q_0)\in h^{-1}(U)$ に対し, s_0 を含み I に含まれる開区間 J と p_0 の開近傍 W, q_0 の開近傍 Z が存在して, 各 $(s,p,q)\in J\times W\times Z$ に対して微分方程式 $x'=f(t,x,p)$ の J における解 $t\mapsto u(t,s,p,q)$ で $u(s,s,p,q)=h(s,p,q)$ を満たすものがただ一つあるが, $u:J\times J\times W\times Z\to V$ は 3 番目の変数に関して偏微分可能で, $D_3u:J\times J\times W\times Z\to\mathcal{L}(E;V)$ は連続である.
さらに $A(t,s,p,q)=D_2f(t,u(t,s,p,q),p)$, $B(t,s,p,q)=D_3f(t,u(t,s,p,q),p)$ とおくと, 任意の $(s,p,q)\in J\times W\times Z$ に対して $t\mapsto D_3u(t,s,p,q)$ で定義される写像 $J\to\mathcal{L}(E;V)$ は線型微分方程式 $X'=A(t,s,p,q)\circ X+$

$B(t,s,p,q)$ の解 $X(t,s,p,q)$ で $X(s,s,p,q)=D_2h(s,p,q)$ を満たすものに一致する.

証明 $s\in J$, $q\in Z$ を固定する.
まず $s\in J_0$ かつ $\overline{J_0}\subset J$ である任意の開区間 J_0 と, 任意の $p\in W$ に対し, p を中心とする開球 $W_0\subset W$ で, $J_0\times J_0\times W_0\times Z$ において D_3u が存在するようなものがあることを示す.
u, D_2h, D_2f および D_3f の連続性から (8.4) を用いると, V の開球 S, p を中心とする開球 $W_0\subset W$ と $k,l,m>0$ で, 任意の $t\in\overline{J_0}$, $x\in S$, $z\in W_0$ に対して $u(\overline{J_0}\times\overline{J_0}\times W_0\times\{q\})\subset S$, $\|D_2h(s,p,q)\|\leqq m$, $\|D_2f(t,x,p)\|\leqq k$, $\|D_3f(t,x,p)\|\leqq l$ を満たすようなものがある. 従って (3.2) と (4.2) から $t\in\overline{J_0}$, $x,y\in S\cap U$, $p,z\in W_0$ ならば $\|f(t,y,z)-f(t,x,p)\|\leqq k\|y-x\|+l\|z-p\|$ と $\|h(s,z,q)-h(s,p,q)\|\leqq m\|z-p\|$ が成り立つ. このとき $J_0=(a,a+r)$, $c=me^{kr}+\frac{l}{k}(e^{kr}-1)$ とおくと, (9.5) の 3) より, $\delta(p,z)\leqq l$ に注意すると, $\|u(t,s,z,q)-u(t,s,p,q)\|\leqq c\|z-p\|$ を得る. 従って, $t\in\overline{J_0}$, $z\in W_0$ に対し, (3.4) と (4.2) から $\|f(t,u(t,s,z,q),z)-f(t,u(t,s,p,q),p)-A(t,s,p,q)(u(t,s,z,q)-u(t,s,p,q))-B(t,s,p,q)(z-p)\|\leqq(c+1)\|z-p\|\sup\limits_{0<\xi<1}(\|A(t,s,p+\xi(z-p),q)-A(t,s,p,q)\|+\|B(t,s,p+\xi(z-p),q)-B(t,s,p,q)\|)$ が成り立つ.
任意の $\varepsilon>0$ に対して $\|A(t,s,z,q)-A(t,s,p,q)\|$ と $\|B(t,s,z,q)-B(t,s,p,q)\|$ がともに $\frac{\varepsilon}{2(c+1)}$ より小さくなるような $(t,z)\in\overline{J_0}\times W_0$ の全体を M とすれば, A, B の連続性から, これは $\overline{J_0}\times\{p\}$ を含む $\overline{J_0}\times W_0$ の開集合である. $\overline{J_0}$ のコンパクト性から p の開近傍 $N\subset W_0$ で $\overline{J_0}\times N\subset M$ となるものが取れるから, $z\in N$ ならば任意の $t\in\overline{J_0}$ に対して $\|D_1u(t,s,z,q)-D_1u(t,s,p,q)-A(t,s,p,q)(u(t,s,z,q)-u(t,s,p,q))-B(t,s,p,q)(z-p)\|\leqq\varepsilon\|z-p\|$ である.
(9.4) により $X:J\times J\times P\times Q\to\mathcal{L}(E;V)$ は存在して, $v(t,s,p,z,q)=u(t,s,z,q)-u(t,s,p,q)-X(t,s,p,q)(z-p)$ とおくと, $D_1v(t,s,p,z,q)=D_1u(t,s,z,q)-D_1u(t,s,p,q)-A(t,s,p,q)(X(t,s,p,q)(z-p))-B(t,s,p,q)(z-p)$ だから, 上の結果は $\|D_1v(t,s,p,z,q)-A(t,s,p,q)(v(t,s,p,z,q))\|\leqq\varepsilon\|z-p\|$ と書き直せる. すなわち, 各 $z\in N$ について $t\mapsto v(t,s,z,q)$ は微分方程式 $y'=A(t,s,p,q)(y)$ の $\varepsilon\|z-p\|$-近似解で, $v(s,s,p,z,q)=h(s,z,q)-h(s,p,q)-D_2h(s,p,q)(z-p)$ である. $t\mapsto 0$ は解で, $t\in\overline{J_0}$ ならば $\|A(t,s,p,q)\|\leqq k$ だから, (8.7) から $\|v(t,s,p,z,q)\|\leqq e^{kr}\|v(s,s,p,z,q)\|+\frac{\varepsilon}{k}(e^{kr}-1)\|z-p\|$ である. 必要なら N を取り直して, $\|v(s,s,p,z,q)\|\leqq\varepsilon\|z-p\|$ がすべての $z\in N$ に対して成り立つようにできるから, $d=e^{kr}+\frac{e^{kr}-1}{k}$ とおくと, $\|v(t,s,p,z,q)\|\leqq d\varepsilon\|z-p\|$ が任意の $t\in J_0$ と $z\in N$ に対して成り立つ. v の定義から, これは u が 3 番目の変数について $(t,s,p,q)\in J_0\times J_0\times W_0\times Z$ で偏微分可能で, $D_3u(t,s,p,q)=X(t,s,p,q)$ であることを意味する. 仮定と, (9.4) から $D_3u=X:J_0\times J_0\times W_0\times Z\to\mathcal{L}(E;V)$ は連続である. □

命題 9.7 I を $\boldsymbol{R}$ の開集合, V を Banach 空間, U を V の開集合とし, P, Q を位相空間とする. 写像 $f:I\times U\times P\to V$, $h:I\times P\times Q\to V$ がそれぞれ 1 番目と 2 番目, 1 番目の変数に関して偏微分可能で, $D_1f:I\times U\times P\to\mathcal{L}V$, $D_2f:I\times U\times P\to\mathcal{L}(V;V)$, $D_1h:I\times P\times Q\to\mathcal{L}(V;V)$ が連続ならば, (9.1) における解 u は 2 番目の変数に関して偏微分可能で, $D_2u:J\times J\times W\times Z\to V$ は連続である.
$A(t,s,p,q)=D_2f(t,u(t,s,p,q),p)$ とおくと, 任意の $(s,p,q)\in J\times W\times Z$ に対して $t\mapsto D_2u(t,s,p,q)$ で定義される写像 $J\to V$ は線型微分方程式 $y'=A(t,s,p,q)(y)$ の解 $y(t,s,p,q)$ で $y(s,s,p,q)=D_1h(s,p,q)-f(s,h(s,p,q),p)$ を満たすものに一致する.

証明 $p\in W$, $q\in Z$ を固定する.
$M=\{(t,z,s)\in\boldsymbol{R}^3|\,z,s,t+s-z\in J\}$ とおくと M は $\boldsymbol{R}^3$ の開集合で, $\varphi:M\times V\to V$ を $\varphi(t,z,s,x)=x+h(s,p,q)-h(z,p,q)$ で定義し, $v:M\to V$ を $v(t,z,s)=u(t+s-z,s,p,q)-h(s,p,q)+h(z,p,q)$ で定義する. このとき $\varphi^{-1}(U)$ は $\boldsymbol{R}^3\times V$ の開集合で, 任意の $(s_0,x_0)\in J\times U$ に対し, s_0 を含む開区間 J_0 と x_0 の近傍 U_0 で, $J_0\times J_0\times J_0\times U_0\subset\varphi^{-1}(U)$ となるものがある. $g:J_0\times U_0\times J_0\to V$ を $g(t,x,s)=f(t+s-s_0,x+h(s,p,q)-h(s_0,p,q),p)$ で定義すると, 各 $s\in J_0$ に対し, $t\mapsto v(t,s_0,s)$ は微分方程式 $x'=g(t,x,s)$ の J_0 における解で $v(s_0,s_0,s)=h(s_0,p,q)$ を満たす.

従って (9.6) により v は 3 番目の変数について偏微分可能で v の定義から, 写像 $J_0 \times J_0 \to V$, $(t,s) \mapsto u(t+s-s_0,s,p,q)$ は連続微分可能である. 写像 $(t,s) \mapsto (t-s+s_0,s)$ と $(t,s) \mapsto u(t+s-s_0,s,p,q)$ を合成したものが $(t,s) \mapsto u(t,s,p,q)$ になるから u は 2 番目の変数について偏微分可能である. $D_2g(t,v(t,s_0,s),s) = D_2f(t+s-s_0,u(t+s-s_0,s,p,q),p)$, $D_3g(t,v(t,s_0,s),s) = D_1f(t+s-s_0,u(t+s-s_0,s,p,q),p)+D_2f(t+s-s_0,u(t+s-s_0,s,p,q),p)(D_1h(s,p,q))$, $D_3v(t,s_0,s) = f(t+s-s_0,u(t+s-s_0,s,p,q),p)+D_2u(t+s-s_0,s,p,q)-D_1h(s,p,q)$ だから $t+s-s_0$ を t とおき直せば (9.6) から $D_1D_2u(t,s,p,q) = D_2f(t,u(t,s,p,q),p)(D_2u(t,s,p,q))$ が得られる. □

命題 9.8 I を $\boldsymbol{R}$ の開集合, V を Banach 空間, U を V の開集合とし, P を位相空間, Q をノルム空間 F の開集合とする. 写像 $f : I \times U \times P \to V$, $h : I \times P \times Q \to V$ がそれぞれ 2 番目, 3 番目の変数に関して偏微分可能で, $D_2f : I \times U \times P \to \mathcal{L}(V;V)$, $D_3h : I \times P \times Q \to \mathcal{L}(F;V)$ が連続ならば, (9.1) における解 u は 4 番目の変数に関して偏微分可能で, $D_4u : J \times J \times W \times Z \to V$ は連続である.
$A(t,s,p,q) = D_2f(t,u(t,s,p,q),p)$ とおくと, 任意の $(s,p,q) \in J \times W \times Z$ に対して $t \mapsto D_4u(t,s,p,q)$ で定義される写像 $J \to \mathcal{L}(F;V)$ は線型微分方程式 $Y' = A(t,s,p,q) \circ Y$ の解 $Y(t,s,p,q)$ で $Y(s,s,p,q) = D_3h(s,p,q)$ を満たすものに一致する.

証明 $s \in J$, $p \in W$ を固定する.
まず $s \in J_0$ かつ $\overline{J_0} \subset J$ である任意の開区間 J_0 と, 任意の $q \in Z$ に対し, q を中心とする開球 $Z_0 \subset Z$ で, $J_0 \times J_0 \times W \times Z_0$ において D_4u が存在するようなものがあることを示す.
u, D_3h, および D_2f の連続性から (8.4) を用いると, V の開球 S, q を中心とする開球 $Z_0 \subset Z$ と $k,m > 0$ で, 任意の $t \in \overline{J_0}$, $x \in S$, $z \in W_0$ に対して $u(\overline{J_0} \times \overline{J_0} \times \{p\} \times Z_0) \subset S$, $\|D_3h(s,p,z)\| \leqq m$, $\|D_2f(t,x,p)\| \leqq k$ を満たすようなものがある. (3.3) から $z \in W_0$ ならば $\|h(s,p,z)-h(s,p,q)\| \leqq m\|z-q\|$ だから $J_0 = (a,a+r)$, $c = me^{kr}$ とおくと (9.5) から $t \in \overline{J_0}$, $z \in Z_0$ ならば $\|u(t,s,p,z)-u(t,s,p,q)\| \leqq c\|z-q\|$ が成り立つ. 従って, $t \in \overline{J_0}$, $z \in W_0$ に対し, (3.4) から $\|f(t,u(t,s,p,z),p) - f(t,u(t,s,p,q),p) - A(t,s,p,q)(u(t,s,p,z)-u(t,s,p,q))\| \leqq c\|z-q\| \sup\limits_{0<\xi<1} (\|A(t,s,p,q+\xi(z-q)) - A(t,s,p,q)\|$ が成り立つ.
任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\|A(t,s,p,z)-A(t,s,p,q)\| < \frac{\varepsilon}{c}$ となるような $(t,z) \in \overline{J_0} \times W_0$ の全体を M とすれば, A の連続性から, これは $\overline{J_0} \times \{q\}$ を含む $\overline{J_0} \times Z_0$ の開集合である. $\overline{J_0}$ のコンパクト性から q の開近傍 $N \subset Z_0$ で $\overline{J_0} \times N \subset M$ となるものがあり, $z \in N$ ならば任意の $t \in \overline{J_0}$ に対して $\|D_1u(t,s,p,z) - D_1u(t,s,p,q) - A(t,s,p,q)(u(t,s,p,z)-u(t,s,p,q))\| \leqq \varepsilon\|z-q\|$ である.
(9.4) により $Y : J \times J \times P \times Q \to \mathcal{L}(F;V)$ は存在して, $v(t,z,q) = u(t,s,p,z)-u(t,s,p,q)-Y(t,s,p,q)(z-q)$ とおくと, 上の不等式は $\|D_1v(t,z,q) - A(t,s,p,q)(v(t,z,q))\| \leqq \varepsilon\|z-p\|$ と書き直せる. すなわち, 各 $z \in N$ について $t \mapsto v(t,z,q)$ は微分方程式 $y' = A(t,s,p,q)(y)$ の $\varepsilon\|z-q\|$-近似解で, $v(s,z,q) = h(s,p,z)-h(s,p,q)-D_3h(s,p,q)(z-q)$ である. $t \mapsto 0$ は解で, $t \in \overline{J_0}$ ならば $\|A(t,s,p,q)\| \leqq k$ だから, (8.7) から $\|v(t,z,q)\| \leqq e^{kr}\|v(s,z,q)\| + \frac{\varepsilon}{k}(e^{kr}-1)\|z-q\|$ である. 必要なら N を取り直して, $\|v(s,z,q)\| \leqq \varepsilon\|z-q\|$ がすべての $z \in N$ に対して成り立つようにできるから, $d = e^{kr} + \frac{e^{kr}-1}{k}$ とおくと, $\|v(t,z,q)\| \leqq d\varepsilon\|z-p\|$ が任意の $t \in J_0$ と $z \in N$ に対して成り立つ. v の定義から, これは u が 4 番目の変数について $(t,s,p,q) \in J_0 \times J_0 \times W_0 \times Z$ で偏微分可能で, $D_4u(t,s,p,q) = Y(t,s,p,q)$ であることを意味する. 仮定と, (9.4) から $D_4u = Y : J_0 \times J_0 \times W_0 \times Z \to \mathcal{L}(E;V)$ は連続である. □

(9.6), (9.7), (9.8) と $D_1u(t,s,p,q) = f(t,u(t,s,p,q),p)$ が連続であることから (4.2) を用いると次の結果が得られる.

定理 9.9 I を $\boldsymbol{R}$ の開集合, V を Banach 空間, U を V の開集合とし, P, Q をそれぞれノルム空間 E, F の開集合とする. 連続写像 $f : I \times U \times P \to V$, $h : I \times P \times Q \to V$ がともに連続微分可能ならば (9.1) における

$u : J \times J \times W \times Z \to V$ は連続微分可能である.

定理 9.10　(9.9) の状況のもとで, f が $I \times U \times P$ において r 回連続微分可能で h が $I \times P \times Q$ において r 回連続微分可能ならば $u : J \times J \times W \times Z \to V$ は r 回連続微分可能である. 従って f, h が無限回連続微分可能ならば u も無限回連続微分可能である.

証明　r による帰納法で主張を示す. $r = 1$ の場合は, (9.9) ですでに示した. $r - 1$ の場合に主張が成り立つとすると, (4.12) から $A(t, s, p, q) = D_2 f(t, u(t, s, p, q), p)$, $B(t, s, p, q) = D_3 f(t, u(t, s, p, q), p)$ は $J \times J \times P \times Q$ において $r - 1$ 回連続微分可能である.
$D_1 u(t, s, p, q) = f(t, u(t, s, p, q), p)$ だから $D_1 u$ は $J \times T$ で $r - 1$ 回連続微分可能である.
$t \mapsto D_2 u(t, s, p, q)$ は線型微分方程式 $y' = A(t, s, p, q)(y)$ の J における解 $y(t, s, p, q)$ で $y(s, s, p, q) = D_1 h(s, p, q) - f(s, h(s, p, q), p)$ を満たし, $D_1 h$ は $I \times P \times Q$ において $r - 1$ 回連続微分可能だから帰納法の仮定から $D_2 u$ は $J \times J \times W \times Z$ において $r - 1$ 回連続微分可能である.
$t \mapsto D_3 u(t, s, p, q)$ は線型微分方程式 $X' = A(t, s, p, q) \circ X + B(t, s, p, q)$ の J における解 $X(t, s, p, q)$ で, $X(s, s, p, q) = D_2 h(s, p, q)$ を満たし, $D_2 h$ は $I \times P \times Q$ において $r - 1$ 回連続微分可能だから帰納法の仮定から $D_3 u$ は $J \times J \times W \times Z$ において $r - 1$ 回連続微分可能である. $t \mapsto D_4 u(t, s, p, q)$ は線型微分方程式 $Y' = A(t, s, p, q) \circ Y$ の J における解 $Y(t, s, p, q)$ で $Y(s, s, p, q) = D_3 h(s, p, q)$ を満たし, $D_3 h$ は $I \times P \times Q$ において $r - 1$ 回連続微分可能だから帰納法の仮定から $D_4 u$ は $J \times J \times W \times Z$ において $r - 1$ 回連続微分可能である.
(4.2), (4.11) および (4.12) から $Du(t, s, p, q)$ は $J \times J \times W \times Z$ において $r - 1$ 回連続微分可能であり, (4.8) から u は $J \times J \times W \times Z$ において r 回連続微分可能である. □

定義 9.11　V, W を Banach 空間, S, T をそれぞれ V, W の開集合とする. 写像 $F : S \times T \to \mathcal{L}(V; W)$ に対し, 微分可能な写像 $u : S \to T$ が全微分方程式 $Dy = F(x, y)$ の解であるとは, 各 $x \in S$ に対して $Du(x) = F(x, u(x))$ が成り立つことである.
各 $(x_0, y_0) \in S \times T$ に対し, S における x_0 の近傍 U で, $u(x_0) = y_0$ を満たす $Dy = F(x, y)$ の解 $u : U \to T$ がただ一つ存在するようなものがあるとき, 全微分方程式 $Dy = F(x, y)$ は完全積分可能であるという.

定理 9.12　(Frobenius の定理) $F : S \times T \to \mathcal{L}(V; W)$ は連続微分可能であるとする. (9.11) の方程式が $S \times T$ において完全積分可能であるための必要十分条件は各 $(x, y) \in S \times T$ と $(s, t) \in V \times V$ に対して $D_1 F(x, y)(s, t) + D_2 F(x, y)(F(x, y)(s), t) = D_1 F(x, y)(t, s) + D_2 F(x, y)(F(x, y)(t), s)$ が成り立つことである.

証明　(必要性) u が $u(x_0) = y_0$ を満たす x_0 の近傍 U における解であるとする. 仮定から $x \mapsto Du(x)$ は U において微分可能で, $D^2 u(x) = D_1 F(x, u(x)) + D_2 F(x, u(x)) \circ Du(x)$ より $D^2 u(x_0)(s, t) = D_1 F(x_0, y_0)(s, t) + D_2 F(x_0, y_0)(F(x_0, y_0)(s), t)$ である. (4.7) から $D^2 u(x_0)(s, t) = D^2 u(x_0)(t, s)$ だから主張が示される.
(十分性) 任意の $(x_0, y_0) \in S \times T$ に対し, 開球 $U = B(x_0; \alpha) \subset S$, $Z = B(y_0; \beta) \subset T$ で $F(U \times Z)$ が有界であるようなものをとり, $(x, y) \in U \times Z$ ならば $\|F(x, y)\| \leqq M$ かつ $\alpha M \geqq \beta$ とする.
$z \in V$, $\xi \in (-\frac{\alpha}{\|z\|}, \frac{\alpha}{\|z\|})$ と $w \in T$ に対し, $f(\xi, w, z) = F(x_0 + \xi z, w)(z)$ とおいて, 常微分方程式 $w' = f(\xi, w, z)$ を考えると, u が x_0 の近傍 $B(x_0; \rho)$ における (9.11) の解で $u(x_0) = y_0$ を満たせば $\xi \mapsto u(x_0 + \xi z)$ は $(-\frac{\rho}{\|z\|}, \frac{\rho}{\|z\|})$ における $w' = f(\xi, w, z)$ の 0 を y_0 にうつす解である. 従って (8.9) から u の一意性がわかる.
$f : (-2, 2) \times Z \times B(0; \frac{\alpha}{2}) \to W$ は連続微分可能で, $(\xi, w, z) \in (-2, 2) \times Z \times B(0; \frac{\alpha}{2})$ に対し, $\|f(\xi, w, z)\| \leqq M\|z\|$ である. $z \in B(0; \frac{\beta}{2M})$ に対し, (8.12) において $I = J = (-2, 2)$, $U = Z$, $f(\xi, w) = f(\xi, w, z)$, $g = 0$, α を $\frac{\beta}{2}$, $k = \beta = \mu = t_0 = 0$, x_0 を y_0 とし, $u : J \to W$ を定値写像 $\xi \mapsto y_0$ として結果を用いれば, $w' = f(\xi, w, z)$ の $(-2, 2)$ における解 $\xi \mapsto v(\xi, z) \in Z$ で $v(0, z) = y_0$ を満たすものが存在する. そこで, $u : B(x_0; \frac{\beta}{2M}) \to Z$ を $u(x) = v(1, x - x_0)$ で定めれば, u は $u(x_0) = y_0$ を満たす (9.11) の解であることを示す.
$f(\xi, w, 0) = 0$ だから (8.9) から $v(\xi, 0) = y_0$ となるため, $u(x_0) = y_0$ である.

(9.6) から $v:(-2,2)\times B(x_0;\frac{\beta}{2M})\to W$ は連続微分可能であり, $\xi\mapsto D_2v(\xi,z)$ は線型微分方程式 $X'=D_2f(\xi,v(\xi,z),z)\circ X+D_3f(\xi,v(\xi,z),z)$ の解で, $\xi=0$ のときの値が 0 になるものである. 従って各 $s\in V$ に対し, $g(\xi)=D_2v(\xi,z)(s)$ とおくと $g(0)=0$ で, $g'(\xi)=D_2f(\xi,v(\xi,z),z)(g(\xi))+D_3f(\xi,v(\xi,z),z)(s)$ である. さらに $A(\xi)=D_2F(x_0+\xi z,v(\xi,z))$, $B(\xi)=F(x_0+\xi z,v(\xi,z))$, $C(\xi)=D_1F(x_0+\xi z,v(\xi,z))$ とおくと, f の定義から上式は $g'(\xi)=A(\xi)(g(\xi),z)+B(\xi)(s)+\xi C(\xi)(s,z)$ と書けるため $g(\xi)=\xi B(\xi)(s)$ を示せば $D_2u(x_0+z)(s)=g(1)=F(x_0+z,u(x_0+z))(s)$ となって主張が示される.
$h(\xi)=g(\xi)-\xi B(\xi)(s)$ とおくと, $D_1v(\xi,z)=B(\xi)(z)$ だから $h'(\xi)=A(\xi)(g(\xi),z)+B(\xi)(s)+\xi C(\xi)(s,z)-B(\xi)(s)-\xi C(\xi)(z,s)-\xi A(\xi)(B(\xi)(z),s)$ である. 仮定から

$$C(\xi)(z,s)+A(\xi)(B(\xi)(z),s)=C(\xi)(s,z)+A(\xi)(B(\xi)(s),z)$$

だから $h'(\xi)=A(\xi)(g(\xi)-\xi B(\xi)(s),z)=A(\xi)(h(\xi),z)$ を得る. 従って h は線型微分方程式 $y'=A(\xi)(y,z)$ の解で, $h(0)=0$ を満たすから $(-2,2)$ において常に 0 である. □

命題 9.13　F は (9.12) の条件を満たし, r 回連続微分可能とする. 任意の $(a,b)\in S\times T$ に対し, a, b を中心とする開球 $U\subset S$, $Z\subset T$ で, 次のようなものが存在する. 任意の $(x_0,y_0)\in U\times Z$ に対し, (9.11) の U における解 $x\mapsto u(x,x_0,y_0)$ で $u(x_0,x_0,y_0)=y_0$ を満たすものがただ一つ存在し, $u:U\times U\times Z\to W$ は連続微分可能である.

証明　$M>0$ と開球 $U_0=B(a;\alpha)\subset S$, $Z_0=B(b;\beta)\subset T$ で, $\alpha M\geqq\beta$ かつ任意の $(x,y)\in U_0\times Z_0$ に対し, $\|F(x,y)\|\leqq M$ が成り立つものがある. $f(\xi,w,z,x_0,y_0)=F(x_0+\xi z,y_0+w)(z)$ とおいて常微分方程式 $w'=f(\xi,w,z,x_0,y_0)$ を考える. $U=B(a;\frac{\alpha}{2})$, $Z=B(b;\frac{\beta}{2})$ とおくと, $w\in B(0;\frac{\beta}{2})$, $z\in B(0;\frac{\beta}{4M})$, $x_0\in U$, $y_0\in Z$ に対し, $\|f(\xi,w,z,x_0,y_0)\|\leqq M\|z\|<\frac{\beta}{4}$ である. (8.12) から $(-2,2)$ における解 $\xi\mapsto v(\xi,z,x_0,y_0)$ で $v(0,z,x_0,y_0)=0$ を満たすものがただ一つ存在する. (9.9) から $v:(-2,2)\times B(0;\frac{\beta}{4M})\times U\times Z\to V$ は r 回連続微分可能であり, (9.12) により, $u(x,x_0,y_0)=y_0+v(1,x-x_0,x_0,y_0)$ で与えられる $u:U\times U\times Z\to V$ は $u(x_0,x_0,y_0)=y_0$ を満たす (9.11) の解である. 従って u は r 回連続微分可能である. □

命題 9.14　F は (9.12) の条件を満たすとする. (9.13) における $u:U\times U\times Z\to W$ に対し, a, b を中心とする開球 A, B で, 各 $(x,x_0,y_0)\in A\times A\times B$ に対して方程式 $y_0=u(x_0,x,y)$ は B においてただ一つの解 $y=u(x,x_0,y_0)$ をもつようなものが存在する.

証明　任意の $(x,y)\in U\times Z$ に対して $\|F(x,y)\|\leqq M$ が成り立つから (3.2) より $x_0,x_1,x_2\in U$, $y_0\in Z$ に対し, $\|u(x_2,x_0,y_0)-u(x_1,x_0,y_0)\|\leqq M\|x_2-x_1\|$ である. これより $x_0,z\in B(a;\frac{\beta}{8M})\cap U$ ならば $\|u(z,x_0,y_0)-y_0\|<\frac{\beta}{4}$ が成り立つ. 従って $A=B(a;\frac{\beta}{8M})$, $B=B(b;\frac{\beta}{4})$ とおくと $(x,x_0,y_0)\in A\times A\times B$ ならば $u(x,x_0,y_0)\in Z$ である. $(x,x_0,y_0)\in A\times A\times B$ に対し, $z\mapsto u(z,x_0,y_0)$ と $z\mapsto u(z,x,u(x,x_0,y_0))$ はともに A で定義され, $z=x$ のときの値が $u(x,x_0,y_0)$ であるような (9.11) の解である. 従って, 解の一意性から $u(z,x_0,y_0)=u(z,x,u(x,x_0,y_0))$ である. とくに $z=x_0$ の場合 $y_0=u(x_0,x,u(x,x_0,y_0))$ となるため $y=u(x,x_0,y_0)$ は $y_0=u(x_0,x,y)$ の解である. また $w\in B$ に対して $u(x_0,x,w)=y_0$ であれば $z\mapsto u(z,x,w)$ は x_0 を y_0 に写す (9.11) の解だから一意性から $u(z,x,w)=u(z,x_0,y_0)$ である. $z=x$ とすると $w=u(x,x_0,y_0)=y$ が得られる. □