1. 以下の各問で与えられた条件のもとで, 関数 f の極値を求めよ. ただし (21) では $0<a<b<c<d$ とする.

(1) $x^2+y^2=6$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^4+y^4+4xy$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(2) $x^2+y^2=3$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=e^{-x-y}(xy+1)$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(3) $x^2+y^2=1$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=e^{-x-y}(x^3+y^3-3xy)$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(4) $x^2-2x+y^2=3$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=e^{-2x}(x^2-y^2)$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(5) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=xy$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(6) $4y^2-3x^2=1$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^3+4y$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(7) $x+y+xy^2=1$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^2y+x$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(8) $2x^2+y^2=12$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=4y-xy$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(9) $2x^2+y^2=2$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=xy+\sqrt{2}x$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(10) $x^2-y^3+1=0$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{3x}{y^2}$ で定義される $f:\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, y\neq 0\right\}\to\boldsymbol{R}$.

(11) $x+y-x^2y=0$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^3y+3x^2$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(12) $x^2-2y^2=1$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=xy^2-4x$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(13) $3x^2-y^3=7$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=xy^2$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(14) $x+y+xy+5=0$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^3y$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(15) $4x^2+y^2=4$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=2x^3y$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(16) $x-2y-xy^2+2=0$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=xy^3$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(17) $x^3-4y^3+3x^2y=0$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^2-2y$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(18) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{a^2}$ $(a>0)$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ で定義される $f:\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, xy\neq 0\right\}\to\boldsymbol{R}$.

(19) $\log(x^2+y^2)-2\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=0$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^2+2xy-y^2$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(20) $\sin x+\sin y=1$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\sin x\sin y$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(21) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ かつ $x^2+y^2+z^2=d^2$ のとき, $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=z^2$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}$.

(22) $x^2+y^2=5$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^4+y^4-(x+y)^2$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(23) $x^2+2y^2=3$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^3+3xy^2-3x$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(24) $x^2+2y^2+4y=7$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^3+3x(y+3)(y-1)$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(25) $2x^2+y^2=10$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=2x^2+4xy+y^2-4x$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(26) $x^2-4x+y^2+4y=10$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=xy(x-4)(y+4)$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(27) $x^2+y^2=12$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^3-y^3+3(x-y)^2$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(28) $x^4+y^4=1$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^2+y^2$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(29) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=2$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=ax-3y^{\frac{1}{3}}$ $(a\geqq 1)$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(30) $x^3+y^3-6axy=0$ $(a>0)$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=xy$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(31) $x^3+y^3-6axy=0$ $(a>0)$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^2+y^2$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(32) $x^3+xy^2-y^2=0$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=(x-1)^2+y^2$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(33) $x^2+y^2=1$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^2+4xy+y^2$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(34) $xy+x-y=0$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^2+y^2$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(35) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x+y$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(36) $x^2+xy+y^2=1$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^2+y^2$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(37) $x^3-2y^3+3x^2y+2=0$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x^2+y^2$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(38) $x+2\log y+e^xy^2=1$ のとき, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=x+y^2$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$.

(39) $x^2+y^2+z^2=1$ のとき, $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x^2+y^2-z^2+4xz+4yz$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}$.

(40) $x^2+y^2+z^2=1$ のとき, $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=xyz$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}$.

(41) $x^2+z^2+w^2=4$ かつ $y^2+2z^2+3w^2=9$ のとき, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=x^2+y^2$ で定義される $f:\boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}$.

2. (1) 与えられた点 $\binom{a}{b}$ を通る xy 平面上の直線のうち, 原点からの距離が最大であるものを求めよ.

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0)$ 上の点と定点 $(c,0)$ $(c \geqq 0)$ との距離の最大値と最小値を求めよ.

1. (1) x, y は条件 $x^2+y^2=6$ を満たすため, $x=\sqrt{6}\cos t$, $y=\sqrt{6}\sin t$ とおける．このとき, $g:[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}$ を $g(t)=f\begin{pmatrix}\sqrt{6}\cos t\\ \sqrt{6}\sin t\end{pmatrix}$ で定めれば,

$$\begin{aligned}g(t)&=36\cos^4 t+36\sin^4 t+24\cos t\sin t\\&=36\left((\cos^2 t+\sin^2 t)^2-2\cos^2 t\sin^2 t\right)+24\cos t\sin t\\&=36-72\cos^2 t\sin^2 t+24\cos t\sin t=36-18\sin^2 2t+12\sin 2t\end{aligned}$$

より, $g'(t)=24\cos 2t(1-3\sin 2t)$ である．$\alpha=\sin^{-1}\frac{1}{3}$ とおくと, $0<\alpha<\frac{\pi}{6}$ だから, g の増減表は次のようになる．

t	0		$\frac{\alpha}{2}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\pi+\frac{\alpha}{2}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
g'	24	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	24
g	36	$\nearrow$	38	$\searrow$	30	$\nearrow$	38	$\searrow$	6	$\nearrow$	38	$\searrow$	30	$\nearrow$	38	$\searrow$	6	$\nearrow$	36

従って, $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$, $\pi+\frac{\alpha}{2}$, $\frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$ において g は極大であり, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ において g は極小である．

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{3+2\sqrt{2}}{6}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{6}$, $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{3-2\sqrt{2}}{6}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{6}$ だから $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}}$, $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}$ である．故に f は条件 $x^2+y^2=6$ のもとで $\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\ \sqrt{2}-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\ \sqrt{2}+1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\sqrt{2}-1\\ -\sqrt{2}+1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\sqrt{2}+1\\ -\sqrt{2}-1\end{pmatrix}$ において極大値 38 をとる．また, f は条件 $x^2+y^2=6$ のもとで $\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}$ において極小値 30 をとり, $\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$, において極小値 6 をとる．

(2) x, y は条件 $x^2+y^2=3$ を満たすため, $x=\sqrt{3}\cos t$, $y=\sqrt{3}\sin t$ とおける．このとき, $g:[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}$ を $g(t)=f\begin{pmatrix}\sqrt{3}\cos t\\ \sqrt{3}\sin t\end{pmatrix}$ で定めれば, $g(t)=e^{-\sqrt{3}(\cos t+\sin t)}(3\cos t\sin t+1)$ である．$s=\cos t+\sin t=\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$ とおくと $\cos t\sin t=\frac{s^2-1}{2}=\sin^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$ だから, $g(t)=3e^{-\sqrt{6}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}\left(\sin^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{6}\right)$ である．よって

$$g'(t)=-3\sqrt{6}e^{-\sqrt{6}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}\cos\left(t+\tfrac{\pi}{4}\right)\left(\sin\left(t+\tfrac{\pi}{4}\right)-\tfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)\left(\sin\left(t+\tfrac{\pi}{4}\right)-\tfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)$$

である．$\sin^{-1}\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\alpha$, $\sin^{-1}\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\beta$ とおく．このとき $-\frac{\pi}{6}<\alpha<0<\frac{\pi}{3}<\beta<\frac{\pi}{2}$ であることに注意すれば, g の増減表は次のようになる．

t	0		$\beta-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}-\beta$		$\frac{3\pi}{4}-\alpha$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}+\alpha$		2π
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}+1}{e^{\sqrt{2}+1}}$	$\searrow$	$\frac{5}{2e^{\sqrt{6}}}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}+1}{e^{\sqrt{2}+1}}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}-1}{e^{\sqrt{2}-1}}$	$\nearrow$	$\frac{5e^{\sqrt{6}}}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}-1}{e^{\sqrt{2}-1}}$	$\nearrow$	

従って, $\beta-\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}-\beta$, $\frac{5\pi}{4}$ において g は極大であり, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}-\alpha$, $\frac{7\pi}{4}+\alpha$ において g は極小である．

$\sin\alpha=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$, $\sin\beta=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ かつ $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ だから, $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}$ である．従って $\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\beta\right)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\beta\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{7\pi}{4}+\alpha\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ となるため f は条件 $x^2+y^2=3$ のもとで $\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$, において極大値 $\frac{\sqrt{2}+1}{e^{\sqrt{2}+1}}$ をとり, $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{2}\\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\end{pmatrix}$ において極大値 $\frac{5e^{\sqrt{6}}}{2}$ をとる．また, f は条件 $x^2+y^2=3$ のもとで $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{2}\\ \frac{\sqrt{6}}{2}\end{pmatrix}$ において極小値 $\frac{5}{2e^{\sqrt{6}}}$ をとり, $\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ -1\end{pmatrix}$ において極小値 $-\frac{\sqrt{2}-1}{e^{\sqrt{2}-1}}$ をとる．

(3) x, y は条件 $x^2+y^2=1$ を満たすため, $x=\cos t$, $y=\sin t$ とおける．このとき, $g:[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}$ を $g(t)=f\left(\begin{smallmatrix}\cos t\\ \sin t\end{smallmatrix}\right)$ で定めれば, $g(t)=e^{-\cos t-\sin t}(\cos^3 t+\sin^3 t-3\cos t\sin t)$ である．$s=\cos t+\sin t=\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$ とおくと $\cos t\sin t=\frac{s^2-1}{2}=\sin^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$, $\cos^3 t+\sin^3 t=(\cos t+\sin t)^3-3\cos t\sin t(\cos t+\sin t)=-\frac{s^3}{2}+\frac{3s}{2}$ だから,

$$g(t)=-\frac{1}{2}e^{-\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}\left(2\sqrt{2}\sin^3\left(t+\tfrac{\pi}{4}\right)+6\sin^2\left(t+\tfrac{\pi}{4}\right)-3\sqrt{2}\sin\left(t+\tfrac{\pi}{4}\right)-3\right)$$

である．

$$g'(t)=2e^{-\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}\cos\left(t+\tfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(t+\tfrac{\pi}{4}\right)\left(\sin^2\left(t+\tfrac{\pi}{4}\right)-\tfrac{9}{2}\right)$$

より, つねに $\sin^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{9}{2}<0$ であることに注意すれば, g の増減表は次のようになる.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$-\frac{3-\sqrt{2}}{2e^{\sqrt{2}}}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\frac{e^{\sqrt{2}}(3+\sqrt{2})}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{e}$

従って, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ において g は極大であり, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ において g は極小である. 故に f は条件 $x^2+y^2=1$ のもとで $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ において極大値 $\frac{3}{2}$ をとる. また, f は条件 $x^2+y^2=1$ のもとで $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ において極小値 $-\frac{3-\sqrt{2}}{2e^{\sqrt{2}}}$ をとり, $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ において極小値 $-\frac{e^{\sqrt{2}}(3+\sqrt{2})}{2}$ をとる.

(4) x, y は条件 $(x-1)^2+y^2=4$ を満たすため, $x=2\cos t+1$, $y=2\sin t$ とおける. このとき, $g:[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}$ を $g(t)=f\left(\begin{smallmatrix}2\cos t+1\\ 2\sin t\end{smallmatrix}\right)$ で定めれば, $g(t)=e^{-4\cos t-2}(8\cos^2 t+4\cos t-3)$ である. 従って $g'(t)=32e^{-4\cos t-2}\sin t\left(\cos t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ となるため g の増減表は次のようになる.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
g'	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
g	$\frac{9}{e^6}$	$\nearrow$	$\frac{1+2\sqrt{2}}{e^{2+2\sqrt{2}}}$	$\searrow$	$\frac{1-2\sqrt{2}}{e^{2-2\sqrt{2}}}$	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$\frac{1-2\sqrt{2}}{e^{2-2\sqrt{2}}}$	$\nearrow$	$\frac{1+2\sqrt{2}}{e^{2+2\sqrt{2}}}$	$\searrow$	$\frac{9}{e^6}$

従って, $\frac{\pi}{4}$, π, $\frac{7\pi}{4}$ において g は極大であり, 0, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, 2π において g は極小である. 故に f は条件 $x^2-2x+y^2=3$ のもとで $\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}$ において極大値 $\frac{1+2\sqrt{2}}{e^{2+2\sqrt{2}}}$ をとり, $\left(\begin{smallmatrix}-1\\ 0\end{smallmatrix}\right)$ において極大値 e^2 をとる. また, f は条件 $x^2-2x+y^2=3$ のもとで $\left(\begin{smallmatrix}3\\ 0\end{smallmatrix}\right)$ において極小値 $\frac{9}{e^6}$ をとり, $\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}$ において極小値 $\frac{1-2\sqrt{2}}{e^{2-2\sqrt{2}}}$ をとる.

(5) x, y は条件 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ を満たすため, $x=3\cos t$, $y=2\sin t$ とおける. このとき, $g:[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}$ を $g(t)=f\left(\begin{smallmatrix}3\cos t\\ 2\sin t\end{smallmatrix}\right)$ で定めれば, $g(t)=3\sin 2t$ である. 従って g の増減表は次のようになる.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
g	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

従って, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ において g は極大であり, 0, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ において g は極小である. 故に f は条件 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ のもとで $\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{2}}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{3}{\sqrt{2}}\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}$ において極大値 3 をとり, $\begin{pmatrix}-\frac{3}{\sqrt{2}}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{2}}\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}$ において極小値 -3 をとる.

(6) $4y^2-3x^2=1$ ならば $x=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{t}\right)$, $y=\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{t}\right)$ を満たす $t\neq 0$ がある. そこで, 関数 $g:\{t\in\boldsymbol{R}|\,t\neq 0\}\to\boldsymbol{R}$ を $g(t)=f\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{t}\right)\\ \frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{t}\right)\end{pmatrix}=\frac{1}{24\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{t}\right)^3+t+\frac{1}{t}$ で定めると,
$g'(t)=\frac{1}{8\sqrt{3}t^4}(t+1)(t-1)\left(t-2+\sqrt{3}\right)\left(t+2-\sqrt{3}\right)\left(t^2+7+4\sqrt{3}\right)$ より g の増減表は次のようになる.

t		-1		$-2+\sqrt{3}$		0		$2-\sqrt{3}$		1	
g'	$+$	0	$-$	0	$+$	—	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow\infty$	—	$-\infty\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$

故に f は条件 $4y^2-3x^2=1$ のもとで, $\left(\begin{smallmatrix}1\\ -1\end{smallmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ において, それぞれ極小値 -3, 2 をとり, $\begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\left(\begin{smallmatrix}-1\\ 1\end{smallmatrix}\right)$ において, それぞれ極大値 -2, 3 をとる.

(7) $x+y+xy^2=1$ ならば $x=\frac{1-y}{1+y^2}$ だから, 関数 $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $g(y)=f\begin{pmatrix}\frac{1-y}{1+y^2}\\ y\end{pmatrix}=\frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}$ で定義して g の増減を調べる. $g'(y)=\frac{2y(y^2-3)}{(y^2+1)^3}$ だから g の増減表は次のようになる.

y		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$

故に f は与えられた条件のもとで, $\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{4} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{4} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ で極小値 $-\dfrac{1}{8}$ をとり, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で極大値 1 をとる.

(8) x, y は条件 $2x^2+y^2=12$ を満たすため, $x=\sqrt{6}\cos t$, $y=2\sqrt{3}\sin t$ とおける. このとき, $g:[0,2\pi]\to \boldsymbol{R}$ を $g(t)=f\begin{pmatrix} \sqrt{6}\cos t \\ 2\sqrt{3}\sin t \end{pmatrix}$ で定めれば, $g(t)=8\sqrt{3}\sin t+6\sqrt{2}\cos t\sin t$ より,

$$\begin{aligned} g'(t) &= 8\sqrt{3}\cos t+6\sqrt{2}(\sin^2 t-\cos^2 t) = -12\sqrt{2}\cos^2 t+8\sqrt{3}\cos t+6\sqrt{2} \\ &= -12\sqrt{2}\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}-\cos t\right)\left(\cos t+\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right) \end{aligned}$$

である. $\alpha=\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ $(0<\alpha<\pi)$ とおくと, g の増減表は次のようになる.

t	0		α		$2\pi-\alpha$		2π
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	0	$\nearrow$	$5\sqrt{10}$	$\searrow$	$-5\sqrt{10}$	$\nearrow$	0

従って, α において g は極大であり, $2\pi-\alpha$ において g は極小である. $\sqrt{6}\cos\alpha=\sqrt{6}\cos(2\pi-\alpha)=-1$, $2\sqrt{3}\sin\alpha=2\sqrt{3}\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{10}$, $2\sqrt{3}\sin(2\pi-\alpha)=-\sqrt{10}$ だから f は条件 $2x^2+y^2=12$ のもとで $\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{10} \end{pmatrix}$ において極大値 $5\sqrt{10}$ をとり, $\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{10} \end{pmatrix}$ において極小値 $-5\sqrt{10}$ をとる.

(9) x, y は条件 $2x^2+y^2=2$ を満たすため, $x=\cos t$, $y=\sqrt{2}\sin t$ とおける. このとき, $g:[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}$ を $g(t)=f\begin{pmatrix} \cos t \\ \sqrt{2}\sin t \end{pmatrix}$ で定めれば, $g(t)=\sqrt{2}(\cos t\sin t+\cos t)$ より,

$$g'(t)=\sqrt{2}(\cos^2 t-\sin^2 t-\sin t)=\sqrt{2}(1-2\sin^2 t-\sin t)=\sqrt{2}(\sin t+1)(1-2\sin t)$$

となるため g の増減表は次のようになる.

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
g	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{6}}{4}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{6}}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$

従って, $\dfrac{\pi}{6}$ において g は極大であり, $\frac{\pi}{6}$ において g は極小である. 故に f は条件 $2x^2+y^2=2$ のもとで $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ において極大値 $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$ をとり, $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ において極小値 $-\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$ をとる.

(10) $x^2-y^3+1=0$ ならば $y=(x^2+1)^{\frac{1}{3}}$ だから, 関数 $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $g(x)=f\begin{pmatrix} x \\ (x^2+1)^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}=3x(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}$ で定義して g の増減を調べる. $g'(x)=(3-x^2)(x^2+1)^{-\frac{5}{3}}$ だから g の増減表は次のようになる.

x		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	
g'	$-$	0	$+$	0	$-$
g	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}$	$\searrow$

故に f は与えられた条件のもとで, $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt[3]{4} \end{pmatrix}$ で極小値 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}$ をとり, $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt[3]{4} \end{pmatrix}$ で極大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}$ をとる.

(11) $x+y-x^2y=0$ ならば $y=\frac{x}{x^2-1}$ だから, 関数 $g:\{x\in\boldsymbol{R}|\,x\neq\pm1\}\to\boldsymbol{R}$ を $g(x)=f\begin{pmatrix} x \\ \frac{x}{x^2-1} \end{pmatrix}=\frac{4x^4-3x^2}{x^2-1}$ で定

義して g の増減を調べる．$g'(x)=\frac{2x(2x^2-1)(2x^2-3)}{(x^2-1)^2}$ だから g の増減表は次のようになる．

x		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1		$\sqrt{\frac{3}{2}}$	
g'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
g	$\searrow$	9	$\nearrow\infty$		$-\infty\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow-\infty$		$\infty\searrow$	9	$\nearrow$

故に f は与えられた条件のもとで，$\begin{pmatrix}-\sqrt{\frac{3}{2}}\\-\sqrt{6}\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{3}{2}}\\\sqrt{6}\end{pmatrix}$ で極小値 9，$\binom{0}{0}$ で極小値 0 をとり，$\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ で極大値 1 をとる．

(12) $x^2-2y^2=1$ ならば $x=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$, $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(t-\frac{1}{t}\right)$ を満たす $t\neq 0$ がある．そこで，関数 $g:\{t\in\boldsymbol{R}|\,t\neq 0\}\to\boldsymbol{R}$ を $g(t)=f\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\\\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(t-\frac{1}{t}\right)\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\left(t^3-33t-\frac{33}{t}+\frac{1}{t^3}\right)$ で定めると，
$g'(t)=\frac{3}{16t^4}(t+1)(t-1)\left(t-\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(t+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(t-\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(t+\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ より g の増減表は次のようになる．

t		$-\sqrt{3}-\sqrt{2}$		-1		$-\sqrt{3}+\sqrt{2}$		0		$\sqrt{3}-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{3}+\sqrt{2}$	
g'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow-\infty$		$\infty\searrow$	$-3\sqrt{3}$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-3\sqrt{3}$	$\nearrow$

故に f は与えられた条件のもとで，$\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$ で極大値 $3\sqrt{3}$，$\binom{1}{0}$ で極大値 -4 をとり，$\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$ で極小値 $-3\sqrt{3}$，$\binom{-1}{0}$ で極小値 4 をとる．

(13) $3x^2-y^3=7$ ならば $y=(3x^2-7)^{\frac{1}{3}}$ だから，関数 $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $g(x)=f\begin{pmatrix}x\\(3x^2-7)^{\frac{1}{3}}\end{pmatrix}=x(3x^2-7)^{\frac{2}{3}}$ で定義して g の増減を調べる．$g'(x)=7(x^2-1)(3x^2-7)^{-\frac{1}{3}}$ だから g の増減表は次のようになる．

x		$-\sqrt{\frac{7}{3}}$		-1		1		$\sqrt{\frac{7}{3}}$	
g'	$+$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
g	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-2\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	$2\sqrt[3]{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

故に f は与えられた条件のもとで，$\begin{pmatrix}-\sqrt{\frac{7}{3}}\\0\end{pmatrix}$ で極大値 0，$\begin{pmatrix}1\\-\sqrt[3]{4}\end{pmatrix}$ で極大値 $2\sqrt[3]{2}$ をとり，$\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{7}{3}}\\0\end{pmatrix}$ 極小値 0，$\begin{pmatrix}-1\\-\sqrt[3]{4}\end{pmatrix}$ で極小値 $-2\sqrt[3]{2}$ をとる．

(14) $x+y+xy+5=0$ ならば $x\neq -1$ だから $y=\frac{-x-5}{x+1}$ である．関数 $g:\{x\in\boldsymbol{R}|\,x\neq -1\}\to\boldsymbol{R}$ を $g(x)=f\begin{pmatrix}x\\\frac{-x-5}{x+1}\end{pmatrix}=\frac{-x^4-5x^3}{x+1}$ で定義して g の増減を調べる．$g'(x)=\frac{-x^2(3x+5)(x+3)}{(x+1)^2}$ だから g の増減表は次のようになる．

x		-3		$-\frac{5}{3}$		-1		0	
g'	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$-$
g	$\searrow$	-27	$\nearrow$	$-\frac{625}{27}$	$\searrow$		$\searrow$	0	$\searrow$

故に f は与えられた条件のもとで，$\binom{-3}{1}$ で極小値 -27 をとり，$\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}\\5\end{pmatrix}$ で極大値 $-\dfrac{625}{27}$ をとる．

(15) x, y は条件 $4x^2+y^2=4$ を満たすため，$x=\cos t$, $y=2\sin t$ とおける．このとき，$g:[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}$ を $g(t)=f\binom{\cos t}{2\sin t}$ で定めれば，$g(t)=4\cos^3 t\sin t=\sin 2t(\cos 2t+1)$ である．$g'(t)=2\cos 2t(\cos 2t+1)-2\sin^2 2t=\cos 4t+\cos 2t=4\cos 3t\cos t$ だから g の増減表は次のようになる．

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
g'	4	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	4
g	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0

故に f は与えられた条件のもとで, $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ で極小値 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ をとり, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ で $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ で極大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ をとる.

(16) $x-2y-xy^2+2=(1-y)(xy+x+2)$ だから $x-2y-xy^2+2=0$ ならば $y=1$ または $xy+x+2=0$ である. 関数 $g_1:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $g_2:\{x\in\boldsymbol{R}|\, x\neq 0\}\to\boldsymbol{R}$ を $g_1(x)=f\left(\begin{smallmatrix} x \\ 1 \end{smallmatrix}\right)=x$, $g_2(x)=f\left(\begin{smallmatrix} x \\ -\frac{2}{x}-1 \end{smallmatrix}\right)=-\frac{8}{x^2}-\frac{12}{x}-6-x$ で定義する. g_1 は単調に増加するため, 直線 $y=1$ 上で f は極値をとらない. $g_2'(x)=\frac{16}{x^3}+\frac{12}{x^2}-1=\frac{-(x+2)^2(x-4)}{x^3}$ だから g_2 の増減表は次のようになる.

x		-2		0		4	
g_2'	$-$	0	$-$		$+$	0	$-$
g_2	$\searrow$	0	$\searrow -\infty$		$-\infty\nearrow$	$-\frac{27}{2}$	$\searrow$

よって f は条件 $xy+x+2=0$ のもとで, $\begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ で極大値 $-\dfrac{27}{2}$ をとる. この点は直線 $y=1$ 上にないため f は与えられた条件のもとで, $\begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ で極大値 $-\dfrac{27}{2}$ をとる.

(17) $x^3-4y^3+3x^2y=(x-y)(x+2y)^2$ だから, 条件 $x^3-4y^3+3x^2y=0$ は「$x=y$ または $x=-2y$」と同値である. $f\left(\begin{smallmatrix} y \\ y \end{smallmatrix}\right)=(y-1)^2-1$ だから f は条件 $x=y$ のもとで, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ において極小値 -1 をとり, $f\left(\begin{smallmatrix} -2y \\ y \end{smallmatrix}\right)=4\left(y-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}$ だから f は条件 $x=-2y$ のもとで, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ において極小値 $-\frac{1}{4}$ をとる.

(18) x, y は条件 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$ を満たすため, $x=\frac{a}{\cos t}$, $y=\frac{a}{\sin t}$ $\left(t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\cup\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},\pi\right)\right)$ とおける. このとき, $g:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\cup\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},\pi\right)\to\boldsymbol{R}$ を $g(t)=f\begin{pmatrix} \frac{a}{\cos t} \\ \frac{a}{\sin t} \end{pmatrix}$ で定めれば, $g(t)=\frac{\cos t+\sin t}{a}=\frac{\sqrt{2}}{a}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$ だから, $\frac{\pi}{4}$ において g は極大値 $\frac{\sqrt{2}}{a}$ をとり, $\frac{5\pi}{4}$ において g は極小値 $-\frac{\sqrt{2}}{a}$ をとる. 故に f は条件 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$ のもとで $\begin{pmatrix} \sqrt{2}a \\ \sqrt{2}a \end{pmatrix}$ において極大値 $\frac{\sqrt{2}}{a}$ をとり, $\begin{pmatrix} -\sqrt{2}a \\ -\sqrt{2}a \end{pmatrix}$ において極小値 $-\frac{\sqrt{2}}{a}$ をとる.

(19) $\varphi:\left\{\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\, r>0, \theta\in\boldsymbol{R}\right\}\to\boldsymbol{R}^2$ を $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ で定めれば, φ は

$$\left\{\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\, -\tfrac{\pi}{2}<\theta<\tfrac{\pi}{2}, r=e^{\theta}\right\} \text{ から } \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\, x>0, \log(x^2+y^2)-2\tan^{-1}\tfrac{y}{x}=0\right\} \text{ へ,}$$

$$\left\{\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\, \tfrac{\pi}{2}<\theta<\tfrac{3\pi}{2}, r=e^{\theta-\pi}\right\} \text{ から } \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\, x<0, \log(x^2+y^2)-2\tan^{-1}\tfrac{y}{x}=0\right\} \text{ への}$$

全単射を与えるため, 条件 $\log(x^2+y^2)-2\tan^{-1}\frac{y}{x}=0$ のもとで f の極値を求めるためには, 条件「$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ かつ $r=e^{\theta}$」または「$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$ かつ $r=e^{\theta-\pi}$」における $f\circ\varphi$ の極値を求めればよい. $f\circ\varphi\left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right)=\sqrt{2}r^2\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ だから $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ かつ $r=e^{\theta}$ の場合, $g(\theta)=f\circ\varphi\begin{pmatrix} e^{\theta}\cos\theta \\ e^{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$ によって $g:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $g(\theta)=\sqrt{2}e^{2\theta}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ である. $g'(\theta)=4e^{2\theta}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ だから g の増減表は次のようになる.

θ		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$	
g'	$-$	0	$+$	0	$-$
g	$\searrow$	$-e^{-\frac{\pi}{2}}$	$\nearrow$	$e^{\frac{\pi}{2}}$	$\searrow$

従って, $\frac{\pi}{4}$ で g は極大であり, $-\frac{\pi}{4}$ で g は極小である.

$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$ かつ $r=e^{\theta-\pi}$ の場合, $h(\theta)=f\circ\varphi\begin{pmatrix} e^{\theta-\pi}\cos\theta \\ e^{\theta-\pi}\sin\theta \end{pmatrix}$ によって $h:\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $h(\theta)=\sqrt{2}e^{2(\theta-\pi)}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ である. $h'(\theta)=4e^{2(\theta-\pi)}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ だから h の増減表は次のようになる.

θ		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$	
h'	$-$	0	$+$	0	$-$
h	$\searrow$	$-e^{-\frac{\pi}{2}}$	$\nearrow$	$e^{\frac{\pi}{2}}$	$\searrow$

従って, g は $\frac{\pi}{4}$ で極大, $-\frac{\pi}{4}$ で極小であり, h は $\frac{5\pi}{4}$ で極大, $\frac{3\pi}{4}$ で極小である. 故に f は条件 $\log(x^2+y^2)-2\tan^{-1}\frac{y}{x}=0$ のもとで $\begin{pmatrix}\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\\ \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\\ -\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ において極大値 $e^{\frac{\pi}{2}}$ をとり, $\begin{pmatrix}\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\\ -\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\\ \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ において極小値 $-e^{-\frac{\pi}{2}}$ をとる.

(20) $\sin x+\sin y=1$ のとき, $\sin y=1-\sin x\leqq 1$ より $\sin x\geqq 0$ となるため, x は n がすべての整数を動いたときの閉区間 $[2n\pi,(2n+1)\pi]$ の合併集合を動く. $f\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)=\sin x(1-\sin x)$ だから $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $g(x)=\sin x(1-\sin x)$ で定義すれば $g'(x)=\cos x(1-2\sin x)$ だから g の $[2n\pi,(2n+1)\pi]$ における増減表は次のようになる.

x	$2n\pi$		$\frac{(12n+1)\pi}{6}$		$\frac{(4n+1)\pi}{2}$		$\frac{(12n+5)\pi}{6}$		$(2n+1)\pi$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

従って $\begin{pmatrix}n\pi\\ \frac{(4m+1)\pi}{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{(4n+1)\pi}{2}\\ 2m\pi\end{pmatrix}$ (m, n は任意の整数) において f は最小値 0 をとり, $\begin{pmatrix}\frac{(12n+1)\pi}{6}\\ \frac{(12m+1)\pi}{6}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{(12n+5)\pi}{6}\\ \frac{(12m+1)\pi}{6}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{(12n+1)\pi}{6}\\ \frac{(12m+5)\pi}{6}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{(12n+5)\pi}{6}\\ \frac{(12m+5)\pi}{6}\end{pmatrix}$, ($m$, n は任意の整数) において f は最大値 $\dfrac{1}{4}$ をとる.

(21) 条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ かつ $x^2+y^2+z^2=d^2$ が成り立つとき, $z^2=d^2-x^2-y^2$ を 1 つ目の式に代入すれば $\frac{a^2+c^2}{a^2(c^2+d^2)}x^2+\frac{b^2+c^2}{b^2(c^2+d^2)}y^2=1$ となる. そこで $\alpha=a\sqrt{\frac{c^2+d^2}{a^2+c^2}}$, $\beta=b\sqrt{\frac{c^2+d^2}{b^2+c^2}}$ とおけば $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ となるため, $x=\alpha\cos t$, $y=\beta\sin t$ とおける. このとき, $z=\pm\sqrt{d^2-\alpha^2\cos^2 t-\beta^2\sin^2 t}$ であり, $g:[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}$ を $g(t)=z^2=d^2-x^2-y^2=d^2-\alpha^2\cos^2 t-\beta^2\sin^2 t$ で定めれば, $g(t)=d^2-\alpha^2-(\beta^2-\alpha^2)\sin^2 t$ となるため $g'(t)=-(\beta^2-\alpha^2)\sin 2t$ である. $b>a>0$ だから $\beta^2>\alpha^2$ であることに注意すれば g の増減表は次のようになる.

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
g'	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
g	$\frac{c^2(d^2-a^2)}{a^2+c^2}$	$\searrow$	$\frac{c^2(d^2-b^2)}{b^2+c^2}$	$\nearrow$	$\frac{c^2(d^2-a^2)}{a^2+c^2}$	$\searrow$	$\frac{c^2(d^2-b^2)}{b^2+c^2}$	$\nearrow$	$\frac{c^2(d^2-a^2)}{a^2+c^2}$

従って, 0, π, 2π において g は極大であり, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ において g は極小である. 故に f は条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ かつ $x^2+y^2+z^2=d^2$ のもとで $\begin{pmatrix}a\sqrt{\frac{c^2+d^2}{a^2+c^2}}\\ 0\\ \pm c\sqrt{\frac{d^2-a^2}{a^2+c^2}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-a\sqrt{\frac{c^2+d^2}{a^2+c^2}}\\ 0\\ \pm c\sqrt{\frac{d^2-a^2}{a^2+c^2}}\end{pmatrix}$ において極大値 $\frac{c^2(d^2-a^2)}{a^2+c^2}$ をとり, $\begin{pmatrix}0\\ b\sqrt{\frac{c^2+d^2}{b^2+c^2}}\\ \pm c\sqrt{\frac{d^2-b^2}{b^2+c^2}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\ -b\sqrt{\frac{c^2+d^2}{b^2+c^2}}\\ \pm c\sqrt{\frac{d^2-b^2}{b^2+c^2}}\end{pmatrix}$ において極小値 $\frac{c^2(d^2-b^2)}{b^2+c^2}$ をとる.

(22) x, y は条件 $x^2+y^2=5$ を満たすため, $x=\sqrt{5}\cos t$, $y=\sqrt{5}\sin t$ とおける. このとき, $g:[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}$ を $g(t)=f\begin{pmatrix}\sqrt{5}\cos t\\ \sqrt{5}\sin t\end{pmatrix}$ で定めれば,

$$\begin{aligned}g(t)&=25\cos^4 t+25\sin^4 t-10\cos t\sin t-5\\&=25\left((\cos^2 t+\sin^2 t)^2-2\cos^2 t\sin^2 t\right)-10\cos t\sin t-5\\&=20-50\cos^2 t\sin^2 t-10\cos t\sin t=20-\frac{25}{2}\sin^2 2t-5\sin 2t\end{aligned}$$

より, $g'(t)=-10\cos 2t(5\sin 2t+1)$ である. $\alpha=-\sin^{-1}\frac{1}{5}$ とおくと, $-\frac{\pi}{6}<\alpha<0$ だから, g の増減表は次のようになる.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\pi+\frac{\alpha}{2}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		$2\pi+\frac{\alpha}{2}$		2π
g'	-10	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	-10
g	20	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$\frac{41}{2}$	$\searrow$	$\frac{25}{2}$	$\nearrow$	$\frac{41}{2}$	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$\frac{41}{2}$	$\searrow$	$\frac{25}{2}$	$\nearrow$	$\frac{41}{2}$	$\searrow$	20

従って, $\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}, \pi+\frac{\alpha}{2}, \frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}, 2\pi+\frac{\alpha}{2}$ において g は極大であり, $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ において g は極小である.

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{5+2\sqrt{6}}{10} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}{6}$, $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{5-2\sqrt{6}}{10} = \frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}{10}6$ だから $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$, $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$ である. 故に f は条件 $x^2+y^2=5$ のもとで $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ において極大値 $\dfrac{41}{2}$ をとる. また, f は条件 $x^2+y^2=5$ のもとで $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{2} \\ \frac{\sqrt{10}}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{2} \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{pmatrix}$ において極小値 $\dfrac{5}{2}$ をとり, $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{2} \\ \frac{\sqrt{10}}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{2} \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{pmatrix}$ において極小値 $\dfrac{25}{2}$ をとる.

(23) x, y は条件 $x^2+2y^2=3$ を満たすため, $x=\sqrt{3}\cos t$, $y=\sqrt{\frac{3}{2}}\sin t$ とおける. このとき, $g:[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}$ を $g(t)=f\begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos t \\ \sqrt{\frac{3}{2}}\sin t \end{pmatrix}$ で定めれば, $g(t)=\frac{3\sqrt{3}}{2}(2\cos^3 t+3\cos t\sin^2 t-2\cos t)=\frac{3\sqrt{3}}{2}(\cos t-\cos^3 t)$ より, $g'(t)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\sin t(2-3\sin^2 t)$ である. $\alpha=\sin^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$ とおくと, $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{3}$ だから, g の増減表は次のようになる.

t	0		α		$\pi-\alpha$		π		$\pi+\alpha$		$2\pi-\alpha$		2π
g'	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
g	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

従って, $\alpha, \pi, 2\pi-\alpha$ において g は極大であり, $0, \pi-\alpha, \pi+\alpha$ において g は極小である.

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ だから f は条件 $x^2+2y^2=3$ のもとで $\binom{1}{1}$, $\binom{1}{-1}$ において極大値 1 をとり, $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ において極大値 0 をとる. また, f は条件 $x^2+2y^2=3$ のもとで $\binom{-1}{1}$, $\binom{-1}{-1}$ において極小値 -1 をとり, $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ において極小値 0 をとる.

(24) x, y は条件 $x^2+2(y+1)^2=9$ を満たすため, $x=3\cos t$, $y=\frac{3}{\sqrt{2}}\sin t-1$ とおける. このとき, $g:[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}$ を $g(t)=f\begin{pmatrix} 3\cos t \\ \frac{3}{\sqrt{2}}\sin t-1 \end{pmatrix}$ で定めれば, $g(t)=27\cos^3 t+\frac{9}{2}\cos t(9\sin^2 t-8)=\frac{9}{2}\cos t-\frac{27}{2}\cos^3 t$ より, $g'(t)=\frac{9}{2}\sin t(8-9\sin^2 t)$ である. $\alpha=\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}$ とおくと, $\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ だから, g の増減表は次のようになる.

t	0		α		$\pi-\alpha$		π		$\pi+\alpha$		$2\pi-\alpha$		2π
g'	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
g	-9	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	9	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-9

従って, $\alpha, \pi, 2\pi-\alpha$ において g は極大であり, $0, \pi-\alpha, \pi+\alpha$ において g は極小である.

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{3}$ だから f は条件 $x^2+2y^2+4y=7$ のもとで $\binom{1}{1}$, $\binom{1}{-3}$ において極大値 1 をとり, $\binom{-3}{-1}$ において極大値 9 をとる. また, f は条件 $x^2+2y^2+4y=7$ のもとで $\binom{-1}{1}$, $\binom{-1}{-3}$ において極小値 -1 をとり, $\binom{3}{-1}$ において極小値 -9 をとる.

(25) x, y は条件 $2x^2+y^2=10$ を満たすため, $x=\sqrt{5}\cos t$, $y=\sqrt{10}\sin t$ とおける. このとき, $g:[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}$ を $g(t)=f\begin{pmatrix} \sqrt{5}\cos t \\ \sqrt{10}\sin t \end{pmatrix}$ で定めれば, $g(t)=20\sqrt{2}\cos t\sin t-4\sqrt{5}\cos t+10$ より, $g'(t)=20\sqrt{2}(1-2\sin^2 t)+4\sqrt{5}\sin t=-40\sqrt{2}\sin^2 t+4\sqrt{5}\sin t+20\sqrt{2}=-40\sqrt{2}\left(\sin t+\frac{\sqrt{10}}{5}\right)\left(\sin t-\frac{\sqrt{10}}{4}\right)$ である. $\alpha=-\sin^{-1}\frac{\sqrt{10}}{5}$, $\beta=\sin^{-1}\frac{\sqrt{10}}{4}$ とおくと, $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0<\beta<\frac{\pi}{2}$ であり, $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sqrt{15}}{5}$, $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ だから, $g(\beta)=10+\frac{3\sqrt{30}}{2}$, $g(\pi-\beta)=10-\frac{3\sqrt{30}}{2}$, $g(\pi-\alpha)=10+12\sqrt{3}$, $g(2\pi+\alpha)=10-12\sqrt{3}$ となるため, g の増減表は次のようになる.

t	0		β		$\pi-\beta$		$\pi-\alpha$		$2\pi+\alpha$		2π
g'	$20\sqrt{2}$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$20\sqrt{2}$
g	$10-4\sqrt{5}$	$\nearrow$	$10+\frac{3\sqrt{30}}{2}$	$\searrow$	$10-\frac{3\sqrt{30}}{2}$	$\nearrow$	$10+12\sqrt{3}$	$\searrow$	$10-12\sqrt{3}$	$\nearrow$	$10-4\sqrt{5}$

従って, β, $\pi-\alpha$ において g は極大であり, $\pi-\beta$, $2\pi+\alpha$ において g は極小になるため, f は条件 $2x^2+y^2=10$ のもとで $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{30}}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ において極大値 $10+\frac{3\sqrt{30}}{2}$ をとり, $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix}$ において極大値 $10+12\sqrt{3}$ をとる．また, f は条件 $2x^2+y^2=10$ のもとで $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{30}}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ において極小値 $10-\frac{3\sqrt{30}}{2}$ をとり, $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix}$ において極小値 $10-12\sqrt{3}$ をとる．

(26) x, y は条件 $(x-2)^2+(y+2)^2=18$ を満たすため, $x=3\sqrt{2}\cos t+2$, $y=3\sqrt{2}\sin t-2$ とおける．このとき, $g:[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}$ を $g(t)=f\begin{pmatrix} 3\sqrt{2}\cos t+2 \\ 3\sqrt{2}\sin t-2 \end{pmatrix}$ で定めれば, $g(t)=(18\cos^2 t-4)(18\sin^2 t-4)=25-81\cos^2 2t=-\frac{31+81\cos 4t}{2}$ より, g は $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ で増加, $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ で減少, $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$ で増加, $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ で減少, $\left[\pi,\frac{5\pi}{4}\right]$ で増加, $\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right]$ で減少, $\left[\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right]$ で増加, $\left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$ で減少するため, g は $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ で極大値 25 をとり, 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ で極小値 -56 をとる．従って f は条件 $x^2-4x+y^2+4y=10$ のもとで $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ において極大値 25 をとり, $\begin{pmatrix} 3\sqrt{2}+2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3\sqrt{2}-2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3\sqrt{2}+2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -3\sqrt{2}-2 \end{pmatrix}$ において極小値 -56 をとる．

(27) x, y は条件 $x^2+y^2=12$ を満たすため, $x=2\sqrt{3}\cos t$, $y=2\sqrt{3}\sin t$ とおける．このとき, $g:[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}$ を $g(t)=f\begin{pmatrix} 2\sqrt{3}\cos t \\ 2\sqrt{3}\sin t \end{pmatrix}$ で定めれば, $g(t)=24\sqrt{3}\cos^3 t-24\sqrt{3}\sin^3 t+36(\cos t-\sin t)^2$ より, $g'(t)=-72\sqrt{3}\cos^2 t\sin t-72\sqrt{3}\cos t\sin^2 t-72(\cos^2 t-\sin^2 t)=72(\cos t+\sin t)\left(-\sqrt{3}\cos t\sin t-\cos t+\sin t\right)$ である．$z=\cos t-\sin t$ とおくと, $z^2=1-2\cos t\sin t$ だから, $-\sqrt{3}\cos t\sin t-\cos t+\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}(z^2-1)-z=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(z+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(z-\sqrt{3}\right)$ であり, さらに $z=-\sqrt{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$ より, $g'(t)=36\sqrt{6}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\left(\sqrt{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\right)$ が成り立つ．$\alpha=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{\pi}{4}$ とおくと, $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ であり, $\cos\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\frac{\sqrt{30}}{6}$ より $\sin\alpha=\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$, $\cos\alpha=\cos\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}$ である．従って $g(\alpha)=g\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-20$ となるため, g の増減表は次のようになる．

t	0		α		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}-\alpha$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
g'	-72	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	-72
g	$36+24\sqrt{3}$	$\searrow$	-20	$\nearrow$	$72-12\sqrt{6}$	$\searrow$	-20	$\nearrow$	$72+12\sqrt{6}$	$\searrow$	$36+24\sqrt{3}$

従って, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ において g は極大であり, α, $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ において g は極小になるため, f は条件 $x^2+y^2=12$ のもとで $\begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$ において極大値 $72-12\sqrt{6}$ をとり, $\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix}$ において極大値 $72+12\sqrt{6}$ をとる．また, f は条件 $x^2+y^2=12$ のもとで $\begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 \\ \sqrt{5}+1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -\sqrt{5}-1 \\ -\sqrt{5}+1 \end{pmatrix}$ において極小値 -20 をとる．

(28) $x=r\cos\theta$, $y=\sin\theta$ とおくと $x^2+y^2=r^2$ であり, $x^4+y^4=1$ だから $r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)=1$ である．ここで, $\cos^4\theta+\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-2\cos^2\theta\sin^2\theta=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\theta$ だから $r^2=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sin^2 2\theta}}$ が成り立つ．従って r^2 は, θ の関数として区間 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$, $\left[\pi,\frac{5\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right]$ で単調に増加し, 区間 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$, $\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$ で単調に減少する．故に r^2 は $\theta=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}$ のときに極大値 $\sqrt{2}$ をとり, $\theta=0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2}$ のときに極小値 1 をとるため, f は条件 $x^4+y^4=1$ のもとで $\pm\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{pmatrix}$ において極大値 $\sqrt{2}$ をとり, $\pm\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ において極小値 1 をとる．

[別解] $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=x^4+y^4-1$ で $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定義する．$\frac{\partial F}{\partial x}=4x^3$, $\frac{\partial F}{\partial y}=4y^3$ だから $\frac{\partial F}{\partial x}$ と $\frac{\partial F}{\partial y}$ は原点以外では同時に 0 にはならないが, 原点は $x^4+y^4=1$ で定まる曲線上にない．従って, 点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ において f が条件 $x^4+y^4=1$ のも

とで極値をとるならば, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ より $\lambda \in \boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases} x^4 + y^4 - 1 = 0 & \cdots (i) \\ 2x = 4\lambda x^3 & \cdots (ii) \\ 2y = 4\lambda y^3 & \cdots (iii) \end{cases}$$

(ii) より $x = 0$ または $2\lambda x^2 = 1$ である. $x = 0$ の場合は (i) から $y = \pm 1$ である. $2\lambda x^2 = 1$ の場合, (iii) の両辺に x^2 をかけると $2x^2 y = 2y^3$ だから $y = 0$ または $y = \pm x$ である. (i) から $y = 0$ ならば $x = \pm 1$ であり, $y = \pm x$ ならば $y = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ である. 故に, 条件 $x^4 + y^4 = 1$ のもとで f が極値をとる候補の点は $\pm\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\pm\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\pm\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\\ \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\end{pmatrix}$ である.

$f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = z$ とおけば, $z^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$, $y^2 = z - x^2$, $x^2 = z - y^2$ だから, 条件 $x^4 + y^4 = 1$ のもとでは $2x^2(z - x^2) - z^2 + 1 = 0$, $2y^2(z - y^2) - z^2 + 1 = 0$ が成り立つ. そこで $G : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を $G\left(\begin{smallmatrix}w\\z\end{smallmatrix}\right) = 2w^2(z - w^2) - z^2 + 1$ で定めて z を $G\left(\begin{smallmatrix}w\\z\end{smallmatrix}\right) = 0$ から定まる w の陰関数とみなす. $\frac{\partial G}{\partial w} = 4w(z - 2w^2)$, $\frac{\partial G}{\partial z} = 2(w^2 - z)$, $\frac{\partial^2 G}{\partial w^2} = 4(z - 6w^2)$ だから次の表が得られる. ただし, $\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right) = 0$ の場合は, z が x の陰関数として定義されず, $\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}y\\z\end{smallmatrix}\right) = 0$ の場合は, z が y の陰関数として定義されない. 従って, 下の表の該当する部分は計算する必要がないため — を挿入した.

$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}-1\\0\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right)$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\\ \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\\ \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\end{pmatrix}$
$\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$
$\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)$	0	0	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{\partial G}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)$	—	—	0	0	0	0	0	0
$\frac{\partial^2 G}{\partial w^2}\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)$	—	—	1	1	$-8\sqrt{2}$	$-8\sqrt{2}$	$-8\sqrt{2}$	$-8\sqrt{2}$
$-\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial w^2}\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)}$	—	—	1	1	-8	-8	-8	-8
$\left(\begin{smallmatrix}y\\z\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$
$\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}y\\z\end{smallmatrix}\right)$	-1	-1	0	0	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{\partial G}{\partial w}\left(\begin{smallmatrix}y\\z\end{smallmatrix}\right)$	0	0	—	—	0	0	0	0
$\frac{\partial^2 G}{\partial w^2}\left(\begin{smallmatrix}y\\z\end{smallmatrix}\right)$	1	1	—	—	$-8\sqrt{2}$	$-8\sqrt{2}$	$-8\sqrt{2}$	$-8\sqrt{2}$
$-\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial w^2}\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)}$	1	1	—	—	-8	-8	-8	-8

上の表から条件 $x^4 + y^4 = 1$ のもとで f は $\pm\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\pm\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ において極小値 1 をとり, $\pm\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\\ \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\end{pmatrix}$ において極大値 $\sqrt{2}$ をとる.

(29) x, y は条件 $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2$ を満たすため, $x = 2\sqrt{2}\cos^3 t$, $y = 2\sqrt{2}\sin^3 t$ とおける. このとき, $g : [0, 2\pi] \to \boldsymbol{R}$ を $g(t) = f\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\cos^3 t\\ 2\sqrt{2}\sin^3 t\end{pmatrix}$ で定めれば, $g(t) = 2\sqrt{2}a\cos^3 t - 3\sqrt{2}\sin t$ より, $g'(t) = -6\sqrt{2}a\sin t\cos^2 t - 3\sqrt{2}\cos t = -3\sqrt{2}\cos t(a\sin 2t + 1)$ である. $\alpha = \sin^{-1}\frac{1}{a}$ とおくと, $0 < \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ であり, g の増減表は次のようになる.

t	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$		$\pi - \frac{\alpha}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$		$2\pi - \frac{\alpha}{2}$		2π
g'	$-3\sqrt{2}$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-3\sqrt{2}$
g	$2\sqrt{2}a$	$\searrow$	$-3\sqrt{2}$	$\nearrow$	$g\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$	$\searrow$	$g\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)$	$\nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	$g\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$	$\nearrow$	$g\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right)$	$\searrow$	$2\sqrt{2}a$

従って, $\frac{3\pi}{2}$ において g は極大で, $\frac{\pi}{2}$ において g は極小であり, $a > 1$ ならば, さらに $\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$, $2\pi - \frac{\alpha}{2}$ において g は極大であり, $\pi - \frac{\alpha}{2}$, $\frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$ において g は極小である.

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$, $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-1}}{2a}}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2a}}$ だから,

$$g\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = -2\sqrt{2}a\sin^3\frac{\alpha}{2} - 3\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\left(a - \sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{a + \sqrt{a^2-1}}\right)$$

$$g\left(\pi-\tfrac{\alpha}{2}\right)=-2\sqrt{2}a\cos^3\tfrac{\alpha}{2}-3\sqrt{2}\sin\tfrac{\alpha}{2}=-\tfrac{1}{\sqrt{a}}\left(\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{3}{2}}+3\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}\right)$$
$$g\left(\tfrac{3\pi}{2}+\tfrac{\alpha}{2}\right)=2\sqrt{2}a\sin^3\tfrac{\alpha}{2}+3\sqrt{2}\cos\tfrac{\alpha}{2}=\tfrac{1}{\sqrt{a}}\left(\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{3}{2}}+3\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}\right)$$
$$g\left(2\pi-\tfrac{\alpha}{2}\right)=2\sqrt{2}a\cos^3\tfrac{\alpha}{2}+3\sqrt{2}\sin\tfrac{\alpha}{2}=\tfrac{1}{\sqrt{a}}\left(\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{3}{2}}+3\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}\right)$$

が得られる．従って，f は条件 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=2$ のもとで $\left(\begin{smallmatrix}0\\-2\sqrt{2}\end{smallmatrix}\right)$ において極大値 $3\sqrt{3}$ をとり，$a>1$ ならば $\begin{pmatrix}-\left(\frac{a-\sqrt{a^2-1}}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\\ \left(\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\end{pmatrix}$ において極大値 $-\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{3}{2}}+3\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}\right)$ をとり，$\begin{pmatrix}\left(\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\\ -\left(\frac{a-\sqrt{a^2-1}}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\end{pmatrix}$ において極大値 $\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{3}{2}}+3\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}\right)$ をとる．また，f は条件 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=2$ のもとで $\left(\begin{smallmatrix}0\\2\sqrt{2}\end{smallmatrix}\right)$ において極小値 $-3\sqrt{2}$ をとり，$a>1$ ならば $\begin{pmatrix}-\left(\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\\ \left(\frac{a-\sqrt{a^2-1}}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\end{pmatrix}$ において極小値 $-\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{3}{2}}+3\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}\right)$ をとり，$\begin{pmatrix}\left(\frac{a-\sqrt{a^2-1}}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\\ -\left(\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\end{pmatrix}$ において極小値 $\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{3}{2}}+3\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}\right)$ をとる．

(30) $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ が条件 $x^3+y^3-6axy=0$ を満たすとき，$x=r\cos t$, $y=r\sin t$ とおくと $r^2(r\cos^3 t+r\sin^3 t-6a\cos t\sin t)=0$ だから，$r=0$ または $r=\dfrac{6a\cos t\sin t}{\cos^3 t+\sin^3 t}$ $(t\neq\frac{3\pi}{4}+\pi n$ ただし n は整数$)$ である．故に曲線 $x^3+y^3-3xy=0$ は $\begin{cases}x=\frac{6a\cos^2 t\sin t}{\cos^3 t+\sin^3 t}\\ y=\frac{6a\cos t\sin^2 t}{\cos^3 t+\sin^3 t}\end{cases}$ によってパラメータ表示される．ここで，$\dfrac{6a\cos^2(\pi+t)\sin(\pi+t)}{\cos^3(\pi+t)+\sin^3(\pi+t)}=\dfrac{6a\cos^2 t\sin t}{\cos^3 t+\sin^3 t}$, $\dfrac{6a\cos(\pi+t)\sin^2(\pi+t)}{\cos^3(\pi+t)+\sin^3(\pi+t)}=\dfrac{6a\cos t\sin^2 t}{\cos^3 t+\sin^3 t}$ が成り立つため t が動く範囲は区間 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ であるとしてよい．

このとき，$g:\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)\to\boldsymbol{R}$ を $g(t)=f\begin{pmatrix}\frac{6a\cos^2 t\sin t}{\cos^3 t+\sin^3 t}\\ \frac{6a\cos t\sin^2 t}{\cos^3 t+\sin^3 t}\end{pmatrix}$ で定めれば，

$$g(t)=\frac{36a^2\cos^3 t\sin^3 t}{(\cos^3 t+\sin^3 t)^2}=\frac{36a^2\cos^3 t\sin^3 t}{(\cos t+\sin t)^2(1-\cos t\sin t)^2}=\frac{36a^2\sin^3 2t}{2(1+\sin 2t)(2-\sin 2t)^2}$$

より，$g'(t)=\dfrac{108a^2\cos 2t\sin^2 2t(2+\sin 2t)}{(1+\sin 2t)^2(2-\sin 2t)^3}$ となるため，$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ で g は単調に増加し，$\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ で g は単調に減少する．従って，$\frac{\pi}{4}$ において g は極大になるため，f は $\left(\begin{smallmatrix}3a\\3a\end{smallmatrix}\right)$ において極大値 $9a^2$ をとる．

(31) $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ が条件 $x^3+y^3-6axy=0$ を満たすとき，$x=r\cos t$, $y=r\sin t$ とおくと

$$r^2(r\cos^3 t+r\sin^3 t-6a\cos t\sin t)=0$$

だから，$r=0$ または $r=\dfrac{6a\cos t\sin t}{\cos^3 t+\sin^3 t}$ $(t\neq\frac{3\pi}{4}+\pi n$ ただし n は整数$)$ である．故に曲線 $x^3+y^3-6axy=0$ は $\begin{cases}x=\frac{6a\cos^2 t\sin t}{\cos^3 t+\sin^3 t}\\ y=\frac{6a\cos t\sin^2 t}{\cos^3 t+\sin^3 t}\end{cases}$ によってパラメータ表示される．ここで，$\dfrac{6a\cos^2(\pi+t)\sin(\pi+t)}{\cos^3(\pi+t)+\sin^3(\pi+t)}=\dfrac{6a\cos^2 t\sin t}{\cos^3 t+\sin^3 t}$, $\dfrac{6a\cos(\pi+t)\sin^2(\pi+t)}{\cos^3(\pi+t)+\sin^3(\pi+t)}=\dfrac{6a\cos t\sin^2 t}{\cos^3 t+\sin^3 t}$ が成り立つため t が動く範囲は区間 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ であるとしてよい．

このとき，$g:\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)\to\boldsymbol{R}$ を $g(t)=f\begin{pmatrix}\frac{6a\cos^2 t\sin t}{\cos^3 t+\sin^3 t}\\ \frac{6a\cos t\sin^2 t}{\cos^3 t+\sin^3 t}\end{pmatrix}$ で定めれば，

$$g(t)=\frac{36a^2\cos^2 t\sin^2 t}{(\cos^3 t+\sin^3 t)^2}=\frac{36a^2\cos^2 t\sin^2 t}{(\cos t+\sin t)^2(1-\cos t\sin t)^2}=\frac{36a^2\sin^2 2t}{(1+\sin 2t)(2-\sin 2t)^2}$$

より，$g'(t)=\dfrac{36a^2\sin 4t((\sin 2t+1)^2+2)}{(1+\sin 2t)^2(2-\sin 2t)^3}$ となるため，$\left(-\frac{\pi}{4},0\right]$, $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ で g は単調に減少し，$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$ で g は

単調に増加する．従って g は $0, \frac{\pi}{2}$ において極小, $\frac{\pi}{4}$ において極大になるため, f は $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ において極小値 0 をとり, $\left(\begin{smallmatrix} 3a \\ 3a \end{smallmatrix}\right)$ において極大値 $18a^2$ をとる．

[別解] 原点 $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ は条件 $x^3+y^3-6axy=0$ を満たし, f は原点において最小値 0 をとるため, 条件 $x^3+y^3-6axy=0$ のもとでも f は原点で最小値をとる．従って, 条件 $x^3+y^3-6axy=0$ のもとで, 原点において f は極小値 0 をとる．

$F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^3+y^3-6axy$ で $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定義する．$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2-6ay$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2-6ax$ であり, 条件 $x^3+y^3-6axy=0$ のもとで $\frac{\partial F}{\partial x}$ と $\frac{\partial F}{\partial y}$ は原点以外では同時に 0 にはならない．実際 $\begin{cases} x^3+y^3-6axy=0 \\ 3x^2-6ay=0 \\ 3y^2-6ax=0 \end{cases}$ とすれば, 第 2 式から $y=\frac{x^2}{2a}$ で, これを第 3 式に代入すると $\frac{3x}{4a^2}(x^3-8a^3)=0$ だから $x=0$ または $x=2a$ が得られる．$x=0$ の場合は $y=x^2=0$ であり, $x=2a$ の場合は $y=\frac{x^2}{2a}=2a$ であるが, $x=y=2a$ は第 1 式を満たさない．従って, 原点以外の点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ で f が条件 $x^3+y^3-6axy=0$ のもとで極値をとるならば, $\frac{\partial f}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2y$ より $\lambda \in \boldsymbol{R}$ が存在して, 次の関係式が成り立つ．

$$\begin{cases} x^3+y^3-6axy=0 & \cdots(i) \\ 2x=\lambda(3x^2-6ay) & \cdots(ii) \\ 2y=\lambda(3y^2-6ax) & \cdots(iii) \end{cases}$$

$x=0$ ならば (i) より $y=0$ となるため, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ が原点と異なるという仮定に反する．よって $x \neq 0$ だから (iii) を (ii) で辺々割ると $\frac{y}{x}=\frac{y^2-2ax}{x^2-2ay}$ である．この両辺に $x(x^2-2ay)$ をかけて移項すれば $(x-y)(xy+2ax+2ay)=0$ となるため $x=y$ または $xy+2ax+2ay=0$ である．

$x=y$ の場合, (i) より $2x^3-6ax^2=0$ であり, $x \neq 0$ だから $x=3$ である．$xy+2ax+2ay=0$ の場合, $u=x+y$, $v=xy$ とおけば $v+2au=0$ であり, $x^3+y^3-6axy=u^3-3uv-6av$ だから (i) より $u^3-3uv-6av=0$ である．$v=-2au$ を代入すれば, $u^3+6au^2+12a^2u=0$ が得られ, この左辺は $u((u+3a)^2+3a^2)$ と変形されるため, $u=0$ である．よって $v=-u=0$ だから $x=y=0$ となり仮定に反するため, この場合は (i) を満たす $x=y=0$ 以外の実数 x, y は存在しない．以上から, 条件 $x^3+y^3-6axy=0$ のもとで f が極値をとる原点以外の候補の点は $\left(\begin{smallmatrix} 3a \\ 3a \end{smallmatrix}\right)$ のみである．

第 1 象限の点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ が $x^3+y^3-6axy=0$ を満たすとき, $x^2+y^2 \leqq 18a^2$ であることを示す．$u=x+y$, $v=xy$ とおけば, $u, v \geqq 0$ であり, $u=x+y$, $v=xy$ を満たす実数 x, y が存在することから $u^2-4v \geqq 0$ が成り立つ．ここで, $x^3+y^3-6axy=0$ より, $u^3-3uv-6av=0$ だから $v=\frac{u^3}{3(u+2a)}$ であることから $u^2-4v \geqq 0$ に代入して $\frac{u^2(6a-u)}{3(u+2a)} \geqq 0$ が得られる．$u \geqq 0$ であることに注意すれば $u \leqq 6a$ であることがわかる．

一方, $x^2+y^2=u^2-2v=u^2-\frac{2u^3}{3(u+2a)}=\frac{u^3+6au^2}{3(u+2a)}$ となるため, 関数 $g:[0,6a] \to \boldsymbol{R}$ を $g(t)=\frac{t^3+6at^2}{3(t+2a)}$ で定めれば $x^2+y^2=g(u)$ である．$g'(t)=\frac{2t((t+3a)^2+3a^2)}{3(t+a)^2} \geqq 0$ だから g は単調増加である．故に $x^2+y^2=g(u) \leqq g(6a)=18a^2$ であることが示された．$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ が第 1 象限にあって, 条件 $x^3+y^3-6axy=0$ を満たすならば $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \leqq 18a^2 = f\left(\begin{smallmatrix} 3a \\ 3a \end{smallmatrix}\right)$ であるため, f は条件 $x^3+y^3-6axy=0$ のもとで, $\left(\begin{smallmatrix} 3a \\ 3a \end{smallmatrix}\right)$ において極大値 $18a^2$ をとる．

(32) $x^3+xy^2-y^2=0$ ならば $x \neq 1$ であり, $y^2=\frac{x^3}{1-x} \geqq 0$ より $0 \leqq x < 1$ である．このとき $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=-3x-\frac{1}{x-1}$ だから $\varphi:[0,1) \to \boldsymbol{R}$ を $\varphi(x)=-3x-\frac{1}{x-1}$ によって定めると $\varphi'(x)=\frac{1-3(x-1)^2}{(x-1)^2}$ となるため, φ は $\left[0, 1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ で単調に減少し, $\left[1-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ で単調に増加する．従って条件 $x^3+xy^2-y^2=0$ のもとで $x \in \left[0, 1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ ならば $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=\varphi(x) \leqq \varphi(0)=f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)=1$, $x \in \left[1-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ ならば $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=\varphi(x) \geqq \varphi\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=f\left(\begin{smallmatrix} 1-\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \pm\sqrt{2\sqrt{3}-\frac{10}{3}} \end{smallmatrix}\right)=2\sqrt{3}-3$ となるため, f は $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ で極大値 1 をとり, $\left(\begin{smallmatrix} 1-\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \pm\sqrt{2\sqrt{3}-\frac{10}{3}} \end{smallmatrix}\right)$ で極小値 $2\sqrt{3}-3$ をとる．

(33) x, y は条件 $x^2+y^2=1$ を満たすため, $x=\cos t$, $y=\sin t$ とおける．このとき, $g:[0,2\pi] \to \boldsymbol{R}$ を $g(t)=f\left(\begin{smallmatrix} \cos t \\ \sin t \end{smallmatrix}\right)$ で定めれば, $g(t)=2\sin 2t+1$ だから, g は $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ で単調に増加し, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ で単調に減

少するため $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ において g は極大であり, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ において g は極小である．従って, f は条件 $x^2+y^2=1$ のもとで $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ において極大値 3 をとり, $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ において極小値 -1 をとる．

(34) $xy+x-y=0$ ならば $x\neq 1$ であり, $y=\frac{1}{1-x}-1$ である．$\varphi:(-\infty,1)\cup(1,\infty)\to\boldsymbol{R}$ を $\varphi(x)=f\begin{pmatrix}x\\ \frac{1}{1-x}-1\end{pmatrix}=x^2+\frac{x^2}{(x-1)^2}$ によって定めると $\varphi'(x)=\frac{2x(x-2)(x^2-x+1)}{(x-1)^3}$ だから φ の増減表は次のようになる．

x		0		1		2	
φ'	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
φ	$\searrow$	0	$\nearrow\infty$		$\infty\searrow$	8	$\nearrow$

従って条件 $xy+x-y=0$ のもとで f は $\binom{0}{0}$ で極小値 0 をとり, $\binom{2}{-2}$ で極小値 8 をとる．

(35) x, y は条件 $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2=1$ を満たすため, $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ とおける．このとき, $g:[0,2\pi]\to\boldsymbol{R}$ を $g(t)=f\begin{pmatrix}\cos^3 t\\ \sin^3 t\end{pmatrix}$ で定めれば, $g(t)=\cos^3 t+\sin^3 t$ より, $g'(t)=3\sqrt{2}\sin t\cos t\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$ である．従って g の増減表は次のようになる．

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
g'	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
g	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

従って, 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{4}$ において g は極大であり, それぞれ極大値 1, 1, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ をとり, $\frac{\pi}{4}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ において g は極小であり, それぞれ極小値 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, -1, -1 をとる．故に f は条件 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ のもとで, $\binom{0}{1}$, $\binom{1}{0}$, $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{4}\\ -\frac{\sqrt{2}}{4}\end{pmatrix}$ においてそれぞれ極大値 1, 1, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ をとり, $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{4}\\ \frac{\sqrt{2}}{4}\end{pmatrix}$, $\binom{-1}{0}$, $\binom{0}{-1}$ においてそれぞれ極小値 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, -1, -1 をとる．

(36) $\binom{x}{y}$ が条件 $x^2+xy+y^2=1$ を満たすとき, y がとりうる値の範囲は, $x^2+xy+y^2=1$ を x に関する 2 次方程式とみたときに, この方程式が実数解をもつような y の範囲であるため, (判別式) $\geqq 0$ より, $4-3y^2\geqq 0$ すなわち $|y|\leqq\frac{2\sqrt{3}}{3}$ である．一方 $\binom{x}{y}$ が条件 $x^2+xy+y^2=1$ を満たすとき, $x^2+xy=1-y^2$ だから $f\binom{x}{y}=1-y^2-2y=2-(y+1)^2$ が成り立つ．$|y|\leqq\frac{2\sqrt{3}}{3}$ の範囲で y の 2 次関数 $2-(y+1)^2$ は $y=-1$ のとき最大値 2, $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき, 最小値 $-\frac{4\sqrt{3}+1}{3}$ をとり, $y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき, 極小値 $\frac{4\sqrt{3}-1}{3}$ をとる．$x^2+xy+y^2=1$ より $y=-1$ となる x は 0 と 1 であり, $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ となる x は $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ となる x は $\frac{1}{\sqrt{3}}$ であるため, 条件 $x^2+xy+y^2=1$ のもとで f は $\binom{0}{-1}$ と $\binom{1}{-1}$ において最大値 2, $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ において最小値 $-\frac{4\sqrt{3}+1}{3}$ をとり, $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ において極小値 $\frac{4\sqrt{3}-1}{3}$ とる．

(37) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおけば $x^3-2y^3+3x^2y+2=0$ は $r^3(2\sin^3\theta-3\cos^2\theta\sin\theta-\cos^3\theta)=2$ と同値である．$2\sin^3\theta-3\cos^2\theta\sin\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)\big((1+\sqrt{3})\sin\theta+\cos\theta\big)\big((\sqrt{3}-1)\sin\theta-\cos\theta\big)$ だから $r\geqq 0$ となる条件は $\theta\in\left(-\frac{\pi}{4},-\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\cup\left(\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}+1}{2},\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\pi-\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}-1}{2},\pi+\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$ である．$r^2=f\begin{pmatrix}r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{pmatrix}$ であり, 関数 g を $g(\theta)=\dfrac{2}{2\sin^3\theta-3\cos^2\theta\sin\theta-\cos^3\theta}$ で定義すれば θ が上記の範囲にあるとき, $r^3=g(\theta)$ である．このとき, $g'(\theta)=\dfrac{-24\cos\theta\left(\sin\theta+\frac{\sqrt{17}+1}{8}\cos\theta\right)\left(\sin\theta-\frac{\sqrt{17}-1}{8}\cos\theta\right)}{(2\sin^3\theta-3\cos^2\theta\sin\theta-\cos^3\theta)^2}$ だから g は $\left(-\frac{\pi}{4},-\tan^{-1}\frac{\sqrt{17}+1}{8}\right]$ で単調に減少, $\left[-\tan^{-1}\frac{\sqrt{17}+1}{8},-\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ で単調に増加, $\left(\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}+1}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ で単調に減少, $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$ で単調に増加, $\left(\pi-\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}-1}{2},\pi+\tan^{-1}\frac{\sqrt{17}-1}{8}\right]$ で単調に減少, $\left[\pi+\tan^{-1}\frac{\sqrt{17}-1}{8},\pi+\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$ で単調に増加する．従って $\theta=-\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{17}+1}{8},\dfrac{\pi}{2},\pi+\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{17}-1}{8}$ のときに r^3 はそれぞれ $\dfrac{\sqrt{146+34\sqrt{17}}}{2}$, 1, $\dfrac{\sqrt{146-34\sqrt{17}}}{2}$ という極

小値をとり, そのときの点の座標はそれぞれ $\begin{pmatrix} \sqrt[3]{\frac{53+19\sqrt{17}}{26}} \\ -\sqrt[3]{\frac{9+2\sqrt{17}}{13}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \sqrt[3]{\frac{53-19\sqrt{17}}{26}} \\ -\sqrt[3]{\frac{9-2\sqrt{17}}{13}} \end{pmatrix}$ である.

$$\frac{\sqrt[6]{146+34\sqrt{17}}}{\sqrt[3]{2}}\cos\left(-\tan^{-1}\frac{\sqrt{17}+1}{8}\right) = \frac{8\sqrt[6]{146+34\sqrt{17}}}{\sqrt[3]{2}\sqrt{82+2\sqrt{17}}} = \sqrt[3]{\frac{53+19\sqrt{17}}{26}}$$

$$\frac{\sqrt[6]{146+34\sqrt{17}}}{\sqrt[3]{2}}\sin\left(-\tan^{-1}\frac{\sqrt{17}+1}{8}\right) = -\frac{(1+\sqrt{17})\sqrt[6]{146+34\sqrt{17}}}{\sqrt[3]{2}\sqrt{82+2\sqrt{17}}} = -\sqrt[3]{\frac{9+2\sqrt{17}}{13}}$$

$$\frac{\sqrt[6]{146-34\sqrt{17}}}{\sqrt[3]{2}}\cos\left(\pi+\tan^{-1}\frac{\sqrt{17}-1}{8}\right) = -\frac{8\sqrt[6]{146-34\sqrt{17}}}{\sqrt[3]{2}\sqrt{82-2\sqrt{17}}} = \sqrt[3]{\frac{53-19\sqrt{17}}{26}}$$

$$\frac{\sqrt[6]{146-34\sqrt{17}}}{\sqrt[3]{2}}\sin\left(\pi+\tan^{-1}\frac{\sqrt{17}-1}{8}\right) = \frac{(1-\sqrt{17})\sqrt[6]{146-34\sqrt{17}}}{\sqrt[3]{2}\sqrt{82-2\sqrt{17}}} = -\sqrt[3]{\frac{9-2\sqrt{17}}{13}}$$

(38) $x+2\log y+e^xy^2=\log(e^xy^2)+e^xy^2$ だから $z=e^xy^2$ とおけば $x+2\log y+e^xy^2=1$ ならば $\log z+z=1$ である. $g(z)=\log z+z$ で関数 $g:(0,\infty)\to \boldsymbol{R}$ を定めれば $g(1)=1$ であり, $g'(z)=\dfrac{1}{z}+1>0$ だから g は単調増加関数である. 従って $g(z)=1$ を満たす $z>0$ は $z=1$ に限るため $x+2\log y+e^xy^2=1$ は $e^xy^2=1$ すなわち $y=e^{-\frac{x}{2}}$ と同値である. そこで関数 $\varphi:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $\varphi(x)=f\left(\begin{smallmatrix} x \\ e^{-\frac{x}{2}} \end{smallmatrix}\right)=x+e^{-x}$ で定義して, φ の極値を求めればよい. $\varphi'(x)=1-e^{-x}$ より $x<0$ で $\varphi'(x)<0$, $x>0$ で $\varphi'(x)>0$ だから φ は $(-\infty,0]$ で単調に減少し, $[0,\infty)$ で単調に増加する. 故に φ は 0 で最小値 1 をとるため, f は $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ で最小値 1 をとる.

(39) 単位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上の任意の点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ は $x=\cos\varphi\sin\theta$, $y=\sin\varphi\sin\theta$, $z=\cos\theta$ と表せる. $g\left(\begin{smallmatrix} \varphi \\ \theta \end{smallmatrix}\right)=f\left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{smallmatrix}\right)=\sin^2\theta-\cos^2\theta+4\cos\varphi\sin\theta\cos\theta+4\sin\varphi\sin\theta\cos\theta=2\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\sin 2\theta-\cos 2\theta$ によって関数 g を定めれば, $\frac{\partial g}{\partial\varphi}=2\sqrt{2}\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\sin 2\theta$, $\frac{\partial g}{\partial\theta}=4\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\cos 2\theta+2\sin 2\theta$ だから $\frac{\partial g}{\partial\varphi}=\frac{\partial g}{\partial\theta}=0$ ならば $\begin{cases} \cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\sin 2\theta=0 & \cdots(i) \\ 2\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\cos 2\theta+\sin 2\theta=0 & \cdots(ii) \end{cases}$ が成り立つ. (i) より $\varphi=\frac{\pi}{4}+n\pi$ または $\theta=\frac{n\pi}{2}$ (n は整数) である. $\varphi=\frac{\pi}{4}+n\pi$ の場合, (ii) より $\tan 2\theta=2\sqrt{2}(-1)^{n+1}$ だから $\alpha=\tan^{-1}2\sqrt{2}$ とおけば $\theta=\frac{1}{2}((-1)^{n+1}\alpha+m\pi)$ (m は整数) である. $\theta=\frac{n\pi}{2}$ の場合, (ii) より $\varphi=-\frac{\pi}{4}+m\pi$ (m は整数) である. 故に $\left(\begin{smallmatrix} \frac{\pi}{4}+n\pi \\ \frac{1}{2}((-1)^{n+1}\alpha+m\pi) \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} -\frac{\pi}{4}+m\pi \\ \frac{n\pi}{2} \end{smallmatrix}\right)$ において g は極値をとる可能性がある.

$\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}=-2\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\sin 2\theta$, $\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi\partial\theta}=4\sqrt{2}\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\cos 2\theta$, $\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}=-4\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\sin 2\theta+4\cos 2\theta$ だから

$$|g''\left(\begin{smallmatrix} \varphi \\ \theta \end{smallmatrix}\right)|=16\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\sin^2 2\theta-4\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\sin 4\theta-32\cos^2\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\cos^2 2\theta$$

である. $\left|g''\left(\begin{smallmatrix} -\frac{\pi}{4}+m\pi \\ \frac{n\pi}{2} \end{smallmatrix}\right)\right|=-32<0$ より, g は $\left(\begin{smallmatrix} -\frac{\pi}{4}+m\pi \\ \frac{n\pi}{2} \end{smallmatrix}\right)$ において極値をとらない. $\tan\alpha=2\sqrt{2}$ $(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2})$ より $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ だから $\left|g''\left(\begin{smallmatrix} \frac{\pi}{4}+n\pi \\ \frac{1}{2}((-1)^{n+1}\alpha+m\pi) \end{smallmatrix}\right)\right|=\frac{160}{9}>0$, $\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}\left(\begin{smallmatrix} \frac{\pi}{4}+n\pi \\ \frac{1}{2}((-1)^{n+1}\alpha+m\pi) \end{smallmatrix}\right)=\frac{(-1)^m 8}{3}$ となるため, m が偶数ならば g は $\left(\begin{smallmatrix} \frac{\pi}{4}+n\pi \\ \frac{1}{2}((-1)^{n+1}\alpha+m\pi) \end{smallmatrix}\right)$ において極小値 -3 をとり, m が奇数ならば g は $\left(\begin{smallmatrix} \frac{\pi}{4}+n\pi \\ \frac{1}{2}((-1)^{n+1}\alpha+m\pi) \end{smallmatrix}\right)$ において極大値 3 をとる. $0\leqq\frac{\pi}{4}+n\pi<2\pi$ かつ $0\leqq\frac{1}{2}((-1)^{n+1}\alpha+m\pi)\leqq\pi$ となるのは $(n,m)=(0,1),(0,2),(1,0),(1,1)$ の場合だから, f は条件 $x^2+y^2+z^2=1$ のもとで, $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ において極小値 -3 をとり, $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ において極大値 3 をとる.

(40) 単位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上の任意の点は $\left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ $(0\leqq\varphi<2\pi,\ 0\leqq\theta\leqq\pi)$ と表せる. まず f は条件 $x^2+y^2+z^2=1$ のもとで, 点 $\boldsymbol{n}=\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{s}=\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ で極値をとらないことをみる. $\boldsymbol{p}_\theta=\begin{pmatrix} \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \cos\theta \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{q}_\theta=\begin{pmatrix} -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ とおくと $\|\boldsymbol{p}_\theta-\boldsymbol{n}\|=\|\boldsymbol{q}_\theta-\boldsymbol{n}\|=2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$, $\|\boldsymbol{p}_\theta-\boldsymbol{s}\|=\|\boldsymbol{q}_\theta-\boldsymbol{s}\|=2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$ だから, sin, cos の連続性により, 任

意の $\varepsilon > 0$ に対して $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ で, 条件「$|\theta| < \delta$ ならば $\|\boldsymbol{p_\theta} - \boldsymbol{n}\| = \|\boldsymbol{q_\theta} - \boldsymbol{n}\| < \varepsilon$」と条件「$|\theta - \pi| < \delta$ ならば $\|\boldsymbol{p_\theta} - \boldsymbol{s}\| = \|\boldsymbol{q_\theta} - \boldsymbol{s}\| < \varepsilon$」を満たすものがある. 一方, $f(\boldsymbol{p_\theta}) = \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\theta$, $f(\boldsymbol{q_\theta}) = -\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\theta$ だから, $0 < |\theta| < \delta$ ならば $f(\boldsymbol{p_\theta}) > 0$ かつ $f(\boldsymbol{q_\theta}) < 0$ が成り立ち, $0 < |\theta - \pi| < \delta$ ならば $f(\boldsymbol{p_\theta}) < 0$ かつ $f(\boldsymbol{q_\theta}) > 0$ が成り立つため, f は条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のもとで, 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ で極値をとらないことがわかる.

$g\left(\begin{smallmatrix} \varphi \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sin 2\varphi\sin^2\theta\cos\theta$ で関数 g を定めれば, 上のことから, $\varphi \in \boldsymbol{R}$, $0 < \theta < \pi$ の範囲で g の極値を調べればよい. $\frac{\partial g}{\partial \varphi} = \cos 2\varphi\sin^2\theta\cos\theta$, $\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{1}{2}\sin 2\varphi\sin\theta(2 - 3\sin^2\theta)$ だから $\frac{\partial g}{\partial \varphi} = \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0$ ならば $\begin{cases} \cos 2\varphi\sin^2\theta\cos\theta = 0 & \cdots(i) \\ \sin 2\varphi\sin\theta(2 - 3\sin^2\theta) = 0 & \cdots(ii) \end{cases}$ が成り立つ. $0 < \theta < \pi$ だから $\sin\theta > 0$ であるため, (i) より $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$ または $\theta = \frac{\pi}{2}$ である. $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$ の場合, $\sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ だから $\alpha = \sin^{-1}\frac{\sqrt{6}}{3}$ とおけば $\theta = \alpha, \pi - \alpha$ である. $\theta = \frac{\pi}{2}$ の場合, (ii) より $\varphi = \frac{n\pi}{2}$ (n は整数) である. 故に $\left(\begin{smallmatrix} \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} \\ \alpha \end{smallmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} \\ \pi - \alpha \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{n\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$ において g は極値をとる可能性がある.

$\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = -2\sin 2\varphi\sin^2\theta\cos\theta$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi\partial\theta} = \cos 2\varphi\sin\theta(2 - 3\sin^2\theta)$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \frac{1}{2}\sin 2\varphi\cos\theta(2 - 9\sin^2\theta)$ だから $\left|g''\begin{pmatrix} \frac{n\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}\right| = -1 < 0$ となるため, g は $\begin{pmatrix} \frac{n\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$ で極値をとらない. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ より $\left|g''\left(\begin{smallmatrix} \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} \\ \alpha \end{smallmatrix}\right)\right| = \left|g''\begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} \\ \pi - \alpha \end{pmatrix}\right| = \frac{8}{9} > 0$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}\left(\begin{smallmatrix} \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} \\ \alpha \end{smallmatrix}\right) = \frac{4\sqrt{3}(-1)^{n+1}}{9}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}\begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} \\ \pi - \alpha \end{pmatrix} = \frac{4\sqrt{3}(-1)^n}{9}$ だから n が偶数ならば g は $\left(\begin{smallmatrix} \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} \\ \alpha \end{smallmatrix}\right)$ において極大値をとり, $\begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} \\ \pi - \alpha \end{pmatrix}$ において極小値をとる. また n が奇数ならば g は $\left(\begin{smallmatrix} \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} \\ \alpha \end{smallmatrix}\right)$ において極小値をとり, $\begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} \\ \pi - \alpha \end{pmatrix}$ において極大値をとる. 以上から f は条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のもとで, $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ において極大値 $\frac{\sqrt{3}}{9}$ をとり, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ において極小値 $-\frac{\sqrt{3}}{9}$ をとる.

(41) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4 \,\middle|\, x^2 + z^2 + w^2 = 4,\ y^2 + 2z^2 + 3w^2 = 9 \right\}$ とおき, $g : Z \to \boldsymbol{R}$ を $g\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) = 13 - 3z^2 - 4w^2$ で定めれば, 任意の $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in W$ に対して $x^2 = 4 - z^2 - w^2$, $y^2 = 9 - 2z^2 - 3w^2$ だから $f(\boldsymbol{x}) = x^2 + y^2 = 13 - 3z^2 - 4w^2$ が成り立つため, $\boldsymbol{x} \in W$ ならば $0 \leqq f(\boldsymbol{x}) \leqq 13$ である. $f(\boldsymbol{x}) = x^2 + y^2 = 13$ が成り立つための条件は $3z^2 + 4w^2 = 0$ すなわち $z = w = 0$ であり, このとき $x = \pm 2$, $y = \pm 3$ (複号任意) である. $f(\boldsymbol{x}) = x^2 + y^2 = 0$ が成り立つための条件は $z^2 + w^2 = 4$ かつ $2z^2 + 3w^2 = 9$ であるが, これは $z = \pm\sqrt{3}$ かつ $w = \pm 1$ (複号任意) と同値である. 故に f の定義域を W に制限した関数は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm\sqrt{3} \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ (複号任意) で最小値 0 をとり, $\begin{pmatrix} \pm 2 \\ \pm 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (複号任意) で最大値 13 をとる.

$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \in W$ かつ $\boldsymbol{p} \neq \begin{pmatrix} \pm 2 \\ \pm 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm\sqrt{3} \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ ならば $\left(\begin{smallmatrix} p_3 \\ p_4 \end{smallmatrix}\right) \in Z$ かつ $\left(\begin{smallmatrix} p_3 \\ p_4 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \pm\sqrt{3} \\ \pm 1 \end{smallmatrix}\right)$ である. $p_3^2 + p_4^2 < 4$ かつ $2p_3^2 + 3p_4^2 < 9$ の場合, $p_1 = a\sqrt{4 - p_3^2 - p_4^2}$, $p_2 = b\sqrt{9 - 2p_3^2 - 3p_4^2}$ を満たすように $a, b = \pm 1$ を選び, $\lambda = \min\left\{\frac{2}{\sqrt{p_3^2 + p_4^2}}, \frac{3}{\sqrt{2p_3^2 + 3p_4^2}}\right\}$ とおいて写像 $\alpha : (1 - \lambda, 1) \to \boldsymbol{R}^4$ を $\alpha(t) = \begin{pmatrix} a\sqrt{4 - (1-t)^2(p_3^2 + p_4^2)} \\ b\sqrt{9 - (1-t)^2(2p_3^2 + 3p_4^2)} \\ (1-t)p_3 \\ (1-t)p_4 \end{pmatrix}$ で定義すれば $t \in (1 - \lambda, 1)$ に対して $\alpha(t) \in W$ であり, $\alpha(0) = \boldsymbol{p}$, $f(\alpha(t)) = 13 - (1-t)^2(3p_3^2 + 4p_4^2)$ が成り立つ. $f(\alpha(t))$ は $t = 0$ の前後で単調に増加するため, f の定義域を W に制限した関数は $\boldsymbol{p}$ で極値を取らない. $p_3^2 + p_4^2 = 4$ または $2p_3^2 + 3p_4^2 = 9$ の場合, 写像 $\beta : [0, 1) \to \boldsymbol{R}^4$ を $\beta(t) = \begin{pmatrix} a\sqrt{4 - (1-t)^2(p_3^2 + p_4^2)} \\ b\sqrt{9 - (1-t)^2(2p_3^2 + 3p_4^2)} \\ (1-t)p_3 \\ (1-t)p_4 \end{pmatrix}$ で定義すれば $t \in [0, 1)$ に対して $\beta(t) \in W$ であり, $\beta(0) = \boldsymbol{p}$, $f(\beta(t)) = 13 - (1-t)^2(3p_3^2 + 4p_4^2)$ が成り立つ. $f(\beta(t))$ は $[0, 1)$ で単調に増加するため, f の定義域を W に制限した関数は $\boldsymbol{p}$ で極大値を取らない. $p_3^2 + p_4^2 = 4$ かつ $2p_3^2 + 3p_4^2 < 9$ の場合, $p_3 = 2\cos\sigma$, $p_4 = 2\sin\sigma$ を満たす $-\frac{\pi}{2} \leqq \sigma < \frac{3\pi}{2}$ を選ぶ. このとき $2p_3^2 + 3p_4^2 < 9$ より $\sigma \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right)$ だから $|t - \sigma| < \mu$ ならば $|\cos t| > \frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす $\mu > 0$ が存在する. 写像 $\gamma : (\sigma - \mu, \sigma + \mu) \to \boldsymbol{R}^4$ を $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b\sqrt{4\cos^2 t - 3} \\ 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$ で定義す

ればt $t \in (\sigma-\mu, \sigma+\mu)$ に対して $\gamma(t) \in W$ であり, $\gamma(0)=\boldsymbol{p}$, $f(\gamma(t)) = 4\cos^2 t - 3$ が成り立つ. $\sigma = 0$ または π の場合, $f(\gamma(t))$ は σ で極大になるため, f の定義域を W に制限した関数は $\boldsymbol{p}$ で極小値を取らない. $\sigma \neq 0, \pi$ の場合, $f(\gamma(t))$ は σ 前後で狭義単調増加関数または狭義単調減少関数になるため, f の定義域を W に制限した関数は $\boldsymbol{p}$ で極値を取らない. $p_3^2+p_4^2<4$ かつ $2p_3^2+3p_4^2=9$ の場合, $p_3 = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos\tau$, $p_4 = \sqrt{3}\sin\tau$ を満たす $-\pi \leqq \tau < \pi 2$ を選ぶ. このとき $p_3^2+p_4^2<4$ より $|\cos\tau| < \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ だから $|t-\tau|<\nu$ ならば $|\cos t| < \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ を満たす $\nu>0$ が存在する. 写像 $\delta : (\tau-\nu, \tau+\nu) \to \boldsymbol{R}^4$ を $\delta(t) = \begin{pmatrix} a\sqrt{1-\frac{3}{2}\cos^2 t} \\ 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}}\cos t \\ \sqrt{3}\sin t \end{pmatrix}$ で定義すれば $t \in (\tau-\nu, \tau+\nu)$ に対して $\delta(t) \in W$ であり, $\delta(0)=\boldsymbol{p}$, $f(\delta(t)) = 1 - \dfrac{3}{2}\cos^2 t$ が成り立つ. $\tau = \pm\dfrac{\pi}{2}$ の場合, $f(\delta(t))$ は τ で極大になるため, f の定義域を W に制限した関数は $\boldsymbol{p}$ で極小値を取らない. $\tau \neq 0, \pi$ の場合, $f(\delta(t))$ は τ 前後で狭義単調増加関数または狭義単調減少関数になるため, f の定義域を W に制限した関数は $\boldsymbol{p}$ で極値を取らない. 以上から, f の定義域を W に制限した関数は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm\sqrt{3} \\ \pm 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \pm 2 \\ \pm 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の点では極値をとらない.

[別解] $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$ に対し, $F : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^2$ を $F(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x^2+z^2+w^2-4 \\ y^2+2z^2+3w^2-9 \end{pmatrix}$ で定義すると $F'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 2z & 2w \\ 0 & 2y & 4z & 6w \end{pmatrix}$ である. $x^2+z^2+w^2=4$ かつ $y^2+2z^2+3w^2=9$ かつ $\operatorname{rank} F'(\boldsymbol{x}) \leqq 1$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4$ があるとき, $F'(\boldsymbol{x})$ の第 1 行と第 2 行は零でないため, 0 でない実数 r で $r(2x\ 0\ 2z\ 2w) = (0\ 2y\ 4z\ 6w)$ を満たすものがある. このとき, $2rx = y = 2z(r-2) = 2w(r-3) = 0$ となるため, $x=y=0$ であり, z w の一方は 0 でない. よって $r=2$ または $r=3$ であるが, $r=2$ ならば $w=0$ だから $x^2+z^2+w^2=4$ かつ $y^2+2z^2+3w^2=9$ から $z^2=4$ かつ $2z^2=9$ が成り立つことになって矛盾が生じる. 同様に $r=3$ ならば $z=0$ だから $x^2+z^2+w^2=4$ かつ $y^2+2z^2+3w^2=9$ から $w^2=4$ かつ $3w^2=9$ が成り立つことになって矛盾が生じる. 故に $x^2+z^2+w^2=4$ かつ $y^2+2z^2+3w^2=9$ ならば $\operatorname{rank} F'(\boldsymbol{x}) = 2$ となるため, この条件のもとで f が $\boldsymbol{x}$ で極値をとるとすれば $f'(\boldsymbol{x}) = (\lambda\ \ \mu)F'(\boldsymbol{x})$ を満たす実数 λ, μ がある. $f'(\boldsymbol{x}) = (2x\ 2y\ 0\ 0)$ だから次の関係式が成り立つ.

$$\begin{cases} x^2+z^2+w^2=4 & \cdots(i) \\ y^2+2z^2+3w^2=9 & \cdots(ii) \\ 2x = 2\lambda x & \cdots(iii) \\ 2y = 2\mu y & \cdots(iv) \\ 0 = 2z(\mu+2\lambda) & \cdots(v) \\ 0 = 2w(\mu+3\lambda) & \cdots(vi) \end{cases}$$

$x=y=0$ ならば (i), (ii) より $w=\pm 1$, $z=\pm\sqrt{3}$ である.

$x=0$, $y\neq 0$ ならば (iv) より $\mu=1$ であり, (i) より z, w の少なくとも一方は 0 ではない. $w \neq 0$ ならば (vi) から $\lambda = -\frac{1}{3}$, (v) から $z=0$ である. このとき (i) より $w^2=4$ となるため, (ii) より $y^2=-3$ が得られて y が実数であることと矛盾する. よって $w=0$ となるため, (i) より $z=\pm 2$, (ii) より $y=\pm 1$ である.

$x \neq 0$, $y=0$ ならば (iii) より $\lambda=1$ であり, (ii) より z, w の少なくとも一方は 0 ではない. $z\neq 0$ ならば (v) から $\lambda=-\frac{1}{2}$, (vi) から $w=0$ である. このとき (ii) より $z^2=\frac{9}{2}$ となるため, (i) より $x^2=-\frac{1}{2}$ が得られて x が実数であることと矛盾する. よって $z=0$ となるため, (ii) より $w=\pm\sqrt{3}$, (i) より $x=\pm 1$ である.

$x, y \neq 0$ ならば (iii), (iv) より $\lambda=\mu=1$ となるため, (v), (vi) より $z=w=0$ である. 従って (i), (ii) から $x=\pm 2$, $y=\pm 3$ である.

以上から f が条件 $x^2+z^2+w^2=4$ かつ $y^2+2z^2+3w^2=9$ のもとで極値をとる可能性があるのは $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm\sqrt{3} \\ \pm 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ \pm 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \\ \pm\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \pm 2 \\ \pm 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (複号任意) のいずれかである. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm\sqrt{3} \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ において f は最小値 0 をとるため, この点で f は条件 $x^2+z^2+w^2=4$ かつ $y^2+2z^2+3w^2=9$ のもとでの極小値をとる. また, $x^2+z^2+w^2=4$ と $y^2+2z^2+3w^2=9$ を辺々加えて移項すれば, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = x^2+y^2 = 13-3z^2-4w^2 \leqq 13 = f\begin{pmatrix} \pm 2 \\ \pm 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ だから f は $\begin{pmatrix} \pm 2 \\ \pm 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ において条件

$x^2+z^2+w^2=4$ かつ $y^2+2z^2+3w^2=9$ のもとでの最大値をとる.

$D=\left\{\binom{z}{w}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, z^2+w^2\leqq 4,\ 2z^2+3w^2\leqq 9\right\}$ とおき, $g:D\to\boldsymbol{R}$ を $g\binom{z}{w}=13-3z^2-4w^2$ で定める. $z\in[-2,2]$ ならば $\binom{z}{0}\in D$ であり, このとき $g\binom{z}{0}=13-3z^2\geqq 1=g\binom{\pm2}{0}$ であるため, g は $\binom{\pm2}{0}$ において極大ではない. また, $t\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$ ならば $\binom{2\cos t}{2\sin t}\in D$ であり, このとき $g\binom{2\cos t}{2\sin t}=13-12\cos^2 t-16\sin^2 t=1-4\sin^2 t\leqq 1=g\binom{\pm2}{0}$ であるため, g は $\binom{\pm2}{0}$ において極小ではない. $w\in\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$ ならば $\binom{0}{w}\in D$ であり, このとき $g\binom{0}{w}=13-4w^2\geqq 1=g\begin{pmatrix}0\\ \pm\sqrt{3}\end{pmatrix}$ であるため, g は $\begin{pmatrix}0\\ \pm\sqrt{3}\end{pmatrix}$ において極大ではない. また, $t\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$ ならば $\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t\\ \sqrt{3}\sin t\end{pmatrix}\in D$ であり, このとき $g\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t\\ \sqrt{3}\sin t\end{pmatrix}=13-\frac{27}{2}\cos^2 t-12\sin^2 t=1-\frac{3}{2}\cos^2 t\leqq 1=g\begin{pmatrix}0\\ \pm\sqrt{3}\end{pmatrix}$ であるため, g は $\begin{pmatrix}0\\ \pm\sqrt{3}\end{pmatrix}$ において極小ではない.

以上から, g は $\binom{\pm2}{0}$, $\begin{pmatrix}0\\ \pm\sqrt{3}\end{pmatrix}$ において極値をとらない. ここで, $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^4$ が $x^2+z^2+w^2=4$ かつ $y^2+2z^2+3w^2=9$ を満たすならば $f\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}=g\binom{z}{w}$ が成り立つことから, f は $\begin{pmatrix}0\\ \pm1\\ \pm2\\ 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\pm1\\ 0\\ 0\\ \pm\sqrt{3}\end{pmatrix}$ において, 条件 $x^2+z^2+w^2=4$ かつ $y^2+2z^2+3w^2=9$ のもとでの極値をとらない.

2. (1) 直線の方向ベクトルを $\binom{\cos t}{\sin t}$ とすれば $\binom{a}{b}$ を通る直線の方程式は $\sin t(x-a)-\cos t(y-b)=0$ だから, この直線と原点の距離は $|a\sin t-b\cos t|=\sqrt{a^2+b^2}|\sin(t-\alpha)|$ (ただし α は $0\leqq\alpha<2\pi$, $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす) である. 従って, $t=\alpha+\frac{\pi}{2}+n\pi$ (n は整数) のときに原点からの距離が最大になる. このとき, 直線の方程式は $a(x-a)+b(y-b)=0$ となり, これは $\binom{a}{b}$ を通り, $\binom{a}{b}$ に垂直な直線である.

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の任意の点 $\binom{x}{y}$ は $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(0\leqq t<2\pi)$ と表せる. この点と定点 $\binom{c}{0}$ との距離の 2 乗を $f(t)$ とおけば $f(t)=(a\cos t-c)^2+b^2\sin^2 t=(a^2-b^2)\cos^2 t-2ac\cos t+b^2+c^2$ である. $a=b$ の場合, $f(t)=-2ac\cos t+a^2+c^2$ だから $c=0$ ならば f は値が常に a^2 である定数値関数であり, $c>0$ ならば f は $t=0$ で最小値 $(a-c)^2$ をとり, $t=\pi$ で最大値 $(a+c)^2$ をとる. $a\neq b$ の場合, $f(t)=(a^2-b^2)\left(\cos t-\frac{ac}{a^2-b^2}\right)^2+\frac{b^2(a^2-b^2-c^2)}{a^2-b^2}$ だから f の最大値・最小値は以下のように与えられる.

- $ac\geqq b^2-a^2>0$ の場合, f は $t=\pi$ で最大値 $(a+c)^2$ をとり, $t=0$ で最小値 $(a-c)^2$ をとる.
- $b^2-a^2>ac$ の場合, f は $t=\cos^{-1}\frac{ac}{a^2-b^2}$, $2\pi-\cos^{-1}\frac{ac}{a^2-b^2}$ で最大値 $\frac{b^2(a^2-b^2-c^2)}{a^2-b^2}$ をとり, $t=0$ で最小値 $(a-c)^2$ をとる.
- $a^2-b^2>ac$ の場合, f は $t=\cos^{-1}\frac{ac}{a^2-b^2}$, $2\pi-\cos^{-1}\frac{ac}{a^2-b^2}$ で最小値 $\frac{b^2(a^2-b^2-c^2)}{a^2-b^2}$ をとり, $t=\pi$ で最大値 $(a+c)^2$ をとる.
- $ac\geqq a^2-b^2>0$ の場合, f は $t=\pi$ で最大値 $(a+c)^2$ をとり, $t=0$ で最小値 $(a-c)^2$ をとる.

$|a^2-b^2|>ac$ のとき $\sin\left(\cos^{-1}\frac{ac}{a^2-b^2}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\cos^{-1}\frac{ac}{a^2-b^2}\right)}=\frac{\sqrt{(a^2-b^2)^2-a^2c^2}}{|a^2-b^2|}$ であり, $\sin\left(2\pi-\cos^{-1}\frac{ac}{a^2-b^2}\right)$ $=-\sin\left(\cos^{-1}\frac{ac}{a^2-b^2}\right)=-\frac{\sqrt{(a^2-b^2)^2-a^2c^2}}{|a^2-b^2|}$ であることに注意する.

以上から, 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点に対して, 定点 $\binom{c}{0}$ との距離を対応させる関数を d とすれば, d の最大値・最小値は以下のように与えられる.

- $a=b$ かつ $c=0$ の場合, d は値が常に a である定数値関数である.
- $ac\geqq|a^2-b^2|$ かつ $c\neq0$ の場合, d は $\binom{-a}{0}$ で最大値 $a+c$ をとり, $\binom{a}{0}$ で最小値 $|a-c|$ をとる.
- $b^2-a^2>ac$ の場合, d は $\begin{pmatrix}\frac{a^2c}{a^2-b^2}\\ \pm\frac{b\sqrt{(a^2-b^2)^2-a^2c^2}}{a^2-b^2}\end{pmatrix}$ で最大値 $b\sqrt{\frac{a^2-b^2-c^2}{a^2-b^2}}$ をとり, $\binom{a}{0}$ で最小値 $|a-c|$ をとる.
- $a^2-b^2>ac$ の場合, d は $\begin{pmatrix}\frac{a^2c}{a^2-b^2}\\ \pm\frac{b\sqrt{(a^2-b^2)^2-a^2c^2}}{a^2-b^2}\end{pmatrix}$ で最小値 $b\sqrt{\frac{a^2-b^2-c^2}{a^2-b^2}}$ をとり, $\binom{-a}{0}$ で最大値 $a+c$ をとる.