平均値の定理とテイラーの定理

— 関数の多項式による近似 —

2007 年 6 月 1 日

復習

開区間 (a, b) で定義された関数 f が p において微分可能であるとは, 極限値

復習

開区間 (a, b) で定義された関数 f が p において微分可能であるとは, 極限値

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}$$

が存在することであり,

復習

開区間 (a, b) で定義された関数 f が p において微分可能であるとは, 極限値

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}$$

が存在することであり, この極限値を f の p における微分 (係数) と呼んで, $f'(p)$ で表すことは高校でも学んだ.

復習

開区間 (a, b) で定義された関数 f が p において微分可能であるとは, 極限値

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

が存在することであり, この極限値を f の p における微分 (係数) と呼んで, $f'(p)$ で表すことは高校でも学んだ.

以下で,「1 次関数による近似」という観点から, この微分という概念を見直してみる.

復習

xy-平面上の点 $(p, f(p))$ における f のグラフの「接線」を与える１次関数 $f(p) + f'(p)(x - p)$ を考えて,

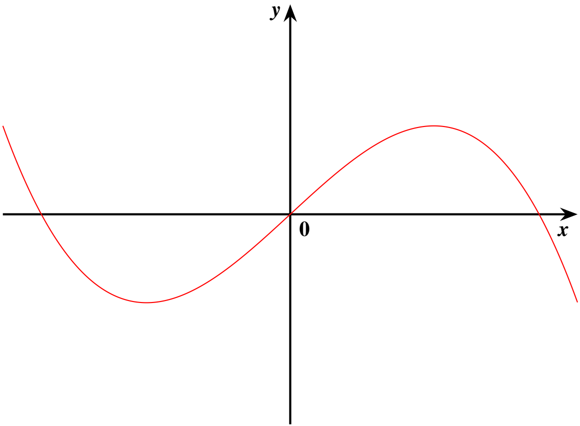
復習

xy-平面上の点 $(p, f(p))$ における f のグラフの「接線」を与える１次関数 $f(p) + f'(p)(x - p)$ を考えて, $f(x)$ をこの１次関数で近似したときの誤差

$$f(x) - (f(p) + f'(p)(x - p))$$

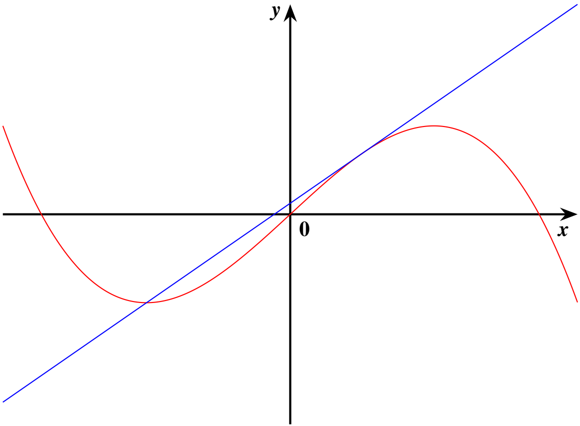
を $\varphi(x)$ とおく.

復習



f のグラフ

復習



$x = 1$ における f のグラフの「接線」

復習

$\varphi(x)$ を x の関数とみなせば,

$$\lim_{x\to p}\frac{\varphi(x)}{x-p} = \lim_{x\to p}\frac{f(x)-(f(p)+f'(p)(x-p))}{x-p}$$

復習

$\varphi(x)$ を x の関数とみなせば,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to p}\frac{\varphi(x)}{x-p} &= \lim_{x\to p}\frac{f(x)-(f(p)+f'(p)(x-p))}{x-p}\\ &= \lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)-f(p)}{x-p}-f'(p)\right)\end{aligned}$$

復習

$\varphi(x)$ を x の関数とみなせば,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to p}\frac{\varphi(x)}{x-p} &= \lim_{x\to p}\frac{f(x)-(f(p)+f'(p)(x-p))}{x-p} \\
&= \lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)-f(p)}{x-p}-f'(p)\right) \\
&= \lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}-\lim_{x\to p}f'(p)
\end{aligned}$$

復習

$\varphi(x)$ を x の関数とみなせば,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to p}\frac{\varphi(x)}{x-p} &= \lim_{x\to p}\frac{f(x)-(f(p)+f'(p)(x-p))}{x-p} \\
&= \lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)-f(p)}{x-p}-f'(p)\right) \\
&= \lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}-\lim_{x\to p}f'(p) \\
&= f'(p)-f'(p)=0
\end{aligned}
$$

が成り立ち,

復習

$\varphi(x)$ を x の関数とみなせば,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to p}\frac{\varphi(x)}{x-p} &= \lim_{x\to p}\frac{f(x)-(f(p)+f'(p)(x-p))}{x-p}\\
&= \lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)-f(p)}{x-p}-f'(p)\right)\\
&= \lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}-\lim_{x\to p}f'(p)\\
&= f'(p)-f'(p)=0
\end{aligned}
$$

が成り立ち, x を p に近づければ, $\varphi(x)$ と $x-p$ との比が $\mathbf{0}$ に近づくことがわかる.

復習

このことを感覚的に表現すれば, 次のようになる.

x を p に近づけたとき, 誤差 $\varphi(x)$ は $x-p$ とは比べものにならないくらい速く 0 に近づくため, 1 次関数 $f(p)+f'(p)(x-p)$ は関数 f の p の近くでの「よい近似」である.

復習

逆に, 開区間 (a, b) で定義された関数 f に対し,
$f(p) + A(x - p)$ (A は定数) という形の, $x = p$ における値が $f(p)$ である 1 次関数で,

復習

逆に, 開区間 (a, b) で定義された関数 f に対し, $f(p) + A(x - p)$ (A は定数) という形の, $x = p$ における値が $f(p)$ である１次関数で, 上で「よい近似」と表現した条件

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - (f(p) + A(x - p))}{x - p} = 0 \quad \cdots (*)$$

を満たすものが存在すると仮定すれば,

復習

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

復習

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

$$= \lim_{x \to p} \frac{f(x) - (f(p) + A(x - p)) + A(x - p)}{x - p}$$

復習

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$$

$$= \lim_{x\to p}\frac{f(x)-(f(p)+A(x-p))+A(x-p)}{x-p}$$

$$= \lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)-(f(p)+A(x-p))}{x-p}+A\right)$$

復習

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$$

$$= \lim_{x\to p}\frac{f(x)-(f(p)+A(x-p))+A(x-p)}{x-p}$$

$$= \lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)-(f(p)+A(x-p))}{x-p}+A\right)$$

$$= \lim_{x\to p}\frac{f(x)-(f(p)+A(x-p))}{x-p}+\lim_{x\to p}A$$

復習

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \to p} \frac{f(x) - (f(p) + A(x - p)) + A(x - p)}{x - p} \\
&= \lim_{x \to p} \left(\frac{f(x) - (f(p) + A(x - p))}{x - p} + A \right) \\
&= \lim_{x \to p} \frac{f(x) - (f(p) + A(x - p))}{x - p} + \lim_{x \to p} A \\
&= 0 + A = A
\end{aligned}$$

復習

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to p}\frac{f(x)-(f(p)+A(x-p))+A(x-p)}{x-p}\\
&= \lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)-(f(p)+A(x-p))}{x-p}+A\right)\\
&= \lim_{x\to p}\frac{f(x)-(f(p)+A(x-p))}{x-p}+\lim_{x\to p}A\\
&= 0+A=A
\end{aligned}$$

となるため, f は p で微分可能で, f の p における微分は A である.

復習

従って, 条件 $(*)$ を満たす定数 A が存在すれば, f の p における微分として 1 とおりに定まる.
以上の考察の結果をまとめると次のようになる.

復習

従って, 条件 $(*)$ を満たす定数 A が存在すれば, f の p における微分として１とおりに定まる.
以上の考察の結果をまとめると次のようになる.

開区間 (a,b) で定義された関数 f が p において微分可能であるためには,

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-(f(p)+A(x-p))}{x-p}=0 \quad \cdots (*)$$

を満たす定数 A が存在することが必要十分である. このとき, $(*)$ を満たす定数 A は f の p における微分である.

復習

このように, 一般の関数を最も基本的な関数である１次関数で近似するという考え方が, 微分という概念の本質である. この１次関数を用いた近似より精密な n 次関数による近似を考えることが, 次に述べるテイラーの定理である.

テイラーの定理

以後, f は開区間 (a, b) で定義された n 回微分可能な関数で, p を開区間 (a, b) の点とする. このとき, テイラーの定理は次のように述べられる.

テイラーの定理

以後, f は開区間 (a, b) で定義された n 回微分可能な関数で, p を開区間 (a, b) の点とする. このとき, テイラーの定理は次のように述べられる.

開区間 (a, b) の任意の点 x に対し, x と p の間の点 c で次の等式を満たすものがある.

テイラーの定理

以後, f は開区間 (a, b) で定義された n 回微分可能な関数で, p を開区間 (a, b) の点とする. このとき, テイラーの定理は次のように述べられる.

開区間 (a, b) の任意の点 x に対し, x と p の間の点 c で次の等式を満たすものがある.

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \cdots + \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k \\
+ \cdots + \frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}(x-p)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n
\end{aligned}
$$

テイラーの定理

以後, f は開区間 (a,b) で定義された n 回微分可能な関数で, p を開区間 (a,b) の点とする. このとき, テイラーの定理は次のように述べられる.

開区間 (a,b) の任意の点 x に対し, x と p の間の点 c で次の等式を満たすものがある.

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \cdots + \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}(x-p)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n$$

上の等式の右辺の最後の項を剰余項という.

テイラーの定理

この定理の証明は後ほど行うとして, まず前節で述べた結果を一般化する次の結果を示す.

テイラーの定理

この定理の証明は後ほど行うとして, まず前節で述べた結果を一般化する次の結果を示す.

$f(x)$ を x の n 次多項式

$$f(p) + \cdots + \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n$$

で近似したときの誤差を $\varphi_n(x)$ とおく. f の n 次導関数 $f^{(n)}$ が p において連続ならば,

テイラーの定理

この定理の証明は後ほど行うとして, まず前節で述べた結果を一般化する次の結果を示す.

$f(x)$ を x の n 次多項式

$$f(p) + \cdots + \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n$$

で近似したときの誤差を $\varphi_n(x)$ とおく. f の n 次導関数 $f^{(n)}$ が p において連続ならば,

$$\lim_{x \to p} \frac{\varphi_n(x)}{(x-p)^n} = 0.$$

テイラーの定理

テイラーの定理から, 各 x に対して x と p の間の点 c_x で次の等式を満たすものがある.

$$f(x) = f(p) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k + \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-p)^n$$

テイラーの定理

テイラーの定理から, 各 x に対して x と p の間の点 c_x で次の等式を満たすものがある.

$$f(x) = f(p) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k + \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-p)^n$$

この右辺を $\varphi_n(x)$ の定義式

$$\varphi_n(x) = f(x) - \left(f(p) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k \right)$$

の左辺の $f(x)$ に代入して, 次の等式を得る.

テイラーの定理

テイラーの定理から, 各 x に対して x と p の間の点 c_x で次の等式を満たすものがある.

$$f(x) = f(p) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k + \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-p)^n$$

この右辺を $\varphi_n(x)$ の定義式

$$\varphi_n(x) = f(x) - \left(f(p) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k \right)$$

の左辺の $f(x)$ に代入して, 次の等式を得る.

$$\varphi_n(x) = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-p)^n - \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n$$

テイラーの定理

両辺を $(x - p)^n$ で割って, x を p に近づけると

テイラーの定理

両辺を $(x - p)^n$ で割って, x を p に近づけると

$$\lim_{x \to p} \frac{\varphi_n(x)}{(x - p)^n} = \lim_{x \to p} \frac{f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(p)}{n!}$$

テイラーの定理

両辺を $(x - p)^n$ で割って, x を p に近づけると

$$\lim_{x \to p} \frac{\varphi_n(x)}{(x - p)^n} = \lim_{x \to p} \frac{f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(p)}{n!}$$

ここで, c_x はつねに x と p の間にあるため x が p に近づけば, c_x も p に近づく. 従って, $f^{(n)}$ の p における連続性から,

テイラーの定理

両辺を $(x-p)^n$ で割って, x を p に近づけると

$$\lim_{x \to p} \frac{\varphi_n(x)}{(x-p)^n} = \lim_{x \to p} \frac{f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(p)}{n!}$$

ここで, c_x はつねに x と p の間にあるため x が p に近づけば, c_x も p に近づく. 従って, $f^{(n)}$ の p における連続性から,

$$\lim_{x \to p} f^{(n)}(c_x) = f^{(n)}(p)$$

となるため, 上式の右辺は 0 になることがわかり, 主張が示された.

テイラーの定理

$m < n$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{(x-p)^n}{(x-p)^m} = 0$ だから, x を p に近づけたとき $(x-p)^n$ は $(x-p)^m$ よりも「速く」0 に近づく関数である.

テイラーの定理

$m < n$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{(x-p)^n}{(x-p)^m} = 0$ だから, x を p に近づけたとき $(x-p)^n$ は $(x-p)^m$ よりも「速く」0 に近づく関数である. その意味では, n が大きければ大きいほど, 多項式

$$f(p) + \cdots + \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n$$

は x が p の近くでの $f(x)$ のより精密な近似であるといえる.

極大・極小の定義

テイラーの定理を証明するための準備を以下で行う. まずは, 関数の極大・極小の定義をする.

極大・極小の定義

テイラーの定理を証明するための準備を以下で行う. まずは, 関数の極大・極小の定義をする.

$X, Y \subset \boldsymbol{R}$, $f : X \to Y$ を関数, $p \in X$ とする.

極大・極小の定義

テイラーの定理を証明するための準備を以下で行う. まずは, 関数の極大・極小の定義をする.

$X, Y \subset R$, $f : X \to Y$ を関数, $p \in X$ とする.
正の実数 r で,
「$x \in (p-r, p+r) \cap X$ ならば $f(x) \leqq f(p)$」
を満たすものがあるとき, f は p において極大であるといい, $f(p)$ を f の極大値という.

極大・極小の定義

テイラーの定理を証明するための準備を以下で行う. まずは, 関数の極大・極小の定義をする.

$X, Y \subset R$, $f : X \to Y$ を関数, $p \in X$ とする.
正の実数 r で,
「$x \in (p - r, p + r) \cap X$ ならば $f(x) \leqq f(p)$」
を満たすものがあるとき, f は p において極大であるといい, $f(p)$ を f の極大値という.
また, 正の実数 r で,
「$x \in (p - r, p + r) \cap X$ ならば $f(x) \geqq f(p)$」
を満たすものがあるとき, f は p において極小であるといい, $f(p)$ を f の極小値という.

極大・極小になるための必要条件

極大・極小の定義から, f の最大値は f の極大値であり, f の最小値は f の極小値であることに注意する.

極大・極小になるための必要条件

極大・極小の定義から, f の最大値は f の極大値であり, f の最小値は f の極小値であることに注意する.

微分可能な関数が極大・極小になるための必要条件を与える次の結果は基本的である.

極大・極小になるための必要条件

極大・極小の定義から, f の最大値は f の極大値であり, f の最小値は f の極小値であることに注意する.

微分可能な関数が極大・極小になるための必要条件を与える次の結果は基本的である.

$f : (a, b) \to R$ が $p \in (a, b)$ において微分可能で, 極大または極小であるとき, $f'(p) = 0$ である.

極大・極小になるための必要条件の証明

極大・極小になるための必要条件の証明

f が p において極大ならば正の実数 r で,
$r < p - a, b - p$ かつ

極大・極小になるための必要条件の証明

f が p において極大ならば正の実数 r で,
$r < p - a, b - p$ かつ
「$x \in (p - r, p + r)$ ならば $f(x) \leqq f(p)$」
を満たすものがある.

極大・極小になるための必要条件の証明

f が p において極大ならば正の実数 r で,
$r < p - a, b - p$ かつ
「$x \in (p - r, p + r)$ ならば $f(x) \leqq f(p)$」
を満たすものがある. f は p で微分可能だから

極大・極小になるための必要条件の証明

f が p において極大ならば正の実数 r で,
$r < p - a, b - p$ かつ
「$x \in (p - r, p + r)$ ならば $f(x) \leqq f(p)$」
を満たすものがある. f は p で微分可能だから

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

極大・極小になるための必要条件の証明

f が p において極大ならば正の実数 r で,
$r < p - a, b - p$ かつ
「$x \in (p - r, p + r)$ ならば $f(x) \leqq f(p)$」
を満たすものがある. f は p で微分可能だから

$$
\begin{aligned}
f'(p) &= \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \\
&= \lim_{x \to p-0} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}
\end{aligned}
$$

極大・極小になるための必要条件の証明

f が p において極大ならば正の実数 r で,
$r < p - a, b - p$ かつ
「$x \in (p - r, p + r)$ ならば $f(x) \leqq f(p)$」
を満たすものがある. f は p で微分可能だから

$$
\begin{aligned}
f'(p) &= \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \\
&= \lim_{x \to p-0} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \\
&= \lim_{x \to p+0} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \quad \cdots \ (1)
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

極大・極小になるための必要条件の証明

一方, $\boldsymbol{x \in (p - r, p)}$ ならば $\dfrac{\boldsymbol{f(x) - f(p)}}{\boldsymbol{x - p}} \geqq \boldsymbol{0}$ だから

極大・極小になるための必要条件の証明

一方, $x \in (p - r, p)$ ならば $\dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} \geqq 0$ だから

$$\lim_{x \to p-0} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geqq 0 \quad \cdots \quad (2)$$

極大・極小になるための必要条件の証明

一方, $x \in (p-r, p)$ ならば $\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p} \geqq 0$ だから

$$\lim_{x \to p-0} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} \geqq 0 \quad \cdots \quad (2)$$

$x \in (p, p+r)$ ならば $\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p} \leqq 0$ だから

極大・極小になるための必要条件の証明

一方, $x \in (p-r, p)$ ならば $\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p} \geqq 0$ だから

$$\lim_{x \to p-0} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} \geqq 0 \quad \cdots \quad (2)$$

$x \in (p, p+r)$ ならば $\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p} \leqq 0$ だから

$$\lim_{x \to p+0} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} \leqq 0 \quad \cdots \quad (3)$$

である.

極大・極小になるための必要条件の証明

一方, $x \in (p - r, p)$ ならば $\dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} \geqq 0$ だから

$$\lim_{x \to p-0} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geqq 0 \quad \cdots \quad (2)$$

$x \in (p, p + r)$ ならば $\dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} \leqq 0$ だから

$$\lim_{x \to p+0} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \leqq 0 \quad \cdots \quad (3)$$

である. 従って (1) と (2) から $f'(p) \geqq 0$ であり,

極大・極小になるための必要条件の証明

一方, $x \in (p-r, p)$ ならば $\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p} \geqq 0$ だから

$$\lim_{x \to p-0} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} \geqq 0 \quad \cdots \quad (2)$$

$x \in (p, p+r)$ ならば $\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p} \leqq 0$ だから

$$\lim_{x \to p+0} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} \leqq 0 \quad \cdots \quad (3)$$

である. 従って (1) と (2) から $f'(p) \geqq 0$ であり,
(1) と (3) から $f'(p) \leqq 0$ だから $f'(p) = 0$ である.

極大・極小になるための必要条件の証明

一方, $x \in (p-r, p)$ ならば $\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p} \geqq 0$ だから

$$\lim_{x\to p-0} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} \geqq 0 \quad \cdots \quad (2)$$

$x \in (p, p+r)$ ならば $\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p} \leqq 0$ だから

$$\lim_{x\to p+0} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} \leqq 0 \quad \cdots \quad (3)$$

である. 従って (1) と (2) から $f'(p) \geqq 0$ であり, (1) と (3) から $f'(p) \leqq 0$ だから $f'(p) = 0$ である. f が p において極小の場合も $f'(p) = 0$ が同様に示される.

最大値・最小値の定理

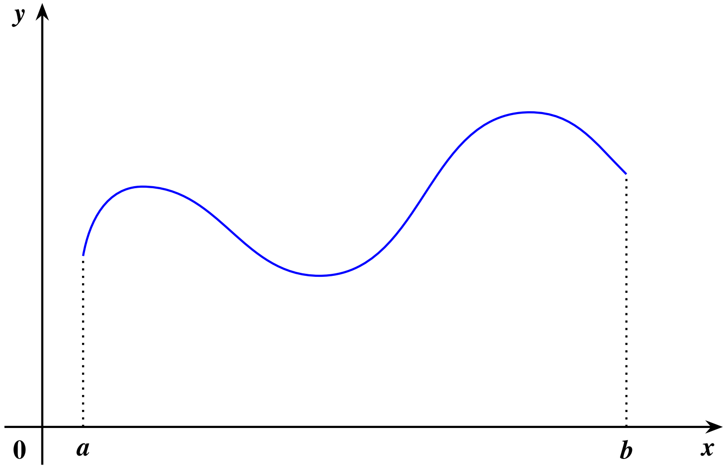
「中間値の定理」と並んで次の「最大値・最小値の定理」は連続関数についての基本的な定理であり, この定理は「上に有界な単調増加数列は収束する.」という「実数の連続性」を用いて示される.

最大値・最小値の定理

「中間値の定理」と並んで次の「最大値・最小値の定理」は連続関数についての基本的な定理であり, この定理は「上に有界な単調増加数列は収束する.」という「実数の連続性」を用いて示される.

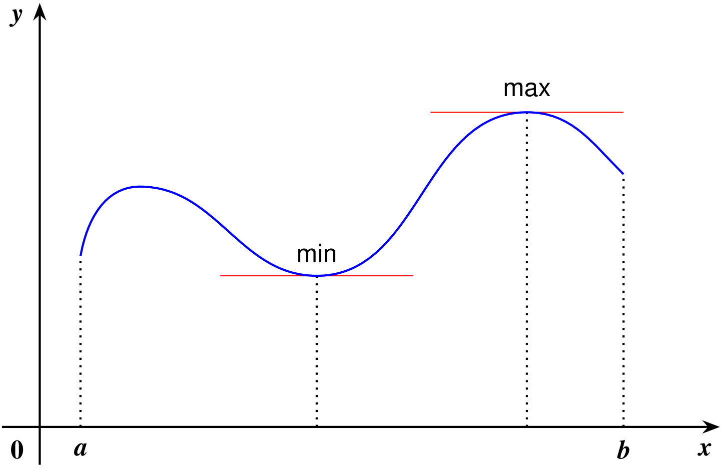
閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数
$f : [a, b] \to R$ は最大値と最小値を持つ.

最大値・最小値の定理



最大値・最小値の存在

最大値・最小値の定理



最大値・最小値の存在

ロルの定理

まず,「ロルの定理」と呼ばれる次の定理を示す.

ロルの定理

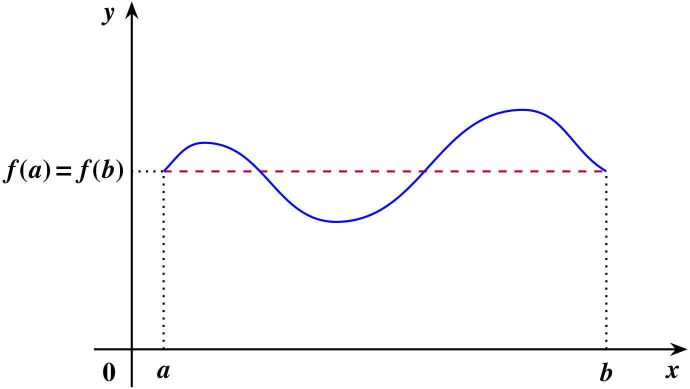
まず,「ロルの定理」と呼ばれる次の定理を示す.

閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 f が (a, b) の各点で微分可能なとき, $f(a) = f(b)$ ならば $f'(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ がある.

ロルの定理

まず,「ロルの定理」と呼ばれる次の定理を示す.

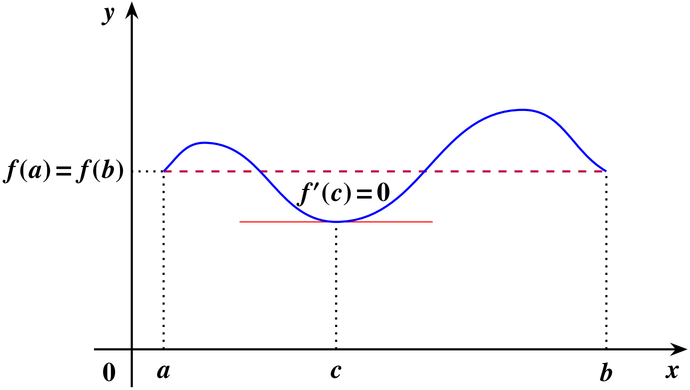
閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 f が (a, b) の各点で微分可能なとき, $f(a) = f(b)$ ならば $f'(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ がある.



ロルの定理

まず,「ロルの定理」と呼ばれる次の定理を示す.

閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 f が (a, b) の各点で微分可能なとき, $f(a) = f(b)$ ならば $f'(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ がある.



ロルの定理の証明

最大値・最小値の定理により f は最大値と最小値をとる.

ロルの定理の証明

最大値・最小値の定理により f は最大値と最小値をとる. f の最大値, 最小値をそれぞれ $f(p)$, $f(q)$ とすれば, $f(q) \leqq f(a) = f(b) \leqq f(p)$ だから, 以下の場合が考えられる.

ロルの定理の証明

最大値・最小値の定理により f は最大値と最小値をとる. f の最大値, 最小値をそれぞれ $f(p)$, $f(q)$ とすれば, $f(q) \leqq f(a) = f(b) \leqq f(p)$ だから, 以下の場合が考えられる.

(1) $f(p) > f(a) = f(b)$ の場合, $p \neq a, b$ だから f は p において微分可能である. f は p で極大だから $f'(p) = 0$ となるため, $c = p$ とすればよい.

ロルの定理の証明

最大値・最小値の定理により f は最大値と最小値をとる. f の最大値, 最小値をそれぞれ $f(p)$, $f(q)$ とすれば, $f(q) \leqq f(a) = f(b) \leqq f(p)$ だから, 以下の場合が考えられる.

(1) $f(p) > f(a) = f(b)$ の場合, $p \neq a, b$ だから f は p において微分可能である. f は p で極大だから $f'(p) = 0$ となるため, $c = p$ とすればよい.

(2) $f(q) < f(a) = f(b)$ の場合, $q \neq a, b$ だから f は q において微分可能である. f は p で極小だから $f'(q) = 0$ となるため, $c = q$ とすればよい.

ロルの定理の証明

最大値・最小値の定理により f は最大値と最小値をとる. f の最大値, 最小値をそれぞれ $f(p)$, $f(q)$ とすれば, $f(q) \leqq f(a) = f(b) \leqq f(p)$ だから, 以下の場合が考えられる.

(1) $f(p) > f(a) = f(b)$ の場合, $p \neq a, b$ だから f は p において微分可能である. f は p で極大だから $f'(p) = 0$ となるため, $c = p$ とすればよい.

(2) $f(q) < f(a) = f(b)$ の場合, $q \neq a, b$ だから f は q において微分可能である. f は p で極小だから $f'(q) = 0$ となるため, $c = q$ とすればよい.

(3) $f(q) = f(a) = f(b) = f(p)$ の場合, f は定数値関数だから, 任意の $c \in (a, b)$ に対して $f'(c) = 0$ である.

コーシーの平均値の定理

ロルの定理は「コーシーの平均値の定理」と呼ばれる次の定理に一般化される.

コーシーの平均値の定理

ロルの定理は「コーシーの平均値の定理」と呼ばれる次の定理に一般化される.

$\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ を閉区間 $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ で定義された連続関数で, 開区間 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ の各点で微分可能であるとする.

コーシーの平均値の定理

ロルの定理は「コーシーの平均値の定理」と呼ばれる次の定理に一般化される.

f, g を閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数で, 開区間 (a, b) の各点で微分可能であるとする.
$g(b) \neq g(a)$ であり, (a, b) のすべての点 x に対して $f'(x)$ と $g'(x)$ が同時に 0 にならないならば,

コーシーの平均値の定理

ロルの定理は「コーシーの平均値の定理」と呼ばれる次の定理に一般化される.

f, g を閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数で, 開区間 (a, b) の各点で微分可能であるとする.
$g(b) \neq g(a)$ であり, (a, b) のすべての点 x に対して $f'(x)$ と $g'(x)$ が同時に 0 にならないならば,
次の等式を満たす $c \in (a, b)$ がある.

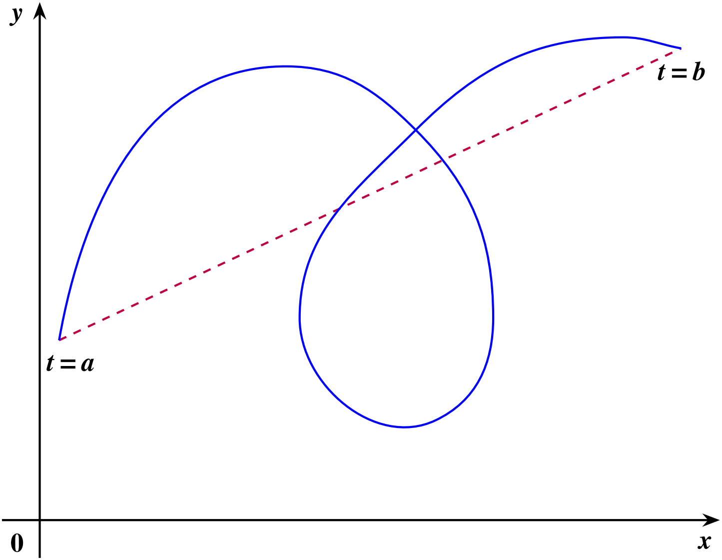
コーシーの平均値の定理

ロルの定理は「コーシーの平均値の定理」と呼ばれる次の定理に一般化される.

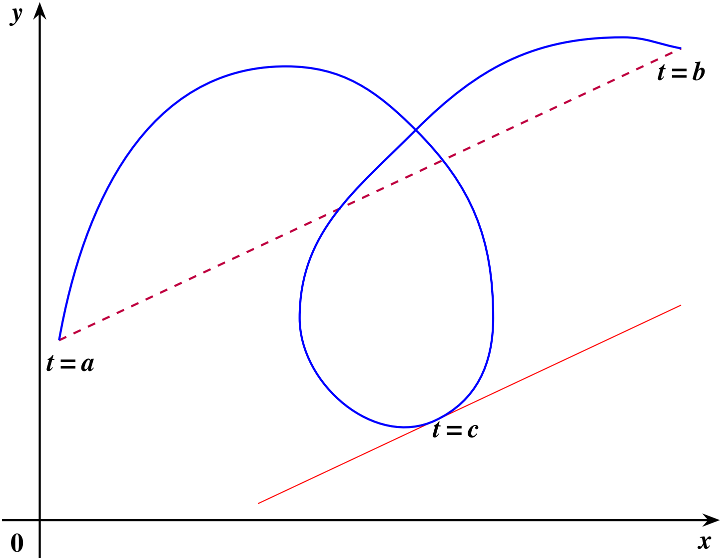
f, g を閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数で, 開区間 (a, b) の各点で微分可能であるとする.
$g(b) \neq g(a)$ であり, (a, b) のすべての点 x に対して $f'(x)$ と $g'(x)$ が同時に 0 にならないならば, 次の等式を満たす $c \in (a, b)$ がある.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

コーシーの平均値の定理



コーシーの平均値の定理



コーシーの平均値の定理の証明

関数 $F : [a,b] \to R$ を

$$F(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

で定めれば, F はロルの定理の条件を満たすため, $F'(c) = 0$ となる $c \in (a,b)$ がある.

コーシーの平均値の定理の証明

関数 $F : [a,b] \to R$ を

$$F(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

で定めれば, F はロルの定理の条件を満たすため, $F'(c) = 0$ となる $c \in (a,b)$ がある．一方

$$F'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - (a))f'(x)$$

だから, $F'(c) = 0$ より次の等式を得る.

コーシーの平均値の定理の証明

関数 $F : [a, b] \to R$ を

$$F(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

で定めれば, F はロルの定理の条件を満たすため, $F'(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ がある．一方

$$F'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - (a))f'(x)$$

だから, $F'(c) = 0$ より次の等式を得る.

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c) \quad \cdots (*)$$

もし, $g'(c) = 0$ ならば, $g(b) - g(a) \neq 0$ だから $(*)$ より $f'(c) = 0$ となって仮定に反する.

コーシーの平均値の定理の証明

関数 $F : [a, b] \to R$ を

$$F(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

で定めれば, F はロルの定理の条件を満たすため, $F'(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ がある．一方

$$F'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - (a))f'(x)$$

だから, $F'(c) = 0$ より次の等式を得る.

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c) \quad \cdots (*)$$

もし, $g'(c) = 0$ ならば, $g(b) - g(a) \neq 0$ だから $(*)$ より $f'(c) = 0$ となって仮定に反する. 従って, $g'(c) \neq 0$ となり, $(*)$ の両辺を $(g(b) - g(a))g'(c)$ で割れば, 示すべき等式が得られる.

ラグランジュの平均値の定理

コーシーの平均値の定理において, とくに g が $g(x) = x$ で与えられる関数の場合を考えると, 次の「ラグランジュの平均値の定理」が得られる.

ラグランジュの平均値の定理

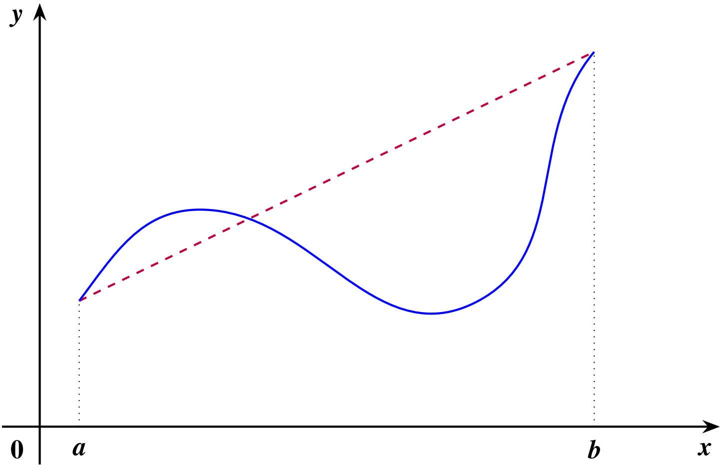
コーシーの平均値の定理において, とくに g が $g(x) = x$ で与えられる関数の場合を考えると, 次の「ラグランジュの平均値の定理」が得られる.

$f : [a, b] \to R$ が連続関数で, (a, b) の各点で微分可能なとき,

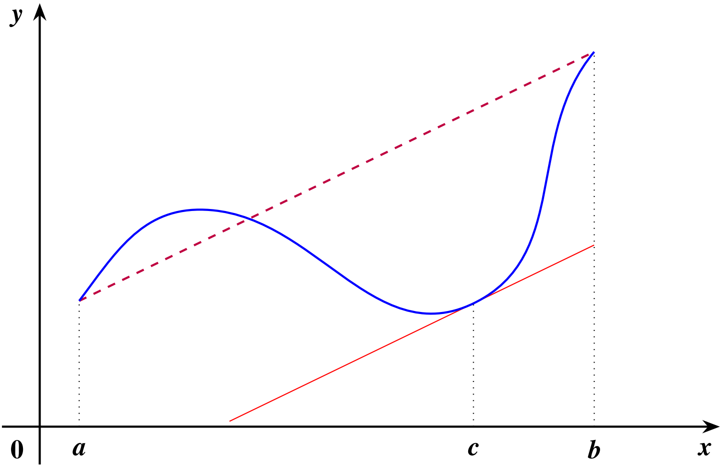
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

となる $c \in (a, b)$ がある.

ラグランジュの平均値の定理



ラグランジュの平均値の定理



テイラーの定理の証明

f を開区間 (a, b) で定義された n 回微分可能な関数, p を開区間 (a, b) の点とする.

テイラーの定理の証明

f を開区間 (a, b) で定義された n 回微分可能な関数, p を開区間 (a, b) の点とする. 関数 F を

$$F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k$$

により定義する.

テイラーの定理の証明

f を開区間 (a, b) で定義された n 回微分可能な関数, p を開区間 (a, b) の点とする. 関数 F を

$$F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k$$

により定義する.

このとき, F の m 次導関数 $(m = 0, 1, \ldots, n-1)$ は

$$F^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) - \sum_{k=m}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)}{(k-m)!}(x-p)^{k-m}$$

となり,

テイラーの定理の証明

f を開区間 (a,b) で定義された n 回微分可能な関数, p を開区間 (a,b) の点とする. 関数 F を

$$F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k$$

により定義する.

このとき, F の m 次導関数 $(m = 0, 1, \ldots, n-1)$ は

$$F^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) - \sum_{k=m}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)}{(k-m)!}(x-p)^{k-m}$$

となり, F の n 次導関数は $F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$ である.

テイラーの定理の証明

とくに

$$F(p) = F'(p) = \cdots = F^{(m)}(p) = \cdots = F^{(n-1)}(p) = 0$$

が成り立つことに注意する.

テイラーの定理の証明

とくに

$$F(p) = F'(p) = \cdots = F^{(m)}(p) = \cdots = F^{(n-1)}(p) = 0$$

が成り立つことに注意する.
F と $(x-p)^n$ に対してコーシーの平均値の定理を用いると x と p の間の実数 c_1 で次の等式 (1) を満たすものがある.

テイラーの定理の証明

とくに

$$F(p) = F'(p) = \cdots = F^{(m)}(p) = \cdots = F^{(n-1)}(p) = 0$$

が成り立つことに注意する.
F と $(x-p)^n$ に対してコーシーの平均値の定理を用いると x と p の間の実数 c_1 で次の等式 (1) を満たすものがある.

$$\frac{F(x)}{(x-p)^n} = \frac{F(x) - F(p)}{(x-p)^n - (p-p)^n} = \frac{F'(c_1)}{n(c_1 - p)^{n-1}} \quad \cdots (1)$$

テイラーの定理の証明

同様に, F' と $(x-p)^{n-1}$ に対してコーシーの平均値の定理を用いると c_1 と p の間の実数 c_2 (よって c_2 は x と p の間にある) で次の等式 (2) を満たすものがある.

テイラーの定理の証明

同様に, F' と $(x-p)^{n-1}$ に対してコーシーの平均値の定理を用いると c_1 と p の間の実数 c_2 (よって c_2 は x と p の間にある) で次の等式 (2) を満たすものがある.

$$\frac{F'(c_1)}{(c_1-p)^{n-1}} = \frac{F'(c_1)-F'(p)}{(c_1-p)^{n-1}-(p-p)^{n-1}} = \frac{F''(c_2)}{(n-1)(c_2-p)^{n-2}} \quad \cdots (2)$$

テイラーの定理の証明

これを繰り返して, 帰納的に x と p の間にある実数 $c_1, c_2, \ldots, c_m$ $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$ で, $k = 1, 2, \ldots, m$ に対して次の等式 (k) を満たすものが得られたとする. (ただし $c_0 = x$ とする)

テイラーの定理の証明

これを繰り返して, 帰納的に x と p の間にある実数 $c_1, c_2, \ldots, c_m$ $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$ で, $k = 1, 2, \ldots, m$ に対して次の等式 (k) を満たすものが得られたとする. (ただし $c_0 = x$ とする)

$$\frac{F^{(k-1)}(c_{k-1})}{(c_{k-1} - p)^{n-k+1}} = \frac{F^{(k)}(c_k)}{(n-k+1)(c_k - p)^{n-k}} \quad \cdots (k)$$

テイラーの定理の証明

$F^{(m)}$ と $(x-p)^{n-m}$ に対してコーシーの平均値の定理を用いると c_m と p の間の実数 c_{m+1} (よって c_{m+1} は x と p の間にある) で次の等式 $(m+1)$ を満たすものがある.

テイラーの定理の証明

$F^{(m)}$ と $(x-p)^{n-m}$ に対してコーシーの平均値の定理を用いると c_m と p の間の実数 c_{m+1} (よって c_{m+1} は x と p の間にある) で次の等式 $(m+1)$ を満たすものがある.

$$\frac{F^{(m)}(c_m)}{(c_m-p)^{n-m}} = \frac{F^{(m)}(c_m)-F^{(m)}(p)}{(c_m-p)^{n-m}-(p-p)^{n-m}}$$
$$= \frac{F^{(m+1)}(c_{m+1})}{(n-m)(c_{m+1}-p)^{n-m-1}} \quad \cdots (m+1)$$

テイラーの定理の証明

従って, m による帰納法で, x と p の間にある実数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ で, $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して上の等式 (k) を満たすものがある. これらの等式から

テイラーの定理の証明

従って, m による帰納法で, x と p の間にある実数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ で, $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して上の等式 (k) を満たすものがある. これらの等式から

$$\frac{F(x)}{(x-p)^n} = \frac{F'(c_1)}{n(c_1-p)^{n-1}} = \cdots$$

テイラーの定理の証明

従って, m による帰納法で, x と p の間にある実数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ で, $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して上の等式 (k) を満たすものがある. これらの等式から

$$\frac{F(x)}{(x-p)^n} = \frac{F'(c_1)}{n(c_1-p)^{n-1}} = \cdots = \frac{F^{(k)}(c_k)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)(c_k-p)^{n-k}}$$

テイラーの定理の証明

従って, m による帰納法で, x と p の間にある実数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ で, $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して上の等式 (k) を満たすものがある. これらの等式から

$$
\begin{aligned}
\frac{F(x)}{(x-p)^n} &= \frac{F'(c_1)}{n(c_1-p)^{n-1}} = \cdots \\
&= \frac{F^{(k)}(c_k)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)(c_k-p)^{n-k}} \\
&= \cdots = \frac{F^{(n)}(c_n)}{n!}
\end{aligned}
$$

テイラーの定理の証明

従って, m による帰納法で, x と p の間にある実数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ で, $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して上の等式 (k) を満たすものがある. これらの等式から

$$
\begin{aligned}
\frac{F(x)}{(x-p)^n} &= \frac{F'(c_1)}{n(c_1-p)^{n-1}} = \cdots \\
&= \frac{F^{(k)}(c_k)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)(c_k-p)^{n-k}} \\
&= \cdots = \frac{F^{(n)}(c_n)}{n!}
\end{aligned}
$$

となるため, $c = c_n$ とおくと,

テイラーの定理の証明

$$F(x) = \frac{F^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n$$

を満たす c が x と p の間にある.

テイラーの定理の証明

$$F(x) = \frac{F^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n$$

を満たす c が x と p の間にある. この等式の左辺に, $F(x)$ を定義した式

$$F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k$$

を代入すれば, 次の等式が得られる.

テイラーの定理の証明

$$F(x) = \frac{F^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n$$

を満たす c が x と p の間にある. この等式の左辺に, $F(x)$ を定義した式

$$F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k$$

を代入すれば, 次の等式が得られる.

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n$$

テイラーの定理の証明

$$F(x) = \frac{F^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n$$

を満たす c が x と p の間にある. この等式の左辺に, $F(x)$ を定義した式

$$F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k$$

を代入すれば, 次の等式が得られる.

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n$$

この左辺の $\sum$ の部分を移項して結果を得る.

高次導関数の復習

まず, 基本的な関数 e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$, $\log(1+x)$ の n 次導関数が次で与えられることを思い出しておく.

高次導関数の復習

まず, 基本的な関数 e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$, $\log(1+x)$ の n 次導関数が次で与えられることを思い出しておく.

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

高次導関数の復習

まず, 基本的な関数 e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$, $\log(1+x)$ の n 次導関数が次で与えられることを思い出しておく.

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$$

高次導関数の復習

まず, 基本的な関数 e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$, $\log(1+x)$ の n 次導関数が次で与えられることを思い出しておく.

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$$

高次導関数の復習

まず, 基本的な関数 e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$, $\log(1+x)$ の n 次導関数が次で与えられることを思い出しておく.

$$
\begin{aligned}
(e^x)^{(n)} &= e^x \\
(\sin x)^{(n)} &= \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \\
(\cos x)^{(n)} &= \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \\
((1+x)^\alpha)^{(n)} &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}
\end{aligned}
$$

高次導関数の復習

まず, 基本的な関数 e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$, $\log(1+x)$ の n 次導関数が次で与えられることを思い出しておく.

$$
\begin{aligned}
(e^x)^{(n)} &= e^x \\
(\sin x)^{(n)} &= \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \\
(\cos x)^{(n)} &= \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \\
((1+x)^\alpha)^{(n)} &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \\
(\log(1+x))^{(n)} &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}
\end{aligned}
$$

高次導関数の復習

従って, これらの $x = 0$ における値は

高次導関数の復習

従って, これらの $\boldsymbol{x = 0}$ における値は

$$(e^x)^{(n)}(0) \;=\; 1$$

高次導関数の復習

従って, これらの $x = 0$ における値は

$$
\begin{aligned}
(e^x)^{(n)}(0) &= 1 \\
(\sin x)^{(n)}(0) &= \sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0 & n \text{ は偶数} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ は奇数} \end{cases}
\end{aligned}
$$

高次導関数の復習

従って, これらの $x = 0$ における値は

$$
\begin{aligned}
(e^x)^{(n)}(0) &= 1 \\
(\sin x)^{(n)}(0) &= \sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0 & n \text{ は偶数} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ は奇数} \end{cases} \\
(\cos x)^{(n)}(0) &= \cos\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ は偶数} \\ 0 & n \text{ は奇数} \end{cases}
\end{aligned}
$$

高次導関数の復習

従って, これらの $x = 0$ における値は

$$
\begin{aligned}
(e^x)^{(n)}(0) &= 1 \\
(\sin x)^{(n)}(0) &= \sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0 & n \text{ は偶数} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ は奇数} \end{cases} \\
(\cos x)^{(n)}(0) &= \cos\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ は偶数} \\ 0 & n \text{ は奇数} \end{cases} \\
((1+x)^{\alpha})^{(n)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)
\end{aligned}
$$

高次導関数の復習

従って, これらの $x = 0$ における値は

$$
\begin{aligned}
(e^x)^{(n)}(0) &= 1 \\
(\sin x)^{(n)}(0) &= \sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0 & n \text{ は偶数} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ は奇数} \end{cases} \\
(\cos x)^{(n)}(0) &= \cos\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ は偶数} \\ 0 & n \text{ は奇数} \end{cases} \\
((1+x)^\alpha)^{(n)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) \\
(\log(1+x))^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1}(n-1)!
\end{aligned}
$$

で与えられる.

e^x のテイラーの定理

e^x に対し, $p = 0$ としてテイラーの定理を用いると, 0 と x の間に次の等式を満たす c が存在する.

e^x のテイラーの定理

e^x に対し, $p = 0$ としてテイラーの定理を用いると, 0 と x の間に次の等式を満たす c が存在する.

$$e^x = 1 + x + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c x^n}{n!}$$

とくに $x = 1$ の場合を考えると, 0 と 1 の間に

e^x のテイラーの定理

e^x に対し, $p = 0$ としてテイラーの定理を用いると, 0 と x の間に次の等式を満たす c が存在する.

$$e^x = 1 + x + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c x^n}{n!}$$

とくに $x = 1$ の場合を考えると, 0 と 1 の間に

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^c}{n!}$$

を満たす c が存在する.

$\sin x$ のテイラーの定理

$\sin x$ に対し, $n = 2m + 1$, $p = 0$ としてテイラーの定理を用いる. 加法定理から

$$\sin\left(x + \frac{(2m+1)\pi}{2}\right) = (-1)^m \cos x$$

が成り立つことに注意すると, 0 と x の間に次の等式を満たす c が存在する.

$\sin x$ のテイラーの定理

$\sin x$ に対し, $n = 2m + 1$, $p = 0$ としてテイラーの定理を用いる. 加法定理から

$$\sin\left(x + \frac{(2m+1)\pi}{2}\right) = (-1)^m \cos x$$

が成り立つことに注意すると, 0 と x の間に次の等式を満たす c が存在する.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots$$
$$+ (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m \frac{(\cos c) x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$\cos x$ のテイラーの定理

$\cos x$ では, $n = 2m$, $p = 0$ としてテイラーの定理を用いる. 加法定理から

$$\cos\left(x + \frac{(2m)\pi}{2}\right) = (-1)^m \cos x$$

が成り立つことに注意すると, 0 と x の間に次の等式を満たす c が存在する.

$\cos x$ のテイラーの定理

$\cos x$ では, $n = 2m$, $p = 0$ としてテイラーの定理を用いる. 加法定理から

$$\cos\left(x + \frac{(2m)\pi}{2}\right) = (-1)^m \cos x$$

が成り立つことに注意すると, 0 と x の間に次の等式を満たす c が存在する.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots$$
$$+ (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} + (-1)^m \frac{(\cos c)x^{2m}}{(2m)!}$$

$(1 + x)^\alpha$ のテイラーの定理

$(1 + x)^\alpha$ については,

$(1+x)^\alpha$ のテイラーの定理

$(1+x)^\alpha$ については,

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$$

とおき, $p=0$ としてテイラーの定理を用いると, 0 と x の間に次の等式を満たす c が存在する.

$(1+x)^\alpha$ のテイラーの定理

$(1+x)^\alpha$ については,

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$$

とおき, $p=0$ としてテイラーの定理を用いると, 0 と x の間に次の等式を満たす c が存在する.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k + \cdots + \binom{\alpha}{n-1}x^{n-1} + \binom{\alpha}{n}(1+c)^{\alpha-n}x^n$$

$\log x$ のテイラーの定理

最後に, $\log(1+x)$ であるが, $p = 0$ としてテイラーの定理を用いると, 0 と x の間に次の等式を満たす c が存在する.

$\log x$ のテイラーの定理

最後に, $\log(1+x)$ であるが, $p=0$ としてテイラーの定理を用いると, 0 と x の間に次の等式を満たす c が存在する.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n(1+c)^n}$$

関数の多項式による近似

関数 f を多項式で近似したときの誤差の評価について考える.

関数の多項式による近似

関数 f を多項式で近似したときの誤差の評価について考える.

n 回微分可能な関数 $f : (a, b) \to R$ が与えられたとき, $x, p \in (a, b)$ に対して $f(x)$ を n 次多項式

関数の多項式による近似

関数 f を多項式で近似したときの誤差の評価について考える.

n 回微分可能な関数 $f:(a,b)\to R$ が与えられたとき, $x,p\in(a,b)$ に対して $f(x)$ を n 次多項式

$$f(p)+\cdots+\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k+\cdots+\frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n$$

で近似したときの誤差は, テイラーの定理によって x と p の間の数 c を用いて次で与えられる.

関数の多項式による近似

関数 f を多項式で近似したときの誤差の評価について考える.

n 回微分可能な関数 $f : (a, b) \to R$ が与えられたとき, $x, p \in (a, b)$ に対して $f(x)$ を n 次多項式

$$f(p) + \cdots + \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n$$

で近似したときの誤差は, テイラーの定理によって x と p の間の数 c を用いて次で与えられる.

$$\frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n$$

関数の多項式による近似

実数 M で, x と p の間のすべての実数 t に対して
$\left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(p)\right| \leqq M$ を満たすものがあるとき

関数の多項式による近似

実数 M で, x と p の間のすべての実数 t に対して $\left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(p)\right| \leqq M$ を満たすものがあるとき

$$\left|\frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n\right| \leqq \frac{M|x-p|^n}{n!}$$

関数の多項式による近似

実数 M で, x と p の間のすべての実数 t に対して $\left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(p)\right| \leqq M$ を満たすものがあるとき

$$\left|\frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n\right| \leqq \frac{M|x-p|^n}{n!}$$

となるため, 上記の誤差は $\dfrac{M|x-p|^n}{n!}$ 以下であることがわかる.

関数の多項式による近似

実数 M で, x と p の間のすべての実数 t に対して
$\left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(p)\right| \leqq M$ を満たすものがあるとき

$$\left|\frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n\right| \leqq \frac{M|x-p|^n}{n!}$$

となるため, 上記の誤差は $\dfrac{M|x-p|^n}{n!}$ 以下である
ことがわかる. この結果を, $p = 0$ で f が e^x,
$(1+x)^\alpha$, $\log(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$ の場合に用いる.

e^x の多項式による近似

$f(x) = e^x$, $p = 0$ の場合, $M = |e^x - 1|$ ととれるため, e^x を

e^x の多項式による近似

$f(x) = e^x$, $p = 0$ の場合, $M = |e^x - 1|$ ととれるため, e^x を

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

で近似したときの誤差は $\dfrac{|e^x - 1||x|^n}{n!}$ 以下である.

e^x の多項式による近似

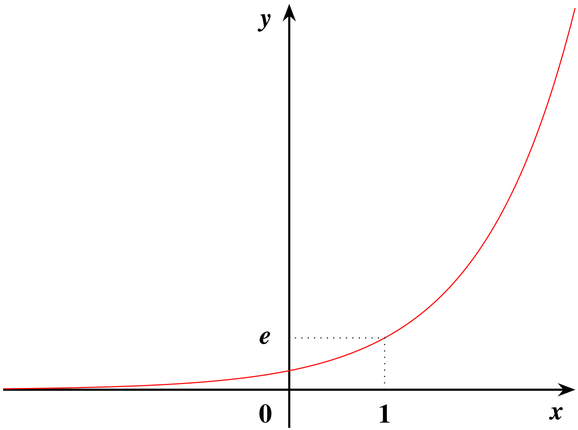
$f(x) = e^x$, $p = 0$ の場合, $M = |e^x - 1|$ ととれるため, e^x を

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

で近似したときの誤差は $\dfrac{|e^x - 1||x|^n}{n!}$ 以下である.

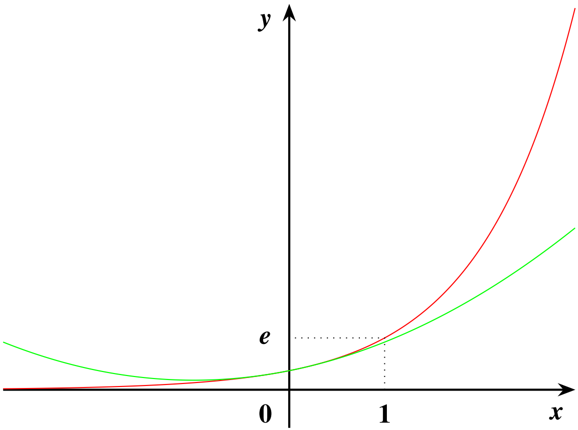
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ (教科書 $p.7$ 問 1.4) だから, 上の多項式で e^x を近似した誤差は, n を大きくすれば, 0 に近づいてゆくことがわかる.

グラフ



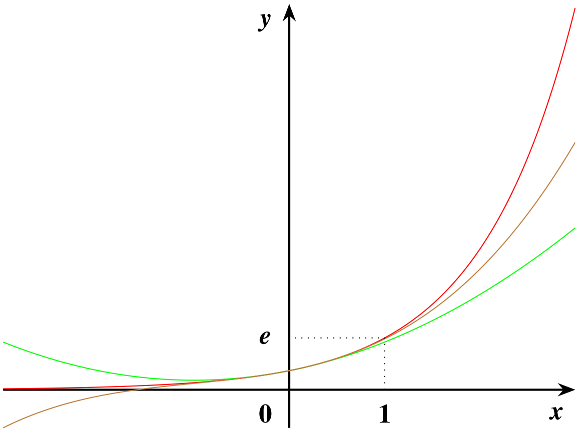
$e^x,\ 1+x+\frac{x^2}{2!},\ 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!},\ 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!},\ 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}$ のグラフ

グラフ



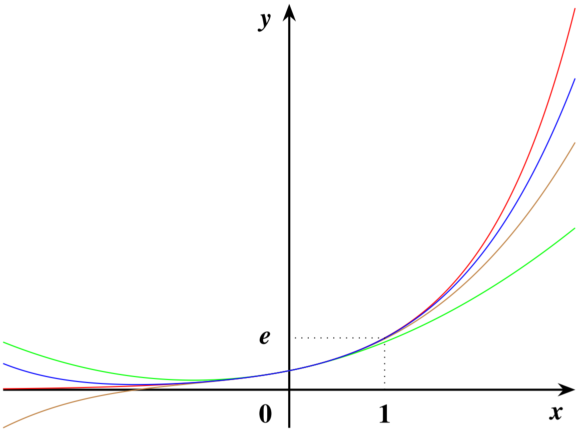
e^x, $1 + x + \frac{x^2}{2!}$, $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$, $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$, $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$ のグラフ

グラフ



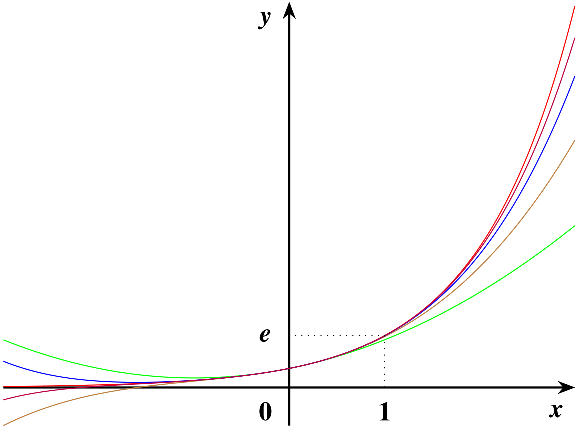
e^x, $1 + x + \frac{x^2}{2!}$, $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$, $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$, $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$ のグラフ

グラフ



$e^x, 1 + x + \frac{x^2}{2!}, 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}, 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}, 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$ のグラフ

グラフ



$e^x,\ 1+x+\frac{x^2}{2!},\ 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!},\ 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!},\ 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}$ のグラフ

$\sin x$ の多項式による近似

$f(x) = \sin x$, $p = 0$ の場合, $M = 2$ととれるため, $\sin x$ を

$\sin x$ の多項式による近似

$f(x) = \sin x$, $p = 0$ の場合, $M = 2$ ととれるため,
$\sin x$ を

$$x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

で近似したときの誤差は $\dfrac{2|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}$ 以下である.

$\sin x$ の多項式による近似

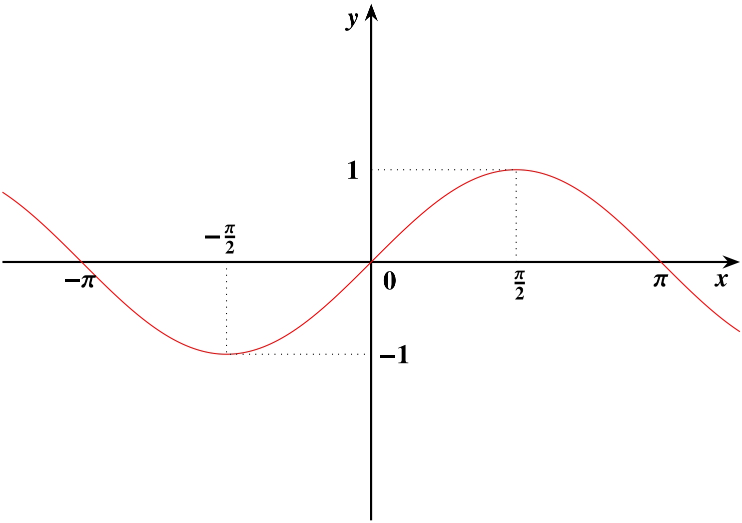
$f(x) = \sin x$, $p = 0$ の場合, $M = 2$ ととれるため, $\sin x$ を

$$x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

で近似したときの誤差は $\dfrac{2|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}$ 以下である.

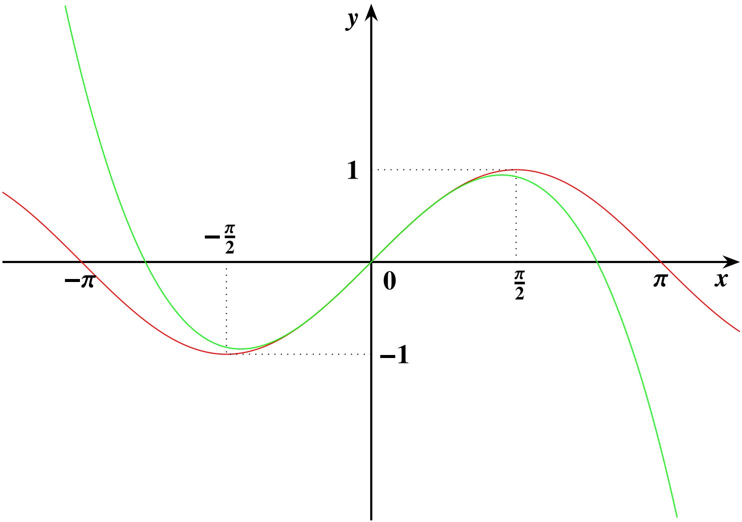
$\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = 0$ (教科書 $p.7$ 問 1.4) だから, 上の多項式で $\sin x$ を近似した誤差は, n を大きくすれば, 0 に近づいてゆくことがわかる.

グラフ



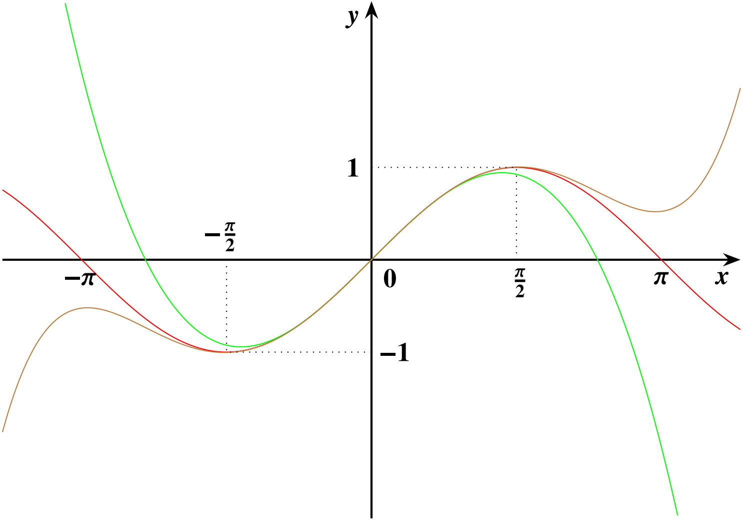
$\sin x$, $x - \frac{x^3}{3!}$, $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$, $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$ のグラフ

グラフ



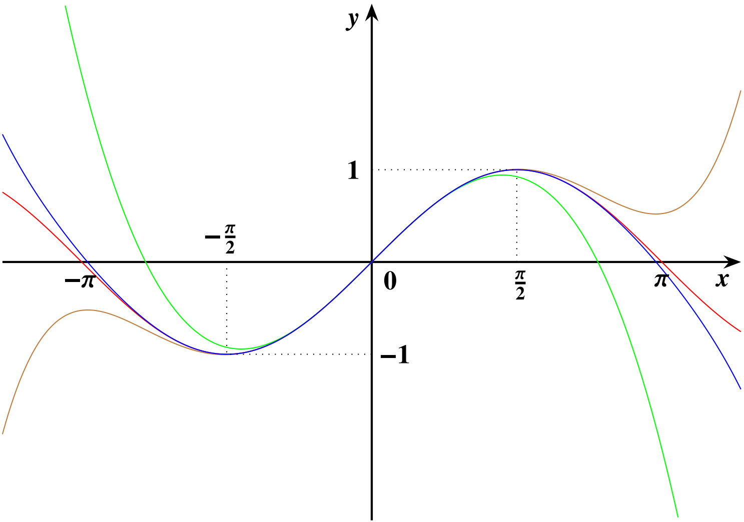
$\sin x$, $x - \frac{x^3}{3!}$, $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$, $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$ のグラフ

グラフ



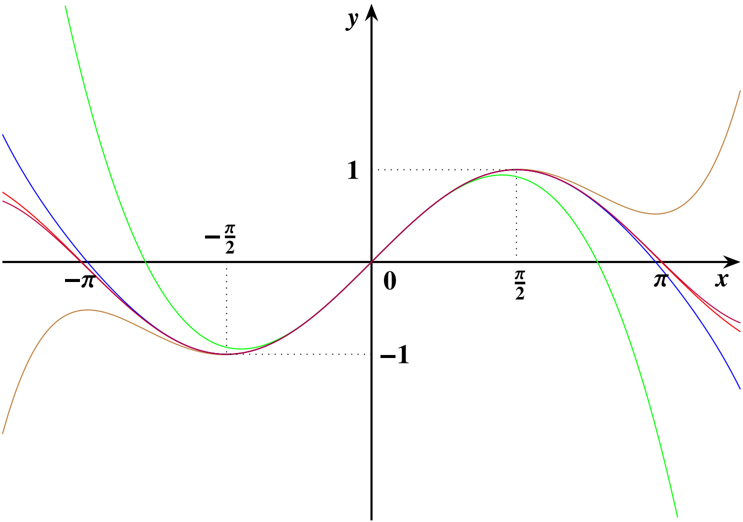
$\sin x$, $x - \frac{x^3}{3!}$, $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$, $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$ のグラフ

グラフ



$\sin x$, $x - \frac{x^3}{3!}$, $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$, $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$ のグラフ

グラフ



$\sin x,\ x - \frac{x^3}{3!},\ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},\ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!},\ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$ のグラフ

$\cos x$ の多項式による近似

$f(x) = \cos x$, $p = 0$ の場合, $M = 2$ ととれるため, $\cos x$ を

$\cos x$ の多項式による近似

$f(x) = \cos x$, $p = 0$ の場合, $M = 2$ ととれるため, $\cos x$ を

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

で近似したときの誤差は $\dfrac{2|x|^{2m}}{(2m)!}$ 以下である.

$\cos x$ の多項式による近似

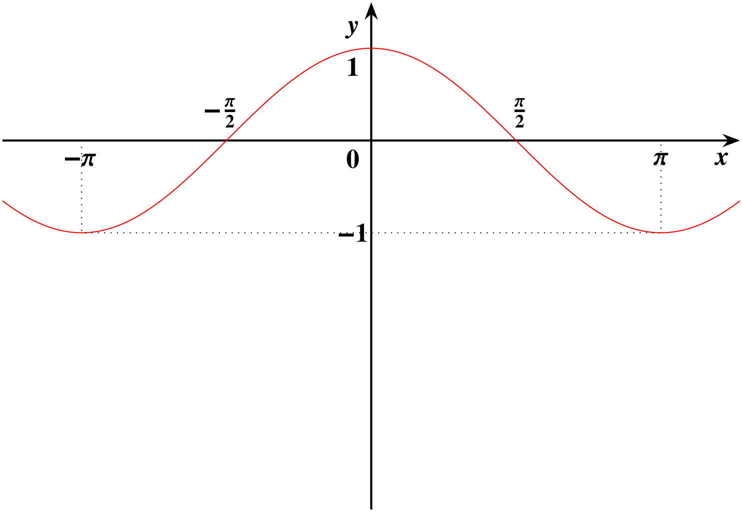
$f(x) = \cos x$, $p = 0$ の場合, $M = 2$ ととれるため, $\cos x$ を

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

で近似したときの誤差は $\dfrac{2|x|^{2m}}{(2m)!}$ 以下である.

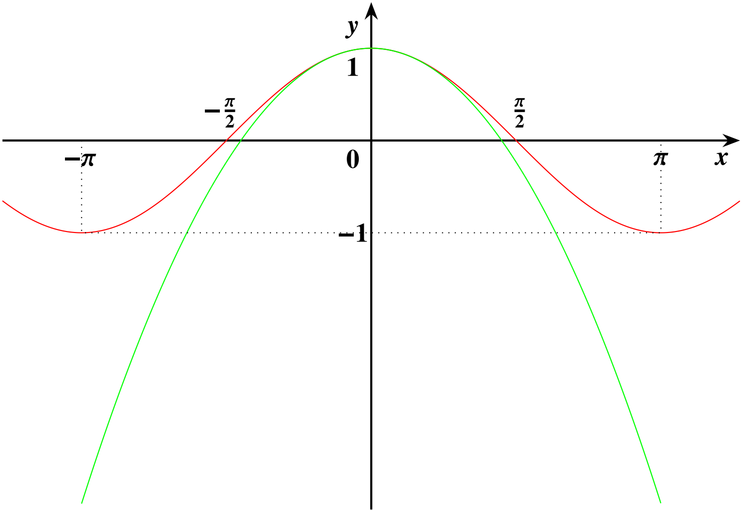
$\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} = 0$ (教科書 $p.7$ 問 1.4) だから, 上の多項式で $\cos x$ を近似した誤差は, n を大きくすれば, 0 に近づいてゆくことがわかる.

グラフ



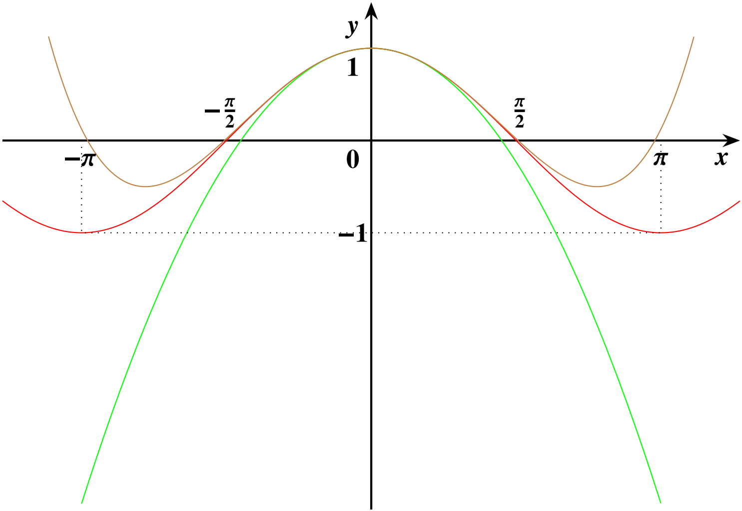
$\cos x$, $1-\frac{x^2}{2!}$, $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$, $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}$, $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}$ のグラフ

グラフ



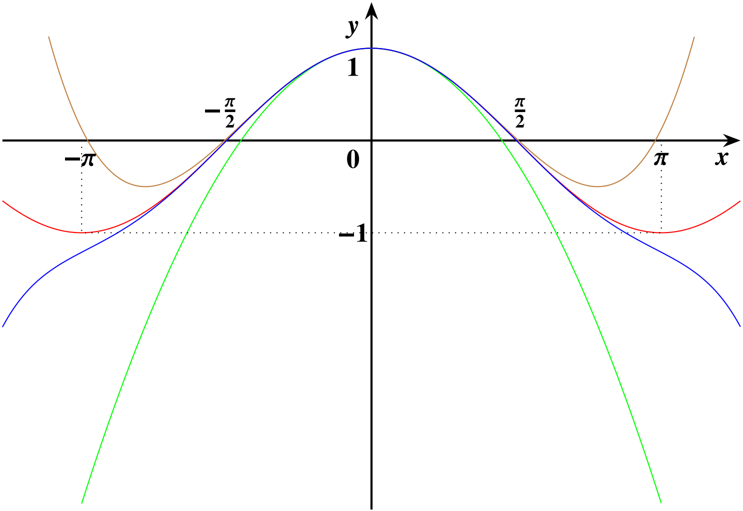
$\cos x$, $1-\frac{x^2}{2!}$, $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$, $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}$, $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}$ のグラフ

グラフ



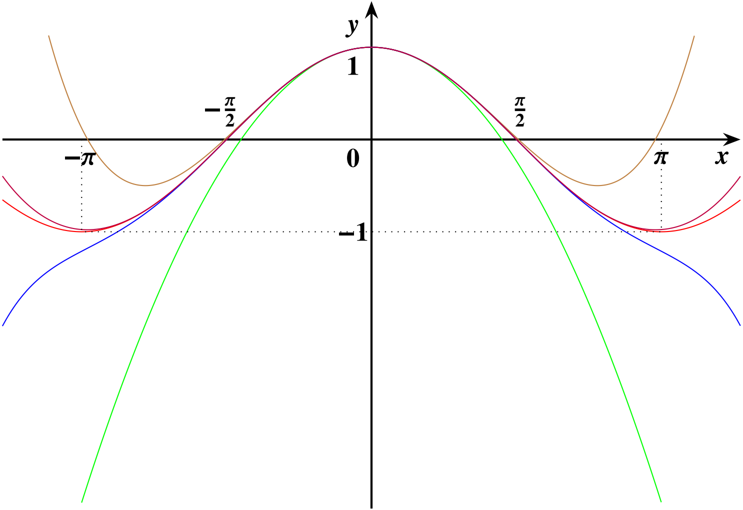
$\cos x$, $1-\frac{x^2}{2!}$, $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$, $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}$, $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}$ のグラフ

グラフ



$\cos x$, $1-\frac{x^2}{2!}$, $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$, $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}$, $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}$ のグラフ

グラフ



$\cos x$, $1-\frac{x^2}{2!}$, $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$, $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}$, $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}$ のグラフ

$\log(1+x)$ の多項式による近似

$f(x) = \log(1+x)$ $(x > -1)$, $p = 0$ の場合,
$M = (n-1)!|(1+x)^{-n} - 1|$ ととれるため,
$\log(1+x)$ を

$\log(1+x)$ の多項式による近似

$f(x) = \log(1+x)$ $(x > -1)$, $p = 0$ の場合,
$M = (n-1)!|(1+x)^{-n} - 1|$ ととれるため,
$\log(1+x)$ を

$$x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

で近似したときの誤差は $\dfrac{|(1+x)^{-n} - 1||x|^n}{n}$ 以下
である.

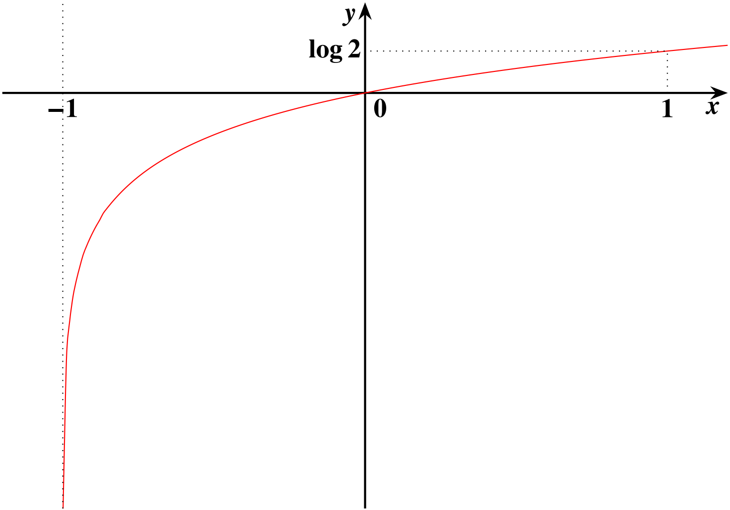
$\log(1+x)$ の多項式による近似

三角不等式を用いると

$$\frac{|(1+x)^{-n}-1||x|^n}{n} \leqq \frac{1}{n}\left(\left(\frac{|x|}{1+x}\right)^n + |x|^n\right)$$

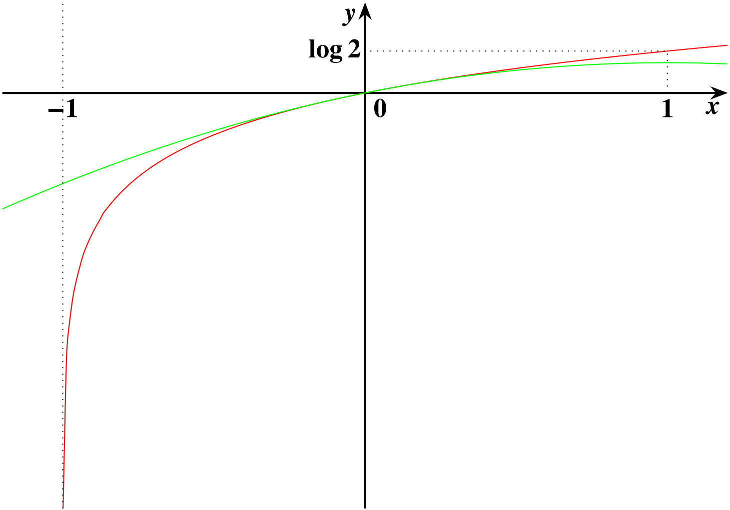
であり, $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ ならば $0 \leqq \frac{|x|}{1+x} \leqq 1$ だから, $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ のとき, 上の多項式で $\log(1+x)$ を近似した誤差は n を大きくすれば 0 に近づいてゆくことがわかる. (実は, $-1 < x \leqq 1$ ならば上の多項式で近似を行った誤差は 0 に近づくことが示される.)

グラフ



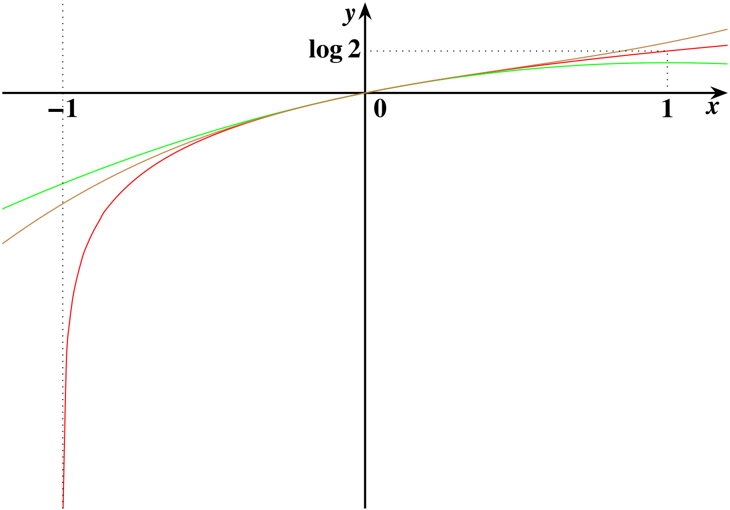
$\log(1+x)$, $x - \frac{x^2}{2}$, $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$, $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$,
$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}$ のグラフ

グラフ



$\log(1+x)$, $x-\frac{x^2}{2}$, $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$, $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$, $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}$, $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}$ のグラフ

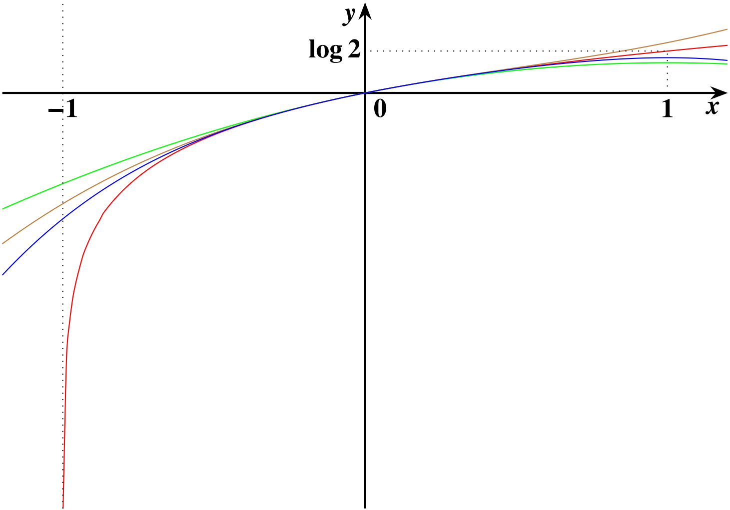
グラフ



$\log(1+x),\ x-\frac{x^2}{2},\ x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3},\ x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4},\ x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5},$

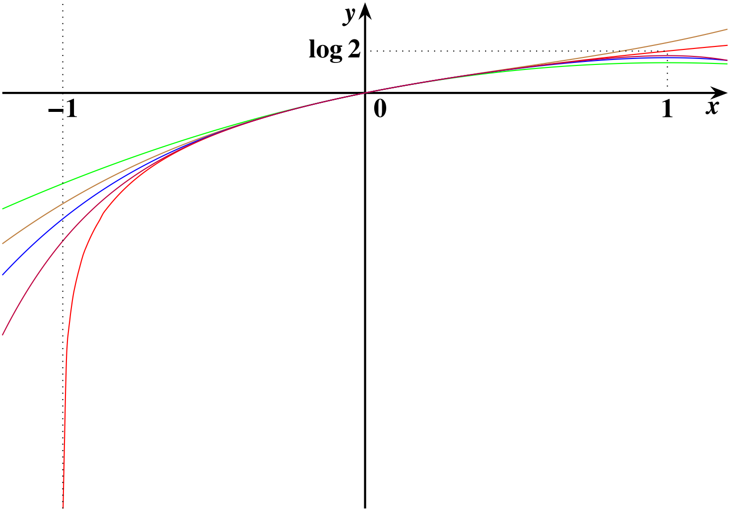
$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}$ のグラフ

グラフ



$\log(1+x)$, $x-\frac{x^2}{2}$, $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$, $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$, $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}$,
$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}$ のグラフ

グラフ



$\log(1+x),\ x-\frac{x^2}{2},\ x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3},\ x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4},\ x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5},$

$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}$ のグラフ

$(1+x)^\alpha$ の多項式による近似

$f(x) = (1+x)^\alpha$ $(x > -1)$, $p = 0$ の場合,
$M = |\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)||(1+x)^{\alpha-n} - 1|$ ととれるため, $(1+x)^\alpha$ を

$(1+x)^{\alpha}$ の多項式による近似

$f(x) = (1+x)^{\alpha}$ $(x > -1)$, $p = 0$ の場合,
$M = |\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)||(1+x)^{\alpha-n} - 1|$ ととれるため, $(1+x)^{\alpha}$ を

$$1 + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^{k} + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^{n}$$

で近似したときの誤差は $\left|\binom{\alpha}{n}\right||(1+x)^{\alpha-n} - 1||x|^{n}$ 以下である.

$(1+x)^\alpha$ の多項式による近似

$f(x) = (1+x)^\alpha$ $(x > -1)$, $p = 0$ の場合,
$M = |\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)||(1+x)^{\alpha-n} - 1|$ ととれるため, $(1+x)^\alpha$ を

$$1 + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n$$

で近似したときの誤差は $\left|\binom{\alpha}{n}\right||(1+x)^{\alpha-n} - 1||x|^n$ 以下である.
n を大きくしたときの誤差の様子を調べるために少し準備をする.

$(1+x)^\alpha$ の多項式による近似

まず次の結果を示す.

正の実数からなる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し, 数列 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が 1 より小さい実数に収束するならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である.

$(1+x)^\alpha$ の多項式による近似

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ とおく. $0 \leqq r < 1$ だから $r < s < 1$ を満たす実数 s をとると, 自然数 N で, 「$n \geqq N$ ならば $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < s$」を満たすものがとれる.

$(1+x)^{\alpha}$ の多項式による近似

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ とおく. $0 \leqq r < 1$ だから $r < s < 1$ を満たす実数 s をとると, 自然数 N で,「$n \geqq N$ ならば $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < s$」を満たすものがとれる.

従って $n \geqq N$ ならば $a_{n+1} < sa_n$ となるため,

$(1+x)^\alpha$ の多項式による近似

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ とおく. $0 \leqq r < 1$ だから $r < s < 1$ を満たす実数 s をとると, 自然数 N で, 「$n \geqq N$ ならば $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < s$」を満たすものがとれる.

従って $n \geqq N$ ならば $a_{n+1} < sa_n$ となるため, $n > N$ ならば

$$a_n < sa_{n-1} < s^2a_{n-2} < \cdots < s^{n-N}a_N$$

が成り立つ.

$(1+x)^{\alpha}$ の多項式による近似

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ とおく. $0 \leqq r < 1$ だから $r < s < 1$ を満たす実数 s をとると, 自然数 N で, 「$n \geqq N$ ならば $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < s$」 を満たすものがとれる.

従って $n \geqq N$ ならば $a_{n+1} < sa_n$ となるため,
$n > N$ ならば

$$a_n < sa_{n-1} < s^2a_{n-2} < \cdots < s^{n-N}a_N$$

が成り立つ. 故に $0 < a_n < s^{n-N}a_N$ であり,
$0 < s < 1$ だから $n \to \infty$ のとき, $s^{n-N}a_N \to 0$ となるため, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である.

$(1+x)^\alpha$ の多項式による近似

上で示した結果を用いて, 次の命題を示す.

$(1+x)^\alpha$ の多項式による近似

上で示した結果を用いて, 次の命題を示す.

実数 α に対し $|x| < 1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = 0$.

$(1+x)^\alpha$ の多項式による近似

上で示した結果を用いて, 次の命題を示す.

実数 α に対し $|x| < 1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = 0$.

$x = 0$ ならば主張は明らかだから, $x \neq 0$ と仮定する.

$(1+x)^\alpha$ の多項式による近似

上で示した結果を用いて, 次の命題を示す.

実数 α に対し $|x| < 1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = 0$.

$x = 0$ ならば主張は明らかだから, $x \neq 0$ と仮定する. また, α が 0 以上の整数ならば, $n > \alpha$ のとき $\binom{\alpha}{n} = 0$ となるため, この場合も主張が成り立つ.

$(1+x)^\alpha$ の多項式による近似

上で示した結果を用いて, 次の命題を示す.

実数 α に対し $|x| < 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 0$.

$x = 0$ ならば主張は明らかだから, $x \neq 0$ と仮定する. また, α が 0 以上の整数ならば, $n > \alpha$ のとき $\binom{\alpha}{n} = 0$ となるため, この場合も主張が成り立つ.
そこで α は 0 以上の整数ではない場合を考える.

$(1+x)^\alpha$ の多項式による近似

上で示した結果を用いて, 次の命題を示す.

実数 α に対し $|x|<1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=0$.

$x=0$ ならば主張は明らかだから, $x\neq 0$ と仮定する. また, α が 0 以上の整数ならば, $n>\alpha$ のとき $\binom{\alpha}{n}=0$ となるため, この場合も主張が成り立つ.

そこで α は 0 以上の整数ではない場合を考える. このとき, 任意の自然数 n に対して $\binom{\alpha}{n}\neq 0$ である.

$(1+x)^\alpha$ の多項式による近似

$a_n = \left|\binom{\alpha}{n} x^n\right|$ とおけば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正の実数列で,

$(1+x)^\alpha$ の多項式による近似

$a_n = \left|\binom{\alpha}{n} x^n\right|$ とおけば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正の実数列で,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)||x|n!}{(n+1)!|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha-n||x|}{n+1} = |x| < 1$$

となるため,

$(1+x)^\alpha$ の多項式による近似

$a_n = \left|\binom{\alpha}{n} x^n\right|$ とおけば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正の実数列で,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)||x|n!}{(n+1)!|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha-n||x|}{n+1} = |x| < 1$$

となるため, 上で示した結果から

$$\lim_{n\to\infty} \left|\binom{\alpha}{n} x^n\right| = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

である.

$(1+x)^\alpha$ の多項式による近似

$a_n = \left|\binom{\alpha}{n}x^n\right|$ とおけば, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正の実数列で,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)||x|n!}{(n+1)!|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)|}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha-n||x|}{n+1} = |x| < 1$$

となるため, 上で示した結果から

$$\lim_{n\to\infty}\left|\binom{\alpha}{n}x^n\right| = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

である. 従って $\lim_{n\to\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = 0$ である.

$(1+x)^\alpha$ の多項式による近似

$(1+x)^\alpha$ を n 次多項式 $\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$ で近似した誤差は

$(1+x)^\alpha$ の多項式による近似

$(1+x)^\alpha$ を n 次多項式 $\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k$ で近似した誤差は
$\left|\binom{\alpha}{n}\right||(1+x)^{\alpha-n}-1||x|^n$ 以下であることは上でみたが, この値は

$(1+x)^\alpha$ の多項式による近似

$(1+x)^\alpha$ を n 次多項式 $\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$ で近似した誤差は $\left|\binom{\alpha}{n}\right| |(1+x)^{\alpha-n} - 1||x|^n$ 以下であることは上でみたが, この値は

$$(1+x)^\alpha \left|\binom{\alpha}{n}\right| \left(\frac{|x|}{1+x}\right)^n + \left|\binom{\alpha}{n}\right| |x|^n$$

以下であることが三角不等式からわかる.

$(1+x)^\alpha$ の多項式による近似

$(1+x)^\alpha$ を n 次多項式 $\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$ で近似した誤差は $\left|\binom{\alpha}{n}\right| |(1+x)^{\alpha-n} - 1||x|^n$ 以下であることは上でみたが, この値は

$$(1+x)^\alpha \left|\binom{\alpha}{n}\right| \left(\frac{|x|}{1+x}\right)^n + \left|\binom{\alpha}{n}\right| |x|^n$$

以下であることが三角不等式からわかる.

$-\frac{1}{2} < x < 1$ ならば $0 \leqq \frac{|x|}{1+x} < 1$ だから,

$(1+x)^\alpha$ の多項式による近似

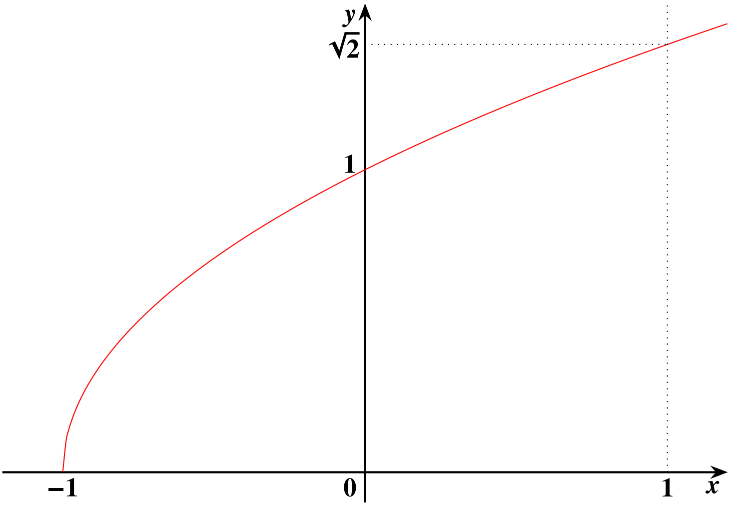
$(1+x)^\alpha$ を n 次多項式 $\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$ で近似した誤差は $\left|\binom{\alpha}{n}\right| |(1+x)^{\alpha-n} - 1||x|^n$ 以下であることは上でみたが, この値は

$$(1+x)^\alpha \left|\binom{\alpha}{n}\right| \left(\frac{|x|}{1+x}\right)^n + \left|\binom{\alpha}{n}\right| |x|^n$$

以下であることが三角不等式からわかる.

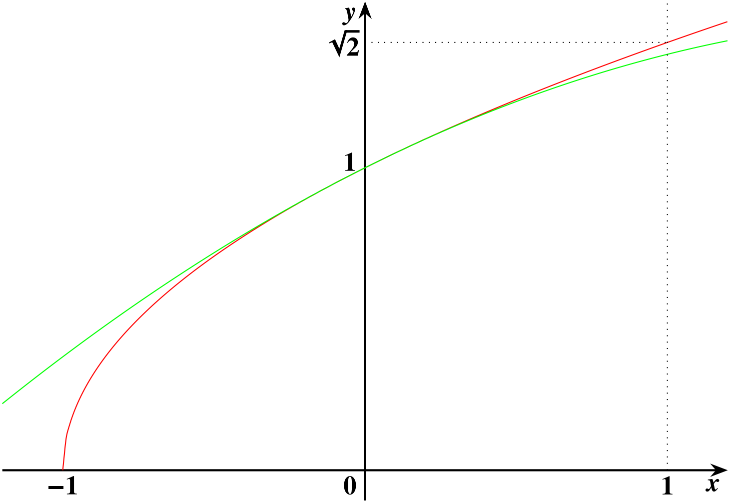
$-\frac{1}{2} < x < 1$ ならば $0 \leqq \frac{|x|}{1+x} < 1$ だから, 上で示した命題から, $-\frac{1}{2} < x < 1$ のとき, この誤差は n を大きくすれば 0 に近づいてゆく.

グラフ



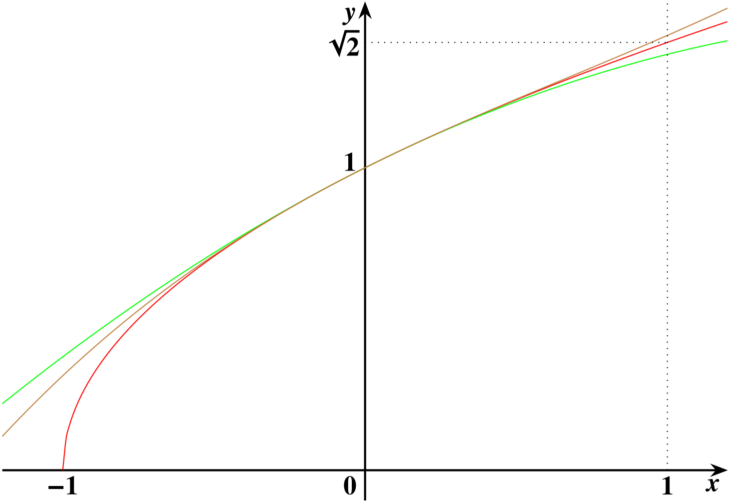
$\sqrt{1+x}$, $1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2$, $1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}x^3$, $1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}x^3+\binom{\frac{1}{2}}{4}x^4$,
$1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}x^3+\binom{\frac{1}{2}}{4}x^4+\binom{\frac{1}{2}}{5}x^5$ のグラフ

グラフ



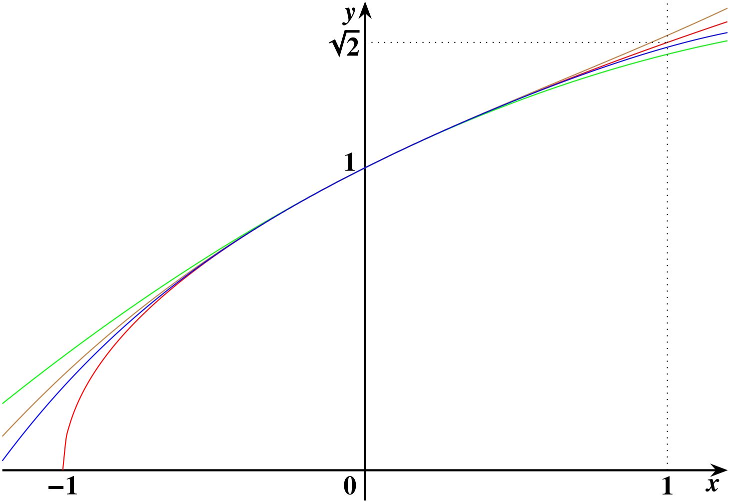
$\sqrt{1+x}$, $1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2$, $1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}x^3$, $1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}x^3+\binom{\frac{1}{2}}{4}x^4$, $1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}x^3+\binom{\frac{1}{2}}{4}x^4+\binom{\frac{1}{2}}{5}x^5$ のグラフ

グラフ



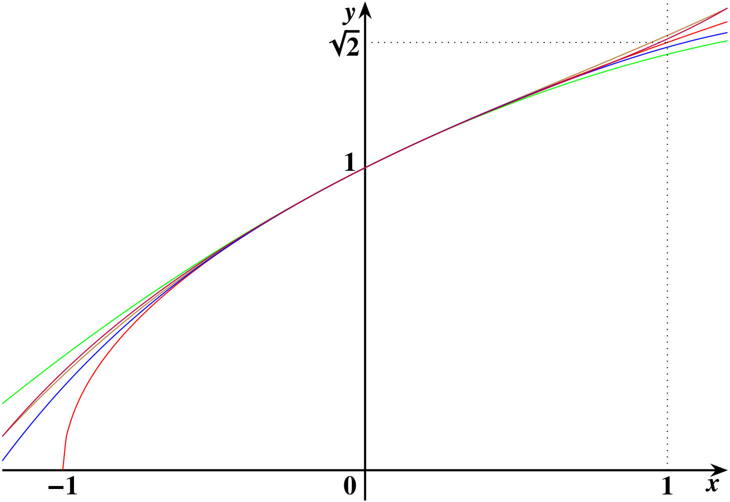
$\sqrt{1+x}$, $1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2$, $1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}x^3$, $1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}x^3+\binom{\frac{1}{2}}{4}x^4$,
$1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}x^3+\binom{\frac{1}{2}}{4}x^4+\binom{\frac{1}{2}}{5}x^5$ のグラフ

グラフ



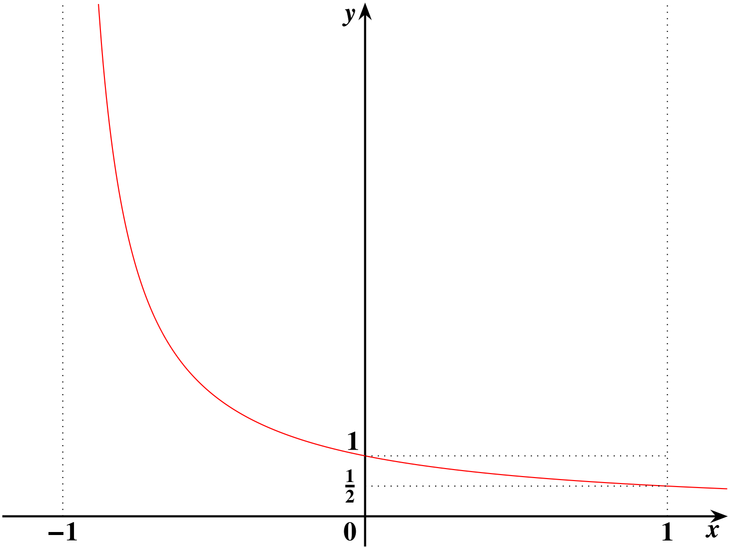
$\sqrt{1+x}$, $1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2$, $1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}x^3$, $1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}x^3+\binom{\frac{1}{2}}{4}x^4$,
$1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}x^3+\binom{\frac{1}{2}}{4}x^4+\binom{\frac{1}{2}}{5}x^5$ のグラフ

グラフ



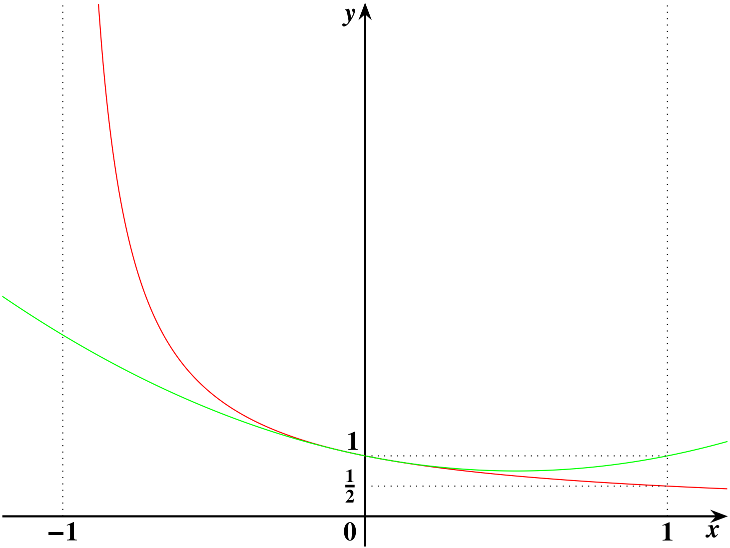
$\sqrt{1+x}$, $1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2$, $1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}x^3$, $1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}x^3+\binom{\frac{1}{2}}{4}x^4$,
$1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}x^3+\binom{\frac{1}{2}}{4}x^4+\binom{\frac{1}{2}}{5}x^5$ のグラフ

グラフ



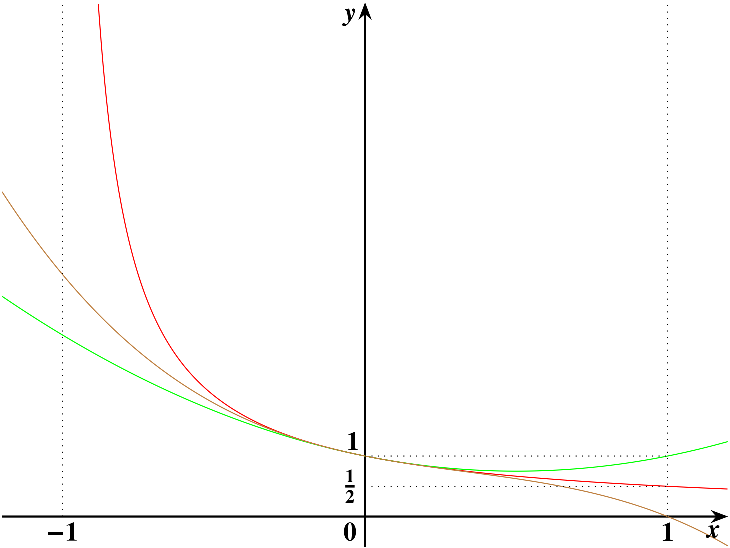
$\frac{1}{1+x}$, $1-x+x^2$, $1-x+x^2-x^3$, $1-x+x^2-x^3+x^4$, $1-x+x^2-x^3+x^4-x^5$ のグラフ

グラフ



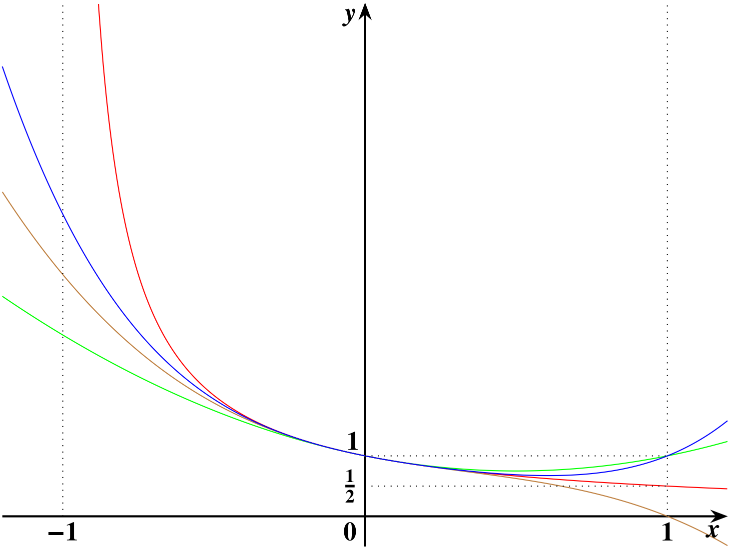
$\frac{1}{1+x}$, $1-x+x^2$, $1-x+x^2-x^3$, $1-x+x^2-x^3+x^4$, $1-x+x^2-x^3+x^4-x^5$ のグラフ

グラフ



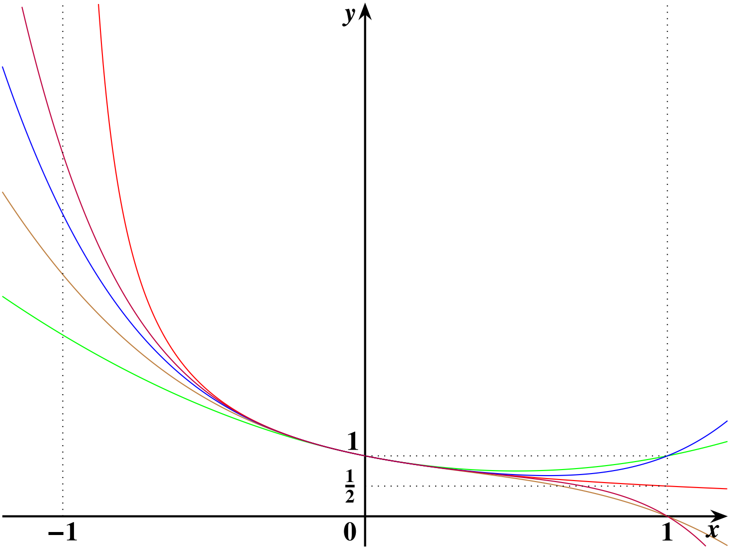
$\frac{1}{1+x}$, $1 - x + x^2$, $1 - x + x^2 - x^3$, $1 - x + x^2 - x^3 + x^4$, $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$ のグラフ

グラフ



$\frac{1}{1+x}$, $1 - x + x^2$, $1 - x + x^2 - x^3$, $1 - x + x^2 - x^3 + x^4$, $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$ のグラフ

グラフ



$\frac{1}{1+x}$, $1-x+x^2$, $1-x+x^2-x^3$, $1-x+x^2-x^3+x^4$, $1-x+x^2-x^3+x^4-x^5$ のグラフ

$\tan^{-1}$ の多項式による近似

初項 1, 公比 $-t^2$ の等比数列の和の公式

$$1 - t^2 + t^4 + \cdots + (-1)^n t^{2n} = \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 + t^2}$$

から

$\tan^{-1}$ の多項式による近似

初項 $\mathbf{1}$, 公比 $-t^2$ の等比数列の和の公式

$$1 - t^2 + t^4 + \cdots + (-1)^n t^{2n} = \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 + t^2}$$

から

$$\frac{1}{1 + t^2} = 1 - t^2 + t^4 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-t^2)^{n+1}}{1 + t^2}$$

を得るが, この両辺を $\mathbf{0}$ から x まで, t で積分すれば

$\tan^{-1}$ の多項式による近似

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \int_0^x \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt$$

このとき, $|x| \leqq 1$ ならば上式の右辺の最後の項は, n が大きくなると 0 に近づくことが示されるため, $\tan^{-1} x$ の 0 におけるテイラー展開

$\tan^{-1}$ の多項式による近似

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \int_0^x \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt$$

このとき, $|x| \leqq 1$ ならば上式の右辺の最後の項は, n が大きくなると 0 に近づくことが示されるため, $\tan^{-1} x$ の 0 におけるテイラー展開

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

が得られる. $\tan^{-1} 1 = \dfrac{\pi}{4}$ だから, とくに上式で $x = 1$ とすれば,

$\tan^{-1}$ の多項式による近似

次の公式が得られる.

$\tan^{-1}$ の多項式による近似

次の公式が得られる.

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots\right)$$

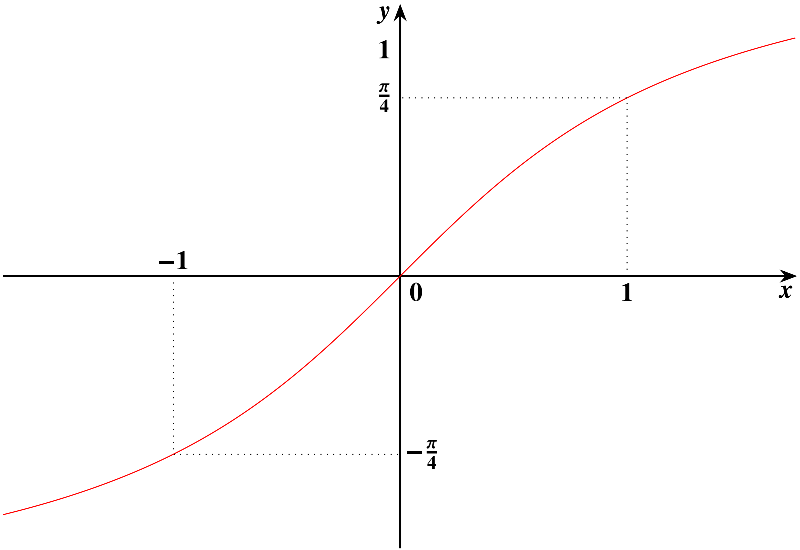
ただし, この右辺の級数は収束するのが非常に遅く, 100 項目までの和は **3.131 . . .** , 1000 項目までの和でも **3.140...** である.

1949 年に ENIAC と呼ばれた世界最初のデジタル電子計算機で, $\tan^{-1} x$ のテイラー展開と, マチンの公式

$$\pi = 16\tan^{-1}\frac{1}{5} - 4\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

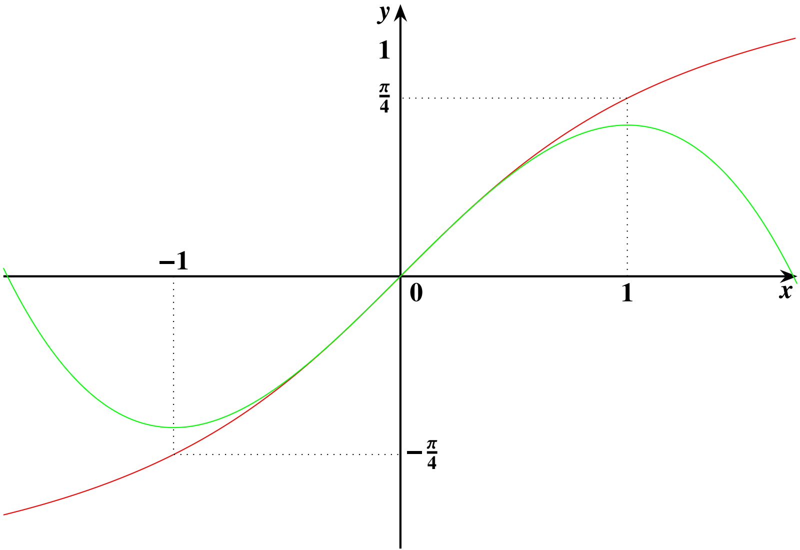
を用いて, π が 2037 桁まで求められた.

グラフ



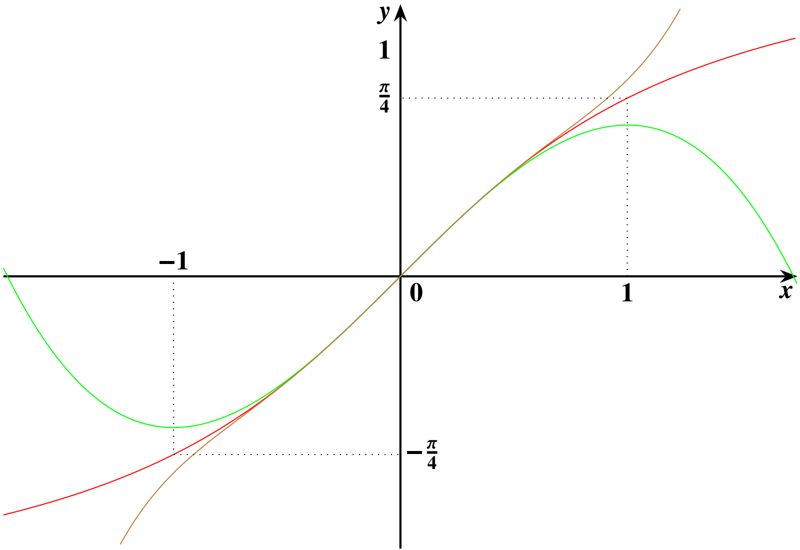
$\tan^{-1} x,\ x - \frac{x^3}{3},\ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5},\ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7},\ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}$ のグラフ

グラフ



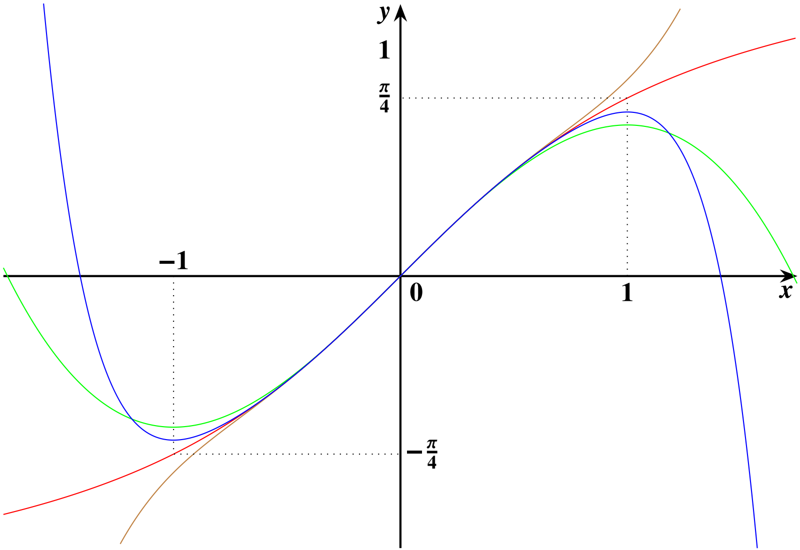
$\tan^{-1} x,\ x - \frac{x^3}{3},\ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5},\ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7},\ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}$ のグラフ

グラフ



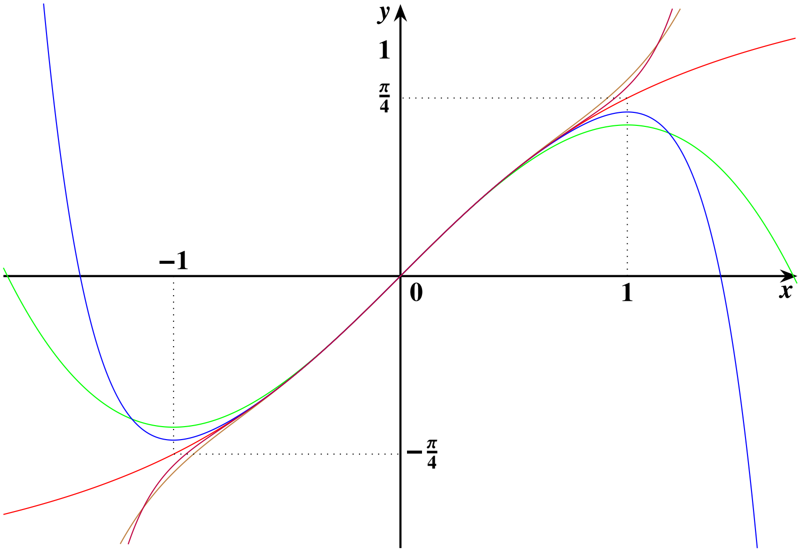
$\tan^{-1} x,\ x - \frac{x^3}{3},\ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5},\ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7},\ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}$ のグラフ

グラフ



$\tan^{-1} x$, $x - \frac{x^3}{3}$, $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$, $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$, $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}$ のグラフ

グラフ



$\tan^{-1} x,\ x - \frac{x^3}{3},\ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5},\ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7},\ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}$ のグラフ

m 乗根の近似値とその誤差の評価

以上の結果を用いて, 与えられた正の実数 A の m 乗根の近似値とその誤差を見積もってみる.

m 乗根の近似値とその誤差の評価

以上の結果を用いて, 与えられた正の実数 A の m 乗根の近似値とその誤差を見積もってみる.

$\sqrt[m]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を近似する多項式は $-\frac{1}{2}<x<1$ の場合以外は, n を大きくしても上で見積もった誤差の範囲は狭まっていかないので, $(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を近似する多項式の x に $A-1$ を代入しても $\sqrt[m]{A}$ のよい近似値が得られる保証はない.

m 乗根の近似値とその誤差の評価

以上の結果を用いて, 与えられた正の実数 A の m 乗根の近似値とその誤差を見積もってみる.

$\sqrt[m]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{m}}$ を近似する多項式は $-\frac{1}{2} < x < 1$ の場合以外は, n を大きくしても上で見積もった誤差の範囲は狭まっていかないので, $(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を近似する多項式の x に $A-1$ を代入しても $\sqrt[m]{A}$ のよい近似値が得られる保証はない.

そこで, まず $\sqrt[m]{A} = B(1+x)^{\frac{1}{m}}$ となる x が $-\frac{1}{2}$ と 1 の間に存在するように B を定める.

m 乗根の近似値とその誤差の評価

$\sqrt[m]{A} = B(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を x について解けば

m乗根の近似値とその誤差の評価

$\sqrt[m]{A} = B(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を x について解けば $x = \dfrac{A}{B^m} - 1$

となり, これを $-\dfrac{1}{2} < x < 1$ に代入すれば

m 乗根の近似値とその誤差の評価

$\sqrt[m]{A} = B(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を x について解けば $x = \dfrac{A}{B^m} - 1$

となり, これを $-\dfrac{1}{2} < x < 1$ に代入すれば

$\dfrac{1}{2}A < B^m < 2A$ が得られる.

m 乗根の近似値とその誤差の評価

$\sqrt[m]{A} = B(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を x について解けば $x = \dfrac{A}{B^m} - 1$

となり, これを $-\dfrac{1}{2} < x < 1$ に代入すれば

$\dfrac{1}{2}A < B^m < 2A$ が得られる.

従って $\dfrac{1}{2}A < B^m < 2A$ を満たすような B を選び,

m 乗根の近似値とその誤差の評価

$\sqrt[m]{A} = B(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を x について解けば $x = \dfrac{A}{B^m} - 1$

となり, これを $-\dfrac{1}{2} < x < 1$ に代入すれば

$\dfrac{1}{2}A < B^m < 2A$ が得られる.

従って $\dfrac{1}{2}A < B^m < 2A$ を満たすような B を選び,

x を $x = \dfrac{A}{B^m} - 1$ で定めればよい.

m 乗根の近似値とその誤差の評価

$\sqrt[m]{A} = B(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を x について解けば $x = \dfrac{A}{B^m} - 1$

となり, これを $-\dfrac{1}{2} < x < 1$ に代入すれば

$\dfrac{1}{2}A < B^m < 2A$ が得られる.

従って $\dfrac{1}{2}A < B^m < 2A$ を満たすような B を選び,

x を $x = \dfrac{A}{B^m} - 1$ で定めればよい. ($|x|$ が小さいほど誤差を見積もった値は小さくなるため, $\dfrac{A}{B^m}$ が 1 に近くなる.

m 乗根の近似値とその誤差の評価

$\sqrt[m]{A} = B(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を x について解けば $x = \dfrac{A}{B^m} - 1$

となり, これを $-\dfrac{1}{2} < x < 1$ に代入すれば

$\dfrac{1}{2}A < B^m < 2A$ が得られる.

従って $\dfrac{1}{2}A < B^m < 2A$ を満たすような B を選び,

x を $x = \dfrac{A}{B^m} - 1$ で定めればよい. ($|x|$ が小さいほ

ど誤差を見積もった値は小さくなるため, $\dfrac{A}{B^m}$ が 1

に近くなる. すなわち B^m が A に近くなるように

選べれば, よい近似値が得られる.)

m 乗根の近似値とその誤差の評価

ここで，$\sqrt[m]{A} = B(1+x)^{\frac{1}{m}}$ を $B \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{m}}{k} x^k$ で近似したときの誤差は

$$B \left| \binom{\frac{1}{m}}{n} \right| \left| (1+x)^{\frac{1}{m}-n} - 1 \right| |x|^n$$

以下である．

m 乗根の近似値とその誤差の評価

$\dfrac{1}{2}A < B^m < A$ ならば $0 < x < 1$ となるため,
$(1+x)^{-n} < (1+x)^{\frac{1}{m}-n} < 1$ だから
$\left|(1+x)^{\frac{1}{m}-n} - 1\right| < 1 - \dfrac{1}{(1+x)^n}$ である. また,
$A < B^m < 2A$ ならば $-\dfrac{1}{2} < x < 0$ となるため,
$1 < (1+x)^{\frac{1}{m}-n} < (1+x)^{-n}$ だから,
$\left|(1+x)^{\frac{1}{m}-n} - 1\right| < \dfrac{1}{(1+x)^n} - 1$ である. 従って, いずれの場合でも次の不等式が成り立つ.

$$\left|(1+x)^{\frac{1}{m}-n} - 1\right| < \left|\frac{1}{(1+x)^n} - 1\right|$$

m 乗根の近似値とその誤差の評価

以上の考察から次のことがわかる.

m 乗根の近似値とその誤差の評価

以上の考察から次のことがわかる.

正の実数 A に対し, $\frac{1}{2}A < B^m < 2A$ を満たす B を選んで, $x = \frac{A}{B^m} - 1$ とおく.

m 乗根の近似値とその誤差の評価

以上の考察から次のことがわかる.

正の実数 A に対し, $\frac{1}{2}A < B^m < 2A$ を満たす B を選んで, $x = \frac{A}{B^m} - 1$ とおく. $\sqrt[m]{A}$ を $B \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{m}}{k} x^k$ で近似した誤差は,

m 乗根の近似値とその誤差の評価

以上の考察から次のことがわかる.

正の実数 A に対し, $\frac{1}{2}A < B^m < 2A$ を満たす B を選んで, $x = \frac{A}{B^m} - 1$ とおく. $\sqrt[m]{A}$ を $B \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{m}}{k} x^k$ で近似した誤差は,

$$B \left| \binom{\frac{1}{m}}{n} \right| \left| \frac{1}{(1+x)^n} - 1 \right| |x|^n$$

以下である.

例題と解答

例題. 上の方法で $\boldsymbol{B = 1.4 = \frac{7}{5}}$ としたとき，$\boldsymbol{\sqrt{2}}$ を小数第 $\mathbf{5}$ 位まで求めるのに必要な $\boldsymbol{x}$ の多項式の次数を求めよ.

例題と解答

例題. 上の方法で $B = 1.4 = \frac{7}{5}$ としたとき, $\sqrt{2}$ を小数第 5 位まで求めるのに必要な x の多項式の次数を求めよ.

解答 $x = \dfrac{A}{B^2} - 1 = \dfrac{1}{49}$ だから, 上の結果から $\sqrt{2}$ を $B\sum_{k=0}^{n}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k$ で近似すれば, 誤差は

例題と解答

例題. 上の方法で $B = 1.4 = \dfrac{7}{5}$ としたとき, $\sqrt{2}$ を小数第 5 位まで求めるのに必要な x の多項式の次数を求めよ.

解答 $x = \dfrac{A}{B^2} - 1 = \dfrac{1}{49}$ だから, 上の結果から $\sqrt{2}$ を $B \sum_{k=0}^{n} \dbinom{\frac{1}{2}}{k} x^k$ で近似すれば, 誤差は

$$\frac{7}{5}\left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right|\left(\frac{1}{49^n} - \frac{1}{50^n}\right)$$

以下である.

例題と解答

例題. 上の方法で $B = 1.4 = \dfrac{7}{5}$ としたとき, $\sqrt{2}$ を小数第 5 位まで求めるのに必要な x の多項式の次数を求めよ.

解答 $x = \dfrac{A}{B^2} - 1 = \dfrac{1}{49}$ だから, 上の結果から $\sqrt{2}$ を $B \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k$ で近似すれば, 誤差は $\dfrac{7}{5} \left| \binom{\frac{1}{2}}{n} \right| \left(\dfrac{1}{49^n} - \dfrac{1}{50^n} \right)$ 以下である. $n = 2$ ならば, この値は $\dfrac{495}{336140000} = 0.0000014\cdots$ となる.

例題と解答

一方 $x = \frac{1}{49}$ ならば $\frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right)$ の値は

例題と解答

一方 $x = \dfrac{1}{49}$ ならば $\dfrac{7}{5}\left(1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2\right)$ の値は $1.4142128\cdots$ となるため,

例題と解答

一方 $x = \frac{1}{49}$ ならば $\frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right)$ の値は $1.4142128\cdots$ となるため，$\sqrt{2}$ はこの値のプラスマイナス 0.0000015 の範囲

$$1.4142113 < \sqrt{2} < 1.4142143$$

にあることがわかる．

例題と解答

一方 $x = \dfrac{1}{49}$ ならば $\dfrac{7}{5}\left(1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2\right)$ の値は $1.4142128\cdots$ となるため, $\sqrt{2}$ はこの値のプラスマイナス 0.0000015 の範囲

$$1.4142113 < \sqrt{2} < 1.4142143$$

にあることがわかる. よって, $\sqrt{2}$ の小数第 5 位までは 1.41421 と確定できるため, 必要な x の多項式の次数は 2 である.