# 1　ユークリッド空間における極限

**定義 1.1** $n$ 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ の *2* つのベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対し, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の第 $j$ 成分をそれぞれ $x_j$, $y_j$ とするとき, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ で定義する.

次の結果は内積の定義から容易に確かめられる.

**命題 1.2** $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n$, $r \in \boldsymbol{R}$ とするとき, 次のことが成り立つ.
(1) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$.
(2) $(r\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, r\boldsymbol{y})$.
(3) $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.
(4) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$ であり, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$ である.

**定義 1.3** $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ とおいて, $\|\boldsymbol{x}\|$ を $\boldsymbol{x}$ の長さという.

**定理 1.4** $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ のとき, 以下の不等式が成り立つ.
(1) $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|$　(シュワルツの不等式).　(2) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$　(三角不等式).

**証明** (1) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ならば 両辺はともに 0 になって不等式は成り立つため, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ と仮定する. $\|\boldsymbol{x}\| \neq 0$ に注意して命題 1.2 の (1), (2), (3) を用いれば, 任意の実数 $t$ に対して $(t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x}) + (t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = (t\boldsymbol{x}, t\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x}) + (t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 t^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})t + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 \left(t + \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\right)^2 + \frac{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$ だから $t = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$ のとき, $(t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ は最小値 $\frac{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$ をとる. 一方, 命題 1.2 の (4) から $(t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \geqq 0$ が成り立つため, この最小値は 0 以上であるから $\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 \geqq 0$ が得られる.

(2) 上の結果から $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqq \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|$ であり, 上の計算で $t = 1$ とすれば, $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 \leqq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2$ だから結果が得られる. □

以後, $\boldsymbol{R}^n$ の点と, その点の位置ベクトルを同一視することにする. 定義 1.3 で定義したベクトルの長さを用いれば, $\boldsymbol{R}^n$ における距離が, 次のように定義できる.

**定義 1.5** $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|$ とおいて, $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の距離という.

一般に, 集合 $X$, $Y$ に対して, $X$ の要素 $x$ と $Y$ の要素 $y$ の順序対 $(x, y)$ 全体からなる集合を $X$ と $Y$ の直積集合と呼んで, $X \times Y$ で表すことにする. とくに, $X = Y = \boldsymbol{R}^n$ の場合, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$ を実数 $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対応させる関数が考えられる. この関数を $d_n$ で表して, $\boldsymbol{R}^n$ の距離関数と呼ぶ.

**命題 1.6** $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n$ とするとき, 次のことが成り立つ.
(1) $d_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.
(2) $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqq 0$ であり, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ ならば $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) > 0$ である.
(3) $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leqq d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

**証明** (1) 一般に $r \in \boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $\|r\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(r\boldsymbol{x}, r\boldsymbol{x})} = \sqrt{r^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = |r|\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = |r|\|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つため, $d_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \|(-1)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\| = |-1|\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| = d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ である.

(2) 命題 1.2 の (4) から明らかである.

(3) 定理 1.4 の (2) から $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}\| = \|(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y})\| \leqq \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}\| = d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.□

上の命題の (3) の不等式も三角不等式と呼ばれる. $\boldsymbol{N}$ を自然数全体の集合とし, $\boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{R}^n$ への写像を $\boldsymbol{R}^n$ の点列と呼ぶが, 与えられた点列が $k \in \boldsymbol{N}$ を $\boldsymbol{x}_k \in \boldsymbol{R}^n$ に対応させる写像であるとき, この点列を $(\boldsymbol{x}_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ で表すことにする. $\boldsymbol{R}^n$ の距離を考えたことによって「限りなく近づく」という状態が数学的に表現できて, $\boldsymbol{R}^n$ の点列の収束の概念が次のように定義できる.

**定義 1.7** 任意の正の実数 $\varepsilon$ に対し, 自然数 $N$ で, 条件「$k \geqq N$ ならば $d_n(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{p}) < \varepsilon$」を満たすものが存在するとき, $\boldsymbol{R}^n$ の点列 $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ に収束するといい, このことを $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{p}$ で表す.

**注意 1.8** $\boldsymbol{R}^n$ の点列 $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ に対し, 実数列 $(d_n(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{p}))_{k\in\boldsymbol{N}}$ を考えると, この数列は常に 0 以上の値をとるため, 上の定義から, $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ に収束するためには $(d_n(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{p}))_{k\in\boldsymbol{N}}$ が 0 に収束することが必要十分である.

**例 1.9** $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k} = 0$ であることは次のように示される. 任意の正の実数 $\varepsilon$ に対して, $\dfrac{1}{\varepsilon}$ より大きい自然数 $N$ を選べば, $k \geqq N$ ならば $0 < \dfrac{1}{k} \leqq \dfrac{1}{N} < \varepsilon$ だから $d_1\big(\frac{1}{k}, 0\big) < \varepsilon$ である.

実数列については, 次のことが成り立つ.

**命題 1.10** $(a_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$, $(b_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ をともに収束する実数列とし, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \alpha$, $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \beta$ とする.

*(1)* すべての $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $a_k \leqq b_k$ ならば $\alpha \leqq \beta$ である.

*(2)* 実数列 $(c_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が, すべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $a_k \leqq c_k \leqq b_k$ を満たし, $\alpha = \beta$ ならば $(c_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ も収束して $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = \alpha$ である.

**証明** (1) $\alpha > \beta$ と仮定すれば自然数 $N_1$, $N_2$ で, 「$n > N_1$ ならば $|a_k - \alpha| < \frac{\alpha-\beta}{2}$」, 「$n > N_2$ ならば $|b_k - \beta| < \frac{\alpha-\beta}{2}$」を満たすものがある. $N_1$, $N_2$ の大きい方を $N_3$ とする. $n > N_3$ ならば $-\frac{\alpha-\beta}{2} < a_k - \alpha$ かつ $b_k - \beta < \frac{\alpha-\beta}{2}$ が成り立つ. これらの不等式から $b_k < \frac{\alpha+\beta}{2} < a_k$ が得られるため, すべての $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $a_k \leqq b_k$ が成り立つという仮定と矛盾する. 故に $\alpha \leqq \beta$ である.

(2) $\varepsilon$ を任意の正の実数とすれば, 自然数 $N_4$, $N_5$ で, 「$n > N_4$ ならば $|a_k - \alpha| < \varepsilon$」, 「$n > N_5$ ならば $|b_k - \alpha| < \varepsilon$」を満たすものがある. $N_4$, $N_5$ の大きい方を $N_6$ とする. 仮定からすべての自然数 $n$ に対して $-|a_k - \alpha| \leqq a_k - \alpha \leqq c_k - \alpha \leqq b_k - \alpha \leqq |b_k - \alpha|$ が成り立つため, $n > N_6$ ならば $|c_k - \alpha| < \varepsilon$ である. 従って $(c_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ も $\alpha$ に収束する. □

**例 1.11** $0 < r < 1$ のとき $\lim\limits_{k\to\infty} r^k = 0$ であることは次のように示される. $h = \dfrac{1}{r} - 1$ とおけば $0 < r < 1$ より $h > 0$ である. 二項定理より $\dfrac{1}{r^k} = (1+h)^k = 1 + kh + \sum\limits_{i=2}^{k} \binom{k}{i} h^i > kh$ だから, $0 < r^k < \dfrac{1}{hk}$ が任意の自然数 $k$ に対して成り立つ. $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{hk} = 0$ だから, 命題 *1.10* の *(2)* により $\lim\limits_{k\to\infty} r^k = 0$ である.

$X$, $Y$ をそれぞれ $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ の部分集合とし, $f$ を $X$ から $Y$ への写像とする. $\boldsymbol{x} \in X$ を $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ に近づけたときに $f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^m$ に近づくことを, 距離を用いれば次のように定義できる.

**定義 1.12** 任意の正の実数 $\varepsilon$ に対し, 正の実数 $\delta$ で, 条件「$\boldsymbol{x} \in X$ かつ $0 < d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) < \delta$ ならば $d_m(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{q}) < \varepsilon$」を満たすものが存在するとき, 写像 $f$ の $\boldsymbol{p}$ における極限は $\boldsymbol{q}$ であるといい, これを $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ で表す.

**注意 1.13** $\boldsymbol{x} \in X$ を $d_m(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{q})$ に対応させる関数を考えれば, この関数は常に 0 以上の値をとるため, 上の定義から $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ であるためには $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} d_m(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{q}) = 0$ であることが必要十分である.

上の定義 1.7, 1.12 では, $\boldsymbol{R}^n$ の距離関数 $d_n$ そのものを用いて「近づく」ということを表現したが, 与えられた点の「近くの点」全体からなる集合を定義して, 上の定義を言い換えてみる.

**定義 1.14** $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$, $r > 0$ に対して, $\boldsymbol{p}$ からの距離が $r$ より小さい点全体からなる集合を $B_n(\boldsymbol{p}\,; r)$ *(*すなわち $B_n(\boldsymbol{p}\,; r) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \,|\, d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) < r\}$ *)* で表し, これを半径 $r$ 中心 $\boldsymbol{p}$ の開球または, $\boldsymbol{p}$ の $r$-近傍という.

まず, 定義 1.7 は次のように言い換えられる.

**定義 1.15** 任意の正の実数 $\varepsilon$ に対し, 自然数 $N$ で, 条件「$k \geqq N$ ならば $\boldsymbol{x}_k \in B_n(\boldsymbol{p}\,; \varepsilon)$」を満たすものが存在するとき, $\boldsymbol{R}^n$ の点列 $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ に収束するといい, このことを $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{p}$ で表す.

**注意 1.16** 上の定義をさらに言い換えると, $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$ に収束するということは, 任意の正の実数 $\varepsilon$ に対して, $\boldsymbol{x}_k\notin B_n(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$ であるような自然数 $k$ は有限個しかないということである. 従って, $\boldsymbol{R}^n$ の点列 $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$ に収束しないということは, 正の実数 $\varepsilon_0$ で, 条件「$\boldsymbol{x}_k\notin B_n(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon_0)$ である自然数 $k$ が無限に存在する.」を満たすものがあることである.

一般に $A$, $B$ を 2 つの集合とするとき, $B$ には属さない $A$ の要素全体からなる集合を $A$ から $B$ を除いた差集合と呼んで $A-B$ で表すことにする. この記号を用いれば $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ が $0<d_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})<\delta$ を満たすことは $\boldsymbol{x}\in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta)-\{\boldsymbol{p}\}$ と言い換えられるため, 定義 1.12 は次のように言い換えられる.

**定義 1.17** 任意の正の実数 $\varepsilon$ に対し, 正の実数 $\delta$ で, 条件「$\boldsymbol{x}\in(B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta)-\{\boldsymbol{p}\})\cap X$ ならば $f(\boldsymbol{x})\in B_m(\boldsymbol{q}\,;\varepsilon)$」を満たすものが存在するとき, 写像 $f:X\to Y$ の $\boldsymbol{p}$ における極限は $\boldsymbol{q}$ であるといい, このことを $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{q}$ で表す.

**注意 1.18** *(1)* 一般に $X$, $Y$ を集合とし, 写像 $f:X\to Y$ が与えられているとき, $Y$ の部分集合 $Z$ に対し $f^{-1}(Z)=\{x\in X\,|\,f(x)\in Z\}$ とおいて, これを $f$ による $Z$ の逆像と呼ぶ. 写像の逆像の記号を用いれば, $f(\boldsymbol{x})\in B_m(\boldsymbol{q}\,;\varepsilon)$ は $\boldsymbol{x}\in f^{-1}(B_m(\boldsymbol{q}\,;\varepsilon))$ を意味するので, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{q}$ であることは, 任意の正の実数 $\varepsilon$ に対し, 正の実数 $\delta$ で, 条件 $(B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta)-\{\boldsymbol{p}\})\cap X\subset f^{-1}(B_m(\boldsymbol{q}\,;\varepsilon))$ を満たすものが存在することであると定義できる.

*(2)* $B_m(\boldsymbol{q}\,;\varepsilon)$ を $\boldsymbol{q}$ からの「誤差」が $\varepsilon$ より小さい点の集合と考えれば, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{q}$ であることは, あらかじめ任意に設定した値 $\varepsilon$ に対して $\delta$ を十分小さくとれば, $\boldsymbol{p}$ 以外の $X$ の点で $\boldsymbol{p}$ からの距離が $\delta$ 未満のものはすべて $f$ によって, $\boldsymbol{q}$ との誤差が $\varepsilon$ 未満である点に写されることを意味する.

*(3)* $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{q}$ ではないことは, 正の実数 $\varepsilon_0$ で, 条件「任意の正の実数 $\delta$ に対して $f(\boldsymbol{x})\notin B_m(\boldsymbol{q}\,;\varepsilon)$ である $\boldsymbol{x}\in(B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta)-\{\boldsymbol{p}\})\cap X$ が存在する.」を満たすものがあることである.

点列の極限を用いれば, 写像の極限は次のように言い換えられる.

**命題 1.19** $f$ を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 $X$ から $\boldsymbol{R}^m$ の部分集合 $Y$ への写像とし, $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$ と $\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{R}^m$ とする. このとき, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{q}$ であることは, 条件「すべての $k\in\boldsymbol{N}$ に対して $\boldsymbol{x}_k\in X$, $\boldsymbol{x}_k\neq\boldsymbol{p}$ かつ $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{p}$」を満たす $\boldsymbol{R}^n$ の任意の点列 $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ に対して $\displaystyle\lim_{k\to\infty}f(\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{q}$ が成り立つことと同値である.

**証明** $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{q}$ を仮定し, $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を, 条件「すべての $k\in\boldsymbol{N}$ に対して $\boldsymbol{x}_k\in X$, $\boldsymbol{x}_k\neq\boldsymbol{p}$ かつ $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{p}$」を満たす $\boldsymbol{R}^n$ の任意の点列とする. $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{q}$ だから, 任意の正の実数 $\varepsilon$ に対して, 正の実数 $\delta$ で, 条件

$$「\boldsymbol{x}\in X \text{ かつ } 0<d_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})<\delta \text{ ならば } d_m(f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{q})<\varepsilon」\ \cdots\ (*)$$

を満たすものが存在する. $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{p}$ だから, 上記の $\delta$ に対し, 自然数 $N$ で, 条件「$k\geqq N$ ならば $d_n(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{p})<\delta$」を満たすものが存在する. すべての $k\in\boldsymbol{N}$ に対して $\boldsymbol{x}_k\in X$ であり, $\boldsymbol{x}_k\neq\boldsymbol{p}$ だから, $d_n(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{p})>0$ であるため,

$$「k\geqq N \text{ ならば } \boldsymbol{x}_k\in X \text{ かつ } 0<d_n(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{p})<\delta」$$

が成り立ち, $k\geqq N$ ならば, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_k$ としたときに条件 $(*)$ の仮定が満たされるため, 条件

$$「k\geqq N \text{ ならば } d_m(f(\boldsymbol{x}_k),\boldsymbol{q})<\varepsilon」$$

が満たされる. 従って $\displaystyle\lim_{k\to\infty}f(\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{q}$ が成り立つ.

$\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{q}$ でないと仮定すれば, 注意 1.18 の (3) により, ある正の実数 $\varepsilon_0$ で, 条件

$$「\text{任意の正の実数 } \delta \text{ に対して } f(\boldsymbol{x})\notin B_m(\boldsymbol{q}\,;\varepsilon_0) \text{ である } \boldsymbol{x}\in(B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta)-\{\boldsymbol{p}\})\cap X \text{ が存在する.}」$$

を満たすものがある. 従って, 任意の自然数 $k$ に対して $f(\boldsymbol{a}_k)\notin B_m(\boldsymbol{q}\,;\varepsilon_0)$ である $\boldsymbol{a}_k\in\left(B_n\left(\boldsymbol{p}\,;\frac{1}{k}\right)-\{\boldsymbol{p}\}\right)\cap X$ が存在する. そこで, $\boldsymbol{R}^n$ の点列 $(\boldsymbol{a}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を考えると, すべての $k\in\boldsymbol{N}$ に対して $\boldsymbol{a}_k\in X$, $\boldsymbol{a}_k\neq\boldsymbol{p}$ であり, $0<d_n(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{p})<\dfrac{1}{k}$ だから例題 1.9 と命題 1.10 の (2) から, $\displaystyle\lim_{k\to\infty}d_n(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{p})=0$ である. 従って, 注意 1.8 により $(\boldsymbol{a}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は $\boldsymbol{p}$ に収束する. ところが, 任意の自然数 $k$ に対して $f(\boldsymbol{a}_k)\notin B_m(\boldsymbol{q}\,;\varepsilon_0)$ だから, 注意 1.16 によって $\displaystyle\lim_{k\to\infty}f(\boldsymbol{a}_k)=\boldsymbol{q}$ は成り立たない. 故に, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{q}$ でないならば, 条件「すべての $k\in\boldsymbol{N}$ に対して $\boldsymbol{a}_k\in X$, $\boldsymbol{a}_k\neq\boldsymbol{p}$ かつ $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{p}$」を満たす $\boldsymbol{R}^n$ の点列 $(\boldsymbol{a}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ で, $\displaystyle\lim_{k\to\infty}f(\boldsymbol{a}_k)=\boldsymbol{q}$ とならないものの存在が示せたので, 対偶を考えれば, 逆の主張が示されたことになる. $\square$

## 2 ユークリッド空間における極限の性質

ユークリッド空間の点列の極限に関して次の結果が成り立つ.

**命題 2.1** $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$, $(\boldsymbol{y}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を $\boldsymbol{R}^n$ の点列, $(a_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を実数列とする. $\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{p}$, $\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{q}$, $\lim_{k\to\infty}a_k=c$ であるとき, 次の等式が成り立つ.

*(1)* $\lim_{k\to\infty}(\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{y}_k)=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ *(2)* $\lim_{k\to\infty}a_k\boldsymbol{x}_k=c\boldsymbol{p}$

**証明** (1) 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $N_1,N_2\in\boldsymbol{N}$ で, 「$k\geqq N_1$ ならば $\boldsymbol{x}_k\in B_n\left(\boldsymbol{p}\,;\frac{\varepsilon}{2}\right)$」, 「$k\geqq N_2$ ならば $\boldsymbol{y}_k\in B_n\left(\boldsymbol{q}\,;\frac{\varepsilon}{2}\right)$」を満たすものがある. $N_1$, $N_2$ の大きい方を $N$ とするとき, $k\geqq N_1$ ならば $\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{p}\|<\frac{\varepsilon}{2}$ かつ $\|\boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{q}\|<\frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つため, 定理 1.4 の (2) を用いると $d_m(\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{y}_k,\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})=\|(\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{y}_k)-(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\|=\|(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{p})+(\boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{q})\|\leqq\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{p}\|+\|\boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{q}\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ である. 従って, このとき $\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{y}_k\in B_n(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}\,;\varepsilon)$ が成り立つため, (1) が示された.

(2) 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $N_1,N_2>0$ で, 「$k\geqq N_1$ ならば $\boldsymbol{x}_k\in B_n\left(\boldsymbol{p}\,;\frac{\varepsilon}{2+2|c|}\right)$」, 「$k\geqq N_2$ ならば $a_k\in B_n\left(c\,;\frac{\varepsilon}{2+2\|\boldsymbol{p}\|}\right)$」を満たすものがある. また $N_3>0$ で,「$k\geqq N_3$ ならば $\boldsymbol{x}_k\in B_n(\boldsymbol{p}\,;1)$」を満たすものがある. $N_1$, $N_2$, $N_3$ のうちの最小のもの方を $N$ とするとき, $k\geqq N$ ならば $\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{p}\|<\frac{\varepsilon}{2+2|c|}$, $|a_k-c|<\frac{\varepsilon}{2+2\|\boldsymbol{p}\|}$ かつ $\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{p}\|<1$ が成り立つ. このとき, $\|\boldsymbol{x}_k\|=\|(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{p})+\boldsymbol{p}\|\leqq\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{p}\|+\|\boldsymbol{p}\|<1+\|\boldsymbol{p}\|$ が成り立つことに注意すれば $d_m(a_k\boldsymbol{x}_k,c\boldsymbol{p})=\|a_k\boldsymbol{x}_k-c\boldsymbol{p}\|=\|a_k\boldsymbol{x}_k-c\boldsymbol{x}_k+c\boldsymbol{x}_k-c\boldsymbol{p}\|=\|(a_k-c)\boldsymbol{x}_k+c(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{p})\|\leqq|a_k-c|\|\boldsymbol{x}_k\|+|c|\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{p}\|<\frac{\varepsilon(1+\|\boldsymbol{p}\|)}{2+2\|\boldsymbol{p}\|}+\frac{\varepsilon|c|}{2+2|c|}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ である. 従って $k\geqq N$ ならば $a_k\boldsymbol{x}_k\in B_n(c\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$ が成り立つため, (2) が示された. □

**注意 2.2** 上の命題で, とくに $(a_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が常に $c$ を値にとる実数列の場合を考えると, *(2)* の特別な場合として, $\lim_{k\to\infty}c\boldsymbol{x}_k=c\boldsymbol{p}$ が成り立つことに注意する.

写像の極限に関して次の結果が成り立つ.

**命題 2.3** $X\subset\boldsymbol{R}^n$, とし, 写像 $f,g:X\to\boldsymbol{R}^m$ は $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{q}$, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{r}$ を満たし, 関数 $s:X\to\boldsymbol{R}$ は $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}s(\boldsymbol{x})=c$ を満たすとする. このとき, 次の等式が成り立つ.

*(1)* $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}(f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$ *(2)* $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}s(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})=c\boldsymbol{q}$

**証明** (1) 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\delta_1,\delta_2>0$ で, 「$\boldsymbol{x}\in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta_1)\cap X$ かつ $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{p}$ ならば $f(\boldsymbol{x})\in B_m\left(\boldsymbol{q}\,;\frac{\varepsilon}{2}\right)$」, 「$\boldsymbol{x}\in B_m(\boldsymbol{p}\,;\delta_2)\cap X$ かつ $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{p}$ ならば $g(\boldsymbol{x})\in B_m\left(\boldsymbol{r}\,;\frac{\varepsilon}{2}\right)$」を満たすものがある. $\delta_1$, $\delta_2$ の小さい方を $\delta$ とするとき, $\boldsymbol{x}\in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta)\cap X$ かつ $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{p}$ ならば $\|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q}\|<\frac{\varepsilon}{2}$ かつ $\|g(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{r}\|<\frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つため, 定理1.4 の (2) を用いると $d_m(f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r})=\|(f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x}))-(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r})\|=\|(f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q})+(g(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{r})\|\leqq\|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q}\|+\|g(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{r}\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ である. 従って, このとき $f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})\in B_m(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}\,;\varepsilon)$ が成り立つため, (1) が示された.

(2) 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\delta_1,\delta_2>0$ で, 「$\boldsymbol{x}\in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta_1)\cap X$ かつ $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{p}$ ならば $f(\boldsymbol{x})\in B_m\left(\boldsymbol{q}\,;\frac{\varepsilon}{2+2|c|}\right)$」, 「$\boldsymbol{x}\in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta_2)\cap X$ かつ $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{p}$ ならば $s(\boldsymbol{x})\in B_m\left(c\,;\frac{\varepsilon}{2+2\|\boldsymbol{q}\|}\right)$」を満たすものがある. また $\delta_3>0$ で, 「$\boldsymbol{x}\in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta_3)\cap X$ かつ $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{p}$ ならば $f(\boldsymbol{x})\in B_m(\boldsymbol{q}\,;1)$」を満たすものがある. $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$ のうちの最小のもの方を $\delta$ とするとき, $\boldsymbol{x}\in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta)\cap X$ かつ $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{p}$ ならば $\|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q}\|<\frac{\varepsilon}{2+2|c|}$, $|s(\boldsymbol{x})-c|<\frac{\varepsilon}{2+2\|\boldsymbol{q}\|}$ かつ $\|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q}\|<1$ が成り立つ. このとき, $\|f(\boldsymbol{x})\|=\|(f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q})+\boldsymbol{q}\|\leqq\|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q}\|+\|\boldsymbol{q}\|<1+\|\boldsymbol{q}\|$ が成り立つことに注意すれば $d_m(s(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}),c\boldsymbol{q})=\|s(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})-c\boldsymbol{q}\|=\|s(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})-cf(\boldsymbol{x})+cf(\boldsymbol{x})-c\boldsymbol{q}\|=\|(s(\boldsymbol{x})-c)f(\boldsymbol{x})+c(f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q})\|\leqq|s(\boldsymbol{x})-c|\|f(\boldsymbol{x})\|+|c|\|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q}\|<\frac{\varepsilon(1+\|\boldsymbol{q}\|)}{2+2\|\boldsymbol{q}\|}+\frac{\varepsilon|c|}{2+2|c|}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ である. 従って $\boldsymbol{x}\in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta)\cap X$ かつ $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{p}$ ならば $s(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})\in B_m(c\boldsymbol{q}\,;\varepsilon)$ が成り立つため, (2) が示された. □

**注意 2.4** 上の命題で, とくに $s$ が常に $c$ を値にとる定数値関数の場合を考えると, *(2)* の特別な場合として, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}cf(\boldsymbol{x})=c\boldsymbol{q}$ が成り立つことに注意する.

**補題 2.5** $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ の第 $j$ 成分を $x_j$ とするとき, $|x_j|\leqq\|\boldsymbol{x}\|\leqq|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$ が成り立つ.

**証明** $x_j^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2$ だから, この両辺の正の平方根をとれば $|x_j| \leqq \|\boldsymbol{x}\|$ が得られる.

また $\|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2 \sum_{1\leqq i<j\leqq n} |x_i||x_j| = (|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)^2$ だから, この両辺の正の平方根をとれば $\|\boldsymbol{x}\| \leqq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ が得られる. □

**命題 2.6** $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を $\boldsymbol{R}^n$ の点列とし, $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $\boldsymbol{x}_k$ の第 $j$ 成分を $x_{kj}$ とする. $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ の第 $j$ 成分を $p_j$ とすれば, $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{p}$ が成り立つためには, すべての $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\lim_{k\to\infty} x_{kj} = p_j$ が成り立つことが必要十分である.

**証明** すべての $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\lim_{k\to\infty} x_{kj} = p_j$ が成り立つならば, $\lim_{k\to\infty} |x_{kj} - p_j| = 0$ が すべての $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して成り立つため, 命題 2.1 の (1) により $\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |x_{kj} - p_j| = 0$ である. ここで, 補題 2.5 から $0 \leqq d_n(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{p}) = \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{p}\| \leqq \sum_{j=1}^{n} |x_{kj} - p_j|$ だから, 命題 1.10 により $\lim_{k\to\infty} d_n(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{p}) = 0$ が成り立つため, 注意 1.13 により, $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{p}$ である.

補題 2.5 から, 任意の $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $0 \leqq |x_{kj} - p_j| < \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{p}\| = d_n(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{p})$ だから, $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{p}$ ならば, 注意 1.13 により, $\lim_{k\to\infty} d_n(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{p}) = 0$ が成り立つため, 命題 1.10 によって $\lim_{k\to\infty} |x_{kj} - p_j| = 0$ である. 故に, 再び注意 1.13 により $\lim_{k\to\infty} x_{kj} = p_j$ である. □

$X \subset \boldsymbol{R}^n$, $Y \subset \boldsymbol{R}^n$ とし, 写像 $f : X \to Y$ が与えられているとする. $\boldsymbol{x} \in X$ に対し, $f(\boldsymbol{x}) \in Y$ の第 $i$ 成分を $f_i(\boldsymbol{x})$ で表すことにする. $\boldsymbol{x}$ を $f_i(\boldsymbol{x})$ に対応させることにより, 関数 $f_i : X \to \boldsymbol{R}$ が定まる.

**命題 2.7** $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^m$ の第 $i$ 成分を $q_i$ とすれば, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ が成り立つためには, すべての $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f_i(\boldsymbol{x}) = q_i$ が成り立つことが必要十分である.

**証明** すべての $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f_i(\boldsymbol{x}) = q_i$ が成り立つならば, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} |f_i(\boldsymbol{x}) - q_i| = 0$ が すべての $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して成り立つため, 命題 2.3 の (1) により $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \sum_{i=1}^{m} |f_i(\boldsymbol{x}) - q_i| = 0$ である. ここで, 補題 2.5 から $0 \leqq d_m(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{q}) = \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| \leqq \sum_{i=1}^{m} |f_i(\boldsymbol{x}) - q_i|$ だから, 命題 1.10 により $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} d_m(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{q}) = 0$ が成り立つため, 注意 1.13 により, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ である.

補題 2.5 から, 任意の $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して $0 \leqq |f_i(\boldsymbol{x}) - q_i| < \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| = d_m(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{q})$ だから, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ ならば, 注意 1.13 により, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} d_m(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{q}) = 0$ が成り立つため, 命題 1.10 によって $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} |f_i(\boldsymbol{x}) - q_i| = 0$ である. 故に, 再び注意 1.13 により $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f_i(\boldsymbol{x}) = q_i$ である. □

写像の極限を用いれば, 写像が連続であることの定義が次のようにできる.

**定義 2.8** $\boldsymbol{p} \in X$ に対し, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p})$ が成り立つとき, $f : X \to Y$ は $\boldsymbol{p}$ で連続であるという. すべての $\boldsymbol{p} \in X$ に対し, $f$ が $\boldsymbol{p}$ で連続であるとき $f$ を連続写像という.

**命題 2.9** $X \subset \boldsymbol{R}^n$, $Y \subset \boldsymbol{R}^m$, $Z \subset \boldsymbol{R}^k$, $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{q} \in Y$ とし, 写像 $f : X \to Y$ は $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ を満たし, 写像 $g : Y \to Z$ は $\boldsymbol{q}$ で連続であるとする. このとき $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} g(f(\boldsymbol{x})) = g(\boldsymbol{q})$ が成り立つ.

**証明** $g$ の $\boldsymbol{q}$ における連続性から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta_1 > 0$ で「$\boldsymbol{y} \in B_m(\boldsymbol{q}\,;\delta_1) \cap Y$ ならば $g(\boldsymbol{y}) \in B_k(g(\boldsymbol{q})\,;\varepsilon)$」を満たすものがある. また, $f$ についての仮定から, $\delta > 0$ で,「$\boldsymbol{x} \in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \in B_m(\boldsymbol{q}\,;\delta_1)$」を満たすものがある. 従って $\boldsymbol{x} \in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $g(f(\boldsymbol{x})) \in B_k(g(\boldsymbol{q})\,;\varepsilon)$ となるため, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} g(f(\boldsymbol{x})) = g(\boldsymbol{q})$ が成り立つ. □

## 3　ユークリッド空間の部分集合

**定義 3.1** $X$ を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合, $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ とする.

*(1)* 正の実数 $r$ で, $B_n(\boldsymbol{p};r) \subset X$ を満たすものがあるとき, $\boldsymbol{p}$ を $X$ の内点という. $X$ の内点全体からなる集合を, $X$ の内部といい, $X^i$ で表す.

*(2)* 正の実数 $r$ で, $B_n(\boldsymbol{p};r) \cap X = \emptyset$ を満たすものがあるとき, $\boldsymbol{p}$ を $X$ の外点という. $X$ の外点全体からなる集合を, $X$ の外部といい, $X^e$ で表す.

*(3)* 任意の正の実数 $r$ に対して $B_n(\boldsymbol{p};r) \not\subset X$ かつ $B_n(\boldsymbol{p};r) \cap X \neq \emptyset$ であるとき, $\boldsymbol{p}$ を $X$ の境界点という. $X$ の境界点全体からなる集合を, $X$ の境界といい, $\partial X$ で表す.

**命題 3.2** $X$ を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合とする.

*(1)* $\boldsymbol{R}^n = X^i \cup X^e \cup \partial X$, $X^i \cap X^e = X^i \cap \partial X = X^e \cap \partial X = \emptyset$.

*(2)* $(\boldsymbol{R}^n - X)^i = X^e$, $(\boldsymbol{R}^n - X)^e = X^i$, $\partial(\boldsymbol{R}^n - X) = \partial X$.

*(3)* $X^i \subset X$, $X^e \cap X = \emptyset$, $X \subset X^i \cup \partial X$.

**証明** (1) $X^i$, $X^e$, $\partial X$ の定義から, 任意の $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ は $X^i$, $X^e$, $\partial X$ のいずれか 1 つだけに必ず属するため, $\boldsymbol{R}^n = X^i \cup X^e \cup \partial X$, $X^i \cap X^e = X^i \cap \partial X = X^e \cap \partial X = \emptyset$ が成り立つ.

(2) $\boldsymbol{p} \in (\boldsymbol{R}^n - X)^i$ は $B_n(\boldsymbol{p};r) \subset \boldsymbol{R}^n - X$ を満たす $r > 0$ が存在することと同値であり, $B_n(\boldsymbol{p};r) \subset \boldsymbol{R}^n - X$ は $B_n(\boldsymbol{p};r) \cap X = \emptyset$ と同値だから, $\boldsymbol{p} \in (\boldsymbol{R}^n - X)^i$ は $\boldsymbol{p} \in X^e$ と同値である. 従って $(\boldsymbol{R}^n - X)^i = X^e$ が得られる. この等式の $X$ を $\boldsymbol{R}^n - X$ で置き換えると $\boldsymbol{R}^n - (\boldsymbol{R}^n - X) = X$ だから 2 つ目の等式 $(\boldsymbol{R}^n - X)^e = X^i$ が得られる. $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ と $r > 0$ に対して $B_n(\boldsymbol{p};r) \not\subset X$ は $B_n(\boldsymbol{p};r) \cap (\boldsymbol{R}^n - X) \neq \emptyset$ と同値であり, $B_n(\boldsymbol{p};r) \cap X \neq \emptyset$ は $B_n(\boldsymbol{p};r) \not\subset \boldsymbol{R}^n - X$ と同値である. 従って「$B_n(\boldsymbol{p};r) \not\subset X$ かつ $B_n(\boldsymbol{p};r) \cap X \neq \emptyset$」は「$B_n(\boldsymbol{p};r) \cap (\boldsymbol{R}^n - X) \neq \emptyset$ かつ $B_n(\boldsymbol{p};r) \not\subset \boldsymbol{R}^n - X$」と同値であるため, $\boldsymbol{p} \in \partial X$ であることと $\boldsymbol{p} \in \partial(\boldsymbol{R}^n - X)$ であることは同値である.

(3) $\boldsymbol{p} \in X^i$ ならば, 正の実数 $r$ で $B_n(\boldsymbol{p};r) \subset X$ を満たすものが存在し, $\boldsymbol{p} \in B_n(\boldsymbol{p};r)$ だから $\boldsymbol{p} \in X$ である. よって $X^i \subset X$ である. この結果と (2) で示したことから $X^e = (\boldsymbol{R}^n - X)^i \subset \boldsymbol{R}^n - X$ だから $X^e \subset \boldsymbol{R}^n - X$ であり, この式は $X^e \cap X = \emptyset$ と同値である. (1) より $X = X \cap \boldsymbol{R}^n = X \cap (X^i \cup X^e \cup \partial X) = (X \cap (X^i \cup \partial X)) \cup (X \cap X^e)$ $= (X \cap (X^i \cup \partial X)) \cup \emptyset = X \cap (X^i \cup \partial X) \subset X^i \cup \partial X$ である. □

**定義 3.3** $X$ を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合とする.

*(1)* $X$ の点がすべて内点であるとき, $X$ を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合という.

*(2)* $X$ の補集合 $\boldsymbol{R}^n - X$ が開集合であるとき, $X$ を $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合という.

*(3)* $X \subset B_n(\boldsymbol{0};r)$ となる $r > 0$ が存在するとき, $X$ は有界であるという.

**注意 3.4** 命題 *3.2* の *(3)* の *1* つめの等式から, $X$ が開集合であるためには, $X^i = X$ が成り立つことが必要十分である.

**命題 3.5** $X$ を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合とすれば次の *3* つは同値である.

*(i)* $X$ は閉集合である.　*(ii)* $X^i \cup \partial X = X$　*(iii)* $\partial X \subset X$

**証明** 注意 3.4 から, $X$ が閉集合であることと $(\boldsymbol{R}^n - X)^i = \boldsymbol{R}^n - X$ が成り立つことは同値である. 命題 3.2 の (2), (1) から $(\boldsymbol{R}^n - X)^i = X^e = \boldsymbol{R}^n - (X^i \cup \partial X)$ だから $(\boldsymbol{R}^n - X)^i = \boldsymbol{R}^n - X$ は $\boldsymbol{R}^n - (X^i \cup \partial X) = \boldsymbol{R}^n - X$ と同値である. この両辺の補集合を考えることによって, $\boldsymbol{R}^n - (X^i \cup \partial X) = \boldsymbol{R}^n - X$ は $X^i \cup \partial X = X$ と同値であるため $(i)$ と $(ii)$ は同値である. $(ii)$ の左辺は $\partial X$ を含むため, $(ii)$ が成り立てば $(iii)$ も成り立つ. 逆に $(iii)$ が成り立つならば, 命題 3.2 の (3) から $X^i \subset X$ でもあるため, $X^i \cup \partial X \subset X$ である. 命題 3.2 の (3) の 3 つ目の式から $X \subset X^i \cup \partial X$ はつねに成り立つため, $(ii)$ が成り立つことがわかる. □

**例 3.6** $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$, $r > 0$ とする.

*(1)* $B_n(\boldsymbol{p}\,;r)$ は $\boldsymbol{R}^n$ の開集合である．実際，$\boldsymbol{x} \in B_n(\boldsymbol{p}\,;r)$ ならば任意の $\boldsymbol{y} \in B_n(\boldsymbol{x}\,;r - d_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}))$ は $d_n(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) < r - d_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ より $d_n(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}) \leqq d_n(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) + d_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) < r$ を満たし，$\boldsymbol{y} \in B_n(\boldsymbol{p}\,;r)$ となるため，$B_n(\boldsymbol{x}\,;r - d_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})) \subset B_n(\boldsymbol{p}\,;r)$ である．よって $B_n(\boldsymbol{p}\,;r)$ のすべての点は内点である．

*(2)* $\overline{B}_n(\boldsymbol{p}\,;r)$ を $\overline{B}_n(\boldsymbol{p}\,;r) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \,|\, d_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) \leqq r\}$ で定めれば，これは $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合である．実際 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n - \overline{B}_n(\boldsymbol{p}\,;r)$ ならば任意の $\boldsymbol{y} \in B_n(\boldsymbol{x}\,;d_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) - r)$ は $d_n(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) < d_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) - r$ と $d_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) \leqq d_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + d_n(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p})$ より $d_n(\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}) \geqq d_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) - d_n(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) > r$ を満たし，$\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n - \overline{B}_n(\boldsymbol{p}\,;r)$ となるため，$B_n(\boldsymbol{x}\,;d_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) - r) \subset \boldsymbol{R}^n - \overline{B}_n(\boldsymbol{p}\,;r)$ である．よって $\boldsymbol{R}^n - \overline{B}_n(\boldsymbol{p}\,;r)$ のすべての点は内点になるため，$\boldsymbol{R}^n - \overline{B}_n(\boldsymbol{p}\,;r)$ は開集合である．

*(3)* $S(\boldsymbol{p}\,;r)$ を $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \,|\, d_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = r\}$ で定めれば，これは $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合である．実際 $S(\boldsymbol{p}\,;r) = \overline{B}_n(\boldsymbol{p}\,;r) - B_n(\boldsymbol{p}\,;r)$ だから $\boldsymbol{R}^n - S(\boldsymbol{p}\,;r) = (\boldsymbol{R}^n - \overline{B}_n(\boldsymbol{p}\,;r)) \cap B_n(\boldsymbol{p}\,;r)$ であり，*(1)*, *(2)* から $\boldsymbol{R}^n - \overline{B}_n(\boldsymbol{p}\,;r)$, $B_n(\boldsymbol{p}\,;r)$ の各点はすべて内点となるため，$\boldsymbol{R}^n - S(\boldsymbol{p}\,;r)$ は開集合である．

**注意 3.7** $\overline{B}_n(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon) \subset B_n(\boldsymbol{0}\,;\|\boldsymbol{p}\| + \varepsilon + 1)$ だから $\overline{B}_n(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$ は有界である．従って，$\overline{B}_n(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$ の部分集合である $B_n(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$, $S(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$ も有界である．

**命題 3.8** *$X$, $Y$ が $\boldsymbol{R}^n$ の開集合ならば $X \cap Y$ も開集合である．*

**証明** $\boldsymbol{p} \in X \cap Y$ とする．$r_1, r_2 > 0$ で $B_n(\boldsymbol{p}\,;r_1) \subset X$, $B_n(\boldsymbol{p}\,;r_2) \subset Y$ を満たすものがある．$r_1$, $r_2$ の小さい方を $r$ とすれば $B_n(\boldsymbol{p}\,;r) \subset X \cap Y$ となるため，$\boldsymbol{p}$ は $X \cap Y$ の内点である． □

**命題 3.9** *$X$ が $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合であるためには，次の条件 $(*)$ が成り立つことが必要十分である．*

$(*)$ *$X$ の点列 $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ に収束すれば $\boldsymbol{p} \in X$ である．*

**証明** $X$ を $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合，$(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ に収束する $X$ の点列とする．もし，$\boldsymbol{p} \notin X$ ならば $X$ が $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合であることから，$\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{R}^n - X$ の内点である．従って $B_n(\boldsymbol{p}\,;r) \subset \boldsymbol{R}^n - X$ を満たす $r > 0$ がある．一方 $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ に収束するため，「$k \geqq N$ ならば $\boldsymbol{x}_k \in B_n(\boldsymbol{p}\,;r)$」を満たす自然数 $N$ がある．故に $\boldsymbol{x}_N \in B_n(\boldsymbol{p}\,;r) \cap X$ となって $B_n(\boldsymbol{p}\,;r) \subset \boldsymbol{R}^n - X$ と矛盾するため $\boldsymbol{p} \in X$ である．

条件 $(*)$ が満たされるとする．$\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n - X$ が $\boldsymbol{R}^n - X$ の内点でないとすると，任意の $k = 1, 2, \ldots$ に対して $B_n\left(\boldsymbol{p}\,;\frac{1}{k}\right) \cap X$ は空集合ではないため $\boldsymbol{x}_k \in B_n\left(\boldsymbol{p}\,;\frac{1}{k}\right) \cap X$ が選べる．このとき，$X$ の点列 $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は $\boldsymbol{p}$ に収束するが，仮定から $\boldsymbol{p} \in X$ となって矛盾がおきる．よって $\boldsymbol{R}^n - X$ の点はすべて内点である． □

# 4 ユークリッド空間の位相

**定義 4.1** 集合 $X$ に対し，$X$ の直積集合 $X \times X$ で定義された実数値関数 $d : X \times X \to \boldsymbol{R}$ で，任意の $x, y, z \in X$ に対して次の条件 *(1)*, *(2)*, *(3)* を満たすものを $X$ の距離関数という．

*(1)* $d(y,x) = d(x,y)$.

*(2)* $d(x,y) \geqq 0$ であり，$d(x,y) = 0$ となるのは，$x = y$ の場合に限る．

*(3)* $d(x,z) \leqq d(x,y) + d(y,z)$.

以後，とくに断らない限り，この節では，$X$ を距離関数 $d$ が与えられた集合とする．このとき $X$ には，定義 1.14 と同様に開球の概念ができる．

**定義 4.2** $p \in X$, $r > 0$ に対して，$p$ からの距離が $r$ より小さい点全体からなる集合を $B_d(p\,;r)$ *(*すなわち $B_d(p\,;r) = \{x \in X \,|\, d(x,p) < r\}$*)* で表し，これを半径 $r$ 中心 $p$ の開球または，$p$ の $r$-近傍という．

第 1 節のユークリッド空間の場合と同様にして，距離関数が与えらた集合の点列の収束や，距離関数が与えらた集合の間の写像の極限が定義できる．

**定義 4.3** $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を $X$ の点列とする．任意の正の実数 $\varepsilon$ に対し，自然数 $N$ で，条件「$k \geqq N$ ならば $x_k \in B_d(p\,;\varepsilon)$」を満たすものが存在するとき，$(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は $p \in \boldsymbol{R}^n$ に収束するといい，このことを $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = p$ で表す．

**定義 4.4** 集合 $X, Y$ にそれぞれ距離関数 $d, d'$ が与えられ，$Z \subset X$, $W \subset Y$, $f : Z \to W$ が与えられているとする．任意の正の実数 $\varepsilon$ に対し，正の実数 $\delta$ で，条件「$x \in (B_d(p\,;\delta) - \{p\}) \cap Z$ ならば $f(x) \in B_{d'}(q\,;\varepsilon)$」を満たすものが存在するとき，写像 $f : Z \to W$ の $p$ における極限は $q$ であるといい，このことを $\lim\limits_{x\to p} f(x) = q$ で表す．

極限の概念が定義できれば，写像の連続性の概念が次のように定義できることは，ユークリッド空間の場合と同様である．

**定義 4.5** 集合 $X, Y$ にそれぞれ距離関数 $d, d'$ が与えられているとする．写像 $f : X \to Y$ が $p \in X$ に対し $\lim\limits_{x\to p} f(x) = f(p)$ を満たすとき $f$ は点 $p$ で連続であるという．さらに $f$ が $X$ の任意の点で連続であるとき，$f$ を連続写像という．

さらに，開球の概念が定義できれば，内点や開集合の概念がユークリッド空間の場合と同様に，次のように定義できる．

**定義 4.6** $A$ を $X$ の部分集合，$p \in X$ とする．

*(1)* 正の実数 $r$ で，$B_d(p\,;r) \subset A$ を満たすものがあるとき，$p$ を $A$ の内点という．$A$ の内点全体からなる集合を，$A$ の内部といい，$A^i$ で表す．

*(2)* 正の実数 $r$ で，$B_d(p\,;r) \cap A = \emptyset$ を満たすものがあるとき，$p$ を $A$ の外点という．$A$ の外点全体からなる集合を，$A$ の外部といい，$A^e$ で表す．

*(3)* 任意の正の実数 $r$ に対して $B_d(p\,;r) \not\subset A$ かつ $B_d(p\,;r) \cap A \neq \emptyset$ であるとき，$p$ を $A$ の境界点という．$A$ の境界点全体からなる集合を，$X$ の境界といい，$\partial A$ で表す．

**定義 4.7** $A$ を $X$ の部分集合，$p \in X$ とする．

*(1)* $A$ の点がすべて内点であるとき，$A$ を $X$ の開集合という．

*(2)* $A$ の補集合 $X - A$ が開集合であるとき，$A$ を $X$ の閉集合という．

**注意 4.8** 注意 *3.6* の *(1)* と同様にして，開球は開集合であることが示される．

開集合の言葉を用いて，点列の収束や写像の極限，連続性の概念を記述することができる．

**命題 4.9** $X$ の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が $p \in X$ に収束するためには，$p$ を含む任意の開集合 $U$ に対し，自然数 $N$ で，条件「$k \geqq N$ ならば $x_k \in U$」を満たすものが存在することが必要十分である．

**証明** $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が $p \in X$ に収束するとし，$U$ は $p$ を含む開集合であるとする．開集合の定義から，正の実数 $r$ で，$B_d(p\,;r) \subset U$ を満たすものがあり，$(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が $p$ に収束することから，自然数 $N$ で，条件「$k \geqq N$ ならば $x_k \in B_d(p\,;r)$」を満たすものが存在する．$B_d(p\,;r) \subset U$ だから，自然数 $N$ は，条件「$k \geqq N$ ならば $x_k \in U$」を満たす．逆は，開球が開集合であることから明らかである．$\square$

**命題 4.10** 集合 $X, Y$ にそれぞれ距離関数 $d, d'$ が与えられ，$Z \subset X$, $W \subset Y$, $f : Z \to W$ が与えられているとする．写像 $f : Z \to W$ の $p$ における極限が $q$ であるためには，$q$ を含む $Y$ の任意の開集合 $V$ に対し，$p$ を含む $X$ の開集合 $U$ で，条件「$x \in (U - \{p\}) \cap X$ ならば $f(x) \in V$」を満たすものが存在することが必要十分である．

**証明** $f$ の $p$ における極限が $q$ であるとし，$V$ は $q$ を含む開集合であるとする．開集合の定義から，正の実数 $r$ で，$B_{d'}(q\,;r) \subset V$ を満たすものがあり，$f$ の $p$ における極限が $q$ であることから，正の実数 $\delta$ で，条件「$x \in (B_d(p\,;\delta) - \{p\}) \cap Z$ ならば $f(x) \in B_{d'}(q\,;r)$」を満たすものが存在する．開球 $B_d(p\,;\delta)$ は $p$ を含む開集合だから，$U = B_d(p\,;\delta)$ とすればよい．

逆に, $q$ を含む任意の開集合 $V$ に対し, $p$ を含む開集合 $U$ で, 条件「$x \in (U - \{p\}) \cap X$ ならば $f(x) \in V$」を満たすものが存在すると仮定して, $\varepsilon$ を任意の正の実数とする. $B_{d'}(q\,;\varepsilon)$ は $q$ を含む開集合だから, $p$ を含む開集合 $U$ で, 条件「$x \in (U - \{p\}) \cap X$ ならば $f(x) \in B_{d'}(q\,;\varepsilon)$」を満たすものが存在する. 開集合の定義から, 正の実数 $\delta$ で, $B_d(p\,;\delta) \subset U$ を満たすものがあるため, 条件「$x \in (B_d(p\,;\delta) - \{p\}) \cap X$ ならば $f(x) \in B_{d'}(q\,;\varepsilon)$」が満たされる. 故に $f$ の $p$ における極限は $q$ である. □

**命題 4.11** 集合 $X, Y$ にそれぞれ距離関数 $d, d'$ が与えられているとする. 写像 $f : X \to Y$ が連続写像であるためには, $Y$ の任意の開集合 $O$ に対し, $f^{-1}(O)$ が $X$ の開集合であることが必要十分である.

**証明** $f$ が連続写像であるとして, $O$ を $Y$ の任意の開集合とする. $p$ を $f^{-1}(O)$ の任意の点とすれば, $f(p) \in O$ で, $O$ が開集合であることから, $f(p)$ は $O$ の内点である. 従って, 正の実数 $r$ で, $B_{d'}(q\,;r) \subset O$ を満たすものがあり, $f$ の $p$ における極限が $f(p)$ であることから, 正の実数 $\delta$ で, 条件「$x \in B_d(p\,;\delta) - \{p\}$ ならば $f(x) \in B_{d'}(f(p)\,;r)$」を満たすものが存在する. $f(p) \in B_{d'}(f(p)\,;r)$ だから, $p \in f^{-1}(B_{d'}(f(p)\,;r))$ であることに注意すれば, この条件は $B_d(p\,;\delta) \subset f^{-1}(B_{d'}(f(p)\,;r))$ と同値であり, これは $p$ が $f^{-1}(O)$ の内点であることを意味する. よって $f^{-1}(O)$ は $X$ の開集合である.

逆に, $Y$ の任意の開集合 $O$ に対し, $f^{-1}(O)$ が $X$ の開集合であるとして, $p$ を $X$ の任意の点とする. $f(p)$ を含む $Y$ の任意の開集合 $V$ に対して, 仮定により $f^{-1}(V)$ は $X$ の開集合である. $f(p) \in V$ だから $p \in f^{-1}(V)$ であるため, $p$ は $f^{-1}(V)$ の内点である. 従って, 正の実数 $r$ で, $B_d(p\,;r) \subset f^{-1}(V)$ を満たすものがあり,「$x \in B_d(p\,;r)$ ならば $f(x) \in V$」が成り立つ. $B_d(p\,;r)$ は $X$ の開集合だから, 命題 4.10 によって $f$ は $p$ で連続となり, $f$ は連続写像であることが示される. □

上の結果により, 点列の収束や写像の極限, 連続性は, 距離関数そのものよりも, 距離関数から定まる開集合からなる集合に依存する概念であるといえる. そこで, 次のような定義をする.

**定義 4.12** $X$ の開集合全体からなる集合を $X$ の位相という.

集合 $X$ に距離関数 $d$ が与えられているとき, $d$ から定まる $X$ の位相を以後 $\mathcal{O}_d$ で表すことにする.

考えている距離関数を明示する必要がある場合は, $X$ と距離関数 $d$ の対 $(X, d)$ を用いて, この対を距離空間という. 例えば $X$ に 2 種類の距離関数 $d$ と $d'$ が与えられているとき, $(X, d)$ と $(X, d')$ は距離空間としては異なるものと考える. また, 距離空間 $(X, d)$ から距離空間 $(Y, d')$ への写像を $f : (X, d) \to (Y, d')$ のように表すことがある.

次の命題は命題 1.19 の一般化であるが, 証明は命題 1.19 の証明と全く同様である.

**命題 4.13** $(X, d), (Y, d')$ を距離空間, $f$ を $X$ の部分集合 $Z$ から $Y$ の部分集合 $W$ への写像とし, $p \in X$, $q \in Y$ とする. このとき, $\lim_{x \to p} f(x) = q$ であることは, 条件「すべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_k \in Z$, $x_k \neq p$ かつ $\lim_{k \to \infty} x_k = p$」を満たす $X$ の任意の点列 $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ に対して $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = q$ が成り立つことと同値である.

**系 4.14** $(X, d), (Y, d')$ を距離空間, $f$ を $X$ から $Y$ への写像とし, $p \in X$ とする. このとき, $f$ が $p$ で連続であることは, $p$ に収束する $X$ の任意の点列 $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ に対して $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(p)$ が成り立つことと同値である.

**証明** $f$ が $p$ で連続であると仮定し, $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ を $p$ に収束する $X$ の点列とする. $x_k \neq p$ である $k$ が有限個しかないとき, $x_k \neq p$ を満たす最大の $k$ を $K$ とすれば, $k \geqq K + 1$ ならば $x_k = p$ だから $f(x_k) = f(p)$ である. 従って, この場合は明らかに $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(p)$ である. $x_k \neq p$ である $k$ が無数にあるとき, $x_k \neq p$ を満たす $k$ を小さい順に並べて, 自然数の単調増加数列 $(k_i)_{i \in \boldsymbol{N}}$ で, $\{k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots\}$ は $x_k \neq p$ を満たす $k$ 全体の集合になるものを考える. $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ は $p$ に収束するため, その部分列 $(x_{k_i})_{i \in \boldsymbol{N}}$ も $p$ に収束し, すべての $i \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_{k_i} \in Z$ かつ $x_{k_i} \neq p$ だから, 命題 4.13 によって $\lim_{i \to \infty} f(x_{k_i}) = f(p)$ が成り立つ. 故に, 任意の正の実数 $\varepsilon$ に対し, 自然数 $N$ で, 条件「$i \geqq N$ ならば $f(x_{k_i}) \in B_{d'}(f(p)\,;\varepsilon)$」を満たすものが存在するため, $k \geqq k_N$ ならば $f(x_k) \in B_{d'}(f(p)\,;\varepsilon)$ である. 実際 $k \geqq k_N$ ならば, $k = k_i$ となる自然数 $i$ がある場合は, $k_i \geqq k_N$ と $(k_i)_{i \in \boldsymbol{N}}$ が単調増加数列であることから $i \geqq N$ であるため, $f(x_k) = f(x_{k_i}) \in B_{d'}(f(p)\,;\varepsilon)$ が成り立ち, $k = k_i$ となる自然数 $i$

がない場合は, $(k_i)_{i\in \boldsymbol{N}}$ の定義から $x_k = p$ だから $f(x_k) = f(p) \in B_{d'}(f(p);\varepsilon)$ である. 従って, $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(p)$ が成り立つ.

逆に $X$ の任意の点列 $(x_k)_{k\in \boldsymbol{N}}$ に対して $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(p)$ が成り立つならば, 命題 4.13 により, $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(p)$ が成り立つため, $f$ は $p$ で連続である. □

$X$ に 2 種類の距離関数が与えられた場合, 次のことが成り立つ.

**定理 4.15** *$X$ に 2 種類の距離関数 $d$ と $d'$ が与えられているとき, 次の 4 つの命題は同値である.*

*(i)* $\mathcal{O}_{d'} \subset \mathcal{O}_d$

*(ii)* $X$ の恒等写像 $id_X : (X,d) \to (X,d')$ は連続である.

*(iii)* 任意の $p \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ で, 条件「$d(x,p) < \delta$ ならば $d'(x,p) < \varepsilon$」を満たすものがある.

*(iv)* $X$ の点列 $(x_k)_{k\in \boldsymbol{N}}$ が距離空間 $(X,d)$ で $p$ に収束すれば, $(x_k)_{k\in \boldsymbol{N}}$ は距離空間 $(X,d')$ でも $p$ に収束する.

**証明** $(i)$ が成り立つならば, 任意の $O \in \mathcal{O}_{d'}$ に対し, $id_X^{-1}(O) = O \in \mathcal{O}_d$ だから, 命題 4.11 によって $id_X : (X,d) \to (X,d')$ は連続である. $(ii)$ が成り立つならば, 任意の $O \in \mathcal{O}_{d'}$ に対し, 命題 4.11 から $O = id_X^{-1}(O)$ は $(X,d)$ の開集合であるため, $O \in \mathcal{O}_d$ である. 従って $\mathcal{O}_{d'} \subset \mathcal{O}_d$ が成り立つ.

極限と連続性の定義から, $(ii)$ と $(iii)$ は明らかに同値である.

$(ii)$ が成り立つと仮定し, $X$ の点列 $(x_k)_{k\in \boldsymbol{N}}$ が距離空間 $(X,d)$ で点 $p$ に収束するならば, 系 4.14 を $X = Y$, $f = id_X$ に対して用いると, $id_X$ の連続性から $(x_k)_{k\in \boldsymbol{N}}$ は距離空間 $(X,d')$ でも $p$ に収束するため, $(iv)$ が成り立つ. 逆に $(iv)$ が成り立てば, 再び系 4.14 を $X = Y$, $f = id_X$ に対して用いると, $id_X$ は $X$ の任意の点 $p$ で連続になるため, $(ii)$ が成り立つ. □

距離空間 $(X,d)$ と $p \in X$ に対し, $p$ に収束する $X$ の点列全体からなる集合を $\mathrm{Seq}_p(X,d)$ で表すことにすれば, 上の定理の $(iv)$ は「すべての $p \in X$ に対して $\mathrm{Seq}_p(X,d) \subset \mathrm{Seq}_p(X,d')$ である.」と同値だから, 上の定理から次の結果が得られる.

**系 4.16** *$X$ に 2 種類の距離関数 $d$ と $d'$ が与えられているとき, $\mathcal{O}_d = \mathcal{O}_{d'}$ であるためには, すべての $p \in X$ に対して $\mathrm{Seq}_p(X,d) = \mathrm{Seq}_p(X,d')$ であることが必要十分である.*

# 5 ユークリッド空間の完備性

実数の集合 $\boldsymbol{R}$ において次の定理が成り立つ. この定理を「実数の連続性」ということがある.

**定理 5.1** *上に有界な単調増加数列は収束する.*

**注意 5.2** *$(x_k)_{k\in \boldsymbol{N}}$ を $M$ を下界とする下に有界な単調減少数列とすれば, $(-x_k)_{k\in \boldsymbol{N}}$ は $-M$ を上界とする単調増加であるため, 上の定理によって $(-x_k)_{k\in \boldsymbol{N}}$ は収束する. $\lim_{k\to\infty}(-x_k) = p$ ならば, 注意 2.2 により, $\lim_{k\to\infty} x_k = -\lim_{k\to\infty}(-x_k) = -p$ である. 従って, 下に有界な単調減少数列は収束する.*

この結果を用いて, まず次のことを示す.

**定理 5.3** *閉区間 $[a,b]$ に含まれる数列は収束する部分列を含む.*

**証明** $(x_k)_{k\in \boldsymbol{N}}$ を $[a,b]$ に含まれる数列とする. そこで, $[a,b]$ に含まれる数列 $(a_j)_{j\in \boldsymbol{N}}$, $(b_j)_{j\in \boldsymbol{N}}$ で, すべての $j \in \boldsymbol{N}$ に対して, 次の条件 $(i)$〜$(iii)$ を満たすものを帰納的に定める.

$(i)$ $b_j - a_j = 2^{1-j}(b-a)$.　　$(ii)$ $x_k \in [a_j, b_j]$ となる $k$ は無限にある.　　$(iii)$ $a_j \leqq a_{j+1}$ かつ $b_{j+1} \leqq b_j$.

$a_1 = a$, $b_1 = b$ とおけば, $j = 1$ に対して $(i)$, $(ii)$ は成り立つ. $a_j$, $b_j$ が $j = 1,2,\ldots,n-1$ に対して定まり,

$j=1,2,\ldots,n-1$ に対して $(i)$, $(ii)$ が成り立ち, $j=1,2,\ldots,n-2$ に対して $(iii)$ が成り立つと仮定する．区間 $[a_{n-1},b_{n-1}]$ を二等分すれば, $(ii)$ により $\left[a_{n-1},\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right]$ と $\left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},b_{n-1}\right]$ の少なくとも一方は $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ の無限個の項を含む．そこで, $\left[a_{n-1},\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right]$ が $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ の無限個の項を含む場合は $a_n=a_{n-1}$, $b_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ によって $a_n$, $b_n$ を定め, $\left[a_{n-1},\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right]$ が $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ の無限個の項を含まない場合は $a_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$, $b_n=b_{n-1}$ によって $a_n, b_n$ を定める．このとき $j=n$ に対して $(i)$, $(ii)$ が成り立ち, $j=n-1$ に対して $(iii)$ が成り立つ．このように定めた $(a_j)_{j\in\boldsymbol{N}}$ は上に有界な単調増加数列であり, $(b_j)_{j\in\boldsymbol{N}}$ は下に有界な単調減少数列であるため, 定理 5.1 と注意 5.2 によって, これらの数列は収束する．$\lim\limits_{j\to\infty}a_j=\alpha$, $\lim\limits_{j\to\infty}b_j=\beta$ とおけば, $b_j-a_j=2^{1-j}(b-a)$ がすべての $j\in\boldsymbol{N}$ に対して成り立つため, $\beta-\alpha=\lim\limits_{j\to\infty}(b_j-a_j)=\lim\limits_{j\to\infty}2^{1-j}(b-a)=0$ より, $\alpha=\beta$ である．

各 $j\in\boldsymbol{N}$ に対して $x_{k_j}\in[a_j,b_j]$ となる $k_j$ を選び, $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ の部分列 $\left(x_{k_j}\right)_{j\in\boldsymbol{N}}$ を考えると, すべての $j\in\boldsymbol{N}$ に対して $a_j\leqq x_{k_j}\leqq b_j$ であり, $\lim\limits_{j\to\infty}a_j=\lim\limits_{j\to\infty}b_j=\alpha$ だから, 命題 1.10 の (2) によって, $\left(x_{k_j}\right)_{j\in\boldsymbol{N}}$ は収束する.□

上の定理は次のように一般化される．

**定理 5.4** *$X$ が $\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合ならば, $X$ の点列は $X$ の点に収束する部分列を含む.*

**証明** $X\subset B_n(\boldsymbol{0}\,;r)$ とし, $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を $X$ の点列とする．$(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ の部分列 $(\boldsymbol{x}_k^s)_{k\in\boldsymbol{N}}$ $(s=0,1,2,\ldots,n)$ を次のように定義する．まず $\boldsymbol{x}_k^0=\boldsymbol{x}_k$ $(k=1,2,\ldots)$ で $(\boldsymbol{x}_k^0)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を定める．帰納的に $(\boldsymbol{x}_k^{s-1})_{k\in\boldsymbol{N}}$ $(1\leqq s\leqq n)$ が定まり, $\boldsymbol{x}_k^{s-1}$ の第 $j$ 成分を $x_{kj}^{s-1}$ とすれば, 各 $j=1,2,\ldots,s-1$ に対し, 実数列 $(x_{kj}^{s-1})_{k\in\boldsymbol{N}}$ が収束すると仮定する．$\boldsymbol{x}_k\in B_n(\boldsymbol{0}\,;r)$ より $(x_{ks}^{s-1})_{k\in\boldsymbol{N}}$ は閉区間 $[-r,r]$ に含まれる数列だから, 定理 5.3 により, $(x_{is}^{s-1})_{k\in\boldsymbol{N}}$ は収束する部分列 $\left(x_{k_ls}^{s-1}\right)_{l\in\boldsymbol{N}}$ を含む．そこで $\boldsymbol{x}_l^s=\boldsymbol{x}_{k_l}^{s-1}$ とおいて $(\boldsymbol{x}_k^{s-1})_{k\in\boldsymbol{N}}$ の部分列 $(\boldsymbol{x}_l^s)_{l\in\boldsymbol{N}}$ を定めれば, $j\leqq s$ ならば $\boldsymbol{x}_l^s$ の第 $j$ 成分からなる数列は収束する．このとき, $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ の部分列 $(\boldsymbol{x}_k^n)_{k\in\boldsymbol{N}}$ の各成分からなる数列は収束するため, 命題 2.6 によって $(\boldsymbol{x}_k^n)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は収束する．その極限を $\boldsymbol{p}$ とすれば, $X$ は閉集合だから命題 3.9 により $\boldsymbol{p}\in X$ である．□

**定義 5.5** $\boldsymbol{R}^n$ の点列 $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が次の条件を満たすとき, $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ をコーシー列という．

任意の正の実数 $\varepsilon$ に対して自然数 $N$ で,「$k,l\geqq N$ ならば $d_n(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_l)<\varepsilon$」を満たすものがある．

**注意 5.6** *$(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を $\boldsymbol{p}$ に収束する $\boldsymbol{R}^n$ の点列とすれば, 任意の正の実数 $\varepsilon$ に対して自然数 $N$ で, 条件「$k\geqq N$ ならば $d_n(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{p})<\frac{\varepsilon}{2}$」を満たすものがある．$k,l\geqq N$ ならば, 命題 1.6 の (1), (3) から $d_n(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_l)\leqq d_n(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{p})+d_n(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}_l)=d_n(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{p})+d_n(\boldsymbol{x}_l,\boldsymbol{p})<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ より $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ はコーシー列である．従って, 収束する点列はコーシー列である.*

**補題 5.7** *(1) コーシー列は有界である.*

*(2) コーシー列が収束する部分列を含めば, そのコーシー列は収束する.*

**証明** $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ をコーシー列とする．

(1) コーシー列の定義により, 自然数 $N$ で,「$k,l\geqq N$ ならば $d_n(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_l)<1$」を満たすものがある．そこで, $\|\boldsymbol{x}_1\|,\|\boldsymbol{x}_2\|,\ldots,\|\boldsymbol{x}_N\|$ のうちで最大のものを $R$ とすれば, すべての $k\in\boldsymbol{N}$ に対して $\boldsymbol{x}_k\in B_n(\boldsymbol{0},R+1)$ が成り立つ．実際 $k\leqq N$ ならば $\|\boldsymbol{x}_k\|\leqq R<R+1$ であり, $k>N$ ならば, 三角不等式より $\|\boldsymbol{x}_k\|=d_n(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{0})\leqq d_n(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_N)+d_n(\boldsymbol{x}_N,\boldsymbol{0})<1+R$ である．従って $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は有界である．

(2) $\left(\boldsymbol{x}_{k_j}\right)_{j\in\boldsymbol{N}}$ を $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ の収束する部分列とする．$\lim\limits_{j\to\infty}\boldsymbol{x}_{k_j}=\boldsymbol{p}$ とおくと, 任意の正の実数 $\varepsilon$ に対して, 自然数 $N_1$ で,「$j\geqq N_1$ ならば $d_n\left(\boldsymbol{x}_{k_j},\boldsymbol{p}\right)<\frac{\varepsilon}{2}$」を満たすものがある．また, $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ がコーシー列であることから, 自然数 $N_2$ で,「$k,l\geqq N_2$ ならば $d_n(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_l)<\frac{\varepsilon}{2}$」を満たすものがある．$k_{N_1}$ と $N_2$ の大きい方を $N$ とする．$k\geqq N$ ならば $k_N\geqq N\geqq N_2$ だから, 三角不等式により $d_n(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{p})\leqq d_n\left(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k_j}\right)+d_n\left(\boldsymbol{x}_{k_j},\boldsymbol{p}\right)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ が得られる．故に $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は収束する．□

定理 5.4 の応用として, 次の定理を示す．この定理の主張は $\boldsymbol{R}^n$ の完備性と呼ばれる．

**定理 5.8** $\boldsymbol{R}^n$ のコーシー列は収束する.

**証明** $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ をコーシー列とする. 補題 5.7 の (1) により, $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は有界であるため, 正の実数 $r$ で, すべての $k\in\boldsymbol{N}$ に対して $\boldsymbol{x}_k\in B_n(\boldsymbol{0}\,;r)$ となるものがある. $B_n(\boldsymbol{0}\,;r)\subset\overline{B}_n(\boldsymbol{0}\,;r)$ であり, 例 3.6 によって $\overline{B}_n(\boldsymbol{0}\,;r)$ は有界閉集合だから, 定理 5.4 により $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は収束する部分列を含む. 従って補題 5.7 の (2) により, $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は収束する. □

定理 5.1 から, 次の定理が示される.

**定理 5.9** $X$ が $\boldsymbol{R}$ の空でない上に有界な部分集合であるとき, $X$ の上界全体からなる集合は最小元をもつ.

**証明** $X$ の上界全体からなる集合を $U$ とおく. まず $a\in X$, $b\in U$ を選び, 数列 $(a_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$, $(b_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ で, すべての $k\in\boldsymbol{N}$ に対して, 次の条件 $(i)$〜$(iii)$ を満たすものを帰納的に定める.

$(i)$ $b_k-a_k\leqq 2^{1-k}(b-a)$. $(ii)$ $a_k\in X$ かつ $b_k\in U$. $(iii)$ $a_k\leqq a_{k+1}$ かつ $b_{k+1}\leqq b_k$.

$a_1=a$, $b_1=b$ とおけば, $k=1$ に対して $(i)$, $(ii)$ は成り立つ. $a_k$, $b_k$ が $k=1,2,\dots,n-1$ に対して定まり, $k=1,2,\dots,n-1$ に対して $(i)$, $(ii)$ が成り立ち, $k=1,2,\dots,n-2$ に対して $(iii)$ が成り立つと仮定する. $\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\in U$ ならば $a_n=a_{n-1}$, $b_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ によって $a_n$, $b_n$ を定める. この場合は $b_n-a_n=\dfrac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}\leqq 2^{1-n}(b-a)$ だから $k=n$ に対して $(i)$ が成り立ち, $k=n$ に対して $(ii)$ が成り立つことと, $k=n-1$ に対して $(iii)$ が成り立つことは明らかである. $\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\notin U$ ならば $\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ より大きな $X$ の要素が存在するため, そのようなものを 1 つ選んで, それを $a_n$ とし, $b_n=b_{n-1}$ によって $a_n$, $b_n$ を定める. $a_n>\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ だから, この場合も $b_n-a_n<\dfrac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}\leqq 2^{1-n}(b-a)$ だから $k=n$ に対して $(i)$ が成り立ち, $k=n$ に対して $(ii)$ が成り立つことと, $k=n-1$ に対して $(iii)$ が成り立つことは明らかである. このように定めた $(a_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は上に有界な単調増加数列であり, $(b_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は下に有界な単調減少数列であるため, 定理 5.1 と注意 5.2 によって, これらの数列は収束する. $\displaystyle\lim_{k\to\infty}a_k=\alpha$, $\displaystyle\lim_{k\to\infty}b_k=\beta$ とおけば, $0\leqq b_k-a_k\leqq 2^{1-k}(b-a)$ がすべての $k\in\boldsymbol{N}$ に対して成り立つため, $\displaystyle\lim_{k\to\infty}2^{1-k}(b-a)=0$ と命題 1.10 の (2) より, $\alpha=\beta$ である.

$\alpha$ が $X$ の上界でないとすれば, $c>\alpha$ となる $c\in X$ が存在する. $(b_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は単調に減少して $\alpha$ に収束するため, $\alpha\leqq b_{k_0}<c$ となる自然数 $k_0$ が存在するが, これは各 $b_k$ が $X$ の上界であることに矛盾する. よって $\alpha$ は $X$ の上界である. もし $\alpha$ より小さい $\gamma\in U$ が存在すれば, $(a_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は単調に増加して $\alpha$ に収束するため, $\gamma\leqq a_{k_1}<\alpha$ となる自然数 $k_1$ が存在するが, これは $\gamma$ が $X$ の上界であると仮定したことに矛盾する. 故に $\alpha$ は $U$ の最小元である. □

**定義 5.10** $\boldsymbol{R}$ の空でない上に有界な部分集合 $X$ に対し, $X$ の上界全体からなる集合の最小元を $X$ の上限といい $\sup X$ で表す. また, $\boldsymbol{R}$ の空でない下に有界な部分集合 $Y$ に対し, $Y$ の下界全体からなる集合の最大元を $X$ の下限といい $\inf Y$ で表す.

定理 5.4 のもう一つの応用として,「最大値・最小値の定理」と呼ばれる, 次の定理を示す.

**定理 5.11** $X$ が $\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合ならば, $X$ で定義された連続な実数値関数は最大値と最小値をもつ.

**証明** もし $f$ の像 $\{y\in\boldsymbol{R}|\, f(\boldsymbol{x})=y$ を満たす $\boldsymbol{x}\in X$ がある.$\}$ が上に有界でないとすれば, 任意の自然数 $k$ に対して $f(\boldsymbol{x}_k)>k$ を満たす $\boldsymbol{x}_k\in X$ がある. 定理 5.4 により, $X$ の点列 $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は収束する部分列 $\left(\boldsymbol{x}_{k_j}\right)_{j\in\boldsymbol{N}}$ をもつ. $\displaystyle\lim_{j\to\infty}\boldsymbol{a}_{k_j}=\boldsymbol{p}$ とおけば, $f$ の連続性と命題 1.19 により $\displaystyle\lim_{j\to\infty}f(\boldsymbol{x}_{k_j})=f(\boldsymbol{p})$ が成り立つ. 一方 $f\left(\boldsymbol{x}_{k_j}\right)>k_j\geqq j$ となるため, 実数列 $\left(f\left(\boldsymbol{x}_{k_j}\right)\right)_{j\in\boldsymbol{N}}$ は収束しないため, 矛盾が生じた. 故に $f$ の像 $\{y\in\boldsymbol{R}|\, f(\boldsymbol{x})=y$ を満たす $\boldsymbol{x}\in X$ がある.$\}$ は上に有界となるため, 定理 5.9 から, 上限が存在する. この上限を $M$ とすれば, 任意の自然数 $l$ に対して $f(\boldsymbol{y}_l)>M-\frac{1}{l}$ を満たす $\boldsymbol{y}_l\in X$ がある. 再び定理 5.4 により, $X$ の点列 $(\boldsymbol{y}_l)_{l\in\boldsymbol{N}}$ は収束する部分列 $(\boldsymbol{x}_{l_i})_{i\in\boldsymbol{N}}$ をもつ. $\displaystyle\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{y}_{l_i}=\boldsymbol{q}$ とおけば, $f$ の連続性により $\displaystyle\lim_{i\to\infty}f\left(\boldsymbol{y}_{l_i}\right)=f(\boldsymbol{q})$ が成り立つ. 一方 $M-\frac{1}{i}\leqq M-\frac{1}{l_i}<f\left(\boldsymbol{b}_{l_i}\right)\leqq M$ となるため, 実数列 $\left(f\left(\boldsymbol{y}_{l_i}\right)\right)_{i\in\boldsymbol{N}}$ は $M$ に収束する. 従って $M=f(\boldsymbol{q})$ を満たす $\boldsymbol{q}\in X$ があるため, $M$ は $f$ の最大値である. 同様にして $f$ の最小値の存在も示される. □

# 演習問題

1. 次の極限が存在する場合はその値を求め, 存在しない場合はその理由を答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{2}{1}} \frac{\cos(\pi xy)}{1+2xy}$ (2) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{e^y\sin(xy)}{xy}$ (3) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^3-3xy}{x^2+y^2}$ (5) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{2x^3-y^3}{4x^2+y^2}$ (6) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

(7) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{\sqrt{x^4+2y^4}}{x^2+y^2}$ (8) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^3+y^4}{x^2+4y^2}$ (9) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2}$

(10) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy}{x^4+y^2}$ (11) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy^3}{x^2+y^4}$ (12) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(13) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$ (14) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$ (15) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$

(16) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$ (17) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (18) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} (x^2+y^2)\log(x^2+y^2)$

2. 前問の問 $(n)$ $(n=3,4,\dots,18)$ で極限を考えた, $\boldsymbol{R}^2$ から原点を除いた集合で定義される関数を $f_n$ とする. (例えば, $f_3$ は $f_3\binom{x}{y}=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ で与えられる関数.) 関数 $\bar{f}_n:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を

$$\bar{f}_n\binom{x}{y}=\begin{cases} f_n\binom{x}{y} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0} \\ 0 & \binom{x}{y}=\binom{0}{0} \end{cases}$$

で定めるとき, 各 $n=3,4,\dots,18$ について, $\bar{f}_n$ の原点における連続性について調べよ.

3. (発展問題) (1) $\boldsymbol{R}^2$ で定義される関数 $\bar{f}_2$ を

$$\bar{f}_2\binom{x}{y}=\begin{cases} \dfrac{e^y\sin(xy)}{xy} & xy\neq 0 \\ e^y & xy=0 \end{cases}$$

で定義するとき, 集合 $\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, xy=0\right\}$ の各点における $\bar{f}_2$ の連続性について調べよ.

(2) $\boldsymbol{R}^2$ で定義される関数 $\bar{f}_1$ を

$$\bar{f}_1\binom{x}{y}=\begin{cases} \dfrac{\cos(\pi xy)}{1+2xy} & xy\neq -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} & xy=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

で定義するとき, 集合 $\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, xy=-\frac{1}{2}\right\}$ の各点における $\bar{f}_1$ の連続性について調べよ.

4. (発展問題) $m$, $n$, $p$, $q$, $r$ を正の実数とし, 関数 $f:\left\{\binom{x}{y}\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x>0,\ y>0\right\}\to\boldsymbol{R}$ を

$$f\binom{x}{y}=mx+ny-r\min\{px,qy\}-\min\{x,y\}$$

で定める. このとき, $f$ が負の値をとるための必要十分条件を求めよ.

5. (発展問題) $m$, $n$, $p$, $q$, $r$ を正の実数とする. $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{|x|^m|y|^n}{(|x|^p+|y|^q)^r\sqrt{x^2+y^2}}=0$ が成り立つための必要十分条件を求めよ.

## 演習問題の解答

1. (1) $f:\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\, xy\neq-\frac{1}{2}\right\}\to\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$, $g:\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\infty\right)\to\boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=xy$, $g(t)=\dfrac{\cos(\pi t)}{1+2t}$ で定めれば, $f$, $g$ はともに連続関数 だから, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)}\frac{\cos(\pi xy)}{1+2xy}=\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)}g(f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right))=$ $\displaystyle g\left(\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)}f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right)=g(f\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right))=g(2)=\frac{1}{5}$.

(2) $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$, $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=xy$, $g(t)=\begin{cases}\frac{\sin t}{t} & t\neq 0\\ 1 & t=0\end{cases}$ で定めれば, 明らかに $f$ は連続関数であり, $\displaystyle\lim_{t\to0}g(t)=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1=g(0)$ より, $g$ は $0$ で連続である. 従って $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{\sin(xy)}{xy}=\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}g(f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right))=$ $\displaystyle g\left(\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right)=g(0)=1$ となるため, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{e^y\sin(xy)}{xy}=\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}e^y\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{\sin(xy)}{xy}=1$.

(3) $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ が存在すると仮定して, この値を $c$ とおき, 関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\\ c & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\end{cases}$ で定めると, $f$ は $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で連続である. 従って, $\displaystyle\lim_{t\to0}g(t)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ を満たす任意の写像 $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ に対して, $\displaystyle\lim_{t\to0}f(g(t))=f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=c$ となるはずである. ところが, 実数 $k$ に対し, $g$ を $g(t)=\left(\begin{smallmatrix}t\\kt\end{smallmatrix}\right)$ で定めれば, $\displaystyle\lim_{t\to0}f(g(t))=\lim_{t\to0}\frac{t^2-k^2t^2}{t^2+k^2t^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}$ となり, $\displaystyle\lim_{t\to0}f(g(t))$ が $\displaystyle\lim_{t\to0}g(t)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ を満たす写像 $g$ に依存しない値 $c$ であることと矛盾する. 故に, 極限値 $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ は存在しない.

(4) $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{x^3-3xy}{x^2+y^2}$ が存在すると仮定して, この値を $c$ とおき, 関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{cases}\frac{x^3-3xy}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\\ c & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\end{cases}$ で定めると, $f$ は $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で連続である. 従って, $\displaystyle\lim_{t\to0}g(t)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ を満たす任意の写像 $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ に対して, $\displaystyle\lim_{t\to0}f(g(t))=f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=c$ となるはずである. ところが, 実数 $k$ に対し, $g$ を $g(t)=\left(\begin{smallmatrix}t\\kt\end{smallmatrix}\right)$ で定めれば, $\displaystyle\lim_{t\to0}f(g(t))=\lim_{t\to0}\frac{t^3-3kt^2}{t^2+k^2t^2}=\lim_{t\to0}\frac{t-3k}{1+k^2}=\frac{-3k}{1+k^2}$ となり, $\displaystyle\lim_{t\to0}f(g(t))$ が $\displaystyle\lim_{t\to0}g(t)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ を満たす写像 $g$ に依存しない値 $c$ であることと矛盾する. 故に, 極限値 $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{x^3-xy}{x^2+y^2}$ は存在しない.

(5) $x^2\leqq 4x^2+y^2$, $y^2\leqq 4x^2+y^2$ より, $|2x^3|\leqq 2|x|(4x^2+y^2)$, $|y^3|\leqq|y|(4x^2+y^2)$ である. よって $|2x^3-y^3|\leqq|2x^3|+|y^3|\leqq(2|x|+|y|)(4x^2+y^2)$ となるため, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ ならば $\left|\dfrac{2x^3-y^3}{4x^2+y^2}\right|\leqq 2|x|+|y|$ が成り立つ. ここで, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ のとき, $2|x|+|y|\to0$ だから, 上の不等式から, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{2x^3-y^3}{4x^2+y^2}=0$ である.

(6) $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ が存在すると仮定して, この値を $c$ とおき, 関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\\ c & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\end{cases}$ で定めると, $f$ は $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ で連続である. 従って, $\displaystyle\lim_{t\to0}g(t)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ を満たす任意の写像 $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ に対して $\displaystyle\lim_{t\to0}f(g(t))=f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=c$ となるはずである. ところが, 実数 $k$ に対し, $g$ を $g(t)=\left(\begin{smallmatrix}kt^2\\t\end{smallmatrix}\right)$ で定めれば, $\displaystyle\lim_{t\to0}f(g(t))=\lim_{t\to0}\frac{kt^4}{k^2t^4+t^4}=\frac{k}{k^2+1}$ となり, $\displaystyle\lim_{t\to0}f(g(t))$ が $\displaystyle\lim_{t\to0}g(t)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ を満たす写像 $g$ に依存しない値 $c$ であることと矛盾する. 故に, 極限値 $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ は存在しない.

(7) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{\sqrt{x^4+2y^4}}{x^2+y^2}$ が存在すると仮定して, この値を $c$ とおき, 関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y}=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^4+2y^4}}{x^2+y^2} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}\\ c & \binom{x}{y}=\binom{0}{0}\end{cases}$ で定めると, $f$ は $\binom{0}{0}$ で連続である. 従って, $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(t)=\binom{0}{0}$ を満たす任意の写像 $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ に対して, $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(g(t))=f\binom{0}{0}=c$ となるはずである. ところが, 実数 $k$ に対し, $g$ を $g(t)=\binom{t}{kt}$ で定めれば, $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(g(t))=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^4+2k^4t^4}}{t^2+k^2t^2}=\frac{\sqrt{1+2k^4}}{1+k^2}$ となり, $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(g(t))$ が $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(t)=\binom{0}{0}$ を満たす写像 $g$ に依存しない値 $c$ であることと矛盾する. 故に, 極限値 $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{\sqrt{x^4+2y^4}}{x^2+y^2}$ は存在しない.

(8) $x^2\leqq x^2+4y^2$, $y^2\leqq x^2+4y^2$ より, $|x^3|\leqq |x|(x^2+4y^2)$, $|y^4|\leqq y^2(x^2+4y^2)$ である. よって $|x^3+y^4|\leqq |x^3|+|y^4|\leqq (|x|+y^2)(x^2+4y^2)$ となるため, $\binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}$ ならば $\left|\dfrac{x^3+y^4}{x^2+4y^2}\right|\leqq |x|+y^2$ が成り立つ. ここで, $\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}$ のとき, $|x|+y^2\to 0$ だから, 上の不等式から, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^3+y^4}{x^2+4y^2}=0$ である.

(9) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2}$ が存在すると仮定して, この値を $c$ とおき, 関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y}=\begin{cases}\frac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}\\ c & \binom{x}{y}=\binom{0}{0}\end{cases}$ で定めると, $g$ は $\binom{0}{0}$ で連続である. 従って, $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(t)=\binom{0}{0}$ を満たす任意の写像 $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ に対して, $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(g(t))=f\binom{0}{0}=c$ となるはずである. ところが, 実数 $k$ に対し, $g$ を $g(t)=\binom{t}{kt}$ で定めれば, $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(g(t))=\lim_{t\to 0}\frac{t^2-2k^2t^2}{3t^2+k^2t^2}=\frac{1-2k^2}{3+k^2}$ となり, $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(g(t))$ が $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(t)=\binom{0}{0}$ を満たす写像 $g$ に依存しない値 $c$ であることと矛盾する. 故に, 極限値 $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2}$ は存在しない.

(10) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy}{x^4+y^2}$ が存在すると仮定して, この値を $c$ とおき, 関数 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y}=\begin{cases}\frac{xy}{x^4+y^2} & \binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}\\ c & \binom{x}{y}=\binom{0}{0}\end{cases}$ で定めると, $f$ は $\binom{0}{0}$ で連続である. 従って, $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(t)=\binom{0}{0}$ を満たす任意の写像 $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ に対して, $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(g(t))=f\binom{0}{0}=c$ となるはずである. ところが, 実数 $k$ に対し, $g$ を $g(t)=\binom{t}{kt^3}$ で定めれば, $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(g(t))=\lim_{t\to 0}\frac{kt^4}{t^4+k^2t^6}=\lim_{t\to 0}\frac{k}{1+k^2t^2}=k$ となり, $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(g(t))$ が $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(t)=\binom{0}{0}$ を満たす写像 $g$ に依存しない値 $c$ であることと矛盾する. 故に, 極限値 $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy}{x^4+y^2}$ は存在しない.

(11) (相加平均) $\geqq$ (相乗平均) より $\dfrac{x^2+y^4}{2}\geqq\sqrt{x^2y^4}=|x|y^2$. よって $\binom{x}{y}\neq\binom{0}{0}$ ならば $\dfrac{|x|y^2}{x^2+y^4}\leqq\dfrac{1}{2}$ となるため, $\left|\dfrac{2xy^3}{x^2+y^4}\right|\leqq\dfrac{|y|}{2}$ が成り立つ. ここで, $\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}$ のとき, $|y|\to 0$ だから, 上の不等式から, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy^3}{x^2+y^4}=0$ である.

(12) $\left|\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqq 1$ だから $\left|xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqq |xy|$ である. ここで, $\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}$ のとき, $|xy|\to 0$ だから, 上の不等式から, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ である.

(13) $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$, $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y}=x^2+y^2$, $g(t)=\begin{cases}\frac{e^t-1}{t} & t\neq 0\\ 1 & t=0\end{cases}$ で定めれば, 明らかに $f$ は連続関数であり, $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(t)=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1=g(0)$ より, $g$ は $0$ で連続である. 従って $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}=$

$\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} g(f\binom{x}{y}) = g\left(\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f\binom{x}{y}\right) = g(0) = 1$ である.

(14) $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$ が存在すると仮定して, この値を $c$ とおき, 関数 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y} = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x^2+y^2} & \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ c & \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$ で定めると, $f$ は $\binom{0}{0}$ で連続である. 従って, $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(t) = \binom{0}{0}$ を満たす任意の写像 $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ に対して, $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(g(t)) = f\binom{0}{0} = c$ となるはずである. ところが, 0 でない実数 $k$ に対し, $g$ を $g(t) = \binom{t}{kt}$ で定めれば, $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(g(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(kt^2)}{t^2+k^2t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(kt^2)}{kt^2}\frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}$ となり, $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(g(t))$ が $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(t) = \binom{0}{0}$ を満たす写像 $g$ に依存しない値 $c$ であることと矛盾する. 故に, 極限値 $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$ は存在しない.

(15) $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y} = \sqrt{x^2+y^2}$, $g(t) = \begin{cases} \frac{1-\cos t}{t^2} & t \neq 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \end{cases}$ で定めれば, 明らかに $f$ は連続関数であり, 教科書の例題 2.7 の (2) により, $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2} = g(0)$ より, $g$ は 0 で連続である. 従って $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} g(f\binom{x}{y}) = g\left(\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f\binom{x}{y}\right) = g(0) = \frac{1}{2}$ である.

(16) (相加平均) $\geqq$ (相乗平均) より $\displaystyle\frac{x^2+y^4}{2} \geqq \sqrt{x^2y^4} = |x|y^2$. よって $\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$ ならば $\displaystyle\frac{|x|y^2}{x^2+y^4} \leqq \frac{1}{2}$ となるため, $\displaystyle 0 \leqq \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} \leqq \frac{|x|}{2}$ が成り立つ. ここで, $\binom{x}{y} \to \binom{0}{0}$ のとき, $|x| \to 0$ だから, 上の不等式から, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} = 0$ である.

(17) $x^2 \leqq x^2+y^2$, $y^2 \leqq x^2+y^2$ より, 両辺の平方根をとれば $|x| \leqq \sqrt{x^2+y^2}$, $|y| \leqq \sqrt{x^2+y^2}$ である. これらの両辺はともに 0 以上だから辺々かけあわせて $|xy| \leqq x^2+y^2$ が得られる. さらにこの両辺を $\sqrt{x^2+y^2}$ で割れば, $\displaystyle\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqq \sqrt{x^2+y^2}$ を得る. ここで, $\binom{x}{y} \to \binom{0}{0}$ のとき, $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$ だから, 上の不等式から, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ である.

(18) $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $f\binom{x}{y} = x^2+y^2$, $g(t) = \begin{cases} t\log|t| & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$ で定めれば, 明らかに $f$ 連続関数であり, 教科書の問 2.11 より $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} t\log|t| = 0 = g(0)$ だから, $g$ は 0 で連続である. 従って $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} (x^2+y^2)\log(x^2+y^2) = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} g(f\binom{x}{y}) = g\left(\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f\binom{x}{y}\right) = g(0) = 0$ である.

2. (3) 前問の (3) より, 極限値 $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \bar{f}_3\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f_3\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ は存在しないため, $\bar{f}_3$ は原点で連続ではない.

(4) 前問の (4) より, 極限値 $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \bar{f}_4\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f_4\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{x^3-xy}{x^2+y^2}$ は存在しないため, $\bar{f}_4$ は原点で連続ではない.

(5) 前問の (5) より, $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \bar{f}_5\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f_5\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{2x^3-y^3}{4x^2+y^2} = 0 = \bar{f}_5\binom{0}{0}$ となるため, $\bar{f}_5$ は原点で連続である.

(6) 前問の (6) より, 極限値 $\displaystyle\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \bar{f}_6\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} f_6\binom{x}{y} = \lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ は存在しないため, $\bar{f}_6$ は原点で連続ではない.

(7) 前問の (7) より, 極限値 $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \bar{f}_7\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} f_7\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \frac{\sqrt{x^4+2y^4}}{x^2+y^2}$ は存在しないため, $\bar{f}_7$ は原点で連続ではない.

(8) 前問の (8) より, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \bar{f}_8\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} f_8\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \frac{x^3+y^4}{x^2+4y^2} = 0 = \bar{f}_8\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ となるため, $\bar{f}_8$ は原点で連続である.

(9) 前問の (9) より, 極限値 $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \bar{f}_9\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} f_9\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \frac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2}$ は存在しないため, $\bar{f}_9$ は原点で連続ではない.

(10) 前問の (10) より, 極限値 $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \bar{f}_{10}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} f_{10}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \frac{xy}{x^4+y^2}$ は存在しないため, $\bar{f}_{10}$ は原点で連続ではない.

(11) 前問の (11) より, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \bar{f}_{11}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} f_{11}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \frac{xy^3}{x^2+y^4} = 0 = \bar{f}_{11}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ となるため, $\bar{f}_{11}$ は原点で連続である.

(12) 前問の (12) より, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \bar{f}_{12}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} f_{12}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = \bar{f}_{12}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ となるため, $\bar{f}_{12}$ は原点で連続である.

(13) 前問の (13) より, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \bar{f}_{13}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} f_{13}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} = 1 \neq 0 = \bar{f}_{13}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ となるため, $\bar{f}_{13}$ は原点で連続ではない.

(14) 前問の (14) より, 極限値 $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \bar{f}_{14}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} f_{14}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$ は存在しないため, $\bar{f}_{14}$ は原点で連続ではない.

(15) 前問の (15) より, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \bar{f}_{15}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} f_{15}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = \bar{f}_{15}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ となるため, $\bar{f}_{15}$ は原点で連続ではない.

(16) 前問の (16) より, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \bar{f}_{16}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} f_{16}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} = 0 = \bar{f}_{16}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ となるため, $\bar{f}_{16}$ は原点で連続である.

(17) 前問の (17) より, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \bar{f}_{17}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} f_{17}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = \bar{f}_{17}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ となるため, $\bar{f}_{17}$ は原点で連続である.

(18) 前問の (18) より, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} \bar{f}_{18}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} f_{18}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \lim_{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)} (x^2+y^2)\log(x^2+y^2) = 0 = \bar{f}_{18}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ となるため, $\bar{f}_{18}$ は原点で連続である.

3. (1) 関数 $f$, $g$ を 1 の (2) のように定めれば, これらは連続関数だから, 合成関数 $g\circ f$ も連続関数である. また, 関数 $p : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ をそれぞれ $p\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = y$, $h(t) = e^t$ で定めれば, $p$, $h$ はともに連続関数であるため, 合成関数 $h\circ p$ も連続関数である. さらに, 任意の $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2$ に対して $\bar{f}_2\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = (h\circ p)\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)(g\circ f)\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ が成り立ち, $\bar{f}_2$ は連続関数の $h\circ p$ と $g\circ f$ の積であるため, $\bar{f}_2$ は連続関数ある. 従って $\bar{f}_2$ は $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, xy = 0\right\}$ の各点で連続である.

(2) $s = 1 + 2t$ とおくと, $t = \dfrac{s-1}{2}$ であり, $t \to -\dfrac{1}{2}$ のとき $s \to 0$ だから $\displaystyle\lim_{t\to-\frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi t)}{1+2t} = \lim_{s\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi(s-1)}{2}\right)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{\pi}{2} \frac{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{\frac{\pi s}{2}} = \frac{\pi}{2}$ が成り立つ. 従って $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $g(t) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi t)}{1+2t} & t \neq -\frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{2} & t = -\frac{1}{2} \end{cases}$ で定めれば, $g$ は連続関数である. さらに $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = xy$ で定めれば, $f$ は連続関数であり, $\bar{f}_1 = g\circ f$ が成り立つ. 従って $\bar{f}_1$ は連続関数の合成だから連続関数になるため, $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, xy = -\frac{1}{2}\right\}$ の各点で連続である.

4. まず $p \geqq q$ の場合について考える. $X, Y, Z$ を $X = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R} |\ 0 < y \leqq x\}, Y = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R} |\ 0 < x \leqq y,\ px \geqq qy\}$, $Z = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R} |\ 0 < px \leqq qy\}$ によって定めると, 次の等式が成り立つ.

$$f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} mx + (n - qr - 1)y & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in X \\ (m-1)x + (n - qr)y & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in Y \\ (m - pr - 1)x + ny & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in Z \end{cases}$$

$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in X$ ならば $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \geqq f\left(\begin{smallmatrix} y \\ y \end{smallmatrix}\right) = (m + n - qr - 1)y$ だから $X$ の点で $f$ が $0$ 以下の値をとるためには $\dfrac{m}{q} + \dfrac{n}{q} - \dfrac{1}{q} \leqq r$ であることが必要十分である.

$n \leqq qr$ の場合, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in Y$ ならば $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \geqq f\left(\begin{smallmatrix} x \\ \frac{px}{q} \end{smallmatrix}\right) = \left(m + \dfrac{np}{q} - pr - 1\right)x$ だから $Y$ の点で $f$ が $0$ 以下の値をとるためには $\dfrac{m}{p} + \dfrac{n}{q} - \dfrac{1}{p} \leqq r$ であることが必要十分である.

$m \leqq 1$ の場合, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in Y$ ならば $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \geqq f\left(\begin{smallmatrix} y \\ y \end{smallmatrix}\right) = (m + n - qr - 1)y$ だから $Y$ の点で $f$ が $0$ 以下の値をとるためには $\dfrac{m}{q} + \dfrac{n}{q} - \dfrac{1}{q} \leqq r$ であることが必要十分である.

$n > qr$ かつ $m > 1$ の場合は $Y$ において $f$ は常に正の値をとる.

$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in Z$ ならば $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \geqq f\left(\begin{smallmatrix} x \\ \frac{px}{q} \end{smallmatrix}\right) = \left(m + \dfrac{np}{q} - pr - 1\right)x$ だから $Z$ の点で $f$ が $0$ 以下の値をとるためには $\dfrac{m}{p} + \dfrac{n}{q} - \dfrac{1}{p} \leqq r$ であることが必要十分である.

以上から, $p \geqq q$ の場合, $\min\left\{\dfrac{m}{q} + \dfrac{n}{q} - \dfrac{1}{q}, \dfrac{m}{p} + \dfrac{n}{q} - \dfrac{1}{p}\right\} \leqq r$ であることが, $f$ が負の値をとるための必要十分条件である. 同様に, $p \leqq q$ の場合, $\min\left\{\dfrac{m}{p} + \dfrac{n}{p} - \dfrac{1}{p}, \dfrac{m}{p} + \dfrac{n}{q} - \dfrac{1}{q}\right\} \leqq r$ であることが, $f$ が負の値をとるための必要十分条件である.

5. $t > 0$, $x = t^{\frac{1}{p}}$, $y = t^{\frac{1}{q}}$ とすれば

$$\frac{|x|^m |y|^n}{(|x|^p + |y|^q)^r \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{t^{\frac{m}{p} + \frac{n}{q} - r}}{2^r \sqrt{t^{\frac{2}{p}} + t^{\frac{2}{q}}}} = \frac{t^{\frac{m}{p} + \frac{n}{q} - \frac{1}{p} - r}}{2^r \sqrt{1 + t^{\frac{2}{q} - \frac{2}{p}}}} = \frac{t^{\frac{m}{p} + \frac{n}{q} - \frac{1}{q} - r}}{2^r \sqrt{t^{\frac{2}{p} - \frac{2}{q}} + 1}}$$

が成り立つため「$p \geqq q$ かつ $\dfrac{m}{p} + \dfrac{n}{q} - \dfrac{1}{p} \leqq r$」または「$p \leqq q$ かつ $\dfrac{m}{p} + \dfrac{n}{q} - \dfrac{1}{q} \leqq r$」ならば $t \to +0$ のとき, $\dfrac{t^{\frac{m}{p} + \frac{n}{q} - r}}{2^r \sqrt{t^{\frac{2}{p}} + t^{\frac{2}{q}}}}$ は $0$ に収束しない. また, $t > 0$, $x = y = t$ とすれば

$$\frac{|x|^m |y|^n}{(|x|^p + |y|^q)^r \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{t^{m+n-1}}{\sqrt{2}(t^p + t^q)^r} = \frac{t^{m+n-qr-1}}{\sqrt{2}(t^{p-q} + 1)^r} = \frac{t^{m+n-pr-1}}{\sqrt{2}(1 + t^{q-p})^r}$$

が成り立つため「$p \geqq q$ かつ $\dfrac{m}{q} + \dfrac{n}{q} - \dfrac{1}{q} \leqq r$」または「$p \leqq q$ かつ $\dfrac{m}{p} + \dfrac{n}{p} - \dfrac{1}{p} \leqq r$」ならば $t \to +0$ のとき, $\dfrac{t^{m+n-1}}{\sqrt{2}(t^p + t^q)^r}$ は $0$ に収束しない. 以上から,「$p \geqq q$ かつ $\min\left\{\dfrac{m}{p} + \dfrac{n}{q} - \dfrac{1}{p}, \dfrac{m}{q} + \dfrac{n}{q} - \dfrac{1}{q}\right\} \leqq r$」または「$p \leqq q$ かつ $\min\left\{\dfrac{m}{p} + \dfrac{n}{q} - \dfrac{1}{q}, \dfrac{m}{p} + \dfrac{n}{p} - \dfrac{1}{p}\right\} \leqq r$」ならば $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{|x|^m |y|^n}{(|x|^p + |y|^q)^r \sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0$ である.

$\max\{|x|, |y|\} \leqq \sqrt{x^2 + y^2}$ と $\max\{|x|^{pr}, |y|^{qr}\} \leqq (|x|^p + |y|^q)^r$ から, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ならば, 次の不等式が成り立つ.

$$0 \leqq \frac{|x|^m |y|^n}{(|x|^p + |y|^q)^r \sqrt{x^2 + y^2}} \leqq \frac{|x|^m |y|^n}{\max\{|x|, |y|\} \max\{|x|^{pr}, |y|^{qr}\}} \quad \cdots (i)$$

$p \geqq q$ の場合, $x, y \in (-1,1)$ ならば

$$\max\{|x|,|y|\}\max\{|x|^{pr},|y|^{qr}\} = \begin{cases} |x|^{pr+1} & |x|^p \geqq |y|^q \\ |x||y|^{qr} & |x| \geqq |y|,\ |x|^p \leqq |y|^q \\ |y|^{qr+1} & |x| \leqq |y| \end{cases}$$

であるため, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ かつ $x, y \in (-1,1)$ ならば, 次の不等式が成り立つ.

$$\frac{|x|^m|y|^n}{\max\{|x|,|y|\}\max\{|x|^{pr},|y|^{qr}\}} \leqq \begin{cases} |x|^{m-\frac{np}{q}-pr-1} & |x|^p \geqq |y|^q \\ |y|^{m+n-qr-1} & |x| \geqq |y|,\ |x|^p \leqq |y|^q,\ m \leqq 1 \\ |x|^{m+\frac{np}{q}-pr-1} & |x| \geqq |y|,\ |x|^p \leqq |y|^q,\ n \leqq qr \\ |x|^{m-1}|y|^{n-qr} & |x| \geqq |y|,\ |x|^p \leqq |y|^q,\ m > 1,\ n > qr \\ |y|^{m+n-qr-1} & |x| \leqq |y| \end{cases}$$

故に, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ かつ $x, y \in (-1,1)$ を満たす $x$, $y$ に対し, $m \leqq 1$ または $n \leqq qr$ ならば

$$0 \leqq \frac{|x|^m|y|^n}{\max\{|x|,|y|\}\max\{|x|^{pr},|y|^{qr}\}} \leqq |x|^{m-\frac{np}{q}-pr-1} + |y|^{m+n-qr-1} \quad \cdots (ii)$$

が成り立ち, $m > 1$ かつ $n > qr$ ならば次の不等式が成り立つ.

$$0 \leqq \frac{|x|^m|y|^n}{\max\{|x|,|y|\}\max\{|x|^{pr},|y|^{qr}\}} \leqq |x|^{m-\frac{np}{q}-pr-1} + |x|^{m-1}|y|^{n-qr} + |y|^{m+n-qr-1} \quad \cdots (iii)$$

$\min\left\{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}-\frac{1}{p},\ \frac{m}{q}+\frac{n}{q}-\frac{1}{q}\right\} > r$ ならば $m - \frac{np}{q} - pr - 1 > 0$ かつ $m+n-qr-1 > 0$ だから, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ のとき, $(ii)$ と $(iii)$ の不等式の右辺は 0 に近づくため, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{|x|^m|y|^n}{\max\{|x|,|y|\}\max\{|x|^{pr},|y|^{qr}\}} = 0$ である. 従って $(i)$ から $p \geqq q$ の場合, $\min\left\{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}-\frac{1}{p},\ \frac{m}{q}+\frac{n}{q}-\frac{1}{q}\right\} > r$ ならば $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{|x|^m|y|^n}{(|x|^p+|y|^q)^r\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ が成り立つ. $p \leqq q$ の場合も同様に, $\min\left\{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}-\frac{1}{q},\ \frac{m}{p}+\frac{n}{p}-\frac{1}{p}\right\} > r$ ならば $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{|x|^m|y|^n}{(|x|^p+|y|^q)^r\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ が成り立つことが示される.

以上から, $\displaystyle\lim_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \frac{|x|^m|y|^n}{(|x|^p+|y|^q)^r\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ が成り立つための必要十分条件は

「$p \geqq q$ かつ $\min\left\{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}-\frac{1}{p},\ \frac{m}{q}+\frac{n}{q}-\frac{1}{q}\right\} > r$」または「$p \leqq q$ かつ $\min\left\{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}-\frac{1}{q},\ \frac{m}{p}+\frac{n}{p}-\frac{1}{p}\right\} > r$」である.

レポート問題

次の (A), (B) を解答せよ.

(A) $(-1,1)\times(-1,1)=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,-1<x<1,\ -1<y<1\right\}$ とおき, $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^2$, $r>0$ に対し, $B_2(\boldsymbol{p}\,;r)=\left\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|<r\right\}$ とおく.

(1) $\boldsymbol{p}=\left(\begin{smallmatrix}p\\q\end{smallmatrix}\right)$ のとき, $B_2(\boldsymbol{p}\,;r)$ が $(-1,1)\times(-1,1)$ に含まれるために, $p$, $q$, $r$ が満たすべき条件を求めよ.

(2) $(-1,1)\times(-1,1)$ は $\boldsymbol{R}^2$ の開集合であることを示せ.

(B) 以下の集合について, 開集合, 閉集合, 開集合でも閉集合でもないかを答え, その理由を述べよ.

(1) $\left\{\frac{1}{n}\in\boldsymbol{R}\,\middle|\,n\in\boldsymbol{N}\right\}$　(2) $\left\{\frac{1}{n}\in\boldsymbol{R}\,\middle|\,n\in\boldsymbol{N}\right\}\cup\{0\}$　(3) $\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,xy<1\right\}$

昨年度の試験問題

1. 関数 $f,g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を次のように定めるとき, $f$, $g$ の $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ における連続性について調べよ.

(1) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\end{cases}$　(2) $g\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\end{cases}$

2. $T=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,x+y<1,\ x>0,\ y>0\right\}$ とおく.

(1) $\boldsymbol{p}=\left(\begin{smallmatrix}p\\q\end{smallmatrix}\right)\in\boldsymbol{R}^2$, $r>0$ に対し, $B_2(\boldsymbol{p}\,;r)=\left\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^2\,\middle|\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|<r\right\}$ とおくとき, $B_2(\boldsymbol{p}\,;r)\subset T$ であるために, $p$, $q$, $r$ が満たすべき条件を求めよ.

(2) $T$ は $\boldsymbol{R}^2$ の開集合であることを示せ.

基礎数理科学概論試験問題　（山口担当分）　学籍番号 ______________　氏名 ______________________

1. 関数 $f, g : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を次のように定めるとき, $f$, $g$ の $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ における連続性について調べよ.

(1) $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$　　(2) $g\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$

2. $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 < 1,\ x > 0,\ y > 0 \right\}$ とおく.

(1) $\boldsymbol{p} = \left(\begin{smallmatrix}p\\q\end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2$, $r > 0$ に対し, $B_2(\boldsymbol{p}\,; r) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < r \right\}$ とおくとき, $B_2(\boldsymbol{p}\,; r) \subset D$ であるために, $p$, $q$, $r$ が満たすべき条件を求めよ.

(2) $D$ は $\boldsymbol{R}^2$ の開集合であることを示せ.