球面の間の連続写像の写像度とその応用

目次

§1. 位相空間論からの準備

記号 1.1 $a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a < b)$ に対し, $(a, b) = \{x \in \boldsymbol{R} | a < x < b\}$, $[a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} | a \leqq x \leqq b\}$ とおき, それぞれ $\boldsymbol{R}$ の開区間, 閉区間と呼ぶ. $[0, 1]^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n | 0 \leqq x_j \leqq 1\}$ とおき, n 次元立方体という. $D^n = \{x \in \boldsymbol{R}^n | \, \|x\| \leqq 1\}$, $S^n = \{x \in \boldsymbol{R}^{n+1} | \, \|x\| = 1\}$ とおき, それぞれ n 次元球体, n 次元球面という. 特に, S^1 は原点を中心とする単位円, D^2 は S^1 を境界とする円板であり, S^2 は原点を中心とする単位球面である.

以下で用いる位相空間に関するいくつかの結果を述べる.

定理 1.2 閉区間 $[a, b]$ は連結かつコンパクトである.

定理 1.3 連結な位相空間族の直積位相空間は連結である. また, コンパクトな位相空間族の直積位相空間はコンパクトである.

定理 1.4 (1) $\boldsymbol{R}$ の部分集合 X が連結であるためには X が (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $\boldsymbol{R}$ のいずれかの形になっていることが必要十分である.

(2) $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 X がコンパクトであるためには X が有界な閉集合であることが必要十分である.

定理 1.5 (最大値・最小値の定理) X をコンパクトな位相空間とし, $f : X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とすれば, f は最大値と最小値をもつ.

定理 1.6 (中間値の定理) X を連結な位相空間とし, $f : X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする. $a, b \in X$ に対し, $f(a) < k < f(b)$ ならば, $f(c) = k$ を満たす $c \in X$ が存在する.

系 1.7 X を $\boldsymbol{R}$ の部分集合, $f : X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする. $[a, b] \subset X$ であり, $f(a) \neq f(b)$ ならば, $f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の値 d に対し, $f(c) = d$ となる $c \in (a, b)$ が存在する.

中間値の定理から次の結果がただちに得られる.

補題 1.8 X を連結な位相空間とし, $f : X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする. すべての $x \in X$ に対して $f(x)$ が整数ならば, f は定数値関数である.

定義 1.9 集合 X, Y の間の 2 つの写像 $f, g : X \to Y$ に対し, $f(x) = g(x)$ を満たす x を f と g の一致点という. 特に, X が Y の部分集合で, g が包含写像 $g(x) = x$ の場合, f と g の一致点を f の不動点または固定点という.

中間値の定理を用いれば, 以下のことが示される.

定理 1.10 閉区間 $[a, b]$ からそれ自身への連続写像は不動点をもつ.

証明 $f : [a, b] \to [a, b]$ を連続写像として $g : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ を $g(x) = f(x) - x$ で定めれば g は連続である. a, b の両方とも f の不動点でなければ, $g(a) < 0 < g(b)$ であり, $[a, b]$ は連結だから (1.6) によって $g(c) = 0$ となる $c \in [a, b]$ がある. このとき $f(c) = c$ である. □

定理 1.11 $f : S^1 \to \boldsymbol{R}$ を連続写像とするとき, $f(-x) = f(x)$ を満たす $x \in S^1$ が存在する.

証明 $h : [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ を $h(t) = f(\cos \pi t, \sin \pi t) - f(-\cos \pi t, -\sin \pi t)$ で定義すれば, h は連続で, $h(0) = -h(1)$ が成り立つ. $h(0) = 0$ ならば $x = (1, 0)$ が $f(-x) = f(x)$ を満たす. $h(0) \neq 0$ ならば $h(0)$ と $h(1)$ の符号が異なるため, 中間値の定理により $h(t_0) = 0$ となる $t_0 \in [0, 1]$ が存在する. このとき $x = (\cos \pi t_0, \sin \pi t_0)$ が $f(-x) = f(x)$ を満たす. □

定義 1.12　(X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする．写像 $f : X \to Y$ が次の性質をもつとき, f は一様連続であるという．

「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, "$d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$" を満たすような $\delta > 0$ が存在する.」

次の定理はコンパクト距離空間で定義された連続写像の本質的な性質の 1 つである (問題 13.7).

定理 1.13　(X, d_X) をコンパクト距離空間, (Y, d_Y) を距離空間とすれば, 連続写像 $f : X \to Y$ は一様連続である．

$\boldsymbol{R}^2$ と $\boldsymbol{C}$ を対応 $(x, y) \leftrightarrow x + iy$ により同一視して, 1 次元球面 (円周) S^1 を絶対値 1 の複素数全体の集合, 2 次元球体 (円板) D^2 を絶対値 1 以下の複素数全体の集合とみなす.
$e : \boldsymbol{R} \to S^1$ を $e(t) = \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t$ で定義される写像とし, $l : S^1 - \{-1\} \to \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を

$$l(x+iy) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\cos^{-1} x & y \geqq 0 \\ -\frac{1}{2\pi}\cos^{-1} x & y \leqq 0 \end{cases}$$

$(x, y \in \boldsymbol{R},\ x^2 + y^2 = 1)$ で定めると次の補題は容易に示される.

補題 1.14　(1) e, l は連続であり, $z \in S^1 - \{-1\}$ ならば $e(l(z)) = z$, $|t| < \dfrac{1}{2}$ ならば $l(e(t)) = t$ が成り立つ.

(2) $s, t \in \boldsymbol{R}$ に対し, $e(s + t) = e(s)e(t)$ である.

(3) $e(t) = e(s)$ であることと, $t - s$ が整数であることは同値である.

(4) 任意の $\delta > 0$ に対して, $\rho > 0$ で次の条件を満たすものがある.

$0 < |z + 1| < \rho$ かつ $z \in S^1$ ならば $-\dfrac{1}{2} < l(z) < -\dfrac{1}{2} + \delta$ または $\dfrac{1}{2} - \delta < l(z) < \dfrac{1}{2}$.

補題 1.15　$f : [0, 1]^n \to S^1$ を連続写像, $\boldsymbol{x}_0 \in [0, 1]^n$ とする.

(1) $f(\boldsymbol{x}_0) = e(t_0)$ を満たす 実数 t_0 に対し, 連続写像 $\tilde{f} : [0, 1]^n \to \boldsymbol{R}$ で, $e \circ \tilde{f} = f$ かつ $\tilde{f}(\boldsymbol{x}_0) = t_0$ を満たすものが存在する.

(2) 連続写像 $\tilde{f}, \tilde{g} : [0, 1]^n \to \boldsymbol{R}$ が $e \circ \tilde{f} = e \circ \tilde{g} = f$ を満たせば, $k = \tilde{g}(\boldsymbol{x}_0) - \tilde{f}(\boldsymbol{x}_0)$ とおくと k は整数で, すべての $\boldsymbol{x} \in [0, 1]^n$ に対して, $\tilde{g}(\boldsymbol{x}) = \tilde{f}(\boldsymbol{x}) + k$ が成り立つ.

証明　(1) (1.2), (1.3) より, $[0, 1]^n$ はコンパクトだから (1.13) から f は一様連続である．従って,「$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \delta$ ならば $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < 2$」を満たすような $\delta > 0$ がある． $N > \dfrac{\sqrt{n}}{\delta}$ である整数 N をとれば, 任意の $j = 1, 2, \ldots, N$ と $\boldsymbol{x} \in [0, 1]^n$ に対して, $\dfrac{j}{n}\boldsymbol{x} \in [0, 1]^n$ であることに注意すると $\left\|\dfrac{j}{N}\boldsymbol{x} - \dfrac{j-1}{N}\boldsymbol{x}\right\| = \dfrac{\|\boldsymbol{x}\|}{N} < \delta$ だから $\left|f\left(\dfrac{j}{N}\boldsymbol{x}\right) - f\left(\dfrac{j-1}{N}\boldsymbol{x}\right)\right| < 2$ である．一般に $z, w \in S^1$ が $|z - w| < 2$ を満たすことと $\dfrac{z}{w} \neq -1$ であることは同値だから, $g_j(\boldsymbol{x}) = f\left(\boldsymbol{x}_0 + \dfrac{j}{N}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\right) f\left(\boldsymbol{x}_0 + \dfrac{j-1}{N}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\right)^{-1}$ とおくと, g_j は $[0, 1]^n$ から $S^1 - \{-1\}$ への写像であり, $g_j(\boldsymbol{x}_0) = 1$ となる．このとき, $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)g_1(\boldsymbol{x})g_2(\boldsymbol{x}) \cdots g_N(\boldsymbol{x})$ がすべての $\boldsymbol{x} \in [0, 1]^n$ に対して成り立つ．そこで, $\tilde{f}$ を $\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = t_0 + \sum\limits_{j=1}^{N} l(g_j(\boldsymbol{x}))$ で定めると $\tilde{f}(\boldsymbol{x}_0) = t_0$ であり, (1.14) の (1), (2) を用いて

$$e(\tilde{f}(\boldsymbol{x})) = e\left(t_0 + \sum_{j=1}^{N} l(g_j(\boldsymbol{x}))\right) = e(t_0)e(l(g_1(\boldsymbol{x}))) \cdots e(l(g_N(\boldsymbol{x}))) = f(0, \ldots, 0)g_1(\boldsymbol{x}) \cdots g_N(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}).$$

(2) すべての $\boldsymbol{x} \in [0, 1]^n$ に対し, $e(\tilde{g}(\boldsymbol{x})) = e(\tilde{f}(\boldsymbol{x}))$ が成り立つため, (1.14) の (3) により, $\tilde{g}(\boldsymbol{x}) - \tilde{f}(\boldsymbol{x})$ は整数である．従って $\boldsymbol{x} \in [0, 1]^n$ を固定して, $h(t) = \tilde{g}(\boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)) - \tilde{f}(\boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0))$ により写像 $h : [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ を定めると h は連続で常に整数を値にとる．故に (1.8) から h は定数値関数で, $h(1) = h(0) = k$ だから $\tilde{g}(\boldsymbol{x}) = \tilde{f}(\boldsymbol{x}) + k$ である． □

上の (2) において, 特に $k = 0$ の場合を考えると, (1) の条件を満たす $\tilde{f}$ はただ 1 つしか存在しないことがわかる.

§2.　円周の間の写像の写像度の定義と性質

定義 2.1　連続写像 $f:S^1\to S^1$ に対し, $f\circ e:\boldsymbol{R}\to S^1$ の定義域を $[0,1]$ に制限した写像を $f':[0,1]\to S^1$ とし, $f(1)=e(t_0)$ を満たす $t_0\in\boldsymbol{R}$ を選ぶ. (1.15) により, $e\circ\tilde{f}=f'$, $\tilde{f}(0)=t_0$ を満たす $\tilde{f}:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ がただ 1 つあるが, $e(\tilde{f}(1))=f'(1)=f(e(1))=f(1)=f(e(0))=f'(0)=e(\tilde{f}(0))$ だから $\tilde{f}(1)-\tilde{f}(0)$ は整数である. そこで, f の写像度と呼ばれる整数 $\deg(f)$ を $\deg(f)=\tilde{f}(1)-\tilde{f}(0)$ で定義する.

$f(1)=e(s_0)$ である $s_0\in\boldsymbol{R}$ に対し, $e\circ\tilde{g}=f'$, $\tilde{g}(0)=s_0$ を満たす $\tilde{g}:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ をとれば, (1.15) の (2) から $\tilde{g}(t)=\tilde{f}(t)+\tilde{g}(0)-\tilde{f}(0)$ がすべての $t\in[0,1]$ について成り立つため $\tilde{g}(1)-\tilde{g}(0)=\tilde{f}(1)-\tilde{f}(0)$ である. 従って, 上の写像度の定義は $f(1)=e(t_0)$ を満たす $t_0\in\boldsymbol{R}$ の選び方に依存しない.

命題 2.2　p_0 を S^1 の定点とする. $c, id_{S^1}, T:S^1\to S^1$ をそれぞれ, 定値写像 $c(z)=p_0$, 恒等写像 $id_{S^1}(z)=z$, 対心写像 $T(z)=-z$ とすれば, $\deg(c)=0$, $\deg(id_{S^1})=\deg(T)=1$ である.

証明　$e(t_0)=p_0$ を満たす $t_0\in[0,1]$ を選び, $\tilde{c}:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ を定値写像 $\tilde{c}(t)=t_0$ とすれば $e(\tilde{c}(t))=p_0=c(e(t))$ だから $\deg(c)=\tilde{c}(1)-\tilde{c}(0)=t_0-t_0=0$. $i:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ を包含写像とすれば, $e(i(t))=e(t)=id_{S^1}(e(t))$ だから $\deg(id_{S^1})=i(1)-i(0)=1-0=1$. $\widetilde{T}:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ を $\widetilde{T}(t)=t+\dfrac{1}{2}$ で定めると, $e(\widetilde{T}(t))=e\left(t+\frac{1}{2}\right)=T(e(t))$ だから $\deg(T)=\widetilde{T}(1)-\widetilde{T}(0)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}=1$. □

命題 2.3　$f,g:S^1\to S^1$ を 連続写像とする. 複素数の積を用いて $fg:S^1\to S^1$ を $(fg)(z)=f(z)g(z)$ で定める.

(1) $\deg(fg)=\deg(f)+\deg(g)$.　　(2) $\deg(f\circ g)=\deg(f)\deg(g)$.

証明　$f',g':[0,1]\to S^1$ を $f\circ e, g\circ e:\boldsymbol{R}\to S^1$ の定義域を $[0,1]$ に制限した写像とし, $f(1)=e(t_0)$, $g(1)=e(s_0)$ を満たす $t_0,s_0\in\boldsymbol{R}$ を選んでおく. $e\circ\tilde{f}=f'$, $e\circ\tilde{g}=g'$, $\tilde{f}(0)=t_0$, $\tilde{g}(0)=s_0$ を満たす $\tilde{f},\tilde{g}:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ をとる.

(1) $\tilde{h}:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ を $\tilde{h}(t)=\tilde{f}(t)+\tilde{g}(t)$ で定めれば,

$$e(\tilde{h}(t))=e(\tilde{f}(t)+\tilde{g}(t))=e(\tilde{f}(t))e(\tilde{g}(t))=f(e(t))g(e(t))=(fg)(e(t))$$

だから $\deg(fg)=\tilde{h}(1)-\tilde{h}(0)=(\tilde{f}(1)+\tilde{g}(1))-(\tilde{f}(0)+\tilde{g}(0))=(\tilde{f}(1)-\tilde{f}(0))+(\tilde{g}(1)-\tilde{g}(0))=\deg(f)+\deg(g)$.

(2) $t\in\boldsymbol{R}$ に対し, t 以下の最大の整数を $[t]$ で表す. $\hat{f}:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $\hat{f}(t)=\tilde{f}(t-[t])+[t]\deg(f)$ で定める. $a\in\boldsymbol{R}$ が整数でないならば, $\lim\limits_{t\to a}[t]=[a]$ だから $\hat{f}$ は a で連続である. a が整数ならば $\lim\limits_{t\to a+0}[t]=a$, $\lim\limits_{t\to a-0}[t]=a-1$ であり, $\tilde{f}(1)=\tilde{f}(0)+\deg(f)$ が成り立つため,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to a+0}\hat{f}(t)&=\lim_{t\to a+0}\tilde{f}(t-[t])+\lim_{t\to a+0}[t]\deg(f)=\tilde{f}(0)+a\deg(f)=\tilde{f}(1)+(a-1)\deg(f)\\&=\lim_{t\to a-0}\tilde{f}(t-[t])+\lim_{t\to a-0}[t]\deg(f)=\lim_{t\to a-0}\hat{f}(t)\end{aligned}$$

が得られる. 従って $\hat{f}$ は連続である. $\hat{f}$ の定義と $[\tilde{g}(t)]$ が整数であることから, 次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}e(\hat{f}\circ\tilde{g}(t))&=e(\hat{f}(\tilde{g}(t)))=e(\tilde{f}(\tilde{g}(t)-[\tilde{g}(t)])+[\tilde{g}(t)]\deg(f))=e(\tilde{f}(\tilde{g}(t)-[\tilde{g}(t)]))=f(e(\tilde{g}(t)-[\tilde{g}(t)]))\\&=f(e(\tilde{g}(t)))=f(g(e(t)))=(f\circ g)(e(t))\end{aligned}$$

従って, $\deg(f\circ g)$ の定義から $\deg(f\circ g)=(\hat{f}\circ\tilde{g})(1)-(\hat{f}\circ\tilde{g})(0)$ であるが, $\hat{f}$ の定義と $\tilde{g}(1)=\tilde{g}(0)+\deg(g)$, および実数 t, 整数 n に対して $[t+n]=[t]+n$ が成り立つことから, この等式の左辺は

$$\begin{aligned}\hat{f}(\tilde{g}(1))-\hat{f}(\tilde{g}(0))&=\tilde{f}(\tilde{g}(1)-[\tilde{g}(1)])+[\tilde{g}(1)]\deg(f)-(\tilde{f}(\tilde{g}(0)-[\tilde{g}(0)])+[\tilde{g}(0)]\deg(f))\\&=\tilde{f}(\tilde{g}(0)+\deg(g)-[\tilde{g}(0)+\deg(g)])+[\tilde{g}(0)+\deg(g)]\deg(f)-(\tilde{f}(\tilde{g}(0)-[\tilde{g}(0)])+[\tilde{g}(0)]\deg(f))\\&=\tilde{f}(\tilde{g}(0)-[\tilde{g}(0)])+[\tilde{g}(0)]\deg(f)+\deg(g)\deg(f))-(\tilde{f}(\tilde{g}(0)-[\tilde{g}(0)])+[\tilde{g}(0)](\deg(f)))\\&=\deg(f)\deg(g)\end{aligned}$$

に等しいため, $\deg(f\circ g)=\deg(f)\deg(g)$ が得られる □

系 2.4 n を整数とするとき $p_n(z)=z^n$ で定義される写像 $p_n : S^1 \to S^1$ の写像度は n である.

証明 $n=0$ の場合 p_0 は定値写像だから (2.2) から $\deg(p_0)=0$. $n>0$ の場合 p_n は恒等写像 id_{S^1} の n 乗 $id_{S^1}^n$ だから (2.2) と (2.3) の (1) から $\deg(p_n)=n\deg(id_{S^1})=n$. $n<0$ の場合 $p_np_{-n}=p_0$ だから (2.3) の (1) から $\deg(p_n)+\deg(p_{-n})=\deg(p_0)=0$. 一方 $\deg(p_{-n})=-n$ だから $\deg(p_n)=n$. □

$p_n(\cos\theta+i\sin\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$ だから θ が 0 から 2π まで動いて S^1 上の点 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ が時計回りに S^1 を 1 周するとき $p_n(z)$ は $n>0$ ならば $p_n(z)$ は同じ向きに S^1 を n 周まわり, $n<0$ ならば $p_n(z)$ は逆向きに S^1 を $-n$ 周まわるため, 上の事実は要するに S^1 を n 回まわる写像の写像度は n であることを示しているに過ぎない.

命題 2.5 $f : S^1 \to S^1$ を 連続写像とし, n を自然数, k を整数とする. $\xi_n=e\left(\frac{1}{n}\right)$ とおくとき, すべての $x\in S^1$ に対して $f(\xi_nx)=\xi_n^kf(x)$ であれば $\deg(f)-k$ は n の倍数である.

証明 $f' : [0,1]\to S^1$ は $f\circ e$ の定義域を制限した写像, $\tilde f : [0,1]\to \boldsymbol{R}$ は $e\circ\tilde f=f'$ を満たす写像とする. 任意の $x\in[0,\frac{n-1}{n}]$ に対して $e\left(\tilde f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)\right)=f\left(e\left(x+\dfrac{1}{n}\right)\right)=f(\xi_ne(x))=\xi_n^kf(e(x))=e(\tilde f(x))e\left(\dfrac{k}{n}\right)=e\left(\tilde f(x)+\dfrac{k}{n}\right)$ だから (1.14) の (3) により, $\tilde f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-\tilde f(x)-\dfrac{k}{n}$ は整数である. 従って $x\mapsto \tilde f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-\tilde f(x)-\dfrac{k}{n}$ は $[0,\frac{n-1}{n}]$ で定義された整数値をとる連続関数だから (1.8) により, 定数値関数である. そこで $m=\tilde f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-\tilde f(x)-\dfrac{k}{n}$ とおくと, $\deg(f)=\tilde f(1)-\tilde f(0)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\tilde f\left(\frac{j}{n}\right)-\tilde f\left(\frac{j-1}{n}\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(m+\frac{k}{n}\right)=mn+k$ で, m は整数だから $\deg(f)-k$ は n の倍数である. □

定義 2.6 (1) X, Y を位相空間, $f,g : X\to Y$ を連続写像とする. 連続写像 $H : X\times[0,1]\to Y$ で, 各 $x\in X$ に対して $H(x,0)=f(x)$, $H(x,1)=g(x)$ を満たすものが存在するとき f と g はホモトピックであるといい $f\simeq g$ で表す. また, この H を f から g へのホモトピーという.

(2) 連続写像 $f : X\to Y$, $g : Y\to X$ で $g\circ f\simeq id_X$, $f\circ g\simeq id_Y$ を満たすものがあるとき, X と Y はホモトピー同値であるといい, f をホモトピー同値写像, g を f のホモトピー逆写像という.

(3) 位相空間 X が 1 点からなる位相空間とホモトピー同値であるとき, X は可縮であるという.

命題 2.7 (1) $\simeq$ は X から Y への連続写像全体の集合における同値関係である.

(2) $f,f' : X\to Y$, $g,g' : Y\to Z$ を連続写像とする. $f\simeq f'$, $g\simeq g'$ ならば $g\circ f\simeq g'\circ f'$ である.

証明 (1) 連続写像 $f : X\to Y$ に対して $H : X\times[0,1]\to Y$ を $H(x,t)=f(x)$ で定めれば $f\simeq f$ がわかる. $f\simeq g$ で $H : X\times[0,1]\to Y$ を f から g へのホモトピーとする. $\tau : [0,1]\to[0,1]$ を $\tau(t)=1-t$ で定めれば τ は連続だから合成写像 $H\circ(id_X\times\tau) : X\times[0,1]\to Y$ も連続で, これは g から f までのホモトピーになるため $g\simeq f$ である. $f\simeq g$, $g\simeq h$ で $H : X\times[0,1]\to Y$, $G : X\times[0,1]\to Y$ をそれぞれ f から g, g から h へのホモトピーとする. $K : X\times[0,1]\to Y$ を

$$K(x,t)=\begin{cases} H(x,2t) & t\in[0,\frac{1}{2}] \\ G(x,2t-1) & t\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

で定めれば K の $X\times[0,\frac{1}{2}]$, $X\times[\frac{1}{2},1]$ への制限はともに連続で, これらは $X\times[0,1]$ の閉集合だから K は連続である (問題 13.2). K は f から h へのホモトピーになるため $f\simeq h$ である.

(2) $H : X\times[0,1]\to Y$, $G : Y\times[0,1]\to Z$ をそれぞれ f から f', g から g' までのホモトピーとする. $g\circ H : X\times[0,1]\to Z$, $G\circ(f'\times id_{[0,1]}) : X\times[0,1]\to Z$ はそれぞれ $g\circ f$ から $g\circ f'$, $g\circ f'$ から $g'\circ f$ へのホモトピーだから (1) の結果から $g\circ f\simeq g'\circ f'$ である. □

命題 2.8　位相空間 X が可縮であるためには X の恒等写像が定値写像とホモトピックであることが必要十分である.

証明　P を 1 点からなる位相空間, $x_0 \in X$ に対し $g_{x_0} : P \to X$ は P を x_0 に写す写像とする. $f : X \to P$ を X から P への唯一の写像とすると, 明らかに $f \circ g_{x_0} = id_P$ だから X が可縮であるためには $g_{x_0} \circ f \simeq id_X$ となる $x_0 \in X$ が存在することが必要十分である. ここで, $g_{x_0} \circ f : X \to X$ は X を $\{x_0\}$ に写す定値写像だから主張が成り立つ. □

注意 2.9　$x_0 \in X$ に対し, $c_{x_0} : X \to X$ により, 常に x_0 の値をとる定値写像を表わす. X が可縮ならば (2.8) から $id_X \simeq c_{x_1}$ となる $x_1 \in X$ が存在し, X は問題 13.8 の (2) により弧状連結だから, 問題 13.8 の (1) から, $c_{x_1} \simeq c_{x_0}$ である. 従って, X が可縮ならば任意の $x_0 \in X$ に対し id_X と c_{x_0} はホモトピックである.

命題 2.10　連続写像 $f : X \to Y$ に対し, 可縮な位相空間 Z と連続写像 $g : X \to Z$, $h : Z \to Y$ で $f = h \circ g$ となるものがあれば f は定値写像とホモトピックである.

証明　(2.8) より id_Z は定値写像 c とホモトピックになる. (2.7) の (2) から $f = h \circ g = h \circ id_Z \circ g \simeq h \circ c \circ g$ であり, $h \circ c \circ g$ は定値写像である. □

命題 2.11　$f, g : S^1 \to S^1$ がホモトピックな連続写像ならば $\deg(f) = \deg(g)$ である.

証明　$H : S^1 \times [0,1] \to S^1$ を f から g へのホモトピーとする. $H' : [0,1]^2 \to S^1$ を $H'(s,t) = H(e(s),t)$ で定め, $H'(0,0) = f(1) = e(t_0)$ を満たす $t_0 \in \boldsymbol{R}$ をとる. (1.15) の (1) から 連続写像 $\widetilde{H} : [0,1]^2 \to \boldsymbol{R}$ で, $e \circ \widetilde{H} = H'$ かつ $\widetilde{H}(0,0) = t_0$ を満たすものがある. このとき $s \in [0,1]$ に対し, $e(\widetilde{H}(s,0)) = H'(s,0) = H(e(s),0) = f(e(s))$, $e(\widetilde{H}(s,1)) = H'(s,1) = H(e(s),1) = g(e(s))$ だから $\deg(f) = \widetilde{H}(1,0) - \widetilde{H}(0,0)$, $\deg(g) = \widetilde{H}(1,1) - \widetilde{H}(0,1)$ である. 一方 $t \in [0,1]$ に対し, $e(\widetilde{H}(1,t)) = H'(1,t) = H(e(1),t) = H(1,t) = H(e(0),t) = H'(0,t) = e(\widetilde{H}(0,t))$ となるため $t \mapsto \widetilde{H}(1,t) - \widetilde{H}(0,t)$ は $[0,1]$ で定義された整数値をとる連続関数だから (1.8) により, 定数値関数である. 従って, 上式から $\deg(f) = \deg(g)$ である. □

命題 2.12　連続写像 $f : S^1 \to S^1$ に関する次の 4 つの条件は同値である.

(1) 連続写像 $F : D^2 \to S^1$ で, $z \in S^1$ ならば $F(z) = f(z)$ となるものがある.

(2) f は定値写像にホモトピックである.

(3) $\deg(f) = 0$.

(4) 連続写像 $\bar{f} : S^1 \to \boldsymbol{R}$ で, $e \circ \bar{f} = f$ を満たすものがある.

証明　(1) ⇒ (2); D^2 は可縮で (問題 13.9), $i : S^1 \to D^2$ を包含写像とすれば $f = F \circ i$ だから (2.10) から f は定値写像にホモトピックである.

(2) ⇒ (3); f が定値写像にホモトピックならば (2.11) と (2.2) から $\deg(f) = 0$ である.

(3) ⇒ (4); $\tilde{f} : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を $e(\tilde{f}(t)) = f(e(t))$ $(t \in [0,1])$ を満たす連続関数とすれば, 仮定から $\tilde{f}(1) = \tilde{f}(0)$ である. $t_0 = \tilde{f}(1) = \tilde{f}(0)$ とおき, $\bar{f} : S^1 \to \boldsymbol{R}$ を

$$\bar{f}(z) = \begin{cases} \tilde{f}(l(-z) + \frac{1}{2}) & z \neq 1 \\ t_0 & z = 1 \end{cases}$$

で定めると, 1 以外の点では明らかに $\bar{f}$ は連続である. $\tilde{f}$ の 0, 1 における連続性から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, "$0 < t < \delta$ または $1 - \delta < t < 1$ ならば $|\tilde{f}(t) - t_0| < \varepsilon$" を満たす $\delta > 0$ がある. 一方 (1.14) の (4) から $\rho > 0$ で, "$0 < |z - 1| < \rho$ かつ $z \in S^1$ ならば $0 < l(-z) + \frac{1}{2} < \delta$ または $1 - \delta < l(z) + \frac{1}{2} < 1$" を満たすものがある. 従って, $\bar{f}$ は 1 においても連続である. $e \circ \bar{f} = f$ は $\bar{f}$ の定義からただちにわかる.

(4) ⇒ (1); (1.4) の (2) により S^1 はコンパクトで, (1.5) から $\bar{f}$ は最大値と最小値をもつため, $\bar{f}(S^1) \subset [-M, M]$

を満たす正の実数 M がとれる．このとき $z \neq 0$ ならば $\left|\bar{f}\left(\frac{z}{|z|}\right)\right| \leqq M$ であるため，$z \to 0$ ならば $|z|\bar{f}\left(\frac{z}{|z|}\right) \to 0$ である．そこで $F : D^2 \to S^1$ を

$$F(z) = \begin{cases} e\left(|z|\bar{f}\left(\dfrac{z}{|z|}\right)\right) & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

で定めれば，F は 0 においても連続だから F は連続写像で，$z \in S^1$ ならば $\bar{f}$ についての仮定から $F(z) = e(\bar{f}(z)) = f(z)$ が成り立つ． □

系 2.13　$f, g : S^1 \to S^1$ を連続写像とするとき，f と g がホモトピックであるためには，$\deg(f) = \deg(g)$ が成り立つことが必要十分である．

証明　$\deg(f) = \deg(g)$ が成り立つと仮定する．$\bar{g} : S^1 \to S^1$ を $\bar{g}(z) = \dfrac{1}{g(z)}$ で定義すると，積 $\bar{g}g$ は定値写像だから (2.3) の (1)，(2.2) より $\deg(\bar{g}) + \deg(g) = \deg(\bar{g}g) = 0$．従って，$\deg(\bar{g}) = -\deg(g)$ だから $\deg((f\bar{g}) = \deg(f) + \deg(\bar{g}) = \deg(f) - \deg(g) = 0$．故に (2.12) から $f\bar{g}$ は定値写像にホモトピックである．$H : S^1 \times [0,1] \to S^1$ を $f\bar{g}$ から定値写像 c ($c(z) = \cos\theta_0 + i\sin\theta_0$) へのホモトピー ($H(z,0) = f(z)\bar{g}(z)$, $H(z,1) = \cos\theta_0 + i\sin\theta_0$) として，$G : S^1 \times [0,1] \to S^1$ を $G(z,t) = g(z)H(z,t)(\cos(t\theta_0) - i\sin(t\theta_0))$ で定めれば，G は f から g へのホモトピーである． □

位相空間 X, Y に対し，$C(X,Y)$ を X から Y への連続写像全体からなる集合とし，$C(X,Y)$ における同値関係 $\simeq$ を "$f \simeq g \Leftrightarrow f$ と g はホモトピックである." により定める．このとき，商集合 $C(X,Y)/\simeq$ を $[X,Y]$ で表し，X から Y への連続写像のホモトピー集合という．$p : C(X,Y) \to [X,Y]$ を商写像として，連続写像 $f : X \to Y$ が属する同値類 $p(f)$ を f のホモトピー類といい，$[f]$ で表す．

特に，$Y = S^1$ の場合，$f, g \in C(X, S^1)$ に対し，S^1 における積を用いて，f と g の積 $fg : X \to S^1$ を $(fg)(x) = f(x)g(x)$ で定めれば，fg は連続だから $fg \in C(X, S^1)$ である．このとき，明らかに積の結合法則および交換法則が成り立つ．$c_1 : X \to S^1$ を $1 \in S^1$ への定値写像とすれば，任意の $f \in C(X, S^1)$ に対して，$fc_1 = c_1 f = f$ であり，$f' : X \to S^1$ を $f'(x) = \overline{f(x)}$ で定めれば，$ff' = f'f = c_1$ が成り立つため，$C(X, S^1)$ は c_1 を単位元とするアーベル群 (定義 4.1 参照) になることがわかる．

さらに，$f \simeq f'$, $g \simeq g'$ のとき f と f', g と g' の間のホモトピーをそれぞれ $H, H' : X \times [0,1] \to S^1$ ($H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$, $H'(x,0) = f'(x)$, $H'(x,1) = g'(x)$) として，$G : X \times [0,1] \to S^1$ を $G(x,t) = H(x,t)H'(x,t)$ で定めると，$G(x,0) = (fg)(x)$, $G(x,1) = (f'g')(x)$ が成り立つため，$fg \simeq f'g'$ がわかる．そこで，$\alpha, \beta \in [X, S^1]$ の積を $\alpha\beta = [fg]$ ($\alpha = [f]$, $\beta = [g]$) で定めれば，これは $\alpha = [f]$, $\beta = [g]$ を満たす $f, g \in C(X, S^1)$ の選び方によらない．従って，$p : C(X, S^1) \to [X, S^1]$ がアーベル群の準同型写像になるような $[X, S^1]$ の群構造が定義される．

$\boldsymbol{Z}$ を整数全体の集合とし，通常の加法でアーベル群とみなせば，(2.3) の (1) により写像度 deg は $C(S^1, S^1)$ から $\boldsymbol{Z}$ へのアーベル群の準同型写像 $\deg : C(S^1, S^1) \to \boldsymbol{Z}$ である．写像 $d : [S^1, S^1] \to \boldsymbol{Z}$ を $d(\alpha) = \deg(f)$ ($\alpha = [f]$) で定めれば，(2.11) により $\alpha = [f]$ を満たす $f \in C(X, S^1)$ の選び方によらない．また，$d(\alpha\beta) = \deg(fg) = \deg(f) + \deg(g) = d(\alpha) + d(\beta)$ ($\alpha = [f]$, $\beta = [g]$) だから d はアーベル群の準同型写像であり，$\deg = d \circ p$ が成り立つ．

定理 2.14　$d : [S^1, S^1] \to \boldsymbol{Z}$ はアーベル群の同型写像である．

証明　任意の $n \in \boldsymbol{Z}$ に対して，(2.4) から $d([p_n]) = \deg(p_n) = n$ だから d は全射である．また，$d(\alpha) = d(\beta)$ ($\alpha = [f]$, $\beta = [g]$) とすれば，$\deg(f) = \deg(g)$ だから (2.13) により $f \simeq g$ である．故に $\alpha = \beta$ となるため，d は単射でもある． □

命題 2.15　任意の連続関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ に対し，$e \circ f : X \to S^1$ は定値写像にホモトピックである．

証明 $H : X \times [0,1] \to S^1$ を $H(x,t) = e(tf(x))$ で定めれば, H は定値写像から $e \circ f$ へのホモトピーである. $\square$

$\mu : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ を, $\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$ で定めれば μ は連続関数である. このとき, $t \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $\mu(t\boldsymbol{x}) = |t|\mu(\boldsymbol{x})$, $\|\boldsymbol{x}\| \leqq \sqrt{n}\mu(\boldsymbol{x})$ が成り立ち, $\boldsymbol{x}$ が原点 $\boldsymbol{0}$ であることと $\mu(\boldsymbol{x}) = 0$ であることは同値であることに注意する. $\boldsymbol{z}_0$ をすべての成分が $\dfrac{1}{2}$ である $[0,1]^n$ の点とすれば, $\boldsymbol{x} \in [0,1]^n$ であるためには, $\mu(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0) \leqq \dfrac{1}{2}$ であることが必要十分である. また $\partial[0,1]^n = \left\{\boldsymbol{x} \in [0,1]^n \,\middle|\, \mu(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0) = \dfrac{1}{2}\right\}$ とおく.

命題 2.16 $\eta_n : [0,1]^n \to D^n$ を次のように定めれば, η_n は $\partial[0,1]^n$ を S^{n-1} の上に写す同相写像である.

$$\eta_n(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{2\mu(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0)}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0\|}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0) & \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{z}_0 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}_0 \end{cases}$$

証明 $\boldsymbol{x} \in [0,1]^n$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{z}_0$ ならば $\|\eta_n(\boldsymbol{x})\| = 2\mu(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0)$ だから, $\eta_n(\boldsymbol{x}) \in D^n$ であり, $\eta_n(\boldsymbol{x}) \in S^{n-1}$ であることと, $\boldsymbol{x} \in \partial[0,1]^n$ であることは同値である. また μ の連続性から $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{z}_0} \|\eta_n(\boldsymbol{x})\| = \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{z}_0} 2\mu(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0) = 0$ だから η_n は $\boldsymbol{z}_0$ で連続である. η_n は $\boldsymbol{z}_0$ 以外の点で明らかに連続だから, η_n は連続写像である. $\eta_n^{-1} : D^n \to [0,1]^n$ を

$$\eta_n^{-1}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{\|\boldsymbol{x}\|}{2\mu(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

で定めれば, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $\mu(\eta_n^{-1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{z}_0) = \dfrac{\|\boldsymbol{x}\|}{2}$ だから, $\boldsymbol{x} \in D^n$ ならば $\eta_n^{-1}(\boldsymbol{x}) \in [0,1]^n$ である. $\boldsymbol{x} \in D^n$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $\|\eta_n^{-1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{z}_0\| = \dfrac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{2\mu(\boldsymbol{x})} \leqq \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|$ だから η_n^{-1} は原点で連続である. η_n^{-1} は原点以外の点で明らかに連続だから, η_n^{-1} は連続写像である. $\|\eta_n(\boldsymbol{x})\| = 2\mu(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0)$ と $\mu(\eta_n(\boldsymbol{x})) = \dfrac{2\mu(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0)^2}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0\|}$ を用いれば, 任意の $\boldsymbol{x} \in [0,1]^n$ に対して $\eta_n^{-1}(\eta_n(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$ であることが示され, $\|\eta_n^{-1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{z}_0\| = \dfrac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{2\mu(\boldsymbol{x})}$ と $\mu(\eta_n^{-1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{z}_0) = \dfrac{\|\boldsymbol{x}\|}{2}$ を用いれば, 任意の $\boldsymbol{x} \in D^n$ に対して $\eta_n(\eta_n^{-1}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$ であることが示されるため, η_n^{-1} は η_n の逆写像である. $\square$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$, $y \in \boldsymbol{R}$ に対し, $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の点 $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ を $(\boldsymbol{x}, y)$ で表す.

命題 2.17 $\rho_n : D^n \to S^n$ を

$$\rho_n(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sin(\pi\|\boldsymbol{x}\|)}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}, \cos(\pi\|\boldsymbol{x}\|)\right) & \boldsymbol{x} \neq 0 \\ (0, 0, \ldots, 0, 1) & \boldsymbol{x} = 0 \end{cases}$$

によって定めれば ρ_n は S^{n-1} の点をすべて $(0, 0, \ldots, 0, -1)$ に写す連続な全射である. さらに $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$ かつ $\rho_n(\boldsymbol{x}) = \rho_n(\boldsymbol{x}')$ が成り立つのは, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ がともに S^{n-1} に属している場合に限る.

証明 $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n$, $y \in \boldsymbol{R}$ に対し, $\|(\boldsymbol{z}, y)\|^2 = \|\boldsymbol{z}\|^2 + y^2$ だから, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $\|\rho_n(\boldsymbol{x})\| = 1$ となるため $\rho_n(\boldsymbol{x}) \in S^n$ である. ρ_n が原点以外の点で連続であることは明らかである. $\boldsymbol{x} \in D^n$ かつ $\boldsymbol{x} \neq 0$ ならば $\left\|\dfrac{\sin(\pi\|\boldsymbol{x}\|)}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}\right\| = \sin(\pi\|\boldsymbol{x}\|)$ だから, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}} \dfrac{\sin(\pi\|\boldsymbol{x}\|)}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x} = 0$ となるため, ρ_n は原点でも連続である. $(\boldsymbol{z}, y) \in S^n$ ($\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n$, $y \in [-1, 1]$) に対し, $(\boldsymbol{z}, y) \neq (0, 0, \ldots, 0, \pm 1)$ ならば, $\|\boldsymbol{z}\|^2 + y^2 = 1$ かつ $y \neq \pm 1$ だから, $\left\|\dfrac{\cos^{-1} y}{\pi\sqrt{1 - y^2}}\boldsymbol{z}\right\| = \dfrac{\cos^{-1} y}{\pi}$ であることに注意すれば, $\rho_n\!\left(\dfrac{\cos^{-1} y}{\pi\sqrt{1 - y^2}}\boldsymbol{z}\right) = (\boldsymbol{z}, y)$ が成り立つ. また, $\rho_n(0, 0, \ldots, 0) = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ であり $\boldsymbol{x} \in S^{n-1}$ ならば $\rho_n(\boldsymbol{x}) = (0, 0, \ldots, 0, -1)$ だから ρ_n は S^{n-1} の点をすべて $(0, 0, \ldots, 0, -1)$ に写す全射である.

ρ_n の定義から, $\rho_n(\boldsymbol{x}) = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ となる $\boldsymbol{x} \in D^n$ は 0 のみである. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in D^n - (S^{n-1} \cup \{\boldsymbol{0}\})$ かつ $\rho_n(\boldsymbol{x}) = \rho_n(\boldsymbol{x}')$ ならば, $\sin(\pi\|\boldsymbol{x}\|)$, $\sin(\pi\|\boldsymbol{x}'\|)$ はともに 0 でないため, $\dfrac{\sin(\pi\|\boldsymbol{x}\|)}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x} = \dfrac{\sin(\pi\|\boldsymbol{x}'\|)}{\|\boldsymbol{x}'\|}\boldsymbol{x}'$ かつ

$\cos(\pi\|\boldsymbol{x}\|) = \cos(\pi\|\boldsymbol{x}'\|)$ より $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ が導かれる. 従って, 後半の主張が成り立つ. $\square$

注意 2.18 (1) n が 1 以上の整数ならば D^n は弧状連結だから, 上の結果から S^n は弧状連結である. (2.16) により $\partial[0,1]^n$ は S^{n-1} と同相だから, n が 2 以上の整数ならば $\partial[0,1]^n$ は 弧状連結である.

(2) D_n は $\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合であることからコンパクトで, S^n はハウスドルフ空間だから, ρ_n は閉写像である. 従って, ρ_n は商写像である.

(2.16), (2.17) と上の (2) から次のことがわかる.

補題 2.19 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ または $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \partial[0,1]^n$ であるとき $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$ で表すことにして $[0,1]^n$ の関係 $\sim$ を定めれば, $\sim$ は同値関係であり, $\rho_n \circ \eta_n : [0,1]^n \to S^n$ はこの同値関係による商写像である.

定理 2.20 n が 2 以上の整数ならば, S^n から S^1 への任意の連続写像は, 定値写像にホモトピックである.

証明 $f : S^n \to S^1$ を連続写像とし, $f(0,0,\ldots,0,1) = p_0$ とおく. $e(t_0) = p_0$ を満たす $t_0 \in \boldsymbol{R}$ を 1 つ選び, $\rho_n\eta_n(0,0,\ldots,0) = (0,0,\ldots,0,1)$ であることに注意すれば, (1.15) の (1) から, 連続写像 $g : [0,1]^n \to \boldsymbol{R}$ で, $e \circ g = f \circ \rho_n \circ \eta_n$ かつ $g(0,0,\ldots,0) = t_0$ を満たすものがある. $\partial[0,1]^n$ は η_n によって S^{n-1} の上に同相に写り, S^{n-1} は ρ_n によって $(0,0,\ldots,0,1)$ に写るため, $\partial[0,1]^n$ のすべての点は $e \circ g = f \circ \rho_n \circ \eta_n$ によって p_0 に写る. 従って, $\partial[0,1]^n$ は g によって, $e^{-1}(p_0) = \{n + t_0 | n \in \boldsymbol{Z}\}$ に写される. (2.18) の (1) により, $\partial[0,1]^n$ の g による像は t_0 を含む $e^{-1}(p_0)$ の弧状連結な部分空間であるが, $e^{-1}(p_0)$ は $\boldsymbol{R}$ の離散位相をもつ部分空間であるため, $\partial[0,1]^n$ の g による像は t_0 のみからなる集合である. 故に (2.19) から, 連続写像 $\tilde{f} : S^n \to \boldsymbol{R}$ で, $\tilde{f} \circ \rho_n \circ \eta_n = g$ を満たすものがある. このとき $e \circ \tilde{f} \circ \rho_n \circ \eta_n = e \circ g = f \circ \rho_n \circ \eta_n$ であり, $\rho_n \circ \eta$ は全射だから, $e \circ \tilde{f} = f$ が成り立つため, (2.15) によって f は定値写像にホモトピックである. $\square$

§3. 応用例

定理 3.1 連続写像 $f, g : S^1 \to S^1$ の写像度が異なれば, f と g は一致点をもつ. 特に, f の写像度が 1 と異なれば, f は不動点をもち, f の写像度が 0 と異なれば, f は全射である.

証明 任意の $\boldsymbol{x} \in S^1$ に対して, $f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})$ が成り立てば $\deg(f) = \deg(g)$ であることを示せばよい. このとき, 任意の $t \in [0,1]$ に対して $(1-t)f(\boldsymbol{x}) \neq tg(\boldsymbol{x})$ だから, 連続写像 $F : S^1 \times [0,1] \to S^1$ を $F(\boldsymbol{x}, t) = \dfrac{(1-t)f(\boldsymbol{x}) - tg(\boldsymbol{x})}{\|(1-t)f(\boldsymbol{x}) - tg(\boldsymbol{x})\|}$ で定義できる. $F(\boldsymbol{x}, 0) = f(\boldsymbol{x})$, $F(\boldsymbol{x}, 1) = -g(\boldsymbol{x})$ だから (2.11), (2.3) の (2), (2.2) により, $\deg(f) = \deg(-g) = \deg(T \circ g) = \deg(T)\deg(g) = \deg(g)$. $\square$

定理 3.2 連続写像 $f : D^2 \to D^2$ は $f(S^1) \subset S^1$ を満たし, $f|_{S^1} : S^1 \to S^1$ を $f|_{S^1}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ で与えられる写像としたとき $\deg(f|_{S^1}) \neq 0$ であるとする. このとき, f は任意の連続写像 $g : D^2 \to D^2$ と一致点をもつ. 特に, D^2 から D^2 への連続写像はつねに不動点をもつ.

証明 任意の $\boldsymbol{x} \in D^2$ に対して, $f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})$ が成り立つと仮定する. 各 $\boldsymbol{x} \in D^2$ に対し, $g(\boldsymbol{x})$ を始点として $f(\boldsymbol{x})$ を通る半直線と S^1 との交点を $F(\boldsymbol{x})$ とする. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^2$ に対し, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を表すとし, $u(\boldsymbol{x}) = \dfrac{f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})}{\|f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})\|}$, $s(\boldsymbol{x}) = -(f(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{x})) + \sqrt{1 - \|f(\boldsymbol{x})\|^2 + (f(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{x}))^2}$ によって $u : D^2 \to S^1$, $s : D^2 \to \boldsymbol{R}$ を定めれば, $F(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + s(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x})$ であり, $F : D^2 \to S^1$ は連続である. また, $\boldsymbol{x} \in S^1$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \in S^1$ だから $F(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ である. 従って, $f|_{S^1}$ は D^2 への拡張 F をもつため, (2.12) により $\deg(f|_{S^1}) = 0$ となって仮定に反する. $\square$

上の定理の最後の主張は (1.10) の 2 次元のバージョンである. また (1.11) の 2 次元のバージョンは次のように

なる．

定理 3.3　任意の連続写像 $f : S^2 \to \boldsymbol{R}^2$ に対し，$f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ となる点 $\boldsymbol{x} \in S^2$ が存在する．

証明　$h : D^2 \to S^2$ を $h(x_1, x_2) = \bigl(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\bigr)$ で定める．すべての $\boldsymbol{x} \in S^2$ に対して，$f(-\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{x})$ と仮定すれば，$G : D^2 \to S^1$ を $G(\boldsymbol{x}) = \dfrac{f(h(\boldsymbol{x})) - f(-h(\boldsymbol{x}))}{\|f(h(\boldsymbol{x})) - f(-h(\boldsymbol{x}))\|}$ で定めることができる．$g : S^1 \to S^1$ を G の S^1 への制限とすれば，(2.12) により $\deg(g) = 0$ である．一方すべての $x \in S^1$ に対して，$g(-x) = -g(x)$ が成り立つため，(2.5) において $n = 2$, $k = 1$ の場合を考えれば，$\deg(g)$ は奇数であり，矛盾が生じる．　□

定理 3.4　(1) 連続写像 $f : S^1 \to S^1$ の写像度が奇数ならば $f(-z) = -f(z)$ となる点 $z \in S^1$ が存在する．

(2) 連続写像 $f : S^1 \to S^1$ の写像度が偶数ならば $f(-z) = f(z)$ となる点 $z \in S^1$ が存在する．

証明　(1) すべての $z \in S^1$ に対して，$f(-z) \neq -f(z)$ ならば，f の写像度は偶数であることを示す．$g : S^1 \to S^1$ を $g(z) = \dfrac{f(z) + f(-z)}{|f(z) + f(-z)|}$ で定めると，すべての $z \in S^1$ に対して $g(-z) = g(z)$ だから，(2.5) において $n = 2$, $k = 0$ の場合を考えれば，g の写像度は偶数である．ところが任意の $z \in S^1$ と $t \in [0, 1]$ に対して，$(1-t)f(z) + tg(z) \neq 0$ だから $H : S^1 \times [0, 1] \to S^1$ を $H(z, t) = \dfrac{(1-t)f(z) + tg(z)}{|(1-t)f(z) + tg(z)|}$ で定義できる．$H(z, 0) = f(z)$, $H(z, 1) = g(z)$ だから f は g にホモトピックである．従って (2.11) から $\deg(f) = \deg(g)$ となって，$\deg(f)$ は偶数である．

(2) すべての $z \in S^1$ に対して，$f(-z) \neq f(z)$ ならば，f の写像度は奇数であることを示す．$g : S^1 \to S^1$ を $g(z) = \dfrac{f(z) - (-z)}{|f(z) - f(-z)|}$ で定めると，すべての $z \in S^1$ に対して $g(-z) = -g(z)$ だから，(2.5) において $n = 2$, $k = 1$ の場合を考えれば，g の写像度は奇数である．ところが任意の $z \in S^1$ と $t \in [0, 1]$ に対して，$(1-t)f(z) - tg(z) \neq 0$ だから $H : S^1 \times [0, 1] \to S^1$ を $H(z, t) = \dfrac{(1-t)f(z) - tg(z)}{|(1-t)f(z) - tg(z)|}$ で定義できる．$H(z, 0) = f(z)$, $H(z, 1) = g(z)$ だから f は g にホモトピックである．従って (2.11) から $\deg(f) = \deg(g)$ となって，$\deg(f)$ は奇数である．　□

定理 3.5　(代数学の基本定理) 複素数を係数とする n 次代数方程式 $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ は，$r = \max\{1, |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|\}$ とおくと，絶対値が r 以下である複素数の解を少なくとも一つもつ．

証明　$f : D^2 \to D^2$ を $f(z) = z^n$ で定義すれば，f は連続で $f(S^1) \subset S^1$ を満たす．一方，$|z| \leqq r$ ならば

$$
\begin{aligned}
|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| &\leqq |a_{n-1}||z^{n-1}| + \cdots + |a_1||z| + |a_0| \leqq |a_{n-1}|r^{n-1} + \cdots + |a_1|r + |a_0| \\
&= r^{n-1}\Bigl(|a_{n-1}| + \cdots + \frac{|a_1|}{r^{n-2}} + \frac{|a_0|}{r^{n-1}}\Bigr) \leqq r^{n-1}(|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|) \leqq r^n
\end{aligned}
$$

だから，連続写像 $g : D^2 \to D^2$ が $g(z) = -\dfrac{1}{r^n}(a_{n-1}(rz)^{n-1} + \cdots + a_1(rz) + a_0)$ で定義できる．(2.4) から $\deg(f|_{S^1}) = n \neq 0$ だから (3.2) により $z_0 \in D^2$ で $f(z_0) = g(z_0)$ を満たす $z_0 \in D^2$ が存在する．このとき $(rz_0)^n = -(a_{n-1}(rz_0)^{n-1} + \cdots + a_1(rz_0) + a_0)$ だから rz_0 は与えられた方程式の解である．　□

§4.　アーベル群

X, Y を集合とするとき，X の要素 x と Y の要素 y の対 (x, y) 全体からなる集合 $\{(x, y) | x \in X,\ y \in Y\}$ を $X \times Y$ で表し，X と Y の直積という．

定義 4.1　集合 G に演算 $\mu : G \times G \to G$ が与えられているとき，$x, y \in G$ に対して $\mu(x, y)$ を $x \cdot y$ で表す．以下の性質 $(i) \sim (iv)$ を考える

(i) 任意の $x, y, z \in G$ に対して $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

(ii) $e \in G$ で，任意の $x \in G$ に対して $x \cdot e = e \cdot x = x$ を満たすものがある．

(iii) 任意の $x \in G$ に対して $y \in G$ で $x \cdot y = y \cdot x = e$ を満たすものがある．

(iv) 任意の $x \in G$ に対して $x \cdot y = y \cdot x$.

上の (i), (ii), (iii) が成り立つとき, G は演算 μ により群であるという. さらに (iv) が成り立つとき, G はアーベル群であるという.

命題 4.2 集合 G に演算 $\mu : G \times G \to G$ が与えられているとし, $x, y \in G$ に対して $\mu(x, y)$ を $x \cdot y$ で表す.

(1) $e, e' \in G$ が任意の $x \in G$ に対して $x \cdot e = e' \cdot x = x$ を満たせば, $e = e'$ である.

(2) μ が (4.1) の (i), (ii) を満たすとする. $x \in G$ に対して $y, y' \in G$ で $x \cdot y = y' \cdot x = e$ を満たすものがあれば, $y = y'$ である.

証明 (1) $x = e'$ とすれば $e' \cdot e = e'$, $x = e$ とすれば $e' \cdot e = e$ だから $e' = e' \cdot e = e$.

(2) $y = e \cdot y = (y' \cdot x) \cdot y = y' \cdot (x \cdot y) = y' \cdot e = y'$. □

上の (1) により (4.1) の (ii) における e はただ 1 つしかないことが分かる. このような G の要素 e を G の単位元という. また, 上の (2) により $x \in G$ に対し, (4.1) の (iii) における y はただ 1 つしかないことが分かる. このような G の要素 y を x の逆元といい, x^{-1} で表す.

定義 4.3 G, H を群とする. 写像 $f : G \to H$ が, 任意の $x, y \in G$ に対して $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ を満たすとき, f を準同型写像という. G から H への準同型写像全体の集合を $\mathrm{Hom}(G, H)$ で表す.

準同型写像 $f : G \to H$ に対し, 準同型写像 $g : H \to G$ で $g \circ f = id_G$, $f \circ g = id_H$ を満たすものがあるとき, f を同型写像という. また, G と H の間に同型写像が存在するとき G と H は同型であるという.

命題 4.4 $f : G \to H$ を準同型写像とする. e が G の単位元ならば $f(e)$ は H の単位元であり, $x \in G$ に対して $f(x^{-1})$ は $f(x)$ の逆元である.

証明 e' を H の単位元とすると $f(e) = f(e) \cdot e' = f(e) \cdot (f(e) \cdot (f(e))^{-1}) = (f(e) \cdot f(e)) \cdot (f(e))^{-1} = f(e \cdot e) \cdot (f(e))^{-1} = f(e) \cdot (f(e))^{-1} = e'$. $f(x) \cdot f(x^{-1}) = f(x \cdot x^{-1}) = f(e) = e'$, $f(x^{-1}) \cdot f(x) = f(x^{-1} \cdot x) = f(e) = e'$ であり, (4.1) の (iii) における y はただ 1 つしかないため $f(x^{-1})$ は $f(x)$ の逆元である. □

命題 4.5 (1) 準同型写像の合成写像は準同型写像である.

(2) 準同型写像 $f : G \to H$ が単射であるためには「$f(x) = e$ ならば $x = e$」が成り立つことが必要十分である.

(3) 準同型写像 $f : G \to H$ が同型写像であるためには, f が全単射であることが必要十分である.

証明 (1) $f : G \to H$, $g : H \to K$ を準同型写像とすれば $x, y \in G$ に対し, $(h \circ f)(x \cdot y) = h(f(x \cdot y)) = h(f(x) \cdot f(y)) = h(f(x)) \cdot h(f(y)) = (h \circ f)(x) \cdot (h \circ f)(y)$.

(2) 「$f(x) = e$ ならば $x = e$」が成り立つとき $f(x) = f(y)$ とすれば $f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} = f(x)f(x)^{-1} = e$ だから $xy^{-1} = e$ である. 従って $x = y$ となり f は単射である. 逆は明らか.

(3) $f : G \to H$ が同型写像ならば f の逆写像があるため, f は全単射である. 逆に $f : G \to H$ を全単射であるような準同型写像とすれば, f の逆写像 f^{-1} は準同型写像である. 実際 $z, w \in H$ に対し, $f^{-1}(z) = x$, $f^{-1}(w) = y$ とおくと $f(x) = z$, $f(y) = w$ だから $z \cdot w = f(x) \cdot f(y) = f(x \cdot y)$ となるため $f^{-1}(z \cdot w) = x \cdot y = f^{-1}(z) \cdot f^{-1}(w)$ である. □

以後, 取り扱う群はすべてアーベル群である. このとき, 慣例に従いアーベル群の演算記号は $+$ を用い, 単位元を 0, x の逆元を $-x$ で表す. また, 整数 r とアーベル群 G の要素 x に対し $rx \in G$ を $r > 0$ の場合は $rx = \overbrace{x + x + \cdots + x}^{r\text{ 個}}$, $0x = 0$, $r < 0$ の場合は $rx = -(\overbrace{x + x + \cdots + x}^{-r\text{ 個}})$ で定める. このとき, $x, y \in G$, $s, r \in \boldsymbol{Z}$ に対し $s(x + y) = sx + sy$, $(r + s)x = rx + sx$ が成り立つことが容易に確かめられる.

定義 4.6　G をアーベル群とする.

(1) G の部分集合 H が "$x, y \in H$ ならば $x+y, -x \in H$" を満たすとき, H は G の演算によりアーベル群になるが, このとき H を G の部分群という.

(2) G の要素 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ に対し, $r_1 s_1 + r_2 s_2 + \cdots + r_n s_n$ $(r_1, r_2, \ldots, r_n \in \boldsymbol{Z})$ の形をした G の要素を $s_1, s_2, \ldots, s_n$ の 1 次結合という.

(3) S を G の部分集合する. S の要素の 1 次結合で表せる G の要素全体からなる集合を $\langle S \rangle$ で表す. すなわち $\langle S \rangle = \{r_1 s_1 + r_2 s_2 + \cdots + r_n s_n | \, s_1, s_2, \ldots, s_n \in S, \ r_1, r_2, \ldots, r_n \in \boldsymbol{Z}\}$. $G = \langle S \rangle$ が成り立つとき S は G を生成するという. G を生成する G の有限部分集合が存在するとき, G は有限生成であるという.

(4) S を G の部分集合する. 任意の有限個の相異なる S の要素 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ が $r_1 s_1 + r_2 s_2 + \cdots + r_n s_n = 0$ $(r_i \in \boldsymbol{Z})$ を満たすのは $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$ に限るとき, S は 1 次独立であるという.

(5) G の部分集合 S が 1 次独立であり G を生成するとき, S を G の基底という.

(6) 基底が存在するようなアーベル群を自由アーベル群という.

例 4.7　(1) アーベル群 G と整数 n に対し, $nG = \{nx | \, x \in G\}$ とおくと nG　は G の部分群である.

(2) G を $\{0\}$ と異なる $\boldsymbol{Z}$ の部分群とすれば G に含まれる正の整数で最小のものを n とすると $G = \langle n \rangle$ である. 実際, $k \in G$ に対し k を n で割った商を q 余りを r とすると $n > r = k - qn \in G$ だから n の最小性から $r = 0$ である.

S を集合とするとき, アーベル群 $F(S)$ と単射 $\eta_S : S \to F(S)$ を以下のようにして構成する.

$F(S)$ を写像 $f : S \to \boldsymbol{Z}$ で, 有限個の S の要素を除いては 0 を値にとるもの全体からなる集合とする. すなわち $\mathrm{Map}(X, Y)$ により, 集合 X から Y への写像全体からなる集合を表すと,

$$F(S) = \{f \in \mathrm{Map}(S, \boldsymbol{Z}) | \, S - f^{-1}(0) \text{ は有限集合 }\}$$

とする. $f, g \in F(S)$ に対して $f + g : S \to \boldsymbol{Z}$ を $(f+g)(s) = f(s) + g(s)$ で定めれば, 明らかに $f + g \in F(S)$ だから, $F(S)$ の演算が定義される. $0 : S \to \boldsymbol{Z}$ を S のすべての要素を 0 に移す写像とすると, $F(S)$ は 0 を単位元とするアーベル群になることがわかる. $s \in S$ に対し $b_s : S \to \boldsymbol{Z}$ を

$$b_s(t) = \begin{cases} 1 & t = s \\ 0 & t \neq s \end{cases}$$

で定めれば $b_s \in F(S)$ であり, $\eta_S(s) = b_s$ によって $\eta_S : S \to F(S)$ を定義する.

命題 4.8　$F(S)$ は $\eta_S(S) = \{b_s | \, s \in S\}$ を基底とする自由アーベル群である.

証明　$f \in F(S)$ を任意に取り, $S - f^{-1}(0) = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ $(i \neq j$ ならば $s_i \neq s_j)$ とすると,

$$f = f(s_1) b_{s_1} + f(s_2) b_{s_2} + \cdots + f(s_n) b_{s_n}$$

が成り立つため, $\eta_S(S)$ は $F(S)$ を生成する. $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S$ $(i \neq j$ ならば $s_i \neq s_j)$, $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \boldsymbol{Z}$ に対し $r_1 b_{s_1} + r_2 b_{s_2} + \cdots + r_n b_{s_n} = 0$ とすれば $(r_1 b_{s_1} + r_2 b_{s_2} + \cdots + r_n b_{s_n})(s_i) = r_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ だから $\eta_S(S)$ は 1 次独立である. □

$\eta_S : S \to F(S)$ は単射だから η_S によって S と $\eta_S(S)$ を同一視すれば, $F(S)$ は S を基底とする自由アーベル群と言える. 以後 b_s も単に s と書くことがある.

補題 4.9　G をアーベル群, S を G の 1 次独立な部分集合とする. $r_1 s_1 + r_2 s_2 + \cdots + r_n s_n = r'_1 s'_1 + r'_2 s'_2 + \cdots + r'_m s'_m$ $(r_i, r'_i \in \boldsymbol{Z} - \{0\}, \ s_i, s'_i \in S)$ であり, $i \neq j$ ならば $s_i \neq s_j$, $s'_i \neq s'_j$ が成り立つとき, $n = m$ であり, 置換 $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ で $s'_i = s_{\sigma(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を満たすものがあって, $r'_i = r_{\sigma(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ となる.

証明 $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} - \{s'_1, s'_2, \dots, s'_m\}$ が空集合でなければ, $s_i \in \{s_1, s_2, \dots, s_n\} - \{s'_1, s'_2, \dots, s'_m\}$ とすると, $r_1s_1+r_2s_2+\cdots+r_ns_n = r'_1s'_1+r'_2s'_2+\cdots+r'_ms'_m$ の左辺を右辺に移項すれば, $r_is_i+(S-\{s_i\}$ の要素の 1 次結合$) = 0$ だから S の 1 次独立性から $r_i = 0$ となって仮定に反する. 従って $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} - \{s'_1, s'_2, \dots, s'_m\}$ は空集合, すなわち $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset \{s'_1, s'_2, \dots, s'_m\}$ である. 同様に $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} \supset \{s'_1, s'_2, \dots, s'_m\}$ でもあるため, $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} = \{s'_1, s'_2, \dots, s'_m\}$ である. 故に $n = m$ であり, 置換 $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ で $s'_i = s_{\sigma(i)}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ を満たすものがある. このとき $r_1s_1 + r_2s_2 + \cdots + r_ns_n = r'_1s_{\sigma(1)} + r'_2s_{\sigma(i)} + \cdots + r'_ms_{\sigma(m)}$ より $(r'_1 - r_{\sigma(1)}) + (r'_2 - r_{\sigma(2)})s_{\sigma(i)} + \cdots + (r'_m - r_{\sigma(m)})s_{\sigma(m)} = 0$ だから S の 1 次独立性から $r'_i = r_{\sigma(i)}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ を得る. □

補題 4.10 G を自由アーベル群, S を G の基底とする. $\Phi : F(S) \to G$ を $\Phi(f) = \displaystyle\sum_{s \in S - f^{-1}(0)} f(s)s$ で定めれば Φ は同型写像である.

証明 まず $f \in F(S)$ に対し, A が $S - f^{-1}(0)$ を含む有限部分集合ならば

$$\sum_{s \in S - f^{-1}(0)} f(s)s = \sum_{s \in A} f(s)s$$

であることに注意する. $f, g \in F(S)$ とすると, $(f+g)^{-1}(0) \supset f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$ だから $S - (f+g)^{-1}(0) \subset (S - f^{-1}(0)) \cup (S - g^{-1}(0))$. 従って

$$\begin{aligned}
\Phi(f+g) &= \sum_{s \in S - (f+g)^{-1}(0)} (f+g)(s)s = \sum_{s \in (S - f^{-1}(0)) \cup (S - g^{-1}(0))} (f+g)(s)s \\
&= \sum_{s \in (S - f^{-1}(0)) \cup (S - g^{-1}(0))} (f(s)s + g(s)s) \\
&= \sum_{s \in (S - f^{-1}(0)) \cup (S - g^{-1}(0))} f(s)s + \sum_{s \in (S - f^{-1}(0)) \cup (S - g^{-1}(0))} g(s)s \\
&= \sum_{s \in S - f^{-1}(0)} f(s)s + \sum_{s \in S - g^{-1}(0)} g(s)s = \Phi(f) + \Phi(g)
\end{aligned}$$

となるため, Φ は準同型写像である. 任意の $s \in S$ に対し $\Phi(b_s) = s$ で S は G を生成するため Φ は全射である. $f \in F(S) - \{0\}$ とすれば, $S - f^{-1}(0)$ は空でないため, S の 1 次独立性から $\Phi(f)$ は 0 でないため, Φ は単射である. 従って (4.5) の (2) から Φ は同型写像である. □

S を集合, G をアーベル群とする. $\mathrm{Map}(S, G)$ に演算 $+$ を $f, g \in \mathrm{Map}(S, G)$ に対し, $(f+g)(s) = f(s) + g(s)$ により定義すると, $\mathrm{Map}(S, G)$ は S のすべての要素を 0 に移す写像を単位元とするアーベル群である. さらに, S がアーベル群の構造を持つとき, $\mathrm{Hom}(S, G)$ は $\mathrm{Map}(S, G)$ の部分群になっている.

命題 4.11 G を自由アーベル群とする. S を G の基底とし $i : S \to G$ を包含写像とするとき, 任意のアーベル群 H に対して $\varphi \mapsto \varphi \circ i$ で定義される写像 $i^* : \mathrm{Hom}(G, H) \to \mathrm{Map}(S, H)$ は同型写像である.

証明 まず $G = F(S)$, $i = \eta_S$ の場合に $i^* : \mathrm{Hom}(F(S), H) \to \mathrm{Map}(S, H)$ が同型写像であることを示す. $\eta_S^*(\varphi) = 0$ とすれば, すべての $s \in S$ に対し $\varphi(s) = 0$ であり, $F(S)$ は S で生成され, φ は準同型写像だから $\varphi = 0$ となる. 明らかに η_S^* は準同型写像だから, η_S^* は単射である. 任意の写像 $\psi : S \to H$ に対し, $\varphi : F(S) \to H$ を $\varphi(f) = \displaystyle\sum_{s \in S - f^{-1}(0)} f(s)\psi(s)$ で定めれば, (4.10) の証明と同様にして φ は準同型写像であることが分かる. さらに $\eta_S^*(\varphi)(s) = \varphi(b_s) = b_s(s)\psi(s) = \psi(s)$ だから $\eta_S^*(\varphi) = \psi$ となり η_S^* が全射でもあることがわかる.

G が S を基底とする自由アーベル群の場合, (4.10) で与えた同型写像 $\Phi : F(S) \to G$ を考えると $\Phi(\alpha) = \alpha \circ \Phi$ で与えられる写像 $\Phi^* : \mathrm{Hom}(G, H) \to \mathrm{Hom}(F(S), H)$ は同型写像であり, $\Phi \circ \eta_S = i$ だから合成写像 $\eta_S^* \circ \Phi^* : \mathrm{Hom}(G, H) \to \mathrm{Hom}(F(S), H)$ は i^* に一致する. 従って i^* は同型写像である. □

H をアーベル群 G の部分群とする．G における関係 $\equiv$ を "$x \equiv y \Leftrightarrow x - y \in H$" で定めれば，これは同値関係である．この同値関係による G の商集合を G/H で表し，$p : G \to G/H$ を商写像として，G/H の演算 $+$ を以下のように定める．

$\xi, \zeta \in G/H$ に対し $\pi(x) = \xi$, $\pi(y) = \zeta$ を満たす $x, y \in G$ を選び $\xi + \zeta = \pi(x+y)$ と定義する．このとき $\pi(x+y)$ は $\pi(x) = \xi$, $\pi(y) = \zeta$ を満たす $x, y \in G$ の選び方に依存しない．実際 $\pi(x) = \pi(z) = \xi$, $\pi(y) = \pi(w) = \zeta$ とすると，$x - z, y - w \in H$ だから $(x+y) - (z+w) = (x-z) + (y-w) \in H$ となるため $\pi(x+y) = \pi(z+w)$ である．

この演算により G/H は $\pi(0)$ を単位元とするアーベル群であり，$\pi : G \to G/H$ は全射準同型写像である．

命題 4.12 K をアーベル群とするとき，$\pi^*(f) = f \circ \pi$ で与えられる写像 $\pi^* : \mathrm{Hom}(G/H, K) \to \mathrm{Hom}(G, K)$ は $\{g \in \mathrm{Hom}(G, K) |\ H \subset g^{-1}(0)\}$ の上への単射である．

証明 $\pi^*(f) = 0$ とすれば，任意の $\xi \in G/H$ に対して $\pi(x) = \xi$ となる $x \in G$ があるから $f(\xi) = f(\pi(x)) = f \circ \pi(x) = 0$ となって $f = 0$ である．従って π^* は単射である．任意の $h \in H$ に対し $\pi(h) = 0$ だから $\pi^*(f)(h) = f(\pi(h)) = 0$ となるため π の像は $\{g \in \mathrm{Hom}(G, K) |\ H \subset g^{-1}(0)\}$ に含まれる．$g \in \mathrm{Hom}(G, K)$ が $H \subset g^{-1}(0)$ を満たすとき $f : G/H \to K$ を以下のように定義する．$\xi \in G/H$ に対し $\pi(x) = \xi$ を満たすように $x \in G$ を選び，$f(\xi) = g(x)$ とする．$\pi(x) = \pi(y) = \xi$ ならば $x - y \in H$ だから $g(x) = g(y + (x-y)) = g(x) + g(x-y) = g(x)$ となるため $g(x)$ の値は $\pi(x) = \xi$ を満たす $x \in G$ の選び方に依存しない．このように定めた f は $\pi^*(f) = f \circ \pi = g$ を満たす準同型写像であることは容易に確かめられるため，π^* は $\{g \in \mathrm{Hom}(G, K) |\ H \subset g^{-1}(0)\}$ の上への写像である． □

$f : G \to H$ をアーベル群の準同型写像とし，K を G の部分群，L を H の部分群とすれば，$f(K)$ は H の部分群であり，$f^{-1}(L)$ は G の部分群であることに注意する．とくに $L = \{0\}$ のとき $f^{-1}(0)$ を f の核と言い，$\mathrm{Ker}\, f$ で表す．また，f の像 $f(G)$ を $\mathrm{Im}\, f$ で表す．

命題 4.13 (準同型定理) $f : G \to K$ をアーベル群の全射準同型写像とし，$\pi : G \to G/\mathrm{Ker}\, f$ を商写像とする．上の命題により $\pi^*(\bar{f}) = f$ を満たす準同型写像 $\bar{f} : G/\mathrm{Ker}\, f \to K$ がただ 1 つ存在するが，これは同型写像である．

証明 $\bar{f} \circ \pi = f$ で f は全射だから $\bar{f}$ も全射である．$\bar{f}(\xi) = 0$ とし $\pi(x) = \xi$ となる $x \in G$ をとれば $f(x) = \bar{f} \circ \pi(x) = \bar{f}(\pi(x)) = \bar{f}(\xi) = 0$ より $x \in \mathrm{Ker}\, f$ である．従って $\xi = \pi(x) = 0$ だから $\bar{f}$ は単射である． □

例 4.14 G を 1 つの要素 g で生成されるアーベル群とする．$p : \boldsymbol{Z} \to G$ を $\theta(n) = ng$ で定義すれば p は全射準同型写像である．このとき p が同型写像でなければ (4.7) の (2) から $\mathrm{Ker}\, p = \langle l \rangle$ となる正の整数 l があるため準同型定理から G は $\boldsymbol{Z}/l\boldsymbol{Z}$ と同型である．

定義 4.15 $(G_i)_{i \in I}$ をアーベル群の族とする．

(1) 直積集合 $\prod\limits_{i \in I} G_i$ に演算 $+$ を $(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} = (x_i + y_i)_{i \in I}$ で定義すれば，$\prod\limits_{i \in I} G_i$ はアーベル群になるが，これを $(G_i)_{i \in I}$ の直積という．各 $j \in I$ に対し，$p_j((x_i)_{i \in I}) = x_j$ により準同型写像 $p_j : \prod\limits_{i \in I} G_i \to G_j$ が定まるが，これを j-成分への射影という．

(2) $\prod\limits_{i \in I} G_i$ の要素 $(x_i)_{i \in I}$ で有限個の $i \in I$ を除いては $x_i = 0$ であるようなもの全体からなる $\prod\limits_{i \in I} G_i$ の部分群を $\bigoplus\limits_{i \in I} G_i$ で表し，$(G_i)_{i \in I}$ の直和という．各 $j \in I$ に対し，$\iota_j(x) = (x_i)_{i \in I}$, $x_i = \begin{cases} x & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ により準同型写像 $\iota_j : G_j \to \bigoplus\limits_{i \in I} G_i$ が定まるが，これを j-成分への射入という．

(3) G_i がすべてアーベル群 G の部分群であるとき $\bigcup\limits_{i \in I} G_i$ で生成される G の部分群を $\sum\limits_{i \in I} G_i$ で表す．

とくに I が有限集合 $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ の場合，$\prod\limits_{i \in I} G_i$, $\bigoplus\limits_{i \in I} G_i$ をそれぞれ $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$, $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$ で表す．この場合，$G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$ であることに注意する．さらに $G_i \subset G$ $(i \in I)$ のと

き $\sum_{i\in I} G_i$ を $G_1+G_2+\cdots+G_n$ で表す.

命題 4.16　H, K をアーベル群 G の部分群とすれば, 包含写像 $i: H\to H+K$ は同型写像 $H/(H\cap K)\to(H+K)/K$ を誘導する.

証明　$p: H+K\to(H+K)/K$ を商写像とすると $\mathrm{Ker}\, p=K$ より $\mathrm{Ker}\, p\circ i=H\cap K$ である. 従って (4.13) より同型写像 $H/(H\cap K)\to(H+K)/K$ が得られる. □

命題 4.17　A, G_1, G_2 をアーベル群とするとき次の 2 つは同値である.

(1) A は $G_1\oplus G_2$ と同型である.

(2) 準同型写像 $p_k: A\to G_k$, $i_k: G_k\to A$ $(k=1,2)$ で $p_k\circ i_k=id_{G_k}$ $(k=1,2)$, $i_1\circ p_1+i_2\circ p_2=id_A$ を満たすものがある.

証明　(1)⇒(2)　$f: A\to G_1\oplus G_2$ を同型写像とし, $q_k: G_1\oplus G_2\to G_k$ $(k=1,2)$ を 第 k 成分への射影, $j_k: G_k\to G_1\oplus G_2$ $(k=1,2)$ を第 k 成分への射入とする. $p_k=q_k\circ f$, $i_k=f^{-1}\circ j_k$ $(k=1,2)$ により p_1, p_2, i_1, i_2 を定めれば, $q_k\circ j_k=id_{G_k}$ $(k=1,2)$, $j_1\circ q_1+j_2\circ q_2=id_A$ が成り立つことから $p_k\circ i_k=id_{G_k}$ $(k=1,2)$, $i_1\circ p_1+i_2\circ p_2=id_A$ が得られる.

(2)⇒(1)　$f: A\to G_1\oplus G_2$ を $f(x)=(p_1(x),p_2(x))$ で定め, $g: G_1\oplus G_2\to A$ を $g(y,z)=i_1(y)+i_2(z)$ で定める. $i_1\circ p_1+i_2\circ p_2=id_A$ より $p_k\circ i_1\circ p_1+p_k\circ i_2\circ p_2=p_k$ であり $p_k\circ i_k=id_{G_k}$ $(k=1,2)$ から $k\neq l$ ならば $p_k\circ i_l\circ p_l=0$ である. p_l は全射だから $p_k\circ i_l=0$ が得られる. 以上から, $g\circ f(x)=g((p_1(x),p_2(x))=i_1\circ p_1(x)+i_2\circ p_2(x)=x$, $f\circ g(y,z)=f(i_1(y)+i_2(z))=(p_1(i_1(y)+i_2(z)),p_2(i_1(y)+i_2(z)))=(p_1\circ i_1(y)+p_1\circ i_2(z),p_2\circ i_1(y)+p_2\circ i_2(z))=(y,z)$ が得られるため g は f の逆写像である. □

命題 4.18　$(G_i)_{i\in I}$, $(H_i)_{i\in I}$ をアーベル群の族, $(f_i: G_i\to H_i)_{i\in I}$ を準同型写像の族とする.

(1) $\prod_{i\in I} f_i: \prod_{i\in I} G_i\to\prod_{i\in I} H_i$ を $\left(\prod_{i\in I} f_i\right)((x_i)_{i\in I})=(f_i(x_i))_{i\in I}$ で定めれば $\mathrm{Ker}\prod_{i\in I} f_i=\prod_{i\in I}\mathrm{Ker}\, f_i$, $\mathrm{Im}\prod_{i\in I} f_i=\prod_{i\in I}\mathrm{Im}\, f_i$ である. また, すべての $i\in I$ に対して G_i は H_i の部分群であり, f_i が包含写像の場合, $\pi_i: H_i\to H_i/G_i$ を商写像とすると $\prod_{i\in I}\pi_i: \prod_{i\in I} H_i\to\prod_{i\in I} H_i/G_i$ は同型写像 $\prod_{i\in I} H_i/\prod_{i\in I} G_i\to\prod_{i\in I} H_i/G_i$ を誘導する.

(2) $\bigoplus_{i\in I} f_i: \bigoplus_{i\in I} G_i\to\bigoplus_{i\in I} H_i$ を $\left(\bigoplus_{i\in I} f_i\right)((x_i)_{i\in I})=(f_i(x_i))_{i\in I}$ で定めれば $\mathrm{Ker}\bigoplus_{i\in I} f_i=\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Ker}\, f_i$, $\mathrm{Im}\bigoplus_{i\in I} f_i=\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Im}\, f_i$ である. また, すべての $i\in I$ に対して G_i は H_i の部分群であり, f_i が包含写像の場合, $\pi_i: H_i\to H_i/G_i$ を商写像とすると $\bigoplus_{i\in I}\pi_i: \bigoplus_{i\in I} H_i\to\bigoplus_{i\in I} H_i/G_i$ は同型写像 $\bigoplus_{i\in I} H_i/\bigoplus_{i\in I} G_i\to\bigoplus_{i\in I} H_i/G_i$ を誘導する.

定義 4.19　$f_i: G_i\to G_{i+1}$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ をアーベル群の準同型写像とする. $i=1,2,\ldots,n-1$ に対して $\mathrm{Im}\, f_{i-1}=\mathrm{Ker}\, f_i$ が成り立つとき, 図式

$$G_0\xrightarrow{f_0}G_1\xrightarrow{f_1}\cdots\xrightarrow{f_{i-2}}G_{i-1}\xrightarrow{f_{i-1}}G_i\xrightarrow{f_i}G_{i+1}\xrightarrow{f_{i+1}}\cdots\xrightarrow{f_{n-2}}G_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}G_n$$

を完全列という. とくに $n=4$ で $G_0=G_4=\{0\}$ の場合, $0\to G_1\xrightarrow{f_1}G_2\xrightarrow{f_2}G_3\to 0$ を短完全列という. これは, f_1 が単射, $\mathrm{Im}\, f_1=\mathrm{Ker}\, f_2$ かつ f_2 が全射であることを意味する.

命題 4.20　下のアーベル群と準同型写像の図式は可換であり, 上下の水平の列は完全列であるとする.

$$\begin{array}{ccccccc}
G_1 & \xrightarrow{f_1} & G_2 & \xrightarrow{f_2} & G_3 & \xrightarrow{f_3} & G_4 \\
\downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_3} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_4} \\
H_1 & \xrightarrow{g_1} & H_2 & \xrightarrow{g_2} & H_3 & \xrightarrow{g_3} & H_4
\end{array}$$

(1) φ_2, φ_4 が単射で φ_1 が全射ならば φ_3 は単射である.

(2) φ_1, φ_3 が全射で φ_4 が単射ならば φ_2 は全射である.

証明 (1) $\varphi_3(x) = 0$ $(x \in G_3)$ とする. $\varphi_4(f_3(x)) = g_3(\varphi_3(x)) = 0$ で φ_4 は単射だから $f_3(x) = 0$ である. すなわち $x \in \operatorname{Ker} f_3 = \operatorname{Im} f_2$ だから $f_2(y) = x$ となる $y \in G_2$ がある. $g_2(\varphi_2(y)) = \varphi_3(f_2(y)) = \varphi_3(x) = 0$ より $\varphi_2(y) \in \operatorname{Ker} g_2 = \operatorname{Im} g_1$ だから $\varphi_2(y) = g_1(z)$ となる $z \in H_1$ がある. φ_1 は全射だから $\varphi_1(w) = z$ となる $w \in G_1$ がある. $\varphi_2(f_1(w)) = g_1(\varphi_1(w)) = g_1(z) = \varphi_2(y)$ で φ_2 は単射だから $f_1(w) = y$ となる. 従って $x = f_2(y) = f_2(f_1(u)) = 0$ となるため φ_3 は単射である.

(2) $x \in H_2$ とする. φ_3 は全射だから $\varphi_3(y) = g_2(x)$ となる $y \in G_3$ がある. $\varphi_4(f_3(y)) = g_3(\varphi_3(y)) = g_3(g_2(x)) = 0$ で φ_4 は単射だから $f_3(y) = 0$ である. すなわち $y \in \operatorname{Ker} f_3 = \operatorname{Im} f_2$ だから $f_2(z) = y$ となる $z \in G_2$ がある. $g_2(x - \varphi_2(z)) = g_2(x) - g_2(\varphi_2(z)) = \varphi_3(y) - \varphi_3(f_2(z)) = 0$ だから $x - \varphi_2(z) \in \operatorname{Ker} g_2 = \operatorname{Im} g_1$ となるため $g_1(w) = x - \varphi_2(z)$ となる $w \in H_1$ がある. また φ_1 は全射だから $\varphi_1(u) = w$ となる $u \in G_1$ がある. $\varphi_2(z + f_1(u)) = \varphi_2(z) + \varphi_2(f_1(u)) = \varphi_2(z) + g_1(\varphi_1(u)) = \varphi_2(z) + g_1(w) = x$ となるため φ_2 は全射である. □

上の結果から次の結果がただちに得られる.

系 4.21 下のアーベル群と準同型写像の図式は可換であり, 上下の水平の列は完全列であるとする.

$$\begin{array}{ccccccccc}
G_1 & \xrightarrow{f_1} & G_2 & \xrightarrow{f_2} & G_3 & \xrightarrow{f_3} & G_4 & \xrightarrow{f_4} & G_5 \\
\downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_3} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_4} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_5} \\
H_1 & \xrightarrow{g_1} & H_2 & \xrightarrow{g_2} & H_3 & \xrightarrow{g_3} & H_4 & \xrightarrow{g_4} & H_5
\end{array}$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5$ が同型写像ならば φ_3 も同型写像である.

$f : G \to H$ をアーベル群の準同型写像, K をアーベル群とする. 写像 $f^* : \operatorname{Hom}(H, K) \to \operatorname{Hom}(G, K)$, $f_* : \operatorname{Hom}(K, G) \to \operatorname{Hom}(K, H)$ を $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$, $f_*(\beta) = f \circ \beta$ で定めれば, これらは準同型写像である.

命題 4.22 G をアーベル群とする.

(1) $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$ が完全列ならば $0 \to \operatorname{Hom}(G, A) \xrightarrow{i_*} \operatorname{Hom}(G, B) \xrightarrow{p_*} \operatorname{Hom}(G, C)$ も完全列である.

(2) $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ が完全列ならば $0 \to \operatorname{Hom}(C, G) \xrightarrow{p^*} \operatorname{Hom}(B, G) \xrightarrow{i^*} \operatorname{Hom}(A, G)$ も完全列である.

証明 (1) i は単射だから i_* も単射である. $\operatorname{Im} i = \operatorname{Ker} p$ から $p \circ i = 0$ となるため, $f : G \to A$ を準同型写像とすれば, $p_* \circ i_*(f) = p \circ i \circ f = 0$. 従って $\operatorname{Im} i_* \subset \operatorname{Ker} p_*$ である. $g \in \operatorname{Ker} p_*$ とすると $p \circ g = 0$ だから $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} i$. i は単射だから, 各 $x \in G$ に対して $g(x) = i(\bar{x})$ となる $\bar{x} \in A$ がただ一つある. そこで $f(x) = \bar{x}$ により写像 $f : G \to A$ を定めれば f は $g = i \circ f = i_*(f)$ を満たす準同型写像である. 故に $g \in \operatorname{Im} i_*$ となるため $\operatorname{Im} i_* \subset \operatorname{Ker} p_*$ である.

(2) p は全射だから p^* は単射である. $\operatorname{Im} i = \operatorname{Ker} p$ から $p \circ i = 0$ となるため, $f : C \to G$ を準同型写像とすれば, $i^* \circ p^*(f) = f \circ p \circ i = 0$. 従って $\operatorname{Im} p^* \subset \operatorname{Ker} i^*$ である. $g \in \operatorname{Ker} i^*$ とすると $g \circ i = 0$ だから $\operatorname{Ker} g \supset \operatorname{Im} i = \operatorname{Ker} p$. $\pi : B \to B/\operatorname{Ker} p$ を商写像とすれば, (4.12) から $h : B/\operatorname{Ker} p \to G$ で $h \circ \pi = g$ を満たすものがある. さらに準同型定理から同型写像 $\bar{p} : B/\operatorname{Ker} p \to C$ で $p = \bar{p} \circ \pi$ を満たすものがある. このとき $p^*(h \circ \bar{p}^{-1}) = h \circ \bar{p}^{-1} \circ p = h \circ \pi = g$ だから $g \in \operatorname{Im} p^*$ となって $\operatorname{Ker} i^* \subset \operatorname{Im} p^*$ を得る. □

命題 4.23 $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ を短完全列とする.

(1) 準同型写像 $s : C \to B$ で $p \circ s = id_C$ を満たすものがあるとき, 準同型写像 $q : B \to A$ で $q \circ i = id_A$, $i \circ q + s \circ p = id_B$ を満たすものがある.

(2) 準同型写像 $q : B \to A$ で $q \circ i = id_A$ を満たすものがあるとき, 準同型写像 $s : C \to B$ で $p \circ s = id_C$, $i \circ q + s \circ p = id_B$ を満たすものがある.

証明 (1) $p_*(id_B - s\circ p) = p\circ id_B - p\circ s\circ p = p - p = 0$ だから (4.22) の (1) から $q: B\to A$ で $i_*(q) = id_B - s\circ p$ を満たすものがある．このとき $i\circ q + s\circ p = id_B$ は明らか．$p\circ i = 0$ から $i = i\circ q\circ i + s\circ p\circ i = i\circ q\circ i$ であり i は単射だから $q\circ i = id_A$ が得られる．

(2) $i^*(id_B - i\circ q) = id_B\circ i - i\circ q\circ i = i - i = 0$ だから (4.22) の (2) から $s: C\to B$ で $p^*(s) = id_B - i\circ q$ を満たすものがある．このとき $i\circ q + s\circ p = id_B$ は明らか．$p\circ i = 0$ から $p = p\circ i\circ q + p\circ s\circ p = p\circ s\circ p$ であり p は全射だから $p\circ s = id_C$ が得られる． □

(4.17) と上の結果から次の結果が得られる．

系 4.24 $0\to A\xrightarrow{i} B\xrightarrow{p} C\to 0$ を短完全列とする．準同型写像 $s: C\to B$ で $p\circ s = id_C$ を満たすものか, 準同型写像 $q: B\to A$ で $q\circ i = id_A$ を満たすものがあるとき B は $A\oplus C$ と同型である．

命題 4.25 $f: G\to A$ は全射準同型写像で, B は自由アーベル群ならば, 任意の準同型写像 $g: B\to A$ に対し, $\tilde{g}: B\to G$ で $f\circ\tilde{g} = g$ を満たすものがある．とくに, A が自由アーベル群ならば, 準同型写像 $\tilde{f}: A\to G$ で $f\circ\tilde{f} = id_A$ を満たすものがある．

証明 S を B の基底とする．各 $s\in S$ に対し $f(x_s) = g(s)$ となる $x_s\in G$ を選び $\bar{g}: S\to G$ を $\bar{g}(s) = x_s$ で定める．(4.11) より準同型写像 $\tilde{g}: B\to G$ で $\tilde{g}(s) = x_s$ $(s\in S)$ を満たすものがある．任意の $s\in S$ に対して $f\circ\tilde{g}(s) = f(x_s) = g(s)$ であり, S は A を生成するため $f\circ\tilde{g} = g$ である． □

命題 4.26 G は n 個の要素からなる基底をもつ自由アーベル群とする．H を G の部分群とすれば H は n 個以下の要素を基底にもつ自由アーベル群である．

証明 n による帰納法で示す．$n=1$ の場合, G の基底を $\{s_1\}$ とすると, $n\mapsto ns_1$ により G は $\boldsymbol{Z}$ と同型である．(4.7) の (2) から $H\neq\{0\}$ ならば正の整数 l_1 で $\{l_1 s_1\}$ が H の基底になるようなものが存在する．

$n-1$ の場合に主張は成立するとして, G は n 個の要素からなる基底 $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ をもつ自由アーベル群とする．(4.11) から準同型写像 $p: G\to\boldsymbol{Z}$ で $p(t_i) = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, $p(s_n) = 1$, を満たすものがある．$K = \mathrm{Ker}\,p\cap H$ とおくと $\mathrm{Ker}\,p$ は $\{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$ を基底とする自由アーベル群だから帰納法の仮定により K は $n-1$ 個以下の要素を基底にもつ自由アーベル群である．$H\subset\mathrm{Ker}\,p$ ならば $K = H$ だから主張は成立するから $H\not\subset\mathrm{Ker}\,p$ の場合を考える．p は全射準同型写像 $q: H\to p(H)$ $(x\mapsto p(x))$ を定め, $p(H)$ は $\boldsymbol{Z}$ の部分群だから自由アーベル群である．(4.25) と (4.24) から H は $K\oplus p(H)$ と同型になるため H は $n-1$ 個以下の要素を基底にもつ自由アーベル群である． □

命題 4.27 自由アーベル群の部分群も自由アーベル群である．

証明 G を自由アーベル群, S をその基底, H を $\{0\}$ でない G の部分群とする．$T\subset S$ に対し, $H_T = \langle T\rangle\cap H$ とおく．$\mathcal{S}$ を対 $(T, \{u_s|\, s\in U\})$ ($U\subset T\subset S$, $\{u_s|\, s\in U\}$ は H_T の基底) 全体からなる集合とすれば, この集合は空ではない．実際 $x\in H$ に対し $x = r_1 s_1 + r_2 s_2 + \cdots + r_n s_n$ $(r_1, r_2, \dots, r_n\in\boldsymbol{Z},\ s_1, s_2, \dots, s_n\in S)$ として $T = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ とおくと $\langle T\rangle$ は有限個の基底をもつ自由アーベル群だから (4.26) から, その部分群 H_T は T の要素の個数以下の基底をもつ自由アーベル群である．$\mathcal{S}$ の順序 $\leqq$ を

$$\text{“}(T, \{u_s|\, s\in U\}) \leqq (R, \{v_s|\, s\in V\}) \Leftrightarrow T\subset R,\ U\subset V,\ u_s = v_s\,(s\in U)\text{”}$$

で定める．このとき $\mathcal{S}$ は帰納的な順序集合になるため Zorn の補題により極大元が存在する．$(T, \{u_s|\, s\in U\})$ を $\mathcal{S}$ の極大元とする．$T\neq S$ と仮定すると $s_0\in S - T$ がとれる．$R = T\cup\{s_0\}$ とおくと, もし $H_R = \langle R\rangle\cap H = H_T$ ならば $(T, \{u_s|\, s\in U\}) \leqq (R, \{u_s|\, s\in U\})$ で $T\subsetneqq R$ だから $(T, \{u_s|\, s\in U\})$ の極大性に反する．従って $c\in\boldsymbol{Z} - \{0\}$ と $y\in\langle T\rangle$ で $cs_0 + y\in H_R$ となるものがある．$\{c\in\boldsymbol{Z}|\, cs_0 + y\in H$ となる $y\in\langle T\rangle$ がある $\}$ は $\boldsymbol{Z}$ の $\{0\}$ でない部分群だから, その生成元を r とする．このとき $rs_0 + y_0\in H_R$ となる $y_0\in\langle T\rangle$ があり $v_{s_0} = rs_0 + y_0$, $v_s = u_s$

$(s \in U)$ とおくと $\{v_s | s \in U \cup \{s_0\}\}$ は 1 次独立である．実際 $av_{s_0} \in H_T$ $(a \in \boldsymbol{Z})$ とすれば $ars_0 + ay_0 \in \langle T \rangle$ だから $ars_0 \in \langle T \rangle$ となるが $s_0 \notin T$ だから $a = 0$ である．また $x \in H_R$ とすると $x = cs_0 + y$ となる $c \in \boldsymbol{Z}$ と $y \in \langle T \rangle$ があるから r の選び方から $c = dr$ $(d \in \boldsymbol{Z})$ となる．$x - dv_{s_0} = y - dy_0 \in \langle T \rangle$ となり，$x, v_{s_0} \in H$ だから $x - dv_{s_0} \in H_T$ である．従って $\{v_s | s \in U \cup \{s_0\}\}$ は H_T を生成する．以上から $(R, \{v_s | s \in U \cup \{s_0\}\}) \in \mathcal{S}$ となり $(T, \{u_s | s \in U\})$ の極大性に反する．故に $T = S$, $H_T = H$ となって H の基底 $\{u_s | s \in U\}$ $(U \subset S)$ が存在する．□

定義 4.28　G, H をアーベル群とする．自由アーベル群 $F(G \times H)$ の部分群

$$S_{G,H} = \langle \{(x+y,z) - (x,z) - (y,z) | x, y \in G,\, z \in H\} \cup \{(x, z+w) - (x,z) - (x,w) | x \in G,\, z, w \in H\} \rangle$$

による商群 $F(G \times H)/S_{G,H}$ を $G \otimes H$ で表わし，G と H のテンソル積という．$p_{G,H} : F(G \times H) \to G \otimes H$ を商写像，$i_{G,H} : G \times H \to F(G \times H)$ を包含写像とするとき $x \in G$, $y \in H$ に対し $p_{G,H} \circ i_{G,H}(x,y) = x \otimes y$ とおく．

命題 4.29　G, H, K をアーベル群とする． 写像 $f : G \times H \to K$ は任意の $x, y \in G$, $z, w \in H$ に対して $f(x+y,z) = f(x,z)+f(y,z)$, $f(x,z+w) = f(x,z)+f(x,w)$ を満たすとする．このとき，準同型写像 $\bar{f} : G \otimes H \to K$ で任意の $x \in G$, $z \in H$ に対して $\bar{f}(x \otimes y) = f(x,y)$ を満たすものがただ 1 つある．

証明　$f' : F(G \times H) \to K$ を $f'((x,y)) = f(x,y)$ で定まる準同型写像とする．仮定から

$$f'((x+y,z) - (x,z) - (y,z)) = f'((x+y,z)) - f'((x,z)) - f'((y,z)) = f(x+y,z) - f(x,z) - f(y,z) = 0,$$

$$f'((x,z+w) - (x,z) - (x,w)) = f'((x,z+w)) - f'((x,z)) - f'((x,w)) = f(x,z+w) - f(x,z) - f(x,w) = 0$$

となるため，$S_{G,H} \subset \operatorname{Ker} f'$ である．従って，準同型写像 $\bar{f} : G \otimes H \to K$ で $\bar{f} \circ p_{G,H} = f'$ を満たすものがある．$\{x \otimes y | x \in G,\, y \in H\}$ は $G \otimes H$ を生成するため，$\bar{f}$ の一意性が分かる．□

定義 4.30　$f : G \to K$, $g : H \to L$ を準同型写像とする．$p_{K,L} \circ i_{K,L} \circ (f \times g) : G \times H \to K \otimes L$ から (4.29) によって定まる写像を $f \otimes g : G \otimes H \to K \otimes L$ で表わす．

§5.　鎖複体のホモロジー

定義 5.1　(1) アーベル群 C_n $(n \in \boldsymbol{Z})$ と準同型写像 $d_n : C_n \to C_{n-1}$ の族の対 $C. = ((C_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}, (d_n)_{n\in\boldsymbol{Z}})$ で $d_{n-1} \circ d_n = 0$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ を満たすものを鎖複体 (chain complex) という．

(2) $C. = ((C_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}, (d_n)_{n\in\boldsymbol{Z}})$, $D. = ((D_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}, (d'_n)_{n\in\boldsymbol{Z}})$ を鎖複体とする．準同型写像 $f_n : C_n \to D_n$ の族 $f. = (f_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}$ で $f_{n-1} \circ d_n = d'_n \circ f_n$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ を満たすものを $C.$ から $D.$ への 鎖写像 (chain map) といい，$f. : C. \to D.$ で表す．$C.$ から $D.$ への 鎖写像全体の集合を $\mathrm{Hom}(C., D.)$ で表す．

(3) $f., g. : C. \to D.$ を鎖写像とする．準同型写像 $\Phi_n : C_n \to D_{n+1}$ の族 $\Phi. = (\Phi_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}$ で $d'_{n+1} \circ \Phi_n + \Phi_{n-1} \circ d_n = g_n - f_n$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ を満たすものを $f.$ から $g.$ への鎖ホモトピー (chain homotopy) という．また $f.$ から $g.$ への鎖ホモトピーが存在することを $f. \simeq g.$ で表し，$f.$ と $g.$ は鎖ホモトピック (chain homotopic) であるという．

(4) 鎖写像 $f. : C. \to D.$, $g. : D. \to C.$ で $g. \circ f. \simeq id_{C.}$, $f. \circ g. \simeq id_{D.}$ を満たすものがあるとき，$C.$ と $D.$ は鎖ホモトピー同値であるといい，$f.$ を鎖ホモトピー同値写像，$g.$ を $f.$ の鎖ホモトピー逆写像という．

命題 5.2　$C. = ((C_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}, (d_n)_{n\in\boldsymbol{Z}})$, $D. = ((D_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}, (d'_n)_{n\in\boldsymbol{Z}})$, $E. = ((E_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}, (d''_n)_{n\in\boldsymbol{Z}})$ を鎖複体とする．

(1) $f. : C. \to D.$, $g. : D. \to E.$ を鎖写像とする．準同型写像の族 $(g_n \circ f_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}$ は $C.$ から $E.$ への鎖写像である．

(2) $C.$, $D.$ を鎖複体とするとき $\mathrm{Hom}(C., D.)$ の関係 $\simeq$ は同値関係である．

(3) $f., f'. : C. \to D.$, $g., g'. : D. \to E.$ を鎖写像とする．$f. \simeq f'.$, $g. \simeq g'.$ ならば $g. \circ f. \simeq g'. \circ f'.$ である．

証明　(1) $f_{n-1} \circ d_n = d'_n \circ f_n$, $g_{n-1} \circ d'_n = d''_n \circ g_n$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ だから $g_{n-1} \circ f_{n-1} \circ d_n = g_{n-1} \circ d'_n \circ f_n = d''_n \circ g_n \circ f_n$.

(2) $\Phi_n = 0$ により $f. \simeq f.$ である．$\Phi. = (\Phi_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}$ により $f. \simeq g.$ とすれば $d'_{n+1}\circ(-\Phi_n)+(-\Phi_{n-1})\circ d_n = f_n - g_n$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ だから $g. \simeq f.$ である．さらに $\Psi. = (\Psi_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}$ により $g. \simeq h.$ とすれば $d'_{n+1}\circ\Phi_n + \Phi_{n-1}\circ d_n = g_n - f_n$, $d'_{n+1}\circ\Psi_n + \Psi_{n-1}\circ d_n = h_n - g_n$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ だから $d'_{n+1}\circ(\Phi_n+\Psi_n) + (\Phi_{n-1}+\Psi_{n-1})\circ d_n = h_n - f_n$ である．

(3) $\Phi. = (\Phi_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}$ により $f. \simeq f'.$, $\Psi. = (\Psi_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}$ により $g. \simeq g'.$ とすれば $d'_{n+1}\circ\Phi_n + \Phi_{n-1}\circ d_n = f'_n - f_n$ であり $g.$ は鎖写像だから $d''_n\circ g_{n+1}\circ\Phi_n + g_n\circ\Phi_{n-1}\circ d_n = g_n\circ d'_{n+1}\circ\Phi_n + g_n\circ\Phi_{n-1}\circ d_n = g_n\circ f'_n - g_n\circ f_n$. 従って $(g_{n+1}\circ\Phi_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}$ により $g.\circ f. \simeq g.\circ f'.$ である．また $d''_{n+1}\circ\Psi_n + \Psi_{n-1}\circ d'_n = g'_n - g_n$ であり $f'.$ は鎖写像だから $d''_{n+1}\circ\Psi_n\circ f'_n + \Psi_{n-1}\circ f'_{n-1}\circ d_n = d''_{n+1}\circ\Psi_n\circ f'_n + \Psi_{n-1}\circ d'_n\circ f'_n = g'_n\circ f'_n - g_n\circ f'_n$. 従って $(\Psi_n\circ f'_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}$ により $g'.\circ f'. \simeq g.\circ f'.$ である． □

$(g_n\circ f_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}$ を $f.$ と $g.$ の合成といい, $g.\circ f.$ で表す．すべての $n \in \boldsymbol{Z}$ に対して $C_n = \{0\}$ であるような鎖複体を $0.$ で表す．

定義 5.3　$C. = ((C_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}, (d_n)_{n\in\boldsymbol{Z}})$, $D. = ((D_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}, (d'_n)_{n\in\boldsymbol{Z}})$ を鎖複体とする．

(1) 各 $n \in \boldsymbol{Z}$ に対し D_n が C_n の部分群で, すべての $x \in D_n$ に対して $d'_n(x) = d_n(x)$ が成り立つとき $D.$ を $C.$ の部分複体という．このとき包含写像 $i_n : D_n \to C_n$ は鎖写像 $i. = (i_n)_{n\in\boldsymbol{Z}} : D. \to C.$ を定める．

(2) $D.$ が $C.$ の部分複体のとき, $p_n : C_n \to C_n/D_n$ を商写像とすると, (4.12) から $p_{n-1}\circ d_n : C_n \to C_{n-1}/D_{n-1}$ は準同型写像 $\bar{d}_n : C_n/D_n \to C_{n-1}/D_{n-1}$ で $\bar{d}_n\circ p_n$ を満たすものを誘導する．$((C_n/D_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}, (\bar{d}_n)_{n\in\boldsymbol{Z}})$ は鎖複体であり, これを $C.$ の $D.$ による商複体と呼んで $C./D.$ で表わす．このとき, $p. = (p_n)_{n\in\boldsymbol{Z}} : C. \to C./D.$ は鎖写像である．

定義 5.4　$(C_{\lambda}.)_{\lambda\in\Lambda}$ $(C_{\lambda}. = ((C_{\lambda n})_{n\in\boldsymbol{Z}}, (d_{\lambda n})_{n\in\boldsymbol{Z}}))$ を鎖複体の族とする．

(1) $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda}.\right)_n = \prod_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda n}$ とおき $d_n : \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda}.\right)_n \to \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda}.\right)_{n-1}$ を $d_n((x_\lambda)_\lambda) = (d_n(x_\lambda))_\lambda$ で定義する．このとき $\prod_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda}. = \left(\left(\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda}.\right)_n\right)_{n\in\boldsymbol{Z}}, (d_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}\right)$ は鎖複体で, $(C_{\lambda}.)_{\lambda\in\Lambda}$ の直積という．$\mu \in \Lambda$, $n \in \boldsymbol{Z}$ に対し, μ-成分への射影 $p_{\mu n} : \prod_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda n} \to C_{\mu n}$ は鎖写像 $p_{\mu}. : \prod_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda}. \to C_{\mu}.$ を定める．

(2) $\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda}.\right)_n = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda n}$ とおき $d_n : \left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda}.\right)_n \to \left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda}.\right)_{n-1}$ を $d_n((x_\lambda)_\lambda) = (d_n(x_\lambda))_\lambda$ で定義する．このとき $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda}. = \left(\left(\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda}.\right)_n\right)_{n\in\boldsymbol{Z}}, (d_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}\right)$ は鎖複体で, $(C_{\lambda}.)_{\lambda\in\Lambda}$ の直和という．$\mu \in \Lambda$, $n \in \boldsymbol{Z}$ に対し, μ-成分への射入 $\iota_{\mu n} : C_{\mu n} \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda n}$ は鎖写像 $\iota_{\mu}. : C_{\mu}. \to \prod_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda}.$ を定める．

(3) すべての $\lambda \in \Lambda$ に対して $(C_{\lambda}.)_{\lambda\in\Lambda}$ が鎖複体 $C. = ((C_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}, (d_n)_{n\in\boldsymbol{Z}})$ の部分複体の場合, $(\sum_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda}.)_n = \sum_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda n}$ とおき $d'_n : (\sum_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda}.)_n \to (\sum_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda}.)_{n-1}$ を d_n の制限とすると $\sum_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda}.. = (((\sum_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda}.)_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}, (d_n)_{n\in\boldsymbol{Z}})$ は鎖複体で, $(C_{\lambda}.)_{\lambda\in\Lambda}$ の和という．

とくに I が有限集合 $\Lambda = \{1, 2, \dots, k\}$ の場合, $\prod_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda}.$, $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda}.$ をそれぞれ $C_1.\times C_2.\times\cdots\times C_k.$, $C_1.\oplus C_2.\oplus\cdots\oplus C_k.$ で表す．この場合, $C_1.\times C_2.\times\cdots\times C_k. = C_1.\oplus C_2.\oplus\cdots\oplus C_k.$ であることに注意する．さらに $C_{\lambda}.$ $(\lambda \in \Lambda)$ が $C.$ の部分複体のとき $\sum_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda}.$ を $C_1. + C_2. + \cdots + C_k.$ で表す．

定義 5.5　$f_i. = (f_{i,n})_{n\in\boldsymbol{Z}} : C_i. \to C_{i+1}.$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ を鎖写像とする．$i = 1, 2, \cdots, n-1$ に対して $\mathrm{Im}\, f_{i-1,n} = \mathrm{Ker}\, f_{i,n}$ が成り立つとき, 図式

$$C_0. \xrightarrow{f_0.} C_1. \xrightarrow{f_1.} \cdots \xrightarrow{f_{i-2}.} C_{i-1}. \xrightarrow{f_{i-1}.} C_i. \xrightarrow{f_i.} C_{i+1}. \xrightarrow{f_{i+1}.} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}.} C_{n-1}. \xrightarrow{f_{n-1}.} C_n.$$

を鎖複体の完全列という．とくに $n = 4$ で $C_0. = C_4. = 0.$ の場合, $0. \to C_1. \xrightarrow{f_1.} C_2. \xrightarrow{f_2.} C_3. \to 0.$ を鎖複体の短完全列という．

定義 5.6　$C. = ((C_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}, (d_n)_{n\in\boldsymbol{Z}})$ を鎖複体とする.

$$\mathrm{Ker}\, d_n = Z_n(C.), \qquad \mathrm{Im}\, d_{n+1} = B_n(C.), \qquad H_n(C.) = Z_n(C.)/B_n(C.)$$

とおき, $H_n(C.)$ を $C.$ の n 次元ホモロジー群という.

$C. = ((C_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}, (d_n)_{n\in\boldsymbol{Z}})$, $D. = ((D_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}, (d'_n)_{n\in\boldsymbol{Z}})$ を鎖複体, $f. : C. \to D.$ を鎖写像とする. 各 $n \in \boldsymbol{Z}$ に対して $f_{n-1} \circ d_n = d'_n \circ f_n$ だから $x \in Z_n(C.)$ ならば $f_n(x) \in Z_n(D.)$, $x \in B_n(C.)$ ならば $f_n(x) \in B_n(D.)$ である. $\pi_n : Z_n(C.) \to H_n(C.)$, $\pi'_n : Z_n(D.) \to H_n(D.)$ を商写像とすれば, $\pi'_n \circ f_n : Z_n(C.) \to H_n(D.)$ は $B_n(C.)$ の要素をすべて 0 に写すため, (4.12) により準同型写像 $H_n(f.) : H_n(C.) \to H_n(D.)$ で $\pi'_n \circ f_n = H_n(f.) \circ \pi_n$ を満たすものがただ 1 つある.

注意 5.7　$C.$ の恒等写像 $id_{C.} = (id_{C_n})_{n\in\boldsymbol{Z}} : C. \to C.$ は鎖写像であり, $H_n(id_{C.})$ は $H_n(C.)$ の恒等写像である.

命題 5.8　(1) $f. : C. \to D.$, $g. : D. \to E.$ を鎖写像とすると $H_n(g. \circ f.) = H_n(g.) \circ H_n(f.)$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ である.

(2) $f. \simeq g. : C. \to D.$ ならば $H_n(f.) = H_n(g.)$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ である.

(3) $f. : C. \to D.$ が鎖ホモトピー同値写像のとき, すべての $n \in \boldsymbol{Z}$ に対して $H_n(f.) : H_n(C.) \to H_n(D.)$ は同型写像である.

証明　(1) $\pi_n : Z_n(C.) \to H_n(C.)$, $\pi'_n : Z_n(D.) \to H_n(D.)$, $\pi''_n : Z_n(E.) \to H_n(E.)$ を商写像とすれば, $\pi'_n \circ f_n = H_n(f.) \circ \pi_n$, $\pi''_n \circ g_n = H_n(g.) \circ \pi'_n$ より $\pi''_n \circ g_n \circ f_n = H_n(g.) \circ \pi'_n \circ f_n = H_n(g.) \circ H_n(f.) \circ \pi_n$ である. 一方 $H_n(g. \circ f.)$ は $\pi''_n \circ g_n \circ f_n = H_n(g. \circ f.) \circ \pi_n$ を満たす唯一の準同型写像だから主張が示される.

(2) $\Phi. = (\Phi_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}$ により $f. \simeq g.$ とすれば $d'_{n+1} \circ \Phi_n + \Phi_{n-1} \circ d_n = g_n - f_n$ だから $x \in Z_n(C.)$ に対し $g_n(x) - f_n(x) = d'_{n+1}(\Phi_n(x)) \in B_n(D.)$ である. 従って $H_n(f.) \circ \pi_n = \pi'_n \circ f_n = \pi'_n \circ g_n = H_n(g.) \circ \pi_n$ であり π_n は全射だから $H_n(f.) = H_n(g.)$ である.

(3) $g. : D. \to C.$ を $f.$ の鎖ホモトピー逆写像とすると (1), (2) と (5.7) から $H_n(g.) \circ H_n(f.) = H_n(g. \circ f.) = H_n(id_{C.}) = id_{H_n(C.)}$, $H_n(f.) \circ H_n(g.) = H_n(f. \circ g.) = H_n(id_{D.}) = id_{H_n(D.)}$ となるため $H_n(g.)$ は $H_n(f.)$ の逆写像である. □

(4.18) から次の結果が得られる.

命題 5.9　$(C_{\lambda}.)_{\lambda\in\Lambda}$ $(C_{\lambda}. = ((C_{\lambda n})_{n\in\boldsymbol{Z}}, (d_{\lambda n})_{n\in\boldsymbol{Z}}))$ を鎖複体の族とする.

(1) $F : H_n\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda}.\right) \to \prod_{\lambda\in\Lambda} H_n(C_{\lambda}.)$ を $F(x) = (H_n(p_{\lambda}.)(x))_{\lambda\in\Lambda}$ で定めれば, これは同型写像である.

(2) $G : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_n(C_{\lambda}.) \to H_n\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C_{\lambda}.\right)$ を $G((x_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda}) = \sum_{\lambda\in\Lambda} H_n(\iota_{\lambda}.)(x_{\lambda})$ で定めれば, これは同型写像である.

$0. \to C. \xrightarrow{f.} D. \xrightarrow{g.} E. \to 0.$ を鎖複体の短完全列とする. 連結準同型写像 $\partial_n : H_n(E.) \to H_{n-1}(C.)$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ を以下のように定義する. $\pi_n : Z_n(C.) \to H_n(C.)$, $\pi'_n : Z_n(D.) \to H_n(D.)$, $\pi''_n : Z_n(E.) \to H_n(E.)$ を商写像として $\alpha \in H_n(E.)$ に対し, $\pi''_n(x) = \alpha$ を満たす $x \in Z_n(E.)$ を選び, さらに g_n は全射だから $g_n(y) = x$ を満たす $y \in D_n$ を選ぶ. $g_{n-1}(d'_n(y)) = d''_n(g_n(y)) = d''_n(x) = 0$ だから $\mathrm{Im}\, f_{n-1} = \mathrm{Ker}\, g_{n-1}$ より $f_{n-1}(z) = d'_n(y)$ を満たす $z \in C_{n-1}$ がある. $f_{n-2}(d_{n-1}(z)) = d'_{n-1}(f_{n-1}(z)) = d'_{n-1}(d'_n(y)) = 0$ であり, f_{n-2} は単射だから $d_{n-1}(z) = 0$ すなわち $z \in Z_{n-1}(C.)$ である. このとき $\pi_{n-1}(z) \in H_{n-1}(C.)$ は $x \in Z_n(E.)$ および $y \in D_n$ の選び方に依存しない. 実際 $\pi''_n(x) = \pi''_n(x') = \alpha$, $g_n(y) = x$, $g_n(y') = x'$ とすれば $\pi''_n(x - x') = 0$ より $x - x' = d''_{n+1}(w)$ となる $w \in E_{n+1}$ があり, $g_{n+1}(v) = w$ を満たす $v \in D_{n+1}$ がとれる. $g_n(y - y' - d'_n(v)) = g_n(y) - g_n(y') - d''_{n+1}(g_{n+1}(v)) = x - x' - d''_{n+1}(w) = 0$ だから $f_n(u) = y - y' - d'_n(v)$ を満たす $u \in C_n$ がある. $f_{n-1}(z) = d'_n(y)$, $f_{n-1}(z') = d'_n(y')$ とすると $f_{n-1}(d_n(u)) = d'_{n-1}(f_n(u)) = d'_{n-1}(y) - d'_{n-1}(y') - d'_{n-1}(d'_n(v)) = f_{n-1}(z) - f_{n-1}(z') = f_{n-1}(z - z')$ だから $d_n(u) = z - z'$ が得られるため $\pi_{n-1}(z) = \pi_{n-1}(z')$ である. 以上の議論から $\partial_n(\alpha) = \pi_{n-1}(z)$ により ∂_n を

定義すると, ∂_n が準同型写像であることが容易に確かめられる.

命題 5.10 $0. \to C. \xrightarrow{f.} D. \xrightarrow{g.} E. \to 0.$, $0. \to F. \xrightarrow{h.} G. \xrightarrow{k.} H. \to 0.$ を鎖複体の短完全列とし, $\lambda. : C. \to F.$, $\mu. : D. \to G.$, $\nu. : E. \to H.$ は $h. \circ \lambda. = \mu. \circ f.$, $k. \circ \mu. = \nu. \circ g.$ を満たす鎖写像とする. $\partial_n : H_n(E.) \to H_{n-1}(C.)$, $\partial'_n : H_n(H.) \to H_{n-1}(F.)$ を連結準同型写像とすれば下の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} H_n(E.) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(C.) \\ \big\downarrow{\scriptstyle H_n(\nu.)} & & \big\downarrow{\scriptstyle H_{n-1}(\lambda.)} \\ H_n(H.) & \xrightarrow{\partial'_n} & H_{n-1}(F.) \end{array}$$

証明 $\alpha \in H_n(E.)$ に対し, $\pi''_n(x) = \alpha$ を満たす $x \in Z_n(E.)$ を選び, $g_n(y) = x$ を満たす $y \in D_n$ を選ぶ. $f_{n-1}(z) = d'_n(y)$ とすると $H_{n-1}(\lambda.)(\partial_n(\alpha)) = \bar{\pi}_{n-1}(\lambda_{n-1}(z))$ ($\bar{\pi}_n : Z_n(F.) \to H_n(F.)$ は商写像) である. 一方 $H_n(\nu.)(\alpha) = \bar{\pi}''_n(\nu_n(x))$ ($\bar{\pi}''_n : Z_n(H.) \to H_n(H.)$ は商写像) で $\nu_n(x) = \nu_n(g_n(y)) = k_n(\mu_n(y))$, $\bar{d}'_n(\mu_n(y)) = \mu_{n-1}(d'_n(y)) = \mu_{n-1}(f_{n-1}(z)) = h_{n-1}(\lambda_{n-1}(z))$ だから $\partial'_n : H_n(H.) \to H_{n-1}(F.)$ の定義から $\partial'_n(H_n(\nu.)(\alpha)) = \bar{\pi}_{n-1}(\lambda_{n-1}(z))$ となるため主張が成立する. □

次の定理の証明は演習とする.

定理 5.11 $0. \to C. \xrightarrow{f.} D. \xrightarrow{g.} E. \to 0.$ を鎖複体の短完全列とすると, 次の図式は完全列である.

$$\cdots \xrightarrow{H_{n+1}(g.)} H_{n+1}(E.) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(C.) \xrightarrow{H_n(f.)} H_n(D.) \xrightarrow{H_n(g.)} H_n(E.) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(C.) \xrightarrow{H_{n-1}(f.)} \cdots$$

定義 5.12 $C. = ((C_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}, (d_n)_{n\in\boldsymbol{Z}})$, $D. = ((D_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}, (d'_n)_{n\in\boldsymbol{Z}})$ を鎖複体とする.

$$(C. \otimes D.)_n = \bigoplus_{i+j=n} C_i \otimes D_j$$

とおき, $\iota_{i,j} : C_i \otimes D_j \to (C. \otimes D.)_n$ を射入として $d''_n : (C. \otimes D.)_n \to (C. \otimes D.)_{n-1}$ を

$$d''_n(\iota_{i,j}(x \otimes y)) = \iota_{i-1,j}(d_i(x) \otimes y) + (-1)^i \iota_{i,j-1}(x \otimes d_j(y))$$

により定める. このとき $(((C. \otimes D.)_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}, (d''_n)_{n\in\boldsymbol{Z}})$ は鎖複体で, これを $C.$ と $D.$ のテンソル積と呼んで, $C. \otimes D.$ で表わす.

$f. : C. \to E.$, $g. : D. \to F.$ を鎖写像とするとき,

$$(f. \otimes g.)_n = \bigoplus_{i+j=n} f_i \otimes g_j : (C. \otimes D.)_n \to (E. \otimes F.)_n$$

とおけば, $((f. \otimes g.)_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}$ は鎖写像になる. これを $f. \otimes g. : C. \otimes D. \to E. \otimes F.$ で表わす.

$\alpha \in H_i(C.)$, $\beta \in H_j(D.)$ に対し, $x \in Z_i(C.)$, $y \in Z_j(D.)$ を α, β の代表元とする. このとき, $x \otimes y \in Z_{i+j}(C. \otimes D.)$ であり, $x \otimes y$ が代表する $H_{i+j}(C. \otimes D.)$ のクラスは α, β の代表元の選び方に依存しない. 実際 $x' \in Z_i(C.)$, $y' \in Z_j(D.)$ もそれぞれ α, β を代表するとすれば $x' - x = d_{i+1}(z)$, $y' - y = d'_{j+1}(w)$ を満たす $z \in C_{i+1}$, $w \in D_{j+1}$ があり,

$$\begin{aligned} x' \otimes y' - x \otimes y &= (x + d_{i+1}(z)) \otimes (y + d'_{j+1}(w)) - x \otimes y \\ &= d_{i+1}(z) \otimes d'_{j+1}(w) + d_{i+1}(z) \otimes y + x \otimes d'_{j+1}(w) \\ &= d''_{i+j+1}(z \otimes d'_{j+1}(w)) + d''_{i+j+1}(z \otimes y) + d''_{i+j+1}((-1)^i x \otimes w) \in B_{i+j}(C. \otimes D.) \end{aligned}$$

である. $x \otimes y$ が代表する $H_{i+j}(C. \otimes D.)$ のクラスを $\alpha \times \beta$ で表わす.

定義 5.13 $\alpha \otimes \beta \in H_i(C.) \otimes H_j(D.)$ に対して $\alpha \times \beta$ を対応させることにより, 準同型写像

$$\times : H_i(C.) \otimes H_j(D.) \to H_{i+j}(C. \otimes D.)$$

が定まるが, この写像をクロス積という.

定義 5.14 $C. = ((C_n)_{n\in \boldsymbol{Z}}, (d_n)_{n\in \boldsymbol{Z}})$, $D. = ((D_n)_{n\in \boldsymbol{Z}}, (d'_n)_{n\in \boldsymbol{Z}})$ を鎖複体とする.

$$\mathrm{Hom}_n(C., D.) = \prod_{j-i=n} \mathrm{Hom}(C_i, D_j)$$

とおき, $p_{i,j} : \mathrm{Hom}_n(C., D.) \to \mathrm{Hom}(C_i, D_j)$ を射影として $d''_n : \mathrm{Hom}_n(C., D.) \to \mathrm{Hom}_{n-1}(C., D.)$ を

$$p_{k,k+n-1}(d''_n((f_{i,j})_{j-i=n})) = d'_{k+n} \circ f_{k,k+n} + (-1)^{n+1} f_{k-1,k+n-1} \circ d_k$$

により定める. このとき $(\mathrm{Hom}_n(C., D.))_{n\in \boldsymbol{Z}}, (d''_n)_{n\in \boldsymbol{Z}})$ は鎖複体で, これを $\mathrm{Hom}(C., D.)$ で表わす.

$f. : E. \to C.$, $g. : D. \to F.$ を鎖写像とするとき,

$$g_{\cdot *n} = \prod_{j-i=n} g_{j*} : \mathrm{Hom}_n(C., D.) \to \mathrm{Hom}_n(C., F.), \quad f^*_{\cdot n} = \prod_{j-i=n} f^*_i : \mathrm{Hom}_n(C., D.) \to \mathrm{Hom}_n(E., D.)$$

とおけば, $(g_{\cdot *n})_{n\in \boldsymbol{Z}}$, $(f^*_{\cdot n})_{n\in \boldsymbol{Z}}$ は鎖写像になる. これらをそれぞれ $g_{\cdot *} : \mathrm{Hom}(C., D.) \to \mathrm{Hom}(C., F.)$, $f^*_{\cdot} : \mathrm{Hom}(C., D.) \to \mathrm{Hom}(E., D.)$ で表わす.

定義 5.15 アーベル群 G に対し, $G_n = \{0\}$ $(n \neq 0)$, $G_0 = G$ である鎖複体 $G.$ を考えたとき, $H_n(\mathrm{Hom}(C., G.))$ を $H^n(C.; G)$ で表わし, 鎖複体 $C.$ の G を係数群とする n 次元コホモロジー群という. $G = \boldsymbol{Z}$ の場合, $H^n(C.; \boldsymbol{Z})$ を $H^n(C.)$ で表わす.

$\varphi \in H_n(\mathrm{Hom}(C., D.))$ に対し, $(f_{i,j})_{j-i=n} \in Z_n(\mathrm{Hom}(C., D.))$ を φ の代表元とする. このとき $d'_{j-1} \circ f_{i,j} = (-1)^{j-i} f_{i-1,j-1} \circ d_i$ が任意の $i, j \in \boldsymbol{Z}$ に対して成り立つ. $\alpha \in H_i(C.)$ に対し, $x \in Z_i(C.)$ を α の代表元とすると $f_{i,j}(x) \in Z_j(D.)$ であることが上の等式からわかる. $f_{i,j}(x)$ が代表するクラスを $\beta \in H_j(D.)$ とすれば, これは φ, α の代表元の選び方に依存しない. 実際 $(g_{i,j})_{j-i=n} \in Z_n(\mathrm{Hom}(C., D.))$, $x' \in Z_i(C.)$ もそれぞれ φ, α を代表するとすれば $g_{i,j} - f_{i,j} = d'_{j+1} \circ h_{i,j+1} + (-1)^{n+2} h_{i-1,j} \circ d_i$ $(j - i = n)$, $x' - x = d_{i+1}(z)$ を満たす $(h_{i,j})_{j-i=n+1} \in \mathrm{Hom}_{n+1}(C., D.)$, $z \in C_{i+1}$ があり,

$$\begin{aligned} g_{i,j}(x') - f_{i,j}(x) &= d'_{j+1} \circ h_{i,j+1}(x + d_{i+1}(z)) + (-1)^{n+2} h_{i-1,j} \circ d_i(x + d_{i+1}(z)) + f_{i,j}(d_{i+1}(z)) \\ &= d'_{j+1}(h_{i,j+1}(x)) + d'_{j+1}(h_{i,j+1}(d_{i+1}(z))) + d'_{j+1}(f_{i+1,j+1}((-1)^{j-i} z)) \in B_j(D.) \end{aligned}$$

である. 上のようにして定まる β を $(\varphi; \alpha)$ で表わす.

定義 5.16 準同型写像 $\gamma : H_n(\mathrm{Hom}(C., D.)) \to \prod_{j-i=n} \mathrm{Hom}(H_i(C.), H_j(D.))$ を $p_{i,j}(\gamma(\varphi))(\alpha) = (\varphi; \alpha)$ $(\alpha \in H_i(C.))$ で定める.

補題 5.17 $C.$, $D.$ を鎖複体とし, 各 $n \in \boldsymbol{Z}$ に対して C_n は自由アーベル群であり, $d_n : C_n \to C_{n-1}$ は零写像であるとする. このとき $\gamma : H_n(\mathrm{Hom}(C., D.)) \to \prod_{j-i=n} \mathrm{Hom}(H_i(C.), H_j(D.))$ は同型写像である.

証明 仮定から $H_i(C.) = C_i$ である. C_i は自由アーベル群で, 商写像 $\pi_{i+n} : Z_{i+n}(D.) \to H_{i+n}(D.)$ は全射だから, 任意の $(g_{i,j})_{i-j=n} \in \prod_{j-i=n} \mathrm{Hom}(C_i, H_j(D.))$ に対し (4.25) により, $\tilde{g}_{i,i+n} : C_i \to Z_{i+n}(D.)$ で $\pi_{i+n} \circ \tilde{g}_{i,i+n} = g_{i,i+n}$ を満たすものがある. $\eta_j : Z_j(D.) \to D_j$ を包含写像とすれば $(\eta_j \circ \tilde{g}_{i,j})_{i-j=n} \in Z_n(\mathrm{Hom}(C., D.))$ であり, $(\eta_j \circ \tilde{g}_{i,j})_{i-j=n}$ で代表されるクラスを φ とすれば $\gamma(\varphi) = (g_{i,j})_{i-j=n}$ となって, γ は全射である.

$\gamma(\varphi) = 0$ として, φ の代表元を $(f_{i,j})_{j-i=n} \in Z_n(\mathrm{Hom}(C., D.))$ とする. $\gamma(\varphi) = 0$ から $f_{i,i+n}(C_i) \subset B_{i+n}(D.)$ $(i \in \boldsymbol{Z})$ である. $d'_{i+n+1} : D_{i+n+1} \to B_{i+n}(D.)$ は全射で C_i は自由アーベル群だから (4.25) により, $\tilde{f}_{i,i+n+1}$:

$C_i \to D_{i+n+1}$ で $d'_{i+n+1} \circ \tilde{f}_{i,i+n+1} = f_{i,i+n}$ を満たすものがある．このとき $d''_{n+1}((\tilde{f}_{i,j})_{j-i=n+1}) = (f_{i,j})_{j-i=n}$ が容易に確かめられるため, $\varphi = 0$ となって γ は単射である． □

命題 5.18　$C., D.$ を鎖複体とし, 各 $n \in \boldsymbol{Z}$ に対して C_n は自由アーベル群であるとする．

(1) $\gamma : H_n(\mathrm{Hom}(C., D.)) \to \prod_{j-i=n} \mathrm{Hom}(H_i(C.), H_j(D.))$ は全射である．

(2) すべての $n \in \boldsymbol{Z}$ に対して $H_n(C.)$ が自由アーベル群ならば, γ は同型写像である．

証明　$C.$ の部分複体 $Z.(C.) = ((Z_n(C.))_{n\in\boldsymbol{Z}}, (d^0_n)_{n\in\boldsymbol{Z}})$ $(d^0_n = 0)$ を考える．$\rho_i : C_i \to C_i/Z_i(C.)$ を商写像とすると, 準同型定理から同型写像 $\bar{d}_i : C_i/Z_i(C.) \to B_{i-1}(C.)$ で $\bar{d}_i \circ \rho_i = d_i$ を満たすものがある．$B_{i-1}(C.)$ は自由アーベル群 C_{i-1} の部分群だから (4.27) により自由アーベル群である．従って $C_i/Z_i(C.)$ も自由アーベル群であり (4.25) から $\bar{d}_i \circ s_i = id_{C_i/Z_i(C.)}$ を満たす準同型写像 $s_i : C_i/Z_i(C.) \to C_i$ がある．$\eta_i : Z_i(C.) \to C_i$ を包含写像とすると, (4.23) の (1) から, 準同型写像 $r_i : C_i \to Z_i(C.)$ で $r_i \circ \eta_i = id_{Z_i(C.)}$ を満たすものがある．$\eta^*_i \circ r^*_i = id_{\mathrm{Hom}(Z_i(C.),D_j)}$ だから $\eta^*_i : \mathrm{Hom}(C_i, D_j) \to \mathrm{Hom}(Z_i(C.), D_j)$ は全射である．このことと (4.22) の (2) から短完全列

$$0 \to \mathrm{Hom}(C_i/Z_i(C.), D_j) \xrightarrow{\rho^*_i} \mathrm{Hom}(C_i, D_j) \xrightarrow{\eta^*_i} \mathrm{Hom}(Z_i(C.), D_j) \to 0$$

が得られる．これと (4.18) の (1) により鎖複体の短完全列

$$0. \to \mathrm{Hom}(C./Z.(C.), D.) \xrightarrow{\rho^*_.} \mathrm{Hom}(C., D.) \xrightarrow{\eta^*_.} \mathrm{Hom}(Z.(C.), D.) \to 0.$$

が得られる．これに対して (5.11) を用いると完全列

$$H_n(\mathrm{Hom}(C./Z.(C.), D.)) \xrightarrow{H_n(\rho^*_.)} H_n(\mathrm{Hom}(C., D.)) \xrightarrow{H_n(\eta^*_.)} H_n(\mathrm{Hom}(Z.(C.), D.)) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(\mathrm{Hom}(C./Z.(C.), D.))$$

を得る．$\bar{\eta}_i : Z_i(C.) \to H_i(C.)$ を商写像とし, $\tilde{d}_i : C_i/Z_i(C.) \to Z_{i-1}(C.)$ を $\bar{d}_i$ と包含写像 $B_{i-1}(C.) \to Z_{i-1}(C.)$ の合成写像とすると下の図式は可換である．

$$\begin{array}{ccccc}
H_n(\mathrm{Hom}(C., D.)) & \xrightarrow{H_n(\eta^*_.)} & H_n(\mathrm{Hom}(Z.(C.), D.)) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(\mathrm{Hom}(C./Z.(C.), D.)) \\
\downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle(-1)^{n+1}\gamma} \\
\prod_{i\in\boldsymbol{Z}} \mathrm{Hom}(H_i(C.),H_{i+n}(D.)) & \xrightarrow{\prod_{i\in\boldsymbol{Z}} \bar{\eta}^*_i} & \prod_{i\in\boldsymbol{Z}} \mathrm{Hom}(Z_i(C.),H_{i+n}(D.)) & \xrightarrow{\prod_{i\in\boldsymbol{Z}} \tilde{d}^*_{i+1}} & \prod_{i\in\boldsymbol{Z}} \mathrm{Hom}(C_{i+1}/Z_{i+1}(C.),H_{i+n}(D.))
\end{array}$$

実際, 左側の長方形の可換性は容易に分かる．$(g_k)_{k\in\boldsymbol{Z}} \in Z_n(\mathrm{Hom}(Z.(C.), D.))$ $(g_k \in \mathrm{Hom}(Z_k(C.), D_{k+n}))$ とすると, $\eta^*_.(g_k \circ r_k)_{k\in\boldsymbol{Z}} = (g_k)_{k\in\boldsymbol{Z}}$ であり, $d'_{k+n} \circ g_k = 0$ だから $d''_n((g_k \circ r_k)_{k\in\boldsymbol{Z}}) = (-1)^{n+1}(g_i \circ r_i \circ d_{i+1})_{i\in\boldsymbol{Z}}$ である．さらに $g_i \circ \tilde{d}_{i+1} \circ \rho_{i+1} = g_i \circ r_i \circ \eta_i \circ \tilde{d}_{i+1} \circ \rho_{i+1} = g_i \circ r_i \circ d_{i+1}$ だから $(g_k)_{k\in\boldsymbol{Z}}$ が代表する $H_n(\mathrm{Hom}(Z.(C.), D.))$ のクラスを ψ とすれば $\partial_n(\psi)$ は $(-1)^{n+1}(g_i \circ \tilde{d}_{i+1})_{i\in\boldsymbol{Z}} = (-1)^{n+1}\left(\prod_{i\in\boldsymbol{Z}} \tilde{d}^*_{i+1}\right)((g_i)_{i\in\boldsymbol{Z}})$ のクラスである．

(1) 各 $\bar{\eta}^*_i : \mathrm{Hom}(H_i(C.), H_{i+n}(D.)) \to \mathrm{Hom}(Z_i(C.), H_{i+n}(D.))$ は単射だから

$$\prod_{i\in\boldsymbol{Z}} \bar{\eta}^*_i : \prod_{i\in\boldsymbol{Z}} \mathrm{Hom}(H_i(C.), H_{i+n}(D.)) \to \prod_{i\in\boldsymbol{Z}} \mathrm{Hom}(Z_i(C.), H_{i+n}(D.))$$

は単射である．任意の $\xi \in \prod_{i\in\boldsymbol{Z}} \mathrm{Hom}(H_i(C.), H_{i+n}(D.))$ に対して, (5.17) から $\gamma(\lambda) = \left(\prod_{i\in\boldsymbol{Z}} \bar{\eta}^*_i\right)(\xi)$ となる $\lambda \in H_n(\mathrm{Hom}(Z.(C.), D.))$ があり,

$$(-1)^{n+1}\gamma(\partial_n(\lambda)) = \left(\prod_{i\in\boldsymbol{Z}} \tilde{d}^*_{i+1}\right)(\gamma(\lambda)) = \left(\prod_{i\in\boldsymbol{Z}} \tilde{d}^*_{i+1}\right)\left(\left(\prod_{i\in\boldsymbol{Z}} \bar{\eta}^*_i\right)(\xi)\right) = \left(\prod_{i\in\boldsymbol{Z}} \tilde{d}^*_{i+1} \circ \bar{\eta}^*_i\right)(\xi) = 0$$

である．(5.17) から $\partial_n(\lambda) = 0$ となるため $H_n(\eta^*_.)(\varphi) = \lambda$ となる $\varphi \in H_n(\mathrm{Hom}(C., D.))$ がある．このとき $\left(\prod_{i\in\boldsymbol{Z}} \bar{\eta}^*_i\right)(\gamma(\varphi)) = \gamma(H_n(\eta^*_.)(\varphi)) = \gamma(\lambda) = \left(\prod_{i\in\boldsymbol{Z}} \bar{\eta}^*_i\right)(\xi)$ より $\gamma(\varphi) = \xi$ となるため γ は全射である．

(2) $H_i(C.)$ が自由アーベル群ならば準同型写像 $\sigma_i : H_i(C.) \to Z_i(C.)$ で $\bar{\eta}_i \circ \sigma_i = id_{H_i(C.)}$ を満たすものがある．$0 \to C_{i+1}/Z_{i+1}(C.) \xrightarrow{\tilde{d}_{i+1}} Z_i(C.) \xrightarrow{\bar{\eta}_i} H_i(C.) \to 0$ は短完全列だから (4.23) の (1) から準同型写像 $\tau_i : Z_i(C.) \to C_{i+1}/Z_{i+1}(C.)$ で $\tau_i \circ \tilde{d}_{i+1} = id_{C_{i+1}/Z_{i+1}(C.)}$ を満たすものがある．このとき $\tilde{d}^*_{i+1} \circ \tau^*_i = id_{\mathrm{Hom}(C_{i+1}/Z_{i+1}(C.), D_{i+n})}$ だから $\tilde{d}^*_{i+1} : \mathrm{Hom}(Z_i(C.), H_{i+n}(D.)) \to \mathrm{Hom}(C_{i+1}/Z_{i+1}(C.), H_{i+n}(D.))$ は全射である．従って $\prod_{i\in\boldsymbol{Z}} \tilde{d}^*_{i+1} : \prod_{i\in\boldsymbol{Z}} \mathrm{Hom}(Z_i(C.), H_{i+n}(D.)) \to \prod_{i\in\boldsymbol{Z}} \mathrm{Hom}(C_{i+1}/Z_{i+1}(C.), H_{i+n}(D.))$ は全射になり，上の図式の可換性と γ が同型写像であることから，$\partial_n : H_n(\mathrm{Hom}(Z.(C.), D.)) \to H_{n-1}(\mathrm{Hom}(C./Z.(C.), D.))$ は全射である．n を $n+1$ で置き換えると，$H_n(\rho^*_.) = 0$ が分かり，これより $H_n(\eta^*_.) : H_n(\mathrm{Hom}(C., D.)) \to H_n(\mathrm{Hom}(Z.(C.), D.))$ は単射である．$\left(\prod_{i\in\boldsymbol{Z}} \bar{\eta}^*_i\right) \circ \gamma = \gamma \circ H_n(\eta^*_.)$ の右辺は単射だから，左辺の $\gamma : H_n(\mathrm{Hom}(C., D.)) \to \prod_{j-i=n} \mathrm{Hom}(H_i(C.), H_j(D.))$ も単射である． □

§6. 位相空間のホモロジー群

Δ^n を $n+1$ 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の部分空間 $\{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \boldsymbol{R}^{n+1} | x_i \geq 0, x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 1\}$ とし，Δ^n を標準的 n 単体という．写像 $\varepsilon^{(n)}_i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ $(n \geqq 1,\ i = 0, 1, \dots, n)$ を $\varepsilon^{(n)}_i(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$ で定義すると次が成り立つことは容易に確かめられる．

補題 6.1　整数 i, j が $0 \leqq j < i \leqq n+1$ を満たすとき，$\varepsilon^{(n+1)}_i \circ \varepsilon^{(n)}_j = \varepsilon^{(n+1)}_j \circ \varepsilon^{(n)}_{i-1}$ が成り立つ．

X を位相空間とする．負でない整数 n に対し，$S_n(X)$ を Δ^n から X への連続写像全体の集合として $C_n(X) = F(S_n(X))$ とおく．負の整数 n に対して $C_n(X) = \{0\}$ と定め，準同型写像 $d_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ を，(4.11) を用いて $\sigma \in S_n(X)$ $(n > 0)$ に対し $d_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ \varepsilon^{(n)}_i$ $(n \leqq 0$ のときは必然的に $d_n = 0)$ で定義する．このとき (6.1) から次の結果が得られる．

命題 6.2　上で定義した準同型写像 $d_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ は $d_n \circ d_{n+1} = 0$ を満たす．

定義 6.3　鎖複体 $C.(X) = ((C_n(X))_{n\in\boldsymbol{Z}}, (d_n)_{n\in\boldsymbol{Z}})$ を X の特異複体という．

連続写像 $f : X \to Y$ が与えられたとき，$f_n : C_n(X) \to C_n(Y)$ を，(4.11) を用いて $\sigma \in S_n(X)$ に対し $f_n(\sigma) = f \circ \sigma$ で定めと，d_n の定義から $f. = (f_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}$ が $C.(X)$ から $C.(Y)$ への鎖写像であることはただちに分かる．次の命題は容易に示される．

命題 6.4　$id_X.$ は $C.(X)$ の恒等写像であり，連続写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ に対し，$(g \circ f). = g. \circ f.$ が成り立つ．

定義 6.5　位相空間 X と $n \in \boldsymbol{Z}$ に対し $H_n(X) = H_n(C.(X))$ とおいて，これを X の n 次元ホモロジー群という．連続写像 $f : X \to Y$ に対し $H_n(f.) : H_n(X) \to H_n(Y)$ を f_* で表す．

$n < 0$ ならば $C_n(X) = \{0\}$ だから $H_n(X) = \{0\}$ であることに注意する．

例 6.6　(1) P を一点からなる位相空間とすれば $S_n(P)$ $(n \geqq 0)$ は 1 つの要素からなる集合である．$S_n(P) = \{\sigma_n\}$ とすれば $C_n(P) = \langle\sigma_n\rangle$ $(n \geq 0)$ であり，n が正の偶数ならば $d_n(\sigma_n) = \sigma_{n-1}$, n が 0 か正の奇数ならば $d_n(\sigma_n) = 0$ である．従って n が 0 でなければ $H_n(P) = \{0\}$ となり，$H_0(P)$ は $\boldsymbol{Z}$ と同型である．

(2) $x \in X$ に対し，$\Delta^0 = \{1\}$ を x に写す写像を σ_x で表せば，$Z_0(C.(X)) = C_0(X) = \langle\{\sigma_x | x \in X\}\rangle$ である．$\epsilon : C_0(X) \to \boldsymbol{Z}$ を $\epsilon(\sigma_x) = 1$ で定めれば $\mathrm{Ker}\,\epsilon = \langle\{\sigma_x - \sigma_y | x, y \in X\}\rangle$ が成り立つことに注意する．$x, y \in X$ に対し，x と y を結ぶ弧 $\omega : [0, 1] \to X$ があるとき，$\sigma : \Delta^1 \to X$ を $\sigma(x_0, x_1) = \omega(x_0)$ で定めると $d_1(\sigma) = \sigma_y - \sigma_x$ である．従って X が弧状連結な位相空間ならば $B_0(C.(X)) = \mathrm{Ker}\,\epsilon$ となるため，準同型定理から $H_0(X)$ は $\boldsymbol{Z}$ と同型

になることが分かる．このとき任意の $x \in X$ に対し，包含写像 $i_x : \{x\} \to X$ は同型写像 $i_{x*} : H_0(\{x\}) \to H_0(X)$ を誘導している．

命題 6.7　X を位相空間，$(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の弧状連結成分全体からなる部分空間の族とする．$i_\lambda : X_\lambda \to X$ を包含写像として $\psi : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_n(X_\lambda) \to H_n(X)$ を $\psi((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = \sum_{\lambda\in\Lambda} i_{\lambda*}(x_\lambda)$ で定めれば ψ は同型写像である．

証明　任意の $\sigma \in S_n(X)$ に対し $\sigma(\Delta^n)$ は弧状連結だから $\sigma \in S_n(X_\lambda)$ となる $\lambda \in \Lambda$ はただ 1 つ存在するため，$(S_n(X_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ は互いに交わらない $S_n(X)$ の部分集合族で，$S_n(X) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_n(X_\lambda)$ である．従って $C.(X) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C.(X_\lambda)$ となるため (5.9) の (2) から結果が得られる．□

(5.8) と (6.4) から次の結果が得られる．

命題 6.8　$id_{X*} : H_n(X) \to H_n(X)$ は恒等写像であり，連続写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ に対し，$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : H_n(X) \to H_n(Z)$ が成り立つ．

命題 6.9　X, Y を位相空間，A, B をそれぞれ X, Y のコンパクトな部分空間とする．$A \times B \subset O$ であるような直積空間 $X \times Y$ の開集合 O に対して，X, Y の開集合 U, V で $A \subset U$, $B \subset V$, $U \times V \subset O$ を満たすものがある．

証明　$y \in B$ を任意にとる．各 $x \in A$ に対し x, y の開近傍 $U_{x,y}$, $V_{x,y}$ で $U_{x,y} \times V_{x,y} \subset O$ を満たすものをとる．$A \subset \bigcup_{x\in A} U_{x,y}$ だから A のコンパクト性から $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i,y}$ となる $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ がある．$U_y = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i,y}$, $V_y = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i,y}$ とおくと $A \subset U_y$, $U_y \times V_y \subset O$ であり，V_y は y の開近傍である．$B \subset \bigcup_{y\in B} V_y$ だから B のコンパクト性から $B \subset \bigcup_{j=1}^m V_{y_j}$ となる $y_1, y_2, \dots, y_m \in B$ がある．$U = \bigcap_{j=1}^m U_{y_j}$, $V = \bigcup_{j=1}^m V_{y_j}$ とおけばこれらは条件を満たす．□

補題 6.10　X を可縮な位相空間，$H : X \times [0,1] \to X$ を X の恒等写像から X の各点を $p \in X$ に写す定値写像へのホモトピーとする．$\sigma \in S_n(X)$ に対し $\bar\sigma : \Delta^{n+1} \to X$ を

$$\bar\sigma(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{cases} p & x_0 = 1 \\ H\left(\sigma\left(\dfrac{x_1}{1-x_0}, \dfrac{x_2}{1-x_0}, \dots, \dfrac{x_{n+1}}{1-x_0}\right), x_0\right) & x_0 \neq 1 \end{cases}$$

で定めれば $\bar\sigma$ は連続である．

証明　$e_0 = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \Delta^{n+1}$ とおくと $\bar\sigma$ は e_0 以外の点では明らかに連続である．O を $\bar\sigma(e_0) = p$ の開近傍とすると $H(X \times \{1\}) = \{p\} \subset O$ だから $\sigma(\Delta^n) \times \{1\} \subset X \times \{1\} \subset H^{-1}(O)$ である．$\sigma(\Delta^n)$ はコンパクトだから (6.9) より $0 < a < 1$ で $\sigma(\Delta^n) \times (a, 1] \subset H^{-1}(O)$ となるものがある．このとき $(x, t) \in \Delta^n \times (a, 1]$ に対し $H(\sigma(x), t) \in O$ となるため $U = \{(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \in \Delta^{n+1} | x_0 > a\}$ とおくと U は e_0 の近傍で $\bar\sigma(U) \subset O$ を満たす．□

簡単な計算により，次の結果が確かめられる．

補題 6.11　(6.10) の仮定のもとで $\Phi_n : C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ を $\sigma \in S_n(X)$ に対し $\Phi_n(\sigma) = \bar\sigma$ で定めると

$$\Phi_n(\sigma) \circ \varepsilon_0^{(n+1)} = \sigma, \qquad \Phi_n(\sigma) \circ \varepsilon_i^{(n+1)} = \Phi_{n-1}(\sigma \circ \varepsilon_{i-1}^{(n)}) \quad (1 \leqq i \leqq n+1)$$

が成り立つ．

$\boldsymbol{Z}.$ を $\boldsymbol{Z}_0 = \boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Z}_n = \{0\}$ であるような鎖複体とし，空でない位相空間 X に対し $\epsilon. : C.(X) \to \boldsymbol{Z}.$ を ϵ_0 は (6.6) の (2) で定義した写像 $\epsilon : C_0(X) \to \boldsymbol{Z}$ であるように定めれば $\epsilon.$ は鎖写像である．また $p \in X$ に対し，鎖写像

$\tau. : \boldsymbol{Z}. \to C.(X)$ を $\tau_0(1) = \sigma_p$ で定める．(6.11) から次の結果が得られる．

命題 6.12　(6.10) の仮定のもとで $n \geq 1$ ならば $d_{n+1} \circ \Phi_n + \Phi_{n-1} \circ d_n = id_{C_n(X)}$ であり，$d_1 \circ \Phi_0 = id_{C_0(X)} - \tau_0 \circ \epsilon_0$ が成り立つ．従って $\Phi. = (\Phi_n)_{n \in \boldsymbol{Z}}$ は $\tau. \circ \epsilon.$ から $id_{C.(X)}$ への鎖ホモトピーである．

$\theta_i^{(n+1)} : \Delta^{n+1} \to \Delta^n \times [0,1]$ $(n \geqq 0,\ i = 0, 1, \dots, n)$ を

$$\theta_i^{(n+1)}(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) = ((x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+1}), x_{i+1} + x_{i+2} + \cdots + x_{n+1})$$

で定める．また $\iota_0, \iota_1 : \Delta^n \to \Delta^n \times [0,1]$ を $\iota_0(x) = (x, 0)$, $\iota_1(x) = (x, 1)$ で定めれば次の関係式が成り立つ．

補題 6.13　$\theta_0^{(n+1)} \circ \varepsilon_0^{(n+1)} = \iota_1$, $\theta_n^{(n+1)} \circ \varepsilon_{n+1}^{(n+1)} = \iota_0$, $\theta_i^{(n+1)} \circ \varepsilon_i^{(n+1)} = \theta_{i-1}^{(n+1)} \circ \varepsilon_i^{(n+1)}$,

$$\theta_j^{(n+1)} \circ \varepsilon_i^{(n+1)} = \begin{cases} (\varepsilon_i^{(n)} \times id_{[0,1]}) \circ \theta_{j-1}^{(n)} & j > i \\ (\varepsilon_{i-1}^{(n)} \times id_{[0,1]}) \circ \theta_j^{(n)} & j + 1 < i \end{cases}$$

証明　$\theta_0^{(n+1)} \circ \varepsilon_0^{(n+1)}(x_0, x_1, \dots, x_n) = \theta_0^{(n+1)}(0, x_0, x_1, \dots, x_n) = ((x_0, x_1, \dots, x_n), x_0 + x_1 + \cdots + x_n)$
$= ((x_0, x_1, \dots, x_n), 1) = \iota_1(x_0, x_1, \dots, x_n)$,
$\theta_n^{(n+1)} \circ \varepsilon_{n+1}^{(n+1)}(x_0, x_1, \dots, x_n) = \theta_{n+1}^{(n+1)}(x_0, x_1, \dots, x_n, 0) = ((x_0, x_1, \dots, x_n), 0) = \iota_0(x_0, x_1, \dots, x_n)$,
$\theta_i^{(n+1)} \circ \varepsilon_i^{(n+1)}(x_0, x_1, \dots, x_n) = \theta_i^{(n+1)}(x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_n) = ((x_0, x_1, \dots, x_n), x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n)$,
$\theta_{i-1}^{(n+1)} \circ \varepsilon_i^{(n+1)}(x_0, x_1, \dots, x_n) = \theta_{i-1}^{(n+1)}(x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_n) = ((x_0, x_1, \dots, x_n), x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n)$,
$\theta_j^{(n+1)} \circ \varepsilon_i^{(n+1)}(x_0, x_1, \dots, x_n) = \theta_j^{(n+1)}(x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_n)$

$$= \begin{cases} ((x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{j-2}, x_{j-1} + x_j, x_{j+1}, \dots, x_n), x_j + x_{j+1} + \cdots + x_n) & j > i \\ ((x_0, \dots, x_{j-1}, x_j + x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_n), x_{j+1} + x_{j+2} + \cdots + x_n) & j + 1 < i \end{cases},$$

$(\varepsilon_i^{(n)} \times id_{[0,1]}) \circ \theta_{j-1}^{(n)}(x_0, x_1, \dots, x_n) = (\varepsilon_i^{(n)}(x_0, \dots, x_{j-2}, x_{j-1} + x_j, x_{j+1}, \dots, x_n), x_j + x_{j+1} + \cdots + x_n)$
$= ((x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{j-2}, x_{j-1} + x_j, x_{j+1}, \dots, x_n), x_j + x_{j+1} + \cdots + x_n)$,
$(\varepsilon_{i-1}^{(n)} \times id_{[0,1]}) \circ \theta_j^{(n)}(x_0, x_1, \dots, x_n) = (\varepsilon_{i-1}^{(n)}(x_0, \dots, x_{j-1}, x_j + x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_n), x_{j+1} + x_{j+2} + \cdots + x_n)$
$= ((x_0, \dots, x_{j-1}, x_j + x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{i-2}, 0, x_{i-1}, \dots, x_n), x_{j+1} + x_{j+2} + \cdots + x_n)$. □

上の結果を用いれば次が確かめられる．

補題 6.14　位相空間 X に対し準同型写像 $\Psi_n = \Psi_{X,n} : C_n(X) \to C_{n+1}(X \times [0,1])$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ を

$$\Psi_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma \times id_{[0,1]}) \circ \theta_i^{(n+1)} \quad (n \geqq 0,\ \sigma \in S_n(X))$$

で定義して $j_0, j_1 : X \to X \times [0,1]$ を $j_0(x) = (x, 0)$, $j_1(x) = (x, 1)$ で定めれば $d_{n+1} \circ \Psi_n + \Psi_{n-1} \circ d_n = j_{1n} - j_{0n}$ が成り立つ．

証明　$\sigma \in S_n(X)$ に対して $d_{n+1} \circ \Psi_n(\sigma) = d_{n+1}\left(\sum\limits_{j=0}^{n} (-1)^i (\sigma \times id_{[0,1]}) \circ \theta_j^{(n+1)}\right)$
$= \sum\limits_{j=0}^{n} (-1)^i d_{n+1}\left((\sigma \times id_{[0,1]}) \circ \theta_j^{(n+1)}\right) = \sum\limits_{j=0}^{n} \sum\limits_{i=0}^{n+1} (-1)^{i+j} (\sigma \times id_{[0,1]}) \circ \theta_j^{(n+1)} \circ \varepsilon_i^{(n+1)}$
$= (\sigma \times id_{[0,1]}) \circ \theta_0^{(n+1)} \circ \varepsilon_0^{(n+1)} - (\sigma \times id_{[0,1]}) \circ \theta_n^{(n+1)} \circ \varepsilon_{n+1}^{(n+1)} + \sum\limits_{i=1}^{n} (\sigma \times id_{[0,1]}) \circ \theta_i^{(n+1)} \circ \varepsilon_i^{(n+1)} - \sum\limits_{i=1}^{n} (\sigma \times id_{[0,1]}) \circ$
$\theta_{i-1}^{(n+1)} \circ \varepsilon_i^{(n+1)} + \sum\limits_{0 \leqq i < j \leqq n} (-1)^{i+j} (\sigma \times id_{[0,1]}) \circ \theta_j^{(n+1)} \circ \varepsilon_i^{(n+1)} + \sum\limits_{0 \leqq j < i-1 \leqq n} (-1)^{i+j} (\sigma \times id_{[0,1]}) \circ \theta_j^{(n+1)} \circ \varepsilon_i^{(n+1)}$
$= (\sigma \times id_{[0,1]}) \circ \iota_1 - (\sigma \times id_{[0,1]}) \circ \iota_0 + \sum\limits_{0 \leqq i < j \leqq n} (-1)^{i+j} (\sigma \times id_{[0,1]}) \circ (\varepsilon_i^{(n)} \times id_{[0,1]}) \circ \theta_{j-1}^{(n)}$
$\quad + \sum\limits_{0 \leqq j < i-1 \leqq n} (-1)^{i+j} (\sigma \times id_{[0,1]}) \circ (\varepsilon_{i-1}^{(n)} \times id_{[0,1]}) \circ \theta_j^{(n)}$

$= j_1\circ\sigma - j_0\circ\sigma - \sum_{0\leqq i\leqq j\leqq n-1}(-1)^{i+j}(\sigma\times id_{[0,1]})\circ(\varepsilon_i^{(n)}\times id_{[0,1]})\circ\theta_j^{(n)} - \sum_{0\leqq j<i\leqq n}(-1)^{i+j}(\sigma\times id_{[0,1]})\circ(\varepsilon_i^{(n)}\times id_{[0,1]})\circ\theta_j^{(n)}$
$= j_{1n}(\sigma) - j_{0n}(\sigma) - \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{i+j}(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n)}\times id_{[0,1]})\circ\theta_j^{(n)} = j_{1n}(\sigma) - j_{0n}(\sigma) - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\Psi_{n-1}(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n)})$
$= j_{1n}(\sigma) - j_{0n}(\sigma) - \Psi_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma\circ\varepsilon_i^{(n)}\right) = j_{1n}(\sigma) - j_{0n}(\sigma) - \Psi_{n-1}\circ d_n(\sigma).$ □

注意 6.15 $f : X \to Y$ を連続写像とするとき, 次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{\Psi_{X,n}} & C_{n+1}(X\times[0,1]) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f_n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (f\times id_{[0,1]})_{n+1}} \\ C_n(Y) & \xrightarrow{\Psi_{Y,n}} & C_{n+1}(Y\times[0,1]) \end{array}$$

定理 6.16 $f \simeq g : X \to Y$ ならば $f. \simeq g. : C.(X) \to C.(Y)$ である. 従って $f_* = g_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ が成り立つ.

証明 $H : X\times[0,1] \to X$ を f から g へのホモトピーとすると $H_n\circ j_{0n} = f_n$, $H_n\circ j_{1n} = g_n$ である. $\Phi_n : C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ を (6.14) の Ψ_n を用いて $\Phi_n = H_{n+1}\circ\Psi_n$ で定めれば $d_{n+1}\circ\Psi_n + \Psi_{n-1}\circ d_n = j_{1n} - j_{0n}$ から $d_{n+1}\circ\Phi_n + \Phi_{n-1}\circ d_n = d_{n+1}\circ H_{n+1}\circ\Psi_n + H_n\circ\Psi_{n-1}\circ d_n = H_n\circ d_{n+1}\circ\Psi_n + H_n\circ\Psi_{n-1}\circ d_n = H_n\circ j_{1n} - H_n\circ j_{0n} = g_n - f_n$. □

系 6.17 $f : X \to Y$ がホモトピー同値写像ならば $f. : C.(X) \to C.(Y)$ は鎖ホモトピー同値写像である. 従って, すべての $n \in \boldsymbol{Z}$ に対して $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ は同型写像である.

証明 $g : Y \to X$ を f のホモトピー逆写像とすれば $g\circ f \simeq id_X$, $f\circ g \simeq id_Y$ だから (6.16) と (6.4) から $g.\circ f. \simeq id_{C.(X)}$, $f.\circ g. \simeq id_{C.(Y)}$ が得られる. 後半の主張は (5.8) から分かる. □

上の結果と (6.6) の (1) から次の結果が得られる.

命題 6.18 X が可縮な位相空間ならば $H_n(X) = \{0\}$ $(n \neq 0)$, $H_0(X)$ は $\boldsymbol{Z}$ と同型である.

X を位相空間, A を X の部分空間とすると包含写像 $i : A \to X$ により $S_n(A) \subset S_n(X)$ とみなせる. 従って $C_n(A)$ を $C_n(X)$ の部分群とみなすと $d_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ は $C_n(A)$ を $C_{n-1}(A)$ の中に写すため $d'_n : C_n(A) \to C_{n-1}(A)$ を d_n の制限とすると $C.(A) = ((C_n(A))_{n\in\boldsymbol{Z}}, (d'_n)_{n\in\boldsymbol{Z}})$ は $C.(X)$ の部分複体である.

定義 6.19 位相空間 X と, その部分空間 A の対 (X, A) に対し $H_n(X, A) = H_n(C.(X)/C.(A))$ とおいて, これを位相空間対 (X, A) の n 次元ホモロジー群という.

連続写像 $f : X \to Y$ が X の部分空間 A を Y の部分空間 B の中に写すとき f は対 (X, A) から対 (Y, B) への写像であるといい, $f : (X, A) \to (Y, B)$ で表す. このとき $f_n : C_n(X) \to C_n(Y)$ は $C_n(A)$ を $C_n(B)$ の中に写すため $p_n : C_n(X) \to C_n(X)/C_n(A)$, $p'_n : C_n(Y) \to C_n(Y)/C_n(B)$ を商写像とすれば, 準同型写像 $\bar{f}_n : C_n(X)/C_n(A) \to C_n(Y)/C_n(B)$ で $\bar{f}_n\circ p_n = p'_n\circ f_n$ を満たすものがただ1つ存在する. $\bar{f}. = (\bar{f}_n)_{n\in\boldsymbol{Z}} : C.(X)/C.(A) \to C.(Y)/C.(B)$ が鎖写像になることは容易に確かめられるため, 準同型写像 $f_* = H_n(\bar{f}.) : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ が得られる.

(6.8) と同様に以下の結果が成り立つ.

命題 6.20 $id_{(X,A)} : (X, A) \to (X, A)$ を恒等写像とすれば $id_{(X,A)*} : H_n(X, A) \to H_n(X, A)$ は恒等写像であり, 位相空間対の連続写像 $f : (X, A) \to (Y, B)$, $g : (Y, B) \to (Z, C)$ に対し $(g\circ f)_* = g_*\circ f_* : H_n(X, A) \to H_n(Z, C)$ が成り立つ.

定理 6.21 位相空間 X の部分空間 A, B が $B \subset A$ を満たすとし, $i : (A, B) \to (X, B)$, $j : (X, B) \to (X, A)$ を包

含写像とする．このとき, 次の完全系列がある．

$$\cdots \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A,B) \xrightarrow{i_*} H_n(X,B) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A,B) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

とくに $B=\emptyset$ の場合は上の完全列は次のようになる．

$$\cdots \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

証明 鎖複体の短完全列 $0. \to C.(A)/C.(B) \xrightarrow{i.} C.(X)/C.(B) \xrightarrow{j.} C.(X)/C.(A) \to 0.$ に (5.11) を用いればよい． □

命題 6.22 位相空間 X の部分空間 A, B が $B\subset A$ を満たし, Y の部分空間 U, V が $V\subset U$ を満たすとする．連続写像 $f:X\to Y$ が $f(A)\subset U$, $f(B)\subset V$ を満たすとき, f は $f_1:(X,A)\to(Y,U)$, $f_2:(X,B)\to(Y,V)$, $f_3:(A,B)\to(U,V)$ を定める．このとき, 下図は可換である．

$$\begin{array}{ccc} H_n(X,A) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A,B) \\ \big\downarrow{\scriptstyle f_{1*}} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_{3*}} \\ H_n(Y,U) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(U,V) \end{array}$$

証明 (5.10) を $C. = C.(A)/C.(B)$, $D. = C.(X)/C.(B)$, $E. = C.(X)/C.(A)$, $F. = C.(U)/C.(V)$, $G. = C.(Y)/C.(V)$, $H. = C.(Y)/C.(U)$, $\lambda. = f_{3}.$, $\mu. = f_{2}.$, $\nu. = f_{1}.$ に対して用いればよい． □

(6.21), (6.22), (4.21) から次の結果が得られる．

命題 6.23 (6.22) の仮定のもとで, 次の 3 つの条件のうち 2 つが満たされれば, 残りの 1 つが成り立つ．

(i) すべての $n\in\boldsymbol{Z}$ に対して $f_{1*}:H_n(X,A)\to H_n(Y,U)$ は同型写像である．

(ii) すべての $n\in\boldsymbol{Z}$ に対して $f_{2*}:H_n(X,B)\to H_n(Y,V)$ は同型写像である．

(iii) すべての $n\in\boldsymbol{Z}$ に対して $f_{3*}:H_n(A,B)\to H_n(U,V)$ は同型写像である．

位相空間対の間の連続写像に対しても (2.6) と同様の定義をする．

定義 6.24 位相空間対の連続写像 $f,g:(X,A)\to(Y,B)$ に対し, 連続写像 $H:X\times[0,1]\to Y$ で $H(x,0)=f(x)$, $H(x,1)=g(x)$ $(x\in X)$ および $H(A\times[0,1])\subset B$ を満たすものがあるとき, f と g はホモトピックであるといい, $f\simeq g$ で表す．また, この H を f から g へのホモトピーという．

(6.16) は次のように一般化される．

定理 6.25 $f\simeq g:(X,A)\to(Y,B)$ ならば $f.\simeq g.:C.(X)/C.(A)\to C.(Y)/C.(B)$ である．従って $f_*=g_*:H_n(X,A)\to H_n(Y,B)$ $(n\in\boldsymbol{Z})$ が成り立つ．

証明 $H:X\times[0,1]\to Y$ を f から g までのホモトピーとすると $H(A\times[0,1])\subset B$ だから $H.:C.(X\times[0,1])\to C.(Y)$ は $C.(A\times[0,1])$ を $C.(B)$ に写す．従って $H.$ は $\bar{H}.:C.(X\times[0,1])/C.(A\times[0,1])\to C.(Y)/C.(B)$ を定義する．また (6.15) から $\Psi_n:C_n(X)\to C_{n+1}(X\times[0,1])$ は $C_n(A)$ を $C_{n+1}(A\times[0,1])$ に写すため $\bar{\Psi}_n:C_n(X)/C_n(A)\to C_{n+1}(X\times[0,1])/C_{n+1}(A\times[0,1])$ が定まる．そこで $\bar{\Phi}_n=\bar{H}_{n+1}\circ\bar{\Psi}_n$ により $\bar{\Phi}_n:C_n(X)/C.(A)\to C_{n+1}(Y)/C.(B)$ を定めれば $\bar{\Phi}.$ は (6.16) の証明より $f.$ から $g.$ への鎖ホモトピーになっている． □

§7. 切除同型

各位相空間 X に対し, 鎖写像 $sd_{X}.=sd.:C.(X)\to C.(X)$ と $id_{C.(X)}$ から $sd_{X}.$ への鎖ホモトピー $\Psi_{X}.=\Psi.=(\Psi_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}$ を以下のように定義する．

まず $sd_0(x)=x$, $\Psi_0(x)=0$ $(x\in C_0(X))$ と定め, $n<k$ に対して $sd_n : C_n(X)\to C_n(X)$, $\Psi_n : C_n(X)\to C_{n+1}(X)$ が任意の位相空間 X に対して定まり, $d_n\circ sd_n = sd_{n-1}\circ d_n$, $d_{n+1}\circ\Psi_n+\Psi_{n-1}\circ d_n = sd_n - id_{C_n(X)}$ が成り立ち, さらに任意の連続写像 $f : X\to Y$ に対して下の図式は可換であると仮定する.

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{sd_{Xn}} & C_n(X) \\ \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} \\ C_n(Y) & \xrightarrow{sd_{Yn}} & C_n(Y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{\Psi_{Xn}} & C_{n+1}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} \\ C_n(Y) & \xrightarrow{\Psi_{Yn}} & C_{n+1}(Y) \end{array}$$

負でない整数 k に対し $\boldsymbol{p}=\left(\dfrac{1}{k+1},\dfrac{1}{k+1},\dots,\dfrac{1}{k+1}\right)\in\boldsymbol{R}^{k+1}$ とおくと $\boldsymbol{p}\in\Delta^k$ である. $H:\Delta^k\times[0,1]\to\Delta^k$ を $H(\boldsymbol{x},t)=(1-t)\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{x}$ で定めれば H は id_{Δ^k} から Δ^k の各点を $\boldsymbol{p}$ に写す定値写像へのホモトピーである. この H に対し, (6.11) で定義した準同型写像 $\Phi_n : C_n(\Delta^k)\to C_{n+1}(\Delta^k)$ を考えて, $id_{\Delta^k} : \Delta^k\to\Delta^k$ に対し, $sd_k(id_{\Delta^k})\in C_k(\Delta^k)$, $\Psi_k(id_{\Delta^k})\in C_{k+1}(\Delta^k)$ を

$$sd_k(id_{\Delta^k})=\Phi_{k-1}(sd_{k-1}(d_k(id_{\Delta^k}))),\qquad \Psi_k(id_{\Delta^k})=\Phi_k(sd_k(id_{\Delta^k})-id_{\Delta^k}-\Psi_{k-1}(d_k(id_{\Delta^k})))$$

によって定める. 任意の $\sigma\in S_k(X)$ に対し, 鎖写像 $\sigma_. : C_.(\Delta^k)\to C_.(X)$ を考え, $sd_k(\sigma)=\sigma_k(sd_k(id_{\Delta^k}))$, $\Psi_k(\sigma)=\sigma_{k+1}(\Psi_k(id_{\Delta^k}))$ と定義する. このとき

$$\begin{aligned} d_1\circ sd_1(\sigma) &= d_1(\sigma_1(sd_1(id_{\Delta^1})))=\sigma_0(d_1(\Phi_0(d_1(id_{\Delta^1}))))=\sigma_0(d_1(id_{\Delta^1})-\tau_0(\epsilon_0(d_1(id_{\Delta^1})))) \\ &= \sigma_0(d_1(id_{\Delta^1}))=d_1(\sigma_1(id_{\Delta^1}))=d_1(\sigma)=sd_0\circ d_1(\sigma) \end{aligned}$$

であり, $k>1$ ならば

$$\begin{aligned} d_k\circ sd_k(\sigma) &= d_k(\sigma_k(sd_k(id_{\Delta^k})))=\sigma_{k-1}(d_k(\Phi_{k-1}(sd_{k-1}(d_k(id_{\Delta^k}))))) \\ &= \sigma_{k-1}(sd_{k-1}(d_k(id_{\Delta^k}))-\Phi_{k-2}(d_{k-1}(sd_{k-1}(d_k(id_{\Delta^k}))))) \\ &= \sigma_{k-1}(sd_{k-1}(d_k(id_{\Delta^k}))-\Phi_{k-2}(sd_{k-2}(d_{k-1}(d_k(id_{\Delta^k}))))) \\ &= \sigma_{k-1}(sd_{k-1}(d_k(id_{\Delta^k})))=sd_{k-1}(\sigma_{k-1}(d_k(id_{\Delta^k}))) \\ &= sd_{k-1}(d_k(\sigma_k(id_{\Delta^k})))=sd_{k-1}\circ d_k(\sigma) \end{aligned}$$

また, $\sigma\in S_1(X)$ に対し,

$$\begin{aligned} d_2\circ\Psi_1(\sigma)+\Psi_0\circ d_1(\sigma) &= d_2(\sigma_2(\Psi_1(id_{\Delta^1})))=\sigma_1(d_2(\Psi_1(id_{\Delta^1})))=\sigma_1(d_2(\Phi_1(sd_1(id_{\Delta^1})-id_{\Delta^1}))) \\ &= \sigma_1(sd_1(id_{\Delta^1})-id_{\Delta^1}-\Phi_0(d_1(sd_1(id_{\Delta^1})-id_{\Delta^1}))) \\ &= \sigma_1(sd_1(id_{\Delta^1})-id_{\Delta^1}-\Phi_0(sd_0(d_1(id_{\Delta^1}))-d_1(id_{\Delta^1}))) \\ &= \sigma_1(sd_1(id_{\Delta^1})-id_{\Delta^1})=sd_1(\sigma)-\sigma \end{aligned}$$

であり, $k>1$ の場合 $\sigma\in S_k(X)$ に対し,

$$\begin{aligned} d_{k+1}\circ\Psi_k(\sigma)+\Psi_{k-1}\circ d_k(\sigma) &= d_{k+1}(\sigma_{k+1}(\Psi_k(id_{\Delta^k})))+\Psi_{k-1}(d_k(\sigma_k(id_{\Delta^k}))) \\ &= \sigma_k(d_{k+1}(\Psi_k(id_{\Delta^k})))+\Psi_{k-1}(\sigma_{k-1}(d_k(id_{\Delta^k}))) \\ &= \sigma_k(d_{k+1}(\Phi_k(sd_k(id_{\Delta^k})-id_{\Delta^k}-\Psi_{k-1}(d_k(id_{\Delta^k})))))+\sigma_k(\Psi_{k-1}(d_k(id_{\Delta^k}))) \\ &= \sigma_k(sd_k(id_{\Delta^k})-id_{\Delta^k}-\Phi_{k-1}(d_k(sd_k(id_{\Delta^k})-id_{\Delta^k}-\Psi_{k-1}(d_k(id_{\Delta^k}))))) \\ &= \sigma_k(sd_k(id_{\Delta^k})-id_{\Delta^k}-\Phi_{k-1}(sd_{k-1}(d_k(id_{\Delta^k}))-d_k(id_{\Delta^k})-d_k(\Psi_{k-1}(d_k(id_{\Delta^k}))))) \\ &= \sigma_k(sd_k(id_{\Delta^k})-id_{\Delta^k})=sd_k(\sigma)-\sigma \end{aligned}$$

任意の連続写像 $f : X\to Y$ と $\sigma\in S_k(X)$ に対して $f_k(sd_k(\sigma))=f_k(\sigma_k(sd_k(id_{\Delta^k})))=(f\circ\sigma)_k(sd_k(id_{\Delta^k}))=sd_k(f\circ\sigma)=sd_k(f_k(\sigma))$, $f_{k+1}(\Psi_k(\sigma))=f_{k+1}(\sigma_{k+1}(\Psi_k(id_{\Delta^k})))=(f\circ\sigma)_{k+1}(\Psi_k(id_{\Delta^k}))=\Psi_k(f\circ\sigma)=\Psi_k(f_k(\sigma))$. 以上から sd_k, Ψ_k は必要な条件をすべて満たす.

定義 7.1 X を $\boldsymbol{R}^N$ の部分空間とする．$\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n \in X$ が存在して $\sigma(x_0,x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=0}^{n} x_i\boldsymbol{p}_i$ で定義される $\sigma \in S_n(X)$ は線型であるという．$C_n^L(X)$ を $\{\sigma \in S_n(X)\,|\,\sigma$ は線型 $\}$ で生成される $C_n(X)$ の部分群とする．

$\varepsilon_i^{(n)}:\Delta^{n-1}\to\Delta^n$ は線型だから $\sigma\circ\varepsilon_i^{(n)}$ も線型である．従って $d_n(C_n^L(X))\subset C_{n-1}^L(X)$ である．

補題 7.2 $\boldsymbol{p}=\left(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k+1},\dots,\frac{1}{k+1}\right)\in\boldsymbol{R}^{k+1}$ とおき $H:\Delta^k\times[0,1]\to\Delta^k$ を $H(\boldsymbol{x},t)=(1-t)\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{x}$ で定めて，この H に対し，(6.11) で定義した準同型写像 $\Phi_n:C_n(\Delta^k)\to C_{n+1}(\Delta^k)$ は $C_n^L(\Delta^k)$ を $C_{n+1}^L(\Delta^k)$ の中に写す．

証明 $\sigma\in S_n(\Delta^k)$ は $\sigma(x_0,x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=0}^{n}x_i\boldsymbol{p}_i$ $(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n\in X)$ で与えられるとする．$x_0\neq 1$ ならば

$$\begin{aligned}\Phi_n(\sigma)(x_0,x_1,\dots,x_{n+1})&=H\left(\sigma\left(\frac{x_1}{1-x_0},\frac{x_2}{1-x_0},\dots,\frac{x_{n+1}}{1-x_0}\right),x_0\right)\\&=x_0\boldsymbol{p}+(1-x_0)\sigma\left(\frac{x_1}{1-x_0},\frac{x_2}{1-x_0},\dots,\frac{x_{n+1}}{1-x_0}\right)=x_0\boldsymbol{p}+\sum_{i=0}^{n}x_{i+1}\boldsymbol{p}_i\end{aligned}$$

だから $\Phi_n(\sigma)$ も線型である． □

補題 7.3 $X\subset\boldsymbol{R}^N$ のとき $sd_n:C_n(X)\to C_n(X)$, $\Psi_n:C_n(X)\to C_{n+1}(X)$ は $C_n^L(X)$ をそれぞれ $C_n^L(X)$, $C_{n+1}^L(X)$ の中に写す．

証明 主張を n による帰納法で示す．$n=0$ のときは $sd_0=id_{C_0(X)}$, $\Psi_0=0$ だから主張は成り立つ．$n<k$ の場合に主張が成り立つと仮定すると

$$sd_k(id_{\Delta^k})=\Phi_{k-1}(sd_{k-1}(d_k(id_{\Delta^k}))),\qquad \Psi_k(id_{\Delta^k})=\Phi_k(sd_k(id_{\Delta^k})-id_{\Delta^k}-\Psi_{k-1}(d_k(id_{\Delta^k})))$$

だから (7.2) から $sd_k(id_{\Delta^k})\in C_k^L(\Delta^k)$, $\Psi_k(id_{\Delta^k})\in C_{k+1}^L(\Delta^k)$ である．$\sigma\in S_k(X)$ が線型ならば $\sigma_i:C_i(\Delta^k)\to C_i(X)$ は $C_i^L(\Delta^k)$ を $C_i^L(X)$ に写すため $sd_k(\sigma)=\sigma_k(sd_k(id_{\Delta^k}))\in C_k^L(X)$, $\Psi_k(\sigma)=\sigma_{k+1}(\Psi_k(id_{\Delta^k}))\in C_{k+1}^L(X)$ である． □

定義 7.4 X を距離空間, d を X の距離関数とする．

(1) $p\in X$ と $r>0$ に対し $B(p;r)=\{x\in X\,|\,d(x,p)<r\}$ とおき，中心 p 半径 r の開球という．

(2) $A\subset X$ に対し $D(A)=\sup\{d(x,y)\,|\,x,y\in A\}$ とおいて，これを A の直径という．

注意 7.5 $D(B(p;r))=2r$ であり, $D(A)<r$ ならば $a\in A$ に対し $A\subset B(a;r)$ である．

定義 7.6 X を距離空間とする．$x=r_1\sigma_1+r_2\sigma_2+\cdots+r_l\sigma_l\in C_n(X)$ $(r_1,r_2,\dots,r_l\in\boldsymbol{Z}-\{0\}$, $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_l\in S_n(X)$, $i\neq j$ ならば $\sigma_i\neq\sigma_j)$ に対し，$M(x)=\max\{D(\sigma_1(\Delta^n)),D(\sigma_2(\Delta^n)),\dots,D(\sigma_l(\Delta^n))\}$ とおく．

この定義からただちに次のことが分かる．

命題 7.7 X を距離空間, $x,y\in C_n(X)$ とする．$M(x+y)\leqq\max\{M(x),M(y)\}$ であり, $x=r_1\sigma_1+r_2\sigma_2+\cdots+r_l\sigma_l$, $y=s_1\tau_1+s_2\tau_2+\cdots+s_m\tau_m$ $(r_i,s_j\in\boldsymbol{Z}$, $\sigma_i,\tau_j\in S_n(X))$ かつ $\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_l\}\cap\{\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m\}=\emptyset$ ならば $M(x+y)=\max\{M(x),M(y)\}$ である．また, $r\in\boldsymbol{Z}-\{0\}$ ならば $M(rx)=M(x)$ が成り立つ．

命題 7.8 $\sigma:\Delta^n\to\Delta^k$ は $\sigma(x_0,x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=0}^{n}x_i\boldsymbol{p}_i$ $(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n\in\Delta^k)$ で与えられるとする．

(1) $M(\sigma)=D(\sigma(\Delta^n))=\max\{\|\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{p}_i\|\,|\,0\leqq i<j\leqq n\}$ である．とくに $M(id_{\Delta^n})=D(\Delta^n)=\sqrt{2}$ である．

(2) (7.2) における $\Phi_n:C_n(\Delta^k)\to C_{n+1}(\Delta^k)$ を考え, $\tau:\Delta^k\to\Delta^l$ も線型ならば

$$M(\tau_{n+1}(\Phi_n(\sigma)))=D(\tau(\Phi_n(\sigma)(\Delta^{n+1})))=\max(\{\|\tau(\boldsymbol{p})-\tau(\boldsymbol{p}_i)\|\,|\,i=0,1,\dots,n\}\cup\{M(\tau\circ\sigma)\}).$$

(3) $M(\tau_{n+1}(\Phi_n(\sigma)))\leqq\max\left\{\frac{k}{k+1}M(\tau),\ M(\tau\circ\sigma)\right\}.$

証明 (1) $(x_0,x_1,\ldots,x_n),(y_0,y_1,\ldots,y_n)\in\Delta^n$ とし, $\boldsymbol{x}=\sum_{i=0}^n x_i\boldsymbol{p}_i$, $\boldsymbol{y}=\sum_{i=0}^n y_i\boldsymbol{p}_i$ とおくと $\sum_{i=0}^n x_i=\sum_{i=0}^n y_i=1$, $x_i,y_i\geqq 0$ より $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\left\|\sum_{i=0}^n y_i\boldsymbol{x}-\sum_{i=0}^n y_i\boldsymbol{p}_i\right\|=\left\|\sum_{i=0}^n y_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}_i)\right\|\leqq\sum_{i=0}^n y_i\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}_i\|\leqq\max\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}_i\|\,|\,0\leqq i\leqq n\}$ を得る. 同様にして $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}_i\|\leqq\max\{\|\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{p}_i\|\,|\,0\leqq j\leqq n\}$ だから $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\leqq\max\{\|\boldsymbol{p}_j-\boldsymbol{p}_i\|\,|\,0\leqq i<j\leqq n\}$.

(2) (7.2) の証明から $\Phi_n(\sigma)(x_0,x_1,\ldots,x_{n+1})=x_0\boldsymbol{p}+\sum_{i=0}^n x_{i+1}\boldsymbol{p}_i$ であり, τ は線形だから次の等式が成り立つ.

$$\tau_{n+1}(\Phi_n(\sigma))(x_0,x_1,\ldots,x_{n+1})=x_0\tau(\boldsymbol{p})+\sum_{i=0}^n x_{i+1}\tau(\boldsymbol{p}_i)$$

従って (1) から結果が得られる.

(3) $\boldsymbol{e}_j\in\Delta^k$ $(j=0,1,\ldots,k)$ を第 $j+1$ 成分だけが 1 で他はすべて 0 であるような点とし $\boldsymbol{p}_i=\sum_{j=0}^k p_{ij}\boldsymbol{e}_j$ とおくと $\sum_{j=0}^k p_{ij}=1$, $p_{ij}\geqq 0$ だから (1) と同様やり方で $\|\tau(\boldsymbol{p})-\tau(\boldsymbol{p}_i)\|\leqq\max\{\|\tau(\boldsymbol{p})-\tau(\boldsymbol{e}_j)\|\,|\,0\leqq j\leqq k\}$ が得られる. また $\boldsymbol{p}=\sum_{i=0}^k\dfrac{1}{k+1}\boldsymbol{e}_i$ だから次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\|\tau(\boldsymbol{p})-\tau(\boldsymbol{e}_j)\|&=\left\|\sum_{i=0}^k\frac{1}{k+1}(\tau(\boldsymbol{e}_i)-\tau(\boldsymbol{e}_j))\right\|\leqq\sum_{i\neq j}\frac{1}{k+1}\|\tau(\boldsymbol{e}_i)-\tau(\boldsymbol{e}_j)\|\\&\leqq\frac{k}{k+1}\max\{\|\tau(\boldsymbol{e}_i)-\tau(\boldsymbol{e}_j)\|\,|\,0\leqq i\leqq k\}\leqq\frac{k}{k+1}M(\tau)\end{aligned}$$

従って $\|\tau(\boldsymbol{p})-\tau(\boldsymbol{p}_i)\|\leqq\dfrac{k}{k+1}M(\tau)$ だから (2) より結果が得られる. □

命題 7.9 $x\in C_k^L(\Delta^n)$ に対し $M(sd_k(x))\leqq\dfrac{k}{k+1}M(x)$ が成り立つ.

証明 k による帰納法で主張を示す. $x=\sigma\in S_k(\Delta^n)$ が線型ならば (7.8) の (3) より次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}M(sd_k(\sigma))&=M(\sigma_k(sd_k(id_{\Delta_k})))=M(\sigma_k(\Phi_{k-1}(sd_{k-1}(d_k(id_{\Delta^k})))))\\&\leqq\max\left\{\frac{k}{k+1}M(\sigma),M(\sigma_{k-1}(sd_{k-1}(d_k(id_{\Delta^k}))))\right\}\end{aligned}$$

帰納法の仮定を用いると次の不等式が得られる.

$$M(\sigma_{k-1}(sd_{k-1}(d_k(id_{\Delta^k}))))=M(sd_{k-1}(\sigma_{k-1}(d_k(id_{\Delta^k}))))=M(sd_{k-1}(d_k(\sigma)))\leqq\frac{k-1}{k}M(d_k(\sigma))\leqq\frac{k}{k+1}M(\sigma)$$

従って $M(sd_k(\sigma))\leqq\dfrac{k}{k+1}M(\sigma)$ である. $x\in C_k^L(\Delta^n)$ 対して $x=r_1\sigma_1+r_2\sigma_2+\cdots+r_l\sigma_l$ $(r_1,r_2,\ldots,r_l\in\boldsymbol{Z}-\{0\}$, $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_l\in S_n(X)$, $i\neq j$ ならば $\sigma_i\neq\sigma_j)$ とするとき (7.7) から

$$M(sd_k(x))\leqq\max\{M(sd_k(\sigma_1)),M(sd_k(\sigma_2)),\ldots,M(sd_k(\sigma_l))\}\leqq\frac{k}{k+1}\max\{M(\sigma_1),M(\sigma_2),\ldots,M(\sigma_l)\}=\frac{k}{k+1}M(x)$$

となって, 帰納法が進む. □

命題 7.10 X をコンパクト距離空間, $\{O_i|\,i\in I\}$ を X の開被覆とすると, 正の実数 δ で次の条件を満たすものがある.

「任意の $x\in X$ に対して $B(x;\delta)\subset O_i$ となる $i\in I$ がある」

証明 $\delta>0$ に対して $F_\delta=\{x\in X|$ すべての $i\in I$ に対し $B(x;\delta)\not\subset O_i\}$ とおく. $\delta<\delta'$ ならば $F_\delta\subset F_{\delta'}$ だから, すべての $\delta>0$ に対して $F_\delta\neq\emptyset$ と仮定すれば $(\overline{F}_\delta)_{\delta>0}$ は有限交叉性をもつ閉集合族である. このとき X のコンパクト性から $\bigcap_{\delta>0}\overline{F}_\delta\neq\emptyset$ である. $x_0\in\bigcap_{\delta>0}\overline{F}_\delta$ とし, $x_0\in O_{i_0}$ となる $i_0\in I$ と $B(x_0;\delta_0)\subset O_{i_0}$ となる $\delta_0>0$ をとる. $x\in B\bigl(x_0;\frac{\delta_0}{2}\bigr)$ ならば $B\bigl(x;\frac{\delta_0}{2}\bigr)\subset B(x_0;\delta_0)\subset O_{i_0}$ だから $B\bigl(x_0;\frac{\delta_0}{2}\bigr)\subset X-F_{\frac{\delta_0}{2}}$ である. 従って $x_0\notin\overline{F}_{\frac{\delta_0}{2}}$ となって $x_0\in\bigcap_{\delta>0}\overline{F}_\delta$ と矛盾する. 故に $F_\delta=\emptyset$ となる $\delta>0$ がある. □

(7.5) と (7.10) から以下の結果を得る.

系 7.11　X をコンパクト距離空間, $\{O_i | i \in I\}$ を X の開被覆とすると, 正の実数 δ で次の条件を満たすものがある.

「$A \subset X$ が $D(A) < \delta$ を満たせば $A \subset O_i$ となる $i \in I$ がある」

上の条件を満たす $\delta > 0$ を開被覆 $\{O_i | i \in I\}$ のルベーグ数という.

定義 7.12　$\mathcal{U}$ を位相空間 X の部分集合からなる集合とし $C.(X)$ の部分複体 $C_n(\mathcal{U})$ を $C.(\mathcal{U}) = \sum_{A \in \mathcal{U}} C.(A)$ で定義する. このとき, $\iota. = (\iota_n)_{n \in \boldsymbol{Z}} : C.(\mathcal{U}) \to C.(X)$ を包含写像とする.

命題 7.13　$\mathcal{U}$ を位相空間 X の部分集合からなる集合とするとき $sd_n(C_n(\mathcal{U})) \subset C_n(\mathcal{U})$, $\Psi_n(C_n(\mathcal{U})) \subset C_{n+1}(\mathcal{U})$ である.

証明　$\sigma \in S_n(X)$ は $\sigma(\Delta^n) \subset A$ を満たすとする. $i : A \to X$ を包含写像とすれば,

$$\begin{array}{ccc} C_n(A) & \xrightarrow{sd_{An}} & C_n(A) \\ \downarrow{\scriptstyle i_n} & & \downarrow{\scriptstyle i_n} \\ C_n(X) & \xrightarrow{sd_{Xn}} & C_n(X) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C_n(A) & \xrightarrow{\Psi_{An}} & C_{n+1}(A) \\ \downarrow{\scriptstyle i_n} & & \downarrow{\scriptstyle i_{n+1}} \\ C_n(X) & \xrightarrow{\Psi_{Xn}} & C_{n+1}(X) \end{array}$$

は可換だから結果が得られる. □

$sd_n : C_n(X) \to C_n(X)$ の r 回合成した写像を sd_n^r で表わす.

命題 7.14　位相空間 X の部分集合からなる集合 $\mathcal{U}$ が $X = \bigcup_{A \in \mathcal{U}} \mathrm{Int}A$ を満たすとき, 任意の $\sigma \in S_n(X)$ に対して $r \geqq 0$ で $sd_n^r(\sigma) \in C_n(\mathcal{U})$ となるものがある.

証明　仮定から $\Delta^n = \bigcup_{A \in \mathcal{U}} \sigma^{-1}(\mathrm{Int}A)$ であり, (7.11) からコンパクト距離空間 Δ^n の開被覆 $\{\sigma^{-1}(\mathrm{Int}A) | A \in \mathcal{U}\}$ のルベーグ数 δ がある. r を $\sqrt{2}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^r < \delta$ を満たすように選ぶと $M(sd^r(id_{\Delta_n})) \leqq \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^r M(id_{\Delta_n}) < \delta$ が (7.9) と (7.8) の (1) から得られる. 従って $sd^r(id_{\Delta_n}) \in C_n(\{\sigma^{-1}(\mathrm{Int}A) | A \in \mathcal{U}\})$ であり, σ_n は $C_n(\sigma^{-1}(\mathrm{Int}A))$ を $C_n(\mathrm{Int}A) \subset C_n(A)$ の中へ写すため $sd^r(\sigma) = \sigma_n(sd^r(id_{\Delta_n})) \in C_n(\mathcal{U})$ である. □

定理 7.15　(7.14) の仮定のもとで $\iota. = (\iota_n)_{n \in \boldsymbol{Z}} : C.(\mathcal{U}) \to C.(X)$ は鎖ホモトピー同値写像である.

証明　各 $\sigma \in S_n(X)$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ に対し, $r(\sigma)$ を $sd^r(\sigma) \in C_n(\mathcal{U})$ となる負でない整数 r の中で最小のものとする. (7.14) により, このような $r(\sigma)$ は存在して, $r(\sigma) = 0$ であるためには $\sigma \in C_n(\mathcal{U})$ であることが必要十分である. また $r(\sigma \circ \varepsilon_i^{(n)}) \leqq r(\sigma)$ $(0 \leqq i \leqq n)$ が成り立つ. $\bar{\Psi}_n : C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ を $\sigma \in S_n(X)$ に対し $\bar{\Psi}_n(\sigma) = \sum_{j=0}^{r(\sigma)-1} \Psi_n(sd_n^j(\sigma))$ で定義する. また

$$\begin{aligned} d_{n+1}(\bar{\Psi}_n(\sigma)) &= \sum_{j=0}^{r(\sigma)-1} d_{n+1}(\Psi_n(sd_n^j(\sigma))) = \sum_{j=0}^{r(\sigma)-1} (sd_n^{j+1}(\sigma) - sd_n^j(\sigma) - \Psi_{n-1}(d_n(sd_n^j(\sigma)))) \\ &= sd_n^{r(\sigma)}(\sigma) - \sigma - \sum_{j=0}^{r(\sigma)-1} \Psi_{n-1}(sd_{n-1}n^j(d_n(\sigma))) \\ &= sd_n^{r(\sigma)}(\sigma) - \sigma - \sum_{j=0}^{r(\sigma)-1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \Psi_{n-1}(sd_{n-1}^j(\sigma \circ \varepsilon_i^{(n)})) \end{aligned}$$

$$\bar{\Psi}_{n-1}(d_n(\sigma)) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \bar{\Psi}_{n-1}(\sigma \circ \varepsilon_i^{(n)}) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{r(\sigma \circ \varepsilon_i^{(n)})-1} (-1)^i \Psi_{n-1}(sd_{n-1}^j(\sigma \circ \varepsilon_i^{(n)}))$$

より $\sigma + d_{n+1}(\bar{\Psi}_n(\sigma)) + \bar{\Psi}_{n-1}(d_n(\sigma)) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=r(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n)})}^{r(\sigma)-1} (-1)^i \Psi_{n-1}(sd_{n-1}^j(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n)})) + sd_n^{r(\sigma)}(\sigma)$ が得られる．この右辺は $C_n(\mathcal{U})$ に含まれるため $\rho. : C.(X) \to C.(\mathcal{U})$ を $\rho_n(\sigma) = \sigma + d_{n+1}(\bar{\Psi}_n(\sigma)) + \bar{\Psi}_{n-1}(d_n(\sigma))$ で定めると $d_n(\rho_n(\sigma)) = d_n(\sigma) + d_n(\bar{\Psi}_{n-1}(d_n(\sigma))) = \rho_{n-1}(d_n(\sigma))$, $\epsilon(\rho_0(\sigma)) = \epsilon(\sigma)$ だから $\rho.$ は鎖写像で $\epsilon\circ\rho_0 = \epsilon$ が成り立つ．$x \in C_n(\mathcal{U})$ ならば $\bar{\Psi}_n(x) = 0$ だから $\rho.\circ\iota. = id_{C.(\mathcal{U})}$ であり, ρ_n の定義から $d_{n+1}\circ\bar{\Psi}_n + \bar{\Psi}_{n-1}\circ d_n = \iota_n\circ\rho_n - id_{C.(X)}$ となるため $\iota_n\circ\rho_n \simeq id_{C.(X)}$ である． □

定義 7.16 Y, Z を位相空間 X の部分空間とする．包含写像 $C.(Y) \to C.(Y\cup Z)$, $C.(Z) \to C.(Y\cup Z)$ から定まる鎖写像 $i. : C.(Y) + C.(Z) \to C.(Y\cup Z)$ がすべての $n \in \boldsymbol{Z}$ に対してホモロジー群の同型写像 $H_n(i.) : H_n(C.(Y) + C.(Z)) \to H_n(Y\cup Z)$ を誘導するとき, Y, Z は切除的であるという．

(7.15) と (5.8) の (3) より次の定理が得られる．

定理 7.17 位相空間 X の部分空間 Y, Z が $X = \mathrm{Int}Y \cup \mathrm{Int}Z$ を満たせば Y, Z は切除的である．

命題 7.18 Y, Z が位相空間 X の部分空間のとき $C_n(Y)\cap C_n(Z) = C_n(Y\cap Z)$ $(n\in\boldsymbol{Z})$ が成り立つ．

証明 $C_n(Y) \subset C_n(Y\cap Z)$ かつ $C_n(Z) \subset C_n(Y\cap Z)$ だから $C_n(Y)\cap C_n(Z) \subset C_n(Y\cap Z)$ である．$x \in C_n(Y\cap Z)$, $x = r_1s_1 + r_2s_2 + \cdot + r_ks_k$ $(r_i \in \boldsymbol{Z},\ s_i \in S_n(Y\cap Z))$ とすれば, $S_n(Y)\cap S_n(Z) = S_n(Y\cap Z)$ だから $x \in C_n(Y)$ かつ $x \in C_n(Z)$ である． □

定理 7.19 位相空間 X の部分空間 Y, Z が切除的であるためには, 包含写像 $j : (Y, Y\cap Z) \to (Y\cup Z, Z)$ がすべての $n\in\boldsymbol{Z}$ に対してホモロジー群の同型写像 $j_* : H_n(Y, Y\cap Z) \to H_n(Y\cup Z, Z)$ を誘導することが必要十分である．

証明 (7.18), (4.16) から包含写像 $i_1. : C.(Y) \to C.(Y) + C.(Z)$ は鎖複体の同型写像 $\bar{i}_1. : C.(Y)/C.(Y\cap Z) \to (C.(Y) + C.(Z))/C.(Z)$ を誘導する． 包含写像 $i. : C.(Y) + C.(Z) \to C.(Y\cup Z)$ から誘導される鎖写像を $\bar{i}. : (C.(Y) + C.(Z))/C.(Z) \to C.(Y\cup Z)/C.(Z)$ とすると $j : (Y, Y\cap Z) \to (Y\cup Z, Z)$ から誘導される鎖写像 $j. : C.(Y)/C.(Y\cap Z) \to C.(Y\cup Z)/C.(Z)$ は合成 $\bar{i}.\circ i_1.$ に一致するため $j_* = H_n(j.)$ が同型写像であるためには $H_n(\bar{i}.) : H_n((C.(Y) + C.(Z))/C.(Z)) \to H_n(Y\cup Z, Z)$ が同型写像であることが必要十分である．

鎖複体の完全系列

$$0. \to C.(Z) \to C.(Y) + C.(Z) \to (C.(Y) + C.(Z))/C.(Z) \to 0.,$$

$$0. \to C.(Z) \to C.(Y\cup Z) \to C.(Y\cup Z)/C.(Z) \to 0.$$

を考えると (5.8) の (1) と (5.10) から下図は可換であり, (5.11) から上下の水平列は完全列である．

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_n(Z) & \longrightarrow & H_n(C.(Y)+C.(Z)) & \longrightarrow & H_n((C.(Y)+C.(Z))/C.(Z)) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(Z) & \longrightarrow & H_{n-1}(C.(Y)+C.(Z)) \\
\downarrow{\scriptstyle id_{H_n(Z)}} & & \downarrow{\scriptstyle H_n(i.)} & & \downarrow{\scriptstyle H_n(\bar{i}.)} & & \downarrow{\scriptstyle id_{H_{n-1}(Z)}} & & \downarrow{\scriptstyle H_{n-1}(i.)} \\
H_n(Z) & \longrightarrow & H_n(Y\cup Z) & \longrightarrow & H_n(Y\cup Z, Z) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(Z) & \longrightarrow & H_{n-1}(Y\cup Z)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_{n+1}((C.(Y)+C.(Z))/C.(Z)) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(Z) & \longrightarrow & H_n(C.(Y)+C.(Z)) & \longrightarrow & H_n((C.(Y)+C.(Z))/C.(Z)) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(Z) \\
\downarrow{\scriptstyle H_{n+1}(\bar{i}.)} & & \downarrow{\scriptstyle id_{H_n(Z)}} & & \downarrow{\scriptstyle H_n(i.)} & & \downarrow{\scriptstyle H_n(\bar{i}.)} & & \downarrow{\scriptstyle id_{H_{n-1}(Z)}} \\
H_{n+1}(Y\cup Z, Z) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(Z) & \longrightarrow & H_n(Y\cup Z) & \longrightarrow & H_n(Y\cup Z, Z) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(Z)
\end{array}$$

Y, Z が切除的ならば上の方の図で $H_n(i.)$, $H_{n-1}(i.)$ が同型写像だから (4.21) により $H_n(\bar{i}.)$ は同型写像である．逆にすべての $n\in\boldsymbol{Z}$ に対して $H_n(\bar{i}.)$ が同型写像ならば下の方の図から (4.21) により $H_n(i.)$ は同型写像である． □

系 7.20 位相空間 X の部分空間 A, U が $\overline{U} \subset \mathrm{Int}A$ を満たすとき, 包含写像 $j : (X - U, A - U) \to (X, A)$ は 同型写像 $j_* : H_n(X - U, A - U) \to H_n(X, A)$ $(n\in\boldsymbol{Z})$ を誘導する．

証明 $\overline{U} \subset \mathrm{Int}A$ より $\mathrm{Int}(X - U) \supset X - \overline{U} \supset X - A$ だから $X = \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}(X - U)$. (7.17) から A, $X - U$ は切

除的であり $A\cap(X-U)=A-U$, $A\cup(X-U)=X$ に注意すると (7.19) から結論が得られる. □

定義 7.21　位相空間対の連続写像 $f:(X,A)\to(Y,B)$ が $X-A$ を $Y-B$ の上に同相に写すとき, f を相対同相写像という.

定義 7.22　X を位相空間, A をその部分空間, $i:A\to X$ を包含写像とする.
(1) 連続写像 $r:X\to A$ で $r\circ i=id_A$ を満たすものがあるとき, A は X のレトラクトであるという.
(2) さらに $i\circ r$ から id_A へのホモトピー H で $(x,t)\in A\times[0,1]$ ならば $H(x,t)=x$ を満たすものがあるとき, A は X の変位レトラクトであるという.

定理 7.23　X をコンパクト Hausdorff 空間, A は X の閉集合とする. $A\subset \mathrm{Int}N$ であるような閉集合 N が存在して A は N の変位レトラクトであるとする. $f:(X,A)\to(Y,B)$ を相対同相写像とするとき, $f_*:H_n(X,A)\to H_n(Y,B)$ は同型写像である.

証明　$H:N\times[0,1]\to N$ を $H(N\times\{0\})\subset A$, $H(x,t)=x$ $((x,t)\in(A\times[0,1])\cup(X\times\{1\}))$ を満たすホモトピーとする. まず, N はコンパクト Hausdorff 空間 X の閉部分空間だからコンパクト Hausdorff 空間である. 従って $N\times[0,1]$ もコンパクト Hausdorff 空間だから, 連続な全射 $f\times id_{[0,1]}:N\times[0,1]\to f(N)\times[0,1]$ は閉写像である. $(x,t),(x',t')\in N\times[0,1]$ が $(f\times id_{[0,1]})(x,t)=(f\times id_{[0,1]})(x',t')$ を満たすとすれば, $f(x)=f(x')$ かつ $t=t'$ である. $f(A)\cap f(N-A)\subset B\cap(Y-B)=\emptyset$ だから $x,x'\in A$ か $x,x'\in N-A$ のいずれかが成り立つ. 前者の場合 $f(H(x,t))=f(x)=f(x')=f(H(x',t))$ であり, 後者の場合, $f|_{X-A}:X-A\to Y$ が単射であることから, $x=x'$ となる. いずれにせよ, $f(H(x,t))=f(H(x',t))$ であり, $f\times id_{[0,1]}$ は商写像 (問題 13.13) だから, 連続写像 $G:f(N)\times[0,1]\to f(N)$ で $f\circ H=G\circ(f\times id_{[0,1]})$ を満たすものがある (問題 13.15). $(y,t)\in(B\cap f(N))\times[0,1]$ とし, $f(x)=y$ となる $x\in N$ をとれば, $x\in A$ だから $G(y,t)=G(f(x),t)=f(H(x,t))=f(x)=y$ である. 以上のことから $M=f(N)\cup B$ とおき, $F:M\times[0,1]\to M$ を

$$F(y,t)=\begin{cases} y & (y,t)\in B\times[0,1] \\ G(y,t) & (y,t)\in f(N)\times[0,1]\end{cases}$$

で定義することができて, F は閉集合 $B\times[0,1]$, $f(N)\times[0,1]$ の上では連続になるため, $M\times[0,1]$ の上で連続である (問題 13.2). また $x\in N$ に対し, $F(f(x),0)=G(f(x),0)=f(H(x,0))\in f(A)$ だから F により B は M の変位レトラクトである.

X は正規空間だから $A\subset U\subset\overline{U}\subset\mathrm{Int}N$ を満たす開集合 U がある. $x\in Y-\mathrm{Int}M$ ならば x の開近傍 O で $O\cap M=\emptyset$ となるものがある. $V=f(U)\cup B$ とおくと $O\cap V=(O\cap f(U))\cup(O\cap B)\subset(O\cap f(N))\cup(O\cap B)=O\cap M=\emptyset$ だから $x\notin\overline{V}$ となるため $\overline{V}\subset\mathrm{Int}M$ である. 従って $j:(X-U,N-U)\to(X,N)$, $j':(Y-V,M-V)\to(Y,M)$ を包含写像とすれば (7.20) により $j_*:H_n(X-U,N-U)\to H_n(X,N)$, $j'_*:H_n(Y-V,M-V)\to H_n(Y,M)$ は同型写像である. また $i:(X,A)\to(X,N)$, $i':(Y,B)\to(Y,M)$ を包含写像とすると, 包含写像 $A\to N$, $B\to M$ はともにホモトピー同値写像だから, (6.23) により $i_*:H_n(X,A)\to H_n(X,N)$, $i'_*:H_n(Y,B)\to H_n(Y,M)$ は同型写像である. さらに f は $X-U$, $N-U$ をそれぞれ $Y-V$, $M-V$ の上に写す同相写像だから, f の制限 $f':(X-U,N-U)\to(Y-V,M-V)$ は同型写像 $f'_*:H_n(X-U,N-U)\to H_n(Y-V,M-V)$ を誘導する. $f'':(X,N)\to(Y,N')$ を f が定める写像とすれば, 図式

$$\begin{tikzcd} H_n(X,A) \arrow[r, "i_*", "\cong"'] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X,N) \arrow[d, "f''_*"] & H_n(X-U,N-U) \arrow[l, "j_*"', "\cong"] \arrow[d, "f'_*", "\cong"'] \\ H_n(Y,B) \arrow[r, "i'_*", "\cong"'] & H_n(Y,M) & H_n(Y-V,M-V) \arrow[l, "j'_*"', "\cong"] \end{tikzcd}$$

の可換性から $f_*:H_n(X,A)\to H_n(Y,B)$ は同型写像である. □

Y, Z を位相空間 X の部分空間とする．鎖写像 $k_. : C_.(Y \cap Z) \to C_.(Y) \oplus C_.(Z)$, $j_. : C_.(Y) \oplus C_.(Z) \to C_.(Y) + C_.(Z)$ を $k_n(x) = (x, -x)$, $j_n(x, y) = x + y$ で定義すると (7.18) から鎖複体の短完全列

$$0_. \to C_.(Y \cap Z) \xrightarrow{k_.} C_.(Y) \oplus C_.(Z) \xrightarrow{j_.} C_.(Y) + C_.(Z) \to 0_.$$

が得られる．(5.11) から完全列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(Y \cap Z) \xrightarrow{H_n(k_.)} H_n(C_.(Y) \oplus C_.(Z)) \xrightarrow{H_n(j_.)} H_n(C_.(Y) + C_.(Z)) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(Y \cap Z) \xrightarrow{H_{n-1}(i_.)} \cdots$$

がある．$i_1 : Y \cap Z \to Y$, $i_2 : Y \cap Z \to Z$, $j_1 : Y \to Y \cup Z$, $i_2 : Z \to Y \cup Z$, $i_. : C_.(Y) + C_.(Z) \to C_.(Y \cup Z)$ を包含写像，$\iota_{1.} : C_.(Y) \to C_.(Y) \oplus C_.(Z)$, $\iota_{2.} : C_.(Z) \to C_.(Y) \oplus C_.(Z)$ をそれぞれ第 1,2 成分への射入とする．$G : H_n(C_.(Y)) \oplus H_n(C_.(Z)) \to H_n(C_.(Y) \oplus C_.(Z))$ を $G(x, y) = H_n(\iota_{1.})(x) + H_n(\iota_{2.})(y)$ で定めれば (5.9) により G は同型写像である．$\kappa : H_n(Y \cap Z) \to H_n(Y) \oplus H_n(Z)$, $\eta : H_n(Y) \oplus H_n(Z) \to H_n(Y \cup Z)$ を $\kappa(x) = (i_{1*}(x), -i_{2*}(x))$, $\eta(x, y) = j_{1*}(x) + j_{2*}(y)$ で定めると下の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
H_n(Y \cap Z) \arrow[r, "H_n(k_.)"] \arrow[d, "\kappa"] & H_n(C_.(Y) \oplus C_.(Z)) \arrow[r, "H_n(j_.)"] & H_n(C_.(Y) + C_.(Z)) \arrow[d, "H_n(i_.)"] \\
H_n(Y) \oplus H_n(Z) \arrow[r, equal] & H_n(C_.(Y)) \oplus H_n(C_.(Z)) \arrow[u, "G"] \arrow[r, "\eta"] & H_n(Y \cup Z)
\end{tikzcd}$$

Y, Z が切除的ならば $\bar{\partial}_n = \partial_n \circ H_n(i_.)^{-1} H_n(Y \cup Z) \to H_{n-1}(Y \cap Z)$ とおくと上の議論から次の定理が得られる．

定理 7.24　Y, Z が切除的ならば次の完全列がある．

$$\cdots \xrightarrow{\bar{\partial}_{n+1}} H_n(Y \cap Z) \xrightarrow{\kappa_n} H_n(Y) \oplus H_n(Z) \xrightarrow{\eta_n} H_n(Y \cup Z) \xrightarrow{\bar{\partial}_n} H_{n-1}(Y \cap Z) \xrightarrow{\kappa_{n-1}} \cdots$$

上の定理の完全列を Mayer-Vietoris 完全列という．

命題 7.25　位相空間 X の部分空間 Y, Z が切除的であり，Y, Z がともに可縮であるとする．

(1) $n > 1$ に対し，$H_n(Y \cup Z)$ は $H_{n-1}(Y \cap Z)$ と同型であり，$H_1(Y \cup Z)$ は $H_0(Y \cap Z)$ の部分群と同型である．

(2) $Y \cap Z$ が弧状連結ならば $H_1(Y \cup Z) = \{0\}$ である．

証明　(1) (6.18) から $n \neq 0$ ならば $H_n(Y) = H_n(Z) = \{0\}$ だから (7.24) から $n > 1$ ならば $\bar{\partial}_n : H_n(Y \cup Z) \to H_{n-1}(Y \cap Z)$ は同型写像であり，$\bar{\partial}_1 : H_1(Y \cup Z) \to H_0(Y \cap Z)$ は $\kappa : H_0(Y \cap Z) \to H_0(Y) \oplus H_0(Z)$ の核の上への同型写像である．

(2) $Y \cap Z$ が弧状連結ならば，(6.6) の (2) から包含写像 $i_1 : Y \cap Z \to Y$ は同型写像 $i_{1*} : H_0(Y \cap Z) \to H_0(Y)$ を誘導していることが分かるため，$\kappa : H_0(Y \cap Z) \to H_0(Y) \oplus H_0(Z)$ は単射である．故に $H_1(Y \cup Z) = \{0\}$ である．□

$S^0 = \{1, -1\}$ だから (6.7) と (6.6) の (1) から $H_0(S^0)$ は $\boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}$ と同型であり，$n > 0$ ならば $H_n(S^0) = \{0\}$ であることに注意する．

定理 7.26　$n, i \geqq 1$, $n \neq i$ ならば $H_i(S^n) = \{0\}$, $n \geqq 1$ ならば $H_n(S^n)$ は $\boldsymbol{Z}$ と同型である．

証明　$\boldsymbol{p} = (0, \ldots, 0, 1) \in S^n$, $Y = S^n - \{\boldsymbol{p}\}$, $Z = S^n - \{-\boldsymbol{p}\}$ とおくと Y, Z はともに $\boldsymbol{R}^n$ と同相だから可縮である．Y, Z は S^n の開集合だから (7.17) により切除的である．さらに $S^n = Y \cup Z$, $Y \cap Z$ は $n-1$ 次元球面 S^{n-1} にホモトピー同値だから (7.25) の (1) と (6.17) から $i > 1$ ならば $H_i(S^n)$ と $H_{i-1}(S^{n-1})$ は同型である．従って $i > n$ の場合は $H_i(S^n)$ は $H_{i-n}(S^0) = \{0\}$ と同型である．また $H_n(S^n)$ は $H_1(S^1)$ と同型であり $i < n$ の場合 $H_i(S^n)$ は $H_1(S^{n-i+1})$ と同型になるため $H_1(S^1)$ は $\boldsymbol{Z}$ と同型で，$n > 1$ ならば $H_1(S^n) = \{0\}$ となることを示せば主張が示される．

$n > 1$ の場合，$Y \cap Z$ は弧状連結だから (7.25) の (2) から $H_1(S^n) = \{0\}$ である．

$n=1$ の場合, $Y\cap Z$ の 2 つの弧状連結成分を A, B とし, $i_A:A\to Y$, $i_B:B\to Y$, $i'_A:A\to Z$, $i'_B:B\to Z$ を包含写像とすれば (6.6) の (2) から $i_{A*}:H_0(A)\to H_0(Y)$, $i_{B*}:H_0(B)\to H_0(Y)$, $i'_{A*}:H_0(A)\to H_0(Z)$, $i'_{B*}:H_0(B)\to H_0(Z)$ はすべて同型写像である. $a\in A$, $b\in B$ をとり, Δ^0 を a, b に写す $S_0(A)$, $S_0(B)$ の要素をそれぞれ σ_a, σ_b とする. σ_a, σ_b の $H_0(A)$, $H_0(B)$ における類を $[\sigma_a]$, $[\sigma_b]$ とすると, それぞれ $H_0(A)$, $H_0(B)$ の生成元である. Y, Z は弧状連結だから $i_{A*}([\sigma_a])=i_{B*}([\sigma_b])$, $i'_{A*}([\sigma_a])=i'_{B*}([\sigma_b])$ が成り立つことに注意する. (6.7) の同型写像 $G:H_0(A)\oplus H_0(B)\to H_0(Y\cap Z)$ を考えると, 合成写像 $i_{1*}\circ G:H_0(A)\oplus H_0(B)\to H_0(Y)$, $i_{2*}\circ G: H_0(A)\oplus H_0(B)\to H_0(Z)$ は $(l[\sigma_a],m[\sigma_b])$ $(l,m\in \boldsymbol{Z})$ をそれぞれ $li_{A*}([\sigma_a])+mi_{B*}([\sigma_b])=(l+m)i_{A*}([\sigma_a])$, $li'_{A*}([\sigma_a])+mi'_{B*}([\sigma_b])=(l+m)i'_{A*}([\sigma_a])$ に写すため, $\kappa\circ G:H_0(A)\oplus H_0(B)\to H_0(Y)\oplus H_0(Z)$ は $(l[\sigma_a],m[\sigma_b])$ を $((l+m)i_{A*}([\sigma_a]),-(l+m)i'_{A*}([\sigma_a]))$ に写す. 従って $H_0(A)\oplus H_0(B)$ の部分群 $\{(l[\sigma_a],-l[\sigma_b])\,|\,l\in\boldsymbol{Z}\}$ が $\kappa\circ G$ の核になる. この部分群は明らかに $\boldsymbol{Z}$ と同型で, G によって $\kappa:H_0(Y\cap Z)\to H_0(Y)\oplus H_0(Z)$ の核の上に同型に写される. $\bar{\partial}_1:H_1(S^1)\to H_0(Y\cap Z)$ は κ の核の上への同型写像だから $H_1(S^1)$ が $\boldsymbol{Z}$ と同型とになることがわかる.□

位相空間 X に基点 x_0 を定めておく. 対 (X,x_0) に対して (6.21) を用いると, 包含写像 $i_0:(X,\emptyset)\to(X,x_0)$ は $n\neq 0$ ならば同型写像 $i_{0*}:H_n(X)\to H_n(X,x_0)$ を誘導する. 明らかに包含写像 $\{x_0\}\to X$ は左逆写像をもつため, 短完全列 $0\to H_0(\{x_0\})\to H_0(X)\xrightarrow{i_{0*}}H_0(X,x_0)\to 0$ に (4.24) を用いれば $H_0(X)$ は $H_0(\{x_0\})\oplus H_0(X,x_0)$ と同型である. また X が弧状連結ならば $H_0(\{x_0\})\to H_0(X)$ は同型写像だから $H_0(X,x_0)=\{0\}$ である.

とくに $X=S^n$ の場合, $\boldsymbol{p}_0=(1,0,\ldots,0)$ を S^n の基点とすると (7.26) から次の結果が得られる.

系 7.27 $i\neq n$ ならば $H_i(S^n,p_0)=\{0\}$ であり, $H_n(S^n,p_0)$ は $\boldsymbol{Z}$ と同型である.

§8. 球面の間の連続写像の写像度

定義 8.1 n を 1 以上の整数とする (7.26) により $H_n(S^n)$ は $\boldsymbol{Z}$ と同型だから, 連続写像 $f:S^n\to S^n$ に対し $f_*:H_n(S^n)\to H_n(S^n)$ を考えると, 整数 d で $f(x)=dx$ がすべての $x\in H_n(S^n)$ に対して成り立つようなものがただ 1 つ定まる. この整数 d を f の写像度と呼んで $\deg(f)$ で表わす.

命題 8.2 (1) $f,g:S^n\to S^n$ を連続写像とするとき $\deg(g\circ f)=\deg(g)\deg(f)$ である.
(2) $f,g:S^n\to S^n$ がホモトピックな連続写像ならば $\deg(f)=\deg(g)$ である.
(3) $\deg(id_{S^n})=1$
(4) $c:S^n\to S^n$ を定値写像とすれば $\deg(c)=0$ である.

証明 (1), (3) は (6.8) から明らか, (2) は (6.16) から, (4) は (6.6) の (1) から明らかである. □

命題 8.3 $T^n_0:S^n\to S^n$ を $T^n_0(x_0,x_1,\ldots,x_n)=(-x_0,x_1,\ldots,x_n)$ で定めれば $\deg(T^n_0)=-1$ である.

証明 Y, Z を (7.26) におけるものとする. $\eta:S^{n-1}\to Y\cap Z$ を $\eta(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})=(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},0)$ で定めると η はホモトピー同値写像で, (6.22) により下図は可換である.

$$\begin{array}{ccccc}
H_n(S^n) & \xrightarrow{\bar{\partial}_n} & H_{n-1}(Y\cap Z) & \xleftarrow[\eta_*]{} & H_{n-1}(S^{n-1})\\
\downarrow{\scriptstyle T^n_{0*}} & & \downarrow{\scriptstyle (T^n_0|_{Y\cap Z})_*} & & \downarrow{\scriptstyle T^{n-1}_{0*}}\\
H_n(S^n) & \xrightarrow{\bar{\partial}_n} & H_{n-1}(Y\cap Z) & \xleftarrow[\eta_*]{} & H_{n-1}(S^{n-1})
\end{array}$$

(7.25) により $n>1$ ならば $\bar{\partial}_n$ は同型写像であり, η_* も同型写像だから $n>1$ ならば $\deg(T^n_0)=\deg(T^{n-1}_0)$ となる. 従って $\deg(T^1_0)=-1$ を示せばよい. (7.26) の証明の記号を用いると $T^1_0(A)=B$, $T^1_0(B)=A$ だから $b=T^1_0(a)$ としておき, $\tau:H_0(A)\oplus H_0(B)\to H_0(A)\oplus H_0(B)$ を $\tau(l[\sigma_a],m[\sigma_b])=(m[\sigma_a],l[\sigma_b])$ で定め, さらに $K=\{(l[\sigma_a],-l[\sigma_b])\,|\,l\in\boldsymbol{Z}\}$ とおくと, 下図は可換である.

$$\begin{array}{ccccccc}
K & \xrightarrow{\text{inclusion}} & H_0(A)\oplus H_0(B) & \xrightarrow{G} & H_0(Y\cap Z) & \xleftarrow{\bar{\partial}_1} & H_1(S^1) \\
\downarrow{\scriptstyle (-1)\times} & & \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle (T_0^1|_{Y\cap Z})_*} & & \downarrow{\scriptstyle T_{0*}^1} \\
K & \xrightarrow{\text{inclusion}} & H_0(A)\oplus H_0(B) & \xrightarrow{G} & H_0(Y\cap Z) & \xleftarrow{\bar{\partial}_1} & H_1(S^1)
\end{array}$$

G は同型写像で (7.26) の証明から $\bar{\partial}_1 : H_1(S^1) \to H_0(Y\cap Z)$ は $G(K)$ の上への単射だから, 上図の可換性から $\deg(T_0^1) = -1$ がわかる. □

命題 8.4　$T : S^n \to S^n$ を $T(x) = -x$ で定めれば $\deg(T) = (-1)^{n+1}$ である.

証明　$T_i : S^n \to S^n$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ を $T_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ で定める. $H : S^n \times [0,1] \to S^n$ を $H((x_0, x_1, \ldots, x_n), t) = (x_0 \cos \pi t + x_i \sin \pi t, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_0 \sin \pi t - x_i \cos \pi t, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ で定めれば H は T_i から T_0 へのホモトピーである. 従って (8.2) の (2) と (8.3) から $\deg(T_i) = \deg(T_0) = -1$. $T = T_0 \circ T_1 \circ \cdots \circ T_n$ だから (8.2) の (1) から $\deg(T) = \deg(T_0)\deg(T_1)\cdots\deg(T_n) = (-1)^{n+1}$. □

$T : S^n \to S^n$ を対心写像という.

定理 8.5　連続写像 $f, g : S^n \to S^n$ が $\deg(f) \neq (-1)^{n+1}\deg(g)$ を満たせば, f と g は一致点をもつ. とくに, $\deg(f) \neq (-1)^{n+1}$ ならば, f は不動点をもち, $\deg(f) \neq 0$ ならば, f は全射である.

証明　任意の $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対して, $f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})$ が成り立てば $\deg(f) = (-1)^{n+1}\deg(g)$ であることを示せばよい. このとき, 任意の $t \in [0,1]$ に対して $(1-t)f(\boldsymbol{x}) \neq tg(\boldsymbol{x})$ だから, 連続写像 $F : S^n \times [0,1] \to S^n$ を $F(\boldsymbol{x}, t) = \dfrac{(1-t)f(\boldsymbol{x}) - tg(\boldsymbol{x})}{\|(1-t)f(\boldsymbol{x}) - tg(\boldsymbol{x})\|}$ で定義できる. $F(\boldsymbol{x}, 0) = f(\boldsymbol{x})$, $F(\boldsymbol{x}, 1) = -g(\boldsymbol{x})$ だから (8.2) の (2), (1) と (8.4) により $\deg(f) = \deg(-g) = \deg(T \circ g) = \deg(T)\deg(g) = (-1)^{n+1}\deg(g)$. とくに $g = id_{S^n}$ のとき, $\deg(g) = 1$ だから $\deg(f) \neq (-1)^{n+1}$ ならば, f は不動点をもつ. 任意の $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対し, $g : S^n \to S^n$ を $\boldsymbol{x}$ への定値写像とすると, $\deg(g) = 0$ だから $\deg(f) \neq 0$ ならば f と g は一致点をもつため $f(\boldsymbol{x}_0) = g(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{x}_0 \in S^n$ がある. □

定理 8.6　n を 2 以上の整数とし, $f : D^n \to D^n$ は $f(S^{n-1}) \subset S^{n-1}$, $\deg(f|_{S^{n-1}}) \neq 0$ を満たす連続写像とする. このとき, f は任意の連続写像 $g : D^n \to D^n$ と一致点をもつ. とくに, D^n から D^n への連続写像はつねに不動点をもつ.

証明　任意の $\boldsymbol{x} \in D^n$ に対して, $f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})$ が成り立つと仮定する. 各 $\boldsymbol{x} \in D^n$ に対し, $g(\boldsymbol{x})$ を始点として $f(\boldsymbol{x})$ を通る半直線と S^{n-1} との交点を $h(\boldsymbol{x})$ とする. ここで

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})}{\|f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})\|}, \quad s(\boldsymbol{x}) = -(f(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{x})) + \sqrt{1 - \|f(\boldsymbol{x})\|^2 + (f(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{x}))^2}$$

とおけば, $h(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + s(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x})$ となり, $h : D^n \to S^{n-1}$ は連続である. また, $\boldsymbol{x} \in S^{n-1}$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \in S^{n-1}$ だから $h(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ である. $F : S^{n-1} \times [0,1] \to S^{n-1}$ を $F(\boldsymbol{x}, t) = h(t\boldsymbol{x})$ で定めれば $F(\boldsymbol{x}, 0)$ は $h(\boldsymbol{0})$ への定値写像で, $F(\boldsymbol{x}, 1) = h(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ となるため, $f|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ は定値写像にホモトピックである. (8.2) の (2), (4) により, 仮定と矛盾が生じる. □

上の定理を Brouwer の一致点定理といい, その後半の特別の場合を Brouwer の不動点定理という.

系 8.7　連続写像 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ の像が有界ならば f は不動点をもつ.

証明　$D^n(r) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n | \|\boldsymbol{x}\| \leqq r\}$ とおくと仮定により $f(\boldsymbol{R}^n) \subset D^n(r)$ となる $r > 0$ がある. (8.6) から $f|_{D^n(r)} : D^n(r) \to D^n(r)$ は不動点をもつ. □

定理 8.8　(Frobenius の定理) 各成分が負でない実数であるような正則行列は正の実数の固有値をもつ.

証明　$A=(a_{ij})$ を各成分が負でない実数であるような n 次正則行列とし, $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ を A から定まる線型写像とする. A の各成分は負でないから, $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n))$ とすれば, $x_i\geqq 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ ならば $y_i\geqq 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ である. また A は正則行列だから $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})\neq\boldsymbol{0}$ である. そこで, $N=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in S^{n-1}|\,x_i\geqq 0\ (i=1,2,\ldots,n)\}$ とおき, $g:N\to N$ を $g(\boldsymbol{x})=\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\|f(\boldsymbol{x})\|}$ で定める. N は D^{n-1} と同相だから Brouwer の不動点定理により, $g(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}$ を満たす $\boldsymbol{v}\in N$ がある. このとき $f(\boldsymbol{v})=\|f(\boldsymbol{v})\|\boldsymbol{v}$ が成り立つため, $\|f(\boldsymbol{v})\|$ は A の正の固有値である. □

定義 8.9　(1) $\boldsymbol{x}\in S^n$ に対し, $\boldsymbol{R}^{n+1}$ のベクトルで $\boldsymbol{x}$ と直交するものを $\boldsymbol{x}$ における S^n の接ベクトルという.

(2) 写像 $v:S^n\to\boldsymbol{R}^{n+1}$ で, 各 $\boldsymbol{x}\in S^n$ に対して $v(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}$ における S^n の接ベクトルになるものを S^n の接ベクトル場といい, v が連続であれば連続な接ベクトル場という. また $v(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x}\in S^n$ を v の零点または特異点という.

$v:S^{2m-1}\to\boldsymbol{R}^{2m}$ を $v(x_1,x_2,\ldots,x_{2m})=(-x_2,x_1,\ldots,-x_{2m},x_{2m-1})$ で定めれば, v は零点をもたない S^{2m-1} の接ベクトル場である. 従って奇数次元の球面上には零点をもたない接ベクトル場がある.

定理 8.10　偶数次元の球面上の連続な接ベクトル場は必ず零点をもつ.

証明　S^{2m} 上に零点をもたない連続な接ベクトル場 $v:S^{2m}\to\boldsymbol{R}^{2m+1}$ が存在すると仮定する. $f:S^{2m}\to S^{2m}$ を $f(\boldsymbol{x})=\dfrac{v(\boldsymbol{x})}{\|v(\boldsymbol{x})\|}$ で定義すれば, 各 $\boldsymbol{x}\in S^{2m}$ に対し, $\boldsymbol{x}$ と $f(\boldsymbol{x})$ は直交するため, f は不動点をもたない. 従って (8.5) から $\deg(f)=(-1)^{2m+1}=-1$ である. 一方 $H:S^{2m}\times[0,1]\to S^{2m}$ を $H(\boldsymbol{x},t)=\cos\dfrac{\pi t}{2}f(\boldsymbol{x})+\sin\dfrac{\pi t}{2}\boldsymbol{x}$ で定めれば, 任意の $\boldsymbol{x}\in S^{2m}$ に対して $H(\boldsymbol{x},0)=f(\boldsymbol{x})$, $H(\boldsymbol{x},1)=\boldsymbol{x}$ が成り立つ. 従って, f は S^{2m} の恒等写像にホモトピックになり, $\deg(f)=1$ が得られて矛盾が生じる. □

定義 8.11　群 G の積を与える写像を $\mu:G\times G\to G$ $(\mu(g,h)=gh)$, 逆元を対応させる写像を $\iota:G\to G$ $(\iota(g)=g^{-1})$ とする. G に位相が与えられていて, $G\times G$ には直積位相を与えたとき, μ と ι がともに連続写像であるとき, G を位相群という. G が有限群の場合は, G に離散位相を与えることによって, G を位相群とみなす.

定義 8.12　(1) X を位相空間, G を位相群とする. 連続写像 $\alpha:G\times X\to X$ が次の条件 (i), (ii) を満たすとき, α を G の X への作用という. さらに (iii) が成り立つとき G の X 上への作用は自由であるという.

(i) e を G の単位元とするとき, 任意の $x\in X$ に対して $\alpha(e,x)=x$.

(ii) 任意の $g,h\in G$ と $x\in X$ に対して $\alpha(gh,x)=\alpha(g,\alpha(h,x))$.

(iii) $\alpha(g,x)=x$ となる $x\in X$ があれば $g=e$ である.

(2) $\boldsymbol{R}$ を加法に関して位相群とみなしたとき, $\boldsymbol{R}$ の位相空間 X への作用 $\varphi:\boldsymbol{R}\times X\to X$ を X 上の力学系という. すべての $t\in\boldsymbol{R}$ に対して $\varphi(t,x_0)=x_0$ を満たすような X の点 x_0 を力学系 φ の特異点という.

$g\in G$ に対して写像 $\alpha_g:X\to X$ を $\alpha_g(x)=\alpha(g,x)$ で定めれば, α_g は連続で, $\alpha_e=id_X$, $\alpha_{gh}=\alpha_g\circ\alpha_h$ が成り立つため, $\alpha_g\circ\alpha_{g^{-1}}=\alpha_{g^{-1}}\circ\alpha_g=id_X$ だから $\alpha_g^{-1}=\alpha_{g^{-1}}$ である. 従って α_g は同相写像である.

定理 8.13　群 G の偶数次元球面 S^{2m} 上への自由な作用があれば, G の位数は 1 か 2 である.

証明　$\alpha:G\times S^{2m}\to S^{2m}$ を G の S^{2m} 上への自由な作用とする. $g\in G$ が単位元でなければ写像 $g:S^{2m}\to S^{2m}$ $\boldsymbol{x}\mapsto\alpha(g,\boldsymbol{x})$ は不動点をもたないため (8.5) から $\deg(g)=(-1)^{2m+1}=-1$ である. 従って $g,h\in G$ $g,h\neq e$ とすれば $\deg(gh)=\deg(g)\deg(h)=1$ だから $gh=e$ である. とくに $g^2=e$ だから $g=g^2h=h$ となって G の単位元以外の要素はただ 1 つである. □

補題 8.14　X をコンパクトな位相空間, φ を X 上の力学系とする. $t \in \boldsymbol{R}$ に対して $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ で定義される写像 $\varphi_t : X \to X$ がすべての $t \in \boldsymbol{R}$ に対して不動点を持つならば, φ の特異点が存在する.

証明　整数 n に対して $F_n = \{x \in X \,|\, \varphi_{2^{-n}}(x) = x\}$ とおけば, F_n は閉集合で, 仮定から F_n は空集合ではない. $\varphi_{2^{-n-1}} \circ \varphi_{2^{-n-1}} = \varphi_{2^{-n}}$ だから $F_n \supset F_{n+1}$ が成り立つため, $(F_n)_{n \in \boldsymbol{Z}}$ の任意の有限個の共通部分は空でない. 従って X のコンパクト性から $\bigcap_{n \in \boldsymbol{Z}} F_n \neq \emptyset$ である. そこで $x_0 \in \bigcap_{n \in \boldsymbol{Z}} F_n$ をとると, x_0 は φ の特異点であることを示す. まず $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$ から任意の $m \in \boldsymbol{Z}$ に対して F_n の各点は $\varphi_{m2^{-n}}$ の不動点であるため, $A = \{m2^{-n} \,|\, m, n \in \boldsymbol{Z}\}$ とおけば任意の $t \in A$ に対して x_0 は φ_t の不動点である. A は $\boldsymbol{R}$ の稠密な部分集合で, $A \times \{x_0\} \subset \varphi^{-1}(x_0)$ だから, この両辺の閉包を考えると $\boldsymbol{R} \times \{x_0\} \subset \varphi^{-1}(x_0)$ である. 従って任意の $t \in \boldsymbol{R}$ に対して $\varphi(t, x_0) = x_0$ である.□

定理 8.15　(1) D^n 上のどのような力学系も少なくとも 1 つの特異点をもつ.

(2) 偶数次元球面上のどのような力学系も少なくとも 1 つの特異点をもつ.

証明　(1) φ を D^n 上の力学系とすれば, Brouwer の不動点定理により, すべての $t \in \boldsymbol{R}$ に対して $\varphi_t : D^n \to D^n$ は不動点をもつため, (8.14) により φ は特異点をもつ.

(2) φ を S^{2m} 上の力学系とすれば, すべての $t \in \boldsymbol{R}$ に対して φ_t は恒等写像にホモトピックだから $\deg(\varphi_t) = 1$ である. (8.5) から $\varphi_t : S^{2m} \to S^{2m}$ は不動点をもつため, (8.14) により φ は特異点をもつ. □

定理 8.16　連続写像 $f : S^{2m} \to S^{2m}$ 写像度が 0 でなければ $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ となる点 $\boldsymbol{x} \in S^{2m}$ が存在する.

証明　$T : S^{2m} \to S^{2m}$ を対心写像とする. (8.4) から $\deg(T \circ f) = \deg(T)\deg(f) = (-1)^{2m+1}\deg(f) \neq 0$ であり, $\deg(T \circ f) = \deg(T)\deg(f) = \deg(f \circ T)$ だから $\deg(T \circ f) \neq (-1)^{2m+1}\deg(f \circ T)$ である. 故に (8.5) から $T \circ f$ と $f \circ T$ は一致点をもつ. □

§9.　実射影空間のホモロジー群

定義 9.1　S^n に同値関係 $\sim$ を "$x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$" で定め, 商空間 $S^n/\!\sim$ を n 次元実射影空間といい, $\boldsymbol{R}P^n$ で表わす. $p_n : S^n \to \boldsymbol{R}P^n$ を商写像とし, 包含写像 $S^{n-1} \to S^n$ で誘導される写像 $\boldsymbol{R}P^{n-1} \to \boldsymbol{R}P^n$ により, $\boldsymbol{R}P^{n-1}$ を $\boldsymbol{R}P^n$ の部分空間とみなす.

Δ^0 をそれぞれ $1, -1 \in S^0$ に写す $S_0(S^0)$ の要素を σ_1, σ_{-1} とする. σ_1, σ_{-1} の $H_0(S^0)$ におけるクラスをそれぞれ $[\sigma_1]$, $[\sigma_{-1}]$ とすれば $H_0(S^0)$ はこれらを基底とする自由アーベル群である. S^n の部分集合 E^n_+, E^n_- をそれぞれ $E^n_+ = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in S^n \,|\, x_n \geqq 0\}$, $E^n_- = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in S^n \,|\, x_n \leqq 0\}$ で定める.

補題 9.2　$i \neq n$ ならば $H_i(E^n_+, S^{n-1}) = \{0\}$ であり, $n > 1$ ならば $\partial_n : H_n(E^n_+, S^{n-1}) \to H_{n-1}(S^{n-1})$ は同型写像である. $\partial_1 : H_1(E^1_+, S^0) \to H_0(S^0)$ は $[\sigma_1] - [\sigma_{-1}]$ で生成される部分群の上への同型写像である.

証明　E^n_+ は可縮だから (E^n_+, S^{n-1}) に対して (6.21) を用いればよい. □

$p_{n+} : (E^n_+, S^{n-1}) \to (\boldsymbol{R}P^n, \boldsymbol{R}P^{n-1})$, $p_{n-} : (E^n_-, S^{n-1}) \to (\boldsymbol{R}P^n, \boldsymbol{R}P^{n-1})$ を p_n から定まる写像とする.

補題 9.3　(1) $p_{n+*} : H_i(E^n_+, S^{n-1}) \to H_i(\boldsymbol{R}P^n, \boldsymbol{R}P^{n-1})$, $p_{n-*} : H_i(E^n_-, S^{n-1}) \to H_i(\boldsymbol{R}P^n, \boldsymbol{R}P^{n-1})$ は同型写像である.

(2) $i > n$ ならば $H_i(\boldsymbol{R}P^n) = \{0\}$ である.

(3) $i < k \leqq n$ のとき包含写像 $\boldsymbol{R}P^k \to \boldsymbol{R}P^n$ は同型写像 $H_i(\boldsymbol{R}P^k) \to H_i(\boldsymbol{R}P^n)$ を誘導する.

証明　(1) p_{n+}, p_{n-} は相対同相写像であり (7.23) の仮定が満たされるため p_{n+*}, p_{n-} は同型写像である.

(2) $\boldsymbol{R}P^1 = S^1$ だから (7.26) から $i > 1$ ならば $H_i(\boldsymbol{R}P^1) = \{0\}$ である．帰納的に $i > n-1$ ならば $H_i(\boldsymbol{R}P^{n-1}) = \{0\}$ であると仮定する．$n > 1$ のとき $(\boldsymbol{R}P^n, \boldsymbol{R}P^{n-1})$ に対して (6.21) を用いると

$$H_{i+1}(\boldsymbol{R}P^n, \boldsymbol{R}P^{n-1}) \xrightarrow{\partial_{i+1}} H_i(\boldsymbol{R}P^{n-1}) \longrightarrow H_i(\boldsymbol{R}P^n) \longrightarrow H_i(\boldsymbol{R}P^n, \boldsymbol{R}P^{n-1}) \xrightarrow{\partial_i} H_{i-1}(\boldsymbol{R}P^{n-1})$$

は完全列であり $i > n$ ならば帰納法の仮定と (1), (9.2), (7.26) から $H_i(\boldsymbol{R}P^{n-1}) = H_i(\boldsymbol{R}P^n, \boldsymbol{R}P^{n-1}) = \{0\}$ となるため，$H_i(\boldsymbol{R}P^n) = \{0\}$ である．

(2) (6.21) と (1) より $i < n-1$ ならば $H_{i+1}(\boldsymbol{R}P^n, \boldsymbol{R}P^{n-1}) = H_i(\boldsymbol{R}P^n, \boldsymbol{R}P^{n-1}) = \{0\}$ だから，上の完全列から $H_i(\boldsymbol{R}P^{n-1}) \to H_i(\boldsymbol{R}P^n)$ は同型写像である．従って，$i < k$ ならば以下の合成写像は同型写像である．

$$H_i(\boldsymbol{R}P^k) \to H_i(\boldsymbol{R}P^{k+1}) \to H_i(\boldsymbol{R}P^{k+2}) \to \cdots \to H_i(\boldsymbol{R}P^{n-1}) \to H_i(\boldsymbol{R}P^n)$$

□

$p'_n : (S^n, S^{n-1}) \to (\boldsymbol{R}P^n, \boldsymbol{R}P^{n-1})$ を p_n から定まる写像とし，$j_n : (S^n, \emptyset) \to (S^n, S^{n-1})$, $i_+ : (E^n_+, S^{n-1}) \to (S^n, S^{n-1})$, $i_- : (E^n_-, S^{n-1}) \to (S^n, S^{n-1})$, $j_+ : (S^n, S^{n-1}) \to (S^n, E^n_+)$, $j_- : (S^n, S^{n-1}) \to (S^n, E^n_-)$ を包含写像とする．

補題 9.4 合成写像 $H_n(S^n) \xrightarrow{j_{n*}} H_n(S^n, S^{n-1}) \xrightarrow{p'_{n*}} H_n(\boldsymbol{R}P^n, \boldsymbol{R}P^{n-1})$ は $n > 0$ が偶数ならば零写像であり，n が奇数ならば，$2H_n(\boldsymbol{R}P^n, \boldsymbol{R}P^{n-1})$ の上への単射である．

証明 S^n, E^n_+, S^{n-1} および S^n, E^n_-, S^{n-1} に対して (6.21) を用いると，完全列

$$H_n(E^n_+, S^{n-1}) \xrightarrow{i_{+*}} H_n(S^n, S^{n-1}) \xrightarrow{j_{+*}} H_n(S^n, E^n_+), \quad H_n(E^n_-, S^{n-1}) \xrightarrow{i_{-*}} H_n(S^n, S^{n-1}) \xrightarrow{j_{-*}} H_n(S^n, E^n_-)$$

を得る．また，(S^n, E^n_+) と (S^n, E^n_-) に対して (6.21) を用いると $j_{+*} \circ j_{n*} : H_n(S^n) \to H_n(S^n, E^n_+)$ と $j_{-*} \circ j_{n*} : H_n(S^n) \to H_n(S^n, E^n_-)$ は同型である．さらに $j_- \circ i_+ : (E^n_+, S^{n-1}) \to (S^n, E^n_-)$, $j_+ \circ i_- : (E^n_-, S^{n-1}) \to (S^n, E^n_+)$ はともに相対同相写像であり，(7.23) の仮定を満たすため，$j_{-*} \circ i_{+*} : H_n(E^n_+, S^{n-1}) \to H_n(S^n, E^n_-)$, $j_{+*} \circ i_{-*} : H_n(E^n_-, S^{n-1}) \to H_n(S^n, E^n_+)$ は同型写像である．任意の $x \in H_n(S^n, S^{n-1})$ に対し，$j_{-*}(x - i_{+*} \circ (j_{-*} \circ i_{+*})^{-1} \circ j_{-*}(x)) = 0$ だから $x - i_{+*} \circ (j_{-*} \circ i_{+*})^{-1} \circ j_{-*}(x) = i_{-*}(y)$ を満たす $y \in H_n(E^n_-, S^{n-1})$ がある．このとき $j_{+*} \circ i_{-*}(y) = j_{+*}(x - i_{+*} \circ (j_{-*} \circ i_{+*})^{-1} \circ j_{-*}(x)) = j_{+*}(x)$ だから $y = (j_{+*} \circ i_{-*})^{-1} \circ j_{+*}(x)$ である．従って $x = i_{+*} \circ (j_{-*} \circ i_{+*})^{-1} \circ j_{-*}(x) + i_{-*} \circ (j_{+*} \circ i_{-*})^{-1} \circ j_{+*}(x)$ が得られ，

$$\begin{aligned} p'_{n*} \circ j_{n*} &= p'_{n*} \circ i_{+*} \circ (j_{-*} \circ i_{+*})^{-1} \circ j_{-*} \circ j_{n*} + p'_{n*} \circ i_{-*} \circ (j_{+*} \circ i_{-*})^{-1} \circ j_{+*} \circ j_{n*} \\ &= p_{n+*} \circ (j_{-*} \circ i_{+*})^{-1} \circ j_{-*} \circ j_{n*} + p_{n-*} \circ (j_{+*} \circ i_{-*})^{-1} \circ j_{+*} \circ j_{n*} \end{aligned}$$

となる．そこで対心写像 $T : S^n \to S^n$ を考えると下図は可換であり，

$$\begin{tikzcd} H_n(S^n) \arrow[r, "j_{+*} \circ j_{n*}"] \arrow[d, "T_*"] & H_n(S^n, E^n_+) \arrow[d, "T_*"] & H_n(E^n_-, S^{n-1}) \arrow[l, "j_{+*} \circ i_{-*}"'] \arrow[r, "p_{n-*}"] \arrow[d, "T_*"] & H_n(\boldsymbol{R}P^n, \boldsymbol{R}P^{n-1}) \\ H_n(S^n) \arrow[r, "j_{-*} \circ j_{n*}"] & H_n(S^n, E^n_-) & H_n(E^n_+, S^{n-1}) \arrow[l, "j_{-*} \circ i_{+*}"'] \arrow[ur, "p_{n+*}"] & \end{tikzcd}$$

(8.4) から $T_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ は $(-1)^{n+1}$ 倍する写像で，上の議論と (9.3) の (1) から上の図の水平方向の写像はすべて同型写像である．故に $p_{n-*} \circ (j_{+*} \circ i_{-*})^{-1} \circ j_{+*} \circ j_{n*} = (-1)^{n+1} p_{n+*} \circ (j_{-*} \circ i_{+*})^{-1} \circ j_{-*} \circ j_{n*}$ となるため，$p'_{n*} \circ j_{n*} = (1 + (-1)^{n+1}) p_{n+*} \circ (j_{-*} \circ i_{+*})^{-1} \circ j_{-*} \circ j_{n*}$ が得られる．これより n が偶数なら $p'_{n*} \circ j_{n*} = 0$, n が奇数なら $p'_{n*} \circ j_{n*} = 2 p_{n+*} \circ (j_{-*} \circ i_{+*})^{-1} \circ j_{-*} \circ j_{n*}$ であり $p_{n+*} \circ (j_{-*} \circ i_{+*})^{-1} \circ j_{-*} \circ j_{n*}$ は同型写像だから主張が示される．□

補題 9.5 $p'_{n*} : H_n(S^n, S^{n-1}) \to H_n(\boldsymbol{R}P^n, \boldsymbol{R}P^{n-1})$ は全射である．

証明 $p'_n \circ i_+ = p_{n+}$ であり，(9.3) の (1) から $p_{n+*} = p'_{n*} \circ i_{+*} : H_i(E^n_+, S^{n-1}) \to H_i(\boldsymbol{R}P^n, \boldsymbol{R}P^{n-1})$ は同型写像だから p'_{n*} は全射である．□

補題 9.6　n が正の偶数なら $H_n(\boldsymbol{R}P^n)=\{0\}$ であり, n が奇数ならば包含写像 $i:(\boldsymbol{R}P^n,\emptyset)\to(\boldsymbol{R}P^n,\boldsymbol{R}P^{n-1})$ は同型写像 $i_*:H_n(\boldsymbol{R}P^n)\to H_n(\boldsymbol{R}P^n,\boldsymbol{R}P^{n-1})$ を誘導する.

証明　(S^n,S^{n-1}), $(\boldsymbol{R}P^n,\boldsymbol{R}P^{n-1})$, (E^n_+,S^{n-1}) に対して (6.21) を用いると (9.3) の (2) から下の図式の水平列は 3 つとも完全列である.

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(S^n) \arrow[r, "j_{n*}"] \arrow[d, "p_{n*}"] & H_n(S^n,S^{n-1}) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "p'_{n*}"] & H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[d, "p_{n-1*}"] \\
0 \arrow[r] & H_n(\boldsymbol{R}P^n) \arrow[r, "i_*"] & H_n(\boldsymbol{R}P^n,\boldsymbol{R}P^{n-1}) \arrow[r, "\partial_n"] & H_{n-1}(\boldsymbol{R}P^{n-1}) \\
 & 0 \arrow[r] & H_n(E^n_+,S^{n-1}) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[u, "p_{n+*}", "\cong"'] & H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[u, "p_{n-1*}"]
\end{tikzcd}$$

n が偶数ならば (9.4) から $i_*\circ p_{n*}=p'_{n*}\circ j_{n*}=0$ で i_* は単射だから $p_{n*}=0$ である. 従って $n>1$ が奇数ならば $p_{n-1*}=0$ だから $\partial_n\circ p'_{n*}=p_{n-1*}\circ\partial_n=0$ となるが, (9.5) から p'_{n*} は全射であるため $\partial_n=0$ である. 故に上の図の下の水平列の完全性から $i_*:H_n(\boldsymbol{R}P^n)\to H_n(\boldsymbol{R}P^n,\boldsymbol{R}P^{n-1})$ は同型写像である. $n=1$ の場合は $\boldsymbol{R}P^0$ が一点からなる空間だから $i_*:H_1(\boldsymbol{R}P^1)\to H_1(\boldsymbol{R}P^1,\boldsymbol{R}P^0)$ は明らかに同型写像である. また, $i_*\circ p_{n*}=p'_{n*}\circ j_{n*}$ の右辺は (9.4) により単射だから p_{n*} は単射であることに注意する.

$n>1$ が偶数の場合, $p_{n-1*}:H_{n-1}(S^{n-1})\to H_{n-1}(\boldsymbol{R}P^{n-1})$, $\partial_n:H_n(E^n_+,S^{n-1})\to H_{n-1}(S^{n-1})$ はともに単射だから $\partial_n\circ p_{n+*}=p_{n-1*}\circ\partial_n$ は単射で, (9.3) の (1) から p_{n+*} は同型写像だから $\partial_n:H_n(\boldsymbol{R}P^n,\boldsymbol{R}P^{n-1})\to H_{n-1}(\boldsymbol{R}P^{n-1})$ は単射である. 従って上の図の中段の水平列の完全性から $H_n(\boldsymbol{R}P^n)=\{0\}$ が得られる. □

補題 9.7　n が奇数ならば $p_{n*}:H_n(S^n)\to H_n(\boldsymbol{R}P^n)$ は $2H_n(\boldsymbol{R}P^n)$ の上への同型写像である.

証明　下図は可換で, (9.4) から $i_*\circ p_{n*}=p'_{n*}\circ j_{n*}$ は $2H_n(\boldsymbol{R}P^n,\boldsymbol{R}P^{n-1})$ の上への単射である.

$$\begin{tikzcd}
H_n(S^n) \arrow[r, "j_{n*}"] \arrow[d, "p_{n*}"] & H_n(S^n,S^{n-1}) \arrow[d, "p'_{n*}"] \\
H_n(\boldsymbol{R}P^n) \arrow[r, "i_*"] & H_n(\boldsymbol{R}P^n,\boldsymbol{R}P^{n-1})
\end{tikzcd}$$

さらに (9.6) より $i_*:H_n(\boldsymbol{R}P^n)\to H_n(\boldsymbol{R}P^n,\boldsymbol{R}P^{n-1})$ は同型写像だから $p_{n*}=i_*^{-1}\circ p'_{n*}\circ j_{n*}$ は $2H_n(\boldsymbol{R}P^n)$ の上への単射である. □

定理 9.8　連続写像 $f:S^n\to S^n$ はすべての $\boldsymbol{x}\in S^n$ に対し $f(-\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})$ を満たすとする. n が偶数ならば $\deg(f)=0$ であり, n が奇数ならば $\deg(f)$ は偶数である.

証明　仮定から, 連続写像 $\bar{f}:\boldsymbol{R}P^n\to S^n$ で $\bar{f}\circ p_n=f$ を満たすものがある (問題 13.15). このとき $f_*:H_n(S^n)\to H_n(S^n)$ は合成写像 $H_n(S^n)\xrightarrow{p_{n*}}H_n(\boldsymbol{R}P^n)\xrightarrow{\bar{f}_*}H_n(S^n)$ になる. n が偶数ならば (9.6) により $H_n(\boldsymbol{R}P^n)=\{0\}$ だから $f_*=0$ である. n が奇数ならば (9.7) により $\operatorname{Im}p_{n*}=2H_n(\boldsymbol{R}P^n)$ だから f_* の像は $2H_n(S^n)$ に含まれる.□

定理 9.9　$f:S^n\to S^n$ を連続写像とする. 「n が偶数かつ $\deg(f)\neq 0$」または「n, $\deg(f)$ がともに奇数」ならば $f(-\boldsymbol{x})=-f(\boldsymbol{x})$ となる点 $\boldsymbol{x}\in S^n$ が存在する.

証明　すべての $\boldsymbol{x}\in S^n$ に対して, $f(-\boldsymbol{x})\neq -f(\boldsymbol{x})$ であると仮定して $g:S^n\to S^n$ を $g(\boldsymbol{x})=\dfrac{f(\boldsymbol{x})+f(-\boldsymbol{x})}{\|f(\boldsymbol{x})+f(-\boldsymbol{x})\|}$ で定める. このとき任意の $\boldsymbol{x}\in S^n$ と $t\in[0,1]$ に対して, $(1-t)f(\boldsymbol{x})+tg(\boldsymbol{x})\neq 0$ が成り立つ. 実際 $(1-t)f(\boldsymbol{x})+tg(\boldsymbol{x})=0$ とすると $(1-t)f(\boldsymbol{x})=-tg(\boldsymbol{x})$ で $\|f(\boldsymbol{x})\|=\|g(\boldsymbol{x})\|=1$ だから $1-t=t$ すなわち $t=\dfrac{1}{2}$ である. 従って $f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})=0$ だから $k=\|f(\boldsymbol{x})+f(-\boldsymbol{x})\|$ とおくと $-kf(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})+f(-\boldsymbol{x})$ である. $-f(-\boldsymbol{x})=(k+1)f(\boldsymbol{x})$ の両辺のベクトルの長さを考えると $k=0$ すなわち $f(-\boldsymbol{x})=-f(\boldsymbol{x})$ となって仮定に反する. そこで $H:S^n\times[0,1]\to S^n$

を $H(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{(1-t)f(\boldsymbol{x})+tg(\boldsymbol{x})}{\|(1-t)f(\boldsymbol{x})+tg(\boldsymbol{x})\|}$ で定義すると $H(\boldsymbol{x},0)=f(\boldsymbol{x})$, $H(\boldsymbol{x},1)=g(\boldsymbol{x})$ だから f は g にホモトピックである．従って $\deg(f)=\deg(g)$ となる．すべての $\boldsymbol{x}\in S^n$ に対して $g(-\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x})$ が成り立つことに注意すれば，(9.8) から n が偶数の場合は $\deg(f)=\deg(g)=0$ であり，n が奇数の場合は $\deg(f)=\deg(g)$ は偶数になる． □

§10. 空間のコホモロジー群

定義 10.1 位相空間の対 (X,A) とアーベル群 G に対し $H^n(C.(X)/C.(A);G)$ を (X,A) の G を係数群とする n 次元コホモロジー群といい，$H^n(X,A;G)$ で表わす．位相空間対の間の連続写像 $f:(X,A)\to(Y,B)$ は鎖写像 $f^*_.:\mathrm{Hom}(C.(Y)/C.(B),G)\to\mathrm{Hom}(C.(X)/C.(A),G)$ を誘導するが，この鎖写像が誘導する写像 $H_n(f^*_.)$ を $f^*:H^n(Y,B;G)\to H^n(X,A;G)$ で表わす．

(5.18) から次の結果が得られる

定理 10.2 各 $n\in\boldsymbol{Z}$ に対して $H_n(X,A)$ が自由アーベル群ならば，同型写像 $H^n(X,A;G)\to\mathrm{Hom}(H_{-n}(X,A),G)$ がある．

位相空間 X, Y に対し，鎖写像 $\rho.:C.(X\times Y)\to C.(X)\otimes C.(Y)$ を以下のように定める．$p_X:X\times Y\to X$, $p_Y:X\times Y\to Y$ を射影として $\sigma\in S_n(X\times Y)$ に対し，

$$\rho_n(\sigma)=\sum_{i=0}^{n}p_X\circ\sigma\circ\varepsilon_n^{(n)}\circ\varepsilon_{n-1}^{(n-1)}\circ\cdots\circ\varepsilon_{i+2}^{(i+2)}\circ\varepsilon_{i+1}^{(i+1)}\otimes p_Y\circ\sigma\circ\varepsilon_{i-1}^{(n)}\circ\varepsilon_{i-2}^{(n-1)}\circ\cdots\circ\varepsilon_1^{(n-i+2)}\circ\varepsilon_0^{(n-i+1)}$$

(ただし，$i=0$ なら $\varepsilon_{i-1}^{(n)}\circ\varepsilon_{i-2}^{(n-1)}\circ\cdots\circ\varepsilon_1^{(n-i+2)}\circ\varepsilon_0^{(n-i+1)}=id_{\Delta_n}$, $i=n$ なら $\varepsilon_n^{(n)}\circ\varepsilon_{n-1}^{(n-1)}\circ\cdots\circ\varepsilon_{i+2}^{(i+2)}\circ\varepsilon_{i+1}^{(i+1)}=id_{\Delta_n}$) とする．このとき $\rho.=(\rho_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}$ は鎖写像であることが (6.1) を用いて確かめられる．

位相空間 X に対し，写像 $\Delta_X:X\to X\times X$ を $\Delta_X(x)=(x,x)$ で定義する．R を可換環とし，$\mu_R:R\otimes R\to R$ を R の積として，R を係数群とするコチェイン複体 $\mathrm{Hom}(C.(X),R)$ を考える．0 以下の整数 m, n と $f\in\mathrm{Hom}_m(C.(X),R)=\mathrm{Hom}(C_{-m}(X),R)$, $g\in\mathrm{Hom}_n(C.(X),R)=\mathrm{Hom}(C_{-n}(X),R)$ が与えられたとき，コチェイン $f\cdot g\in\mathrm{Hom}_{m+n}(C.(X),R)=\mathrm{Hom}(C_{-m-n}(X),R)$ を $\sigma\in S_{-m-n}(X)$ に対し，以下のように定義する．

$$(f\cdot g)(\sigma)=\mu_R\circ(f\otimes g)(\rho_{-m-n}(\Delta_X\circ\sigma))$$

定理 10.3 $\rho.:C.(X\times Y)\to C.(X)\otimes C.(Y)$ は鎖ホモトピー同値写像である．

§11. 被覆空間と移送準同型写像

定義 11.1 連続写像 $\pi:\widetilde{X}\to X$ が次の性質をもつとき，π を被覆写像，$\widetilde{X}$ を X の上の被覆空間という．

(Cov) 各 $x\in X$ に対し，x の開近傍 U と $\widetilde{X}$ の開集合族 $(\widetilde{U}_i)_{i\in I}$ で $(i)\sim(iii)$ を満たすものが存在する．

(i) $\pi^{-1}(U)=\bigcup_{i\in I}\widetilde{U}_i$　　(ii) $i\neq j$ ならば $\widetilde{U}_i\cap\widetilde{U}_j=\emptyset$　　(iii) $\pi|_{\widetilde{U}_i}:\widetilde{U}_i\to U$ は同相写像

このとき，各 $x\in X$ に対して $\pi^{-1}(x)$ が有限集合のとき，π を有限被覆写像，$\widetilde{X}$ を X の上の有限被覆空間という．さらに，$\pi^{-1}(x)$ の要素の個数が x によらず，つねに m 個であるとき，π の被覆度は m であるという．

注意 11.2 $\pi:\widetilde{X}\to X$ が被覆写像のとき，$x\in X$ に対し，$\widetilde{X}$ の部分空間 $\pi^{-1}(x)$ は離散位相をもつ．実際，上の定義において，$\pi^{-1}(x)\subset\pi^{-1}(U)$ だから $i\in I$ に対し $\pi^{-1}(x)\cap\widetilde{U}_i\subset\widetilde{U}_i$ であり，$\pi|_{\widetilde{U}_i}:\widetilde{U}_i\to U$ は同相写像だから $\pi^{-1}(x)\cap\widetilde{U}_i$ はただ一つの要素からなる．

命題 11.3 $\pi:\widetilde{X}\to X$ を被覆写像, $f,g:Y\to\widetilde{X}$ を連続写像とする. Y が連結で $\pi\circ f=\pi\circ g$ であり, $f(y_0)=g(y_0)$ となる $y_0\in Y$ が存在すれば $f=g$ である.

証明 $A=\{y\in Y\,|\,f(y)=g(y)\}$ とおき, $z\in Y$ とする. $\pi(f(z))$ の開近傍 U と $\widetilde{X}$ の開集合族 $(\widetilde{U}_i)_{i\in I}$ で (Cov) の $(i)\sim(iii)$ を満たすものをとると, $\pi(g(z))=\pi(f(z))\in U$ より $f(z)\in\widetilde{U}_i$, $g(z)\in\widetilde{U}_j$ となる $i,j\in I$ がある. $i=j$ の場合, $z\in f^{-1}(\widetilde{U}_i)\cap g^{-1}(\widetilde{U}_i)$ であり, $f|_{f^{-1}(\widetilde{U}_i)\cap g^{-1}(\widetilde{U}_i)}, g|_{f^{-1}(\widetilde{U}_i)\cap g^{-1}(\widetilde{U}_i)}:f^{-1}(\widetilde{U}_i)\cap g^{-1}(\widetilde{U}_i)\to\widetilde{U}_i$ を考えると $\pi|_{\widetilde{U}_i}:\widetilde{U}_i\to U$ は同相写像だから $\pi|_{\widetilde{U}_i}\circ f|_{f^{-1}(\widetilde{U}_i)\cap g^{-1}(\widetilde{U}_i)}=\pi|_{\widetilde{U}_i}\circ g|_{f^{-1}(\widetilde{U}_i)\cap g^{-1}(\widetilde{U}_i)}$ より $f|_{f^{-1}(\widetilde{U}_i)\cap g^{-1}(\widetilde{U}_i)}=g|_{f^{-1}(\widetilde{U}_i)\cap g^{-1}(\widetilde{U}_i)}$ である. 従って $f^{-1}(\widetilde{U}_i)\cap g^{-1}(\widetilde{U}_i)$ は A に含まれる z の開近傍になるため, z は A の内点になる. とくに, $z\in A$ ならば $f(z)=g(z)$ だから $i=j$ となるため A は開集合であることがわかる. $z\in Y-A$ ならば上の議論から $i\neq j$ である. $f|_{f^{-1}(\widetilde{U}_i)\cap g^{-1}(\widetilde{U}_j)}:f^{-1}(\widetilde{U}_i)\cap g^{-1}(\widetilde{U}_j)\to\widetilde{U}_i$, $g|_{f^{-1}(\widetilde{U}_i)\cap g^{-1}(\widetilde{U}_j)}:f^{-1}(\widetilde{U}_i)\cap g^{-1}(\widetilde{U}_j)\to\widetilde{U}_j$ を考えると, $\widetilde{U}_i\cap\widetilde{U}_j=\emptyset$ だから $y\in f^{-1}(\widetilde{U}_i)\cap g^{-1}(\widetilde{U}_j)$ ならば $f(y)\neq g(y)$ である. このとき $f^{-1}(\widetilde{U}_i)\cap g^{-1}(\widetilde{U}_j)$ は $Y-A$ に含まれる z の開近傍になるため $Y-A$ も開集合であることがわかる. $y_0\in A$ で A は空でないため Y が連結ならば $A=Y$ すなわち $f=g$ である. □

定理 11.4 $\pi:\widetilde{X}\to X$ を被覆写像, $f:Y\to\widetilde{X}$, $F:Y\times[0,1]\to X$ を連続写像とする. $\pi(f(y))=F(y,0)$ が任意の $y\in Y$ に対して成り立てば, 連続写像 $\widetilde{F}:Y\times[0,1]\to\widetilde{X}$ で, $\pi\circ\widetilde{F}=F$ かつ任意の $y\in Y$ に対して $\widetilde{F}(y,0)=f(y)$ が成り立つようなものがある.

証明 $x\in X$ に対し, x の開近傍 U_x と $\widetilde{X}$ の開集合族 $(\widetilde{U}_{x,i})_{i\in I_x}$ で (Cov) の $(i)\sim(iii)$ を満たすものを選ぶ. $y\in Y$ を固定すると, 各 $s\in[0,1]$ に対して $(y,s)\in F^{-1}(U_{F(y,s)})$ だから

$$W_0\times[0,r_0)\subset F^{-1}(U_{F(y,0)}),\ W_s\times(s-r_s,s+r_s)\subset F^{-1}(U_{F(y,s)})\ (0<s<1),\ W_1\times(1-r_1,1]\subset F^{-1}(U_{F(y,1)})$$

となる y の開近傍 W_s と $r_s>0$ がある. $[0,1]$ のコンパクト性から $[0,1]$ の開被覆 $\{(s-r_s,s+r_s)\,|\,0<s<1\}\cup\{[0,r_0),(1-r_1,1]\}$ のルベーグ数を ε として, $0=t_0<t_1<\cdots<t_m=1$ を $t_k-t_{k-1}<\varepsilon$ であるようにとる. 各 $1<k<m$ に対し $[t_{k-1},t_k]\subset(s_k-r_{s_k},s_k+r_{s_k})$ を満たす $0<s_k<1$ を選び, $V_y=W_0\cap\bigcap_{k=2}^{n-1}W_{s_k}\cap W_1$ とおく. このとき $s_1=0$, $s_m=1$ であることに注意すれば, $k=1,2,\dots,m$ に対して

$$F(V_y\times[t_{k-1},t_k])\subset U_{F(y,s_k)}\ \cdots\ (*)$$

が成り立つ.

次に, 連続写像 $F_y:V_y\times[0,1]\to\widetilde{X}$ で, $\pi\circ F_y=F|_{V_y\times[0,1]}$ かつ各 $z\in V_y$ に対して $F_y(z,0)=f(z)$ をみたすようなものの存在を示す. $(*)$ より $\pi(f(V_y))=F(V_y\times\{0\})\subset F(V_y\times[t_0,t_1])\subset U_{F(y,0)}$ だから $V_y\subset\bigcup_{i\in I_{F(y,0)}}f^{-1}(\widetilde{U}_{F(y,0),i})$ である. ここで $(V_y\cap f^{-1}(\widetilde{U}_{F(y,0),i}))_{i\in I_{F(y,0)}}$ は互いに交わらない V_y の開被覆だから, $G_1:V_y\times[t_0,t_1]\to\widetilde{X}$ を $(z,t)\in(V_y\cap f^{-1}(\widetilde{U}_{F(y,0),i}))\times[t_0,t_1]$ に対して $G_1(z,t)=(\pi|_{\widetilde{U}_{F(y,0),i}})^{-1}(F(z,t))$ で定めることができる. $z\in V_y\cap f^{-1}(\widetilde{U}_{F(y,0),i})$ ならば $(\pi|_{\widetilde{U}_{F(y,0),i}})(G_1(z,0))=F(z,0)=(\pi|_{\widetilde{U}_{F(y,0),i}})(f(z))$ であり $\pi|_{\widetilde{U}_{F(y,0),i}}:\widetilde{U}_{F(y,0),i}\to U_{F(y,0)}$ 同相写像 だから $G_1(z,0)=f(z)$ が成り立つ. 従って, 任意の $z\in V_y$ に対して $G_1(z,0)=f(z)$ である.

帰納的に $G_k:V_y\times[t_{k-1},t_k]\to\widetilde{X}$ が $k=1,2,\dots,l-1$ に対して定義され, $\pi\circ G_k=F|_{V_y\times[t_{k-1},t_k]}$ および $G_{k-1}(z,t_{k-1})=G_k(z,t_{k-1})$ $(z\in V_y,\ k=2,3,\dots,l-1)$ が成り立つと仮定する. $f_{l-1}:V_y\to\widetilde{X}$ を $f_{l-1}(z)=G_{l-1}(z,t_{l-1})$ で定めると $\pi(f_{l-1}(V_y))=\pi(G_{l-1}(V_y\times\{t_{l-1}\}))=F(V_y\times\{t_{l-1}\})\subset U_{F(y,s_l)}$ から $V_y\subset\bigcup_{i\in I_{F(y,s_l)}}f_{l-1}^{-1}(\widetilde{U}_{F(y,s_l),i})$ である. このとき開集合族 $(f_{l-1}^{-1}(\widetilde{U}_{F(y,s_l),i}))_{i\in I_{F(y,s_l)}}$ は互いに交わらない V_y の開被覆だから, $G_l:V_y\times[t_{l-1},t_l]\to\widetilde{X}$ を $(z,t)\in(V_y\cap f_{l-1}^{-1}(\widetilde{U}_{F(y,s_l),i}))\times[t_{l-1},t_l]$ に対して $G_k(z,t)=(\pi|_{\widetilde{U}_{F(y,s_l),i}})^{-1}(F(z,t))$ で定めることができる. $z\in V_y\cap f_{l-1}^{-1}(\widetilde{U}_{F(y,s_l),i})$ ならば $(\pi|_{\widetilde{U}_{F(y,s_l),i}})(G_l(z,t_{l-1}))=F(z,t_{l-1})=(\pi|_{\widetilde{U}_{F(y,s_l),i}})(G_{l-1}(z,t_{l-1}))$ であり $\pi|_{\widetilde{U}_{F(y,s_l),i}}:\widetilde{U}_{F(y,s_l),i}\to U_{F(y,s_l)}$ は同相写像 だから $G_l(z,t_{l-1})=$

$G_{l-1}(z,t_{l-1})$ が成り立つ. 従って, 任意の $z \in V_y$ に対して $G_l(z,t_{l-1}) = G_{l-1}(z,t_{l-1})$ である. G_l の定義から明らかに $\pi \circ G_l = F|_{V_y \times [t_{l-1},t_l]}$ が成り立つ.

そこで F_y を $F_y(z,t) = G_k(z,t)$ $(t \in [t_{k-1},t_k])$ で定めると $\pi \circ F_y = F|_{V_y \times [0,1]}$ かつ各 $z \in V_y$ に対して $F_y(z,0) = G_1(z,0) = f(z)$ が成り立つ. $y, y' \in Y$, $z \in V_y \cap V_{y'}$ とすれば $F_{y'}(z,0) = f(z) = F_y(z,0)$ かつ $p(F_{y'}(z,t)) = F(z,t) = p(F_y(z,t))$ だから, 写像 $\varphi, \psi : [0,1] \to \widetilde{X}$ を $\varphi(t) = F_y(z,t)$, $\psi(t) = F_{y'}(z,t)$ で定めれば, (11.3) により $\varphi = \psi$ である. 故に F_y と $F_{y'}$ は $(V_y \cap V_{y'}) \times [0,1]$ において一致するため, $\widetilde{F}$ を $\widetilde{F}|_{V_y \times [0,1]} = F_y$ で定めると $\widetilde{F}$ は連続であり, $\pi \circ \widetilde{F} = F$ かつ任意の $y \in Y$ に対して $\widetilde{F}(y,0) = f(y)$ が成り立つ. □

系 11.5 $\pi : \widetilde{X} \to X$ を被覆写像, $f : Y \to X$ を連続写像とする. $y_0 \in Y$ に対し, Y を y_0 に写す定値写像 c_{y_0} から id_Y へのホモトピー $H : Y \times [0,1] \to Y$ で, 任意の $t \in [0,1]$ に対して $H(y_0,t) = y_0$ となるものがあるとする. このとき $\pi(x_0) = f(y_0)$ となる $x_0 \in \widetilde{X}$ をとれば, 連続写像 $\tilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ で $\pi \circ \tilde{f} = f$ かつ $\tilde{f}(y_0) = x_0$ を満たすものがただ 1 つ存在する.

証明 (11.4) により $F : Y \times [0,1] \to \widetilde{X}$ で $\pi \circ F = f \circ H$ かつ $F(y,0) = x_0$ $(y \in Y)$ を満たすものがある. $\omega : [0,1] \to \widetilde{X}$, $\omega_0 : [0,1] \to \widetilde{X}$ を $\omega(t) = F(y_0,t)$, $\omega_0(t) = x_0$ で定めると $\omega(0) = \omega_0(0) = x_0$, $\pi(\omega(t)) = f(H(x_0,t)) = f(y_0) = \pi(x_0) = \pi(\omega_0(t))$ だから (11.3) から $\omega = \omega_0$, すなわち $F(y_0,t) = x_0$ がすべての $t \in [0,1]$ に対して成り立つ. そこで $\tilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ を $\tilde{f}(y) = F(y,1)$ 定めれば, $\tilde{f}$ は条件を満たす. Y は連結だから, (11.3) により, このような $\tilde{f}$ はただ 1 つしかない. □

注意 11.6 $e_0 = (1,0,\dots,0) \in \Delta^n$ として, $H : \Delta^n \times [0,1] \to \Delta^n$ を $H(x,t) = (1-t)e_0 + tx$ で定めれば H は c_{e_0} から id_{Δ^n} へのホモトピーで, 任意の $t \in [0,1]$ に対して $H(e_0,t) = e_0$ である.

$\omega, \omega' : [0,1] \to X$ を連続写像とする. $\omega(1) = \omega'(0)$ が成り立つとき, $\omega{*}\omega' : [0,1] \to X$ を

$$(\omega{*}\omega')(t) = \begin{cases} \omega(2t) & t \in [0,\frac{1}{2}] \\ \omega'(2t-1) & t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

で定める.

$\pi : \widetilde{X} \to X$ が被覆写像のとき, 連続写像 $\omega : [0,1] \to X$ に対して, 写像 $\beta_\omega : \pi^{-1}(\omega(0)) \to \pi^{-1}(\omega(1))$ を次のように定める. $x \in \pi^{-1}(\omega(0))$ に対し, (11.5) と (11.6) により $\pi \circ \omega_x = \omega$, $\omega_x(0) = x$ を満たす連続写像 $\omega_x : [0,1] \to \widetilde{X}$ があるが, このとき $\beta_\omega(x) = \omega_x(1)$ とする.

命題 11.7 $\pi : \widetilde{X} \to X$ を被覆写像, $\omega, \omega' : [0,1] \to X$ を連続写像とする.

(1) $i = 0,1$ に対して $\omega(i) = \omega'(i)$ であり, ω から ω' へのホモトピー $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ で, $i = 0,1$, $t \in [0,1]$ に対して $H(i,t) = \omega(i)$ となるようなものがあるとき, $\beta_\omega = \beta_{\omega'}$ である.

(2) $\omega(1) = \omega'(0)$ ならば $\beta_{\omega*\omega'} = \beta_{\omega'} \circ \beta_\omega$ である.

(3) ω が定値写像ならば $\beta_\omega = id_{\pi^{-1}(\omega(0))}$ である.

(4) β_ω は全単射であり, $\tau : [0,1] \to [0,1]$ を $\tau(t) = 1-t$ で定めると $\beta_{\omega\circ\tau}$ が β_ω の逆写像である.

証明 (1) $x \in \pi^{-1}(\omega(0)) = \pi^{-1}(\omega'(0))$ に対し, 連続写像 $\widetilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \widetilde{X}$ で, $\pi \circ \widetilde{H} = H$, $\widetilde{H}(0,0) = x$ を満たすものがある. $i = 0,1$ に対し, $f_i : [0,1] \to \widetilde{X}$ を $f_i(t) = \widetilde{H}(i,t)$ で定めると $\pi(f_i(t)) = H(i,t) = \omega(i)$ だから $f_i([0,1]) \in \pi^{-1}(\omega(i))$ であるが, (11.2) より $\pi^{-1}(\omega(i))$ は離散位相をもつ ため連結な $\widetilde{X}$ の部分空間 $f_i([0,1])$ は一点からなる. 従って $\widetilde{H}(0,1) = \widetilde{H}(0,0) = x$, $\widetilde{H}(1,1) = \widetilde{H}(1,0)$ が成り立つ. 一方, $\pi(\widetilde{H}(s,0)) = H(s,0) = \omega(s)$, $\pi(\widetilde{H}(s,1)) = H(s,1) = \omega'(s)$ だから $\beta_\omega(x) = \widetilde{H}(1,0) = \widetilde{H}(1,1) = \beta_{\omega'}(x)$.

(2) $x \in \pi^{-1}(\omega(0))$ に対し, $\pi \circ \omega_x = \omega$, $\pi \circ \omega_y = \omega'$, $\omega_x(0) = x$, $\omega_y(0) = \omega_x(1)$ を満たす連続写像 $\omega_x, \omega_y : [0,1] \to \widetilde{X}$ を考えると $\beta_{\omega'} \circ \beta_\omega(x) = \omega_y(1)$ である. 一方, $\pi \circ (\omega_x{*}\omega_y) = \omega{*}\omega'$, $\omega_x{*}\omega_y(0) = \omega_x(0) = x$, $\omega_x{*}\omega_y(1) = \omega_y(1)$ より $\beta_{\omega*\omega'}(x) = \omega_y(1)$ である.

(3) $x\in\pi^{-1}(\omega(0))$ に対し, $\omega_x:[0,1]\to\widetilde{X}$ を $\omega_x(t)=x$ $(t\in[0,1])$ で定めると $\pi\circ\omega_x=\omega$ だから $\beta_\omega(x)=\omega_x(1)=x$ である.

(4) $H:[0,1]\times[0,1]\to X$ を $H(s,t)=\begin{cases}\omega(2(1-t)s) & s\in[0,\frac{1}{2}]\\ \omega(2(1-t)(1-s)) & t\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$ で定めると, H は $\omega{*}\omega\circ\tau$ から $\omega(0)$ への定値写像へのホモトピーであり, $H(0,t)=H(1,t)=\omega(0)$ がすべての $t\in[0,1]$ に対して成り立つため (1), (2), (3) から $\beta_{\omega\circ\tau}\circ\beta_\omega=\beta_{\omega*\omega\circ\tau}=id_{\pi^{-1}(\omega(0))}$. $\tau\circ\tau=id_{[0,1]}$ だから ω を $\omega\circ\tau$ で置き換えれば $\beta_\omega\circ\beta_{\omega\circ\tau}=id_{\pi^{-1}(\omega(1))}$ が得られる. □

$\pi:\widetilde{X}\to X$ を有限被覆写像とする. $\sigma\in S_n(X)$, $x\in\pi^{-1}(\sigma(e_0))$ に対し, (11.5) と (11.6) から $L(\sigma;x)\in S_n(\widetilde{X})$ で $\pi\circ L(\sigma;x)=\sigma$, $L(\sigma;x)(e_0)=x$ となるものがただ 1 つ存在する. そこで, 準同型写像 $\phi_n:C_n(X)\to C_n(\widetilde{X})$ を

$$\phi_n(\sigma)=\sum_{x\in\pi^{-1}(\sigma(e_0))}L(\sigma;x)$$

で定める.

補題 11.8 $\phi.=(\phi_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}:C.(X)\to C.(\widetilde{X})$ は鎖写像である.

証明 $i\neq 0$ ならば $\varepsilon_i^{(n)}(e_0)=e_0$ だから $\pi\circ L(\sigma;x)\circ\varepsilon_i^{(n)}=\sigma\circ\varepsilon_i^{(n)}$ かつ $L(\sigma;x)\circ\varepsilon_i^{(n)}(e_0)=x$ となるため, $L(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n)};x)=L(\sigma;x)\circ\varepsilon_i^{(n)}$ である. 従って $i\neq 0$ ならば

$$\phi_{n-1}(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n)})=\sum_{x\in\pi^{-1}(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n)}(e_0))}L(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n)};x)=\sum_{x\in\pi^{-1}(\sigma(e_0))}L(\sigma;x)\circ\varepsilon_i^{(n)}$$

である. $e_1=(0,1,0,\dots,0)=\varepsilon_0^{(n)}(e_0)\in\Delta^n$ とおいて $\omega:[0,1]\to X$ を $\omega(t)=\sigma((1-t)e_0+te_1)$ で定める. $x\in\pi^{-1}(\sigma(e_0))$ に対し $\omega_x(t)=L(\sigma;x)((1-t)e_0+te_1)$ で定義される $\omega_x:[0,1]\to\widetilde{X}$ は $\omega_x(t)=x$, $\pi\circ\omega_x=\omega$ を満たすため $\beta_\omega(x)=\omega_x(1)=L(\sigma;x)(e_1)=L(\sigma;x)\circ\varepsilon_0^{(n)}(e_0)$. $\beta_\omega:\pi^{-1}(\sigma(e_0))\to\pi^{-1}(\sigma\circ\varepsilon_0^{(n)}(e_0))$ は (11.7) の (4) により全単射であり, $\pi\circ L(\sigma\circ\varepsilon_0^{(n)};\beta_\omega(x))=\sigma\circ\varepsilon_0^{(n)}=\pi\circ L(\sigma;x)\circ\varepsilon_0^{(n)}$ かつ $L(\sigma\circ\varepsilon_0^{(n)};\beta_\omega(x))(e_0)=\beta_\omega(x)=L(\sigma;x)\circ\varepsilon_0^{(n)}(e_0)$ だから $L(\sigma\circ\varepsilon_0^{(n)};\beta_\omega(x))=L(\sigma;x)\circ\varepsilon_0^{(n)}$ である. 従って

$$\phi_{n-1}(\sigma\circ\varepsilon_0^{(n)})=\sum_{y\in\pi^{-1}(\sigma\circ\varepsilon_0^{(n)}(e_0))}L(\sigma\circ\varepsilon_0^{(n)};y)=\sum_{x\in\pi^{-1}(\sigma(e_0))}L(\sigma\circ\varepsilon_0^{(n)};\beta_\omega(x))=\sum_{x\in\pi^{-1}(\sigma(e_0))}L(\sigma;x)\circ\varepsilon_0^{(n)}$$

となるため $\phi_{n-1}\circ d_n=d_{n-1}\circ\phi_n$ がわかる. □

定義 11.9 $\pi:\widetilde{X}\to X$ を有限被覆写像, G をアーベル軍とする. 鎖写像 $\phi.:C.(X)\to C.(\widetilde{X})$ から定まる鎖写像 $\mathrm{Hom}(C.(\widetilde{X}),G)\to\mathrm{Hom}(C.(X),G)$ が誘導する写像を $\pi_!:H^*(\widetilde{X};G)\to H^*(X;G)$ で表し, 移送準同型写像という.

命題 11.10 $\pi:\widetilde{X}\to X$, $\rho:\widetilde{Y}\to Y$ を被覆度が m の有限被覆写像とする.

(1) $x\in H^n(X;G)$ に対して $\pi_!(\pi^*(x))=mx$ が成り立つ.

(2) 連続写像 $f:X\to Y$, $\tilde{f}:\widetilde{X}\to\widetilde{Y}$ は $\rho\circ\tilde{f}=f\circ\pi$ を満たし, 各 $p\in X$ に対し, $\tilde{f}$ は $\pi^{-1}(p)$ から $\rho^{-1}(f(p))$ への全単射を与えるとする. このとき次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} H^n(\widetilde{Y};G) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & H^n(\widetilde{X};G)\\ \big\downarrow{\scriptstyle\rho_!} & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi_!}\\ H^n(Y;G) & \xrightarrow{f^*} & H^n(X;G)\end{array}$$

証明 (1) $\sigma\in S_n(X)$, $x\in\pi^{-1}(\sigma(e_0))$ に対して $\pi\circ L(\sigma;x)=\sigma$ であり, $\pi^{-1}(\sigma(e_0))$ は m 個の要素からなるため, ϕ_n の定義から $(\pi.\circ\phi_n)(\sigma)=m\sigma$ である. 従って $\alpha\in\mathrm{Hom}(C_n(X),G)$ に対し, $\alpha\circ\pi.\circ\phi_n\in\mathrm{Hom}(C_n(X),G)$ は $c\in C_n(X)$ を $m\alpha$ に写すコチェインだから主張が成り立つ.

(2) $\sigma \in S_n(X)$, $x \in \pi^{-1}(\sigma(e_0))$ に対して $\rho \circ \tilde{f} \circ L(\sigma;x) = f \circ \pi \circ L(\sigma;x) = f \circ \sigma$, $(\tilde{f} \circ L(\sigma;x))(e_0) = \tilde{f}(x)$ だから $L(f \circ \sigma; \tilde{f}(x))$ の一意性から $L(f \circ \sigma; \tilde{f}(x)) = \tilde{f} \circ L(\sigma;x)$ が成り立つ．準同型写像 $\psi_n : C_n(Y) \to C_n(\tilde{Y})$ を $\tau \in S_n(Y)$ に対して $\psi_n = \sum_{y \in \rho^{-1}(\tau(e_0))} L(\tau;y)$ で定めれば $\rho_! : H^*(\tilde{Y};G) \to H^*(Y;G)$ は鎖写像 $\psi_. = (\psi_n)_{n \in \boldsymbol{Z}} : C.(Y) \to C.(\widetilde{Y})$ から定まる鎖写像 $\mathrm{Hom}(C.(\widetilde{Y}),G) \to \mathrm{Hom}(C.(Y),G)$ が誘導する写像として定義される．また, $\tilde{f}$ は $\pi^{-1}(\sigma(e_0))$ から $\rho^{-1}(f(\sigma(e_0)))$ への全単射を与えるため, 次の等式が成り立つ．

$$\tilde{f}.(\phi_n(\sigma)) = \sum_{x \in \pi^{-1}(\sigma(e_0))} \tilde{f}(L(\sigma;x)) = \sum_{x \in \pi^{-1}(\sigma(e_0))} L(f \circ \sigma; \tilde{f}(x)) = \sum_{y \in \rho^{-1}(f(\sigma(e_0)))} L(f \circ \sigma; y) = \psi_n(f.(\sigma))$$

従って $\pi_! \circ \tilde{f}^* = f^* \circ \rho_!$ である． □

§12. Borsuk の対心点定理

定理 12.1　連続写像 $f : S^n \to S^n$ がすべての $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対し $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ を満たせば, $\deg(f)$ は奇数である．

定理 12.2　$f : S^n \to \boldsymbol{R}^n$ を連続写像とするとき, $f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ を満たす $\boldsymbol{x} \in S^n$ が存在する．

証明　$h : D^n \to S^n$ を $h(\boldsymbol{x}) = \bigl(\boldsymbol{x}, \sqrt{1 - \|\boldsymbol{x}\|^2}\bigr)$ で定める．すべての $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対して, $f(-\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{x})$ と仮定すれば, $G : D^n \to S^{n-1}$ を $G(\boldsymbol{x}) = \dfrac{f(h(\boldsymbol{x})) - f(-h(\boldsymbol{x}))}{\|f(h(\boldsymbol{x})) - f(-h(\boldsymbol{x}))\|}$ で定義できる．$g : S^{n-1} \to S^{n-1}$ を G の S^{n-1} への制限, $c : S^{n-1} \to S^{n-1}$ を $G(\boldsymbol{0})$ への定値写像とし, $H : S^{n-1} \times [0,1] \to S^{n-1}$ を $H(\boldsymbol{x},t) = G(t\boldsymbol{x})$ で定めれば, H は c から g へのホモトピーである．従って (8.2) の (2), (4) から $\deg(g) = 0$ である．一方すべての $\boldsymbol{x} \in S^{n-1}$ に対して, $g(-\boldsymbol{x}) = -g(\boldsymbol{x})$ が成り立つため, (12.1) から $\deg(g)$ は奇数であり, 矛盾が生じる． □

S^n の点 $\boldsymbol{x}$ に対して S^n の点 $-\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}$ の対心点という．上の定理は Borsuk の対心点定理または Borsuk-Ulam の定理と呼ばれている．次の定理は $n = 2$ の場合は中間値の定理の簡単な応用として得られるが, 一般の n に対しては, (12.2) を用いて示される．

定理 12.3　(ハムサンドウィッチの定理) $\boldsymbol{R}^n$ の中に n 個の有界な可測集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ が任意に与えられたとき, $\boldsymbol{R}^n$ の超平面 P で, 次のようなものが存在する．各 j に対し, P で分割される A_j の 2 つの部分の測度は等しい．

証明　$\boldsymbol{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \boldsymbol{R}^{n+1} | x_{n+1} = 0\}$ とみなし, $\boldsymbol{n} = (0,0,\dots,0,1) \in \boldsymbol{R}^{n+1}$ とおく．各 $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対し, $\boldsymbol{x}$ に垂直で $\boldsymbol{n}$ を含む $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の超平面を $Q_{\boldsymbol{x}}$ とする．$\boldsymbol{n} \notin \boldsymbol{R}^n$ だから $Q_{\boldsymbol{x}}$ は $\boldsymbol{R}^n$ に一致しない．そこで, $Q_{\boldsymbol{x}}$ に関して $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}$ と同じ側にある A_j の測度を $u_j(\boldsymbol{x})$ で表す．このとき各 $u_j : S^n \to \boldsymbol{R}$ は連続だから, $f(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}), \dots, u_n(\boldsymbol{x}))$ で定義される連続写像 $f : S^n \to \boldsymbol{R}^n$ に対して (12.2) を用いると, $u_j(\boldsymbol{p}) = u_j(-\boldsymbol{p})$ $(j = 1,2,\dots,n)$ を満たす $\boldsymbol{p} \in S^n$ が存在する．各 $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対して $Q_{\boldsymbol{x}} = Q_{-\boldsymbol{x}}$ で, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}$ と $-\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}$ は $Q_{\boldsymbol{x}}$ に関して反対側にあるため A_j の測度を v_j とすれば $u_j(\boldsymbol{x}) + u_j(-\boldsymbol{x}) = v_j$ が成り立つ．従って $u_j(\boldsymbol{p}) = u_j(-\boldsymbol{p}) = \dfrac{v_j}{2}$ であり, $Q_{\boldsymbol{p}}$ は $\boldsymbol{R}^n$ と平行でないため, $Q_{\boldsymbol{p}}$ と $\boldsymbol{R}^n$ の交わりを P とすればよい． □

定理 12.4　(Lusternik-Schnirelmann の定理) S^n の空でない $n+1$ 個の閉集合 $F_1, F_2, \dots, F_{n+1}$ が, $S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} F_i$ を満たせば, $F_1, F_2, \dots, F_{n+1}$ のなかの少なくとも 1 つは互いに対心点である 2 点を含む．

証明　$\bigcap_{i=1}^{n+1} F_i \neq \emptyset$ のときは, $\boldsymbol{x} \in \bigcap_{i=1}^{n+1} F_i$ をとれば, $-\boldsymbol{x} \in F_i$ であるような F_i が求めるものである．従って, $\bigcap_{i=1}^{n+1} F_i = \emptyset$ と仮定してよい．$f_i : S^n \to \boldsymbol{R}$ $(i = 1,2,\dots,n+1)$ を $f_i(\boldsymbol{x}) = \inf\{\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| \,|\, \boldsymbol{y} \in F_i\}$ で定めれば f_i は連続である．また F_i は閉集合だから $\boldsymbol{x} \in F_i$ であるためには $f_i(\boldsymbol{x}) = 0$ であることが必要十分であり, 上の仮定から, すべての $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対して $\sum_{i=1}^{n+1} f_i(\boldsymbol{x}) \neq 0$ である．そこで, 関数 $s : S^n \to \boldsymbol{R}$ を $s(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(\boldsymbol{x})$ で定め, 写像 $f : S^n \to \boldsymbol{R}^n$

を $f(\boldsymbol{x}) = \left(\dfrac{f_1(\boldsymbol{x})}{s(\boldsymbol{x})}, \dfrac{f_2(\boldsymbol{x})}{s(\boldsymbol{x})}, \dots, \dfrac{f_n(\boldsymbol{x})}{s(\boldsymbol{x})}\right)$ で定めると, (12.2) から $f(\boldsymbol{x}) = f(-\boldsymbol{x})$ を満たす $\boldsymbol{x} \in S^n$ が存在する. このような $\boldsymbol{x}$ を含む F_i をとれば $f_i(\boldsymbol{x}) = 0$ だから, $i < n+1$ ならば $\dfrac{f_i(-\boldsymbol{x})}{s(-\boldsymbol{x})} = \dfrac{f_i(\boldsymbol{x})}{s(\boldsymbol{x})} = 0$ より $f_i(-\boldsymbol{x}) = 0$ で, $i = n+1$ ならば $\dfrac{f_{n+1}(-\boldsymbol{x})}{s(-\boldsymbol{x})} = 1 - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{f_i(-\boldsymbol{x})}{s(-\boldsymbol{x})} = 1 - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{f_i(\boldsymbol{x})}{s(\boldsymbol{x})} = \dfrac{f_{n+1}(\boldsymbol{x})}{s(\boldsymbol{x})} = 0$ より, $f_{n+1}(-\boldsymbol{x}) = 0$ である. いずれにしても $-\boldsymbol{x} \in F_i$ が成り立つ. □

§13. 演習問題

問題 13.1 位相空間 X は, その開集合の族 $(U_i)_{i\in I}$ の和集合 $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ となっており, X から位相空間 Y への写像 $f : X \to Y$ について, f の各 U_i への制限 $f|_{U_i} : U_i \to Y$ は連続であるとする. このとき, f は連続写像であることを示せ.

問題 13.2 位相空間 X は有限個の閉集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ の和集合 $X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ になっているとする. X から位相空間 Y への写像 $f : X \to Y$ について, f の各 A_i への制限 $f|_{A_i} : A_i \to Y$ が連続ならば, f は連続写像であることを示せ.

問題 13.3 (X, d) を距離空間とし, X の部分集合 A, B に対して, $d(A, B) = \inf\{d(x, y) | \, x \in A, y \in B\}$ とおく. とくに, $B = \{y\}$ の場合は, $d(A, \{y\})$ を $d(A, y)$ と表す.

(1) $\rho_A : X \to \boldsymbol{R}$ を $\rho_A(x) = d(A, x)$ で定めるとき ρ_A は連続であることを示せ. これより, $\varepsilon > 0$ に対し, $U(A, \varepsilon) = \{x \in X | \, d(A, x) < \varepsilon\}$ は X の開集合であることを示せ.

(2) $d(A, B) = \inf\{d(x, B) | \, x \in A\} = \inf\{d(A, x) | \, x \in B\}$ を示せ.

(3) A, B がともに X の閉集合で, $A \cap B = \emptyset$ であるとき $d(A, B) > 0$ であるといえるか?

問題 13.4 (X_i, d_i) $(i = 1, 2, \dots, n)$ を距離空間とし, $D : (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n) \times (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n) \to \boldsymbol{R}$ を $D((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$ で定める.

(1) D は $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の距離関数であることを示せ.

(2) 各 X_i に X_i の距離関数 d_i から定まる位相を入れるとき, D から定まる $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の位相は $X_1, X_2, \dots, X_n$ の直積位相と一致することを示せ.

問題 13.5 (X, d) を距離空間, C を X のコンパクトな部分空間, O を X の開集合で, C を含むものとする. このとき $\delta > 0$ で, $U(C, \delta) \subset O$ (問題 13.3 参照) を満たすものが存在することを示せ.

問題 13.6 (X, d) を距離空間とし, $D : (X\times X)\times(X\times X) \to \boldsymbol{R}$ を $D((x, y), (z, w)) = d(x, z)+d(y, w)$ で定める (問題 13.4 参照). また $\delta > 0$ に対し, $W_X(\delta) = \{(x, y) \in X \times X | \, d(x, y) < \delta\}$ とおき, $\Delta_X = \{(x, x) \in X \times X | \, x \in X\}$ とおく.

(1) 距離空間 $(X \times X, D)$ において, $U(\Delta_X, \delta) = W_X(\delta)$ が成り立つことを示せ.

(2) (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, $f : X \to Y$ を写像とする. このとき, f が一様連続であるためには, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $(f \times f)(W_X(\delta)) \subset W_Y(\varepsilon)$ が成り立つような $\delta > 0$ が存在することが必要十分であることを示せ. ただし, $f \times f : X \times X \to Y \times Y$ は $(f \times f)(x, y) = (f(x), f(y))$ で定義される写像である.

問題 13.7 問題 13.5, 13.6 を用いて, コンパクト距離空間から距離空間への連続写像は一様連続であることを証明せよ.

問題 13.8 X を位相空間とし, $x \in X$ に対し X のすべての点を x に写すような定値写像を $c_x : X \to X$ で表す.

(1) $x, y \in X$ とするとき, c_x と c_y がホモトピックであるためには x と y が同じ弧状連結成分に属することが必要

十分であることを示せ.

(2) 可縮な位相空間は弧状連結であることを示せ.

問題 13.9　$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 X が次の性質をもつとき星状であるという.

"$p \in X$ が存在して X の任意の点 x に対して, p と x を結ぶ線分上の点は X に属する."

星状である $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合は可縮であることを示せ.

問題 13.10　$\boldsymbol{n} = (0, 0, \ldots, 0, 1) \in \boldsymbol{R}^{n+1}$, $H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \boldsymbol{R}^{n+1} | \, x_{n+1} = 0\}$ とおく. $\boldsymbol{x} \in S^n - \{\boldsymbol{n}\}$ と $\boldsymbol{n}$ を通る直線と H との交点を $P(\boldsymbol{x})$ として, 写像 $\varphi : S^n - \{\boldsymbol{n}\} \to \boldsymbol{R}^n$ を $P(\boldsymbol{x}) = (\varphi(\boldsymbol{x}), 0)$ で定義する.

(1) $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ のとき, $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ を用いて $\varphi(\boldsymbol{x})$ を表せ.

(2) φ の逆写像 $\varphi^{-1} : \boldsymbol{R}^n \to S^n - \{\boldsymbol{n}\}$ とし, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ のとき, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ を用いて $\varphi^{-1}(\boldsymbol{y})$ を表せ.

(3) $S^n - \{\boldsymbol{n}, -\boldsymbol{n}\}$ は S^{n-1} とホモトピー同値であることを示せ.

問題 13.11　$n + 1$ 次正則行列 A に対し, 写像 $f_A : S^n \to S^n$ を $f_A(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{\|A\boldsymbol{x}\|} A\boldsymbol{x}$ で定めるとき, n が偶数ならば, $f_A(\boldsymbol{x}) = x$ または $f_A(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$ を満たす S^n の点 $\boldsymbol{x}$ が存在することを示せ.

問題 13.12　位相空間 X から Y への連続な全射 $p : X \to Y$ が次の条件 (Q) を満たすとき, p を商写像という.

(Q)「Y の部分集合 O に対し, $p^{-1}(O)$ が X の開集合ならば O は Y の開集合である.」

Z を位相空間とするとき, 写像 $f : Y \to Z$ が連続であるためには合成写像 $f \circ p$ が連続であることが必要十分であることを示せ.

問題 13.13　X, Y を位相空間とする. 写像 $f : X \to Y$ に関して次の定義をする.

(i) X の任意の開集合 O に対して, $f(O)$ が Y の開集合であるとき, f を開写像という.

(ii) X の任意の閉集合 F に対して, $f(F)$ が Y の閉集合であるとき, f を閉写像という.

(iii) X の任意の点 x に対して, x の開近傍 U で, $f(U)$ は Y の開集合であり, f の U への制限が U から $f(U)$ への同相写像になるようなものがとれるとき, f を局所同相写像という.

(1) f が全射であり, 開写像または閉写像ならば商写像であることを示せ.

(2) f が局所同相写像ならば開写像であることを示せ.

問題 13.14　$(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $\sim$ を X の同値関係とする. $\sim$ による X の商集合を $X/{\sim}$ とし, $p : X \to X/{\sim}$ を X の各要素 x に対し x が属する同値類 $[x]$ を対応させる写像とする.

(1) $X/\sim$ の部分集合からなる集合 $\mathcal{O}$ を $\mathcal{O} = \{O \subset X/{\sim} \, | \, p^{-1}(O) \in \mathcal{O}\}$ で定めるとき, $\mathcal{O}$ は $X/{\sim}$ の位相になることを示せ.

(2) 上で定めた $X/{\sim}$ の位相のもとで, p は商写像であることを示せ.

問題 13.15　X, Y, Z を位相空間, $f : X \to Y$ を商写像, $g : X \to Z$ を連続写像とする.

(1) $g : X \to Z$ が条件「$x, y \in X$ が $f(x) = f(y)$ を満たせば $g(x) = g(y)$ が成り立つ.」を満たせば, 連続写像 $h : Y \to Z$ で $h \circ f = g$ を満たすものが, ただ一つ存在することを示せ.

(2) $g : X \to Z$ も商写像であり, $x, y \in X$ に対して, $f(x) = f(y)$ であるためには $g(x) = g(y)$ であることが必要十分であるとする. このとき, (1) の $h : Y \to Z$ は同相写像であることを示せ.

問題 13.16　$\boldsymbol{R}$ から単位円周 $S^1 = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 | \, x^2 + y^2 = 1\}$ への写像 $f : \boldsymbol{R} \to S^1$ を $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ で定めれば f は局所同相写像であることを示せ. ただし, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}^2$ には通常の位相を与え, S^1 は $\boldsymbol{R}^2$ の部分空間とする.

問題 13.17　$\boldsymbol{Z}$ を整数全体の集合とし, $\boldsymbol{R}$ の同値関係 $\sim$ を「$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \boldsymbol{Z}$」で定義する. 問題 13.13, 13.14, 13.15, 13.16 の結果を用いて商空間 $\boldsymbol{R}/{\sim}$ と単位円周 S^1 は同相であることを示せ.

参考文献

[1] 中岡　稔, 位相幾何学 (ホモロジー論), 共立出版, 1970.

[2] 中岡　稔, 不動点定理とその周辺, 岩波書店, 1977.

[3] MacLane, Saunders S., *Homology*, Springer Verlag, 1967.

[4] Spanier, Edwin H., *Algebraic Topology*, Springer Verlag, 1966.