代数学の基本定理

本論では「複素係数の代数方程式は複素数の範囲で必ず解をもつ」という「代数学の基本定理」を証明する. 以下の議論の基礎にするのは第 1 節で述べる「Cauchy 列は収束する」という実数の基本的な性質である

1　連続関数の性質

定義 1.1 X, Y を $\boldsymbol{C}$ の部分集合とし, X から Y への写像 (関数) $f : X \to Y$ を考える.

1) f が $a \in X$ で連続であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ で「$|z - a| < \delta$ かつ $z \in X$ ならば $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$」を満たすものがとれることをいう.

2) f が X の任意の点 a で連続であるとき, f を連続写像 (連続関数) という.

例 1.2 *1)* Y を $\boldsymbol{C}$ の部分集合, X を Y の部分集合とするとき, $z \in X$ を z 自身に対応させる写像 $i : X \to Y$ は連続である. 実際, 任意の $a \in \boldsymbol{C}$ と $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \varepsilon$ とすれば, 「$|z - a| < \delta$ かつ $z \in X$ ならば $|i(z) - i(a)| = |z - a| < \delta = \varepsilon$」が成り立つ.

2) $\alpha \in \boldsymbol{C}$ を定数とし, $f : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ を常に値が α であるような定数値関数とすれば, f は連続である. 実際, 任意の $a \in \boldsymbol{C}$ と $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = 1$ とすれば, 「$|z - a| < 1$ かつ $z \in X$ ならば $|f(z) - f(a)| = |\alpha - \alpha| = 0 < \varepsilon$」が成り立つ.

3) $c : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ を $c(z) = \bar{z}$ (z の共役複素数) で定めれば c は連続写像である. 実際, 任意の $a \in \boldsymbol{C}$ と $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \varepsilon$ とすれば, 「$|z - a| < \delta$ かつ $z \in X$ ならば $|c(z) - c(a)| = |\bar{z} - \bar{a}| = |z - a| < \delta = \varepsilon$」が成り立つ.

4) X を負でないの実数全体の集合とする. $f : X \to X$ を $f(x) = \sqrt{x}$ で定めれば f は連続写像である. 実際, $a > 0$ のとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ を $\frac{3a}{4}$ と $\frac{3\sqrt{a}\varepsilon}{2}$ 小さい方とすれば, $|x - a| < \delta$ かつ $x \geqq 0$ ならば $\frac{a}{4} \leqq a - \delta < x$ だから $\frac{3\sqrt{a}}{2} < \sqrt{x} + \sqrt{a}$ となるため, $|f(x) - f(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \frac{2\delta}{3\sqrt{a}} \leqq \varepsilon$ である. $a = 0$ の場合は, $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \varepsilon^2$ とすれば, $|x| < \delta$ かつ $x \geqq 0$ ならば $|f(x) - f(0)| = |\sqrt{x}| < \sqrt{\delta} = \varepsilon$ である.

定義 1.3 $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ を実数列とする.

1) α を実数とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 自然数 N で「$n \geqq N$ ならば $|x_n - \alpha| < \varepsilon$」が成り立つようなものがあるとき, $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ は α に収束するという. このとき α を $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ で表して, 数列 $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ の極限という.

2) $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ が収束するような実数 α があるとき, $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ は収束するという.

3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 自然数 N で「$n, m \geqq N$ ならば $|x_n - x_m| < \varepsilon$」が成り立つようなものがあるとき, $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ を *Cauchy* 列という.

次の命題は, 連続写像がもつ基本的な性質である.

命題 1.4 X, Y, Z を $\boldsymbol{C}$ の部分集合とする.

1) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ がともに連続写像ならば, 合成写像 $g \circ f : X \to Z$ も連続である.

2) $f, g : X \to \boldsymbol{C}$ を連続関数, $\alpha \in \boldsymbol{C}$ とすると, $f + g, \alpha f, fg : X \to \boldsymbol{C}$ はすべて連続である. また, すべての $z \in X$ に対して $g(z) \neq 0$ ならば $\frac{f}{g} : X \to \boldsymbol{C}$ も連続である. 但し, $f + g$, αf, fg, $\frac{f}{g}$ はそれぞれ $(f + g)(z) = f(z) + g(z)$, $(\alpha f)(z) = \alpha f(z)$, $(fg)(z) = f(z)g(z)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ で定義される写像である.

3) $f : X \to Y$ を写像とする. $z \in X$ に対し, $f(z) = f_1(z) + f_2(z)i$ ($f_1(z), f_2(z) \in \boldsymbol{R}$) とおくことにより実数値関数 $f_j : X \to \boldsymbol{R}$ ($j = 1, 2$) が定まるが, f が連続であるためには, f_1, f_2 がともに連続であることが必要十分である.

4) $f : X \to Y$ が連続であるとする. X に含まれる複素数列 $z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots$ が $a \in X$ に収束すれば, $f(z_0), f(z_1), \ldots, f(z_n), \ldots$ は $f(a) \in Y$ に収束する.

証明 1) $a \in X, \varepsilon > 0$ を任意にとる. g が $f(a)$ で連続であることから, $\delta' > 0$ で「$|w - f(a)| < \delta'$ かつ $w \in Y$ ならば $|g(w) - g(f(a))| < \varepsilon$」を満たすものがとれる. f が a で連続であることから, 上の δ' に対して $\delta > 0$ で「$|z - a| < \delta$ かつ $z \in X$ ならば $|f(z) - f(a)| < \delta'$」を満たすものがとれる. 従って, 「$|z - a| < \delta$ かつ $z \in X$ ならば $|g(f(z)) - g(f(a))| < \varepsilon$」が成り立つため, 合成写像 $g \circ f : X \to Z$ は連続である.

2) $a \in X, \varepsilon > 0$ を任意にとる.

$\delta_1, \delta_2 > 0$ で「$|z - a| < \delta_1$ かつ $z \in X$ ならば $|f(z) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2+2|g(a)|}$」,「$|z - a| < \delta_2$ かつ $z \in X$ ならば $|g(z) - g(a)| < 1$ かつ $|g(z) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2+2|f(a)|}$」を満たすものがとれる. $\delta > 0$ を $\delta \leqq \delta_1, \delta_2$ であるように選び, $|z-a| < \delta$ かつ $z \in X$ とすると, $|(f+g)(z)-(f+g)(a)| = |f(z)-f(a)+g(z)-g(a)| \leqq |f(z)-f(a)|+|g(z)-g(a)| < \frac{\varepsilon}{2+2|g(a)|} + \frac{\varepsilon}{2+2|f(a)|} < \varepsilon$ であり, また $|g(z)| \leqq |g(z) - g(a)| + |g(a)| < 1 + |g(a)|$ であることに注意すれば, $|(fg)(z) - (fg)(a)| = |f(z)g(z) - f(a)g(z) + f(a)g(z) - f(a)g(a)| \leqq |f(z) - f(a)||g(z)| + |f(a)||g(z) - g(a)| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + |f(a)|\frac{\varepsilon}{2+2|f(a)|} < \varepsilon$ が成り立つため $f+g$, fg はともに連続である. とくに g がつねに値 α をとる定数値関数の場合を考えれば, (1.2) の 2) により αf も連続であることがわかる.

すべての $z \in X$ に対して $g(z) \neq 0$ とする. とくに $g(a) \neq 0$ だから $\delta_1, \delta_2 > 0$ で「$|z - a| < \delta_1$ かつ $z \in X$ ならば $|f(z) - f(a)| < \frac{\varepsilon|g(a)|^2}{4+4|g(a)|}$」,「$|z - a| < \delta_2$ かつ $z \in X$ ならば $|g(z) - g(a)| < \frac{g(a)}{2}$ かつ $|g(z) - g(a)| < \frac{\varepsilon|g(a)|^2}{4+4|f(a)|}$」を満たすものがとれる. $\delta > 0$ を $\delta \leqq \delta_1, \delta_2$ であるように選び, $|z - a| < \delta$ かつ $z \in X$ とすると, $|g(a)| \leqq |g(a) - g(z)| + |g(z)| < \frac{g(a)}{2} + |g(z)|$ から $|g(z)| > \frac{g(a)}{2}$ が得られることに注意すれば, $\left|\left(\frac{f}{g}\right)(z) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)\right| = \frac{|f(z)g(a)-f(a)g(a)-f(a)g(z)+f(a)g(a)|}{|g(z)g(a)|} \leqq \frac{2|f(z)-f(a)||g(a)|+2|f(a)||g(z)-g(a)|}{|g(a)|^2} < \frac{\varepsilon|g(a)|}{2+2|g(a)|} + \frac{\varepsilon|f(a)|}{2+2|f(a)|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ となる. 従って $\frac{f}{g} : X \to \boldsymbol{C}$ は連続である.

3) $f_1(z) = \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(z)})$, $f_2(z) = \frac{1}{2i}(f(z) - \overline{f(z)})$ だから c を (1.2) の 3) の写像とすれば $f_1 = \frac{1}{2}(f + c \circ f)$, $f_2 = \frac{1}{2i}(f - c \circ f)$ である. f が連続ならば 1) から $c \circ f$ も連続だから, 2) により f_1, f_2 は連続である. 逆に f_1, f_2 が連続ならば $f = f_1 + if_2$ だから, 2) により f は連続である.

4) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ で「$|z - a| < \delta$ かつ $z \in X$ ならば $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$」を満たすものがとれ, さらに「$n \geqq N$ ならば $|z_n - a| < \delta$」を満たす自然数 N がとれるから, $n \geqq N$ ならば $|f(z_n) - f(a)| < \varepsilon$ である. これは $f(z_0), f(z_1), \dots, f(z_n), \dots$ が $f(a)$ に収束することを意味する. □

系 1.5 $a_0, a_1, \dots, a_n \in \boldsymbol{C}$ とし, $f : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ を $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ で定めれば f は連続である.

証明 (1.2) の 1) から $z \in \boldsymbol{C}$ を z 自身に対応させる写像は連続だから, (1.4) の 2) を用いれば, k による数学的帰納法で z を z^k に対応させる写像が連続であることが分かる. (1.4) の 2) により, 各 $k = 1, 2, \dots, n$ に対し z を $a_k z^k$ に対応させる写像は連続である. さらに (1.2) の 2) により z を a_0 に対応させる写像も連続だから, 再度 (1.4) の 2) を用いると f の連続性が分かる. □

次の定理は実数が持つ最も基本的な性質の一つであるが, これを証明するには実数そのものを構成することから始める必要があるので, 証明なしに述べるだけにとどめる.

定理 1.6 *(実数の完備性)* 実数列 $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ が *Cauchy* 列ならば収束する.

補題 1.7 $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ と $y_0, y_1, \dots, y_n, \dots$ を収束する実数列とする. すべての n について $x_n \leqq y_n$ ならば $\lim_{n\to\infty} x_n \leqq \lim_{n\to\infty} y_n$ である.

証明 $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} y_n = \beta$ とおき, $\alpha > \beta$ と仮定する. 自然数 N_1, N_2 で「$n \geqq N_1$ ならば $|x_n - \alpha| < \frac{\alpha-\beta}{2}$」, 「$n \geqq N_2$ ならば $|y_n - \alpha| < \frac{\alpha-\beta}{2}$」を満たすものがとれるため, N を N_1, N_2 の大きい方 (小さくない方) とすれば, $n \geqq N$ ならば $-\frac{\alpha-\beta}{2} < x_n - \alpha$ かつ $y_n - \beta < \frac{\alpha-\beta}{2}$ が成り立つ. このとき $y_n < \frac{\alpha+\beta}{2} < x_n$ となって, $x_n \leqq y_n$ という仮定と矛盾する. □

実数 a, b $(a \leqq b)$ に対し, (a, b), $[a, b]$ によりそれぞれ開区間 $\{x \in \boldsymbol{R} | \, a < x < b\}$, 閉区間 $\{x \in \boldsymbol{R} | \, a \leqq x \leqq b\}$ を表すことにする. 連続関数については, 次の結果は重要である.

定理 1.8 *(中間値の定理)* $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ が連続ならば $f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の値 y に対し, $f(c)=y$ となる $c\in[a,b]$ が存在する.

証明 $p,q\in[a,b]$ に対して y が $f(p)$ と $f(q)$ の間にあるとき, y は $f(p)$ と $f(\frac{p+q}{2})$ の間か $f(\frac{p+q}{2})$ と $f(q)$ の間にあることに注意する. そこで, $u(p,q)$ を前者の場合は $u(p,q)=\frac{3p+q}{4}$, 後者の場合は $u(p,q)=\frac{p+3q}{4}$ により定める. このとき, $|u(p,q)-\frac{p+q}{2}|=\frac{|q-p|}{4}$ であり, y は $f(u(p,q)-\frac{|q-p|}{4})$ と $f(u(p,q)+\frac{|q-p|}{4})$ の間にあることに注意する.

実数列 $x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots$ を以下のように定める. $x_0=a$, $x_1=b$, $x_2=\frac{a+b}{2}$ として, 帰納的に $x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}$ $(n\geqq 3)$ が次の条件を満たすように定まったと仮定する.

(1) $i=0,1,\ldots,n-2$ に対して $|x_{i+1}-x_i|=\frac{b-a}{2^i}$.

(2) $i=2,\ldots,n-1$ に対して y は $f(x_i-\frac{b-a}{2^{i-1}})$ と $f(x_i+\frac{b-a}{2^{i-1}})$ の間にある.

$x_n=u(x_{n-1}-\frac{b-a}{2^{n-2}},x_{n-1}+\frac{b-a}{2^{n-2}})$ で x_n を定めれば, 上で述べたことから $|x_n-x_{n-1}|=\frac{b-a}{2^{n-1}}$ であり, y は $f(x_n-\frac{b-a}{2^{n-1}})$ と $f(x_n+\frac{b-a}{2^{n-1}})$ の間にある. このように定めた数列は Cauchy 列である. 実際, $|x_{n+k}-x_n|\leqq\sum_{i=0}^{k-1}|x_{n+i+1}-x_{n+i}|=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{b-a}{2^{n+i}}<\sum_{i=0}^{\infty}\frac{b-a}{2^{n+i}}=\frac{b-a}{2^{n-1}}$ が成り立つ. (1.6) からこの数列は収束して, $\lim_{n\to\infty}x_n=c$ とおくと, $x_0,x_1,\ldots$ の定め方から, これらはすべて $[a,b]$ に属するため (1.7) から $c\in[a,b]$ である.

$f(c)=y$ が成り立つことをみる. $(y-f(x_n-\frac{b-a}{2^{n-1}}))(y-f(x_n+\frac{b-a}{2^{n-1}}))\leqq 0$ がすべての n について成り立ち, $n\to\infty$ のとき $x_n-\frac{b-a}{2^{n-1}},x_n+\frac{b-a}{2^{n-1}}\to c$ だから (1.4) の 4) と (1.7) から $(y-f(c))^2\leqq 0$ が得られる. 従って, $f(c)=y$ である. □

中間値の定理から次の結果がただちに得られる.

補題 1.9 $f:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ が連続で, すべての $x\in[a,b]$ に対して $f(x)$ が整数ならば, f は定数値関数である.

定理 1.10 $x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots$ を閉区間 $[a,b]$ に含まれる実数列とすれば, 収束する部分列を含む.

証明 実数列 $p_0,p_1,\ldots,p_j,\ldots$ を以下のように定める. $p_0=a$, $p_1=b$, $p_2=\frac{a+b}{2}$ として, 帰納的に $p_0,p_1,\ldots,p_{j-1}$ $(j\geqq 3)$ が次の条件を満たすように定まったと仮定する.

(1) $i=0,1,\ldots,j-2$ に対して $|p_{i+1}-p_i|=\frac{b-a}{2^i}$.

(2) $i=2,\ldots,j-1$ に対して $x_n\in[p_i-\frac{b-a}{2^{i-1}},p_i+\frac{b-a}{2^{i-1}}]$ となる n は無限個存在する.

$[p_{j-1}-\frac{b-a}{2^{j-2}},p_{j-1}]$ または $[p_{j-1},p_{j-1}+\frac{b-a}{2^{j-2}}]$ は無限個の n に対して x_n を含むため, 前者が含む場合は $p_j=p_{j-1}-\frac{b-a}{2^{j-1}}$, そうでない場合は $p_j=p_{j-1}+\frac{b-a}{2^{j-1}}$ により p_j を定める. このとき, $|p_j-p_{j-1}|=\frac{b-a}{2^{j-1}}$ であり, $x_n\in[p_j-\frac{b-a}{2^{j-1}},p_j+\frac{b-a}{2^{j-1}}]$ となる n は無限個存在する.

$n_0=0$, $n_1=1$ とし, 整数列 $n_0<n_1<\cdots<n_{j-1}$ が $x_{n_i}\in[p_{i+1}-\frac{b-a}{2^i},p_{i+1}+\frac{b-a}{2^i}]$ $(i=1,2,\ldots,j-1)$ を満たすように選べたとする. p_{j+1} の定め方から $x_n\in[p_{j+1}-2^{-j}(b-a),p_{j+1}+2^{-j}(b-a)]$ となる n は無限個あるため, $x_{n_j}\in[p_{j+1}-\frac{b-a}{2^j},p_{j+1}+\frac{b-a}{2^j}]$ を満たす n_{j-1} より大きな n_j はある. このように定めた部分列 $x_{n_0},x_{n_1},\ldots$ は Cauchy 列である. 実際 $|x_{n_j}-p_{j+1}|\leqq\frac{b-a}{2^j}$ と $|p_{i+1}-p_i|=\frac{b-a}{2^i}$ から

$$\begin{aligned}
|x_{n_{j+k}}-x_{n_j}| &= \left|x_{n_{j+k}}-p_{j+k+1}+\sum_{l=1}^{k}(p_{j+l+1}-p_{j+l})+p_{j+1}-x_{n_j}\right| \\
&\leqq |x_{n_{j+k}}-p_{j+k+1}|+\sum_{l=1}^{k}|p_{j+l+1}-p_{j+l}|+|p_{j+1}-x_{n_j}| \\
&\leqq \frac{b-a}{2^{j+k}}+\sum_{l=1}^{k}\frac{b-a}{2^{j+l}}+\frac{b-a}{2^j}=\frac{b-a}{2^{j-1}}
\end{aligned}$$

である. 従って, (1.6) から結果が得られる. □

S^1 で絶対値 1 の複素数全体の集合, D^2 で絶対値 1 以下の複素数全体の集合を表すことにする.

定理 1.11 $f : D^2 \to \boldsymbol{C}$ を連続関数とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し「$|z - w| < \delta$ ならば $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$」が成り立つような $\delta > 0$ がある．

証明 背理法で証明する．主張を否定すれば, ある $\varepsilon > 0$ で 次のようなものがある; $\delta > 0$ をどのように選んでも「$|z - w| < \delta$ かつ $|f(z) - f(w)| \geqq \varepsilon$」が成り立つような $z, w \in D^2$ がある．$\delta = 2^{-n}$ に対して「$|z_n - w_n| < 2^{-n}$ かつ $|f(z_n) - f(w_n)| \geqq \varepsilon$」が成り立つような $z_n, w_n \in D^2$ を選んでおく．$z_n = x_n + y_n i$, $w_n = u_n + v_n i$ $(x_n, y_n, u_n, v_n \in \boldsymbol{R})$ とおけば, $z_n, w_n \in D^2$ から x_n, y_n, u_n, v_n はすべて $[-1, 1]$ の点列である．(1.10) からこれらは収束する部分列を含むため, x_{n_k}, y_{n_k}, u_{n_k}, v_{n_k} がすべて収束するように整数列 $n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \cdots$ がとれる．従って, z_{n_k}, w_{n_k} は収束し, $p = \lim_{k\to\infty} z_{n_k}$, $q = \lim_{k\to\infty} w_{n_k}$ とおくと $|z_{n_k}|, |w_{n_k}| \leqq 1$ だから (1.7) から $|p|, |q| \leqq 1$ すなわち $p, q \in D^2$ である．$|z_{n_k} - w_{n_k}| < 2^{-n_k}$ がすべての k について成り立つため, (1.7) から $|p - q| \leqq 0$ すなわち $p = q$ である．f は連続だから (1.4) の 4) により, $\lim_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(w_{n_k}) = f(p)$ が得られるが, $|f(z_{n_k}) - f(w_{n_k})| \geqq \varepsilon$ において, $k \to \infty$ とすれば $0 \geqq \varepsilon > 0$ となって矛盾が生じる． □

2　定理の証明

写像 $e : \boldsymbol{R} \to S^1$ を $e(t) = \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t$ で定義し, $l : S^1 - \{-1\} \to (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ を

$$l(x + iy) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \cos^{-1} x & y \geqq 0 \\ -\frac{1}{2\pi} \cos^{-1} x & y \leqq 0 \end{cases}$$

$(x, y \in \boldsymbol{R},\ x^2 + y^2 = 1)$ で定めると次の補題は容易に示される．

補題 2.1 *1) e, l は連続であり, $e(l(z)) = z$ $(z \in S^1 - \{-1\})$, $l(e(t)) = t$ $(t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$.*
2) $s, t \in \boldsymbol{R}$ に対し, $e(s + t) = e(s)e(t)$.
3) $e(t) = e(s)$ であることと, $t - s$ が整数であることは同値である．

補題 2.2 *$f : D^2 \to S^1$ を連続写像とすると, 連続写像 $\tilde{f} : D^2 \to \boldsymbol{R}$ で, $e \circ \tilde{f} = f$ を満たすものが存在する．*

証明 f は連続だから (1.11) により「$|z - w| < \delta$ ならば $|f(z) - f(w)| < 2$」を満たすような $\delta > 0$ がある．$N > \frac{1}{\delta}$ である整数 N をとれば, 任意の $j = 1, 2, \ldots, N$ と $z \in D^2$ に対して, $\frac{j}{N} z \in D^2$ であることに注意すると $|\frac{j}{N} z - \frac{j-1}{N} z| = \frac{|z|}{N} < \delta$ だから $|f(\frac{j}{N} z) - f(\frac{j-1}{N} z)| < 2$ である．一般に $z, w \in S^1$ が $|z - w| < 2$ を満たすことと $\frac{z}{w} \neq -1$ であることは同値だから, $g_j(z) = f(\frac{j}{N} z) f(\frac{j-1}{N} z)^{-1}$ とおくと, g_j は D^2 から $S^1 - \{-1\}$ への写像であり, $g_j(0) = 1$ となる．このとき, $f(z) = f(0) g_1(z) g_2(z) \cdots g_N(z)$ がすべての $z \in D^2$ に対して成り立つ．そこで, $f(0) = e(t_0)$ を満たす実数 t_0 を選び, $\tilde{f}$ を $\tilde{f}(z) = t_0 + \sum_{j=1}^{N} l(g_j(z))$ で定めると, (2.1) の 1), 2) を用いて $e(\tilde{f}(z)) = e(t_0 + \sum_{j=1}^{N} l(g_j(z))) = e(t_0) e(l(g_1(z))) \cdots e(l(g_N(z))) = f(0) g_1(z) \cdots g_N(z) = f(z)$. □

補題 2.3 *n が 0 でない整数ならば, 連続写像 $\tilde{f} : D^2 \to \boldsymbol{R}$ で $e(\tilde{f}(z)) = z^n$ $(z \in S^1)$ を満たすものは存在しない．*

証明 連続写像 $\tilde{f} : D^2 \to \boldsymbol{R}$ で $e(\tilde{f}(z)) = z^n$ $(z \in S^1)$ を満たすものが存在したと仮定する．任意の $s \in [0, 1]$ に対して, (2.1) の 2) より, $e(\tilde{f}(e(s))) = e(s)^n = e(ns)$, だから $g(s) = \tilde{f}(e(s)) - ns$, により関数 $g : [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ を定めれば, 連続であり, (2.1) の 3) からつねに整数を値にとる．(1.9) により g は一定の整数値をとる定数値関数だから, $g(0) = c$ とおけば, すべての $s \in [0, 1]$ に対して $\tilde{f}(e(s)) = ns + c$ である．ところが $e(0) = e(1) = 1$ から $c = \tilde{f}(e(0)) = \tilde{f}(e(1)) = n + c$ となり, $n = 0$ が導かれるため, 矛盾が生じる． □

補題 2.4 *n が 0 でない整数ならば, 連続写像 $f : D^2 \to S^1$ で, すべての $z \in S^1$ に対して $f(z) = z^n$ となるものは存在しない．*

証明 連続写像 $f : D^2 \to S^1$ で $f(z) = z^n$ $(z \in S^1)$ を満たすものが存在したと仮定すれば, (2.2) から, 連続写像 $\tilde{f} : D^2 \to \boldsymbol{R}$ で, $e \circ \tilde{f} = f$ を満たすものが存在するが, これは (2.3) に矛盾する. □

補題 2.5 *n が 0 でない整数ならば, 任意の連続写像 $g : D^2 \to D^2$ に対して $g(z) = z^n$ を満たす $z \in D^2$ が存在する.*

証明 すべての $z \in D^2$ に対して, $g(z) \neq z^n$ が成り立つと仮定すれば, 各 $z \in D^2$ に対し, $g(z)$ を始点として z^n を通る半直線がただ1つ定まり, この半直線と S^1 との交点を $f(z)$ とする. $z = x+yi, w = u+vi \in \boldsymbol{C}$ $(x, y, u, v \in \boldsymbol{R})$ に対して z と w の「内積」$xu+yv$ を (z, w) で表し, $u(z) = \frac{z^n - g(z)}{|z^n - g(z)|}$, $s(z) = -(z^n, u(z)) + \sqrt{1 - |z^n|^2 + (z^n, u(z))^2}$ とおけば, $f(z)$ は $f(z) = z^n + s(z)u(z)$ で与えられるため, (1.2) と (1.4) により $f : D^2 \to S^1$ は連続である. また, $z \in S^1$ ならば $z^n \in S^1$ だから $f(z) = z^n$ である. これは (2.4) と矛盾する. □

定理 2.6 *(代数学の基本定理) 複素数を係数とする n 次代数方程式 $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ は, r を 1 と $|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|$ の大きい方とすれば, 絶対値が r 以下である複素数の解を少なくとも一つもつ.*

証明 $|z| \leqq r$ ならば, $|z^k| \leqq r^k$, $\frac{1}{r^k} \leqq 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, $|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}| \leqq r$ だから

$$\begin{aligned}
|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| &\leqq |a_{n-1}||z^{n-1}| + \cdots + |a_1||z| + |a_0| \\
&\leqq |a_{n-1}|r^{n-1} + \cdots + |a_1|r + |a_0| \\
&= r^{n-1}\left(|a_{n-1}| + \cdots + \frac{|a_1|}{r^{n-2}} + \frac{|a_0|}{r^{n-1}}\right) \\
&\leqq r^{n-1}(|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|) \\
&\leqq r^n
\end{aligned}$$

である. そこで, 写像 $g : D^2 \to \boldsymbol{C}$ を $g(z) = -\frac{1}{r^n}(a_{n-1}(rz)^{n-1} + \cdots + a_1(rz) + a_0)$ で定義すれば, (1.5) により g は連続であり, 任意の $z \in D^2$ に対して $|g(z)| \leqq 1$ である. 従って, g は D^2 から D^2 への連続写像とみなせるため, (2.5) から $g(z_0) = z_0^n$ を満たす $z_0 \in D^2$ がある. このとき $(rz_0)^n = -(a_{n-1}(rz_0)^{n-1} + \cdots + a_1(rz_0) + a_0)$ だから rz_0 は与えられた方程式の解である. □

系 2.7 *複素数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ を係数とする n 次多項式 $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ $(a_n \neq 0)$ は 1 次式の積 $a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\cdots(z - \alpha_n)$ の形に因数分解される.*

証明 n による帰納法で示す. $n = 1$ のときは, 主張は明らかである. $n - 1$ の場合に主張が成り立つと仮定する. n 次方程式 $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ は少なくとも 1 つの解をもつため, 解の 1 つを α_n とすれば, 因数定理により, n 次多項式 $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ は $z - \alpha_n$ で割り切れる. すなわち, $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = (a_n z^{n-1} + a'_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a'_1 z + a'_0)(z - \alpha_n)$ の形に因数分解されるため, $n-1$ 次多項式 $a_n z^{n-1} + a'_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a'_1 z + a'_0$ に帰納法の仮定を適用すればよい. □