

幾何学 I

目次

1	集合と写像	1
2	ユークリッド空間における極限	3
3	距離空間の定義と例	7
4	距離空間の性質	10
5	距離空間の位相	13
6	位相空間	17
7	連続写像	20
8	位相の生成	21
9	部分空間・直積空間	23
10	連結性	26
11	コンパクト性	30
12	一様連続写像	34

1 集合と写像

定義 1.1 真か偽のいずれかである主張を命題という。また、変数 x を含み、 x に要素を代入したときに命題になるものを、命題関数という。

定義 1.2 思考の対象として「明確な意味」をもつものを要素または元 (element) といい、確定した範囲の要素をひとつにまとめた「集り」を集合 (set) と呼ぶ。

記法 1.3 (1) 要素 a が集合 A の要素であるとき、 $a \in A$ または $A \ni a$ で表し、 a は A に属するという。また要素 a が A の要素でないとき、 $a \notin A$ または $A \not\ni a$ と表す。

(2) 要素 a, b, c, \dots からなる集合を $\{a, b, c, \dots\}$ で表し (外延的記法)、変数 x を含む命題関数 $P(x)$ に対し、 $P(x)$ が真である x 全体の集合を $\{x | P(x)\}$ で表す (内包的記法)。また、集合 A の要素 x で、命題関数 $P(x)$ が真であるもの全体からなる集合を $\{x | x \in A \text{ かつ } P(x)\}$ のかわりに $\{x \in A | P(x)\}$ で表すことが多い。

記法 1.4 自然数全体からなる集合を \mathbf{N} 、整数全体からなる集合を \mathbf{Z} 、有理数全体からなる集合を \mathbf{Q} 、実数全体からなる集合を \mathbf{R} 、複素数全体からなる集合を \mathbf{C} で表す。

記法 1.5 $a, b \in \mathbf{R}$ ($a \leq b$) に対し、実数の部分集合 (a, b) , (a, ∞) , $(-\infty, b)$, $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ を $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} | a < x < b\}$, $(a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} | x > a\}$, $(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} | x < b\}$, $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\}$, $[a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} | x \geq a\}$, $(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} | x \leq b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} | a < x \leq b\}$, $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x < b\}$ で定める。これらを総称して区間と呼び、 (a, b) , (a, ∞) , $(-\infty, b)$ を开区間、 $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ を閉区間という。

定義 1.6 (1) 2つの集合 A, B はそれらの構成要素が全く同じであるとき、すなわち「 $x \in A$ ならば $x \in B$ 」と「 $x \in B$ ならば $x \in A$ 」が成り立つとき、「 A と B は等しい」といい、 $A = B$ で表す。

(2) 集合 A の要素がすべて集合 B の要素である、すなわち「 $x \in A$ ならば $x \in B$ 」が成り立つとき、 A は B の部分集合であるといい、 $A \subset B$ または $B \supset A$ で表す。 A が B の部分集合でないことを $A \not\subset B$ または $B \not\supset A$ で表す。

(3) 要素をもたない集合を空集合と呼び、 \emptyset で表す。

定義 1.7 A, B を集合とする。

(1) A, B の合併集合 (union) $A \cup B$ 、共通部分 (intersection) $A \cap B$ 、差集合 (difference) $A - B$ を次で定める。

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ または } x \in B\}, \quad A \cap B = \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B\}, \quad A - B = \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

(2) 集合 A が集合 X の部分集合であるとき $X - A$ を (X における) A の補集合といい、 A^c で表す。

(3) $x \in A, y \in B$ に対し (x, y) を x と y の順序対という。 $x, z \in A, y, w \in B$ のとき、 $x = z$ かつ $y = w$ であるときに限り、 $(x, y) = (z, w)$ と表すことにする。 A の要素と B の要素の順序対全体からなる集合 $\{(x, y) | x \in A, y \in B\}$ を A と B の直積集合と呼んで、 $A \times B$ で表す。

定義 1.8 (1) X, Y を集合として、 X の各要素に対して Y の1つの要素を対応させるとき、この対応を X から Y への写像と呼んで、 $f: X \rightarrow Y$ や $X \xrightarrow{f} Y$ など表す。このとき、 X を f の定義域という。

(2) 各 $x \in X$ に対し、写像 $f: X \rightarrow Y$ によって対応する Y の要素を $f(x)$ で表し、これを x の f による像と呼ぶ。

(3) 2つの写像 $f: X \rightarrow Y$ と $g: Z \rightarrow W$ が「等しい」とは、 $X = Z$ かつ $Y = W$ であり、すべての $x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ が成り立つことである。 f と g が等しいことを $f = g$ で表す。

定義 1.9 (1) X, Y, Z を集合、 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ を写像とする。各 $x \in X$ に対して、 $g(f(x)) \in Z$ を対応させる X から Z への写像を f と g の合成写像と呼んで $g \circ f$ で表す。

(2) X の各要素 x を x 自身に対応させる写像を X の恒等写像と呼び、 id_X または 1_X など表す。

(3) 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対し、 $g \circ f = id_X, f \circ g = id_Y$ を満たす写像 $g: Y \rightarrow X$ を f の逆写像といい、 f^{-1} で表す。

注意 1.10 (1) 写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: Z \rightarrow W$ に対し, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f, id_Y \circ f = f \circ id_X = f$ が成り立つ.

(2) $x \in X$ に対し, $id_X(x) = x$ だから, 写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ に対し, $g \circ f = id_X$ が成り立つためには, すべての $x \in X$ に対して $g(f(x)) = x$ が成り立つことが必要十分である. 故に g が f の逆写像であるためには, 「すべての $x \in X$ に対して $g(f(x)) = x$ 」かつ「すべての $y \in Y$ に対して $f(g(y)) = y$ 」が成り立つことが必要十分である.

定義 1.11 (1) 写像 $f: X \rightarrow Y$ が, 条件「 Y の各要素 c に対して, $f(x) = c$ となる $x \in X$ が存在する。」を満たすとき, f は全射 (または上への写像) であるという.

(2) 写像 $f: X \rightarrow Y$ が, 条件「 $x, y \in X$ が $f(x) = f(y)$ を満たすならば $x = y$ 。」を満たすとき, f は単射 (または 1 対 1 写像) であるという.

(3) 全射かつ単射を全単射という.

命題 1.12 写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ が与えられているとする.

(1) f と g が全射ならば, $g \circ f: X \rightarrow Z$ も全射である. (2) f と g が単射ならば, $g \circ f: X \rightarrow Z$ も単射である.

証明 (1) g は全射だから, 任意の $z \in Z$ に対して $g(y) = z$ を満たす $y \in Y$ がある. さらに f も全射だから, $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ がある. このとき $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ となるため $g \circ f$ は全射である.

(2) $x, w \in X$ が $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(w)$ を満たすとする $g(f(x)) = g(f(w))$ である. 従って, g が単射であることから, $f(x) = f(w)$ が得られる. さらに f も単射だから $x = w$ である. 故に $g \circ f$ も単射である. \square

命題 1.13 写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ が与えられているとする.

(1) $g \circ f: X \rightarrow Z$ が全射ならば, g も全射である. (2) $g \circ f: X \rightarrow Z$ が単射ならば, f も単射である.

証明 (1) $g \circ f$ は全射だから, 任意の $z \in Z$ に対して $g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z$ を満たす $x \in X$ がある. そこで, $y = f(x)$ とおけば $g(y) = z$ だから, g は全射である.

(2) $x, w \in X$ が $f(x) = f(w)$ を満たすならば $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(w)) = (g \circ f)(w)$ が成り立つ. $g \circ f$ は単射だから, $x = w$ が得られ, f も単射であることがわかる. \square

命題 1.14 (1) 写像 $f: X \rightarrow Y$ が全射で, 写像 $g, h: Y \rightarrow Z$ が $g \circ f = h \circ f$ を満たすならば $g = h$ である.

(2) 写像 $f: X \rightarrow Y$ が単射で, 写像 $g, h: W \rightarrow X$ が $f \circ g = f \circ h$ を満たすならば $g = h$ である.

証明 (1) f は全射だから任意の $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ がある. 仮定から $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = (h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(y)$ だから, 任意の $y \in Y$ に対して $g(y) = h(y)$ が成り立つため $g = h$ である.

(2) $w \in W$ に対して仮定から $f(g(w)) = (f \circ g)(w) = (f \circ h)(w) = f(h(w))$ が成り立ち, さらに f は単射だから $g(w) = h(w)$ である. 故に任意の $w \in W$ に対して $g(w) = h(w)$ が成り立つため $g = h$ である. \square

命題 1.15 写像 $f: X \rightarrow Y$ の逆写像が存在するためには, f が全単射であることが必要十分であり, f の逆写像はただ一つに限る.

証明 写像 $f: X \rightarrow Y$ の逆写像 g が存在するとき, $f \circ g = id_Y$ は全射だから命題 1.13 の (1) から f は全射である. また $g \circ f = id_X$ は単射だから命題 1.13 の (2) から f は単射である.

逆に f が全単射ならば, 任意の $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ がただ 1 つ存在するため, $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ を対応させる写像を $g: Y \rightarrow X$ とする. このとき任意の $y \in Y$ に対して $f \circ g(y) = f(g(y)) = y$ が成り立つ. さらに任意の $x \in X$ に対して $f(x) = y$ とおくと, $g(y) = x$ だから $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x$ となるため, 注意 1.10 の (2) によって g は f の逆写像である.

$g, h: Y \rightarrow X$ を f の逆写像とすれば $g \circ f = h \circ f = id_X$ であり, f は全射だから, 命題 1.14 の (1) から, $g = h$ が成り立つ. 故に f の逆写像が 2 つ存在すれば, それらは一致するため f の逆写像が存在してもただ一つだけである. \square

2 ユークリッド空間における極限

定義 2.1 n 次元数ベクトル空間 \mathbf{R}^n の 2 つのベクトル \mathbf{x}, \mathbf{y} に対し, \mathbf{x}, \mathbf{y} の第 j 成分をそれぞれ x_j, y_j とするとき, \mathbf{x} と \mathbf{y} の内積 (\mathbf{x}, \mathbf{y}) を $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ で定義する.

次の結果は内積の定義から容易に確かめられる.

命題 2.2 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n, r \in \mathbf{R}$ とするとき, 次のことが成り立つ.

- (1) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z}), (\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z})$.
- (2) $(r\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, r\mathbf{y})$.
- (3) $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$.
- (4) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ であり, $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ は $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ と同値である.

定義 2.3 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ に対し, $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ において, $\|\mathbf{x}\|$ を \mathbf{x} の長さという.

定理 2.4 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ に対し, 不等式 $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ (シュワルツの不等式) が成り立つ.

証明 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ の場合, $\|\mathbf{x}\| \neq 0$ だから, 命題 2.2 の (1), (2), (3) を用いれば, 任意の実数 t に対して

$$\begin{aligned} (\mathbf{y} - t\mathbf{x}, \mathbf{y} - t\mathbf{x}) &= (\mathbf{y} - t\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y} - t\mathbf{x}, -t\mathbf{x}) = (\mathbf{y}, \mathbf{y}) + (-t\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, -t\mathbf{x}) + (-t\mathbf{x}, -t\mathbf{x}) \\ &= \|\mathbf{y}\|^2 - 2(\mathbf{x}, \mathbf{y})t + \|\mathbf{x}\|^2 t^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \left(t - \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|^2} \right)^2 + \frac{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}{\|\mathbf{x}\|^2} \end{aligned}$$

だから $t = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|^2}$ のとき, $(\mathbf{y} - t\mathbf{x}, \mathbf{y} - t\mathbf{x})$ は最小値 $\frac{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}{\|\mathbf{x}\|^2}$ をとる. 一方, 命題 2.2 の (4) から $(\mathbf{y} - t\mathbf{x}, \mathbf{y} - t\mathbf{x}) \geq 0$ が成り立つため, この最小値は 0 以上であるから $\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \geq (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2$ が得られる.

$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の場合は $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| = 0$ となって不等式は成り立つ. □

定理 2.5 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ に対し, 不等式 $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (三角不等式) が成り立つ

証明 定理 2.4 から $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq |(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ であり, 定理 2.4 の証明で得た等式で $t = -1$ とすれば,

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$$

だから結果が得られる. □

以後, \mathbf{R}^n の点と, その点の位置ベクトルを同一視することにする. 定義 2.3 で定義したベクトルの長さを用いれば, \mathbf{R}^n における距離が, 次のように定義できる.

定義 2.6 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ に対し, $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ を \mathbf{x} と \mathbf{y} の距離という. そこで, \mathbf{R}^n の直積集合 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ を定義域として, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ に実数 $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ を対応させる関数を d_n で表して, これを \mathbf{R}^n の距離関数と呼ぶ.

命題 2.7 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$ とするとき, 次のことが成り立つ.

- (1) $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ であり, $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ は $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ と同値である.
- (2) $d_n(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.
- (3) $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d_n(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (三角不等式).

証明 (1) 命題 2.2 の (4) から明らかである.

(2) 一般に $r \in \mathbf{R}$ と $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して $\|r\mathbf{x}\| = \sqrt{(r\mathbf{x}, r\mathbf{x})} = \sqrt{r^2(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = |r| \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = |r| \|\mathbf{x}\|$ が成り立つため, $d_n(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|(-1)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\| = |-1| \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ である.

(3) 定理 2.5 から $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| = \|(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + (\mathbf{z} - \mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| = d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d_n(\mathbf{y}, \mathbf{z})$. □

各自然数 k に対して \mathbf{R}^n の点 \mathbf{x}_k を対応させる写像 $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}^n$ を \mathbf{R}^n の点列といい、 $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbf{N}}$ で表す。 \mathbf{R}^n の距離を考えることによって「限りなく近づく」という状態が数学的に表現できて、 \mathbf{R}^n の点列の収束の概念が次のように定義できる。

定義 2.8 $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ とする。任意の正の実数 ε に対し、自然数 N で、条件「 $k \geq N$ ならば $d_n(\mathbf{x}_k, \mathbf{p}) < \varepsilon$ 」を満たすものが存在するとき、 \mathbf{R}^n の点列 $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbf{N}}$ は $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ に収束するといい、このことを $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{p}$ で表す。

注意 2.9 \mathbf{R}^n の点列 $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbf{N}}$ に対し、実数列 $(d_n(\mathbf{x}_k, \mathbf{p}))_{k \in \mathbf{N}}$ を考えると、この数列はつねに 0 以上の値をとり、上の定義から、 $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbf{N}}$ が $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ に収束するためには $(d_n(\mathbf{x}_k, \mathbf{p}))_{k \in \mathbf{N}}$ が 0 に収束することが必要十分である。

例 2.10 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$ であることは次のように示される。任意の正の実数 ε に対して、 $N > \frac{1}{\varepsilon}$ を満たす自然数 N を選べば、 $k \geq N$ ならば $0 < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ だから $d_1(\frac{1}{k}, 0) < \varepsilon$ である。

実数列については、次のことが成り立つ。

命題 2.11 $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}, (b_k)_{k \in \mathbf{N}}$ をともに収束する実数列とし、 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \alpha$, $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \beta$ とする。

(1) すべての $k \in \mathbf{N}$ に対して $a_k \leq b_k$ ならば $\alpha \leq \beta$ である。

(2) 実数列 $(c_k)_{k \in \mathbf{N}}$ が、すべての $k \in \mathbf{N}$ に対して $a_k \leq c_k \leq b_k$ を満たし、 $\alpha = \beta$ ならば $(c_k)_{k \in \mathbf{N}}$ も収束して $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \alpha$ である。

証明 (1) $\alpha > \beta$ と仮定すれば自然数 N_1, N_2 で、「 $k \geq N_1$ ならば $|a_k - \alpha| < \frac{\alpha - \beta}{2}$ 」, 「 $k \geq N_2$ ならば $|b_k - \beta| < \frac{\alpha - \beta}{2}$ 」を満たすものがある。そこで N_1, N_2 の大きい方を N とすると、 $k \geq N$ ならば $-\frac{\alpha - \beta}{2} < a_k - \alpha$ かつ $b_k - \beta < \frac{\alpha - \beta}{2}$ が成り立つ。これらの不等式から $b_k < \frac{\alpha + \beta}{2} < a_k$ が得られるため、すべての $k \in \mathbf{N}$ に対して $a_k \leq b_k$ が成り立つという仮定と矛盾する。故に $\alpha \leq \beta$ である。

(2) ε を任意の正の実数とすれば、自然数 N_1, N_2 で、「 $k \geq N_1$ ならば $|a_k - \alpha| < \varepsilon$ 」, 「 $k \geq N_2$ ならば $|b_k - \alpha| < \varepsilon$ 」を満たすものがある。そこで N_1, N_2 の大きい方を N とすると、仮定からすべての自然数 k に対して $-|a_k - \alpha| \leq a_k - \alpha \leq c_k - \alpha \leq b_k - \alpha \leq |b_k - \alpha|$ が成り立つため、 $k \geq N$ ならば $|c_k - \alpha| < \varepsilon$ である。従って $(c_k)_{k \in \mathbf{N}}$ も α に収束する。□

例 2.12 $0 < r < 1$ のとき $\lim_{k \rightarrow \infty} r^k = 0$ であることは次のように示される。 $h = \frac{1}{r} - 1$ とおけば $0 < r < 1$ より $h > 0$ である。二項定理より $\frac{1}{r^k} = (1 + h)^k = 1 + kh + \sum_{i=2}^k \binom{k}{i} h^i > kh$ だから、 $0 < r^k < \frac{1}{hk}$ が任意の自然数 k に対して成り立つ。 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{hk} = 0$ だから、命題 2.11 の (2) により $\lim_{k \rightarrow \infty} r^k = 0$ である。

X, Y をそれぞれ $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ の部分集合とし、 f を X から Y への写像とする。 $\mathbf{x} \in X$ を $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ に近づけたときに $f(\mathbf{x})$ が $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^m$ に近づくことを、距離関数を用いて次のように定義できる。

定義 2.13 任意の正の実数 ε に対し、正の実数 δ で、条件「 $\mathbf{x} \in X, \mathbf{x} \neq \mathbf{p}$ かつ $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{p}) < \delta$ ならば $d_m(f(\mathbf{x}), \mathbf{q}) < \varepsilon$ 」を満たすものが存在するとき、写像 f の \mathbf{p} における極限は \mathbf{q} であるといい、これを $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{q}$ で表す。

注意 2.14 上の定義では、点 \mathbf{p} に「いくらでも近い」 X の点が存在することを暗黙のうちに仮定している。以後 \mathbf{p} における写像 f の極限を考えるときは、任意の r に対して f の定義域の点 \mathbf{x} で、 $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{p}) < r$ かつ $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$ を満たすものが存在すると仮定する。

注意 2.15 $\mathbf{x} \in X$ を $d_m(f(\mathbf{x}), \mathbf{q})$ に対応させる関数を考えれば、この関数はつねに 0 以上の値をとり、上の定義から $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{q}$ であるためには $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} d_m(f(\mathbf{x}), \mathbf{q}) = 0$ であることが必要十分である。

上の定義 2.8, 定義 2.13 では、 \mathbf{R}^n の距離関数 d_n をそのまま用いて「近づく」ということを表現したが、一旦 d_n を

用いて与えられた点の「近くの点」全体からなる集合を定義してから、定義 2.8 と定義 2.13 を言い換えてみる。

定義 2.16 $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$, $r > 0$ に対して、 \mathbf{p} からの距離が r より小さい点全体からなる集合を $B_n(\mathbf{p}; r)$ (すなわち $B_n(\mathbf{p}; r) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid d_n(\mathbf{x}, \mathbf{p}) < r\}$) で表し、これを半径 r 中心 \mathbf{p} の開球または、 \mathbf{p} の r 近傍という。

まず、定義 2.8 は次のように言い換えられる。

定義 2.17 $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ と任意の正の実数 ε に対し、自然数 N で、条件「 $k \geq N$ ならば $\mathbf{x}_k \in B_n(\mathbf{p}; \varepsilon)$ 」を満たすものが存在するとき、 \mathbf{R}^n の点列 $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbf{N}}$ は \mathbf{p} に収束するといい、このことを $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{p}$ で表す。

また、 $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^m$ とするとき、定義 2.13 は次のように言い換えられる。

定義 2.18 任意の正の実数 ε に対し、正の実数 δ で、条件「 $\mathbf{x} \in B_n(\mathbf{p}; \delta) \cap X$ かつ $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$ ならば $f(\mathbf{x}) \in B_m(\mathbf{q}; \varepsilon)$ 」を満たすものが存在するとき、写像 $f: X \rightarrow Y$ の \mathbf{p} における極限は \mathbf{q} であるといい、このことを $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{q}$ で表す。

実数値関数の極限については命題 2.11 と同様に、次のことが成り立つ。

命題 2.19 $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ とし、 f, g を \mathbf{R}^n の部分集合 X で定義された実数値関数とする。このとき、 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = \alpha$, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} g(\mathbf{x}) = \beta$ であるとする。

(1) すべての $x \in X$ に対して $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ ならば $\alpha \leq \beta$ である。

(2) X で定義された実数値関数 h が、すべての $x \in X$ に対して $f(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ を満たし、 $\alpha = \beta$ ならば極限 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} h(\mathbf{x})$ は存在して $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} h(\mathbf{x}) = \alpha$ である。

証明 (1) $\alpha > \beta$ と仮定すれば $\delta_1, \delta_2 > 0$ で、「 $\mathbf{x} \in B_n(\mathbf{p}; \delta_1) \cap X$ かつ $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$ ならば $|f(\mathbf{x}) - \alpha| < \frac{\alpha - \beta}{2}$ 」, 「 $\mathbf{x} \in B_n(\mathbf{p}; \delta_2) \cap X$ かつ $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$ ならば $|g(\mathbf{x}) - \beta| < \frac{\alpha - \beta}{2}$ 」を満たすものがある。そこで δ_1, δ_2 の小さい方を δ とすると、 $\mathbf{x} \in B_n(\mathbf{p}; \delta) \cap X$ かつ $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$ ならば $-\frac{\alpha - \beta}{2} < f(\mathbf{x}) - \alpha$ かつ $g(\mathbf{x}) - \beta < \frac{\alpha - \beta}{2}$ が成り立つ。これらの不等式から、 $\mathbf{x} \in B_n(\mathbf{p}; \delta) \cap X$ かつ $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$ ならば $g(\mathbf{x}) < \frac{\alpha + \beta}{2} < f(\mathbf{x})$ が成り立つため、すべての $\mathbf{x} \in X$ に対して $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ が成り立つという仮定と矛盾する。故に $\alpha \leq \beta$ である。

(2) ε を任意の正の実数とすれば、自然数 δ_1, δ_2 で、「 $\mathbf{x} \in B_n(\mathbf{p}; \delta_1) \cap X$ かつ $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$ ならば $|f(\mathbf{x}) - \alpha| < \varepsilon$ 」, 「 $\mathbf{x} \in B_n(\mathbf{p}; \delta_2) \cap X$ かつ $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$ ならば $|g(\mathbf{x}) - \alpha| < \varepsilon$ 」を満たすものがある。仮定からすべての $\mathbf{x} \in X$ に対して $-|f(\mathbf{x}) - \alpha| \leq f(\mathbf{x}) - \alpha \leq h(\mathbf{x}) - \alpha \leq g(\mathbf{x}) - \alpha \leq |g(\mathbf{x}) - \alpha|$ が成り立つため、 δ_1 と δ_2 の小さい方を δ とすると $\mathbf{x} \in B_n(\mathbf{p}; \delta) \cap X$ かつ $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$ ならば $|h(\mathbf{x}) - \alpha| < \varepsilon$ である。従って $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} h(\mathbf{x}) = \alpha$ である。□

ユークリッド空間の点列の極限に関して次の結果が成り立つ。

命題 2.20 $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbf{N}}$, $(\mathbf{y}_k)_{k \in \mathbf{N}}$ を \mathbf{R}^n の点列, $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ を実数列とする。 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{p}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_k = \mathbf{q}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = c$ であるとき、次の等式が成り立つ。

$$(1) \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k) = \mathbf{p} + \mathbf{q} \quad (2) \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \mathbf{x}_k = c\mathbf{p}$$

証明 (1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $N_1, N_2 \in \mathbf{N}$ で、「 $k \geq N_1$ ならば $\mathbf{x}_k \in B_n(\mathbf{p}; \frac{\varepsilon}{2})$ 」, 「 $k \geq N_2$ ならば $\mathbf{y}_k \in B_n(\mathbf{q}; \frac{\varepsilon}{2})$ 」を満たすものがある。 N_1, N_2 の大きい方を N とするとき、 $k \geq N$ ならば $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ かつ $\|\mathbf{y}_k - \mathbf{q}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つため、定理 2.5 を用いると

$d_n(\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k, \mathbf{p} + \mathbf{q}) = \|(\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k) - (\mathbf{p} + \mathbf{q})\| = \|(\mathbf{x}_k - \mathbf{p}) + (\mathbf{y}_k - \mathbf{q})\| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}\| + \|\mathbf{y}_k - \mathbf{q}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ である。従って、このとき $\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k \in B_n(\mathbf{p} + \mathbf{q}; \varepsilon)$ が成り立つため、(1) が示された。

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $N_1, N_2 \in \mathbf{N}$ で、条件「 $k \geq N_1$ ならば $\mathbf{x}_k \in B_n(\mathbf{p}; \min\{\frac{\varepsilon}{2(1+|c|)}, 1\})$ 」, 「 $k \geq N_2$ ならば $a_k \in B_n(c; \frac{\varepsilon}{2(1+|c|)})$ 」を満たすものがある。 N_1, N_2 の大きい方を N とするとき、 $k \geq N$ ならば $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}\| < \frac{\varepsilon}{2(1+|c|)}$,

$|a_k - c| < \frac{\varepsilon}{2(1+\|\mathbf{p}\|)}$ かつ $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}\| < 1$ が成り立つ。このとき、 $\|\mathbf{x}_k\| = \|(\mathbf{x}_k - \mathbf{p}) + \mathbf{p}\| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}\| + \|\mathbf{p}\| < 1 + \|\mathbf{p}\|$ が成り立つことに注意すれば $k \geq N$ ならば

$$\begin{aligned} d_n(a_k \mathbf{x}_k, c\mathbf{p}) &= \|a_k \mathbf{x}_k - c\mathbf{p}\| = \|a_k \mathbf{x}_k - c\mathbf{x}_k + c\mathbf{x}_k - c\mathbf{p}\| = \|(a_k - c)\mathbf{x}_k + c(\mathbf{x}_k - \mathbf{p})\| \\ &\leq \|(a_k - c)\mathbf{x}_k\| + \|c(\mathbf{x}_k - \mathbf{p})\| = |a_k - c|\|\mathbf{x}_k\| + |c|\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}\| < \frac{\varepsilon(1+\|\mathbf{p}\|)}{2(1+\|\mathbf{p}\|)} + \frac{\varepsilon|c|}{2(1+|c|)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

である。従って $k \geq N$ ならば $a_k \mathbf{x}_k \in B_n(c\mathbf{p}; \varepsilon)$ が成り立つため、(2) が示された。 \square

注意 2.21 上の命題で、とくに $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ がつねに c を値にとる実数列の場合を考えると、(2) の特別な場合として、 $\lim_{k \rightarrow \infty} c\mathbf{x}_k = c\mathbf{p}$ が成り立つことに注意する。

写像の極限に関して次の結果が成り立つ。

命題 2.22 $X \subset \mathbf{R}^n$, $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ とし、写像 $f, g : X \rightarrow \mathbf{R}^m$ は $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{q}$, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{r}$ を満たし、関数 $s : X \rightarrow \mathbf{R}$ は $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} s(\mathbf{x}) = c$ を満たすとする。このとき、次の等式が成り立つ。

$$(1) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) = \mathbf{q} + \mathbf{r} \quad (2) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} s(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) = c\mathbf{q}$$

証明 (1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\delta_1, \delta_2 > 0$ で、「 $\mathbf{x} \in B_n(\mathbf{p}; \delta_1) \cap X$ かつ $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$ ならば $f(\mathbf{x}) \in B_m(\mathbf{q}; \frac{\varepsilon}{2})$ 」, 「 $\mathbf{x} \in B_n(\mathbf{p}; \delta_2) \cap X$ かつ $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$ ならば $g(\mathbf{x}) \in B_m(\mathbf{r}; \frac{\varepsilon}{2})$ 」を満たすものがある。 δ_1, δ_2 の小さい方を δ とするとき、 $\mathbf{x} \in B_n(\mathbf{p}; \delta) \cap X$ かつ $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$ ならば $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{q}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ かつ $\|g(\mathbf{x}) - \mathbf{r}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つため、定理 2.5 を用いると $d_m(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}), \mathbf{q} + \mathbf{r}) = \|(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) - (\mathbf{q} + \mathbf{r})\| = \|(f(\mathbf{x}) - \mathbf{q}) + (g(\mathbf{x}) - \mathbf{r})\| \leq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{q}\| + \|g(\mathbf{x}) - \mathbf{r}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ である。従って、このとき $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \in B_m(\mathbf{q} + \mathbf{r}; \varepsilon)$ が成り立つため、(1) が示された。

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\delta_1, \delta_2 > 0$ で、「 $\mathbf{x} \in B_n(\mathbf{p}; \delta_1) \cap X$ かつ $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$ ならば $f(\mathbf{x}) \in B_m(\mathbf{q}; \min\{\frac{\varepsilon}{2(1+|c|)}, 1\})$ 」, 「 $\mathbf{x} \in B_n(\mathbf{p}; \delta_2) \cap X$ かつ $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$ ならば $s(\mathbf{x}) \in B_1(c; \frac{\varepsilon}{2(1+\|\mathbf{q}\|)})$ 」を満たすものがある。 δ_1, δ_2 のうちの小さい方を δ とするとき、 $\mathbf{x} \in B_n(\mathbf{p}; \delta) \cap X$ かつ $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$ ならば $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{q}\| < \frac{\varepsilon}{2(1+|c|)}$, $|s(\mathbf{x}) - c| < \frac{\varepsilon}{2(1+\|\mathbf{q}\|)}$ かつ $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{q}\| < 1$ が成り立つ。このとき、 $\|f(\mathbf{x})\| = \|(f(\mathbf{x}) - \mathbf{q}) + \mathbf{q}\| \leq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{q}\| + \|\mathbf{q}\| < 1 + \|\mathbf{q}\|$ が成り立つことに注意すれば $d_m(s(\mathbf{x})f(\mathbf{x}), c\mathbf{q}) = \|s(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) - c\mathbf{q}\| = \|s(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) - cf(\mathbf{x}) + cf(\mathbf{x}) - c\mathbf{q}\| = \|(s(\mathbf{x}) - c)f(\mathbf{x}) + c(f(\mathbf{x}) - \mathbf{q})\| \leq |s(\mathbf{x}) - c|\|f(\mathbf{x})\| + |c|\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{q}\| < \frac{\varepsilon(1+\|\mathbf{q}\|)}{2(1+\|\mathbf{q}\|)} + \frac{\varepsilon|c|}{2(1+|c|)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ である。従って $\mathbf{x} \in B_n(\mathbf{p}; \delta) \cap X$ かつ $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$ ならば $s(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) \in B_m(c\mathbf{q}; \varepsilon)$ が成り立つため、(2) が示された。 \square

注意 2.23 上の命題で、とくに s がつねに c を値にとる定数値関数の場合を考えると、(2) の特別な場合として、 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} cf(\mathbf{x}) = c\mathbf{q}$ が成り立つことに注意する。

補題 2.24 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ の第 j 成分を x_j とするとき、 $|x_j| \leq \|\mathbf{x}\| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ が成り立つ。

証明 $x_j^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|\mathbf{x}\|^2$ だから、この両辺の正の平方根をとれば $|x_j| \leq \|\mathbf{x}\|$ が得られる。

また $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i||x_j| = (|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)^2$ だから、この両辺の正の平方根をとれば $\|\mathbf{x}\| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ が得られる。 \square

命題 2.25 $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbf{N}}$ を \mathbf{R}^n の点列とし、 $k \in \mathbf{N}$ に対して \mathbf{x}_k の第 j 成分を x_{kj} とする。 $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ の第 j 成分を p_j とすれば、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{p}$ が成り立つためには、すべての $j = 1, 2, \dots, n$ に対して $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{kj} = p_j$ が成り立つことが必要十分である。

証明 補題 2.24 の \mathbf{x} に $\mathbf{x}_k - \mathbf{p}$ を代入すれば $|x_{kj} - p_j| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}\| \leq \sum_{i=1}^n |x_{ki} - p_i|$ が成り立つ。

$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{p}$ ならば $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}\| = 0$ だから、 $0 \leq |x_{kj} - p_j| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}\|$ と命題 2.11 より、すべての $j = 1, 2, \dots, n$ に対して $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_{kj} - p_j| = 0$ である。従って $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{kj} = p_j$ である。逆にすべての $j = 1, 2, \dots, n$ に

対して $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{kj} = p_j$ ならば $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_{kj} - p_j| = 0$ だから命題 2.20 の (1) により $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n |x_{kj} - p_j| = 0$ である. 故に $0 \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}\| \leq \sum_{i=1}^n |x_{ki} - p_i|$ と命題 2.11 から $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}\| = 0$ が得られるため, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{p}$ が成り立つ. \square

$X \subset \mathbf{R}^n, Y \subset \mathbf{R}^m$ とし, 写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられているとする. $\mathbf{x} \in X$ に対し, $f(\mathbf{x}) \in Y$ の第 i 成分を $f_i(\mathbf{x})$ で表して \mathbf{x} を $f_i(\mathbf{x})$ に対応させることによって, 関数 $f_i: X \rightarrow \mathbf{R}$ が定まる.

命題 2.26 $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^m$ の第 j 成分を q_j とすれば, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{q}$ が成り立つためには, すべての $j = 1, 2, \dots, m$ に対して $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} f_j(\mathbf{x}) = q_j$ が成り立つことが必要十分である.

証明 補題 2.24 の \mathbf{x} に $f(\mathbf{x}) - \mathbf{q}$ を代入すれば $|f_j(\mathbf{x}) - q_j| \leq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{q}\| \leq \sum_{i=1}^m |f_i(\mathbf{x}) - q_i|$ が成り立つ.

$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{q}$ ならば $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{q}\| = 0$ だから, $0 \leq |f_j(\mathbf{x}) - q_j| \leq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{q}\|$ と命題 2.19 より, すべての $j = 1, 2, \dots, m$ に対して $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} |f_j(\mathbf{x}) - q_j| = 0$ である. 従って $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} f_j(\mathbf{x}) = q_j$ である. 逆にすべての $j = 1, 2, \dots, m$

に対して $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} f_j(\mathbf{x}) = q_j$ ならば $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} |f_j(\mathbf{x}) - q_j| = 0$ だから命題 2.22 の (1) より $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} \sum_{j=1}^m |f_j(\mathbf{x}) - q_j| = 0$ である.

故に $0 \leq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{q}\| \leq \sum_{j=1}^m |f_j(\mathbf{x}) - q_j|$ と命題 2.19 から $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{q}\| = 0$ だから, $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{q}$ が成り立つ. \square

3 距離空間の定義と例

定義 3.1 集合 X に対し, X の直積集合 $X \times X$ で定義された実数値関数 $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ で, 任意の $x, y, z \in X$ に対して次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすものを X の距離関数という. 距離関数 d が与えられた集合 X を距離空間といい, (X, d) で表す. なお, 距離関数 d を明示する必要がない場合は, (X, d) を X で表すことが多い.

(i) $d(x, y) \geq 0$ であり, $d(x, y) = 0$ となるのは, $x = y$ の場合に限る.

(ii) $d(y, x) = d(x, y)$.

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式).

以下の例 3.2, 例 3.3 では p を 1 以上の実数または $p = \infty$ とする.

例 3.2 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ に対し, 実数 $\|\mathbf{x}\|_p$ を p が 1 以上の実数の場合は $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p = \infty$ の場合は $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$ で定めて $d_p: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ を $d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_p$ で定義する. このとき d_p が \mathbf{R}^n の距離関数になることを示す. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して $d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ であり, $d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ となるのは, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ の場合に限ること, $d_p(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が成り立つことは d_p の定義から明らかである. $1 < p < \infty$ の場合に $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$ に対して $d_p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d_p(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ が成り立つことを以下で示す.

(i) $\alpha, \beta \geq 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ならば $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$ が成り立つことを示す.

関数 $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ を $f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} - \beta x$ で定めれば $f'(x) = x^{p-1} - \beta$ で, $p > 1$ より f は区間 $[0, \beta^{\frac{1}{p-1}}]$ で単調に減少し, 区間 $[\beta^{\frac{1}{p-1}}, \infty)$ で単調に増加する. 従って $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ に注意すれば, f は $\beta^{\frac{1}{p-1}}$ において最小値

$$f(\beta^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{\beta^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{\beta^q}{q} - \beta\beta^{\frac{1}{p-1}} = \frac{\beta^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \beta^{\frac{p}{p-1}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) - \beta^{\frac{p}{p-1}} = 0$$

をとる. 従って $\alpha \geq 0$ に対して $\frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} - \alpha\beta = f(\alpha) \geq f(\beta^{\frac{1}{p-1}}) = 0$ が成り立つ.

(ii) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ならば $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ に対し, $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q$ が成り立つことを示す.

$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ または $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ならば上の不等式は両辺が 0 になって成立する. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ のとき $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \neq 0$, $\|\mathbf{y}\|_q = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \neq 0$ だから, $\alpha = \frac{|x_i|}{\|\mathbf{x}\|_p}, \beta = \frac{|y_i|}{\|\mathbf{y}\|_q}$ を (i) の不等式に代入すれば

$$\frac{|x_i y_i|}{\|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q} \leq \frac{|x_i|^p}{p \|\mathbf{x}\|_p^p} + \frac{|y_i|^q}{q \|\mathbf{y}\|_q^q} = \frac{|x_i|^p}{p \sum_{i=1}^n |x_i|^p} + \frac{|y_i|^q}{q \sum_{i=1}^n |y_i|^q}$$

が得られる. この不等式の両辺を $i = 1, 2, \dots, n$ について加えれば

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i y_i|}{\|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q} \leq \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{p \sum_{i=1}^n |x_i|^p} + \frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}{q \sum_{i=1}^n |y_i|^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

が得られるため, 両辺に $\|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q$ をかければ $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q$ が得られる.

(iii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p$ が成り立つことを示す.

$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$ の両辺に $|x_i + y_i|^{p-1}$ をかけて得られる $|x_i + y_i|^p \leq |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$ の両辺を $i = 1, 2, \dots, n$ について加えれば $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \dots (*)$ が得られる. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たす q をとれば $q = \frac{p}{p-1}$ だから, (ii) の不等式の y_i に $|x_i + y_i|^{p-1}$ を代入すると次の不等式が得られる.

$$\sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \|\mathbf{x}\|_p \left(\sum_{i=1}^n (|x_i + y_i|^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|\mathbf{x}\|_p \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} = \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^{p-1}$$

同様に (ii) の不等式の x_i に $|x_i + y_i|^{p-1}$ を代入すれば $\sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \|\mathbf{y}\|_p \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^{p-1}$ が得られるため, これらの不等式と (*) から $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^p \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^{p-1} + \|\mathbf{y}\|_p \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^{p-1}$ が成り立つ. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$ ならば (iii) の不等式は成り立つため, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ と仮定すれば $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p \neq 0$ だから, 上の不等式の両辺を $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^{p-1}$ で割って $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p$ を得る.

$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_p$ であることに注意すれば (iii) の不等式から, 次が成り立つ.

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_p = \|(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{z})\|_p \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_p + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_p = d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d_p(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

例 3.3 $a, b \in \mathbf{R} (a < b)$ に対し, 区間 $[a, b]$ の実数値連続関数全体の集合を $C[a, b]$ で表す. $f \in C[a, b]$ に対して p が 1 以上の実数の場合は $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ とおき, $p = \infty$ の場合は $x \in [a, b]$ を $|f(x)|$ に対応させる $[a, b]$ 上の関数の最大値を $\|f\|_\infty$ とおく. $d_p: C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ を $d_p(f, g) = \|f - g\|_p$ により定義すると, d_p は $C[a, b]$ の距離関数になることを示す. 実際, $f, g \in C[a, b]$ に対して $d_p(f, g) \geq 0, d_p(f, f) = 0$ と $d_p(g, f) = d_p(f, g)$ が成り立つことは d_p の定義から明らかである. また「 $d_\infty(f, g) = 0$ ならば $f = g$ 」であることも d_∞ の定義から明らかである. $1 \leq p < \infty$ の場合に「 $d_p(f, g) = 0$ ならば $f = g$ 」が成り立つことと, $1 < p < \infty$ の場合に $f, g, h \in C[a, b]$ に対して $d_p(f, h) \leq d_p(f, g) + d_p(g, h)$ が成り立つことを以下で示す. $[a, b]$ においてつねに値が 0 である定数値関数も 0 で表す.

(i) $1 \leq p < \infty$ の場合に「 $d_p(f, g) = 0$ ならば $f = g$ 」が成り立つことを示す.

命題「 $\int_a^b \varphi(x) dx = 0$ かつ “ $x \in [a, b]$ ならば $\varphi(x) \geq 0$ ” を満たす $\varphi \in C[a, b]$ は $\varphi = 0$ に限る。」をまず示す.

$\varphi(c) \neq 0$ となる $c \in [a, b]$ が存在すれば, 仮定から $\varphi(c) > 0$ である. $\varepsilon = \frac{\varphi(c)}{2}$ とおけば $\varepsilon > 0$ で, φ の c における連続性から $\delta > 0$ で条件「 $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$ ならば $\varphi(x) \in (\varphi(c) - \varepsilon, \varphi(c) + \varepsilon)$ 」を満たすものがある. $\varphi(c) = 2\varepsilon$ より $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$ ならば $\varphi(x) \in (\varepsilon, 3\varepsilon)$ だから, $\varphi(x) > \varepsilon$ である. $c > a$ の場合,

$\max\{c - \delta, a\} < d < c$ を満たす d を選べば $[d, c] \subset (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$ だから $x \in [d, c]$ ならば $\varphi(x) > \varepsilon$ である。従って $x \in [a, b]$ ならば $\varphi(x) \geq 0$ であることから $\int_a^d \varphi(x) dx \geq 0$, $\int_c^b \varphi(x) dx \geq 0$ であることに注意すれば $\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^d \varphi(x) dx + \int_d^c \varphi(x) dx + \int_c^b \varphi(x) dx \geq \int_d^c \varphi(x) dx \geq \int_d^c \varepsilon dx = \varepsilon(c - d) > 0$ が得られて仮定と矛盾する。 $c < b$ の場合は $c < d < \min\{c + \delta, b\}$ を満たす d を選べば $[c, d] \subset (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$ だから $x \in [c, d]$ ならば $\varphi(x) > \varepsilon$ である。従って $x \in [a, b]$ ならば $\varphi(x) \geq 0$ であることから $\int_a^c \varphi(x) dx \geq 0$, $\int_d^b \varphi(x) dx \geq 0$ であることに注意すれば $\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^c \varphi(x) dx + \int_c^d \varphi(x) dx + \int_d^b \varphi(x) dx \geq \int_c^d \varphi(x) dx \geq \int_c^d \varepsilon dx = \varepsilon(d - c) > 0$ が得られて仮定と矛盾する。以上から主張は示された。

$f, g \in C[a, b]$ が $d_p(f, g) = 0$ を満たすとき, $\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx = 0$ だから $\varphi(x) = |f(x) - g(x)|^p$ によって $\varphi \in C[a, b]$ を定めれば φ は上で示した命題の条件を満たすため, $\varphi = 0$ である。従って, $f = g$ である。

(ii) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ならば $f, g \in C[a, b]$ に対し, $\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$ が成り立つことを示す。
 $f = 0$ または $g = 0$ ならば上の不等式は両辺が 0 になって成立する。 $f, g \neq 0$ のとき (i) の結果から $\|f\|_p \neq 0$, $\|g\|_q \neq 0$ だから, $x \in [a, b]$ に対し $\alpha = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$, $\beta = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$ を例 3.2 の (i) の不等式に代入すれば

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p \|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q \|g\|_q^q} = \frac{|f(x)|^p}{p \int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{|g(x)|^q}{q \int_a^b |g(x)|^q dx}$$

が得られる。この不等式の両辺を x について a から b まで積分すれば

$$\frac{\int_a^b |f(x)g(x)| dx}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{\int_a^b |f(x)|^p dx}{p \int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{\int_a^b |g(x)|^q dx}{q \int_a^b |g(x)|^q dx} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

が得られるため, 両辺に $\|f\|_p \|g\|_q$ をかければ $\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$ が得られる。

(iii) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ が成り立つことを示す。

$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ の両辺に $|f(x) + g(x)|^{p-1}$ をかけて得られる

$$|f(x) + g(x)|^p \leq |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1}$$

の両辺を x について a から b まで積分すれば

$$\|f + g\|_p^p = \int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \leq \int_a^b |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} dx + \int_a^b |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} dx \dots (**)$$

が得られる。 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たす q をとれば $q = \frac{p}{p-1}$ だから, (ii) の不等式の $g(x)$ に $|f(x) + g(x)|^{p-1}$ を代入すると, 次の不等式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} dx &\leq \|f\|_p \left(\int_a^b (|f(x) + g(x)|^{p-1})^q dx \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \|f\|_p \|f + g\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

同様に (ii) の不等式の $f(x)$ に $|f(x) + g(x)|^{p-1}$ を代入すれば $\int_a^b |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} dx \leq \|g\|_p \|f + g\|_p^{p-1}$ が得られるため, これらの不等式と (**) から $\|f + g\|_p^p \leq \|f\|_p \|f + g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \|f + g\|_p^{p-1}$ が成り立つ。 $f + g = 0$ ならば (iii) の不等式は成り立つため, $f + g \neq 0$ と仮定すれば $\|f + g\|_p \neq 0$ だから, 上の不等式の両辺を $\|f + g\|_p^{p-1}$ で割って $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ を得る。

$d_p(f, g) = \|f - g\|_p$ であることに注意すれば (iii) の不等式から、次が成り立つ。

$$d_p(f, h) = \|f - h\|_p = \|(f - g) + (g - h)\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - h\|_p = d_p(f, g) + d_p(g, h)$$

例 3.4 p を与えられた素数とし, a を $0 < a < 1$ を満たす実数の定数とする. $x \in \mathbf{Q} - \{0\}$ に対して $x = \frac{m}{n}p^{l_x}$ (ただし, m, n は p で割れない整数で, l_x は整数) を満たす整数 l_x は一通りに定まるため, 関数 $\nu_p: \mathbf{Q} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ を $\nu_p(x) = a^{l_x}$ で定義することができる. そこで, 関数 $d_p: \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$ を $d_p(x, y) = \begin{cases} \nu_p(x - y) & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$ で定めると d_p は \mathbf{Q} の距離関数である.

例 3.5 虚部が正の実数である複素数全体からなる集合を \mathbf{H} で表す. $d_{\mathbf{H}}(z, w) = \log \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}$ によって関数 $d_{\mathbf{H}}: \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{R}$ を定義すれば, $d_{\mathbf{H}}$ は \mathbf{H} の距離関数である.

4 距離空間の性質

距離空間には, 定義 2.16 と同様に開球の概念を定義できる.

定義 4.1 $p \in X, r > 0$ に対して, p からの距離が r より小さい点全体からなる集合を $B_d(p; r)$ (すなわち $B_d(p; r) = \{x \in X \mid d(x, p) < r\}$ で表し, これを半径 r 中心 p の開球または p の r 近傍という.

開球を用いて, 距離空間の部分集合から定まる集合が定義できる.

定義 4.2 (X, d) を距離空間, A を X の部分集合, $p \in X$ とする.

(1) 正の実数 r で, $B_d(p; r) \subset A$ を満たすものがあるとき, p を A の内点という. A の内点全体からなる集合を A の内部といい, A^i で表す.

(2) 正の実数 r で, $B_d(p; r) \cap A = \emptyset$ を満たすものがあるとき, p を A の外点という. A の外点全体からなる集合を A の外部といい, A^e で表す.

(3) 任意の正の実数 r に対して $B_d(p; r) \cap A \neq \emptyset$ であるとき, p を A の触点という. A の触点全体からなる集合を A の閉包といい, \bar{A} で表す.

(4) 任意の正の実数 r に対して $B_d(p; r) \cap A \neq \emptyset$ かつ $B_d(p; r) \not\subset A$ であるとき, p を A の境界点という. A の境界点全体からなる集合を A の境界といい, ∂A で表す.

注意 4.3 (1) $B_d(p; r) \cap A = \emptyset$ は $B_d(p; r) \subset X - A$ と同値だから, p が A の外点であることと p が $X - A$ の内点であることは同値である. 従って $A^e = (X - A)^i$ である.

(2) $B_d(p; r) \not\subset A$ は $B_d(p; r) \cap (X - A) \neq \emptyset$ と同値だから, p が A の境界点であることと p が A と $X - A$ の両方の触点であることは同値である. 従って $\partial A = \bar{A} \cap \overline{X - A}$ であり, この等式から $\partial(X - A) = \partial A$ が得られる.

(3) $p \in B_d(p; r)$ だから $B_d(p; r) \subset A$ ならば $p \in A$ であり, $p \in A$ ならば任意の $r > 0$ に対して $p \in B_d(p; r) \cap A$ だから $p \in \bar{A}$ である. また, $B_d(p; r) \cap A = \emptyset$ ならば $p \notin A$ である. 従って $A^i \subset A \subset \bar{A}$, $A^e \cap A = \emptyset$ である.

(4) p が A の内点でも外点ないことと, p が定義 4.2 の (4) の条件を満たすことと同値だから, $\partial A = X - (A^i \cup A^e)$ である. 従って $X = A^i \cup A^e \cup \partial A$ と $A^i \cap \partial A = A^e \cap \partial A = \emptyset$ が成り立つ. ((3) から $A^i \cap A^e = \emptyset$ も成り立つ.)

命題 4.4 (X, d) を距離空間, A を X の部分集合とすれば, $\bar{A} = A^i \cup \partial A$, $\overline{X - A} = X - A^i$ が成り立つ.

証明 定義 4.2 の (3) と (4) から, 境界点は触点だから $\partial A \subset \bar{A}$ であり, 注意 4.3 の (3) から $A^i \subset \bar{A}$ だから $A^i \cup \partial A \subset \bar{A}$ である. $p \in \bar{A}$ かつ $p \notin A^i$ ならば任意の $r > 0$ に対して $B_d(p; r) \cap A \neq \emptyset$ かつ $B_d(p; r) \not\subset A$ が成り立つため $p \in \partial A$ である. 故に $\bar{A} \subset A^i \cup \partial A$ も成り立つため, $\bar{A} = A^i \cup \partial A$ である.

$B_d(p; r) \cap (X - A) \neq \emptyset$ は $B_d(p; r) \not\subset A$ と同値だから $p \in \overline{X - A}$ は条件「任意の $r > 0$ に対して $B_d(p; r) \not\subset A$ 」

と同値である. この条件は $p \in A^i$ であるための定義 4.2 の (1) の条件の否定だから, $p \in \overline{X - A}$ は $p \in X - A^i$ と同値である. 従って $\overline{X - A} = X - A^i$ が成り立つ. \square

距離空間における点列の収束と写像の極限と深く関わっている開集合, 閉集合と呼ばれる概念を定義する.

定義 4.5 (X, d) を距離空間, A を X の部分集合とする. A の点がすべて内点であるとき, A を X の開集合といい, A の触点がすべて A に属するとき, A を X の閉集合という.

注意 4.6 (1) 注意 4.3 の (3) の 1 つめの式から, A が開集合であるためには, $A^i = A$ であることが必要十分であり, A が閉集合であるためには, $\overline{A} = A$ であることが必要十分である.

(2) A が空集合の場合も, 命題「 $p \in A$ ならば p は A の内点である。」は真だから空集合も開集合である. またこのとき, A の触点は存在しないので, 命題「 A の触点がすべて A に属する。」も真であるため, 空集合も閉集合である.

命題 4.7 (X, d) を距離空間, A を X の部分集合とすれば次の 3 つは同値である.

(i) A は閉集合である. (ii) $X - A$ は開集合である. (iii) $\partial A \subset A$

証明 $A = X - (X - A)$ だから命題 4.4 の 2 つ目の等式から $\overline{A} = \overline{X - (X - A)} = X - (X - A)^i$ である. 従って $\overline{A} = A$ は $X - (X - A)^i = A = X - (X - A)$ と同値である. $X - (X - A)^i = X - (X - A)$ の両辺の補集合を考えれば $(X - A)^i = X - A$ が得られるため, $\overline{A} = A$ は $(X - A)^i = X - A$ と同値である. 故に注意 4.6 の (1) から (i) と (ii) は同値である. A が閉集合ならば注意 4.6 の (1) と命題 4.4 の最初の等式から $A = \overline{A} = A^i \cup \partial A \supset \partial A$ である. 逆に $\partial A \subset A$ ならば命題 4.4 の最初の等式と注意 4.3 の (3) から $\overline{A} = A^i \cup \partial A \subset A \subset \overline{A}$ だから $\overline{A} = A$ が成り立つため, A は閉集合である. \square

命題 4.8 距離空間 (X, d) に関する条件「 $p, q \in X$ と $r, s > 0$ に対し, $r + s > d(p, q)$ ならば $B_d(p; r) \cap B_d(q; s) \neq \emptyset$ 」を C とする. (ユークリッド空間 (\mathbf{R}^n, d_n) はこの条件 C を満たす.)

(1) $B_d(p; r)$ は X の開集合, 従って $B_d(p; r)^i = B_d(p; r)$ である.

(2) $B_d(p; r)^e \supset \{x \in X \mid d(x, p) > r\}$ であり, (X, d) が C を満たせば, $B_d(p; r)^e = \{x \in X \mid d(x, p) > r\}$ である.

(3) $\partial B_d(p; r) \subset \{x \in X \mid d(x, p) = r\}$ であり, (X, d) が C を満たせば, $\partial B_d(p; r) = \{x \in X \mid d(x, p) = r\}$ である.

証明 (1) $q \in B_d(p; r)$ ならば $d(p, q) < r$ であり, 任意の $x \in B_d(q; r - d(p, q))$ は $d(q, x) < r - d(p, q)$ と定義 3.1 の (iii) より $d(p, x) \leq d(p, q) + d(q, x) < r$ を満たし, $x \in B_d(p; r)$ となるため, $B_d(q; r - d(p, q)) \subset B_d(p; r)$ である. よって $B_d(p; r)$ のすべての点は内点だから $B_d(p; r)$ は X の開集合である.

(2) $q \in X$ が $d(p, q) > r$ かつ $B_d(q; d(p, q) - r) \cap B_d(p; r) \neq \emptyset$ を満たすならば $x \in B_d(q; d(p, q) - r) \cap B_d(p; r)$ が存在するので, $d(q, x) < d(p, q) - r$ かつ $d(p, x) < r$ が成り立つ. 定義 3.1 の (ii), (iii) より $d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q) = d(p, x) + d(q, x)$ だから上の二つの不等式を用いると $d(q, x) \geq d(p, q) - d(p, x) > d(q, x) + r - d(p, x) > d(q, x)$ となって矛盾が生じる. 故に $B_d(q; d(p, q) - r) \cap B_d(p; r) = \emptyset$ で, この等式は $B_d(q; d(p, q) - r) \subset X - B_d(p; r)$ と同値だから q は $X - B_d(p; r)$ の内点になり $q \in B_d(p; r)^e$ を得る. 従って $\{x \in X \mid d(x, p) > r\} \subset B_d(p; r)^e$ である.

条件 C を仮定して, $q \in B_d(p; r)^e$ とすれば, $s > 0$ で $B_d(p; r) \cap B_d(q; s) = \emptyset$ を満たすものが存在するため, 条件 C の対偶から $r + s \leq d(p, q)$ が成り立つ. 故に $r \leq d(p, q) - s < d(p, q)$ だから $q \in \{x \in X \mid d(x, p) > r\}$ となるため, $B_d(p; r)^e = \{x \in X \mid d(x, p) > r\}$ である.

(3) 注意 4.3 の (4) から $\partial B_d(p; r) = X - (B_d(p; r)^i \cup B_d(p; r)^e)$ だから (1) と (2) の結果から $q \in \partial B_d(p; r)$ ならば $d(x, p) = r$ である. 故に $\partial B_d(p; r) \subset \{x \in X \mid d(x, p) = r\}$ である.

条件 C を仮定すれば (2) より $B_d(p; r)^e = \{x \in X \mid d(x, p) > r\}$ で, (1) より $B_d(p; r)^i = \{x \in X \mid d(x, p) < r\}$ だから $\partial B_d(p; r) = X - (B_d(p; r)^i \cup B_d(p; r)^e)$ から $\partial B_d(p; r) = \{x \in X \mid d(x, p) = r\}$ である. \square

距離空間における点列の収束や, 距離空間の間の写像の極限がユークリッド空間の場合 (定義 2.17, 定義 2.18) と全

く同様に定義できる.

定義 4.9 $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ を X の点列とする. 任意の正の実数 ε に対し, 自然数 N で, 条件「 $k \geq N$ ならば $x_k \in B_d(p; \varepsilon)$ 」を満たすものが存在するとき, $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ は $p \in X$ に収束するといひ, このことを $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = p$ で表す.

注意 4.10 (1) 上の定義をさらに言い換えると, $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ が $p \in X$ に収束するという事は, 任意の正の実数 ε に対して, $x_k \notin B_d(p; \varepsilon)$ であるような自然数 k は有限個しかないということである. 従って, X の点列 $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ が $p \in X$ に収束しないということは, 正の実数 ε_0 で, 条件「 $x_k \notin B_d(p; \varepsilon_0)$ である自然数 k が無限に存在する。」を満たすものがあることである.

(2) X の点列 $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ に対し, 実数列 $(d(x_k, p))_{k \in \mathbf{N}}$ を考えると, この数列はつねに 0 以上の値をとり, 上の定義から, $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ が p に収束するためには $(d(x_k, p))_{k \in \mathbf{N}}$ が 0 に収束することが必要十分である.

定義 4.11 $(X, d), (Y, d')$ を距離空間とし, X の部分集合 Z, Y の部分集合 W と写像 $f: Z \rightarrow W$ が与えられているとする. $p \in X, q \in Y$ とし, 任意の正の実数 ε に対し, 正の実数 δ で, 条件「 $x \in B_d(p; \delta) \cap Z$ かつ $x \neq p$ 」ならば $f(x) \in B_{d'}(q; \varepsilon)$ 」を満たすものが存在するとき, 写像 $f: Z \rightarrow W$ の p における極限は q であるといひ, このことを $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = q$ で表す.

注意 4.12 上の定義の状況の下で, $x \in Z$ を $d(f(x), q)$ に対応させる Z 上の実数値関数を考えると $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = q$ であることと, $\lim_{x \rightarrow p} d(f(x), q) = 0$ であることは同値である.

極限の概念が定義できれば, 写像の連続性の概念が次のように定義できる.

定義 4.13 $(X, d), (Y, d')$ を距離空間とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が $p \in X$ に対し $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$ を満たすとき f は点 p で連続であるといひ. さらに f が X の任意の点で連続であるとき, f を連続写像といひ.

注意 4.14 $B_d(p; \delta) \subset X$ かつ $f(p) \in B_{d'}(f(p); \varepsilon)$ だから, f が p で連続であるとは, 任意の正の実数 ε に対して正の実数 δ で, 条件「 $x \in B_d(p; \delta)$ ならば $f(x) \in B_{d'}(f(p); \varepsilon)$ 」を満たすものが存在することである.

次の命題は, 連続写像が持つ重要な性質の一つである.

命題 4.15 $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$ を距離空間, $V \subset X, W \subset Y$ とし, 写像 $f: V \rightarrow W$ は $p \in X, q \in Y$ に対して $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = q$ を満たし, 写像 $g: Y \rightarrow Z$ は q で連続であるとする. このとき $\lim_{x \rightarrow p} g(f(x)) = g(q)$ が成り立つ.

証明 g の q における連続性から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta_1 > 0$ で「 $y \in B_{d_Y}(q; \delta_1) \cap Y$ ならば $g(y) \in B_{d_Z}(g(q); \varepsilon)$ 」を満たすものがある. また, f についての仮定から, $\delta > 0$ で, 「 $x \in B_{d_X}(p; \delta) \cap X$ かつ $x \neq p$ ならば $f(x) \in B_{d_Y}(q; \delta_1)$ 」を満たすものがある. 従って $x \in B_{d_X}(p; \delta) \cap X$ かつ $x \neq p$ ならば $g(f(x)) \in B_{d_Z}(g(q); \varepsilon)$ となるため, $\lim_{x \rightarrow p} g(f(x)) = g(q)$ が成り立つ. \square

注意 4.16 命題 4.15 の結果は $\lim_{x \rightarrow p} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow p} f(x)\right)$ とも表せる. これは, 連続関数が「極限をとる」という操作と交換可能であることを示している.

命題 4.17 点 $p \in X$ が X の部分集合 A の触点であるためであるためには, すべての $k \in \mathbf{N}$ に対して $x_k \in A$ である点列 $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ で p に収束するものが存在することが必要十分である. 従って次の等式が成り立つ.

$$\bar{A} = \{p \in X \mid \text{すべての } k \in \mathbf{N} \text{ に対して } x_k \in A \text{ かつ } p \text{ に収束する点列 } (x_k)_{k \in \mathbf{N}} \text{ が存在する.}\}$$

証明 $p \in X$ が A の触点ならば任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して $B_d(p; \frac{1}{k}) \cap A \neq \emptyset$ だから $x_k \in B_d(p; \frac{1}{k}) \cap A$ が選べる. このとき, すべての $k \in \mathbf{N}$ に対して $x_k \in A$ かつ $d(x_k, p) < \frac{1}{k}$ だから $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ は p に収束する. 逆にすべての $k \in \mathbf{N}$ に対して $x_k \in A$ である点列 $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ で p に収束するものが存在するならば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N で条

件「 $k \geq N$ ならば $x_k \in B_d(p; \varepsilon)$ 」を満たすものが存在する. 従って $x_N \in B_d(p; \varepsilon) \cap A$ だから $B_d(p; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ となるため p は A の触点である. \square

X の部分集合 A が閉集合であるためには, $\bar{A} \subset A$ であることが必要十分だから, 命題 4.17 より次の結果が得られる.

系 4.18 X の部分集合 A が閉集合であるためには, 条件「すべての $k \in \mathbf{N}$ に対して $x_k \in A$ である点列 $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ が $p \in X$ に収束すれば $p \in A$ である。」が満たされることが必要十分である.

注意 4.19 距離空間 (X, d) において収束する点列全体の集合を $\text{Seq}(X, d)$ で表し, 収束する点列 $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ に対してその極限を対応させる写像 $\lim : \text{Seq}(X, d) \rightarrow X$ を考える. すなわち $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = p$ のとき $\lim((x_k)_{k \in \mathbf{N}}) = p$ とする. 系 4.18 は, X の部分集合 A が閉集合であるための必要十分条件が, 「各項が A に属する点列の $\lim : \text{Seq}(X, d) \rightarrow X$ による像が A に含まれる。」である, つまり “ A が \lim で閉じている” ことを主張している.

5 距離空間の位相

距離関数から定義される開球を用いて点列の収束や写像の極限の定義を行った (定義 4.9, 定義 4.11) が, 以下の命題 5.1 と命題 5.2 は, 開集合だけを用いて点列の収束と写像の極限が定義できることを示している.

命題 5.1 X の点列 $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ が $p \in X$ に収束するためには, p を含む任意の開集合 U に対し, 自然数 N で, 条件「 $k \geq N$ ならば $x_k \in U$ 」を満たすものが存在することが必要十分である.

証明 $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ が $p \in X$ に収束するとし, U は p を含む開集合であるとする. 開集合の定義から, 正の実数 r で, $B_d(p; r) \subset U$ を満たすものがあり, $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ が p に収束することから, 自然数 N で, 条件「 $k \geq N$ ならば $x_k \in B_d(p; r)$ 」を満たすものが存在する. $B_d(p; r) \subset U$ だから, 自然数 N は, 条件「 $k \geq N$ ならば $x_k \in U$ 」を満たす. 逆は, 命題 4.8 の (1) により開球が開集合であることから明らかである. \square

命題 5.2 $(X, d), (Y, d')$ を距離空間とし, $Z \subset X, W \subset Y$ と写像 $f : Z \rightarrow W$ が与えられているとする. 写像 f の $p \in X$ における極限が $q \in Y$ であるためには, q を含む Y の任意の開集合 V に対し, p を含む X の開集合 U で, 条件「“ $x \in U \cap Z$ かつ $x \neq p$ ” ならば $f(x) \in V$ 」を満たすものが存在することが必要十分である.

証明 f の p における極限が q であるとし, V は q を含む開集合であるとする. 開集合の定義から, 正の実数 r で, $B_{d'}(q; r) \subset V$ を満たすものがあり, f の p における極限が q であることから, 正の実数 δ で, 条件「“ $x \in B_d(p; \delta) \cap Z$ かつ $x \neq p$ ” ならば $f(x) \in B_{d'}(q; r)$ 」を満たすものが存在する. 開球 $B_d(p; \delta)$ は p を含む開集合だから, $U = B_d(p; \delta)$ とすればよい.

逆に, q を含む任意の開集合 V に対し, p を含む開集合 U で, 条件「“ $x \in U \cap Z$ かつ $x \neq p$ ” ならば $f(x) \in V$ 」を満たすものが存在すると仮定する. 任意の正の実数 ε に対して $B_{d'}(q; \varepsilon)$ は q を含む開集合だから, 仮定から p を含む開集合 U で, 条件「“ $x \in U \cap Z$ かつ $x \neq p$ ” ならば $f(x) \in B_{d'}(q; \varepsilon)$ 」を満たすものが存在する. 開集合の定義から, 正の実数 δ で, $B_d(p; \delta) \subset U$ を満たすものがあるため, 条件「“ $x \in B_d(p; \delta) \cap Z$ かつ $x \neq p$ ” ならば $f(x) \in B_{d'}(q; \varepsilon)$ 」が満たされる. 故に f の p における極限は q である. \square

注意 5.3 距離空間 (X, d) の開集合全体からなる集合を \mathcal{O}_d で表すと, X の点列 $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ が収束するかどうか, また収束する場合はどの点に収束するかは, 距離関数 d そのものより, d から定まる X の部分集合を要素とする集合 \mathcal{O}_d のみに依存することが命題 5.1 から分かる. 故に, 集合 X に与えられた 2 種類の距離関数 d, d' が異なっているも, $\mathcal{O}_d = \mathcal{O}_{d'}$ ならば, X の任意の点 p に対して, 距離空間 (X, d) において p に収束する点列全体の集合と距離空間 (X, d') において p に収束する点列全体の集合は一致する. 命題 5.2 から写像の極限についても同様のことが言える.

点列の極限を用いれば、写像の極限は次のように言い換えられる。

命題 5.4 $(X, d), (Y, d')$ を距離空間, f を X の部分集合 Z から Y の部分集合 W への写像とし, $p \in X, q \in Y$ とする. f の p における極限が q であることは, 条件「すべての $k \in \mathbf{N}$ に対して $x_k \in Z, x_k \neq p$ かつ $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = p$ 」を満たす X の任意の点列 $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ に対して $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = q$ が成り立つことと同値である.

証明 f の p における極限が q であることを仮定し, X の点列 $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ は, 条件

$$\text{「すべての } k \in \mathbf{N} \text{ に対して } x_k \in Z, x_k \neq p \text{ かつ } \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = p \text{」} \cdots (i)$$

を満たすとする. f についての仮定から, 任意の正の実数 ε に対して, 正の実数 δ で, 条件

$$\text{「} x \in Z \text{ かつ } 0 < d(x, p) < \delta \text{ ならば } d'(f(x), q) < \varepsilon \text{」} \cdots (ii)$$

を満たすものが存在する. また $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ についての仮定 (i) から, 上の δ に対し, 自然数 N で, 条件

$$\text{「} k \geq N \text{ ならば } x_k \in Z, x_k \neq p \text{ かつ } d(x_k, p) < \delta \text{」}$$

を満たすものが存在する. 従って $k \geq N$ ならば, $x = x_k$ としたときに条件 (ii) の仮定が満たされて

$$\text{「} k \geq N \text{ ならば } d'(f(x_k), q) < \varepsilon \text{」}$$

が成り立つため, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = q$ である.

上で示した主張の逆の主張を示すために, 逆の主張の対偶である『 f の p における極限が q でないならば, 条件「すべての $k \in \mathbf{N}$ に対して $x_k \in Z, x_k \neq p$ かつ $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = p$ 」を満たす X の点列 $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ で $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = q$ が成り立たないものが存在する.』を示す.

f の p における極限が q でないとき, ある正の実数 ε_0 で, 次の条件を満たすものがある.

「任意の正の実数 δ に対して $f(x) \notin B_{d'}(q; \varepsilon_0)$ を満たす p と異なる $x \in B_d(p; \delta) \cap Z$ が存在する.」

従って, 任意の自然数 k に対して $f(x_k) \notin B_{d'}(q; \varepsilon_0)$ である p と異なる $x_k \in B_d(p; \frac{1}{k}) \cap Z$ が存在する. そこで, X の点列 $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ を考えると, すべての $k \in \mathbf{N}$ に対して $x_k \in Z, x_k \neq p$ であり, $0 < d(x_k, p) < \frac{1}{k}$ だから例 2.10 と命題 2.11 の (2) から, $\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, p) = 0$ である. 従って, 注意 4.10 の (2) により $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ は p に収束する. ところが, 任意の自然数 k に対して $f(x_k) \notin B_{d'}(q; \varepsilon_0)$ だから, 注意 4.10 の (1) によつて $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = q$ は成り立たないため, 上の主張が示された. \square

系 5.5 $(X, d), (Y, d')$ を距離空間, f を X から Y への写像とし, $p \in X$ とする. このとき, f が p で連続であることは, p に収束する X の任意の点列 $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ に対して $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(p)$ が成り立つことと同値である.

証明 f が p で連続であると仮定し, $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ を p に収束する X の点列とする. 注意 4.14 から, 任意の正の実数 ε に対して, 正の実数 δ で次の条件を満たすものが存在する.

$$\text{「} d(x, p) < \delta \text{ ならば } d'(f(x), f(p)) < \varepsilon \text{」} \cdots (i)$$

また $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ は p に収束するため, 上の δ に対し, 自然数 N で, 条件「 $k \geq N$ ならば $d(x_k, p) < \delta$ 」を満たすものが存在する. 故に $k \geq N$ ならば, $x = x_k$ としたときに条件 (i) の仮定が満たされて「 $k \geq N$ ならば $d'(f(x_k), f(p)) < \varepsilon$ 」が成り立つため, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(p)$ である.

逆に p に収束する X の任意の点列 $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ に対して $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(p)$ が成り立つならば, 命題 5.4 により f は p で連続である. \square

定義 5.6 一般に X, Y を集合とし, 写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられているとする.

(1) X の部分集合 A に対して Y の部分集合 $f(A)$ を $f(A) = \{y \in Y \mid f(x) = y \text{ を満たす } x \in A \text{ が存在する.}\}$ で定義して $f(A)$ を f による A の像という. とくに $f(X)$ を f の像という.

(2) Y の部分集合 B に対して X の部分集合 $f^{-1}(B)$ を $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ で定義して $f^{-1}(B)$ を f による B の逆像という.

命題 5.7 $(X, d), (Y, d')$ を距離空間とし, 写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられているとする.

(1) f が $p \in X$ で連続であるためには, $f(p)$ を含む Y の任意の開集合 V に対し, p が $f^{-1}(V)$ の内点であることが必要十分である.

(2) f が連続写像であるためには, Y の任意の開集合 V に対し, $f^{-1}(V)$ が X の開集合であることが必要十分である.

証明 (1) f が $p \in X$ で連続であるとし, V は Y の開集合で $f(p)$ を含むものとする. 命題 5.2 から, p を含む X の開集合 U で, 条件「 $x \in U$ かつ $x \neq p$ 」ならば $f(x) \in V$ 」を満たすものが存在する. ここで $f(x) \in V$ は $x \in f^{-1}(V)$ と同値で, $f(p) \in V$ だから $p \in f^{-1}(V)$ となるため, U は条件「 $x \in U$ ならば $f(x) \in V$ 」を満たす. 従って $U \subset f^{-1}(V)$ である. U は p を含む開集合だから p は U の内点である. 故に p は U を含む集合 $f^{-1}(V)$ の内点でもある. 逆に, $f(p)$ を含む Y の任意の開集合 V に対し, p が $f^{-1}(V)$ の内点であると仮定する. p は $f^{-1}(V)$ の内点だから, $r > 0$ で $B_d(p; r) \subset f^{-1}(V)$ を満たすものが存在する. そこで $U = B_d(p; r)$ とおけば, 例 4.8 の (1) から, U は p を含む X の開集合であり, $x \in U$ ならば $x \in f^{-1}(V)$, すなわち $f(x) \in V$ だから命題 5.2 によって f の p における極限は $f(p)$ である. 従って f は p で連続である.

(2) Y の任意の開集合 V に対し, $f^{-1}(V)$ が X の開集合であることと, $f^{-1}(V)$ の任意の点が $f^{-1}(V)$ の内点であることは同値だから, (1) より主張が成り立つ. \square

注意 5.3 でも述べたように, 命題 5.1, 命題 5.2, 命題 5.7 により, 点列の収束や写像の極限, 連続性は距離関数そのものよりも, 距離関数から定まる開集合からなる集合に依存する概念であるといえる. そこで, 次の定義を行う.

定義 5.8 距離空間 (X, d) の開集合全体からなる集合を距離関数 d から定まる X の位相といい, \mathcal{O}_d で表す.

距離関数を明示する必要がある場合は, 距離空間 (X, d) から距離空間 (Y, d') への写像を $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ のように表す. X に 2 種類の距離関数が与えられた場合, 次のことが成り立つ.

定理 5.9 集合 X に 2 種類の距離関数 d と d' が与えられているとき, 次の 4 つの命題は同値である.

(i) $\mathcal{O}_{d'} \subset \mathcal{O}_d$

(ii) X の恒等写像 $id_X : (X, d) \rightarrow (X, d')$ は連続である.

(iii) 任意の $p \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ で, 条件「 $d(x, p) < \delta$ ならば $d'(x, p) < \varepsilon$ 」を満たすものがある.

(iv) 任意の $p \in X$ に対し, X の点列 $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ が距離空間 (X, d) で p に収束すれば, $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ は距離空間 (X, d') でも p に収束する.

証明 (i) が成り立つならば, 任意の $V \in \mathcal{O}_{d'}$ に対して $id_X^{-1}(V) = V \in \mathcal{O}_d$ だから, 命題 5.7 の (2) によって $id_X : (X, d) \rightarrow (X, d')$ は連続である. (ii) が成り立つならば, 任意の $V \in \mathcal{O}_{d'}$ に対し, 命題 5.7 から $V = id_X^{-1}(V)$ は (X, d) の開集合であるため, $V \in \mathcal{O}_d$ である. 従って $\mathcal{O}_{d'} \subset \mathcal{O}_d$ が成り立つ.

$d'(id_X(x), id_X(p)) = d'(x, p)$ に注意すれば, 連続性の定義から, (ii) と (iii) は同値である.

(ii) が成り立つと仮定し, X の点列 $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ が距離空間 (X, d) で p に収束するならば, 系 5.5 を $X = Y$, $f = id_X$ に対して用いると, id_X の連続性から $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ は距離空間 (X, d') でも p に収束するため, (iv) が成り立つ. 逆に (iv) が成り立てば, 再び系 5.5 を $X = Y$, $f = id_X$ に対して用いると, id_X は X の任意の点 p で連続になるため, (ii) が成り立つ. \square

距離空間 (X, d) と $p \in X$ に対し, p に収束する X の点列全体からなる集合を $\text{Seq}_p(X, d)$ で表せば, 定理 5.9 の (iv) は「任意の $p \in X$ に対して $\text{Seq}_p(X, d) \subset \text{Seq}_p(X, d')$ である。」と言い換えられるので次の結果が得られる.

系 5.10 集合 X に 2 つの距離関数 d, d' が与えられているとき, すべての $p \in X$ に対して $\text{Seq}_p(X, d) = \text{Seq}_p(X, d')$ であるためには, $\mathcal{O}_d = \mathcal{O}_{d'}$ であることが必要十分である.

系 5.11 集合 X に 2 種類の距離関数 d と d' が与えられているとする. 正の実数の定数 K で条件「すべての

$x, y \in X$ に対して $d'(x, y) \leq Kd(x, y)$ が成り立つ。」を満たすものがあれば $\mathcal{O}_{d'} \subset \mathcal{O}_d$ である。

証明 任意の $p \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ とおく. このとき $d(x, p) < \delta$ ならば $d'(x, p) \leq Kd(x, p) < K\delta = \varepsilon$ が成り立ち, 定理 5.9 の (iii) が満たされるため, $\mathcal{O}_{d'} \subset \mathcal{O}_d$ である. \square

注意 5.12 正の実数の定数 K, L で条件「すべての $x, y \in X$ に対して $Ld(x, y) \leq d'(x, y) \leq Kd(x, y)$ が成り立つ。」を満たすものがあれば $\mathcal{O}_{d'} = \mathcal{O}_d$ であることが上の結果から分かる。

まず距離関数が異なっても, 位相が一致する例を挙げる。

例 5.13 p を 1 以上の実数とし, d_p, d_∞ を例 3.2 で定めた \mathbf{R}^n の距離関数とする. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ に対し, $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ の定義から各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して $|x_i - y_i| \leq d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ だから, 不等式

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y})^p \right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

が得られる. また, すべての $j = 1, 2, \dots, n$ に対して $|x_j - y_j| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が成り立つため,

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\} \leq d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

が得られる. 故に注意 5.12 から, $\mathcal{O}_{d_p} = \mathcal{O}_{d_\infty}$ であり, 任意の $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ に対して \mathbf{R}^n の点列 $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbf{N}}$ が距離空間 (\mathbf{R}^n, d_p) で \mathbf{p} に収束するためには, $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbf{N}}$ が距離空間 (\mathbf{R}^n, d_∞) で \mathbf{p} に収束することが必要十分である。

次の例は距離関数が異なっていて, 位相が一致しない例である. このような場合の 2 つの距離関数は「本質的に異なる」と考えられる. p を 1 以上の実数とし, d_p, d_∞ を例 3.3 で定めた $C[a, b]$ の距離関数とする。

例 5.14 各自然数 k に対して $f_k \in C[a, b]$ を次で定めれば f_k はつねに 0 以上の値をとり, $\frac{a+b}{2}$ で最大値 1 をとる.

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 - \frac{k+1}{b-a} \left| x - \frac{a+b}{2} \right| & x \in \left[\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{k+1}, \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{k+1} \right] \\ 0 & x \in \left[a, \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{k+1} \right] \cup \left[\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{k+1}, b \right] \end{cases}$$

$[a, b]$ で値がつねに 0 である定数値関数も 0 で表せば, $d_\infty(f_k, 0) = \|f_k\|_\infty = \max\{|f_k(x)| \mid x \in [a, b]\} = 1$ がすべての自然数 k に対して成り立つため, $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ は距離空間 $(C[a, b], d_\infty)$ で 0 に収束しない. 一方,

$$\begin{aligned} d_p(f_k, 0) &= \left(\int_a^b |f_k(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{k+1}}^{\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{k+1}} \left(1 - \frac{k+1}{b-a} \left| x - \frac{a+b}{2} \right| \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{-\frac{b-a}{k+1}}^{\frac{b-a}{k+1}} \left(1 - \frac{k+1}{b-a} |y| \right)^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(2 \int_0^{\frac{b-a}{k+1}} \left(1 - \frac{k+1}{b-a} y \right)^p dy \right)^{\frac{1}{p}} = \left(2 \left[\frac{a-b}{(k+1)(p+1)} \left(1 - \frac{k+1}{b-a} y \right)^{p+1} \right]_0^{\frac{b-a}{k+1}} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{2(b-a)}{(k+1)(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

だから $\lim_{k \rightarrow \infty} d_p(f_k, 0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2(b-a)}{(k+1)(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} = 0$ となるため, 距離空間 $(C[-1, 1], d_p)$ では $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ は 0 に収束することが分かる. 故に系 5.10 の対偶から, $\mathcal{O}_{d_p} \neq \mathcal{O}_{d_\infty}$ である。

注意 5.15 $f, g \in C[a, b]$ に対し, すべての $x \in [a, b]$ に対して $|f(x) - g(x)| \leq d_\infty(f, g)$ が成り立つため,

$$d_p(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b d_\infty(f, g)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = (b-a)^{\frac{1}{p}} d_\infty(f, g)$$

が得られる. 従って, 系 5.11 から $\mathcal{O}_{d_p} \subset \mathcal{O}_{d_\infty}$ が成り立つ. $C[a, b]$ の点列 (関数列) $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ が距離空間 $(C[a, b], d_\infty)$ で関数 g に収束すれば, $\lim_{k \rightarrow \infty} d_\infty(f_k, g) = 0$ であり, 上で示した不等式から $d_p(f_k, g) \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} d_\infty(f_k, g)$ だから, 命題 2.11 により $\lim_{k \rightarrow \infty} d_p(f_k, g) = 0$ が得られる. 故に距離空間 $(C[a, b], d_p)$ でも $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ は g に収束する.

もし正の定数 c で不等式 $d_p(f, g) \geq c d_\infty(f, g)$ が任意の $f, g \in C[a, b]$ に対して成り立つようなものが存在すれば, 上で示した不等式 $d_p(f, g) \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} d_\infty(f, g)$ と注意 5.12 から, $\mathcal{O}_{d_p} = \mathcal{O}_{d_\infty}$ が得られるため, 例 5.14 で示したことと矛盾が生じる. 従って正の定数 c で, すべての $f, g \in C[a, b]$ に対して不等式 $d_p(f, g) \geq c d_\infty(f, g)$ が成り立つようなものは存在しない。

6 位相空間

集合 X に対し, X の部分集合全体からなる集合を $P(X)$ で表し, $P(X)$ を X の冪集合という. 集合 I の各要素 i に対して X の部分集合 S_i が与えられているとき, 言い換えると写像 $S: I \rightarrow P(X)$ が与えられていて $S(i) = S_i$ とおくと, $(S_i)_{i \in I}$ を「 I を添字集合とする集合族」という.

集合族 $(S_i)_{i \in I}$ に対して 合併 $\bigcup_{i \in I} S_i$ と共通部分 $\bigcap_{i \in I} S_i$ を以下のように定める.

$$\bigcup_{i \in I} S_i = \{x \mid x \in S_i \text{ となる } i \in I \text{ がある.}\}, \quad \bigcap_{i \in I} S_i = \{x \mid \text{すべての } i \in I \text{ に対して } x \in S_i.\}$$

また, Γ が X の部分集合を要素とする集合 (すなわち $\Gamma \subset P(X)$) のとき, Γ の要素全体の合併と共通部分を次のように表す.

$$\bigcup_{A \in \Gamma} A = \{x \mid x \in A \text{ となる } A \in \Gamma \text{ がある.}\}, \quad \bigcap_{A \in \Gamma} A = \{x \mid \text{すべての } A \in \Gamma \text{ に対して } x \in A.\}$$

定義 3.1 において距離関数とは, 命題 2.7 で示したユークリッド空間 \mathbf{R}^n の距離関数 d_n と同じ条件を満たすものとして定義したが, 位相空間の概念を定義する際も同様に, 距離空間における開集合全体の集合が満たす次の命題の条件を考え, 集合 X の位相とは, 同じ条件を満たす X の部分集合を要素とする集合として定義する.

命題 6.1 距離空間 (X, d) に対し, X の開集合全体からなる集合 \mathcal{O}_d は以下の条件を満たす.

(1) $X, \emptyset \in \mathcal{O}_d$. (2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O}_d$ ならば $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_d$. (3) すべての $i \in I$ に対して $O_i \in \mathcal{O}_d$ ならば $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}_d$.

証明 (1) 任意の $p \in X$ に対して $B_d(p; 1) \subset X$ だから p は X の内点である. 従って X のすべての点は内点だから X は開集合になるため $X \in \mathcal{O}_d$ である. また, 注意 4.6 から空集合は開集合だから $\emptyset \in \mathcal{O}_d$ である.

(2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ として, 任意の $p \in O_1 \cap O_2$ を取ると, O_1 と O_2 は開集合だから, p は O_1 の内点で, O_2 の内点でもあるので $r_1, r_2 > 0$ で $B_d(p; r_1) \subset O_1, B_d(p; r_2) \subset O_2$ を満たすものがある. 故に $B_d(p; r_1) \cap B_d(p; r_2) \subset O_1 \cap O_2$ が成り立つ. $r = \min\{r_1, r_2\}$ とおけば $0 < r \leq r_1, r_2$ だから $B_d(p; r) \subset B_d(p; r_1)$ かつ $B_d(p; r) \subset B_d(p; r_2)$ が成り立つので $B_d(p; r) \subset B_d(p; r_1) \cap B_d(p; r_2) \subset O_1 \cap O_2$ となり, p は $O_1 \cap O_2$ の内点である. 従って $O_1 \cap O_2$ は開集合だから $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_d$ である.

(3) $p \in \bigcup_{i \in I} O_i$ ならば $p \in O_j$ を満たす $j \in I$ がある. O_j は開集合だから p は O_j の内点で, $r > 0$ で $B_d(p; r) \subset O_j$ を満たすものがある. このとき $B_d(p; r) \subset O_j \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ だから p は $\bigcup_{i \in I} O_i$ の内点である. 従って $\bigcup_{i \in I} O_i$ は開集合だから $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}_d$ である. □

定義 6.2 X を集合, \mathcal{O} を X の部分集合を要素とする集合 (すなわち $\mathcal{O} \subset P(X)$) とする. \mathcal{O} が次の 3 つの条件を満たすとき, \mathcal{O} を X の位相と呼び, 対 (X, \mathcal{O}) を位相空間という. また, \mathcal{O} の要素を X の開集合という.

(O1) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$. (O2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$. (O3) すべての $i \in I$ に対して $O_i \in \mathcal{O}$ ならば $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$.

X の位相を一つ固定して考える場合は“位相空間 (X, \mathcal{O}) ”というかわりに, “位相空間 X ”ということが多い.

注意 6.3 (O2) から, n による数学的帰納法で「 $O_1, O_2, \dots, O_n \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \cap \dots \cap O_n \in \mathcal{O}$ 」が示される.

位相空間においても定義 4.2 と同様に, 内点, 内部, 外点, 外部, 触点, 閉包, 境界点, 境界の概念が定義される.

定義 6.4 (X, \mathcal{O}) を位相空間, A を X の部分集合, $p \in X$ とする.

(1) X の開集合 O で, $p \in O$ かつ $O \subset A$ を満たすものが存在するとき, p を A の内点という. A の内点全体からなる集合を A の内部といい, A° で表す.

(2) X の開集合 O で, $p \in O$ かつ $O \cap A = \emptyset$ を満たすものが存在するとき, p を A の外点という. A の外点全体からなる集合を A の外部といい, A^e で表す.

(3) p を含む X の任意の開集合 O に対して $O \cap A \neq \emptyset$ であるとき, p を A の触点という. A の触点全体からなる集合を A の閉包といい, \bar{A} で表す.

(4) p を含む X の任意の開集合 O に対して $O \cap A \neq \emptyset$ かつ $O \not\subset A$ であるとき, p を A の境界点という. A の境界点全体からなる集合を A の境界といい, ∂A で表す.

注意 6.5 以下で O は X の開集合とする.

(1) $O \cap A = \emptyset$ は $O \subset X - A$ と同値だから, p が A の外点であることと p が $X - A$ の内点であることは同値である. 従って $A^e = (X - A)^i$ である.

(2) $O \not\subset A$ は $O \cap (X - A) \neq \emptyset$ と同値だから, p が A の境界点であることと p が A と $X - A$ の両方の触点であることは同値である. 従って $\partial A = \bar{A} \cap \overline{X - A}$ であり, この等式から $\partial(X - A) = \partial A$ が得られる.

(3) $p \in O$ かつ $O \subset A$ ならば $p \in A$ であり, $p \in A$ ならば p を含む X の任意の開集合 O に対して $p \in O \cap A$ だから $p \in \bar{A}$ である. また, $p \in O$ かつ $O \cap A = \emptyset$ ならば $p \notin A$ である. 従って $A^i \subset A \subset \bar{A}$, $A^e \cap A = \emptyset$ である.

(4) p が A の内点でも外点でないことと, p が定義 6.4 の (4) の条件を満たすことと同値だから, $\partial A = X - (A^i \cup A^e)$ である. 従って $X = A^i \cup A^e \cup \partial A$ と $A^i \cap \partial A = A^e \cap \partial A = \emptyset$ が成り立つ. ((3) から $A^i \cap A^e = \emptyset$ も成り立つ.)

命題 6.6 (X, \mathcal{O}) を位相空間, A を X の部分集合とすれば, $\bar{A} = A^i \cup \partial A$, $\overline{X - A} = X - A^i$ が成り立つ.

証明 定義 6.4 の (3) と (4) から, 境界点は触点だから $\partial A \subset \bar{A}$ であり, 注意 6.5 の (3) から $A^i \subset \bar{A}$ だから $A^i \cup \partial A \subset \bar{A}$ である. $p \in \bar{A}$ かつ $p \notin A^i$ ならば p を含む X の任意の開集合 O に対して $O \cap A \neq \emptyset$ かつ $O \not\subset A$ が成り立つため $p \in \partial A$ である. 故に $\bar{A} \subset A^i \cup \partial A$ も成り立つため, $\bar{A} = A^i \cup \partial A$ である.

$O \cap (X - A) \neq \emptyset$ は $O \not\subset A$ と同値だから $p \in \overline{X - A}$ は条件「 p を含む X の任意の開集合 O に対して $O \not\subset A$ 」と同値である. この条件は $p \in A^i$ であるための定義 6.4 の (1) の条件の否定だから, $p \in \overline{X - A}$ は $p \in X - A^i$ と同値である. 従って $\overline{X - A} = X - A^i$ が成り立つ. \square

位相空間 (X, \mathcal{O}) において, 開集合とは \mathcal{O} の要素のことなので改めて定義する必要はない. そこで「近傍」と「閉集合」の概念だけ定義する.

定義 6.7 (X, \mathcal{O}) を位相空間, A を X の部分集合とする.

- (1) $p \in X$ に対し, A が $p \in A^i$ を満たすとき, A を p の近傍といい, 開集合である p の近傍を p の開近傍という.
- (2) A の触点がすべて A に属するとき, A を X の閉集合という.

注意 6.8 (1) 注意 6.5 の (3) から, $A \subset \bar{A}$ はつねに成り立つため, A が閉集合であるためには, $\bar{A} = A$ であることが必要十分である.

(2) A が空集合の場合は A の触点は存在しないので, 命題「 A の触点がすべて A に属する。」は真であるため, 空集合は閉集合である.

命題 6.9 (X, \mathcal{O}) を位相空間とし, X の部分集合 A に対して, A に含まれる開集合全体からなる集合を Γ とおく. このとき $A^i = \bigcup_{O \in \Gamma} O$ が成り立ち, A^i は開集合である. O が A に含まれる開集合ならば $O \subset A^i$ が成り立つ. 従って, A が開集合であること $A^i = A$ であることは同値である.

証明 $p \in A^i$ であることは $p \in O$ かつ $O \subset A$ を満たす X の開集合 O が存在することと同値で, このことは Γ の定義により, $p \in \bigcup_{O \in \Gamma} O$ であることと同値だから $A^i = \bigcup_{O \in \Gamma} O$ が成り立つ. 従って, (O3) によって A^i は開集合であり, Γ は A に含まれる開集合をすべて含むため, O が A に含まれる開集合ならば $O \subset A^i$ である. \square

命題 6.9 は後述の命題 6.14 と対をなす命題である。

命題 6.10 (X, \mathcal{O}) を位相空間, A を X の部分集合とすれば次の 3 つは同値である。

(i) A は閉集合である. (ii) $X - A$ は開集合である. (iii) $\partial A \subset A$

証明 $A = X - (X - A)$ だから命題 6.6 の 2 つ目の等式から $\overline{A} = \overline{X - (X - A)} = X - (X - A)^i$ である. 従って $\overline{A} = A$ は $X - (X - A)^i = A = X - (X - A)$ と同値である. $X - (X - A)^i = X - (X - A)$ の両辺の補集合を考えれば $(X - A)^i = X - A$ が得られるため, $\overline{A} = A$ は $(X - A)^i = X - A$ と同値である. 故に注意 6.8 の (1) と命題 6.9 から (i) と (ii) は同値である.

A が閉集合ならば注意 6.8 の (1) と命題 6.6 の最初の等式から $A = \overline{A} = A^i \cup \partial A \supset \partial A$ である. 逆に $\partial A \subset A$ ならば命題 6.6 の最初の等式と注意 6.5 の (3) から $\overline{A} = A^i \cup \partial A \subset A \subset \overline{A}$ だから $\overline{A} = A$ が成り立つため, A は閉集合である. \square

注意 6.11 X の部分集合 A が閉集合ならば, 上の命題から $X - A$ は開集合で, $A = X - (X - A)$ だから, A は開集合 $X - A$ の補集合である. 逆に A が X の開集合 O の補集合ならば $A = X - O$ だから $X - A = O$ であり, O は開集合だから上の命題より, A は閉集合である. 従って X の部分集合 A が閉集合であるためには, A が開集合の補集合であることが必要十分である.

位相空間 (X, \mathcal{O}) の開集合全体の集合 \mathcal{O} は定義 6.2 の 3 つの条件を満たすものであった. 一方, 定義 6.7 の (2) で定義した X の閉集合は上で示したように, 開集合の補集合に他ならないという事実を用いて, 次に X の閉集合全体からなる集合の性質を定義 6.2 の 3 つの条件から導く. そのために, 次の補題を示す.

補題 6.12 集合 X の部分集合からなる集合族 $(S_i)_{i \in I}$ に対し, 次の等式が成り立つ.

$$\bigcap_{i \in I} (X - S_i) = X - \bigcup_{i \in I} S_i, \quad \bigcup_{i \in I} (X - S_i) = X - \bigcap_{i \in I} S_i$$

とくに $I = \{1, 2\}$ の場合, $(X - S_1) \cap (X - S_2) = X - (S_1 \cup S_2)$, $(X - S_1) \cup (X - S_2) = X - (S_1 \cap S_2)$ が成り立つ.

証明 $x \in X - \bigcup_{i \in I} S_i$ であることは $x \notin \bigcup_{i \in I} S_i$ であることと同値で, これは「すべての $i \in I$ に対して $x \notin S_i$ 」と同値であり, $x \notin S_i$ は $x \in X - S_i$ と同値だから, $x \in X - \bigcup_{i \in I} S_i$ は「すべての $i \in I$ に対して $x \in X - S_i$ 」と同値である. この命題は $x \in \bigcap_{i \in I} (X - S_i)$ を意味するので $\bigcap_{i \in I} (X - S_i) = X - \bigcup_{i \in I} S_i$ が成り立つ. $T_i = X - S_i$ とおけば $S_i = X - T_i$ だから, 上で示したことから $\bigcap_{i \in I} S_i = \bigcap_{i \in I} (X - T_i) = X - \bigcup_{i \in I} T_i = X - \bigcup_{i \in I} (X - S_i)$ が成り立ち, この等式の両端の辺の補集合を考えれば $\bigcup_{i \in I} (X - S_i) = X - \bigcap_{i \in I} S_i$ が得られる. \square

命題 6.13 位相空間 (X, \mathcal{O}) における閉集合全体からなる集合を \mathcal{F} で表せば, 次の (C1), (C2), (C3) が成り立つ.

(C1) $X, \emptyset \in \mathcal{F}$. (C2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ならば $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$ (C3) すべての $i \in I$ に対して $F_i \in \mathcal{F}$ ならば $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$.

証明 (C1) 注意 6.8 の (2) から $\emptyset \in \mathcal{F}$ であり, X の触点は X の点だから $X \in \mathcal{F}$ も成り立つ.

(C2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ならば命題 6.10 から $X - F_1, X - F_2 \in \mathcal{O}$ だから補題 6.12 と (O2) より $X - (F_1 \cup F_2) = (X - F_1) \cap (X - F_2) \in \mathcal{O}$ である. 従って命題 6.10 から $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$ が得られる.

(C3) すべての $i \in I$ に対して $F_i \in \mathcal{F}$ ならば 命題 6.10 から $X - F_i \in \mathcal{O}$ だから補題 6.12 と (O3) より $X - \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (X - F_i) \in \mathcal{O}$ である. 従って命題 6.10 から $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$ が得られる. \square

命題 6.14 (X, \mathcal{O}) を位相空間とし, X の部分集合 A に対して, A を含む閉集合全体からなる集合を Δ とおく. このとき $\overline{A} = \bigcap_{F \in \Delta} F$ が成り立ち, \overline{A} は閉集合である. F が A を含む閉集合ならば $F \supset \overline{A}$ が成り立つ.

証明 $p \in \overline{A}$ とする. $F \in \Delta$ で $p \notin F$ となるものが存在すれば, $p \in X - F$ で, $X - F$ は開集合かつ $p \in \overline{A}$ だから

$(X - F) \cap A \neq \emptyset$ である。このとき A の要素で F に属さないものが存在することになるので $A \subset F$ と矛盾する。従って、すべての $F \in \Delta$ に対して $p \in F$ だから $p \in \bigcap_{F \in \Delta} F$ である。

$p \in \bigcap_{F \in \Delta} F$ とする。 p を含む X の開集合 O で $O \cap A = \emptyset$ を満たすものが存在すれば $A \subset X - O$ で、 $X - O$ は閉集合だから、 $X - O \in \Delta$ である。 $p \notin X - O$ だから、 p がすべての $F \in \Delta$ に含まれていることと矛盾する。故に p を含む X の任意の開集合 O に対して $O \cap A \neq \emptyset$ だから $p \in \bar{A}$ である。以上から $\bar{A} = \bigcap_{F \in \Delta} F$ である。

命題 6.13 から、閉集合の共通部分は閉集合だから \bar{A} は閉集合である。また、 Δ は A を含む閉集合をすべて含むため、 F が A を含む閉集合ならば $F \supset \bigcap_{F \in \Delta} F = \bar{A}$ である。 \square

7 連続写像

位相空間の間の写像の極限の概念は次のように定義される。(命題 5.2 参照)

定義 7.1 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし、 $Z \subset X, W \subset Y$ と写像 $f: Z \rightarrow W$ および $p \in \bar{Z}$ が与えられているとする。 $q \in Y$ を含む Y の任意の開集合 V に対し、 p を含む X の開集合 U で、条件「 $x \in U \cap Z$ かつ $x \neq p$ 」ならば $f(x) \in V$ 」を満たすものが存在するとき、 f の p における極限は q であるという。

写像 $f: X \rightarrow Y$ が $p \in X$ で連続であるとは、 f の p における極限が $f(p)$ であることと定義されるが、定義 7.1 において $Z = X, f(p) \in V$ であることから、写像 f が $p \in X$ で連続であることの定義は次のように言い直される。

定義 7.2 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし、 $f: X \rightarrow Y$ を写像、 $p \in X$ とする。 $f(p)$ を含む Y の任意の開集合 V に対し、 p を含む X の開集合 U で、条件「 $x \in U$ ならば $f(x) \in V$ 」を満たすものが存在するとき、 f は p において連続であるという。 f が X のすべての点において連続であるとき、 f を連続写像という。なお X と Y の位相を明示する必要がある場合は、写像 $f: X \rightarrow Y$ を $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ と表す。

注意 7.3 定義 5.6 の記号を使うと、定義 7.2 の条件「 $x \in U$ ならば $f(x) \in V$ 」は1つの式 $f(U) \subset V$ で表され、さらにこれは $U \subset f^{-1}(V)$ と同値である。

命題 7.4 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし、 $f: X \rightarrow Y$ を写像とする。

(1) f が $p \in X$ において連続であるためには、 $f(p)$ を含む任意の開集合 V に対し、 p が $f^{-1}(V)$ の内点であることが必要十分である。

(2) f が連続写像であるためには、 Y の任意の開集合 V に対し、 $f^{-1}(V)$ が X の開集合であることが必要十分である。

証明 (1) f が $p \in X$ において連続ならば $f(p)$ を含む任意の開集合 V に対し、注意 7.3 から p を含む X の開集合 U で $U \subset f^{-1}(V)$ を満たすものが存在する。従って内点の定義 6.4 から p は $f^{-1}(V)$ の内点である。

$f(p)$ を含む Y の任意の開集合 V に対し、 p が $f^{-1}(V)$ の内点ならば p を含む X の開集合 U で、 $U \subset f^{-1}(V)$ を満たすものが存在する。故に定義 7.2 と注意 7.3 から f は p において連続である。

(2) Y の任意の開集合 V に対し、 $f^{-1}(V)$ が X の開集合であることと、 $f^{-1}(V)$ の任意の点が $f^{-1}(V)$ の内点であることは命題 6.9 により同値だから、(1) より主張が成り立つ。 \square

補題 7.5 X, Y を集合、 $f: X \rightarrow Y$ を写像とする。 Y の部分集合 A に対して $f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A)$ が成り立つ。

証明 $x \in f^{-1}(Y - A)$ は $f(x) \in Y - A$ と同値で、 $f(x) \in Y - A$ は $f(x) \notin A$ と同値である。ここで $x \notin X - f^{-1}(A)$ すなわち $x \in f^{-1}(A)$ は $f(x) \in A$ と同値だから、 $f(x) \notin A$ は $x \in X - f^{-1}(A)$ と同値である。以上から $x \in f^{-1}(Y - A)$ と $x \in X - f^{-1}(A)$ は同値になるため、 $X - f^{-1}(A) = f^{-1}(Y - A)$ である。 \square

閉集合を用いて写像が連続であるための条件が以下のように与えられる。

命題 7.6 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする。写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続写像であるためには、 Y の任意の閉集合 F に対して $f^{-1}(F)$ が X の閉集合であることが必要十分である。

証明 f を連続写像とし、 F を Y の閉集合とすれば、 $Y - F$ は Y の開集合だから、命題 7.4 の (2) から $f^{-1}(Y - F)$ は X の開集合である。補題 7.5 から $f^{-1}(Y - F) = X - f^{-1}(F)$ だから、 $f^{-1}(F)$ は X の閉集合である。

逆に Y の任意の閉集合 F に対して $f^{-1}(F)$ が X の閉集合であると仮定して、 O を Y の開集合とすれば $Y - O$ は Y の閉集合だから $f^{-1}(Y - O)$ は X の閉集合である。補題 7.5 から $f^{-1}(Y - O) = X - f^{-1}(O)$ だから、 $f^{-1}(O)$ は X の開集合である。故に命題 7.4 の (2) から f は連続写像である。□

命題 7.7 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y), (Z, \mathcal{O}_Z)$ を位相空間とし、 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ を写像とする。 f が $p \in X$ において連続、 g が $f(p) \in Y$ において連続ならば、合成写像 $g \circ f: X \rightarrow Z$ は p において連続である。従って連続写像の合成写像は連続写像である。

証明 g が $f(p)$ で連続であることから $(g \circ f)(p) = g(f(p))$ を含む任意の開集合 W に対し、 $f(p)$ を含む開集合 V で $g(V) \subset W$ を満たすものがある。また、 f が p で連続であることから p を含む開集合 U で $f(U) \subset V$ を満たすものがある。従って $(g \circ f)(U) = g(f(U)) \subset g(V) \subset W$ が成り立つため、 $g \circ f$ は p で連続である。□

定義 7.8 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする。

(1) 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対し、連続写像 $g: Y \rightarrow X$ で、 $g \circ f = id_X$ かつ $f \circ g = id_Y$ を満たすものが存在するとき、 f を同相写像 (または位相同型写像) という。 (X, \mathcal{O}_X) と (Y, \mathcal{O}_Y) の間に同相写像が存在するとき、 (X, \mathcal{O}_X) と (Y, \mathcal{O}_Y) は同相 (または位相同型) であるという。

(2) 写像 $f: X \rightarrow Y$ が条件「 O が X の開集合ならば $f(O)$ は Y の開集合」を満たすとき、 f を開写像と呼び、条件「 F が X の閉集合ならば $f(F)$ は Y の閉集合」を満たすとき、 f を閉写像と呼ぶ。

注意 7.9 連続な全単射は同相写像であるとは限らないが、連続な全単射が開写像または閉写像であれば、同相写像である。逆に同相写像は開写像であり、閉写像でもある。

8 位相の生成

定義 8.1 集合 X の位相 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ が $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ を満たすとき位相 \mathcal{O}_2 は \mathcal{O}_1 より強い (細かい) といい、 \mathcal{O}_1 は \mathcal{O}_2 より弱い (粗い) という。

注意 8.2 X に 2 つの位相 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ が与えられているとき、恒等写像 $id_X: (X, \mathcal{O}_1) \rightarrow (X, \mathcal{O}_2)$ が連続になるための必要十分条件は、 \mathcal{O}_1 が \mathcal{O}_2 より強いことである。とくに、 $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ の場合、 id_X は連続である。

集合 X と X の部分集合からなる集合 \mathcal{B} が与えられたとき、 X の部分集合を要素とする集合 $\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{O}(\mathcal{B})$ を以下のように定義する。

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{U \subset X \mid U = V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n \text{ を満たす } V_1, V_2, \dots, V_n \in \mathcal{B} \text{ がある.}\} \cup \{X\}$$

$$\mathcal{O}(\mathcal{B}) = \left\{ O \subset X \mid \Gamma \subset \tilde{\mathcal{B}} \text{ で } O = \bigcup_{U \in \Gamma} U \text{ を満たすものがある.} \right\} \cup \{\emptyset\}$$

命題 8.3 $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は X の位相で、 $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}(\mathcal{B})$ かつ条件「 O が $\mathcal{B} \subset O$ を満たす X の位相ならば $\mathcal{O}(\mathcal{B}) \subset O$ である。」を満たす。従って $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は \mathcal{B} の要素がすべて開集合である X の位相のうちで最も弱い位相である。

証明 $\tilde{\mathcal{B}}$ と $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の定義から $\mathcal{B} \subset \tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{O}(\mathcal{B})$ であり、 $X \in \tilde{\mathcal{B}}, \emptyset \in \mathcal{O}(\mathcal{B})$ だから $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は位相の定義 6.2 における条

件 (O1) を満たす.

$O_1, O_2 \in \mathcal{O}(B)$ ならば $O_1 = \bigcup_{O \in \Gamma_1} O, O_2 = \bigcup_{O \in \Gamma_2} O$ を満たす $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \tilde{B}$ がある.

$$\Gamma_3 = \{U \subset X \mid U = V_1 \cap V_2 \text{ を満たす } V_1 \in \Gamma_1, V_2 \in \Gamma_2 \text{ がある.}\}$$

とおけば, \tilde{B} の定義から「 $V_1, V_2 \in \tilde{B}$ ならば $V_1 \cap V_2 \in \tilde{B}$ 」が成り立つため $\Gamma_3 \subset \tilde{B}$ であり, $O_1 \cap O_2 = \bigcup_{O \in \Gamma_3} O$ が成り立つ. 実際, $x \in O_1 \cap O_2$ は $x \in V_1$ を満たす $V_1 \in \Gamma_1$ と $x \in V_2$ を満たす $V_2 \in \Gamma_2$ が存在することが必要十分であり, このことは Γ_3 の定義から $x \in U$ を満たす $U \in \Gamma_3$ が存在することと同値である. 従って, $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}(B)$ が成り立つため, $\mathcal{O}(B)$ は位相の定義 6.2 における条件 (O2) を満たす.

X の部分集合の族 $(O_i)_{i \in I}$ がすべての $i \in I$ に対して $O_i \in \mathcal{O}(B)$ を満たすならば, 各 $i \in I$ に対して $O_i = \bigcup_{U \in \Gamma_i} U$ を満たす $\Gamma_i \subset \tilde{B}$ が存在する. $\bar{\Gamma} = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$ とおけば, $\bar{\Gamma} \subset \tilde{B}$ だから $\bigcup_{U \in \bar{\Gamma}} U \in \mathcal{O}(B)$ であり, $\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{U \in \bar{\Gamma}} U$ が成り立つ. 実際, $i \in I$ ならば $\Gamma_i \subset \bar{\Gamma}$ より $O_i = \bigcup_{U \in \Gamma_i} U \subset \bigcup_{U \in \bar{\Gamma}} U$ であるため, $\bigcup_{i \in I} O_i \subset \bigcup_{U \in \bar{\Gamma}} U$ が成り立ち, $U \in \bar{\Gamma}$ ならば $U \in \Gamma_i$ を満たす $i \in I$ が存在し, $U \subset \bigcup_{V \in \Gamma_i} V = O_i \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ だから $\bigcup_{U \in \bar{\Gamma}} U \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ が成り立つ. 故に $\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{U \in \bar{\Gamma}} U \in \mathcal{O}(B)$ だから $\mathcal{O}(B)$ は位相の定義 6.2 における条件 (O3) を満たす. 従って $\mathcal{O}(B)$ は X の位相である.

\mathcal{O} を $B \subset \mathcal{O}$ を満たす X の位相とする. $U \in \tilde{B}$ ならば $U = V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n$ を満たす $V_1, V_2, \dots, V_n \in B$ があるが, $B \subset \mathcal{O}$ より $V_i \in \mathcal{O}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) で, \mathcal{O} が位相の定義 6.2 における条件 (O2) を満たすことから $U = V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n \in \mathcal{O}$ である. 従って $\tilde{B} \subset \mathcal{O}$ が成り立つ. $O \in \mathcal{O}(B)$ ならば $O = \bigcup_{U \in \Gamma} U$ を満たす $\Gamma \subset \tilde{B}$ があるが, $\tilde{B} \subset \mathcal{O}$ より $\Gamma \subset \mathcal{O}$ であり, \mathcal{O} が位相の定義 6.2 における条件 (O3) を満たすことから $O = \bigcup_{U \in \Gamma} U \in \mathcal{O}$ である. 故に $\mathcal{O}(B) \subset \mathcal{O}$ である. □

定義 8.4 (1) 集合 X の部分集合を要素とする集合 B に対し, $\mathcal{O}(B)$ を B で生成される X の位相という.

(2) 位相空間 (X, \mathcal{O}) に対し, X の部分集合を要素とする集合 B が $\mathcal{O} = \mathcal{O}(B)$ を満たすとき, B を \mathcal{O} の準基底という.

(3) 位相空間 (X, \mathcal{O}) に対し, $B \subset \mathcal{O}$ かつ任意の $O \in \mathcal{O}$ に対して $O = \bigcup_{U \in \Gamma} U$ を満たす $\Gamma \subset B$ が存在するとき, B を \mathcal{O} の基底という.

命題 8.5 位相空間 (X, \mathcal{O}) に対し, \mathcal{O} の部分集合 B が \mathcal{O} の基底であるためには B が次の条件を満たすことが必要十分である.

(*) 任意の $O \in \mathcal{O}$ と $x \in O$ に対して $x \in U$ かつ $U \subset O$ を満たす $U \in B$ がある.

証明 B が \mathcal{O} の基底ならば任意の $O \in \mathcal{O}$ に対して $O = \bigcup_{V \in \Gamma} V$ を満たす $\Gamma \subset B$ があるため, 任意の $x \in O$ に対して $x \in U$ を満たす $U \in \Gamma$ が存在する. このとき $U \subset \bigcup_{V \in \Gamma} V = O$ だから B は条件 (*) を満たす.

逆に B が条件 (*) を満たすと仮定すれば, 任意の $O \in \mathcal{O}$ と $x \in O$ に対して, $x \in U_x$ かつ $U_x \subset O$ を満たす $U_x \in B$ がある. このとき $\Gamma = \{U_x \mid x \in O\}$ とおけば $\Gamma \subset B$ であり, すべての $x \in O$ に対して $U_x \subset O$ だから $\bigcup_{U \in \Gamma} U = \bigcup_{x \in O} U_x \subset O$ である. 一方 $x \in U_x$ だから $O = \bigcup_{x \in O} \{x\} \subset \bigcup_{x \in O} U_x = \bigcup_{U \in \Gamma} U$ が成り立つため $O = \bigcup_{U \in \Gamma} U$ を満たす $\Gamma \subset B$ が存在する. □

例 8.6 (1) 集合 X の部分集合を要素とする集合 B に対して \tilde{B} は $\mathcal{O}(B)$ の基底である.

(2) (X, d) を距離空間, \mathcal{O}_d を距離関数 d から定まる X の位相とする. 命題 8.5 と \mathcal{O}_d の定義から開球全体の集合 $\{B_d(p; r) \mid p \in X, r > 0\}$ は \mathcal{O}_d の基底である. 同様に, 半径が $\frac{1}{n}$ (n は自然数) の形の有理数である開球全体の集合 $\{B_d(p; \frac{1}{n}) \mid p \in X, n \in \mathbf{N}\}$ も \mathcal{O}_d の基底である.

命題 8.7 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, B を \mathcal{O}_Y の準基底とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が条件「任意の $V \in B$ に対して $f^{-1}(V)$ は X の開集合である。」を満たせば f は連続写像である.

証明 O を Y の任意の開集合とすれば, B の要素の有限個の共通部分で表される集合の族 $(U_i)_{i \in I}$ が存在して $O = \bigcup_{i \in I} U_i$ となり, さらに各 $i \in I$ に対して $U_i = V_{1,k} \cap V_{2,k} \cap \cdots \cap V_{i,n_i}$ を満たす $V_{i,k} \in \mathcal{B}$ ($k = 1, 2, \dots, n_i$) が存在する. このとき, $f^{-1}(U_i) = f^{-1}(V_{1,k} \cap V_{2,k} \cap \cdots \cap V_{i,n_i}) = f^{-1}(V_{1,k}) \cap f^{-1}(V_{2,k}) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_{i,n_i})$ であり, 仮定から $f^{-1}(V_{i,k})$ は X の開集合だから $f^{-1}(U_i)$ も X の開集合である. さらに $f^{-1}(O) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$ が成り立つため, $f^{-1}(O)$ は X の開集合である. 従って命題 7.4 の (2) から f は連続写像である. \square

9 部分空間・直積空間

(X, \mathcal{O}) を位相空間, Y を X の部分集合とすると, Y に位相を定義する方法を考える.

条件 9.1 Y に位相 \mathcal{O}' を与えたときに, \mathcal{O}' が満たしてほしい条件として次の 2 つを考える.

(i) 包含写像 $i_Y : Y \rightarrow X$ が連続写像である.

(ii) 位相空間 (Z, \mathcal{O}_Z) と写像 $f : Z \rightarrow Y$ が与えられたとき, 合成写像 $i_Y \circ f : Z \rightarrow X$ が連続写像ならば f も連続写像である.

上の条件 (i) が満たされるためには, 命題 7.4 の (2) から \mathcal{O}' が $i_Y^{-1}(O)$ ($O \in \mathcal{O}$) という形をした Y の部分集合をすべて含んでいることが必要十分である. $i_Y : Y \rightarrow X$ は包含写像だから, $i_Y^{-1}(O) = O \cap Y$ であることに注意する.

補題 9.2 $\mathcal{O}' = \{U \subset Y \mid U = O \cap Y \text{ となる } O \in \mathcal{O} \text{ がある.}\}$ とおけば, \mathcal{O}' は Y の位相である.

証明 $\emptyset, X \in \mathcal{O}$ であり, $\emptyset = \emptyset \cap Y, Y = X \cap Y$ より $\emptyset, Y \in \mathcal{O}'$ である. $U_1, U_2 \in \mathcal{O}'$ とすれば $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ で $U_1 = O_1 \cap Y, U_2 = O_2 \cap Y$ を満たすものがあるので, $U_1 \cap U_2 = (O_1 \cap Y) \cap (O_2 \cap Y) = (O_1 \cap O_2) \cap Y$ と $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$ から $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}'$ である. $U_i \in \mathcal{O}'$ ($i \in I$) とすれば, 各 $i \in I$ に対して $O_i \in \mathcal{O}$ で $U_i = O_i \cap Y$ を満たすものがあるので, $\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (O_i \cap Y) = \left(\bigcup_{i \in I} O_i\right) \cap Y$ と $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$ から $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}'$ である. \square

従って Y の位相 \mathcal{O}' は条件 9.1 の (i) を満たす Y の位相の中で最も弱いものである. Y の位相 \mathcal{O}' が条件 9.1 の (ii) を満たすことを示すために, 次の補題を示す.

補題 9.3 写像 $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ と Z の部分集合 A に対して $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ が成り立つ.

証明 $x \in (g \circ f)^{-1}(A)$ は $g(f(x)) = (g \circ f)(x) \in A$ と同値であり, $g(f(x)) \in A$ は $f(x) \in g^{-1}(A)$ と同値である. さらに $f(x) \in g^{-1}(A)$ は $x \in f^{-1}(g^{-1}(A))$ と同値だから $x \in (g \circ f)^{-1}(A)$ は $x \in f^{-1}(g^{-1}(A))$ と同値である. \square

命題 9.4 Y の位相 \mathcal{O}' は条件 9.1 の (ii) を満たす.

証明 位相空間 (Z, \mathcal{O}_Z) と写像 $f : Z \rightarrow Y$ が与えられていて, 合成写像 $i_Y \circ f : Z \rightarrow X$ が連続写像であるとする. 任意の $U \in \mathcal{O}'$ に対して $O \in \mathcal{O}$ で $U = O \cap Y = i_Y^{-1}(O)$ を満たすものがある. 補題 9.3 から $f^{-1}(U) = f^{-1}(i_Y^{-1}(O)) = (i_Y \circ f)^{-1}(O)$ で, $i_Y \circ f$ の連続性と命題 7.4 の (2) より $f^{-1}(U)$ は Z の開集合である. 従って命題 7.4 の (2) より f は連続写像である. \square

定義 9.5 (X, \mathcal{O}) を位相空間, Y を X の部分集合とすると, 補題 9.2 で与えた Y の位相 \mathcal{O}' を Y の X に関する相対位相といい, 位相空間 (Y, \mathcal{O}') を (X, \mathcal{O}) の部分空間または部分位相空間という.

注意 9.6 \mathcal{O}' の要素 $O \cap Y$ の Y における補集合は $(X - O) \cap Y$ だから, 位相空間 (X, \mathcal{O}) の部分空間 (Y, \mathcal{O}') の閉集合全体の集合は $\{A \subset Y \mid A = F \cap Y \text{ となる } X \text{ の閉集合 } F \text{ がある.}\}$ である.

n 個の位相空間 $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), \dots, (X_n, \mathcal{O}_n)$ が与えられたとき, X_1, X_2, \dots, X_n の直積

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i (i = 1, 2, \dots, n)\}$$

に位相を定義する方法を考える. $\text{pr}_i : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \rightarrow X_i$ を第 i 成分への射影 $\text{pr}_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$ とする.

条件 9.7 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ に位相 \mathcal{O} を与えたときに, \mathcal{O} が満たしてほしい条件として次の 2 つを考える.

(i) $\text{pr}_1, \text{pr}_2, \dots, \text{pr}_n$ はすべて連続写像である.

(ii) 位相空間 (Y, \mathcal{O}_Y) と写像 $f : Y \rightarrow X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ が与えられたとき, すべての $i = 1, 2, \dots, n$ に対して合成写像 $\text{pr}_i \circ f : Y \rightarrow X_i$ が連続写像ならば f も連続写像である.

条件 (i) が満たされるためには, 命題 7.4 の (2) から \mathcal{O} が $\text{pr}_i^{-1}(O_i)$ ($O_i \in \mathcal{O}_i, i = 1, 2, \dots, n$) という形をした $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の部分集合をすべて含んでいることが必要十分である. そこで,

$$\mathcal{B} = \{\text{pr}_1^{-1}(O_1) \mid O_1 \in \mathcal{O}_1\} \cup \{\text{pr}_2^{-1}(O_2) \mid O_2 \in \mathcal{O}_2\} \cup \cdots \cup \{\text{pr}_n^{-1}(O_n) \mid O_n \in \mathcal{O}_n\}$$

において, \mathcal{B} で生成される $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の位相 $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ を考えれば, $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は条件 (i) を満たす $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の位相の中で最も弱い位相である.

命題 9.8 上で定義した \mathcal{B} で生成される $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の位相 $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は条件 9.7 の (ii) を満たす.

証明 任意の $V \in \mathcal{B}$ に対して $V = \text{pr}_i^{-1}(O_i)$ を満たす $i = 1, 2, \dots, n$ と $O_i \in \mathcal{O}_i$ が存在し, 補題 9.3 から $f^{-1}(V) = f^{-1}(\text{pr}_i^{-1}(O_i)) = (\text{pr}_i \circ f)^{-1}(O_i)$ が成り立つ. 仮定から $\text{pr}_i \circ f$ は連続写像であり, 命題 7.4 の (2) から $(\text{pr}_i \circ f)^{-1}(O_i)$ は Y の開集合だから, 上式と命題 8.7 から f は連続写像になり, $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は条件 (ii) を満たす. \square

以上の結果をふまえて次の定義をする.

定義 9.9 位相空間 $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), \dots, (X_n, \mathcal{O}_n)$ に対し,

$$\mathcal{B} = \{\text{pr}_1^{-1}(O_1) \mid O_1 \in \mathcal{O}_1\} \cup \{\text{pr}_2^{-1}(O_2) \mid O_2 \in \mathcal{O}_2\} \cup \cdots \cup \{\text{pr}_n^{-1}(O_n) \mid O_n \in \mathcal{O}_n\}$$

によって生成される $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の位相 $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ を $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), \dots, (X_n, \mathcal{O}_n)$ の直積位相といい, $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \mathcal{O}(\mathcal{B}))$ を $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), \dots, (X_n, \mathcal{O}_n)$ の直積空間または直積位相空間という.

命題 9.10 定義 9.9 で与えた \mathcal{B} の有限個の要素の共通部分として表される $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の部分集合全体からなる集合を $\bar{\mathcal{B}}$ とすれば $\bar{\mathcal{B}} = \{O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \mid O_i \in \mathcal{O}_i (i = 1, 2, \dots, n)\}$ が成り立つ.

証明 $\bar{\mathcal{B}} = \{O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \mid O_i \in \mathcal{O}_i (i = 1, 2, \dots, n)\}$ とおく. X_i の開集合 O_i に対して

$$\text{pr}_i^{-1}(O_i) = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times O_i \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \mid x_i \in O_i\}$$

だから $\text{pr}_i^{-1}(O_i) \in \bar{\mathcal{B}}$ であり, $\text{pr}_1^{-1}(O_1) \cap \text{pr}_2^{-1}(O_2) \cap \cdots \cap \text{pr}_n^{-1}(O_n) = O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$ が成り立つ. 従って $\mathcal{B} \subset \bar{\mathcal{B}} \subset \tilde{\mathcal{B}}$ である. X_i の部分集合 O_i, O'_i に対して等式

$$(O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n) \cap (O'_1 \times O'_2 \times \cdots \times O'_n) = (O_1 \cap O'_1) \times (O_2 \cap O'_2) \times \cdots \times (O_n \cap O'_n)$$

が成り立つことから, $\bar{\mathcal{B}}$ は \mathcal{B} の有限個の要素の共通部分として表される $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の部分集合をすべて含むため, $\bar{\mathcal{B}} = \tilde{\mathcal{B}}$ である. \square

$(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ と $((x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_n) \in (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$ を同一視することによって, 次の命題では $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ と $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$ を同一視する.

命題 9.11 $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), \dots, (X_n, \mathcal{O}_n)$ を位相空間とする. $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), \dots, (X_n, \mathcal{O}_{n-1})$ の直積位相を \mathcal{O}' とすれば, $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}, \mathcal{O}')$ と (X_n, \mathcal{O}_n) の直積位相は $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), \dots, (X_n, \mathcal{O}_n)$ の直積位相と一致する.

証明 $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), \dots, (X_n, \mathcal{O}_n)$ の直積位相を \mathcal{O} とし, $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}, \mathcal{O}')$ と (X_n, \mathcal{O}_n) の直積位

相を \mathcal{O}'' とする.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{B}} &= \{O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \mid O_i \in \mathcal{O}_i (i = 1, 2, \dots, n)\}, \\ \tilde{\mathcal{B}}' &= \{O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_{n-1} \mid O_i \in \mathcal{O}_i (i = 1, 2, \dots, n-1)\}, \\ \tilde{\mathcal{B}}'' &= \{O' \times O_n \mid O' \in \mathcal{O}', O_n \in \mathcal{O}_n\}\end{aligned}$$

とおくと, 例 8.6 の (1) と命題 9.10 から $\mathcal{O}, \mathcal{O}', \mathcal{O}''$ の各要素はそれぞれ $\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{B}}', \tilde{\mathcal{B}}''$ の要素の合併集合である.

任意の $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \in \tilde{\mathcal{B}}$ に対して $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_{n-1} \in \tilde{\mathcal{B}}' \subset \mathcal{O}'$ だから

$$O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n = (O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_{n-1}) \times O_n \in \tilde{\mathcal{B}}'' \subset \mathcal{O}''$$

である. \mathcal{O} の各要素は $\tilde{\mathcal{B}}$ の要素の合併集合だから $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}''$ である.

$O' \in \mathcal{O}', O_n \in \mathcal{O}_n$ とすると, $\Gamma \subset \tilde{\mathcal{B}}'$ で $O' = \bigcup_{U \in \Gamma} U$ を満たすものが存在し,

$$\Gamma' = \{V \subset (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n \mid V = U \times O_n \text{ を満たす } U \in \Gamma \text{ がある.}\}$$

とおけば, $\Gamma \subset \tilde{\mathcal{B}}'$ より $\Gamma' \subset \tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{O}$ であり, $O' \times O_n = \left(\bigcup_{U \in \Gamma} U\right) \times O_n = \bigcup_{U \in \Gamma} (U \times O_n) = \bigcup_{V \in \Gamma'} V \in \mathcal{O}$ が成り立つ.

\mathcal{O}'' の各要素は $\tilde{\mathcal{B}}''$ の要素の合併集合だから $\mathcal{O}'' \subset \mathcal{O}$ である. 故に $\mathcal{O} = \mathcal{O}''$ が成り立つ. \square

補題 9.12 $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \dots, (X_n, d_n)$ を距離空間とし, 関数 $d: (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n) \times (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n) \rightarrow \mathbf{R}$ を $d((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \dots, d_n(x_n, y_n)\}$ で定める. このとき d は直積 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の距離関数である.

証明 $d((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) \geq d_1(x_1, y_1) \geq 0$ であり, $d((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = 0$ ならば, すべての $i = 1, 2, \dots, n$ に対して $d_i(x_i, y_i) = 0$ だから $x_i = y_i$, すなわち $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ である. $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ に対し, $d_i(y_i, x_i) = d_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) より

$$\begin{aligned}d((y_1, y_2, \dots, y_n), (x_1, x_2, \dots, x_n)) &= \max\{d_1(y_1, x_1), d_2(y_2, x_2), \dots, d_n(y_n, x_n)\} \\ &= \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \dots, d_n(x_n, y_n)\} = d((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)).\end{aligned}$$

また, $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n), (z_1, z_2, \dots, z_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ ならば, 三角不等式より $i = 1, 2, \dots, n$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}d_i(x_i, z_i) &\leq d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i) \\ &\leq \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \dots, d_n(x_n, y_n)\} + \max\{d_1(y_1, z_1), d_2(y_2, z_2), \dots, d_n(y_n, z_n)\} \\ &= d((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) + d((y_1, y_2, \dots, y_n), (z_1, z_2, \dots, z_n))\end{aligned}$$

故に $d((x_1, x_2, \dots, x_n), (z_1, z_2, \dots, z_n)) \leq d((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) + d((y_1, y_2, \dots, y_n), (z_1, z_2, \dots, z_n))$ だから d に関して三角不等式が成り立つ. 以上から d は $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の距離関数である. \square

命題 9.13 $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \dots, (X_n, d_n)$ を距離空間とし, 距離関数 d_i から定まる X_i の位相を \mathcal{O}_{d_i} とする. $(X_1, \mathcal{O}_{d_1}), (X_2, \mathcal{O}_{d_2}), \dots, (X_n, \mathcal{O}_{d_n})$ の直積位相と補題 9.12 の距離関数 d から定まる $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の位相は一致する.

証明 $(X_1, \mathcal{O}_{d_1}), (X_2, \mathcal{O}_{d_2}), \dots, (X_n, \mathcal{O}_{d_n})$ の直積位相を \mathcal{O} , 距離関数 d から定まる $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の位相を \mathcal{O}_d とする. $O_i \in \mathcal{O}_{d_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) とし, $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$ の任意の点 $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ に対し, $p_i \in O_i$ で, O_i は X_i の開集合だから, $r_i > 0$ で, $B_{d_i}(p_i; r_i) \subset O_i$ を満たすものがある. $r = \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ とおき, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_d(p; r)$ ならば $d_j(x_j, p_j) \leq d(x, p) < r \leq r_j$ が各 $j = 1, 2, \dots, n$ に対して成り立つため, $x_j \in B_{d_j}(p_j; r_j) \subset O_j$ である. 従って $x \in O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$ だから $B_d(p; r) \subset O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$ が成り立つ. 故に p は $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の位相 \mathcal{O}_d に関して $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$ の内点だから $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \in \mathcal{O}_d$ で

ある. 例 8.6 の (1) と命題 9.10 から, \mathcal{O} の各要素は $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$ ($O_i \in \mathcal{O}_{d_i}$) という形の集合の合併集合として表されるため, $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_d$ が成り立つ.

$O \in \mathcal{O}_d$ ならば $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in O$ に対し, $r_p > 0$ で $B_d(p; r_p) \subset O$ を満たすものがある. $O_{p,i} = B_{d_i}(p_i; r_p)$ とおくと $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in O_{p,1} \times O_{p,2} \times \cdots \times O_{p,n}$ ならば各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して $x_i \in O_{p,i}$ より $d_i(x_i, p_i) < r_p$ だから $d(x, p) = \max\{d_1(x_1, p_1), d_2(x_2, p_2), \dots, d_n(x_n, p_n)\} < r_p$ が成り立つ. 従って $x \in B_d(p; r_p)$ であり, $B_d(p; r_p) \subset O$ から $x \in O$ である. 故に $O_{p,1} \times O_{p,2} \times \cdots \times O_{p,n} \subset O$ が任意の $p \in O$ に対して成り立つため $\bigcup_{p \in O} (O_{p,1} \times O_{p,2} \times \cdots \times O_{p,n}) \subset O$ である. また各 $p \in O$ に対して $p \in O_{p,1} \times O_{p,2} \times \cdots \times O_{p,n}$ だから $O = \bigcup_{p \in O} \{p\} \subset \bigcup_{p \in O} (O_{p,1} \times O_{p,2} \times \cdots \times O_{p,n})$ も成り立つ. 従って $O = \bigcup_{p \in O} (O_{p,1} \times O_{p,2} \times \cdots \times O_{p,n})$ であり, 命題 9.10 から $O_{p,1} \times O_{p,2} \times \cdots \times O_{p,n} \in \mathcal{O}$ だから $O_{p,1} \times O_{p,2} \times \cdots \times O_{p,n}$ の合併である O も \mathcal{O} に属するため $\mathcal{O}_d \subset \mathcal{O}$ も成り立ち, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$ が得られる. \square

d_1 を $d_1(x, y) = |x - y|$ で与えられる \mathbf{R} の通常の距離関数とすれば上の結果から, 位相空間 $(\mathbf{R}, \mathcal{O}_{d_1})$ の n 個の直積位相は例 3.3 で定めた \mathbf{R}^n の距離関数 d_∞ から定まる \mathbf{R}^n の位相 \mathcal{O}_{d_∞} と一致するため, 例 5.13 から次が得られる.

系 9.14 p を 1 以上の実数とする. 例 3.3 で定めた \mathbf{R}^n の距離関数 d_p から定まる \mathbf{R}^n の位相を \mathcal{O}_{d_p} とすれば, \mathcal{O}_{d_p} は位相空間 $(\mathbf{R}, \mathcal{O}_{d_1})$ の n 個の直積位相と一致する.

補題 9.15 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $\text{pr}_1 : X \times Y \rightarrow X, \text{pr}_2 : X \times Y \rightarrow Y$ をそれぞれ $\text{pr}_1(x, y) = x, \text{pr}_2(x, y) = y$ で定義される写像とする. $p \in X, q \in Y$ に対し, $X \times Y$ の部分空間 $\text{pr}_2^{-1}(q) = X \times \{q\}, \text{pr}_1^{-1}(p) = \{p\} \times Y$ はそれぞれ X, Y と同相である.

証明 相対位相の定義から包含写像 $i_1 : X \times \{q\} \rightarrow X \times Y$ は連続で, 直積位相の定義から $\text{pr}_1 : X \times Y \rightarrow X$ も連続だから命題 7.7 から合成写像 $\text{pr}_1 \circ i_1 : X \times \{q\} \rightarrow X$ は連続である. 写像 $f : X \rightarrow X \times \{q\}$ を $f(x) = (x, q)$ で定めれば, 合成写像 $\text{pr}_1 \circ i_1 \circ f : X \rightarrow X$ は X の恒等写像だから連続であり (注意 8.2), $\text{pr}_2 \circ i_1 \circ f : X \rightarrow Y$ は q への定値写像だから連続である. 従って命題 9.8 によって $i_1 \circ f : X \rightarrow X \times Y$ は連続であり, さらに命題 9.4 から f も連続である. $f \circ \text{pr}_1 \circ i_1$ は $X \times \{q\}$ の恒等写像だから, f は $\text{pr}_1 \circ i_1 : X \times \{q\} \rightarrow X$ の連続な逆写像である. 故に $X \times \{q\}$ は X と同相である. $\{p\} \times Y$ が Y と同相であることも同様に示される. \square

10 連結性

定義 10.1 (X, \mathcal{O}) を位相空間とする.

- (1) Y, Z を X の部分集合とする. $Y \cap \bar{Z} = \bar{Y} \cap Z = \emptyset$ であるとき, Y と Z は離れているという.
- (2) X が離れている 2 つの空でない部分集合の合併集合にならないとき, すなわち X の部分集合 Y, Z が $Y \cap \bar{Z} = \bar{Y} \cap Z = \emptyset$ かつ $X = Y \cup Z$ を満たすならば $Y = \emptyset$ または $Z = \emptyset$ であるとき, (X, \mathcal{O}) は連結であるという.
- (3) X の任意の 2 点 p, q に対し, 連続写像 $\omega : [0, 1] \rightarrow X$ で, $\omega(0) = p, \omega(1) = q$ を満たすものがあるとき (X, \mathcal{O}) は弧状連結であるという.

注意 10.2 (X, d) は距離空間で, \mathcal{O}_d を距離関数 d から定まる X の位相とする. 位相空間 (X, \mathcal{O}_d) において X の部分集合 Y と Z が離れているためには, Y のどの点も Z に含まれる点列の極限にならず, かつ Z のどの点も Y に含まれる点列の極限にならないことが必要十分であることが命題 4.17 から分かる.

命題 10.3 位相空間 (X, \mathcal{O}) が連結であることは, 次の 3 つと同値である.

- (i) (X, \mathcal{O}) の開かつ閉集合は \emptyset と X だけである.
- (ii) $X = Y \cup Z, Y \cap Z = \emptyset$ で, Y, Z が開集合ならば $Y = \emptyset$ または $Z = \emptyset$ である.

(iii) $X = Y \cup Z, Y \cap Z = \emptyset$ で, Y, Z が閉集合ならば $Y = \emptyset$ または $Z = \emptyset$ である.

証明 (X, \mathcal{O}) が連結 \Rightarrow (i): Y を X の開かつ閉集合とし, $Z = X - Y$ とおけば, Z は X の開かつ閉集合 Y の補集合だから Z も開かつ閉集合である. 従って $Y = \overline{Y}, Z = \overline{Z}$ だから $Y \cap \overline{Z} = \overline{Y} \cap Z = Y \cap Z = \emptyset$ となるため, Y と Z は離れている. さらに $X = Y \cup (X - Y) = Y \cup Z$ だから, 仮定より $Y = \emptyset$ または $Z = \emptyset$ である. 後者の場合は $Y = X - (X - Y) = X - Z = X$ となるため, X の開かつ閉集合は \emptyset と X だけである.

(i) \Rightarrow (ii): $X = Y \cup Z, Y \cap Z = \emptyset$ ならば $Y = X - Z$ だから, Y, Z が開集合ならば Y は開集合 Z の補集合になるため, Y は閉集合でもある. 従って Y は \emptyset または X であり, 後者の場合は $Z = X - Y = \emptyset$ である.

(ii) \Rightarrow (iii): $X = Y \cup Z, Y \cap Z = \emptyset$ ならば $Y = X - Z, Z = X - Y$ だから, Y, Z が閉集合ならば Y, Z はそれぞれ閉集合 Z, Y の補集合になるため, Y, Z は開集合でもある. 従って仮定から $Y = \emptyset$ または $Z = \emptyset$ である.

(iii) \Rightarrow (X, \mathcal{O}) が連結: $X = Y \cup Z$ で, Y と Z は離れているとすれば, $Y \cap \overline{Z} = \emptyset$ だから $Y \subset X - \overline{Z}$ より $X = Y \cup Z \subset (X - \overline{Z}) \cup Z \subset X$ となるため $X = (X - \overline{Z}) \cup Z$ である. $Z \subset \overline{Z}$ だから $X - \overline{Z} \subset X - Z$ であることに注意すれば $(X - \overline{Z}) \cap Z \subset (X - Z) \cap Z = \emptyset$ となるため, $(X - \overline{Z}) \cap Z = \emptyset$ である. 従って $X = (X - \overline{Z}) \cup Z$ より $Z = X - (X - \overline{Z}) = \overline{Z}$ が得られるため, Z は閉集合である. 同様に $\overline{Y} \cap Z = \emptyset$ から Y も閉集合であることが示される. $Y \cap Z = Y \cap \overline{Z} = \emptyset$ だから, 仮定より $Y = \emptyset$ または $Z = \emptyset$ である. 故に X が離れている2つの空でない部分集合の合併集合にならないため X は連結である. \square

命題 10.4 位相空間 (X, \mathcal{O}) の部分空間 Y が連結であることは, 次の条件 (*) と同値である.

(*) X の開集合 U, V が $Y \subset U \cup V, Y \cap U \cap V = \emptyset$ を満たせば $Y \cap U = \emptyset$ または $Y \cap V = \emptyset$ である.

証明 X の部分空間 Y に対し, X の開集合 U, V が $Y \subset U \cup V, Y \cap U \cap V = \emptyset$ を満たすとする. $Z = Y \cap U, W = Y \cap V$ とおけば Z, W は Y の開集合であり, $Y \subset U \cup V$ より $Z \cup W = (Y \cap U) \cup (Y \cap V) = Y \cap (U \cup V) = Y$ が成り立つ. また, $Z \cap W = (Y \cap U) \cap (Y \cap V) = Y \cap U \cap V = \emptyset$ だから Y が連結ならば命題 10.3 の (iii) により $Y \cap U = Z = \emptyset$ または $Y \cap V = W = \emptyset$ である.

逆に (*) が満たされると仮定し, $Y = Z \cup W, Z \cap W = \emptyset$ で, Z, W が Y の開集合であるとする. $Z = Y \cap U, W = Y \cap V$ を満たす X の開集合 U, V が存在し, $Y = Z \cup W = (Y \cap U) \cup (Y \cap V) = Y \cap (U \cup V) \subset U \cup V, Y \cap U \cap V = (Y \cap U) \cap (Y \cap V) = Z \cap W = \emptyset$ だから, 仮定から $Z = Y \cap U = \emptyset$ または $W = Y \cap V = \emptyset$ である. 故に命題 10.3 の (i) により Y は連結である. \square

命題 10.5 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. X が連結ならば Y の部分空間 $f(X)$ も連結である.

証明 Y の開集合 U, V が $f(X) \subset U \cup V, f(X) \cap U \cap V = \emptyset$ を満たすとする. $f(X) \subset U \cup V$ より $X = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ であり, $f(X) \cap U \cap V = \emptyset$ より $U \cap V \subset Y - f(X)$ だから $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) \subset f^{-1}(Y - f(X)) = \emptyset$ である. 実際 $x \in f^{-1}(Y - f(X))$ ならば $f(x) \in Y - f(X)$ となって $f(x) \in f(X)$ と矛盾する. 故に $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ である. さらに f の連続性により $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ は X の開集合だから, X の連結性により $f^{-1}(U) = \emptyset$ または $f^{-1}(V) = \emptyset$ である. 前者の場合は $f(X) \cap U = \emptyset$ であり, 後者の場合は $f(X) \cap V = \emptyset$ となるため, 命題 10.4 により $f(X)$ は連結である. \square

命題 10.6 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. X が弧状連結ならば Y の部分空間 $f(X)$ も弧状連結である.

証明 $p, q \in f(X)$ に対し, $f(a) = p, f(b) = q$ を満たす $a, b \in X$ をとれば, 仮定から連続写像 $\omega: [0, 1] \rightarrow X$ で $\omega(0) = a, \omega(1) = b$ を満たすものが存在する. このとき, 合成写像 $f \circ \omega: [0, 1] \rightarrow Y$ は連続で, $(f \circ \omega)([0, 1]) = f(\omega([0, 1])) \subset f(X)$ だから, 写像 $\zeta: [0, 1] \rightarrow f(X)$ を $\zeta(t) = (f \circ \omega)(t)$ で定めることができる. 命題 9.4 から ζ は連続であり, $\zeta(0) = f(\omega(0)) = f(a) = p, \zeta(1) = f(\omega(1)) = f(b) = q$ が成り立つため, $f(X)$ も弧状連結である. \square

命題 10.7 位相空間 (X, \mathcal{O}) の部分空間 Y が連結で, $Y \subset Z \subset \bar{Y}$ ならば Z も連結である.

証明 X の開集合 U, V が $Z \subset U \cup V, Z \cap U \cap V = \emptyset$ を満たすとすれば, $Y \subset Z$ より $Y \subset U \cup V, Y \cap U \cap V = \emptyset$ である. Y の連結性から命題 10.4 より $Y \cap U = \emptyset$ または $Y \cap V = \emptyset$ である. 前者の場合は $Y \subset X - U$ であり $X - U$ は X の閉集合だから命題 6.14 より $\bar{Y} \subset X - U$ が得られる. このとき, 仮定 $Z \subset \bar{Y}$ より $Z \subset X - U$ だから $Z \cap U = \emptyset$ である. 後者の場合も同様にして $Z \cap V = \emptyset$ が得られるため, 命題 10.4 により Z は連結である. \square

命題 10.8 $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), \dots, (X_n, \mathcal{O}_n)$ がすべて連結な位相空間ならば, これらの直積空間も連結である.

証明 命題 9.11 により, 直積空間 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ と $(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$ の位相は一致するため, $n = 2$ の場合に主張を示せば, n による帰納法で一般の場合も主張が示される.

$X_1 \times X_2$ の開集合 U, V で $X_1 \times X_2 = U \cup V, U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在して, $U \neq \emptyset$ であると仮定する. $(x_1, x_2) \in U$ ならば $\text{pr}_i^{-1}(x_i) \cap U$ ($i = 1, 2$) は (x_1, x_2) を含むため, 空集合ではなく, 補題 9.15 によって $\text{pr}_1^{-1}(x_1), \text{pr}_2^{-1}(x_2)$ はそれぞれ連結な位相空間 X_2, X_1 に同相だから, これらは連結な $X_1 \times X_2$ の部分空間である. さらに $\text{pr}_i^{-1}(x_i) \subset X_1 \times X_2 = U \cup V, \text{pr}_i^{-1}(x_i) \cap U \cap V = \emptyset$ だから $\text{pr}_i^{-1}(x_i)$ の連結性と命題 10.4 から $\text{pr}_i^{-1}(x_i) \cap V = \emptyset$ すなわち $\text{pr}_i^{-1}(x_i) \subset X_1 \times X_2 - V = U$ であることがわかる.

U は空集合でないため $(p_1, p_2) \in U$ を一つ選べば, 上で示したことから $\text{pr}_2^{-1}(p_2) \subset U$ であり, 任意の $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ に対し, $(x_1, p_2) \in \text{pr}_2^{-1}(p_2)$ だから $(x_1, p_2) \in U$ である. 従って, 上の結果を再度用いれば $\text{pr}_1^{-1}(x_1) \subset U$ であり, $(x_1, x_2) \in \text{pr}_1^{-1}(x_1)$ だから $(x_1, x_2) \in U$ である. 故に $U = X_1 \times X_2$ となるため, U の補集合 V は空集合になり, $X_1 \times X_2$ は連結であることが示された. \square

補題 10.9 X を \mathbf{R} の連結な部分空間とすると, $p, q \in X$ かつ $p < q$ ならば $(p, q) \subset X$ である.

証明 もし, $c \in (p, q)$ で $c \notin X$ であるものが存在すれば $p \in X \cap (-\infty, c), q \in X \cap (c, \infty)$ だから $X \cap (-\infty, c), X \cap (c, \infty)$ はともに空集合ではない. $(-\infty, c), (c, \infty)$ は \mathbf{R} の開集合で, $c \notin X$ より $X \subset \mathbf{R} - \{c\} = (-\infty, c) \cup (c, \infty)$ と $(-\infty, c) \cap (c, \infty) = \emptyset$ が成り立つため, 命題 10.4 より X が連結であることと矛盾する. 故に $(p, q) \subset X$ である. \square

定理 10.10 (中間値の定理) (X, \mathcal{O}) を連結な位相空間, $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ を連続関数とする. $p, q \in X$ に対し, $f(p) < f(q)$ ならば $f(p) < m < f(q)$ である任意の $m \in \mathbf{R}$ に対して $f(c) = m$ となる $c \in X$ が存在する.

証明 命題 10.5 より $f(X)$ は \mathbf{R} の連結な部分集合で, $f(p)$ と $f(q)$ を含むため, 補題 10.9 から $f(X)$ は $(f(p), f(q))$ を含む. 従って $m \in (f(p), f(q))$ ならば $m \in f(X)$ だから $f(c) = m$ となる $c \in X$ が存在する. \square

実数の連結性を示すために必要な「上界」, 「上限」などの概念を定義する.

定義 10.11 A を \mathbf{R} の部分集合とする.

(1) $A \subset (-\infty, b]$ を満たす実数 b を A の上界といい, A の上界が存在するとき, A は上に有界であるという. また $A \subset [a, \infty)$ を満たす実数 a を A の下界といい, A の下界が存在するとき, A は下に有界であるという. A が上と下に有界であるとき, A は有界であるという.

(2) A が上に有界であるとき, A の上界のうちで最小のものを A の上限といい, $\sup A$ で表す. すなわち s が A の上限であるとは, 「すべての $x \in A$ に対して $x \leq s$ 」と「 $t < s$ ならば $x > t$ である $x \in A$ が存在する。」が成り立つことである. A が下に有界であるとき, A の下界のうちで最大のものを A の下限といい, $\inf A$ で表す.

定理 10.12 \mathbf{R} の空でない部分集合 A が上に有界ならば, A は上限をもつ.

証明 A の上界全体からなる集合を B として, 数列 $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}, (b_k)_{k \in \mathbf{N}}$ を次のように帰納的に定める. まず $a_1 \in A, b_1 \in B$ を一つずつ選ぶ. $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ が, 条件 $a_i \in A, b_i \in B$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n, b_i - a_i \leq 2^{-i+1}(b_1 - a_1)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を満たすように選べたと仮定する.

$\frac{a_n + b_n}{2} \in B$ の場合は $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ と定めれば, $a_{n+1} \in A$, $b_{n+1} \in B$ であり, $b_n \in B$ だから $a_n \leq b_n$ となっているため, $b_n \geq b_{n+1}$ である. さらに, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} \leq 2^{-n}(b_1 - a_1)$ も成り立つ.

$\frac{a_n + b_n}{2} \notin B$ の場合は A の要素で, $\frac{a_n + b_n}{2}$ より大きなものがある. その一つを a_{n+1} として $b_{n+1} = b_n$ と定めれば, $a_{n+1} \in A$, $b_{n+1} \in B$ であり, $b_n \in B$ だから $a_n \leq b_n$ となっているため, $a_n \leq \frac{a_n + b_n}{2} < a_{n+1}$ である. さらに, $b_{n+1} - a_{n+1} < b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2} \leq 2^{-n}(b_1 - a_1)$ も成り立つ.

以上から, すべての項が A に属する単調増加数列 $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ とすべての項が B に属する単調減少数列 $(b_k)_{k \in \mathbf{N}}$ で, 任意の n に対して $b_n - a_n \leq 2^{-n+1}(b_1 - a_1)$ を満たすものがある. すべての n に対して $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$ が成り立つため, $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ は上に有界であり, $(b_k)_{k \in \mathbf{N}}$ は下に有界である. 上に有界な単調増加数列と下に有界な単調減少数列は収束するため $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ と $(b_k)_{k \in \mathbf{N}}$ はともに収束する. そこで $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ とおけば, 不等式 $a_n \leq b_n$, $b_n - a_n \leq 2^{-n+1}(b_1 - a_1)$ より, それぞれ $\alpha \leq \beta$, $\beta - \alpha \leq 0$ を得るため, $\alpha = \beta$ であることがわかる.

任意の $x \in A$ と自然数 n に対し, $b_n \in B$ だから $x \leq b_n$ が成り立つ. この不等式で $n \rightarrow \infty$ とすれば, $x \leq \beta = \alpha$ が得られるため, $\alpha \in B$ であることがわかる. もし α より小さな B の要素 γ が存在すれば, $a_n \leq \gamma$ が任意の自然数 n に対して成り立つため, $n \rightarrow \infty$ とすれば, $\alpha \leq \gamma$ が得られて, γ が α より小さいことと矛盾する. 従って, α より小さい B の要素は存在しないため, α は B の最小元, すなわち, α は A の上限である. \square

定理 10.13 \mathbf{R} は連結である.

証明 \mathbf{R} が連結でないならば \mathbf{R} の空でない開集合 U, V で $\mathbf{R} = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ を満たすものがある. U, V は空でないため $a \in U$, $b \in V$ が選べて, $a < b$ と仮定してよい. U は a を含む開集合だから, $(a - r, a + r) \subset U$ を満たす $r > 0$ があるため, $A = \{x \in \mathbf{R} \mid (a, x) \subset U\}$ とおけば, $a + r \in A$ である. また $x \in A$ ならば $x \leq b$ である. 実際, もし $x > b$ ならば $b \in (a, x) \subset U$ となるが, $b \in V$ であるため $b \in U \cap V$ となって $U \cap V = \emptyset$ と矛盾する. 故に A は空でない上に有界な \mathbf{R} の部分集合だから, 定理 10.12 より上限が存在し, $m = \sup A$ とおけば, $m \geq a + r > a$ である.

U は開集合だから, $m \in U$ ならば $(m - s, m + s) \subset U$ となる $0 < s < m - a$ が存在し, m が A の上限であることから $m - s < c$ を満たす $c \in A$ がある. このとき $(a, c) \subset U$ となるため, $(a, m + s) = (a, c) \cup (m - s, m + s) \subset U$ だから $m + s \in A$ となり, m が A の上界であることと矛盾する.

V は開集合だから, $m \in V$ ならば $(m - t, m + t) \subset V$ となる $0 < t < m - a$ が存在し, m が A の上限であることから $m - t < d \leq m$ を満たす $d \in A$ がある. $m - t < e < d$ を満たす e をとれば, $e \in (a, d) \subset U$ かつ $e \in (m - t, m + t) \subset V$ だから $e \in U \cap V$ となって $U \cap V = \emptyset$ であることと矛盾する.

従って $m \notin U$ かつ $m \notin V$ であるが, これは $\mathbf{R} = U \cup V$ と矛盾するため, \mathbf{R} は連結である. \square

系 10.14 $a, b \in \mathbf{R}$ ($a < b$) に対し, 区間 (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, (a, ∞) , $[a, \infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ は連結である.

証明 関数 $f: \mathbf{R} \rightarrow (-1, 1)$ を $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$ で定めれば, $g(x) = \frac{x}{1 - |x|}$ で定義される関数 $g: (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ は f の逆関数だから f は全単射である. 定理 10.13 より \mathbf{R} は連結で, f は連続関数だから命題 10.5 により, $(-1, 1)$ は連結である. $a < b$ ならば, 関数 $h: (-1, 1) \rightarrow (a, b)$ を $h(x) = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$ で定めれば, h は連続な全単射だから命題 10.5 により, (a, b) は連結である. $\overline{(a, b)} = [a, b]$ であり, I が $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ のいずれかならば $(a, b) \subset I \subset \overline{(a, b)}$ だから, 命題 10.7 により, I は連結である.

関数 $p: \mathbf{R} \rightarrow (0, \infty)$ を $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & x \leq 0 \\ 1+x & x \geq 0 \end{cases}$ で定めれば, $q(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & 0 < x \leq 1 \\ x-1 & x \geq 1 \end{cases}$ で定義される関数 $q: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ は p の逆関数だから p は全単射である. p は連続関数で, \mathbf{R} は連結だから命題 10.5 により, $(0, \infty)$ は連結である. 関数 $r: (0, \infty) \rightarrow (a, \infty)$ を $r(x) = x + a$ で定めれば, r は連続な全単射だから命題 10.5 により, (a, ∞)

は連結である. $\overline{(a, \infty)} = [a, \infty)$ だから, 命題 10.7 により, $[a, \infty)$ も連結である. さらに関数 $u : (-b, \infty) \rightarrow (-\infty, b)$, $v : [-b, \infty) \rightarrow (-\infty, b]$ を $u(x) = -x$, $v(x) = -x$ で定めれば, これらは連続な全単射だから, 命題 10.5 により, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ も連結である. \square

系 10.15 X を \mathbf{R} の部分空間とし, $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ を連続関数とする. 閉区間 $[a, b]$ が X に含まれていて, $f(a) \neq f(b)$ であるとき, $f(a) < m < f(b)$ または $f(b) < m < f(a)$ を満たす任意の実数 m に対して $f(c) = m$ を満たす $c \in (a, b)$ が存在する.

証明 $i : [a, b] \rightarrow X$ を包含写像とすれば, $f \circ i : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ は相対位相の定義と命題 7.7 から連続関数である. 系 10.14 から $[a, b]$ は連結だから定理 10.10 により $f(c) = m$ を満たす $c \in [a, b]$ が存在する. $f(c) = m \neq f(a), f(b)$ だから, $c \neq a, b$ である. \square

系 10.16 弧状連結な位相空間は連結である.

証明 位相空間 (X, \mathcal{O}) が連結でないならば, 空でない開集合 U, V で $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在する. U, V は空でないため $p \in U, q \in V$ を選ぶことができる. (X, \mathcal{O}) が弧状連結ならば連続写像 $\omega : [0, 1] \rightarrow X$ で $\omega(0) = p, \omega(1) = q$ を満たすものが存在する. $0 \in \omega^{-1}(U), 1 \in \omega^{-1}(V)$ だから $\omega^{-1}(U), \omega^{-1}(V)$ はともに $[0, 1]$ の空でない開集合である. さらに $X = U \cup V, U \cap V = \emptyset$ だから $\omega^{-1}(U) \cup \omega^{-1}(V) = \omega^{-1}(U \cup V) = \omega^{-1}(X) = [0, 1]$, $\omega^{-1}(U) \cap \omega^{-1}(V) = \omega^{-1}(U \cap V) = \emptyset$ となって, $[0, 1]$ が連結であるという系 10.14 と矛盾する. 従って X が弧状連結ならば連結である. \square

命題 10.17 \mathbf{R} の連結な部分空間は \mathbf{R} 全体か, 系 10.14 の区間のいずれかである.

証明 X を \mathbf{R} の連結な部分空間とする. X が下に有界である場合は $a = \inf X$ とおけば, $X \subset [a, \infty)$ であり, 下に有界でない場合は $a = -\infty$ とおく. また, X が上に有界である場合は $b = \sup X$ とおけば, $X \subset (-\infty, b]$ であり, 上に有界でない場合は $b = \infty$ とおく. 従って X が有界ならば $X \subset [a, b]$ である.

$x \in (a, b)$ に対し, $a \neq -\infty$ の場合は a が X の下限であることから $a < p < x$ を満たす $p \in X$ が存在し, $a = -\infty$ の場合は X が下に有界ではないため, $p < x$ を満たす $p \in X$ が存在する. 同様に, $b \neq \infty$ の場合は b が X の上限であることから $x < q < b$ を満たす $q \in X$ が存在し, $b = \infty$ の場合は X が上に有界ではないため, $q > x$ を満たす $q \in X$ がある. 従って, 補題 10.9 から $(p, q) \subset X$ であり, $x \in (p, q)$ より $x \in X$ である. 故に $(a, b) \subset X$ である.

以上から, X が有界ならば $(a, b) \subset X \subset [a, b]$ となるため, X は $(a, b), (a, b], [a, b), [a, b]$ のいずれかで, X が下に有界であるが上に有界でない場合は $(a, \infty) \subset X \subset [a, \infty)$ となるため, X は $(a, \infty), [a, \infty)$ のいずれかであり, X が上に有界であるが下に有界でない場合は $(-\infty, b) \subset X \subset (-\infty, b]$ となるため, X は $(-\infty, b), (-\infty, b]$ のいずれかである. X が上にも下にも有界でない場合は $(-\infty, \infty) \subset X$ だから $X = (-\infty, \infty) = \mathbf{R}$ である. \square

11 コンパクト性

定義 11.1 位相空間 (X, \mathcal{O}) が次の条件を (C) 満たすとき, (X, \mathcal{O}) はコンパクトであるという.

(C) $\Gamma \subset \mathcal{O}$ が $X = \bigcup_{O \in \Gamma} O$ を満たせば Γ の有限部分集合 Γ' で $X = \bigcup_{O \in \Gamma'} O$ を満たすものがある.

命題 11.2 位相空間 (X, \mathcal{O}) の部分空間 Y がコンパクトであることと次の条件 (*) は同値である.

(*) \mathcal{O} の部分集合 Γ が $Y \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O$ を満たせば Γ の有限部分集合 Γ' で $Y \subset \bigcup_{O \in \Gamma'} O$ となるものがある.

証明 条件 (*) を仮定し, Y の開集合を要素とする集合 Δ は $Y = \bigcup_{O \in \Delta} O$ を満たすとする. 各 $U \in \Delta$ に対し, $U = Y \cap O_U$ となる $O_U \in \mathcal{O}$ を選び, $\Gamma = \{O_U | U \in \Delta\}$ とおけば Γ は X の開集合を要素とする集合で, 各 $U \in \Delta$

に対し $U \subset O_U$ だから, $Y = \bigcup_{O \in \Delta} O \subset \bigcup_{O_U \in \Gamma} O_U$ である. 故に (*) から Γ の有限部分集合 $\Gamma' = \{O_{U_1}, O_{U_2}, \dots, O_{U_n}\}$ で $Y \subset \bigcup_{O \in \Gamma'} O = \bigcup_{i=1}^n O_{U_i}$ となるものがある. そこで $\Delta' = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ とおけば, $\Delta' \subset \Delta$ で $i = 1, 2, \dots, n$ に対し $Y \cap O_{U_i} = U_i$ だから $Y = Y \cap \left(\bigcup_{i=1}^n O_{U_i} \right) = \bigcup_{i=1}^n (Y \cap O_{U_i}) = \bigcup_{i=1}^n U_i = \bigcup_{U \in \Delta'} U$ となり, Y はコンパクトである. Y はコンパクトであると仮定し, \mathcal{O} の部分集合 Γ は $Y \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O$ を満たすとする. $\Delta = \{Y \cap O \mid O \in \Gamma\}$ とおけば, Δ は Y の開集合からなる集合であり, $Y = Y \cap \left(\bigcup_{O \in \Gamma} O \right) = \bigcup_{O \in \Gamma} (Y \cap O) = \bigcup_{U \in \Delta} U$ だから, Δ の有限部分集合 Δ' で $Y = \bigcup_{U \in \Delta'} U$ となるものがある. $\Delta' = \{Y \cap O_1, Y \cap O_2, \dots, Y \cap O_n\}$ ($O_1, O_2, \dots, O_n \in \Gamma$) として, $\Gamma' = \{O_1, O_2, \dots, O_n\}$ とおけば, Γ' は Γ の有限部分集合であり, $Y = \bigcup_{U \in \Delta'} U = \bigcup_{i=1}^n (Y \cap O_i) \subset \bigcup_{i=1}^n O_i = \bigcup_{O \in \Gamma'} O$ となるため, (*) が満たされる. \square

定理 11.3 \mathbf{R} の有限閉区間 $[a, b]$ はコンパクトである.

証明 \mathbf{R} の開集合を要素とする集合 Γ に対して $[a, b] \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O$ が成り立つと仮定して, 区間 $(a, b]$ の部分集合 A を

$$A = \{x \in (a, b] \mid [a, x] \subset O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_n \text{ を満たす } O_1, O_2, \dots, O_n \in \Gamma \text{ が存在する.}\}$$

で定める. このとき $b \in A$ であることを示せば, 命題 11.2 により $[a, b]$ はコンパクトである.

$a \in [a, b] \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O$ だから $a \in O$ を満たす $O \in \Gamma$ がある. a は O の内点だから $(a-r, a+r) \subset O$ を満たす $r > 0$ が存在する. このとき $c = \min\{a + \frac{r}{2}, b\}$ とおけば, $[a, c] \subset O$ となるため, $c \in A$ であり, A は空集合ではない. A の定義から b は A の上界だから, A は上に有界である. 従って定理 10.12 から A の上限が存在して, u を A の上限とする. $c \in A$ だから $u \geq c > a$ であり, b は A の上界だから $u \leq b$ であることに注意する.

$u < b$ と仮定すれば, $u \in [a, b] \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O$ だから $u \in U$ を満たす $U \in \Gamma$ がある. u は U の内点だから $(u-s, u+s) \subset U$ を満たす $s > 0$ が存在するため, $d = \min\{u + \frac{s}{2}, b\}$ とおけば, $u < d \leq b$ かつ $(u-s, d] \subset U$ である. また, u は A の上限だから $u-s < v \leq u$ を満たす $v \in A$ が存在し, さらに $[a, v] \subset O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_n$ を満たす $O_1, O_2, \dots, O_n \in \Gamma$ が存在する. このとき, $[a, d] = [a, v] \cup (u-s, d] \subset O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_n \cup U$ が成り立つため, $d \in A$ となり, u が A の上限であることと矛盾する. 故に $u = b$ である.

$b \in [a, b] \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O$ だから $b \in V$ を満たす $V \in \Gamma$ がある. b は V の内点だから $(b-t, b+t) \subset V$ を満たす $t > 0$ が存在する. また, b は A の上限だから $b-t < w \leq b$ を満たす $w \in A$ が存在し, さらに $[a, w] \subset W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n$ を満たす $W_1, W_2, \dots, W_n \in \Gamma$ が存在する. このとき, $[a, b] = [a, w] \cup (b-t, b] \subset W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n \cup V$ が成り立つため, $b \in A$ であることがわかる. 従って Γ の有限部分集合 $\Gamma' = \{W_1, W_2, \dots, W_n, V\}$ は $[a, b] \subset \bigcup_{O \in \Gamma'} O$ を満たすため $[a, b]$ はコンパクトである. \square

補題 11.4 \mathbf{R} の有界な閉集合は最大値と最小値をもつ.

証明 X を \mathbf{R} の有界な閉集合とすれば定理 10.12 により X の上限と下限が存在する. $M = \sup X$, $m = \inf X$ とおく. もし $M \notin X$ ならば $M \in \mathbf{R} - X$ であり, $\mathbf{R} - X$ は開集合だから $r > 0$ で $(M-r, M+r) \subset \mathbf{R} - X$ を満たすものが存在する. 一方 M は X の上限だから $M-r < a \leq M$ を満たす $a \in X$ が存在する. このとき $a \in (M-r, M+r) \subset \mathbf{R} - X$ だから, $a \notin X$ となり, 矛盾が生じる. 故に $M \in X$ である. $m \in X$ であることも同様に示され, M が X の最大値, m が X の最小値である. \square

補題 11.5 次の条件 (i) と (ii) は同値である.

- (i) 位相空間 (X, \mathcal{O}) はコンパクトである.
- (ii) (X, \mathcal{O}) の基底 \mathcal{B} で次の条件を満たすものがある.

「 $\Gamma \subset \mathcal{B}$ かつ $X = \bigcup_{O \in \Gamma} O$ ならば Γ の有限部分集合 Γ' で $X = \bigcup_{O \in \Gamma'} O$ となるものがある。」

証明 (i) \Rightarrow (ii): $\mathcal{B} = \mathcal{O}$ とすればよい。

(ii) \Rightarrow (i): $\Gamma \subset \mathcal{O}$ は $X = \bigcup_{O \in \Gamma} O$ を満たすとする。任意の $x \in X$ に対し、 x を含む $O_x \in \Gamma$ が存在し、さらに \mathcal{B} が (X, \mathcal{O}) の基底であることから O_x は \mathcal{B} の要素の合併集合になるため、 $U_x \in \mathcal{B}$ で $x \in U_x \subset O_x$ を満たすものがある。そこで $\Delta = \{U_x | x \in X\}$ とおくと、 $\Delta \subset \mathcal{B}$ かつ $X = \bigcup_{U_x \in \Delta} U_x$ である。従って、仮定から $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n} \in \Delta$ で $X = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n}$ を満たすものがある。このとき $U_{x_i} \subset O_{x_i}$ が $i = 1, 2, \dots, n$ に対して成り立つため、 $X = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n} \subset O_{x_1} \cup O_{x_2} \cup \dots \cup O_{x_n}$ だから $X = O_{x_1} \cup O_{x_2} \cup \dots \cup O_{x_n}$ である。故に X はコンパクトである。□

定理 11.6 $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), \dots, (X_n, \mathcal{O}_n)$ がすべてコンパクトな位相空間ならば、これらの直積空間もコンパクトである。

証明 命題 9.11 により、直積空間 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ と $(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$ の位相は一致するため、 $n = 2$ の場合に主張を示せば、 n による帰納法で一般の場合も主張が示される。

$\mathcal{B} = \{U \times V | U \in \mathcal{O}_1, V \in \mathcal{O}_2\}$ とおくと命題 9.10 から \mathcal{B} は $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2)$ の直積空間の基底である。 $\Gamma \subset \mathcal{B}$ が $X_1 \times X_2 = \bigcup_{O \in \Gamma} O$ を満たすとする。各 $y \in X_2$ に対し、補題 9.15 により、 X_1 と $\text{pr}_2^{-1}(y)$ は同相だから $\text{pr}_2^{-1}(y)$

はコンパクトである。従って $U_{y,1} \times V_{y,1}, U_{y,2} \times V_{y,2}, \dots, U_{y,n(y)} \times V_{y,n(y)} \in \Gamma$ で、 $\text{pr}_2^{-1}(y) \subset \bigcup_{i=1}^{n(y)} (U_{y,i} \times V_{y,i})$ を満たすものが存在する。 $y \notin V_{y,i}$ ならば $\text{pr}_2^{-1}(y) \cap (U_{y,i} \times V_{y,i}) = \emptyset$ だから、 $y \in V_{y,i}$ である i についての $U_{y,i} \times V_{y,i}$ の合併集合は $\text{pr}_2^{-1}(y)$ を含むため、 $y \notin V_{y,i}$ である番号 i は除外して番号を付け直し、すべての

$i = 1, 2, \dots, n(y)$ に対して $y \in V_{y,i}$ であるとしてよい。そこで、 $V_y = \bigcap_{i=1}^{n(y)} V_{y,i}$ とおけば V_y は y を含む開集合である。故に $X_2 = \bigcup_{y \in X_2} \{y\} \subset \bigcup_{y \in X_2} V_y \subset X_2$ より $X_2 = \bigcup_{y \in X_2} V_y$ だから X_2 のコンパクト性から、 $y_1, y_2, \dots, y_k \in X_2$

で $X_2 = \bigcup_{j=1}^k V_{y_j}$ を満たすものが存在する。このとき、 $X_1 \times X_2 = \bigcup_{1 \leq j \leq k, 1 \leq i \leq n(y_j)} (U_{y_j,i} \times V_{y_j,i})$ が成り立つ。実際、

任意の $(x, y) \in X_1 \times X_2$ に対し、 $y \in V_{y_j}$ となる j が存在し、さらに $(x, y_j) \in \text{pr}_2^{-1}(y_j) \subset \bigcup_{i=1}^{n(y_j)} (U_{y_j,i} \times V_{y_j,i})$ だか

ら $(x, y_j) \in U_{y_j,l} \times V_{y_j,l}$ となる l が存在して $y \in V_{y_j} = \bigcap_{i=1}^{n(y_j)} V_{y_j,i} \subset V_{y_j,l}$ であるため、 $(x, y) \in U_{y_j,l} \times V_{y_j,l}$ が得られる。 $1 \leq j \leq k, 1 \leq i \leq n(y_j)$ に対して $U_{y_j,i} \times V_{y_j,i} \in \Gamma$ だから補題 11.5 により $X_1 \times X_2$ はコンパクトである。□

定理 11.3 と定理 11.6 から次の結果が得られる。

系 11.7 有限閉区間の直積 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ はコンパクトな \mathbf{R}^n の部分空間である。

命題 11.8 位相空間 (X, \mathcal{O}) がコンパクトで、 X の部分空間 Y が X の閉集合ならば Y もコンパクトである。

証明 X の開集合からなる集合 Γ が $Y \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O$ を満たすとする。 Y は X の閉集合だから $X - Y$ は X の開集合

で、 $X = Y \cup (X - Y)$ と $Y \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O$ より $X = \left(\bigcup_{O \in \Gamma} O \right) \cup (X - Y)$ が成り立つ。故に X のコンパクト性から Γ の有限部分集合 Γ' で $X = \left(\bigcup_{O \in \Gamma'} O \right) \cup (X - Y)$ を満たすものがある。このとき

$Y = Y \cap X = Y \cap \left(\left(\bigcup_{O \in \Gamma'} O \right) \cup (X - Y) \right) = \left(Y \cap \left(\bigcup_{O \in \Gamma'} O \right) \right) \cup (Y \cap (X - Y)) = \left(Y \cap \left(\bigcup_{O \in \Gamma'} O \right) \right) \cup \emptyset \subset \bigcup_{O \in \Gamma'} O$

が成り立つため、命題 11.2 から Y はコンパクトである。□

命題 11.9 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間、 $f : X \rightarrow Y$ を連続写像とする。 (X, \mathcal{O}_X) がコンパクトならば f の像

$f(X)$ はコンパクトな部分空間である.

証明 Y の開集合からなる集合 Γ が $f(X) \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O$ を満たすとして $\Delta = \{f^{-1}(O) \mid O \in \Gamma\}$ とおく. このとき f の連続性から Δ は X の開集合からなる集合である. 任意の $x \in X$ に対して $f(x) \in f(X)$ だから $f(x) \in O$ となる $O \in \Gamma$ が存在する. このとき, $x \in f^{-1}(O)$ だから $X = \bigcup_{O \in \Delta} O$ である. X のコンパクト性により, Δ の有限部分集合 $\{f^{-1}(O_1), f^{-1}(O_2), \dots, f^{-1}(O_n)\}$ ($O_1, O_2, \dots, O_n \in \Gamma$) で $X = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(O_i)$ を満たすものがある. 故に任意の $y \in f(X)$ に対して $y = f(x)$ となる $x \in X$ をとれば, $x \in f^{-1}(O_k)$ となる k がある. このとき $y = f(x) \in O_k$ だから, $f(X) \subset \bigcup_{i=1}^n O_i$ が成り立つことがわかる. 故に命題 11.2 から $f(X)$ はコンパクトである. \square

定義 11.10 位相空間 (X, \mathcal{O}) が次の条件 (T_2) を満たすとき, (X, \mathcal{O}) を Hausdorff 空間または T_2 空間という.

(T_2) x, y を X の異なる 2 点とすると, x を含む開集合 U と y を含む開集合 V で $U \cap V = \emptyset$ となるものがある.

注意 11.11 Hausdorff 空間において, 一点からなる部分集合は閉集合である. 実際, X を Hausdorff 空間とし, $x \in X$ とすれば, 任意の $y \in X - \{x\}$ に対し, x を含む開集合 U と y を含む開集合 V で $U \cap V = \emptyset$ となるものが存在し, $V \subset X - U \subset X - \{x\}$ だから, y は $X - \{x\}$ の内点である. 従って, $X - \{x\}$ は開集合だから, $\{x\}$ は閉集合である.

例 11.12 (X, d) を距離空間とし, \mathcal{O}_d を距離関数 d から定まる X の位相とする. x, y を X の異なる 2 点として $U = B_d(x; \frac{d(x,y)}{2})$, $V = B_d(y; \frac{d(x,y)}{2})$ とおけば, U, V はそれぞれ x, y の開近傍である. もし $z \in U \cap V$ が存在すれば $d(x, z) < \frac{d(x,y)}{2}$ かつ $d(z, y) = d(y, z) < \frac{d(x,y)}{2}$ だから, 三角不等式から $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < d(x, y)$ が得られるため, 矛盾が生じる. 故に $U \cap V = \emptyset$ だから, 位相空間 (X, \mathcal{O}_d) は Hausdorff 空間である.

命題 11.13 Hausdorff 空間の任意の部分空間は Hausdorff 空間である.

証明 (X, d) を Hausdorff 空間, Y を X の部分空間とする. x, y を Y の異なる 2 点とすれば, 仮定から X の開集合 U, V で $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在する. このとき $U \cap Y, V \cap Y$ はともに Y の開集合で, それぞれ x, y を含み, $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = (U \cap V) \cap Y = \emptyset \cap Y = \emptyset$ である. 故に Y は Hausdorff 空間である. \square

命題 11.14 $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), \dots, (X_n, \mathcal{O}_n)$ が Hausdorff 空間ならば, これらの直積空間も Hausdorff 空間である.

証明 $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)$ が $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ の異なる 2 点ならば $x_j \neq y_j$ となる j がある. X_j は Hausdorff 空間だから X_j の開集合 U, V で $x_j \in U, y_j \in V, U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在する. このとき, $\text{pr}_j^{-1}(U), \text{pr}_j^{-1}(V)$ はともに $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ の開集合で, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \text{pr}_j^{-1}(U), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \text{pr}_j^{-1}(V)$ であり, $\text{pr}_j^{-1}(U) \cap \text{pr}_j^{-1}(V) = \text{pr}_j^{-1}(U \cap V) = \text{pr}_j^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ だから $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ は Hausdorff 空間である. \square

命題 11.15 A, B を Hausdorff 空間 (X, \mathcal{O}) のコンパクトな部分空間とする. $A \cap B = \emptyset$ ならば X の開集合 U, V で $A \subset U, B \subset V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を満たすものがある. とくに Hausdorff 空間のコンパクトな部分空間は閉集合である.

証明 $A \cap B = \emptyset$ だから $x \in A, y \in B$ ならば $x \neq y$ であるため, X の開集合 $U_{x,y}, V_{x,y}$ で $x \in U_{x,y}, y \in V_{x,y}, U_{x,y} \cap V_{x,y} = \emptyset$ を満たすものが存在する. 各 $x \in A$ に対し, $B = \bigcup_{y \in B} \{y\} \subset \bigcup_{y \in B} V_{x,y}$ だから, B のコンパクト性により $y_1, y_2, \dots, y_{n(x)} \in B$ で $B \subset \bigcup_{j=1}^{n(x)} V_{x,y_j}$ を満たすものが存在する. $U_x = \bigcap_{j=1}^{n(x)} U_{x,y_j}$ とおけば, 各 U_{x,y_j} は x を含むため, $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} U_x$ である. 従って A のコンパクト性により $x_1, x_2, \dots, x_m \in A$ で $A \subset \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}$ を満たすものが存在する. そこで $U = \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}, V = \bigcap_{i=1}^m \left(\bigcup_{j=1}^{n(x_i)} V_{x_i, y_j} \right)$ とおけば, $A \subset U$ であり, 各 $i = 1, 2, \dots, m$ に対して $B \subset \bigcup_{j=1}^{n(x_i)} V_{x_i, y_j}$ より $B \subset V$ である. $V \subset \bigcup_{j=1}^{n(x_i)} V_{x_i, y_j}, U_{x_i} \subset U_{x_i, y_j}$ であることに注意すれば次の式が得られる.

$$\begin{aligned}
U \cap V &= \left(\bigcup_{i=1}^m U_{x_i} \right) \cap V = \bigcup_{i=1}^m \left(U_{x_i} \cap V \right) \subset \bigcup_{i=1}^m \left(U_{x_i} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n(x_i)} V_{x_i, y_j} \right) \right) = \bigcup_{i=1}^m \left(\bigcup_{j=1}^{n(x_i)} \left(U_{x_i} \cap V_{x_i, y_j} \right) \right) \\
&\subset \bigcup_{i=1}^m \left(\bigcup_{j=1}^{n(x_i)} \left(U_{x_i, y_j} \cap V_{x_i, y_j} \right) \right) = \bigcup_{i=1}^m \left(\bigcup_{j=1}^{n(x_i)} \emptyset \right) = \emptyset
\end{aligned}$$

とくに任意の $y \in X - A$ に対して $B = \{y\}$ として上の結果を用いれば, y を含む開集合 V で A と交わらないものが存在するため, y は $X - A$ の内点であることがわかる. 従って A は閉集合である. \square

命題 11.16 コンパクトな位相空間から Hausdorff 空間への連続写像は閉写像である.

証明 (X, \mathcal{O}_X) をコンパクトな位相空間, (Y, \mathcal{O}_Y) を Hausdorff 空間とし, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. A を X の閉集合とすれば, 命題 11.8 により, A は X のコンパクトな部分空間だから, 命題 11.9 により, $f(A)$ も Y のコンパクトな部分空間である. Y は Hausdorff 空間だから, 命題 11.15 により $f(A)$ は閉集合である. \square

定義 11.17 (X, d) を距離空間とする. X の部分集合 A に対して $p \in X$ と $R > 0$ で, $A \subset B_d(p; R)$ を満たすものがあるとき, A は有界であるという.

注意 11.18 $p, q \in X$ と $R > 0$ に対して三角不等式から $B_d(p; R) \subset B_d(q; R + d(p, q))$ が示されるため, p_0 を X の定点とすると, A が有界ならば $R' > 0$ で, $A \subset B_d(p_0; R')$ を満たすものがある.

定理 11.19 \mathbf{R}^n の部分空間 X がコンパクトであるためには X が有界な閉集合であることが必要十分である.

証明 \mathbf{R}^n の部分空間 X がコンパクトならば, 例 11.12 から \mathbf{R}^n は Hausdorff 空間だから, 命題 11.15 より, X は閉集合である. 各自然数 k に対して, 原点を中心として半径が k である開球 $B_n(\mathbf{0}; k)$ を考えれば $X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_n(\mathbf{0}; k)$

だから, X のコンパクト性により, $X \subset \bigcup_{i=1}^N B_n(\mathbf{0}; k_i)$ を満たす自然数 k_1, k_2, \dots, k_N がある. これらのうちで最大のものを K とすれば, $i = 1, 2, \dots, N$ に対して $B_n(\mathbf{0}; k_i) \subset B_n(\mathbf{0}; K)$ だから $X \subset B_n(\mathbf{0}; K)$ となるため, X は有界である.

X が \mathbf{R}^n の有界な閉集合ならば注意 11.18 により $X \subset B_n(\mathbf{0}; K)$ を満たす正の実数 K が存在する. $[-K, K]^n$ を閉区間 $[-K, K]$ の n 個の直積集合とすれば $B_n(\mathbf{0}; K) \subset [-K, K]^n$ だから X は $[-K, K]^n$ の閉集合である. 故に系 11.7 と命題 11.8 により X はコンパクトである. \square

定理 11.20 (最大値・最小値の定理) コンパクトな位相空間で定義された実数値連続関数は最大値と最小値をもつ.

証明 (X, \mathcal{O}) をコンパクトな位相空間, $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ を連続関数とする. 命題 11.9 により $f(X)$ は \mathbf{R} のコンパクトな部分空間だから, 定理 11.19 によって $f(X)$ は \mathbf{R} の有界な閉集合である. 従って, 補題 11.4 により $f(X)$ は最大値と最小値をもつ. $f(X)$ の最大値は f の最大値で, $f(X)$ の最小値は f の最小値に他ならない. \square

定理 11.19 と定理 11.20 から, 次の結果が得られる.

系 11.21 \mathbf{R}^n の有界な閉集合で定義された実数値連続関数は最大値と最小値をもつ.

12 一様連続写像

命題 12.1 距離空間 $(X, d), (Y, d')$ に対し, $d_1: (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbf{R}$ を $d_1((x, y), (z, w)) = d(x, z) + d'(y, w)$ で定めれば d_1 は $X \times Y$ の距離関数であり, d_1 から定まる $X \times Y$ の位相は d から定まる X の位相と d' から定まる Y の位相の直積位相と一致する.

証明 d_1 が $X \times Y$ の距離関数であることは容易に確かめられる. $d_\infty: (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbf{R}$ を $d_\infty((x, y), (z, w)) = \max\{d(x, z), d'(y, w)\}$ で定めれば補題 9.12 から d_∞ は $X \times Y$ の距離関数であり, 命題 9.13 により d_∞ から定

まる $X \times Y$ の位相は d から定まる X の位相と d' から定まる Y の位相の直積位相と一致する. 任意の $(x, y), (z, w) \in X \times Y$ に対し, $d_\infty((x, y), (z, w)) = \max\{d(x, z), d'(y, w)\} \leq d(x, z) + d'(y, w) = d_1((x, y), (z, w))$ であり, $d_1((x, y), (z, w)) = d(x, z) + d'(y, w) \leq 2 \max\{d(x, z), d'(y, w)\} = d_\infty((x, y), (z, w))$ だから

$$d_\infty((x, y), (z, w)) \leq d_1((x, y), (z, w)) \leq 2d_\infty((x, y), (z, w))$$

が成り立つ. 従って注意 5.12 より $X \times Y$ の d_1 から定まる位相と d_∞ から定まる位相は一致するため, 主張が示された. \square

命題 12.2 (X, d) を距離空間とし, d_1 を命題 12.1 で $Y = X, d' = d$ として定義した $X \times X$ の距離関数とする.

- (1) $(x, y), (p, q) \in X \times X$ に対し, $|d(x, y) - d(p, q)| \leq d(x, p) + d(y, q)$ が成り立つ.
- (2) 距離関数 $d : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ は距離空間 $(X \times X, d_1)$ 上の実数値連続関数である.

証明 (1) 三角不等式より $d(x, y) \leq d(x, p) + d(p, y) \leq d(x, p) + d(p, q) + d(y, p)$ が得られるため $d(x, y) - d(p, q) \leq d(x, p) + d(y, p)$ であり, この不等式の x と p, y と q を入れ替えれば $d(p, q) - d(x, y) \leq d(p, x) + d(q, y) = d(x, p) + d(y, q)$ が得られるので $|d(x, y) - d(p, q)| \leq d(x, p) + d(y, q)$ が成り立つ.

(2) (1) の結果から $(x, y), (p, q) \in X \times X$ に対し, $|d(x, y) - d(p, q)| \leq d_1((x, y), (p, q))$ だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $d_1((x, y), (p, q)) < \varepsilon$ ならば $|d(x, y) - d(p, q)| < \varepsilon$ が成り立つ. 故に d は任意の $(p, q) \in X \times X$ で連続である. \square

距離空間 (X, d) が与えられたとき, X の部分集合 A と $p \in X$ に対し, $d(A, p) = \inf\{d(x, p) \mid x \in A\}$ とおく.

命題 12.3 (X, d) を距離空間, A を X の部分集合とすると, $|d(A, x) - d(A, y)| \leq d(x, y)$ が成り立つ. 従って, 関数 $d_A : X \rightarrow \mathbf{R}$ を $d_A(x) = d(A, x)$ で定めれば d_A は連続である.

証明 $a \in A, x, y \in X$ に対して三角不等式から $d(A, x) \leq d(a, x) \leq d(a, y) + d(y, x) = d(a, y) + d(x, y)$ が成り立つため, 任意の a に対して $d(A, x) - d(x, y) \leq d(a, y)$ が成り立つ. この不等式の左辺は a に無関係だから, $d(A, y)$ の定義から $d(A, x) - d(x, y) \leq d(A, y)$ である. 故に $d(A, x) - d(A, y) \leq d(x, y)$ が得られ, x と y を入れ替えれば, $d(A, y) - d(A, x) \leq d(y, x) = d(x, y)$ が得られるため, $|d(A, x) - d(A, y)| \leq d(x, y)$ が成り立つ. \square

命題 12.4 (X, d) を距離空間, A を X の部分集合とすれば $\bar{A} = d_A^{-1}(\{0\})$ が成り立つ. 従って A が X の閉集合であることと, $A = d_A^{-1}(\{0\})$ は同値である.

証明 $\{0\}$ は \mathbf{R} の閉集合で, 命題 12.3 から d_A は連続関数だから, 命題 7.6 により $d_A^{-1}(\{0\})$ は閉集合である. $x \in A$ ならば $d_A(x) = d(A, x) = 0$ だから $x \in d_A^{-1}(\{0\})$ となるので, $A \subset d_A^{-1}(\{0\})$ である. 従って命題 6.14 から $\bar{A} \subset d_A^{-1}(\{0\})$ である. $x \in d_A^{-1}(\{0\})$ ならば $d(A, x) = 0$ だから任意の自然数 n に対して $d(a_n, x) < \frac{1}{n}$ を満たす $a_n \in A$ が存在する. このとき点列 $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ は x に収束するため, 命題 4.17 から $x \in \bar{A}$ である. 故に $d_A^{-1}(\{0\}) \subset \bar{A}$ も成り立つので $\bar{A} = d_A^{-1}(\{0\})$ である. \square

$r > 0$ に対し, X の部分集合 $U(A; r)$ を $U(A; r) = \{x \in X \mid d(A, x) < r\} = d_A^{-1}((-\infty, r))$ で定める.

命題 12.5 (X, d) を距離空間, C を X のコンパクトな部分空間, O を X の開集合で, C を含むものとする. このとき $r > 0$ で, $U(C; r) \subset O$ を満たすものが存在する.

証明 関数 $d_{X-O} : X \rightarrow \mathbf{R}$ の定義域を C に制限すれば, 最大値・最小値の定理から d_{X-O} は C における最小値をとり, その値を r とする. もし $r = 0$ ならば $d_{X-O}(p) = 0$ となる $p \in C$ をとれば, O は開集合だから $X - O$ は閉集合であることと命題 12.4 から $p \in d_{X-O}^{-1}(\{0\}) = \overline{X - O} = X - O$ である. 従って $p \in C \cap (X - O)$ となるが, $C \subset O$ だから $C \cap (X - O) = \emptyset$ であることと矛盾が生じる. 故に $r > 0$ であり, $x \in X - O$ ならば任意の $c \in C$ に対して $d(c, x) = d(x, c) \geq d(X - O, c) \geq r$ が成り立つため, $d(C, x) \geq r$ である. $x \in U(C; r)$ ならば $d(C, x) < r$

だから, 上の不等式から $x \notin X - O$ すなわち $x \in O$ である. よって $U(C; r) \subset O$ である. \square

定義 12.6 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間, $f : X \rightarrow Y$ を写像とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ で条件「 $d_X(x, y) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ 」を満たすものが存在するとき, f は一様連続であるという.

注意 12.7 距離空間 (X, d_X) が与えられたとき, $r > 0$ に対して $X \times X$ の部分集合 $D_X(r)$ を次で定める.

$$D_X(r) = \{(x, y) \in X \times X \mid d_X(x, y) < r\}$$

さらに距離空間 (Y, d_Y) と写像 $f : X \rightarrow Y$ が与えられたとき, $f \times f : X \times X \rightarrow Y \times Y$ を $(f \times f)(x, y) = (f(x), f(y))$ で定める. このとき, f が一様連続であるためには, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $(f \times f)(D_X(\delta)) \subset D_Y(\varepsilon)$ が成り立つような $\delta > 0$ が存在することが必要十分である.

$r > 0$ に対して $D_X(r) = d^{-1}((-\infty, r))$ だから, 命題 7.4 の (2) と命題 12.2 から次の結果が得られる.

補題 12.8 $r > 0$ に対して $D_X(r)$ は距離空間 $(X \times X, d_1)$ における開集合である.

$X \times X$ の部分集合 Δ_X を $\Delta_X = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$ で定める.

補題 12.9 距離空間 $(X \times X, d_1)$ において, $r > 0$ に対して $U(\Delta_X; r) = D_X(r)$ が成り立つ.

証明 $(x, y) \in U(\Delta_X; r)$ が $d(x, y) \geq r$ を満たすと仮定すれば, 任意の $(z, z) \in \Delta_X$ に対して

$$r \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = d(z, x) + d(z, y) = d_1((z, z), (x, y))$$

が成り立つため, $d(\Delta_X, (x, y)) = \inf\{d((z, z), (x, y)) \mid (z, z) \in \Delta_X\} \geq r$ となって $(x, y) \in U(\Delta_X; r)$ と矛盾する. 従って $d(x, y) < r$ だから $(x, y) \in D_X(r)$ である. $(x, y) \in D_X(r)$ が $d(\Delta_X, (x, y)) \geq r$ を満たすと仮定すれば, $(x, x) \in \Delta_X$ に対して $d(x, y) = d(x, x) + d(x, y) = d_1((x, x), (x, y)) \geq d(\Delta_X, (x, y)) \geq r$ となって $(x, y) \in D_X(r)$ と矛盾する. 従って $d(\Delta_X, (x, y)) < r$ だから $(x, y) \in U(\Delta_X; r)$ である. \square

定理 12.10 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とし, d_X から定まる X の位相に関して, X はコンパクトであるとする. このとき, $f : X \rightarrow Y$ が連続写像ならば一様連続である.

証明 写像 $\text{pr}_{X1}, \text{pr}_{X2} : X \times X \rightarrow X$, $\text{pr}_{Y1}, \text{pr}_{Y2} : Y \times Y \rightarrow Y$ をそれぞれ $\text{pr}_{X1}(x, y) = x$, $\text{pr}_{X2}(x, y) = y$, $\text{pr}_{Y1}(z, w) = z$, $\text{pr}_{Y2}(z, w) = w$ で定めれば

$$\begin{aligned} (\text{pr}_{Y1} \circ (f \times f))(x, y) &= \text{pr}_{Y1}(f(x), f(y)) = f(x) = (f \circ \text{pr}_{X1})(x, y), \\ (\text{pr}_{Y2} \circ (f \times f))(x, y) &= \text{pr}_{Y2}(f(x), f(y)) = f(y) = (f \circ \text{pr}_{X2})(x, y) \end{aligned}$$

だから $\text{pr}_{Y1} \circ (f \times f) = f \circ \text{pr}_{X1}$, $\text{pr}_{Y2} \circ (f \times f) = f \circ \text{pr}_{X2}$ が成り立つ. これらの右辺はともに連続写像だから, 命題 9.8 により $f \times f$ は連続写像である. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 補題 12.8 から $D_Y(\varepsilon)$ は $Y \times Y$ の開集合だから, 命題 7.4 の (2) から $(f \times f)^{-1}(D_Y(\varepsilon))$ は $X \times X$ の開集合である. $(x, x) \in \Delta_X$ ならば $(f \times f)(x, x) = (f(x), f(x)) \in D_Y(\varepsilon)$ だから $\Delta_X \subset (f \times f)^{-1}(D_Y(\varepsilon))$ である. Δ_X は $x \mapsto (x, x)$ で与えられる X から $X \times X$ への写像の像であり, この写像は命題 9.8 を用いれば連続であることがわかる. 従って X がコンパクトならば命題 11.9 から Δ_X もコンパクトである. 命題 12.5 から $\delta > 0$ で, $U(\Delta_X; \delta) \subset (f \times f)^{-1}(D_Y(\varepsilon))$ を満たすものが存在する. 故に補題 12.9 から $D_X(\delta) \subset (f \times f)^{-1}(D_Y(\varepsilon))$ だから $(f \times f)(D_X(\delta)) \subset D_Y(\varepsilon)$ が得られるため, $f : X \rightarrow Y$ は一様連続である. \square