幾何学 I

第1節　集合と写像

定義 1.1

真か偽のいずれかである主張を**命題**という. また, 変数 x を含み, x に要素を代入したときに命題になるものを, **命題関数**という.

例

「リーマン予想は正しい.」…… 真か偽かまだ知られていないが, これは命題.
「リーマン予想は美しい.」……「美しい」の基準が無いので, これは命題ではない.
$x^3+3x-2=0$ …… x に値を代入すれば真か偽か定まるので, x の命題関数.
x^3+3x-2 …… x に値を代入しても値が定まるだけなので, 命題関数でない.

定義 1.2
思考の対象として「明確な意味」をもつものを**要素**または**元**(element)といい, 確定した範囲の要素をひとつにまとめた「集り」を**集合**(set)と呼ぶ.

「明確な意味」とは何かきちんと定義されていないので, 上の集合の定義は厳密なものではないが, 集合の定義をきちんとやろうとすれば「数学基礎論」と呼ばれる数学の分野について学ぶ必要があるので, この授業では上のような緩い定義にとどめる.
(次ページの「ラッセルのパラドクス」参照)

記法 1.3　集合の記法

(1) 要素 a が集合 A の要素であるとき, $a \in A$ または $A \ni a$ で表し, a は A に属するという. 要素 a が集合 A の要素でないとき, $a \notin A$ または $A \not\ni a$ で表す.

(2) 要素 $a, b, c, \ldots$ からなる集合を $\{a, b, c, \ldots\}$ で表し(外延的記法), 変数 x を含む命題関数 $P(x)$ に対し, $P(x)$ が真である x 全体の集合を $\{x \mid P(x)\}$ で表す(内包的記法). また, 集合 A の要素 x で, 命題関数 $P(x)$ が真であるもの全体からなる集合を $\{x \mid x \in A$ かつ $P(x)\}$ のかわりに $\{x \in A \mid P(x)\}$ で表す.

例：$\{x \mid x^2 < 2$ かつ x は有理数$\}$ … 2乗が2より小さい有理数全体からなる集合.

「ラッセルのパラドクス」

集合 $\{A \mid A \notin A\}$ を P とおく. もし $P \in P$ ならば P の定義から $P \notin P$ となって矛盾が生じるため $P \notin P$ であるが, このとき P の定義から $P \in P$ となって矛盾.

記法 1.4　数の集合を表す記号

$\boldsymbol{N}$: 自然数全体からなる集合 $\{1,2,3,\ldots\}$

$\boldsymbol{Z}$: 整数全体からなる集合 $\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$

$\boldsymbol{Q}$: 有理数全体からなる集合 $\left\{ x \,\middle|\, x = \dfrac{p}{q} \text{ を満たす } p, q \in \boldsymbol{Z}, q \neq 0 \text{ がある.} \right\}$

$\boldsymbol{R}$: 実数全体からなる集合

$$\left\{ x \,\middle|\, x = \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{10^j} \text{ を満たす自然数 } n \text{ と } a_i, b_j = 0,1,2,\ldots,9 \text{ がある.} \right\}$$

$\boldsymbol{C}$: 複素数全体からなる集合 $\{z \mid z = x + yi \text{ を満たす } x, y \in \boldsymbol{R} \text{ がある.}\}$

記法 1.5　実数の区間を表す記号

$a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a \leqq b)$ に対し, 実数の部分集合 (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ を以下のように定める.

$$(a, b) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x < b\}, \qquad (a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x \leqq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \leqq x < b\}, \qquad [a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \leqq x \leqq b\}$$

$$(a, \infty) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x > a\}, \qquad [a, \infty) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \geqq a\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x < b\}, \qquad (-\infty, b] = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \leqq b\}$$

これらの部分集合と実数全体 $\boldsymbol{R}$ を総称して区間と呼び, (a, b), (a, ∞), $(-\infty, b)$ を開区間, $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ を閉区間という.

定義 1.6　集合の相等・部分集合・空集合

(1) 2つの集合 A, B はそれらの構成要素が全く同じであるとき, すなわち

「$x \in A$ ならば $x \in B$」と「$x \in B$ ならば $x \in A$」が成り立つとき,

「A と B は等しい」といい, $A = B$ で表す.

(2) 集合 A の要素がすべて集合 B の要素であるとき, すなわち

「$x \in A$ ならば $x \in B$」が成り立つとき, A は B の部分集合であるといい,

$A \subset B$ または $B \supset A$ で表す.

また, A が B の部分集合でないことを $A \not\subset B$ または $B \not\supset A$ で表す.

(3) 要素をもたない集合を空集合と呼び, $\emptyset$ で表す.

定義 1.7　合併集合・共通部分・差集合・補集合・積集合

(1) 集合 A, B の合併集合(union) $A \cup B$, 共通部分(intersection) $A \cap B$, 差集合(difference) $A - B$ を次のように定める.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

(2) 集合 A が集合 X の部分集合であるとき $X - A$ を(X における) A の補集合(complement)といい, A^c で表す.

(3) $x \in A,\ y \in B$ に対し, (x, y) を x と y の順序対という.

$x, z \in A$ かつ $y, w \in B$ のとき, $x = z$ かつ $y = w$ であるときに限り, $(x, y) = (z, w)$ と定義する.

A の要素と B の要素の順序対全体からなる集合 $\{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$ を A と B の直積集合または直積と呼んで, $A \times B$ で表す.

定義 1.8　写像

(1) X, Y を集合として, X の各要素に対して Y の1つの要素を対応させるとき, この対応を X から Y への**写像**と呼んで, $f: X \to Y$ や $X \xrightarrow{f} Y$ などで表す. このとき, X を f の**定義域**という.

(2) 各 $x \in X$ に対し, 写像 $f: X \to Y$ によって対応する Y の要素を $f(x)$ で表し, これを **x の f による像**と呼ぶ.

(3) 2つの写像 $f: X \to Y$ と $g: Z \to W$ が「**等しい**」とは, $X = Z$ かつ $Y = W$ であり, すべての $x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ が成り立つことである. f と g が等しいことを $f = g$ で表す.

定義 1.9　合成写像・恒等写像・逆写像

(1) X, Y, Z を集合，$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ を写像とする．
各 $x \in X$ に対して，$g(f(x)) \in Z$ を対応させる X から Z への写像を f と g の**合成写像**と呼んで $g \circ f$ で表す．

(2) X の各要素 x を x 自身に対応させる写像を X の**恒等写像**と呼び，id_X または 1_X などで表す．

(3) 写像 $f: X \to Y$ に対し，$g \circ f = id_X$ かつ $f \circ g = id_Y$ を満たす写像 $g: Y \to X$ を f の**逆写像**といい，f^{-1} で表す．

注意 1.10

(1) 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ に対し, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ が成り立つ. また, $id_Y \circ f = f \circ id_X = f$ が成り立つ.

(2) $x \in X$ に対し, $id_X(x) = x$ だから, 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ に対して $g \circ f = id_X$ が成り立つためには, すべての $x \in X$ に対して $g(f(x)) = x$ が成り立つことが必要十分である. 従って g が f の逆写像であるためには,

「すべての $x \in X$ とすべての $y \in Y$ に対して $g(f(x)) = x$ かつ $f(g(y)) = y$」

が成り立つことが必要十分である.

定義 1.11　全射・単射・全単射

(1) 写像 $f: X \to Y$ が条件

「各 $y \in Y$ に対し, $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ がある.」

を満たすとき, f は**全射**(または**上への写像**)であるという.

(2) 写像 $f: X \to Y$ が条件

「$x, y \in X$ が $f(x) = f(y)$ を満たすならば $x = y$ である.」

を満たすとき, f は**単射**(または**1対1写像**)であるという.

(3) 全射かつ単射を全単射という.

命題 1.12

写像 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ が与えられているとする.

(1) f, g がともに全射ならば, 合成写像 $g \circ f : X \to Z$ も全射である.

(2) f, g がともに単射ならば, 合成写像 $g \circ f : X \to Z$ も単射である.

証明

(1) g は全射だから, 任意の $z \in Z$ に対して $g(y) = z$ を満たす $y \in Y$ がある.

さらに f も全射だから, $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ がある.

このとき $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ となるため $g \circ f$ は全射である.

(2) $x, w \in X$ が $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(w)$ を満たすならば $g(f(x)) = g(f(w))$ である.

従って, g が単射であることから, $f(x) = f(w)$ が得られる.

さらに f も単射だから $x = w$ である. 故に $g \circ f$ も単射である.

命題 1.13
写像 $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ が与えられているとする.
(1) 合成写像 $g \circ f : X \to Z$ が全射ならば, g も全射である.
(2) 合成写像 $g \circ f : X \to Z$ が単射ならば, f も単射である.

証明
(1) $g \circ f$ は全射だから, 任意の $z \in Z$ に対して $g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z$ を満たす

$x \in X$ がある. そこで, $y = f(x)$ とおけば $g(y) = z$ だから, g は全射である.

(2) $x, w \in X$ が $f(x) = f(w)$ を満たすならば次の等式が成り立つ.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(w)) = (g \circ f)(w)$$

$g \circ f$ は単射だから, $x = w$ が得られ, f も単射であることがわかる.

命題 1.14

(1) $f\colon X\to Y$ が全射で, $g,h\colon Y\to Z$ が $g\circ f=h\circ f$ を満たすならば $g=h$ である.

(2) $f\colon X\to Y$ が単射で, $g,h\colon W\to X$ が $f\circ g=f\circ h$ を満たすならば $g=h$ である.

証明

(1) f は全射だから任意の $y\in Y$ に対して $f(x)=y$ を満たす $x\in X$ がある. 従って仮定から $g(y)=g(f(x))=(g\circ f)(x)=(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(y)$ が得られる. 故に任意の $y\in Y$ に対して $g(y)=h(y)$ が成り立つため $g=h$ である.

(2) $w\in W$ に対して仮定から $f(g(w))=(f\circ g)(w)=(f\circ h)(w)=f(h(w))$ が成り立ち, さらに f は単射だから $g(w)=h(w)$ である. 故に任意の $w\in W$ に対して $g(w)=h(w)$ が成り立つため $g=h$ である.

命題 1.15
写像 $f: X \to Y$ の逆写像が存在するためには，f が全単射であることが必要十分であり，f の逆写像はただ一つに限る.

証明

f の逆写像 $g: Y \to X$ が存在するとき，$f \circ g = id_Y$ は全射だから命題1.13の(1)から f は全射であり，$g \circ f = id_X$ は単射だから命題1.13の(2)から f は単射でもある.

逆に f が全単射ならば，任意の $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ がただ1つ存在するため，$y \in Y$ に対して $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ を対応させる写像を $g: Y \to X$ とする. このとき任意の $y \in Y$ に対して $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y$ が成り立つ. さらに任意の $x \in X$ に対して $f(x) = y$ とおくと，g の定義から $g(y) = x$ だから $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x$ となるため，注意1.10の(2)によって g は f の逆写像である.

証明の続き

$g, h : Y \to X$ を f の逆写像とすれば $g \circ f = g \circ f = id_X$ であり, f は全射だから, 命題1.14の(1)から, $g = h$ が成り立つ. 従って f の逆写像が2つ存在すれば, それらは一致するため, f の逆写像が存在してもただ一つだけである.

幾何学 I

第2節　ユークリッド空間における極限

定義 2.1

n次元数ベクトル空間$\boldsymbol{R}^n$の2つのベクトル$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$に対し, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$の第$j$成分をそれぞれ$x_j, y_j$とするとき, $\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$の**内積**$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$を$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$で定義する.

次の結果は内積の定義から容易に確かめられる.

命題 2.2

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n$, $r \in \boldsymbol{R}$とするとき, 次のことが成り立つ.

(1) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$

(2) $(r\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, r\boldsymbol{y})$

(3) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$

(4) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$であり, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$は$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$と同値である.

定義 2.3

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$に対し, $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$とおいて, $\|\boldsymbol{x}\|$を$\boldsymbol{x}$の**長さ**という.

定理 2.4
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して不等式 $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ (シュワルツの不等式)が成り立つ.

証明
$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ならば $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ の両辺は 0 になって不等式が成り立つため,
$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ と仮定する. このとき $\|\boldsymbol{x}\| \neq 0$ だから, 命題2.2の(1), (2) (3)を用いると,
任意の実数 t に対して次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{y} - t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} - t\boldsymbol{x}) &= (\boldsymbol{y} - t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y} - t\boldsymbol{x}, -t\boldsymbol{x}) \\
&= (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) + (-t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, -t\boldsymbol{x}) + (-t\boldsymbol{x}, -t\boldsymbol{x}) \\
&= \|\boldsymbol{y}\|^2 - 2t(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + t^2\|\boldsymbol{x}\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2\left(t - \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\right)^2 + \frac{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2}
\end{aligned}$$

故に $t = \dfrac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$ のとき, $(\boldsymbol{y} - t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} - t\boldsymbol{x})$ は最小値 $\dfrac{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$ をとる.

証明の続き

一方, 命題2.2の(4)から, 任意の実数 t に対して $(\boldsymbol{y} - t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} - t\boldsymbol{x}) \geqq 0$ が成り立つため t の関数 $(\boldsymbol{y} - t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} - t\boldsymbol{x})$ の最小値は 0 以上である.

従って $\dfrac{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2} \geqq 0$ だから $\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 \geqq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 = |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2$ である.

この不等式の両辺の正の平方根をとれば $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ が得られる.

定理 2.5
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して不等式 $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ (三角不等式)が成り立つ.

証明

定理2.4の証明の途中で得られた等式 $(\boldsymbol{y}-t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}-t\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{y}\|^2 - 2t(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + t^2\|\boldsymbol{x}\|^2$

において $t = -1$ を代入すれば $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2$ が得られる.

ここで $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqq |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|$ と定理2.4から, 次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 &\leqq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\ &\leqq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2\end{aligned}$$

故に $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 \leqq (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2$ だから, この両辺の正の平方根をとれば

$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ が得られる.

以後 $\boldsymbol{R}^n$ の点と, その点の位置ベクトルを同一視することにする. 定義2.3で定義したベクトルの長さを用いれば, $\boldsymbol{R}^n$ における距離が, 次のように定義できる.

定義 2.6
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の距離という. そこで $\boldsymbol{R}^n$ の直積集合 $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$ を定義域として, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$ に実数 $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|$ を対応させる関数を $d_n : \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ で表して, これを $\boldsymbol{R}^n$ の距離関数という.

すなわち $\boldsymbol{R}^n$ の距離関数とは, $\boldsymbol{R}^n$ の2つの点の対に対して, 対になっている2点の間の距離を対応させる関数のことである.
定義2.6の距離関数 d_n が与えられた n 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間という.

命題 2.7

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して, 次のことが成り立つ.

(1) $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqq 0$ であり, $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ と同値である.

(2) $d_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

(3) $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leqq d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ (三角不等式)

証明

(1) 距離関数 d_n の定義と命題2.2の(4)から明らかである.

(2) 一般に $r \in \boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して, 命題2.2の(2)から

$$\|r\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(r\boldsymbol{x}, r\boldsymbol{x})} = \sqrt{r^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = |r|\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = |r|\|\boldsymbol{x}\|$$

が成り立つため,

$$d_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \|(-1)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\| = |-1|\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| = d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

(3) 定理2.5から $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}\| = \|(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y})\|$

$$\leqq \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}\| = d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}).$$

各自然数 k に対して $\boldsymbol{R}^n$ の点 $\boldsymbol{x}_k$ を対応させる写像 $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}^n$ を $\boldsymbol{R}^n$ の点列といい, $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ で表す. $\boldsymbol{R}^n$ の距離を考えることによって「限りなく近づく」という状態が数学的に表現できて, $\boldsymbol{R}^n$ の点列の収束の概念が次のように定義できる.

定義 2.8　点列の極限

$\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ とする. 任意の正の実数 ε に対して自然数 N で, 条件

$$「k \geqq N \text{ ならば } d_n(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{p}) < \varepsilon」$$

を満たすものが存在するとき, $\boldsymbol{R}^n$ の**点列 $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は $\boldsymbol{p}$ に収束する**といい,

このことを $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{p}$ で表す.

注意 2.9

$\boldsymbol{R}^n$ の点列 $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ に対し, 実数列 $(d_n(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{p}))_{k\in\boldsymbol{N}}$ を考えると, この数列は常に 0 以上の値をとり, 定義 2.8から, $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が $\boldsymbol{p}$ に収束するためには実数列 $(d_n(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{p}))_{k\in\boldsymbol{N}}$ が 0 に収束することが必要十分である.

例 2.10

$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0$ であることは次のように示される；

任意の正の実数 ε に対して $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$ を満たす自然数 N を選べば, $k \geqq N$ ならば $0 < \dfrac{1}{k} \leqq \dfrac{1}{N} < \varepsilon$ だから $d_1\left(\dfrac{1}{k}, 0\right) = \dfrac{1}{k} < \varepsilon$ が成り立つため, $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0$ である.

実数列については, 次のことが成り立つ.

命題 2.11

$(a_k)_{k\in \boldsymbol{N}}$, $(b_k)_{k\in \boldsymbol{N}}$ をともに収束する実数列とし, $\lim_{k\to\infty} a_k = \alpha$, $\lim_{k\to\infty} b_k = \beta$ とする.

(1) すべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $a_k \leqq b_k$ ならば $\alpha \leqq \beta$ である.

(2) 実数列 $(c_k)_{k\in \boldsymbol{N}}$ が, すべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $a_k \leqq c_k \leqq b_k$ を満たし, $\alpha = \beta$ ならば $(c_k)_{k\in \boldsymbol{N}}$ も収束して $\lim_{k\to\infty} c_k = \alpha$ である.

証明

(1) $\alpha > \beta$ と仮定すれば自然数 N_1, N_2 で, 「$k \geqq N_1$ ならば $|a_k - \alpha| < \frac{\alpha-\beta}{2}$」, 「$k \geqq N_2$ ならば $|b_k - \beta| < \frac{\alpha-\beta}{2}$」を満たすものがある. そこで N_1 と N_2 の大きい方を N とすると, $k \geqq N$ ならば $-\frac{\alpha-\beta}{2} < a_k - \alpha$ かつ $b_k - \beta < \frac{\alpha-\beta}{2}$ が成り立つ. これらの不等式から, $k \geqq N$ ならば $b_k < \frac{\alpha+\beta}{2} < a_k$ が成り立つため, すべての自然数 k に対して $a_k \leqq b_k$ であるという仮定と矛盾する. 故に $\alpha \leqq \beta$ である.

証明の続き

(2) ε を任意の正の実数とすれば, $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \alpha$ から, 自然数 N_1, N_2 で,

「$k \geqq N_1$ ならば $|a_k - \alpha| < \varepsilon$」, 「$k \geqq N_2$ ならば $|b_k - \alpha| < \varepsilon$」を満たすもの

がある. N_1, N_2 の大きい方を N とすると, 仮定からすべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対して

$$-|a_k - \alpha| \leqq a_k - \alpha \leqq c_k - \alpha \leqq b_k - \alpha \leqq |b_k - \alpha|$$

が成り立ち, $k \geqq N$ ならば $|a_k - \alpha| < \varepsilon$ かつ $|b_k - \alpha| < \varepsilon$ だから, 上の不等式

により $-\varepsilon < c_k - \alpha < \varepsilon$ すなわち $|c_k - \alpha| < \varepsilon$ が得られる.

従って $(c_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ も α に収束する.

例 2.12

$0 < r < 1$ のとき, $\lim_{k\to\infty} r^k = 0$ であることは次のように示される.

$h = \frac{1}{r} - 1$ とおけば, $0 < r < 1$ より $h > 0$ であり, $\frac{1}{r} = 1 + h$ が成り立つため,

二項定理より

$$\frac{1}{r^k} = (1+h)^k = 1 + kh + \sum_{i=2}^{n} \binom{k}{i} h^i > kh$$

が成り立つ. 故に任意の自然数 k に対して $0 < r^k < \frac{1}{hk}$ である.

$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{hk} = 0$ だから, 上の不等式と命題2.11の(2)によって $\lim_{k\to\infty} r^k = 0$ である.

X, Y をそれぞれ $\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m$ の部分集合とし, f を X から Y への写像とする.

$\boldsymbol{x} \in X$ を $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ に近づけたときに $f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^m$ に近づくことを, 距離関数を用いれば次のように定義できる.

定義 2.13　写像の極限

任意の正の実数 ε に対して正の実数 δ で, 条件

「“$\boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ かつ $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) < \delta$” ならば $d_m(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{q}) < \varepsilon$」

を満たすものが存在するとき, 写像 f の $\boldsymbol{p}$ における極限は $\boldsymbol{q}$ であるといい,

このことを $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ で表す.

注意 2.14

上の定義では, 点 $\boldsymbol{p}$ に「いくらでも近い」X の点が存在することを暗黙のうちに仮定している. 以後 $\boldsymbol{p}$ における写像 f の極限を考えるときは, 任意の $r > 0$ に対して f の定義域の点 $\boldsymbol{x}$ で, $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) < r$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ を満たすものが存在すると仮定する.

注意 2.15

$\boldsymbol{x} \in X$ を $d_m(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{q})$ に対応させる関数を考えれば, この関数は常に 0 以上の値をとり, 定義 2.13から, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ であるためには $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} d_m(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{q}) = 0$ であることが必要十分である.

定義 2.8, 定義 2.13では, $\boldsymbol{R}^n$ や $\boldsymbol{R}^m$ の距離関数 d_n, d_m をそのまま用いて「近づく」ということを表現したが, 一旦 d_n を用いて与えられた点の「近くの点」全体からなる集合を定義してから, 定義 2.8と定義 2.13を言い換えてみる.

定義 2.16　開球

$\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$, $r > 0$ に対して, $\boldsymbol{p}$ からの距離が r より小さい点全体からなる集合を $B_n(\boldsymbol{p}\,;r)$ (すなわち $B_n(\boldsymbol{p}\,;r) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid d_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) < r\}$) で表し, これを半径 r, 中心 $\boldsymbol{p}$ の開球または,「$\boldsymbol{p}$ の r 近傍」という.

開球の記号を用いて, 定義 2.8, 定義 2.13は次のように言い換えられる.

定義 2.17　点列の極限

$(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を $\boldsymbol{R}^n$ の点列, $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$ とする. 任意の正の実数 ε に対して自然数 N で, 条件

「$k \geqq N$ ならば $\boldsymbol{x}_k \in B_n(\boldsymbol{p}\,;\varepsilon)$」

を満たすものが存在するとき, 点列 $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は $\boldsymbol{p}$ に収束するといい, このことを $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{p}$ で表す.

定義 2.18　写像の極限

X, Y をそれぞれ $\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m$ の部分集合とし, f を X から Y への写像, $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{R}^m$ とする. 任意の正の実数 ε に対して正の実数 δ で, 条件

「"$\boldsymbol{x}\in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta)\cap X$ かつ $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{p}$" ならば $f(\boldsymbol{x})\in B_m(\boldsymbol{q}\,;\varepsilon)$」

を満たすものが存在するとき, 写像 f の $\boldsymbol{p}$ における極限は $\boldsymbol{q}$ であるといい,

このことを $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{q}$ で表す.

実数値関数の極限については命題 2.11と同様に, 次のことが成り立つ.

命題 2.19

$\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ とし, f, g を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 X で定義された実数値関数とする. このとき,

$\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \alpha,\ \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} g(\boldsymbol{x}) = \beta$ であるとする.

(1) すべての $\boldsymbol{x} \in X$ に対して $f(\boldsymbol{x}) \leqq g(\boldsymbol{x})$ ならば $\alpha \leqq \beta$ である.

(2) X で定義された実数値関数 h が, すべての $\boldsymbol{x} \in X$ に対して $f(\boldsymbol{x}) \leqq h(\boldsymbol{x}) \leqq g(\boldsymbol{x})$ を満たし, $\alpha = \beta$ ならば極限 $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} h(\boldsymbol{x})$ は存在して $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} h(\boldsymbol{x}) = \alpha$ である.

証明

(1) $\alpha > \beta$ と仮定すれば, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \alpha$, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} g(\boldsymbol{x}) = \beta$ より $\delta_1, \delta_2 > 0$ で,

「$\boldsymbol{x} \in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta_1) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $|f(\boldsymbol{x}) - \alpha| < \dfrac{\alpha - \beta}{2}$」,

「$\boldsymbol{x} \in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta_2) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $|g(\boldsymbol{x}) - \beta| < \dfrac{\alpha - \beta}{2}$」

を満たすものがある. そこで δ_1 と δ_2 の小さい方を δ とすると,

$\boldsymbol{x} \in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $-\dfrac{\alpha - \beta}{2} < f(\boldsymbol{x}) - \alpha$ かつ $g(\boldsymbol{x}) - \beta < \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

が成り立つ. これらの不等式から $\boldsymbol{x} \in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば

$g(\boldsymbol{x}) < \dfrac{\alpha + \beta}{2} < f(\boldsymbol{x})$ が得られるため, すべての $\boldsymbol{x} \in X$ に対して $f(\boldsymbol{x}) \leqq g(\boldsymbol{x})$ が

成り立つという仮定と矛盾する. 故に $\alpha \leqq \beta$ である.

証明の続き

(2) ε を任意の正の実数とすれば, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} g(\boldsymbol{x}) = \alpha$ から, $\delta_1, \delta_2 > 0$ で,

「$\boldsymbol{x} \in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta_1) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $|f(\boldsymbol{x}) - \alpha| < \varepsilon$」,

「$\boldsymbol{x} \in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta_2) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば $|g(\boldsymbol{x}) - \alpha| < \varepsilon$」

を満たすものがある. 仮定からすべての $\boldsymbol{x} \in X$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$-|f(\boldsymbol{x}) - \alpha| \leqq f(\boldsymbol{x}) - \alpha \leqq h(\boldsymbol{x}) - \alpha \leqq g(\boldsymbol{x}) - \alpha \leqq |g(\boldsymbol{x}) - \alpha|$$

そこで δ_1 と δ_2 の小さい方を δ とすると, $\boldsymbol{x}\in B_n(\boldsymbol{p};\delta_2)\cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば

$|f(\boldsymbol{x}) - \alpha| < \varepsilon$ かつ $|g(\boldsymbol{x}) - \alpha| < \varepsilon$ だから, 上の不等式により

$-\varepsilon < h(\boldsymbol{x}) - \alpha < \varepsilon$ すなわち $|h(\boldsymbol{x}) - \alpha| < \varepsilon$ が得られる.

従って $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} h(\boldsymbol{x}) = \alpha$ である.

命題 2.20

$(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$, $(\boldsymbol{y}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を $\boldsymbol{R}^n$ の点列, $(a_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を実数列とする.

$\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{p}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{q}$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = c$ であるとき, 次の等式が成り立つ.

(1) $\lim\limits_{k\to\infty} (\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{y}_k) = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$　　(2) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \boldsymbol{x}_k = c\boldsymbol{p}$

証明

(1) 仮定から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N_1, N_2 で次の条件を満たすものがある.

「$k \geqq N_1$ ならば $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{p}\| < \frac{\varepsilon}{2}$」, 「$k \geqq N_2$ ならば $\|\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{q}\| < \frac{\varepsilon}{2}$」

N_1, N_2 の大きい方を N とすると, $k \geqq N$ ならば $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{p}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ かつ $\|\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{q}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ だから, 三角不等式を用いれば

$$\begin{aligned}\|(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{y}_k) - (\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q})\| &= \|(\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{p}) + (\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{q})\| \\ &\leqq \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{p}\| + \|\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{q}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つため, $\lim\limits_{k\to\infty} (\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{y}_k) = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$ である.

証明の続き

(2) 仮定から, 任意の $\varepsilon>0$ に対して自然数 N_1, N_2 で 次の条件を満たすものがある.

「$k \geqq N_1$ ならば $\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{p}\|<\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{2(1+|c|)},1\right\}$」, 「$k \geqq N_2$ ならば $|a_k-c|<\dfrac{\varepsilon}{2(1+\|\boldsymbol{p}\|)}$」

従って N_1 と N_2 の大きい方を N とすると, $k \geqq N$ ならば以下の不等式が成り立つ.

$$\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{p}\|<\frac{\varepsilon}{2(1+|c|)} \cdots (i) \quad \|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{p}\|<1 \cdots (ii) \quad |a_k-c|<\frac{\varepsilon}{2(1+\|\boldsymbol{p}\|)} \cdots (iii)$$

上の (ii) と三角不等式から, $k \geqq N$ ならば次の不等式が成り立つ.

$$\|\boldsymbol{x}_k\| = \|(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{p})+\boldsymbol{p}\| \leqq \|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{p}\| + \|\boldsymbol{p}\| < 1+\|\boldsymbol{p}\| \cdots (iv)$$

故に $k \geqq N$ のとき, 三角不等式を用いれば, (i), (iii), (iv) から

$$\begin{aligned}
\|a_k\boldsymbol{x}_k - c\boldsymbol{p}\| &= \|a_k\boldsymbol{x}_k - c\boldsymbol{x}_k + c\boldsymbol{x}_k - c\boldsymbol{p}\| = \|(a_k-c)\boldsymbol{x}_k + c(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{p})\| \\
&\leqq \|(a_k-c)\boldsymbol{x}_k\| + \|c(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{p})\| = |a_k-c|\|\boldsymbol{x}_k\| + |c|\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{p}\| \\
&< \frac{\varepsilon(1+\|\boldsymbol{p}\|)}{2(1+\|\boldsymbol{p}\|)} + \frac{\varepsilon|c|}{2(1+|c|)} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つため, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k\boldsymbol{x}_k = c\boldsymbol{p}$ である.

注意 2.21

命題2.20でとくに$(a_k)_{k\in \boldsymbol{N}}$が常に$c$を値にとる実数列の場合を考えると, (2)の特別な場合として, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} c\boldsymbol{x}_k = c\boldsymbol{p}$ が成り立つことに注意する.

写像の極限に関しても点列の極限と同様に, 次の結果が成り立つ.

命題 2.22

$X\subset \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{p}\in \boldsymbol{R}^n$ とし, 写像 $f, g: X\to \boldsymbol{R}^m$ は $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{r}$ を満たし, 関数 $s: X\to \boldsymbol{R}$ は $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} s(\boldsymbol{x}) = c$ を満たすとする. このとき次の等式が成り立つ.

(1) $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} (f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$　　(2) $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} s(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}) = c\,\boldsymbol{q}$

証明

(1) 仮定から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta_1, \delta_2 > 0$ で次の条件を満たすものがある.

$$「\boldsymbol{x} \in B_n(\boldsymbol{p}\,; \delta_1) \cap X \text{ かつ } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p} \text{ ならば } f(\boldsymbol{x}) \in B_n\left(\boldsymbol{q}\,; \frac{\varepsilon}{2}\right)」$$

$$「\boldsymbol{x} \in B_n(\boldsymbol{p}\,; \delta_2) \cap X \text{ かつ } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p} \text{ ならば } g(\boldsymbol{x}) \in B_n\left(\boldsymbol{r}\,; \frac{\varepsilon}{2}\right)」$$

δ_1, δ_2 の小さい方を δ とすると, $\boldsymbol{x} \in B_n(\boldsymbol{p}\,; \delta) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば

$\|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ かつ $\|g(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{r}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ だから, 三角不等式を用いれば

$$\begin{aligned} \|(f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})) - (\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r})\| &= \|(f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}) + (g(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{r})\| \\ &\leqq \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| + \|g(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{r}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つため, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}} (f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$ である.

(2) 仮定から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta_1, \delta_2 > 0$ で次の条件を満たすものがある.

$$「\boldsymbol{x} \in B_n(\boldsymbol{p}\,; \delta_1) \cap X \text{ かつ } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p} \text{ ならば } f(\boldsymbol{x}) \in B_m\left(\boldsymbol{q}\,; \min\left\{\frac{\varepsilon}{2(1 + |c|)}, 1\right\}\right)」$$

$$「\boldsymbol{x} \in B_n(\boldsymbol{p}\,; \delta_2) \cap X \text{ かつ } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p} \text{ ならば } s(\boldsymbol{x}) \in B_1\left(c\,; \frac{\varepsilon}{2(1 + \|\boldsymbol{q}\|)}\right)」$$

証明の続き

δ_1, δ_2 の小さい方を δ とすると, $\boldsymbol{x} \in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta)\cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば以下が成り立つ.

$$\|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q}\| < \frac{\varepsilon}{2(1+|c|)} \ \cdots\ (i) \quad \|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q}\| < 1 \ \cdots\ (ii) \quad \|s(\boldsymbol{x})-c\| < \frac{\varepsilon}{2(1+\|\boldsymbol{q}\|)} \ \cdots\ (iii)$$

上の (ii) と三角不等式から, $\boldsymbol{x} \in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta)\cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば次の不等式が成り立つ.

$$\|f(\boldsymbol{x})\| = \|(f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q})+\boldsymbol{q}\| \leqq \|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q}\| + \|\boldsymbol{q}\| < 1 + \|\boldsymbol{q}\| \ \cdots (iv)$$

故に $\boldsymbol{x} \in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta)\cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$ ならば, 三角不等式を用いると, (i), (iii), (iv) から

$$\begin{aligned}
\|s(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}) - c\boldsymbol{q}\| &= \|s(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}) - cf(\boldsymbol{x}) + cf(\boldsymbol{x}) - c\boldsymbol{q}\| \\
&= \|(s(\boldsymbol{x})-c)f(\boldsymbol{x}) + c(f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q})\| \\
&\leqq \|(s(\boldsymbol{x})-c)f(\boldsymbol{x})\| + \|c(f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q})\| \\
&= |s(\boldsymbol{x})-c|\|f(\boldsymbol{x})\| + |c|\|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q}\| \\
&< \frac{\varepsilon(1+\|\boldsymbol{q}\|)}{2(1+\|\boldsymbol{q}\|)} + \frac{\varepsilon|c|}{2(1+|c|)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つため, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} s(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}) = c\,\boldsymbol{q}$ である.

注意 2.23
命題2.22でとくに s が常に c を値にとる定数値関数の場合を考えると, (2)の特別な場合として, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} c\,f(\boldsymbol{x}) = c\boldsymbol{q}$ が成り立つことに注意する.

補題 2.24
$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の第 j 成分を x_j とするとき, 次の不等式が成り立つ.

$$|x_j| \leqq \|\boldsymbol{x}\| \leqq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

証明

$\displaystyle x_j^2 \leqq \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2$ だから, この両辺の正の平方根をとれば $|x_j| \leqq \|\boldsymbol{x}\|$ が得られる.

また $\displaystyle \|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \leqq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + 2\sum_{1\leqq i<j\leqq n} |x_i||x_j| = (|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)^2$

だから, この両辺の正の平方根をとれば $\|\boldsymbol{x}\| \leqq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ が得られる.

命題 2.25

$(\boldsymbol{x}_k)_{k\in N}$ を $\boldsymbol{R}^n$ の点列とし, 各自然数 k に対して $\boldsymbol{x}_k$ の第 j 成分を x_{kj} とする.
$\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$ の第 j 成分を p_j とすれば, $\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{p}$ が成り立つためには, すべての $j=1,2,\ldots,n$ に対して, $\lim_{k\to\infty}x_{kj}=p_j$ が成り立つことが必要十分である.

証明

補題2.24で $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{p}$ とすれば, $|x_{kj}-p_j|\leqq\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{p}\|\leqq\sum_{i=1}^{n}|x_{ki}-p_i|$ が成り立つ.

$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{p}$ ならば $\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{p}\|=0$ だから $0\leqq|x_{kj}-p_j|\leqq\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{p}\|$ と命題2.11より
すべての $j=1,2,\ldots,n$ に対して $\lim_{k\to\infty}|x_{kj}-p_j|=0$ が成り立つため $\lim_{k\to\infty}x_{kj}=p_j$ である.

逆にすべての $j=1,2,\ldots,n$ に対して, $\lim_{k\to\infty}x_{kj}=p_j$ ならば $\lim_{k\to\infty}|x_{kj}-p_j|=0$ だから
$0\leqq\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{p}\|\leqq\sum_{i=1}^{n}|x_{ki}-p_i|$ と命題2.11によって $\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{p}\|=0$ である.

故に $\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{p}$ が成り立つ.

X, Y をそれぞれ $\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m$ の部分集合とし, f を X から Y への写像とする.

$\boldsymbol{x} \in X$ に対し, $f(\boldsymbol{x})$ の第 i 成分を $f_i(\boldsymbol{x})$ で表して, $\boldsymbol{x} \in X$ を $f_i(\boldsymbol{x})$ に対応させることによって, 関数 $f_i : X \to \boldsymbol{R}$ が定まる.

命題 2.26

$\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^m$ の第 j 成分を q_j とすれば, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ が成り立つためには, すべての $j = 1,2,\ldots,m$ に対して, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f_j(\boldsymbol{x}) = q_j$ が成り立つことが必要十分である.

証明

補題 2.24の $\boldsymbol{x}$ に $f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}$ を代入すれば, 次の不等式が得られる.

$$|f_j(\boldsymbol{x}) - q_j| \leqq \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| \leqq \sum_{i=1}^{n} |f_i(\boldsymbol{x}) - q_i|$$

$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ ならば $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| = 0$ だから $0 \leqq |f_j(\boldsymbol{x}) - q_j| \leqq \|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\|$ と命題2.19より, すべての $j = 1,2,\ldots,m$ に対して $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} |f_j(\boldsymbol{x}) - q_j| = 0$ が成り立つため $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f_j(\boldsymbol{x}) = q_j$ である.

証明の続き

逆にすべての $j = 1,2,\ldots,m$ に対して, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f_j(\boldsymbol{x}) = q_j$ ならば $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} |f_j(\boldsymbol{x}) - q_j| = 0$ だから命題2.22の(1)より $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \sum_{i=1}^{m} |f_i(\boldsymbol{x}) - q_j| = 0$ である. 故に

$$0 \leqq \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| \leqq \sum_{i=1}^{m} |f_i(\boldsymbol{x}) - q_i|$$

と命題2.19より $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{q}\| = 0$ だから $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ が成り立つ.

幾何学 I

第3節　距離空間の定義と例

ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ ではベクトルの長さを用いて, 距離関数 $d_n : \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ を $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|$ によって定義2.6で定義し, この距離関数を用いて点列の極限と写像の極限をそれぞれ定義2.8と定義2.13で定義した.

このことは, 距離関数さえあれば点列や写像の極限について議論ができることを意味する. そこで, 極限について議論を一般化(単純化)するために, 距離関数だけが与えられた「距離空間」と呼ばれる概念を次に定義する. これによってユークリッド空間以外の多くの「空間」が考えられるようになり, 幾何学の研究対象を広げることができる.

距離関数の概念は命題2.7の条件を満たす関数として, 以下のように定義される.

定義 3.1　距離空間

集合 X に対し, X の直積集合 $X \times X$ で定義された実数値関数 $d : X \times X \to \boldsymbol{R}$ で, 任意の $x, y, z \in X$ に対して次の条件 $(i), (ii), (iii)$ を満たすものを X の距離関数という.

距離関数 d が与えられた集合 X を距離空間といい, (X, d) で表す.

距離関数 d を明示する必要が無い場合は, (X, d) を X で表すことが多い.

(i)　$d(x, y) \geqq 0$ であり, $d(x, y) = 0$ は $x = y$ と同値である.

(ii)　$d(y, x) = d(x, y)$

(iii) $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式)

以下の例3.2, 例3.3では p を1以上の実数または ∞ とする.

例 3.2　距離空間の例 (その1)

$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n$ に対し, 実数 $\|\boldsymbol{x}\|_p$ を $p\geqq 1$ の場合は $\|\boldsymbol{x}\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p=\infty$ の場合は $\|\boldsymbol{x}\|_p=\max\{|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|\}$ で定めて $d_p:\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ を $d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_p$ で定義すれば d_p は $\boldsymbol{R}^n$ の距離関数になる.

$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して $d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqq 0$ であり, $d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ となるのは, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ の場合に限ることと, $d_p(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成り立つことは d_p の定義から明らかである.

$1<p<\infty$ の場合に $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して $d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\leqq d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+d_p(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ が成り立つことを以下で順を追って示す.

(i) $\alpha,\beta\geqq 0,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ならば不等式 $\alpha\beta\leqq\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}$ が成り立つことを示す.

関数 $f:[0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=\frac{x^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}-\beta x$ で定めれば $f'(x)=x^{p-1}-\beta$ である.

$p>1$ より f は区間 $\left[0, \sqrt[p-1]{\beta}\right]$ で単調に減少し, 区間 $\left[\sqrt[p-1]{\beta}, \infty\right)$ で単調に増加する.

従って $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ に注意すれば, f は $\sqrt[p-1]{\beta}$ において最小値

$$f\left(\sqrt[p-1]{\beta}\right)=\frac{\left(\sqrt[p-1]{\beta}\right)^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}-\beta\sqrt[p-1]{\beta}=\frac{\left(\sqrt[p-1]{\beta}\right)^p}{p}+\left(\sqrt[p-1]{\beta}\right)^p\left(1-\frac{1}{p}\right)-\left(\sqrt[p-1]{\beta}\right)^p=0$$

をとる. 従って $\alpha \geqq 0$ に対して $\dfrac{\alpha^p}{p}+\dfrac{\beta^q}{q}-\alpha\beta=f(\alpha)\geqq f\left(\sqrt[p-1]{\beta}\right)=0$ が成り立つ.

(ii) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ ならば $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n), \boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \dots, y_n)\in \boldsymbol{R}^n$ に対し, 不等式

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \leqq \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q$ が成り立つことを示す.

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ または $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ ならば上の不等式は両辺が 0 になって成立する. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\neq \boldsymbol{0}$ のとき

$\|\boldsymbol{x}\|_p, \|\boldsymbol{y}\|_q \neq 0$ だから, $\alpha=\dfrac{|x_i|}{\|\boldsymbol{x}\|_p}, \beta=\dfrac{|y_i|}{\|\boldsymbol{y}\|_q}$ を (i) の不等式に代入して次が得られる.

$$\frac{|x_i y_i|}{\|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q} \leqq \frac{|x_i|^p}{p\|\boldsymbol{x}\|_p^p}+\frac{|y_i|^q}{q\|\boldsymbol{y}\|_q^q}=\frac{|x_i|^p}{p\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p}+\frac{|y_i|^q}{q\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q}$$

この不等式の両辺を $i=1,2,\ldots,n$ について加えれば

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|}{\|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q} \leqq \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p}{p\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p} + \frac{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q}{q\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

が得られるため, 両辺に $\|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q$ をかけて $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leqq \|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q$ を得る.

(iii) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p \leqq \|\boldsymbol{x}\|_p+\|\boldsymbol{y}\|_p$ が成り立つことを示す.

$|x_i+y_i| \leqq |x_i|+|y_i|$ の両辺に $|x_i+y_i|^{p-1}$ をかけて得られる

$$|x_i+y_i|^p \leqq |x_i||x_i+y_i|^{p-1}+|y_i||x_i+y_i|^{p-1}$$

の両辺を $i=1,2,\ldots,n$ について加えれば次の不等式が得られる.

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^p = \sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p \leqq \sum_{i=1}^{n}|x_i||x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n}|y_i||x_i+y_i|^{p-1} \quad \cdots (*)$$

$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ を満たす q をとり (ii) の不等式の y_i に $|x_i+y_i|^{p-1}$ を代入すると

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i||x_i+y_i|^{p-1} \leqq \|\boldsymbol{x}\|_p\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|\boldsymbol{x}\|_p\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$$
$$= \|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p-1}$$

が得られる. 同様に(ii)の不等式の x_i に $|x_i+y_i|^{p-1}$ を代入すれば

$\sum_{i=1}^{n}|y_i||x_i+y_i|^{p-1} \leqq \|\boldsymbol{y}\|_p\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p-1}$ が得られるため, これらの不等式と

$(*)$から $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^p \leqq \|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p-1}+\|\boldsymbol{y}\|_p\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p-1}$ を得る.

$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ ならば(iii)の不等式は成り立つため, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$ と仮定して上の不等式の両辺を $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p-1}$ で割ると $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p \leqq \|\boldsymbol{x}\|_p+\|\boldsymbol{y}\|_p$ が得られる.

$d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_p$ であることに注意すれば(iii)の不等式から, 次が成り立つ.

$$d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\|_p=\|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})\|_p \leqq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_p+\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|_p=d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+d_p(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$

例 3.3　距離空間の例 (その2)
$a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a<b)$ に対し, 閉区間 $[a, b]$ で連続な実数値関数全体の集合を $C[a, b]$ で表す. $f \in C[a, b]$ に対して, $p \geqq 1$ の場合は $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$ とおき, $p = \infty$ の場合は $x \in [a, b]$ を $|f(x)|$ に対応させる $[a, b]$ 上の関数の最大値を $\|f\|_\infty$ とおく. $d_p : C[a, b] \times C[a, b] \to \boldsymbol{R}$ を $d_p(f, g) = \|f - g\|_p$ により定義すると, d_p は $C[a, b]$ の距離関数になる.

$f, g \in C[a, b]$ に対して $d_p(f, g) \geqq 0$, $d_p(f, f) = 0$ と $d_p(g, f) = d_p(f, g)$ が成り立つことは d_p の定義から明らかである. また「$d_\infty(f, g) = 0$ ならば $f = g$」であることも d_∞ の定義から明らかである. $1 \leqq p < \infty$ の場合に「$d_p(f, g) = 0$ ならば $f = g$」が成り立つことと, $1 < p < \infty$ の場合に $f, g, h \in C[a, b]$ に対して $d_p(f, h) \leqq d_p(f, g) + d_p(g, h)$ が成り立つことを以下で示す. $[a, b]$ において常に値が 0 である定数値関数も 0 で表す.

(i) $1 \leqq p < \infty$ の場合に「$d_p(f, g) = 0$ ならば $f = g$」が成り立つことを示す.

(i) $1 \leqq p < \infty$ の場合に「$d_p(f, g) = 0$ ならば $f = g$」が成り立つことを示す.

命題「$\int_a^b \varphi(x)\, dx = 0$ を満たす正値関数 $\varphi \in C[a, b]$ は $\varphi = 0$ に限る.」をまず示す.

$\varphi(c) \neq 0$ となる $c \in [a, b]$ が存在すれば, 仮定から $\varphi(c) > 0$ である. $\varepsilon = \dfrac{\varphi(c)}{2}$ と

おけば $\varepsilon > 0$ で, φ の c における連続性から $\delta > 0$ で次の条件を満たすものがある.

「$x \in (c-\delta, c+\delta) \cap [a, b]$ ならば $\varphi(x) \in (\varphi(c)-\varepsilon, \varphi(c)+\varepsilon)$」

$\varphi(c) = 2\varepsilon$ より $x \in (c-\delta, c+\delta) \cap [a, b]$ ならば $\varphi(x) \in (\varepsilon, 3\varepsilon)$ だから, $\varphi(x) > \varepsilon$ である.

$c > a$ の場合, $d \in (\max\{c-\delta, a\}, c)$ を選べば $[d, c] \subset (c-\delta, c+\delta) \cap [a, b]$ だから

$x \in [d, c]$ ならば $\varphi(x) > \varepsilon$ である. 従って $x \in [a, b]$ ならば $\varphi(x) \geqq 0$ であること

から $\int_a^d \varphi(x)\, dx \geqq 0$, $\int_c^b \varphi(x)\, dx \geqq 0$ であることに注意すれば

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \int_a^d \varphi(x)\, dx + \int_d^c \varphi(x)\, dx + \int_c^b \varphi(x)\, dx \geqq \int_d^c \varphi(x)\, dx$$

$$\geqq \int_d^c \varepsilon\, dx = \varepsilon(c-d) > 0$$ が得られて仮定と矛盾する.

$c<b$ の場合, $d\in(c,\min\{c+\delta,b\})$ を選べば $[c,d]\subset(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$ だから $x\in[c,d]$ ならば $\varphi(x)>\varepsilon$ である. 従って $x\in[a,b]$ ならば $\varphi(x)\geqq 0$ であること から $\int_a^c\varphi(x)\,dx\geqq 0$, $\int_d^b\varphi(x)\,dx\geqq 0$ であることに注意すれば

$$\int_a^b\varphi(x)\,dx=\int_a^c\varphi(x)\,dx+\int_c^d\varphi(x)\,dx+\int_d^b\varphi(x)\,dx\geqq\int_c^d\varphi(x)\,dx$$
$$\geqq\int_c^d\varepsilon\,dx=\varepsilon(d-c)>0$$

が得られて仮定と矛盾する. 以上から主張は示された.

$f,g\in C[a,b]$ が $d_p(f,g)=0$ を満たすとき, $\varphi(x)=|f(x)-g(x)|^p$ によって $\varphi\in C[a,b]$ を定めれば $\int_a^b\varphi(x)\,dx=0$ だから φ は上で示した命題の条件を満たすため, $\varphi=0$ である. 従って, $f=g$ である.

(ii) $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ならば $f, g\in C[a, b]$ に対し, $\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqq \|f\|_p\|g\|_q$ が成り立つことを示す.

$f=0$ または $g=0$ ならば上の不等式は両辺が 0 になって成立する. $f, g\neq 0$ のとき (i) の結果から $\|f\|_p\neq 0$, $\|g\|_q\neq 0$ だから, $x\in[a, b]$ に対し $\alpha=\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$, $\beta=\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$ を例3.2の (i) の不等式に代入すれば次の不等式が得られる.

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q}\leqq\frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p)^p}+\frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}=\frac{|f(x)|^p}{p\int_a^b|f(x)|^p\,dx}+\frac{|g(x)|^q}{q\int_a^b|g(x)|^q\,dx}$$

この不等式の両辺を x について a から b まで積分すれば次の不等式が得られる.

$$\frac{\int_a^b|f(x)g(x)|\,dx}{\|f\|_p\|g\|_q}\leqq\frac{\int_a^b|f(x)|^p\,dx}{p\int_a^b|f(x)|^p\,dx}+\frac{\int_a^b|g(x)|^q\,dx}{q\int_a^b|g(x)|^q\,dx}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

この両辺に $\|f\|_p\|g\|_q$ をかければ $\int_a^b|f(x)g(x)|\,dx\leqq\|f\|_p\|g\|_q$ が得られる.

(iii) $\|f+g\|_p \leqq \|f\|_p + \|g\|_p$ が成り立つことを示す.

$|f(x)+g(x)| \leqq |f(x)|+|g(x)|$ の両辺に $|f(x)+g(x)|^{p-1}$ をかけて得られる $|f(x)+g(x)|^p \leqq |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}+|g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}$ の両辺を x について a から b まで積分すれば, 次の不等式(∗∗)が得られる.

$$\|f+g\|_p^p = \int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx$$
$$\leqq \int_a^b |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx + \int_a^b |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx \cdots (**)$$

$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ を満たす q をとり (ii) の不等式の $g(x)$ に $|f(x)+g(x)|^{p-1}$ を代入すると, 次の不等式が得られる.

$$\int_a^b |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx \leqq \|f\|_p \left(\int_a^b (|f(x)+g(x)|^{p-1})^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \|f\|_p \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}} = \|f\|_p \|f+g\|_p^{p-1}$$

同様に(ii)の不等式の $f(x)$ に $|f(x)+g(x)|^{p-1}$ を代入すれば

$$\int_a^b |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}dx \leqq \|g\|_p \|f+g\|_p^{p-1}$$

が得られるため, これらの不等式と$(**)$から

$$\|f+g\|_p^p \leqq \|f\|_p \|f+g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \|f+g\|_p^{p-1}$$

が成り立つ. $f+g=0$ならば(iii)の不等式は成り立つため, $f+g\neq 0$と仮定すれば

$\|f+g\|_p \neq 0$ だから, 上の不等式の両辺を $\|f+g\|_p^{p-1}$ で割って

$\|f+g\|_p \leqq \|f\|_p + \|g\|_p$ を得る.

$d_p(f,g)=\|f-g\|_p$ であることに注意すれば $\|f+g\|_p \leqq \|f\|_p+\|g\|_p$ から, 次が成り立つ.

$$d_p(f,h)=\|f-h\|_p=\|(f-g)+(g-h)\|_p \leqq \|f-g\|_p+\|g-h\|_p=d_p(f,g)+d_p(g,h)$$

例 3.4　距離空間の例 (その3)

有理数全体からなる集合 $\boldsymbol{Q}$ には以下のような距離関数が定義される.

p を与えられた素数とし, a は $0<a<1$ を満たす実数の定数であるとする.

$x\in\boldsymbol{Q}-\{0\}$ に対し, $x=\frac{m}{n}p^{l_x}$ (ただし m,n は p で割れない整数, l_x は整数) を満たす整数 l_x は一通りに定まるため, 関数 $\nu_p:\boldsymbol{Q}-\{0\}\to\boldsymbol{R}$ を $\nu_p(x)=a^{l_x}$ で定義することができる. そこで関数 $d_p:\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}\to\boldsymbol{R}$ を

$$d_p(x,y)=\begin{cases}\nu_p(x-y) & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$$

で定義すると, d_p は $\boldsymbol{Q}$ の距離関数である. 実際, $d_p(x,y)\geqq 0$ であり, $d_p(x,y)=0$ が $x=y$ と同値であることは d_p の定義から明らかである. ν_p の定義から $x\in\boldsymbol{Q}-\{0\}$ に対し, $\nu_p(-x)=\nu_p(x)$ が成り立つため, $d_p(y,x)=d_p(x,y)$ が成り立つ.

d_p が定義3.1の (iii) の不等式を満たすことは, 次の不等式(証明略)を用いて示される.

$$x,y\in\boldsymbol{Q}-\{0\}\ \text{かつ}\ x+y\neq 0\ \text{ならば}\ \nu_p(x+y)\leqq\max\{\nu_p(x),\nu_p(y)\}$$

例 3.5　距離空間の例 (その4)

虚部が正の実数である複素数全体からなる集合を $\boldsymbol{H}$ で表す. 関数 $d_{\boldsymbol{H}}:\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{R}$ を

$$d_{\boldsymbol{H}}(z,w)=\log\frac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|}$$

で定義すると, $d_{\boldsymbol{H}}$ は $\boldsymbol{H}$ の距離関数である.

$d_{\boldsymbol{H}}$ が $\boldsymbol{H}$ の距離関数になることの証明は下記のURLのプリントの第4節参照.

http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yamaguti/jugyo/geom/viewpoint_of_math2.pdf

例3.3の距離関数は「関数解析」と呼ばれる解析学の分野で重要な距離関数で,

例3.4の距離関数は「整数論」と呼ばれる代数学の分野で重要な距離関数である.

また, 例3.5の距離関数を用いて「非ユークリッド幾何学」が展開される.

幾何学 I

第4節　距離空間の性質

以後, とくに断らない限り, この節では X を距離関数 d が与えられた距離空間とする.
距離空間には, 定義2.16と同様に開球の概念ができる.

定義 4.1　開球
$p \in X,\ r > 0$ に対して, p からの距離が r より小さい点全体からなる X の部分集合 $\{x \in X \mid d(x,p) < r\}$ を $B_d(p\,;r)$ で表し, これを中心 p, 半径 r の開球または「p の r 近傍」という.

開球を用いて, 距離空間の部分集合から定まる集合が定義できる.

定義 4.2　内部・外部・閉包・境界

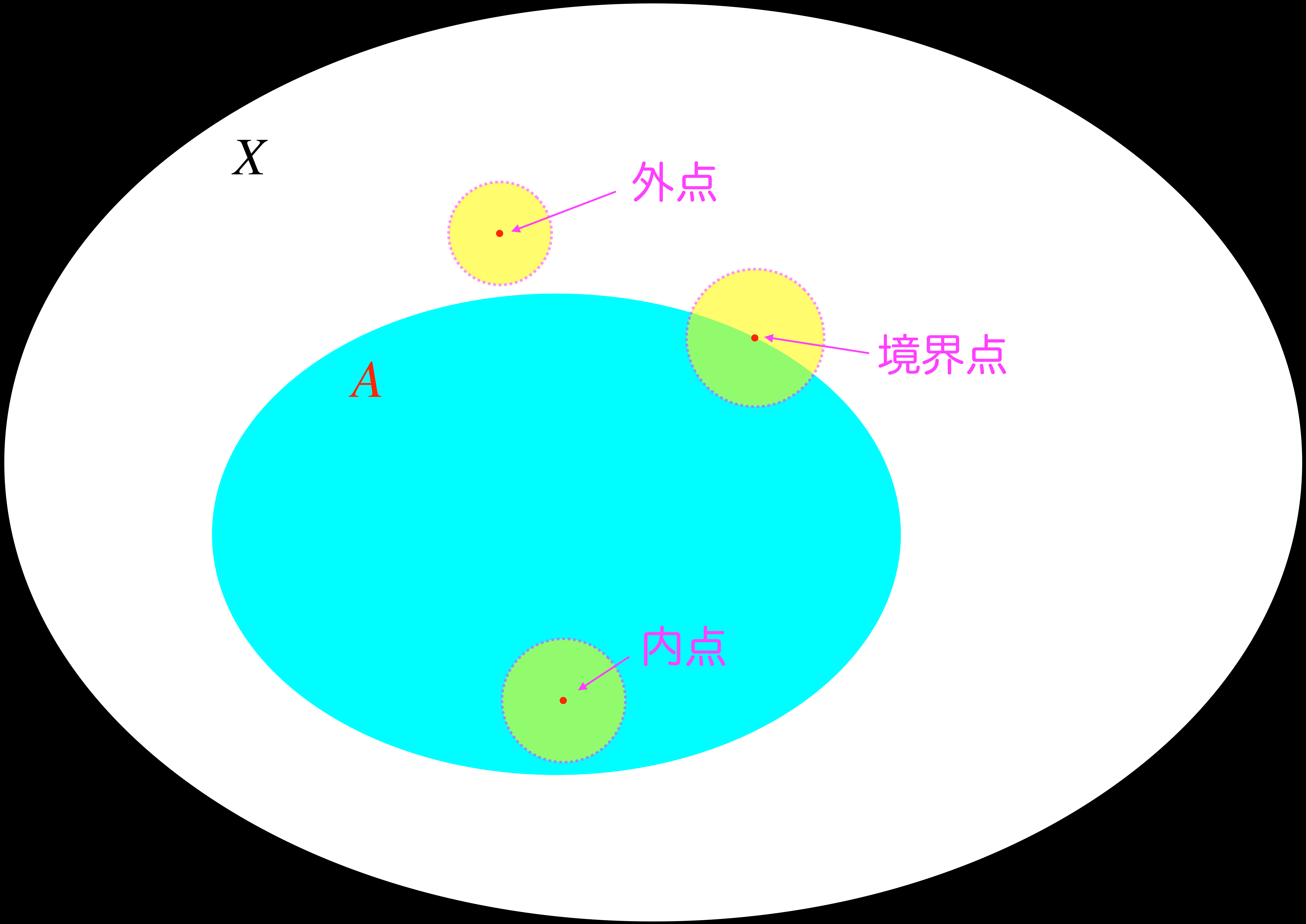
(X, d) を距離空間, A を X の部分集合, $p \in X$ とする.

(1) $r > 0$ で, $B_d(p\,;r) \subset A$ を満たすものがあるとき, p を A の内点という.
　A の内点全体からなる集合を A の内部といい, A^i で表す.

(2) $r > 0$ で, $B_d(p\,;r) \cap A = \emptyset$ を満たすものがあるとき, p を A の外点という.
　A の外点全体からなる集合を A の外部といい, A^e で表す.

(3) 任意の $r > 0$ に対して, $B_d(p\,;r) \cap A \neq \emptyset$ であるとき, p を A の触点という.
　A の触点全体からなる集合を A の閉包といい, $\overline{A}$ で表す.

(4) 任意の $r > 0$ に対して, $B_d(p\,;r) \cap A \neq \emptyset$ かつ $B_d(p\,;r) \not\subset A$ であるとき, p を A の境界点という. A の境界点全体からなる集合を A の境界といい, ∂A で表す.


X
外点
境界点
A
内点

注意 4.3

定義4.2からただちに以下のことが分かる.

(1) $B_d(p\,;r)\cap A=\emptyset$ は $B_d(p\,;r)\subset X-A$ と同値だから, p が A の外点であることと p が $X-A$ の内点であることは同値である. 従って $A^e=(X-A)^i$ である.

(2) $B_d(p\,;r)\not\subset A$ は $B_d(p\,;r)\cap(X-A)\neq\emptyset$ と同値だから, p が A の境界点であることと p が A と $X-A$ の両方の触点であることは同値である. 従って $\partial A=\overline{A}\cap\overline{X-A}$ であり, この等式から $\partial(X-A)=\partial A$ が得られる.

(3) $p\in B_d(p\,;r)$ だから $B_d(p\,;r)\subset A$ ならば $p\in A$ であり, $p\in A$ ならば任意の $r>0$ に対して $p\in B_d(p\,;r)\cap A$ だから $p\in\overline{A}$ である. また $B_d(p\,;r)\cap A=\emptyset$ ならば $p\notin A$ である. 従って $A^i\subset A\subset\overline{A}$, $A\cap A^e=\emptyset$ が成り立つ.

(4) p が A の内点でも外点でもないことは, p が定義4.2の(4)の条件を満たすことと同値だから $\partial A=X-(A^i\cup A^e)$ である. 従って $X=A^i\cup A^e\cup\partial A$ と $A^i\cap\partial A=A^e\cap\partial A=\emptyset$ が成り立つ. ((3)から $A^i\cap A^e=\emptyset$ も成り立つ.)

命題 4.4
(X, d) を距離空間とする. X の部分集合 A に対して次の等式が成り立つ.

(1) $\overline{A} = A^i \cup \partial A$　　　　(2) $\overline{X - A} = X - A^i$

証明

(1) 定義4.2の(3)と(4)から, 境界点は触点だから $\partial A \subset \overline{A}$ であり, 注意4.3の(3)から $A^i \subset \overline{A}$ だから $A^i \cup \partial A \subset \overline{A}$ である. $p \in \overline{A}$ かつ $p \notin A^i$ ならば任意の $r > 0$ に対して $B_d(p; r) \cap A \neq \emptyset$ かつ $B_d(p; r) \not\subset A$ が成り立つため $p \in \partial A$ である. 故に $\overline{A} \subset A^i \cup \partial A$ も成り立つため, $\overline{A} = A^i \cup \partial A$ である.

(2) $B_d(p\,; r) \cap (X - A) \neq \emptyset$ は $B_d(p\,; r) \not\subset A$ と同値だから, $p \in \overline{X - A}$ は条件

「任意の $r > 0$ に対して, $B_d(p\,; r) \not\subset A$」

と同値である. この条件は $p \in A^i$ であるための定義4.2の(1)の条件の否定だから, $p \in \overline{X - A}$ は $p \in X - A^i$ と同値である. 従って $\overline{X - A} = X - A^i$ が成り立つ.

距離空間における点列の収束と写像の極限と深く関わっている「開集合」,「閉集合」と呼ばれる概念を定義する.

定義 4.5　開集合・閉集合

(X, d) を距離空間, A を X の部分集合とする.

(1) A の点がすべて内点であるとき, A を X の**開集合**という.

(2) A の触点がすべて A に属するとき, A を X の**閉集合**という.

注意 4.6

(1) 注意4.3の(3)の1つめの式から, A が開集合であるためには, $A^i = A$ であることが必要十分であり, A が閉集合であるためには, $\overline{A} = A$ であることが必要十分である.

(2) A が空集合の場合も, 命題「$p \in A$ ならば p は A の内点である.」は真であるため, 空集合も開集合である. またこのとき, A の触点は存在しないので, 命題「A の触点がすべて A に属する.」も真であるため, 空集合も閉集合である.

命題 4.7

(X, d) を距離空間, A を X の部分集合とすれば次の3つは同値である.

(i) A は閉集合である. (ii) $X - A$ は閉集合である. (iii) $\partial A \subset A$

証明

$A=X-(X-A)$ だから命題4.4の(2)から $\overline{A}=\overline{X-(X-A)}=X-(X-A)^i$ である.
従って $\overline{A}=A$ は $X-(X-A)^i=X-(X-A)$ と同値である. $X-(X-A)^i=X-(X-A)$ のの両辺の補集合を考えれば $(X-A)^i=X-A$ が得られるため, $\overline{A}=A$ は $(X-A)^i=X-A$ と同値である. 故に注意4.6の(1)から(i)と(ii)は同値である.

A が閉集合ならば注意4.6の(1)と命題4.4の(1)から $A=\overline{A}=A^i\cup\partial A\supset\partial A$ である.
逆に $\partial A \subset A$ ならば命題4.4の(1)と注意4.3の(3)から $\overline{A}=A^i\cup\partial A\subset A\subset\overline{A}$ だから $\overline{A}=A$ が成り立つため, A は閉集合である.

命題 4.8

距離空間 (X, d) に関する次の条件(C)を考える. (ユークリッド空間では満たされる.)

(C) $p, q \in X$ と $r, s > 0$ に対し, $r+s > d(p, q)$ ならば $B_d(p; r) \cap B_d(q; s) \neq \emptyset$.

(1) 開球 $B_d(p\,; r)$ は開集合である.

(2) $B_d(p\,; r)^e \supset \{x \in X \mid d(p, x) > r\}$ であり, (X, d) が条件(C)が満たせば $B_d(p\,; r)^e = \{x \in X \mid d(p, x) > r\}$ が成り立つ.

(3) $\partial B_d(p\,; r) \subset \{x \in X \mid d(p, x) = r\}$ であり, (X, d) が条件(C)が満たせば $\partial B_d(p\,; r) = \{x \in X \mid d(p, x) = r\}$ が成り立つ.

証明

(1) $q \in B_d(p\,; r)$ ならば $d(p, q) < r$ であり, 任意の $x \in B_d(q\,; r - d(p, q))$ は $d(q, x) < r - d(p, q)$ と定義4.1の(iii)より $d(p, x) \leqq d(p, q) + d(q, x) < r$ を満たし, $x \in B_d(p\,; r)$ となるため, $B_d(q\,; r - d(p, q)) \subset B_d(p\,; r)$ である. よって $B_d(p\,; r)$ のすべての点は内点だから $B_d(p\,; r)$ は開集合である.

証明の続き

(2) $q \in X$ が $d(p,q) > r$ かつ $B_d(q; d(p,q)-r) \cap B_d(p;r) \neq \emptyset$ を満たすならば $x \in B_d(q; d(p,q)-r) \cap B_d(p;r)$ が存在するので, $d(q,x) < d(p,q)-r$ かつ $d(p,x) < r$ が成り立つ. 定義3.1の(ii), (iii) より

$$d(p,q) \leqq d(p,x) + d(x,q) = d(p,x) + d(q,x)$$

だから上の二つの不等式を用いると

$$d(q,x) \geqq d(p,q) - d(p,x) > d(q,x) + r - d(p,x) > d(q,x)$$

となって矛盾が生じる. 故に $B_d(q; d(p,q)-r) \cap B_d(p;r) = \emptyset$ で, この等式は $B_d(q; d(p,q)-r) \subset X - B_d(p;r)$ と同値だから q は $X - B_d(p;r)$ の内点になり $q \in B_d(p;r)^e$ を得る. 従って $\{x \in X \mid d(x,p) > r\} \subset B_d(p;r)^e$ である.

(C)を仮定して, $q \in B_d(p;r)^e$ とすれば, $s > 0$ で $B_d(p;r) \cap B_d(q;s) = \emptyset$ を満たすものが存在するため, (C)の対偶から $r+s \leqq d(p,q)$ が成り立つ. 故に $r \leqq d(p,q) - s < d(p,q)$ だから $q \in \{x \in X \mid d(x,p) > r\}$ となるため, $B_d(p;r)^e = \{x \in X \mid d(x,p) > r\}$ である.

証明の続き

(3) 注意4.3の(4)から $\partial B_d(p;r)=X-(B_d(p;r)^i \cup B_d(p;r)^e)$ だから(1)と(2)の結果から $q\in\partial B_d(p;r)$ ならば $d(x,p)=r$ である. 故に $\partial B_d(p;r)\subset\{x\in X\mid d(x,p)=r\}$ である. (C)を仮定すれば(2)より $B_d(p;r)^e=\{x\in X\mid d(x,p)>r\}$ で, (1)より $B_d(p;r)^i=\{x\in X\mid d(x,p)<r\}$ だから $\partial B_d(p;r)=X-(B_d(p;r)^i\cup B_d(p;r)^e)$ から $\partial B_d(p;r)=\{x\in X\mid d(x,p)=r\}$ である.

距離空間における点列の収束や, 距離空間の間の写像の極限がユークリッド空間の場合(定義2.17, 定義2.18)と全く同様に定義できる.

定義 4.9　点列の極限

$(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を X の点列, $p\in X$ とする. 任意の正の実数 ε に対して自然数 N で, 条件

「$k\geqq N$ ならば $x_k\in B_d(p\,;\varepsilon)$」

を満たすものが存在するとき, 点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は p に収束するといい, このことを $\lim_{k\to\infty} x_k = p$ で表す.

注意 4.10

(1) 定義4.9をさらに言い換えると, $(x_k)_{k\in N}$ が $p\in X$ に収束するということは, 任意の正の実数 ε に対し, $x_k \notin B_d(p;\varepsilon)$ であるような自然数 k は有限個しかないということである. 従って, X の点列 $(x_k)_{k\in N}$ が $p\in X$ に収束しないということは, 正の実数 ε_0 で, 条件「$x_k \notin B_d(p\,;\varepsilon_0)$ である自然数 k が無限に存在する.」を満たすものがあることである.

(2) X の点列 $(x_k)_{k\in N}$ に対し, 実数列 $(d(x_k,p))_{k\in N}$ を考えると, この数列は常に 0 以上の値をとり, 定義4.9から, $(x_k)_{k\in N}$ が p に収束するためには, $(d(x_k,p))_{k\in N}$ が 0 に収束することが必要十分である.

定義 4.11　写像の極限

(X, d), (Y, d') を距離空間とし, X の部分集合 Z, Y の部分集合 W と写像 $f\colon Z \to W$ が与えられているとする. $p \in X$, $q \in Y$ とし, 任意の正の実数 ε に対して正の実数 δ で, 条件

「“$x \in B_d(p\,;\delta) \cap Z$ かつ $x \neq p$” ならば $f(x) \in B_{d'}(q\,;\varepsilon)$」

を満たすものが存在するとき, 写像 f の p における極限は q であるといい, このことを $\displaystyle\lim_{x \to p} f(x) = q$ で表す.

注意 4.12

$x \in Z$ を $d'(f(x), q)$ に対応させる関数を考えれば, この関数は常に0以上の値をとり, 定義 4.11から, $\displaystyle\lim_{x \to p} f(x) = q$ であるためには $\displaystyle\lim_{x \to p} d'(f(x), q) = 0$ であることが必要十分である.

写像の極限の概念が定義できれば, 写像の連続性の概念が次のように定義できる.

定義 4.13　写像の連続性

(X, d), (Y, d') を距離空間, $p \in X$ とする. 写像 $f : X \to Y$ が $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ を満たすとき f は点 p で連続であるという.

さらに f が X の任意の点で連続であるとき, f を連続写像という.

注意 4.14

$B_d(p;\delta) \subset X$ かつ $f(p) \in B_{d'}(f(p);\varepsilon)$ だから f が点 p で連続であるとは, 任意の正の実数 ε に対して正の実数 δ で, 次の条件を満たすものが存在することである.

「$x \in B_d(p\,;\delta)$ ならば $f(x) \in B_{d'}(f(p)\,;\varepsilon)$」

次の命題は, 連続写像が持つ重要な性質の一つである.

命題 4.15　連続性と極限

$(X,d),(Y,d'),(Z,d'')$ を距離空間, $V\subset X, W\subset Y$ とし, 写像 $f:V\to W$ は $p\in X$ と $q\in Y$ に対して $\lim_{x\to p} f(x)=q$ を満たすとする. 写像 $g:Y\to Z$ が q で連続ならば $\lim_{x\to p} g(f(x))=g(q)$ が成り立つ.

証明

g が q で連続であることから, 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta_1>0$ で条件

「$y\in B_{d'}(q;\delta_1)$ ならば $g(y)\in B_{d''}(g(q);\varepsilon)$」$\cdots$ (i)

を満たすものがある. また $\lim_{x\to p} f(x)=q$ より, 上の $\delta_1>0$ に対して $\delta>0$ で条件

「"$x\in B_d(p;\delta)\cap V$ かつ $x\neq p$" ならば $f(x)\in B_{d'}(q;\delta_1)$」

を満たすものがある. 故に "$x\in B_d(p;\delta)\cap V$ かつ $x\neq p$" ならば (i) で $y=f(x)$ として $g(f(x))\in B_{d''}(g(q);\varepsilon)$ が成り立つので $\lim_{x\to p} g(f(x))=g(q)$ である.

注意 4.16
命題4.15の結果は $\lim_{x\to p} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to p} f(x)\right)$ とも表せる. これは, 連続関数が「極限をとる」という操作と交換可能であることを示している.

距離空間 (X,d) の部分集合 A に対し, X の点 p が A の触点であるための必要十分条件が点列を用いて次のように与えられる.

命題 4.17
点 $p\in X$ が X の部分集合 A の触点であるためであるためには, すべての $k\in N$ に対して $x_k\in A$ である点列 $(x_k)_{k\in N}$ で p に収束するものが存在することが必要十分である. 従って次の等式が成り立つ.

$$\overline{A} = \{p\in X \mid \text{各 } k\in N \text{ に対し, } x_k\in Y \text{ かつ } p \text{ に収束する点列 } (x_k)_{k\in N} \text{ が存在する.}\}$$

証明

pがAの触点ならば任意の自然数kに対して$B_d\left(p;\frac{1}{k}\right)\cap A\neq\emptyset$だから$x_k\in B_d\left(p;\frac{1}{k}\right)\cap A$が選べる. このとき, すべての $k\in\boldsymbol{N}$ に対して $x_k\in A$ かつ $d(x_k,p)<\frac{1}{k}$ だから $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は p に収束する.

逆に, すべての $k\in\boldsymbol{N}$ に対して $x_k\in A$ である点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ で p に収束するものが存在するならば, 任意の $\varepsilon>0$ に対して自然数 Nで条件「$k\geqq N$ ならば $x_k\in B_d(p;\varepsilon)$」を満たすものが存在する. 従って $x_N\in B_d(p;\varepsilon)\cap A$ だから $B_d(p;\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$ となるため pはAの触点である.

距離空間の部分集合が閉集合であるための必要十分条件が点列を用いて次のように与えられる.

系 4.18
(X, d) を距離空間とする. X の部分集合 A が閉集合であるためには, 次の条件が満たされることが必要十分である.
「各 $k \in N$ に対して $x_k \in A$ である点列 $(x_k)_{k \in N}$ が $p \in X$ に収束すれば $p \in A$ である.」

注意 4.19
距離空間 (X, d) において収束する点列全体の集合を $\mathrm{Seq}(X, d)$ で表し, 収束する点列 $(x_k)_{k \in N}$ に対してその極限を対応させる写像 $\lim : \mathrm{Seq}(X, d) \to X$ を考える. すなわち $\lim_{k \to \infty} x_k = p$ のとき $\lim((x_k)_{k \in N}) = p$ とする. 系4.18は, X の部分集合 A が閉集合であるための必要十分条件が, 「各項が A に属する点列の $\lim : \mathrm{Seq}(X, d) \to X$ による像が A に含まれる.」である, つまり“A が写像 $\lim$ で閉じている”ことを主張している.

幾何学 I

第5節　距離空間の位相

距離関数から定義される開球を用いて点列の収束や写像の極限の定義を定義4.9, 定義4.11で行ったが, 以下の命題5.1と命題5.2は, 開集合だけを用いて点列の収束と写像の極限が定義できることを示している.

命題 5.1
Xの点列$(x_k)_{k\in N}$が$p\in X$に収束するためには, pを含む任意の開集合Uに対し, 自然数Nで, 条件「$k\geqq N$ならば$x_k\in U$」を満たすものが存在することが必要十分である.

証明
$(x_k)_{k\in N}$が$p\in X$に収束するとし, Uはpを含む開集合であるとする.
開集合の定義から, $r>0$で, $B_d(p;r)\subset U$を満たすものがあり, $(x_k)_{k\in N}$が$p\in X$に収束することから, 自然数Nで, 条件「$k\geqq N$ならば$x_k\in U$」を満たすものが存在する.
$B_d(p;r)\subset U$だから, 自然数Nは, 条件「$k\geqq N$ならば$x_k\in U$」を満たす.
逆は, 命題4.8の(1)により開球が開集合であることから明らかである.

命題 5.2
$(X,d),(Y,d')$ を距離空間, $Z\subset X$, $W\subset Y$ と写像 $f:Z\to W$ が与えられているとする. 写像 f の $p\in X$ における極限が $q\in Y$ であるためには, q を含む Y の任意の開集合 V に対し, p を含む X の開集合 U で, 条件「"$x\in U\cap Z$ かつ $x\neq p$" ならば $f(x)\in V$」を満たすものが存在することが必要十分である.

証明
f の $p\in X$ における極限が $q\in Y$ であるとし, V は q を含む開集合であるとする. 開集合の定義から, $r>0$ で, $B_{d'}(q;r)\subset V$ を満たすものがあり, f の p における極限が q であることから, $\delta>0$ で条件「"$x\in B_d(p;\delta)\cap Z$ かつ $x\neq p$" ならば $f(x)\in B_{d'}(q;r)$」を満たすものが存在する. 開球 $B_d(p;\delta)$ は p を含む開集合だから $U=B_d(p;\delta)$ とすればよい.
逆に q を含む Y の任意の開集合 V に対し, p を含む X の開集合 U で, 条件「"$x\in U\cap Z$ かつ $x\neq p$" ならば $f(x)\in V$」を満たすものが存在すると仮定する.

証明の続き

任意の $\varepsilon>0$ に対して $B_{d'}(q\,;\varepsilon)$ は q を含む開集合だから, 仮定から p を含む X の開集合 U で, 条件「"$x\in U\cap Z$ かつ $x\neq p$" ならば $f(x)\in B_{d'}(q\,;\varepsilon)$」を満たすものが存在する. 開集合の定義から, $\delta>0$ で, $B_d(p;\delta)\subset U$ を満たすものがあるため, 条件「"$x\in B_d(p\,;\delta)\cap Z$ かつ $x\neq p$" ならば $f(x)\in B_{d'}(q\,;\varepsilon)$」が満たされる.

故に f の p における極限は q である.

注意 5.3

距離空間 (X,d) の開集合全体からなる集合を $\mathcal{O}_d$ で表すと, X の点列 $(x_k)_{k\in N}$ が収束するかどうか, また収束する場合はどの点に収束するかは, 距離関数 d そのものより, d から定まる X の部分集合を要素とする集合 $\mathcal{O}_d$ のみに依存することが命題5.1から分かる. 故に, 集合 X に与えられた2種類の距離関数 d, d' が異なっていても, $\mathcal{O}_d=\mathcal{O}_{d'}$ ならば, X の任意の点 p に対して, 距離空間 (X,d) において p に収束する点列全体の集合と距離空間 (X,d') において p に収束する点列全体の集合は一致する. 命題5.2から写像の極限についても同様のことが言える. 以下で $\mathcal{O}_d$ についてもう少し考察する.

点列の極限を用いれば, 写像の極限は次のように言い換えられる.

命題 5.4

$(X,d), (Y,d')$ を距離空間, $Z \subset X$, $W \subset Y$ とする. 写像 $f: Z \to W$ の $p \in X$ における極限が $q \in Y$ であることは, 次の条件を満たす X の任意の点列 $(x_k)_{k \in N}$ に対して $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = q$ が成り立つことと同値である.

$$\text{「すべての } k \in N \text{ に対して } x_k \in Z,\ x_k \neq p \text{ かつ } \lim_{k\to\infty} x_k = p \text{」}$$

証明

f の $p \in X$ における極限が $q \in Y$ であると仮定し, X の点列 $(x_k)_{k \in N}$ は条件

$$\text{「すべての } k \in N \text{ に対して } x_k \in Z,\ x_k \neq p \text{ かつ } \lim_{k\to\infty} x_k = p \text{」} \cdots (i)$$

を満たすとする. f についての仮定から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ で条件

$$\text{「“} x \in Z,\ x \neq p \text{ かつ } d(x,p) < \delta \text{” ならば } d'(f(x), q) < \varepsilon \text{」} \cdots (ii)$$

を満たすものがある.

証明の続き

また $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ についての仮定 (i) から, 上の δ に対して自然数 N で条件

「$k \geqq N$ ならば $x_k \in Z,\ x_k \neq p$ かつ $d(x_k, p) < \delta$」

を満たすものがある. 従って $k \geqq N$ ならば $x = x_k$ としたときに条件 (ii) の仮定が満たされて「$k \geqq N$ ならば $d'(f(x_k), q) < \varepsilon$ 」が成り立つため $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = q$ である.

上で示した主張の逆の主張を示すために, 逆の主張の対偶である『f の p における極限が q でないならば, 条件「すべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_k \in Z,\ x_k \neq p$ かつ $\lim_{k\to\infty} x_k = p$」を満たす X の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ で $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = q$ が成り立たないものが存在する.』を示す.

f の p における極限が q でないとき, ある $\varepsilon_0 > 0$ で, 次の条件を満たすものがある.

「任意の $\delta > 0$ に対し, $x \neq p$ かつ $f(x) \notin B_{d'}(q; \varepsilon_0)$ を満たす $x \in B_d(p; \delta) \cap Z$ がある.」

故に任意の $k \in \boldsymbol{N}$ に対し, $x_k \neq p$ かつ $f(x_k) \notin B_{d'}(q\,; \varepsilon_0)$ を満たす $x_k \in B_d\left(p\,; \frac{1}{k}\right) \cap Z$ がある.

証明の続き

そこで, X の点列 $(x_k)_{k \in N}$ を考えると, すべての $k \in N$ に対して $x_k \in Z$, $x_k \neq p$ であり, $0 \leqq d(x_k, p) < \frac{1}{k}$ だから例2.10と命題2.11の(2)から, $\lim_{k \to \infty} d(x_k, p) = 0$ である.

従って, 注意4.10の(2)により $(x_k)_{k \in N}$ は p に収束する. ところが, 任意の $k \in N$ に対して $f(x_k) \notin B_{d'}(q\,;\varepsilon_0)$ だから, 注意4.10の(1)によって $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = q$ は成り立たないため, 上の主張が示された.

系 5.5
$(X,d),(Y,d')$ を距離空間とする. 写像 $f:X\to Y$ が $p\in X$ で連続であることは, p に収束する X の任意の点列 $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ に対して $\lim_{k\to\infty} f(x_k)=f(p)$ が成り立つことと同値である.

証明

f の p で連続であると仮定し, $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ を p に収束する X の点列とする.

注意4.14から, 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ で次の条件を満たすものがある.

「$d(x,p)<\delta$ ならば $d'(f(x),f(p))<\varepsilon$ 」$\cdots$ (i)

また $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ は p に収束するため, 上の δ に対して自然数 N で条件

「$k\geqq N$ ならば $d(x_k,p)<\delta$」

を満たすものがある. 従って $k\geqq N$ ならば $x=x_k$ としたときに条件 (i) の仮定が満たされて「$k\geqq N$ ならば $d'(f(x_k),f(q))<\varepsilon$」が成り立つため $\lim_{k\to\infty} f(x_k)=f(p)$ である.

逆に p に収束する X の任意の点列 $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ に対して $\lim_{k\to\infty} f(x_k)=f(p)$ が成り立つならば, 命題5.4により, f は p で連続である.

今後頻繁に用いる記号を定義しておく.

定義 5.6　写像の像と逆像

一般に X, Y を集合とし, 写像 $f: X \to Y$ が与えられているとする.

(1) X の部分集合 A に対して Y の部分集合 $f(A)$ を

$$f(A) = \{y \in Y \,|\, f(x) = y \text{ を満たす } x \in A \text{ が存在する.}\}$$

で定義して $f(A)$ を f による A の像という. とくに $f(X)$ を f の像という.

(2) Y の部分集合 B に対して X の部分集合 $f^{-1}(B)$ を

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \,|\, f(x) \in B\}$$

で定義して $f^{-1}(B)$ を f による B の逆像という.

命題5.2で開球を使わずに開集合を用いて写像の極限の定義を言い換えられることを示したが, 逆像の記号を用いれば写像が連続であることの定義は, 次のように簡潔な(でも, 直感的でない)形に言い換えられる.

命題 5.7

$(X,d),(Y,d')$ を距離空間とし, 写像 $f:X\to Y$ が与えられているとする.

(1) f が $p\in X$ で連続であるためには, $f(p)$ を含む Y の任意の開集合 V に対し, p が $f^{-1}(V)$ の内点であることが必要十分である.

(2) f が連続写像であるためには, Y の任意の開集合 V に対し, $f^{-1}(V)$ が X の開集合であることが必要十分である.

証明

(1) f が $p\in X$ で連続であるとし, V は Y の開集合で $f(p)$ を含むものとする.

命題5.2から, p を含む X の開集合 U で, 条件「“$x\in U$ かつ $x\neq p$” ならば $f(x)\in V$」を満たすものが存在する. ここで, $f(x)\in V$ は $x\in f^{-1}(V)$ と同値であり, $f(p)\in V$ だから $p\in f^{-1}(V)$ となるため, U は条件「$x\in U$ ならば $x\in f^{-1}(V)$」を満たす. 従って $U\subset f^{-1}(V)$ である. U は p を含む開集合だから p は U の内点である. 故に p は U を含む集合 $f^{-1}(V)$ の内点でもある.

証明の続き

逆に $f(p)$ を含む Y の任意の開集合 V に対し, p が $f^{-1}(V)$ の内点であると仮定する. p は $f^{-1}(V)$ の内点だから, $r>0$ で $B_d(p\,;r)\subset f^{-1}(V)$ を満たすものが存在する. そこで $U=B_d(p\,;r)$ とおけば, 例4.8の(1)から, U は p を含む X の開集合であり, $x\in U$ ならば $x\in f^{-1}(V)$, すなわち $f(x)\in V$ だから命題5.2によって f の p における極限は $f(p)$ である. 従って f は p で連続である.

(2) Y の任意の開集合 V に対し, $f^{-1}(V)$ が X の開集合であることと, $f^{-1}(V)$ の任意の点が $f^{-1}(V)$ の内点であることは同値だから, (1)より主張が成り立つ.

注意5.3でも述べたように, 命題5.1, 命題5.2, 命題5.7により, 点列の収束や写像の極限, 連続性は距離関数そのものよりも, 距離関数から定まる開集合からなる集合に依存する概念であるといえる. そこで, 次の定義を行う.

定義 5.8　距離空間の位相

距離空間 (X,d) の開集合全体からなる集合を距離関数 d から定まる X の位相といい, $\mathscr{O}_d$ で表す.

距離関数を明示する必要がある場合は, 距離空間 (X, d) から距離空間 (Y, d') への写像を $f : (X, d) \to (Y, d')$ のように表す.

集合に2種類の距離関数が与えられた場合, 次のことが成り立つ.

定理 5.9

集合 X に2種類の距離関数 d, d' が与えられているとき, 次の4つの命題は同値である.

(i) $\mathcal{O}_{d'} \subset \mathcal{O}_d$

(ii) X の恒等写像 $id_X : (X, d) \to (X, d')$ は連続である.

(iii) 任意の $p \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ で, 次の条件を満たすものがある.

「$d(x, p) < \delta$ ならば $d'(x, p) < \varepsilon$」

(iv) 任意の $p \in X$ に対し, X の点列 $(x_k)_{k \in N}$ が距離空間 (X, d) で p に収束すれば, $(x_k)_{k \in N}$ は距離空間 (X, d') でも p に収束する.

証明

$(i) \Rightarrow (ii)$; (i) が成り立つならば, 任意の $V \in \mathcal{O}_{d'}$ に対して $id_X^{-1}(V) = V \in \mathcal{O}_d$ だから, 命題5.7の(2)によって $id_X : (X, d) \to (X, d')$ は連続である.

$(ii) \Rightarrow (i)$; (ii) が成り立つならば, 任意の $V \in \mathcal{O}_{d'}$ に対して命題5.7の(2)から $V = id_X^{-1}(V)$ は (X, d) の開集合だから, $V \in \mathcal{O}_d$ である. 故に $\mathcal{O}_{d'} \subset \mathcal{O}_d$ が成り立つ.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$; $d'(id_X(x), id_X(p)) = d'(x, p)$ に注意すれば, 連続性の定義(注意4.14)から, (ii) と (iii) は同値である.

$(ii) \Rightarrow (iv)$; (ii) が成り立つと仮定し, X の点列 $(x_k)_{k \in N}$ が距離空間 (X, d) で p に収束するならば, 系5.5を $X = Y, f = id_X$ に対して用いると, id_X の連続性から $(x_k)_{k \in N}$ は距離空間 (X, d') でも p に収束するため, (iv) が成り立つ.

$(iv) \Rightarrow (ii)$; (iv) が成り立てば, 再び系5.5を $X = Y, f = id_X$ に対して用いると, id_X は X の任意の点 p で連続になるため, (ii) が成り立つ.

距離空間 (X,d) と $p\in X$ に対し, p に収束する X の点列全体からなる集合を $\mathrm{Seq}_p(X,d)$ で表せば, 定理5.9の (iv) は次のように言い換えられる.

「任意の $p\in X$ に対して $\mathrm{Seq}_p(X,d)\subset\mathrm{Seq}_p(X,d')$ である.」

従って定理5.9から「開集合が多いほど収束する点列は少なくなる.」ことと, 逆に「収束する点列が少ないということは, 開集合が多い.」ことが分かる.

また, $\mathcal{O}_d=\mathcal{O}_{d'}$ は「$\mathcal{O}_{d'}\subset\mathcal{O}_d$ かつ $\mathcal{O}_d\subset\mathcal{O}_{d'}$」と同値で, $\mathrm{Seq}_p(X,d)=\mathrm{Seq}_p(X,d')$ は「$\mathrm{Seq}_p(X,d)\subset\mathrm{Seq}_p(X,d')$ かつ $\mathrm{Seq}_p(X,d')\subset\mathrm{Seq}_p(X,d)$」と同値であることに注意すれば, 注意5.3でも述べたが, 次の結果が定理5.9からも得られる.

系 5.10
集合 X に2種類の距離関数 d,d' が与えられているとき, すべての $p\in X$ に対して $\mathrm{Seq}_p(X,d)=\mathrm{Seq}_p(X,d')$ であるためには, $\mathcal{O}_d=\mathcal{O}_{d'}$ であることが必要十分である.

上の結果は, 点列の収束は X の位相に支配されていることを意味する.

系 5.11
集合 X に2種類の距離関数 d, d' が与えられているとする. 正の実数の定数 K で条件

「すべての $x, y \in X$ に対して $d'(x, y) \leqq Kd(x, y)$ が成り立つ.」

を満たすものがあれば $\mathcal{O}_{d'} \subset \mathcal{O}_d$ である.

証明

任意の $p \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ とおく. このとき $d(x, p) < \delta$ ならば

$$d'(x, p) \leqq Kd(x, p) < K\delta = \varepsilon$$

が成り立ち, 定理5.9の (iii) が満たされるため, $\mathcal{O}_{d'} \subset \mathcal{O}_d$ である.

注意 5.12
上の結果から, 正の実数の定数 K , L で条件

「すべての $x, y \in X$ に対して $Ld(x, y) \leqq d'(x, y) \leqq Kd(x, y)$ が成り立つ.」

を満たすものがあれば $\mathcal{O}_{d'} = \mathcal{O}_d$ である.

次の例は距離関数が異なっていても, 位相が一致する例である.

例 5.13

p を1以上の実数とし, d_p, d_∞ を例3.2で定めた $\boldsymbol{R}^n$ の距離関数とする.
$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\boldsymbol{R}^n$ に対し, $d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ の定義からすべての $i=1,2,\ldots,n$ に対して $|x_i-y_i|\leqq d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成り立つため, 次の不等式が得られる.

$$d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n}d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^p\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

また, すべての $j=1,2,\ldots,n$ に対して $|x_j-y_j|\leqq\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成り立つため, 次の不等式が得られる.

$$d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|,\ldots,|x_n-y_n|\} \leqq d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

故に注意5.12から, $\mathscr{O}_{d_p}=\mathscr{O}_{d_\infty}$ であり, 任意の $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して $\boldsymbol{R}^n$ の点列 $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が距離空間 $(\boldsymbol{R}^n,d_p)$ で $\boldsymbol{p}$ に収束するためには, $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が距離空間 $(\boldsymbol{R}^n,d_\infty)$ で $\boldsymbol{p}$ に収束することが必要十分である.

次の例は距離関数が異なっていて, 位相が一致しない例である.
このような場合の2つの距離関数は「本質的に異なる」と考えられる.
p を1以上の実数とし, d_p, d_∞ を例3.3で定めた $C[a,b]$ の距離関数とする.

例 5.14

各 $k \in N$ に対して $f_k \in C[a,b]$ を次のように定める.

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{k+1}{b-a}\left| x - \dfrac{a+b}{2} \right| & x \in \left[\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{b-a}{k+1}, \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{k+1}\right] \\ 0 & x \in \left[a, \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{b-a}{k+1}\right] \cup \left[\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{k+1}, b\right] \end{cases}$$

$[a,b]$ で値がつねに0である定数値関数も0で表せば, f_k はつねに0以上の値をとり, $\dfrac{a+b}{2}$ で最大値1をとるため, すべての自然数 k に対して $d_\infty(f_k,0)=1$ だから, $(f_k)_{k\in N}$ は距離空間 $(C[a,b],d_\infty)$ で0に収束しない. 一方, 次の等式 $(*)$ が成り立つことから

$$\lim_{k\to\infty} d_p(f_k,0) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2(b-a)}{(k+1)(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$ となるため, 距離空間 $(C[a,b],d_p)$ では $(f_k)_{k\in N}$ は0に収束することが分かる. 故に系5.10の対偶から, $\mathcal{O}_{d_p} \neq \mathcal{O}_{d_\infty}$ である.

$$d_p(f_k,0)=\left(\int_a^b |f_k(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_{\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{k+1}}^{\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{k+1}}\left(1-\frac{k+1}{b-a}\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int_{-\frac{b-a}{k+1}}^{\frac{b-a}{k+1}}\left(1-\frac{k+1}{b-a}|y|\right)^p dy\right)^{\frac{1}{p}}=\left(2\int_0^{\frac{b-a}{k+1}}\left(1-\frac{k+1}{b-a}y\right)^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \quad \cdots (*)$$

$$=\left(2\left[\frac{a-b}{(k+1)(p+1)}\left(1-\frac{k+1}{b-a}y\right)^{p+1}\right]_0^{\frac{b-a}{k+1}}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{2(b-a)}{(k+1)(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

注意 5.15

$f,g\in C[a,b]$ に対し, $d_\infty(f,g)$ の定義から $|f(x)-g(x)|\leqq d_\infty(f,g)$ がすべての $x\in[a,b]$ に対して成り立つため, 次の不等式が得られる.

$$d_p(f,g)=\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqq\left(\int_a^b d_\infty(f,g)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=(b-a)^{\frac{1}{p}}d_\infty(f,g)$$

故に系5.11から $\mathcal{O}_{d_p}\subset\mathcal{O}_{d_\infty}$ が成り立つ.

注意 5.16

$C[a,b]$ の点列(関数列) $(f_k)_{k\in N}$ が距離空間 $(C[a,b],d_\infty)$ で関数 g に収束すれば, $\lim_{k\to\infty} d_\infty(f_k,g)=0$ であり, 注意5.15で示した不等式から $d_p(f_k,g)\leqq(b-a)^{\frac{1}{p}}d_\infty(f_k,g)$ だから, 命題2.11により $\lim_{k\to\infty} d_p(f_k,g)=0$ が得られる.
故に距離空間 $(C[a,b],d_p)$ でも $(f_k)_{k\in N}$ は g に収束する.

もし正の定数 c で不等式 $d_p(f,g)\geqq c\,d_\infty(f,g)$ が任意の $f,g\in C[a,b]$ に対して成り立つようなものが存在すれば, 注意5.15で示した不等式 $d_p(f,g)\leqq(b-a)^{\frac{1}{p}}d_\infty(f,g)$ と注意5.12から, $\mathcal{O}_{d_p}=\mathcal{O}_{d_\infty}$ が得られるため, 例5.14で示したことと矛盾が生じる.
従って正の定数 c で, すべての $f,g\in C[a,b]$ に対して不等式 $d_p(f,g)\geqq c\,d_\infty(f,g)$ が成り立つようなものは存在しない.

第1節から本節の前半までに行ったことを振り返ると以下のようになる.
・集合と写像に関する記号や用語の定義をした. (第1節)
・ベクトルの長さを使ってユークリッド空間に距離を定義し, その距離を用いて点列の収束や写像の極限を定義してその性質を調べた. (第2節)
・点列の収束や写像の極限は, 距離関数だけで定義される点に着目して, 距離関数だけが与えられた集合である距離空間の概念を定義し, 距離空間の例を与えた. (第3節)
・開球を用いることによって, 内点, 内部, 外点, 外部, 触点, 閉包, 境界点, 境界という距離空間の部分集合に関する概念を定義してその性質を調べた. さらに内点の概念を用いて開集合を定義し, 触点の概念を用いて閉集合を定義して, 開集合と閉集合は互いに補集合であることを示した. (第4節の前半)
・距離関数を用いて点列の収束と写像の極限を再定義し, 極限と交換可能であるという連続写像の性質を示した後, 点列を用いて閉集合と閉包を特徴付けた. (第4節の後半)
・開集合を用いて, 点列の収束と写像の極限の定義を言い換えられることを示した上で, 距離空間では点列の極限を用いて, 写像の極限や連続性の定義が言い換えられることを示した. さらに 写像の逆像の記号と開集合を用いれば写像の連続性を簡潔に表せることを示した. (第5節の前半)

注意5.3で述べたように, 点列の収束や写像の極限・連続性は距離関数そのものより, 開集合全体からなる集合に依存するため, この集合は極限の概念にかかわる重要な集合である. そのような集合にはちゃんと名前をつける必要があるので, 距離空間の開集合全体からなる集合に「位相」という名前を与えた. ここで「位相」とは英語のtopologyの訳で, topoはラテン語の「位置」を意味する言葉, それに〜学を意味する“logy”をくっつけたものだそうである. (なぜtopologyを「位相」と訳したのかは知りません.)

2つの距離関数から定まる2つの位相の包含関係と距離空間の各点に収束する点列の包含関係の間の関係について定理5.9で示すことによって, 距離空間における極限の概念を「支配」しているのは位相であることを明らかにした.

距離関数だけが与えられた集合である距離空間を考えたのは前述のように, 「収束や極限を定義するのに距離関数しか使っていない」という点に着目したからであったが, 今度は「位相が極限の概念を支配している」という点に着目して, 位相だけが与えられた集合である「位相空間」と呼ばれる概念を定義し, それについて次回から論じてゆく.

幾何学 I

第6節　位相空間

集合 X の部分集合全体からなる集合を $P(X)$ で表し, $P(X)$ を X の冪集合という.
集合 I の各要素 i に対して X の部分集合 S_i が与えられているとき, 言い換えると写像 $S: I \to P(X)$ が与えられていて $S(i) = S_i$ とおくとき, $(S_i)_{i \in I}$ を「I を添字集合とする集合族」という.

集合族 $(S_i)_{i \in I}$ に対して合併 $\bigcup_{i \in I} S_i$ と共通部分 $\bigcap_{i \in I} S_i$ を以下のように定める.

$$\bigcup_{i \in I} S_i = \{x \mid x \in S_i \text{ となる } i \in I \text{ がある.}\}$$

$$\bigcap_{i \in I} S_i = \{x \mid \text{すべての } i \in I \text{ に対して } x \in S_i.\}$$

また, Γ が X の部分集合を要素とする集合(すなわち $\Gamma \subset P(X)$)のとき, Γ の要素全体の合併と共通部分を次のように表す.

$$\bigcup_{A \in \Gamma} A = \{x \mid x \in A \text{ となる } A \in \Gamma \text{ がある.}\}$$

$$\bigcap_{A \in \Gamma} A = \{x \mid \text{すべての } A \in \Gamma \text{ に対して } x \in A.\}$$

定義3.1において距離関数とは, 命題2.7で示したユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の距離関数 d_n と同じ条件を満たすものとして定義したが, 位相空間の概念を定義する際も同様に, 距離空間における開集合全体の集合が満たす条件を示し, 集合 X の位相とは, 同じ条件を満たす X の部分集合を要素とする集合として定義する.

命題 6.1

距離空間 (X, d) に対し, X の開集合全体からなる集合 $\mathcal{O}_d$ は以下の条件を満たす.

(1) $X, \varnothing \in \mathcal{O}_d$

(2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O}_d$ ならば $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_d$.

(3) すべての $i \in I$ に対して $O_i \in \mathcal{O}_d$ ならば $\displaystyle\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}_d$.

証明

(1) 任意の $p \in X$ に対して $B_d(p\,;1) \subset X$ だから p は X の内点である. 従って X のすべての点は内点だから X は開集合になるため $X \in \mathcal{O}_d$ である.

また, 注意4.6から空集合は開集合だから $\varnothing \in \mathcal{O}_d$ である.

証明の続き

(2) $O_1, O_2 \in \mathscr{O}_d$ として, 任意の $p \in O_1 \cap O_2$ を取ると, O_1 と O_2 は開集合だから, p は O_1 の内点で, O_2 の内点でもあるので $r_1, r_2 > 0$ で $B_d(p\,; r_1) \subset O_1$, $B_d(p\,; r_2) \subset O_2$ を満たすものがある. 故に $B_d(p\,; r_1) \cap B_d(p\,; r_2) \subset O_1 \cap O_2$ が成り立つ. $r = \min\{r_1, r_2\}$ とおけば $0 < r \leqq r_1, r_2$ だから $B_d(p\,; r) \subset B_d(p\,; r_1)$ かつ $B_d(p\,; r) \subset B_d(p\,; r_2)$ が成り立つので $B_d(p\,; r) \subset B_d(p\,; r_1) \cap B_d(p\,; r_2) \subset O_1 \cap O_2$ となり, p は $O_1 \cap O_2$ の内点である. 従って $O_1 \cap O_2$ は開集合だから $O_1 \cap O_2 \in \mathscr{O}_d$ である.

(3) $p \in \bigcup_{i \in I} O_i$ ならば $p \in O_j$ を満たす $j \in I$ がある. O_j は開集合だから p は O_j の内点で, $r > 0$ で $B_d(p\,; r) \subset O_j$ を満たすものがある. このとき $B_d(p\,; r) \subset O_j \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ だから p は $\bigcup_{i \in I} O_i$ の内点である. 従って $\bigcup_{i \in I} O_i$ は開集合だから $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathscr{O}_d$ である.

定義 6.2　位相空間
X を集合, $\mathcal{O}$ を X の部分集合を要素とする集合(すなわち $\mathcal{O} \subset P(X)$)とする.
$\mathcal{O}$ が次の3つの条件を満たすとき, $\mathcal{O}$ を X の位相(または位相構造)と呼び, 対 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間という. また, $\mathcal{O}$ の要素を X の開集合という.

(O1) $X, \varnothing \in \mathcal{O}$

(O2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

(O3) すべての $i \in I$ に対して $O_i \in \mathcal{O}$ ならば $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$.

X の位相を一つ固定して考える場合は「位相空間 $(X, \mathcal{O})$」というかわりに「位相空間 X」ということが多い. 命題6.1から $(X, \mathcal{O}_d)$ は位相空間である.

注意 6.3
(O2)から, n による数学的帰納法で「$O_1, O_2, \ldots, O_n \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_n \in \mathcal{O}$」が示される.

位相空間においても定義4.2と同様に内点, 内部, 外点, 外部, 触点, 閉包, 境界点, 境界の概念が定義される. (定義6.4〜命題6.6は定義4.2〜命題4.4のほぼコピペ)

定義 6.4　内部・外部・閉包・境界

$(X, \mathscr{O})$ を位相空間, A を X の部分集合, $p \in X$ とする.

(1) X の開集合 O で, $p \in O$ かつ $O \subset A$ を満たすものがあるとき, p を A の内点という. A の内点全体からなる集合を A の内部といい, A^i で表す.

(2) X の開集合 O で, $p \in O$ かつ $O \cap A = \emptyset$ を満たすものがあるとき, p を A の外点という. A の外点全体からなる集合を A の外部といい, A^e で表す.

(3) p を含む X の任意の開集合 O に対して, $O \cap A \neq \emptyset$ であるとき, p を A の触点という. A の触点全体からなる集合を A の閉包といい, $\overline{A}$ で表す.

(4) p を含む X の任意の開集合 O に対して, $O \cap A \neq \emptyset$ かつ $O \not\subset A$ であるとき, p を A の境界点という. A の境界点全体からなる集合を A の境界といい, ∂A で表す.

注意 6.5

定義6.4からただちに以下のことが分かる. 以下で O は X の開集合とする.

(1) $O \cap A = \emptyset$ は $O \subset X - A$ と同値だから, p が A の外点であることと p が $X - A$ の内点であることは同値である. 従って $A^e = (X - A)^i$ である.

(2) $O \not\subset A$ は $O \cap (X - A) \neq \emptyset$ と同値だから, p が A の境界点であることと p が A と $X - A$ の両方の触点であることは同値である. 従って $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$ であり, この等式から $\partial(X - A) = \partial A$ が得られる.

(3) $p \in O$ かつ $O \subset A$ ならば $p \in A$ であり, $p \in A$ ならば p を含む X の任意の開集合 O に対して $p \in O \cap A$ だから $p \in \overline{A}$ である. また $p \in O$ かつ $O \cap A = \emptyset$ ならば $p \notin A$ である. 従って $A^i \subset A \subset \overline{A}$, $A \cap A^e = \emptyset$ が成り立つ.

(4) p が A の内点でも外点でもないことは, p が定義6.4の(4)の条件を満たすことと同値だから $\partial A = X - (A^i \cup A^e)$ である. 従って $X = A^i \cup A^e \cup \partial A$ と $A^i \cap \partial A = A^e \cap \partial A = \emptyset$ が成り立つ. ((3)から $A^i \cap A^e = \emptyset$ も成り立つ.)

命題 6.6
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする. X の部分集合 A に対して次の等式が成り立つ.

(1) $\overline{A} = A^i \cup \partial A$ (2) $\overline{X - A} = X - A^i$

証明

(1) 定義6.4の(3)と(4)から, 境界点は触点だから $\partial A \subset \overline{A}$ であり, 注意6.5の(3)から $A^i \subset \overline{A}$ だから $A^i \cup \partial A \subset \overline{A}$ である. $p \in \overline{A}$ かつ $p \notin A^i$ ならば p を含む X の任意の開集合 O に対して $O \cap A \neq \emptyset$ かつ $O \not\subset A$ が成り立つため $p \in \partial A$ である. 故に $\overline{A} \subset A^i \cup \partial A$ も成り立つため, $\overline{A} = A^i \cup \partial A$ である.

(2) $O \cap (X - A) \neq \emptyset$ は $O \not\subset A$ と同値だから, $p \in \overline{X - A}$ は条件

「p を含む X の任意の開集合 O に対して, $O \not\subset A$」

と同値である. この条件は $p \in A^i$ であるための定義6.4の(1)の条件の否定だから, $p \in \overline{X - A}$ は $p \in X - A^i$ と同値である. 従って $\overline{X - A} = X - A^i$ が成り立つ.

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ において, 開集合とは $\mathcal{O}$ の要素のことなので改めて定義する必要はない. そこで「近傍」と「閉集合」の概念だけ定義する.

定義 6.7　近傍・閉集合

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間, A を X の部分集合とする.

(1) $p \in X$ に対し, A が $p \in A^i$ を満たすとき, A を p の近傍という.

　　また, 開集合である p の近傍を p の開近傍という.

(2) A の触点がすべて A に属するとき, A を X の閉集合という.

注意 6.8

(1) 注意6.5の(3)から, $A \subset \overline{A}$ は常に成り立つため, A が閉集合であるためには,

　　$\overline{A} = A$ であることが必要十分である.

(2) A が空集合の場合は, A の触点は存在しないので, 命題「A の触点がすべて A に属する.」も真であるため, 空集合は閉集合である.

命題 6.9
$(X, \mathscr{O})$ を位相空間とし, X の部分集合 A に対して, A に含まれる開集合全体からなる集合を Γ とおく. このとき $A^i = \bigcup_{O \in \Gamma} O$ が成り立ち, A^i は開集合である.
O が A に含まれる開集合ならば $O \subset A^i$ が成り立つ.
従って, A が開集合であることと $A^i = A$ であることは同値である.

証明
$p \in A^i$ であることは $p \in O$ かつ $O \subset A$ を満たす X の開集合 O が存在することと同値で,このことは Γ の定義により, $p \in \bigcup_{O \in \Gamma} O$ であることと同値だから $A^i = \bigcup_{O \in \Gamma} O$ が成り立つ.従って, (O3) によって A^i は開集合であり, Γ は A に含まれる開集合をすべて含むため, O が A に含まれる開集合ならば $O \subset A^i$ である.

上の命題は後述の命題6.14と対をなす命題である.

次の命題も，証明も含めて命題4.7のほとんどコピペである．

命題 6.10
$(X, \mathscr{O})$ を位相空間，A を X の部分集合とすれば次の3つは同値である．

(i) A は閉集合である． (ii) $X-A$ は閉集合である． (iii) $\partial A \subset A$

証明

$A=X-(X-A)$ だから命題6.6の(2)から $\overline{A}=\overline{X-(X-A)}=X-(X-A)^i$ である．

従って $\overline{A}=A$ は $X-(X-A)^i=X-(X-A)$ と同値である．$X-(X-A)^i=X-(X-A)$ のの両辺の補集合を考えれば $(X-A)^i=X-A$ が得られるため，$\overline{A}=A$ は $(X-A)^i=X-A$ と同値である．故に注意6.8の(1)と命題6.9から(i)と(ii)は同値である．

A が閉集合ならば注意6.8の(1)と命題6.6の(1)から $A=\overline{A}=A^i \cup \partial A \supset \partial A$ である．

逆に $\partial A \subset A$ ならば命題6.6の(1)と注意6.5の(3)から $\overline{A}=A^i \cup \partial A \subset A \subset \overline{A}$ だから $\overline{A}=A$ が成り立つため，A は閉集合である．

注意 6.11
X の部分集合 A が閉集合ならば, 命題6.10から $X-A$ は開集合で, $A=X-(X-A)$ だから, A は開集合 $X-A$ の補集合である. 逆に A が X の開集合 O の補集合ならば $A=X-O$ だから $X-A=O$ であり, O は開集合だから命題6.10より A は閉集合である. 従って X の部分集合 A が閉集合であるためには, A が開集合の補集合であることが必要十分である.

位相空間 $(X,\mathscr{O})$ の開集合全体の集合 $\mathscr{O}$ は定義6.2の3つの条件を満たすものであった. 一方, 定義6.7の(2)で定義した X の閉集合は上で示したように, 開集合の補集合に他ならないという事実を用いて, 次に X の閉集合全体からなる集合の性質を定義6.2の3つの条件から導く. そのために, 次の補題を示す.

補題 6.12
集合 X の部分集合からなる集合族 $(S_i)_{i\in I}$ に対し, 次の等式が成り立つ.

$$\bigcap_{i\in I}(X-S_i)=X-\bigcup_{i\in I}S_i,\qquad \bigcup_{i\in I}(X-S_i)=X-\bigcap_{i\in I}S_i$$

とくに $(X-S_1)\cap(X-S_2)=X-(S_1\cup S_2)$, $(X-S_1)\cup(X-S_2)=X-(S_1\cap S_2)$ が成り立つ.

証明
$x\in X-\bigcup_{i\in I}S_i$ であることは $x\notin\bigcup_{i\in I}S_i$ であることと同値で, これは「すべての $i\in I$ に対して $x\notin S_i$ である.」と同値であり, $x\notin S_i$ は $x\in X-S_i$ と同値だから, $x\in X-\bigcup_{i\in I}S_i$ は「すべての $i\in I$ に対して $x\in X-S_i$ である.」と同値である. この命題は $x\in\bigcap_{i\in I}(X-S_i)$ を意味するので $\bigcap_{i\in I}(X-S_i)=X-\bigcup_{i\in I}S_i$ が成り立つ.

$T_i=X-S_i$ とおけば $S_i=X-T_i$ だから, 上で示した等式から

$$\bigcap_{i\in I}S_i=\bigcap_{i\in I}(X-T_i)=X-\bigcup_{i\in I}T_i=X-\bigcup_{i\in I}(X-S_i)$$

が成り立ち, 上式の両端の辺の補集合を考えれば $\bigcup_{i\in I}(X-S_i)=X-\bigcap_{i\in I}S_i$ が得られる.

命題 6.13
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ における閉集合全体からなる集合を $\mathscr{F}$ で表せば, 次の (C1), (C2), (C3) が成り立つ.

(C1) $X, \varnothing \in \mathscr{F}$.

(C2) $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ ならば $F_1 \cup F_2 \in \mathscr{F}$.

(C3) すべての $i \in I$ に対して $F_i \in \mathscr{F}$ ならば $\bigcap_{i\in I} F_i \in \mathscr{F}$.

証明

(C1) 注意6.8の(2)から $\varnothing \in \mathscr{F}$ であり, X の触点は X の点だから $X \in \mathscr{F}$ も成り立つ.

(C2) $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ ならば命題6.10から $X - F_1, X - F_2 \in \mathcal{O}$ だから補題6.12と(O2)より $X - (F_1 \cup F_2) = (X - F_1) \cap (X - F_2) \in \mathcal{O}$ である. 従って命題6.10から $F_1 \cup F_2 \in \mathscr{F}$ が得られる.

(C3) すべての $i \in I$ に対して $F_i \in \mathscr{F}$ ならば命題6.10から $X - F_i \in \mathcal{O}$ だから補題6.12と(O3)より $X - \bigcap_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I} (X - F_i) \in \mathcal{O}$ である. 従って命題6.10から $\bigcap_{i\in I} F_i \in \mathscr{F}$.

命題 6.14
$(X,\mathcal{O})$ を位相空間とし, X の部分集合 A に対して, A を含む閉集合全体からなる集合を Δ とおく. このとき $\overline{A}=\displaystyle\bigcap_{F\in\Delta}F$ が成り立ち, $\overline{A}$ は閉集合である. F が A を含む閉集合ならば $F\supset\overline{A}$ が成り立つ.

証明
$p\in\overline{A}$ とする. $F\in\Delta$ で $p\notin F$ となるものが存在すれば, $p\in X-F$ で, $X-F$ は開集合かつ $p\in\overline{A}$ だから $(X-F)\cap A\neq\emptyset$ である. このとき A の要素で F に属さないものが存在することになるので $A\subset F$ と矛盾する. 従って, すべての $F\in\Delta$ に対して $p\in F$ だから $p\in\displaystyle\bigcap_{F\in\Delta}F$ である.

$p\in\displaystyle\bigcap_{F\in\Delta}F$ とする. p を含む X の開集合 O で $O\cap A=\emptyset$ を満たすものが存在すれば $A\subset X-O$ で, $X-O$ は閉集合だから, $X-O\in\Delta$ である. $p\notin X-O$ だから, p がすべての $F\in\Delta$ に含まれていることと矛盾する. 故に p を含む X の任意の開集合 O に対して $O\cap A\neq\emptyset$ だから $p\in\overline{A}$ である. 以上から $\overline{A}=\displaystyle\bigcap_{F\in\Delta}F$ である.

証明の続き

命題6.13から, 閉集合の共通部分は閉集合だから $\overline{A}$ は閉集合である. また, Δ は A を含む閉集合をすべて含むため, F が A を含む閉集合ならば $F \supset \bigcap_{F \in \Delta} F = \overline{A}$ である.

幾何学 I

第7節　連続写像

位相空間の間の写像の極限の概念は次のように定義される. (命題5.2参照)

定義 7.1　写像の極限
$(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $Z \subset X$, $W \subset Y$ と写像 $f : Z \to W$ および $p \in \overline{Z}$ が与えられているとする. $q \in Y$ を含む Y の任意の開集合 V に対し, p を含む X の開集合 U で, 条件

「“$x \in U \cap Z$ かつ $x \neq p$” ならば $f(x) \in V$」

を満たすものが存在するとき, f の p における極限は q であるという.

写像 $f : X \to Y$ が $p \in X$ で連続であるとは, f の p における極限が $f(p)$ であることと定義されるが, 定義7.1において $Z = X$, $f(p) \in V$ であることから, f が p で連続であることの定義は次のように言い直される.

定義 7.2　写像の連続性

$(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし, 写像 $f: X \to Y$ と $p \in X$ が与えられているとする.
$f(p)$ を含む Y の任意の開集合 V に対し, p を含む X の開集合 U で, 条件

「$x \in U$ ならば $f(x) \in V$」

を満たすものが存在するとき, f は p において連続であるという.
また f が X のすべての点において連続であるとき, f を連続写像という.
なお X と Y の位相を明示する必要がある場合は, 写像 $f: X \to Y$ を
$f: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ と表す.

注意 7.3

定義5.6の記号を使うと, 定義7.2の条件「$x \in U$ ならば $f(x) \in V$」は1つの式 $f(U) \subset V$
$f(U) \subset V$ で表され, さらにこれは $U \subset f^{-1}(V)$ と同値である.

命題5.7と同様の次の主張が示される.

命題 7.4

$(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし, $f : X \to Y$ を写像とする.

(1) f が $p \in X$ で連続であるためには, $f(p)$ を含む Y の任意の開集合 V に対し, p が $f^{-1}(V)$ の内点であることが必要十分である.

(2) f が連続写像であるためには, Y の任意の開集合 V に対し, $f^{-1}(V)$ が X の開集合であることが必要十分である.

証明

(1) f が $p \in X$ において連続ならば $f(p)$ を含む任意の開集合 V に対し, 注意7.3から p を含む X の開集合 U で $U \subset f^{-1}(V)$ を満たすものが存在する. 従って内点の定義5.4から p は $f^{-1}(V)$ の内点である.

$f(p)$ を含む Y の任意の開集合 V に対し, p が $f^{-1}(V)$ の内点ならば p を含む X の開集合 U で, $U \subset f^{-1}(V)$ を満たすものが存在する. 故に定義6.2と注意6.3から f は p において連続である.

証明の続き

(2) Y の任意の開集合 V に対し, $f^{-1}(V)$ が X の開集合であることと, $f^{-1}(V)$ の任意の点が $f^{-1}(V)$ の内点であることは命題5.9により同値だから, (1)より主張が成り立つ.

補題 7.5

$f: X \to Y$ を写像とする. Y の部分集合 A に対して $f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A)$ が成り立つ.

証明

$x \in f^{-1}(Y - A)$ は $f(x) \in Y - A$ と同値で, $f(x) \in Y - A$ は $f(x) \notin A$ と同値である. ここで $x \notin X - f^{-1}(A)$ すなわち $x \in f^{-1}(A)$ は $f(x) \in A$ と同値だから, $f(x) \notin A$ は $x \in X - f^{-1}(A)$ と同値である. 以上から $x \in f^{-1}(Y - A)$ と $x \in X - f^{-1}(A)$ は同値になるため, $f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A)$ である.

閉集合を用いて写像が連続であるための条件が以下のように与えられる.

命題 7.6
$(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. 写像 $f: X \to Y$ が連続写像であるためには, Y の任意の閉集合 F に対して $f^{-1}(F)$ が X の閉集合であることが必要十分である.

証明

f を連続写像とし, F を Y の閉集合とすれば, $Y-F$ は Y の開集合だから, 命題6.4の(2)から $f^{-1}(Y-F)$ は X の開集合である. 補題6.5から $f^{-1}(Y-F) = X - f^{-1}(F)$ だから, $f^{-1}(F)$ は X の閉集合である.

逆に Y の任意の閉集合 F に対して $f^{-1}(F)$ が X の閉集合であると仮定して, O を Y の開集合とすれば $Y-O$ は Y の閉集合だから $f^{-1}(Y-O)$ は X の閉集合である. 補題6.5から $f^{-1}(Y-O) = X - f^{-1}(O)$ だから, $f^{-1}(O)$ は X の開集合である. 故に命題6.4の(2)から f は連続写像である.

命題 7.7
$(X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathscr{O}_Y), (Z, \mathscr{O}_Z)$ を位相空間とし, $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ を写像とする. f が $p \in X$ において連続, g が $f(p) \in Y$ において連続ならば, 合成写像 $g \circ f: X \to Z$ は p において連続である. 従って連続写像の合成写像は連続写像である.

証明

g が $f(p)$ で連続であることから $(g \circ f)(p) = g(f(p))$ を含む任意の開集合 W に対し, $f(p)$ を含む開集合 V で $g(V) \subset W$ を満たすものがある. また, f が p で連続であることから p を含む開集合 U で $f(U) \subset V$ を満たすものがある. 従って $(g \circ f)(U) = g(f(U)) \subset g(V) \subset W$ が成り立つため, $g \circ f$ は p で連続である.

定義 7.8　同相写像・開写像・閉写像

$(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする.

(1) 連続写像 $f: X \to Y$ に対し, 連続写像 $g: Y \to X$ で, $g \circ f = id_X$ かつ $f \circ g = id_Y$ を満たすものが存在するとき, f を同相写像(または位相同型写像)という.
$(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の間に同相写像が存在するとき, $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は同相(または位相同型)であるという.

(2) 写像 $f: X \to Y$ が条件「O が X の開集合ならば $f(O)$ は Y の開集合」を満たすとき, f を開写像と呼び, 条件「F が X の閉集合ならば $f(F)$ は Y の閉集合」を満たすとき, f を閉写像と呼ぶ.

注意 7.9

連続な全単射は同相写像であるとは限らないが, 連続な全単射が開写像または閉写像であれば, 同相写像である. 逆に同相写像は開写像であり, 閉写像でもある.

幾何学 I

第8節　位相の生成

定義 8.1　位相の強弱

集合 X の位相 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ が $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ を満たすとき位相 $\mathcal{O}_2$ は $\mathcal{O}_1$ より強い(細かい)といい, $\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より弱い(粗い)という.

注意 8.2

X に2つの位相 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ が与えられているとき, 恒等写像 $id_X : (X, \mathcal{O}_1) \to (X, \mathcal{O}_2)$ が連続になるための必要十分条件は, $\mathcal{O}_1$ が $\mathcal{O}_2$ より強いことである.
とくに, $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ の場合, id_X は連続である.

与えられた集合 X に自明でない距離関数(X の相異なる2点 x, y に対して $d(x, y) = 1$ で定義されるしょーもない距離関数を自明な距離関数という)を定義する一般的な方法は無い(定義3.1の3つ目の条件を満たすようにするのが難しい)が, あらかじめ指定された X の部分集合の集合に属する集合をすべて開集合とする X の位相の中で, 最も弱い位相を与える方法を次に説明する.

集合 X と X の部分集合からなる集合 $\mathscr{B}$ が与えられたとき, X の部分集合からなる集合 $\tilde{\mathscr{B}}$, $\mathscr{O}(\mathscr{B})$ を以下のように定義する.

$$\tilde{\mathscr{B}} = \{U \subset X \mid U = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \text{ を満たす } V_1, V_2, \ldots, V_n \in \mathscr{B} \text{ がある.}\} \cup \{X\}$$

$$\mathscr{O}(\mathscr{B}) = \left\{ O \subset X \,\middle|\, \Gamma \subset \tilde{\mathscr{B}} \text{ で } O = \bigcup_{U \in \Gamma} U \text{ を満たすものがある.} \right\} \cup \{\varnothing\}$$

命題 8.3

$\mathscr{O}(\mathscr{B})$ は X の位相で, $\mathscr{B} \subset \mathscr{O}(\mathscr{B})$ かつ条件

「$\mathscr{O}$ が $\mathscr{B} \subset \mathscr{O}$ を満たす X の位相ならば $\mathscr{O}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{O}$ である.」

を満たす. 言い換えれば $\mathscr{O}(\mathscr{B})$ は $\mathscr{B}$ の要素がすべて開集合である X の位相のうちで最も弱い位相である.

証明

$\tilde{\mathscr{B}}$ と $\mathscr{O}(\mathscr{B})$ の定義から $\mathscr{B} \subset \tilde{\mathscr{B}} \subset \mathscr{O}(\mathscr{B})$ であり, $X \in \tilde{\mathscr{B}}$, $\varnothing \in \mathscr{O}(\mathscr{B})$ だから $\mathscr{O}(\mathscr{B})$ は位相の定義6.2における条件(O1)を満たす.

証明の続き

$O_1, O_2 \in \mathscr{O}(\mathscr{B})$ ならば $O_1 = \bigcup_{O\in\Gamma_1} O$, $O_2 = \bigcup_{O\in\Gamma_2} O$ を満たす $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \tilde{\mathscr{B}}$ がある.

$$\Gamma_3 = \{U \subset X \mid U = V_1 \cap V_2 \text{ を満たす } V_1 \in \Gamma_1,\ V_2 \in \Gamma_2 \text{ がある.}\}$$

とおけば, $\tilde{\mathscr{B}}$ の定義から「$V_1, V_2 \in \tilde{\mathscr{B}}$ ならば $V_1 \cap V_2 \in \tilde{\mathscr{B}}$」が成り立つため $\Gamma_3 \subset \tilde{\mathscr{B}}$ であり, $O_1 \cap O_2 = \bigcup_{O\in\Gamma_3} O$ が成り立つ. 実際, $x \in O_1 \cap O_2$ は $x \in V_1$ を満たす $V_1 \in \Gamma_1$ と $x \in V_2$ を満たす $V_2 \in \Gamma_2$ が存在することが必要十分であり, このことは Γ_3 の定義から $x \in U$ を満たす $U \in \Gamma_3$ が存在することと同値である. 従って, $O_1 \cap O_2 \in \mathscr{O}(\mathscr{B})$ が成り立つため, $\mathscr{O}(\mathscr{B})$ は位相の定義6.2における条件(O2)を満たす.

X の部分集合の族 $(O_i)_{i\in I}$ がすべての $i \in I$ に対して $O_i \in \mathscr{O}(\mathscr{B})$ を満たすならば, 各 $i \in I$ に対して $O_i = \bigcup_{U\in\Gamma_i} U$ を満たす $\Gamma_i \subset \tilde{\mathscr{B}}$ が存在する. $\bar{\Gamma} = \bigcup_{i\in I} \Gamma_i$ とおけば, $\bar{\Gamma} \subset \tilde{\mathscr{B}}$ だから $\bigcup_{U\in\bar{\Gamma}} U \in \mathscr{O}(\mathscr{B})$ であり, $\bigcup_{i\in I} O_i = \bigcup_{U\in\bar{\Gamma}} U$ が成り立つ. 実際, $i \in I$ ならば $\Gamma_i \subset \bar{\Gamma}$ より

証明の続き

$O_i=\bigcup_{U\in\Gamma_i} U\subset\bigcup_{U\in\bar{\Gamma}} U$ であるため, $\bigcup_{i\in I} O_i\subset\bigcup_{U\in\bar{\Gamma}} U$ が成り立ち, $U\in\bar{\Gamma}$ ならば $U\in\Gamma_i$ を満たす $i\in I$ が存在し, $U\subset\bigcup_{V\in\Gamma_i} V=O_i\subset\bigcup_{i\in I} O_i$ だから $\bigcup_{U\in\bar{\Gamma}} U\subset\bigcup_{i\in I} O_i$ が成り立つ.

故に $\bigcup_{i\in I} O_i=\bigcup_{U\in\bar{\Gamma}} U\in\mathscr{O}(\mathscr{B})$ だから $\mathscr{O}(\mathscr{B})$ は位相の定義6.2における条件(O3)を満たす.

以上から $\mathscr{O}(\mathscr{B})$ は X の位相である.

$\mathscr{O}$ を $\mathscr{B}\subset\mathscr{O}$ を満たす X の位相とする. $U\in\tilde{\mathscr{B}}$ ならば $U=V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_n$ を満たす $V_1, V_2,\ldots, V_n\in\mathscr{B}$ があるが, $\mathscr{B}\subset\mathscr{O}$ より $V_i\in\mathscr{O}\ (i=1,2,\ldots,n)$ で, $\mathscr{O}$ が位相の定義5.2における条件(O2)を満たすことから $U=V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_n\in\mathscr{O}$ である. 従って $\tilde{\mathscr{B}}\subset\mathscr{O}$ が成り立つ. $O\in\mathscr{O}(\mathscr{B})$ ならば $O=\bigcup_{U\in\Gamma} U$ を満たす $\Gamma\subset\tilde{\mathscr{B}}$ があるが, $\tilde{\mathscr{B}}\subset\mathscr{O}$ より $\Gamma\subset\mathscr{O}$ であり, $\mathscr{O}$ が位相の定義6.2における条件(O3)を満たすことから $O=\bigcup_{U\in\Gamma} U\in\mathscr{O}$ である. 故に $\mathscr{O}(\mathscr{B})\subset\mathscr{O}$ である.

定義 8.4　位相の生成

$\mathscr{B}$ を集合 X の部分集合を要素とする集合とする.

(1) $\mathscr{O}(\mathscr{B})$ を $\mathscr{B}$ で生成される X の位相という.

(2) 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ に対し, $\mathscr{B}$ が $\mathscr{O} = \mathscr{O}(\mathscr{B})$ を満たすとき, $\mathscr{B}$ を $\mathscr{O}$ の準基底という.

(3) 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ に対し, $\mathscr{B} \subset \mathscr{O}$ かつ任意の $O \in \mathscr{O}$ に対して $O = \bigcup_{U \in \Gamma} U$ を満たす $\Gamma \subset \mathscr{B}$ が存在するとき, $\mathscr{B}$ を $\mathscr{O}$ の基底という.

命題 8.5

位相空間 $(X, \mathscr{O})$ に対し, $\mathscr{O}$ の部分集合 $\mathscr{B}$ が $\mathscr{O}$ の基底であるためには $\mathscr{B}$ が条件

$(*)$ 任意の $O \in \mathscr{O}$ と $x \in O$ に対して $x \in U$ かつ $U \subset O$ を満たす $U \in \mathscr{B}$ がある.

を満たすことが必要十分である.

証明

$\mathscr{B}$ が $\mathscr{O}$ の基底ならば任意の $O \in \mathscr{O}$ に対して $O = \bigcup_{V \in \Gamma} V$ を満たす $\Gamma \subset \mathscr{B}$ があるため, 任意の $x \in O$ に対して $x \in U$ を満たす $U \in \Gamma$ が存在する. このとき $U \subset \bigcup_{V \in \Gamma} V = O$ だから $\mathscr{B}$ は条件 $(*)$ を満たす.

証明の続き

逆に $\mathscr{B}$ が条件 $(*)$ を満たすと仮定すれば, 任意の $O\in\mathscr{O}$ と $x\in O$ に対して, $x\in U_x$ かつ $U_x\subset O$ を満たす $U_x\in\mathscr{B}$ がある. このとき $\Gamma=\{U_x\,|\,x\in O\}$ とおけば $\Gamma\subset\mathscr{B}$ であり, すべての $x\in O$ に対して $U_x\subset O$ だから $\displaystyle\bigcup_{U\in\Gamma}U=\bigcup_{x\in O}U_x\subset O$ である. 一方 $x\in U_x$ だから

$$O=\bigcup_{x\in O}\{x\}\subset\bigcup_{x\in O}U_x=\bigcup_{U\in\Gamma}U$$

が成り立つため $\displaystyle O=\bigcup_{U\in\Gamma}U$ を満たす $\Gamma\subset\mathscr{B}$ が存在する.

例 8.6

(1) 集合 X の部分集合を要素とする集合 $\mathscr{B}$ に対して $\tilde{\mathscr{B}}$ は $\mathscr{O}(\mathscr{B})$ の基底である.

(2) (X,d) を距離空間, $\mathscr{O}_d$ を距離関数 d から定まる X の位相とする. 命題7.5と $\mathscr{O}_d$ の定義から開球全体の集合 $\{B_d(p\,;r)\,|\,p\in X, r>0\}$ は $\mathscr{O}_d$ の基底である. また, 半径が $\frac{1}{n}$ (n は自然数)の形の有理数である開球全体の集合 $\left\{B_d\left(p;\frac{1}{n}\right)\,|\,p\in X, n\in N\right\}$ も $\mathscr{O}_d$ の基底である.

準基底を用いれば, 写像が連続であるための条件が次のように少し緩められる.

命題 8.7
$(X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間, $\mathscr{B}$ を $\mathscr{O}_Y$ の準基底とする. 写像 $f : X \to Y$ が条件

「任意の $V \in \mathscr{B}$ に対して $f^{-1}(V)$ は X の開集合である.」

を満たせば f は連続写像である.

証明

O を Y の任意の開集合とすれば, $\mathscr{B}$ の要素の有限個の共通部分で表される集合の族 $(U_i)_{i\in I}$ が存在して $O = \bigcup_{i\in I} U_i$ となり, 各 $i \in I$ に対して $U_i = V_{i,1} \cap V_{i,2} \cap \cdots \cap V_{i,n_i}$ を満たす $V_{i,k} \in \mathscr{B}$ $(k = 1, 2, \ldots, n_i)$ が存在する. このとき,

$$f^{-1}(U_i) = f^{-1}(V_{i,1} \cap V_{i,2} \cap \cdots \cap V_{i,n_i}) = f^{-1}(V_{i,1}) \cap f^{-1}(V_{i,2}) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_{i,n_i})$$

であり, 仮定から $f^{-1}(V_{i,k})$ は X の開集合だから $f^{-1}(U_i)$ も X の開集合である. さらに $f^{-1}(O) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$ が成り立つため, $f^{-1}(O)$ は X の開集合である.

従って命題7.4の(2)から f は連続写像である.

幾何学 I

第9節　部分空間・直積空間

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間, Y を X の部分集合とするとき, Y に位相を定義する方法を考える.

条件 9.1

Y に位相 $\mathcal{O}'$ を与えたときに, $\mathcal{O}'$ が満たしてほしい条件として次の2つを考える.

(i) 包含写像 $i_Y : Y \to X$ が連続写像である.

(ii) 位相空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ と写像 $f : Z \to Y$ が与えられたとき, 合成写像 $i_Y \circ f : Z \to X$ が連続写像ならば f も連続写像である.

上の条件 (i) が満たされるためには, 命題7.4の(2)から $\mathcal{O}'$ が $i_Y^{-1}(O)$ $(O \in \mathcal{O})$ という形をした Y の部分集合をすべて含んでいることが必要十分である.

$i_Y : Y \to X$ は包含写像だから, $i_Y^{-1}(O) = O \cap Y$ であることに注意する.

補題 9.2

$\mathcal{O}=\{U\subset Y \mid U=O\cap Y$ となる $O\in\mathcal{O}$ がある.$\}$ とおけば, $\mathcal{O}'$ は Y の位相である.

証明

$\emptyset, X\in\mathcal{O}$ であり, $\emptyset=\emptyset\cap Y$, $Y=X\cap Y$ より $\emptyset, Y\in\mathcal{O}'$ である.

$U_1, U_2\in\mathcal{O}'$ とすれば $O_1, O_2\in\mathcal{O}$ で $U_1=O_1\cap Y, U_2=O_2\cap Y$ を満たすものがあるので,

$U_1\cap U_2=(O_1\cap Y)\cap(O_2\cap Y)=(O_1\cap O_2)\cap Y$ と $O_1\cap O_2\in\mathcal{O}$ から $U_1\cap U_2\in\mathcal{O}'$ である.

$U_i\in\mathcal{O}'(i\in I)$ とすれば, 各 $i\in I$ に対して $O_i\in\mathcal{O}$ で $U_i=O_i\cap Y$ を満たすものがあるので,

$\bigcup_{i\in I}U_i=\bigcup_{i\in I}(O_i\cap Y)=\left(\bigcup_{i\in I}O_i\right)\cap Y$ と $\bigcup_{i\in I}O_i\in\mathcal{O}$ から $\bigcup_{i\in I}U_i\in\mathcal{O}'$ である.

従って Y の位相 $\mathcal{O}'$ は条件9.1の (i) を満たす Y の位相の中で最も弱いものである.

Y の位相 $\mathcal{O}'$ が条件9.1の (ii) を満たすことを示すために, 次の補題を示す.

補題 9.3
写像 $f\colon X\to Y, g\colon Y\to Z$ と $A\subset Z$ に対して $(g\circ f)^{-1}(A)=f^{-1}(g^{-1}(A))$ が成り立つ.

証明
$x\in(g\circ f)^{-1}(A)$ は $g(f(x))=(g\circ f)(x)\in A$ と同値であり, $g(f(x))\in A$ は $f(x)\in g^{-1}(A)$ と同値である. さらに $f(x)\in g^{-1}(A)$ は $x\in f^{-1}(g^{-1}(A))$ と同値だから $x\in(g\circ f)^{-1}(A)$ は $x\in f^{-1}(g^{-1}(A))$ と同値である.

命題 9.4
Y の位相 $\mathscr{O}'$ は条件9.1の (ii) を満たす.

証明
位相空間 $(Z,\mathscr{O}_Z)$ と写像 $f\colon Z\to Y$ が与えられていて, 合成写像 $i_Y\circ f\colon Z\to X$ が連続写像であるとする. 任意の $U\in\mathscr{O}'$ に対し, $O\in\mathscr{O}$ で $U=O\cap Y=i_Y^{-1}(O)$ を満たすものがある. 補題9.3から $f^{-1}(U)=f^{-1}(i_Y^{-1}(O))=(i_Y\circ f)^{-1}(O)$ で, $i_Y\circ f$ の連続性と命題7.4の(2)より $f^{-1}(U)$ は Z の開集合である. 従って命題7.4の(2)より f は連続写像である.

定義 9.5　部分空間

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間, Y を X の部分集合とするとき, 補題9.2で与えた Y の位相 $\mathcal{O}'$ を Y の X に関する相対位相といい, 位相空間 $(Y, \mathcal{O}')$ を $(X, \mathcal{O})$ の部分空間という.

注意 9.6

$\mathcal{O}'$ の要素 $O \cap Y$ の Y における補集合は $(X-O)\cap Y$ だから, 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分空間 $(Y, \mathcal{O}')$ の閉集合全体の集合は以下で与えられる.

$$\{A \subset Y \mid A = F \cap Y \text{ となる } X \text{ の閉集合 } F \text{ がある.}\}$$

n 個の位相空間 $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{O}_n)$ が与えられたとき, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の直積 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$ に位相を定義する方法を考える. $\mathrm{pr}_i : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to X_i$ を第 i 成分への射影 $\mathrm{pr}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$ とする.

条件 9.7
$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ に位相 $\mathcal{O}$ を与えたときに, $\mathcal{O}$ が満たしてほしい条件として次の2つを考える.
(i) $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots, \mathrm{pr}_n$ はすべて連続写像である.
(ii) 位相空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ と写像 $f\colon Y \to X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ が与えたれたとき, すべての $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\mathrm{pr}_i \circ f : Y \to X_i$ が連続写像ならば f も連続写像である.

条件 (i) が満たされるためには, 命題7.4の(2)から $\mathcal{O}$ が $\mathrm{pr}_i^{-1}(O_i)$ $(O_i \in \mathcal{O}_i,\ i = 1, 2, \ldots, n)$ という形をした $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の部分集合をすべて含んでいることが必要十分だから,

$$\mathscr{B} = \{\mathrm{pr}_1^{-1}(O_1) \mid O_1 \in \mathcal{O}_1\} \cup \{\mathrm{pr}_2^{-1}(O_2) \mid O_2 \in \mathcal{O}_2\} \cup \cdots \cup \{\mathrm{pr}_n^{-1}(O_n) \mid O_n \in \mathcal{O}_n\}$$

とおいて, $\mathscr{B}$ で生成される $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の位相 $\mathcal{O}(\mathscr{B})$ を考えれば, $\mathcal{O}(\mathscr{B})$ は条件 (i) を満たす $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の位相の中で最も弱い位相である.

命題 9.8
上で定義した $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の位相 $\mathcal{O}(\mathscr{B})$ は条件9.7の (ii) を満たす.

証明

任意の $V\in\mathscr{B}$ に対して $V=\mathrm{pr}_i^{-1}(O_i)$ を満たす $i=1,2,\dots,n$ と $O_i\in\mathscr{O}_i$ が存在し,
補題9.3から $f^{-1}(V)=f^{-1}(\mathrm{pr}_i^{-1}(O_i))=(\mathrm{pr}_i\circ f)^{-1}(O_i)$ が成り立つ. 仮定から $\mathrm{pr}_i\circ f$ は連続写像であり, 命題7.4の(2)から $(\mathrm{pr}_i\circ f)^{-1}(O_i)$ は Y の開集合だから, 上式と命題8.7から f は連続写像になり, $\mathscr{O}(\mathscr{B})$ は条件9.6の (ii) を満たすことがわかる.

以上の結果をふまえて次の定義をする.

定義 9.9　直積空間

位相空間 $(X_1,\mathscr{O}_1),(X_2,\mathscr{O}_2),\dots,(X_n,\mathscr{O}_n)$ に対し,

$$\mathscr{B}=\{\mathrm{pr}_1^{-1}(O_1)\mid O_1\in\mathscr{O}_1\}\cup\{\mathrm{pr}_2^{-1}(O_2)\mid O_2\in\mathscr{O}_2\}\cup\cdots\cup\{\mathrm{pr}_n^{-1}(O_n)\mid O_n\in\mathscr{O}_n\}$$

によって生成される $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ の位相 $\mathscr{O}(\mathscr{B})$ を $(X_1,\mathscr{O}_1),(X_2,\mathscr{O}_2),\dots,(X_n,\mathscr{O}_n)$ の直積位相といい, $(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n,\mathscr{O}(\mathscr{B}))$ を $(X_1,\mathscr{O}_1),(X_2,\mathscr{O}_2),\dots,(X_n,\mathscr{O}_n)$ の直積空間または直積位相空間という.

命題 9.10
定義9.9で与えた$\mathscr{B}$の有限個の要素の共通部分として表される$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$の部分集合全体からなる集合を$\tilde{\mathscr{B}}$とすれば次の等式が成り立つ.

$$\tilde{\mathscr{B}} = \{O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \mid O_i \in \mathscr{O}_i \ (i = 1,2,\ldots,n)\}$$

証明

$\bar{\mathscr{B}} = \{O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \mid O_i \in \mathscr{O}_i \ (i = 1,2,\ldots,n)\}$ とおく. X_i の開集合 O_i に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_i^{-1}(O_i) &= X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times O_i \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n \\ &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \mid x_i \in O_i\} \end{aligned}$$

だから $\mathrm{pr}_i^{-1}(O_i) \in \bar{\mathscr{B}}$ であり

$$\mathrm{pr}_1^{-1}(O_1) \cap \mathrm{pr}_2^{-1}(O_2) \cap \cdots \cap \mathrm{pr}_n^{-1}(O_n) = O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$$

が成り立つ. 従って $\mathscr{B} \subset \bar{\mathscr{B}} \subset \tilde{\mathscr{B}}$ である. X_i の部分集合 O_i, O_i' に対して等式

$$(O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n) \cap (O_1' \times O_2' \times \cdots \times O_n') = (O_1 \cap O_1') \times (O_2 \cap O_2') \times \cdots \times (O_n \cap O_n')$$

が成り立つことから, $\bar{\mathscr{B}}$ は $\mathscr{B}$ の有限個の要素の共通部分として表される $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の部分集合をすべて含むため, $\bar{\mathscr{B}} = \tilde{\mathscr{B}}$ である.

$(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)\in X_1\times\cdots\times X_{n-1}\times X_n$ と $((x_1,\dots,x_{n-1}),x_n)\in(X_1\times\cdots\times X_{n-1})\times X_n$ を同一視することによって, $X_1\times X_2\times\cdots\times X_{n-1}\times X_n$ と $(X_1\times X_2\times\cdots\times X_{n-1})\times X_n$ を以下で同一視する.

命題 9.11

$(X_1,\mathcal{O}_1),(X_2,\mathcal{O}_2),\dots,(X_n,\mathcal{O}_n)$ を位相空間とする. $(X_1,\mathcal{O}_1),(X_2,\mathcal{O}_2),\dots,(X_{n-1},\mathcal{O}_{n-1})$ の直積位相を $\mathcal{O}'$ とすれば, $(X_1\times X_2\times\cdots\times X_{n-1},\mathcal{O}')$ と $(X_n,\mathcal{O}_n)$ の直積位相は $(X_1,\mathcal{O}_1),(X_2,\mathcal{O}_2),\dots,(X_n,\mathcal{O}_n)$ の直積位相と一致する.

証明

$(X_1,\mathcal{O}_1),(X_2,\mathcal{O}_2),\dots,(X_n,\mathcal{O}_n)$ の直積位相を $\mathcal{O}$, $(X_1\times X_2\times\cdots\times X_{n-1},\mathcal{O}')$ と $(X_n,\mathcal{O}_n)$ の直積位相を $\mathcal{O}''$ とする.

$$\tilde{\mathcal{B}}=\{O_1\times O_2\times\cdots\times O_n\mid O_i\in\mathcal{O}_i\ (i=1,2,\dots,n)\},$$
$$\tilde{\mathcal{B}}'=\{O_1\times O_2\times\cdots\times O_{n-1}\mid O_i\in\mathcal{O}_i\ (i=1,2,\dots,n-1)\},$$
$$\tilde{\mathcal{B}}''=\{O'\times O_n\mid O'\in\mathcal{O}',O_n\in\mathcal{O}_n\}$$

とおくと, 例7.6の(1)と命題8.9から $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$, $\mathcal{O}''$ の各要素はそれぞれ $\tilde{\mathcal{B}}$, $\tilde{\mathcal{B}}'$, $\tilde{\mathcal{B}}''$ の要素の合併集合である.

証明の続き

任意の $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \in \tilde{\mathscr{B}}$ に対して $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_{n-1} \in \tilde{\mathscr{B}}' \subset \mathscr{O}'$ だから

$$O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n = (O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_{n-1}) \times O_n \in \tilde{\mathscr{B}}'' \subset \mathscr{O}''$$

である. $\mathscr{O}$ の各要素は $\tilde{\mathscr{B}}$ の要素の合併集合だから $\mathscr{O} \subset \mathscr{O}''$ である.

$O' \in \mathscr{O}'$, $O_n \in \mathscr{O}_n$ とすると, $\Gamma \subset \tilde{\mathscr{B}}'$ で $O' = \bigcup_{U \in \Gamma} U$ を満たすものが存在し,

$$\Gamma' = \{V \subset (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n \mid V = W \times O_n \text{ を満たす } W \in \Gamma \text{ がある.}\}$$

とおけば, $\Gamma \subset \tilde{\mathscr{B}}'$ より $\Gamma' \subset \tilde{\mathscr{B}} \subset \mathscr{O}$ であり, $U \times O_n = \bigcup_{V \in \Gamma'} V \in \mathscr{O}$ が成り立つ. $\mathscr{O}''$ の各要素は $\tilde{\mathscr{B}}''$ の要素の合併集合だから $\mathscr{O}'' \subset \mathscr{O}$ である. 故に $\mathscr{O} = \mathscr{O}''$ が成り立つ.

次に距離空間の直積について考える.

補題 9.12

$(X_1, d_1), (X_2, d_2), \ldots, (X_n, d_n)$ を距離空間とし, 関数

$$d : (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n) \times (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n) \to \boldsymbol{R}$$

を以下で定めれば, d は $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の距離関数である.

$$d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

証明

$d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) \geqq d_1(x_1, y_1) \geqq 0$ である.

$d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = 0$ ならば, すべての $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $d_i(x_i, y_i) = 0$ だから $x_i = y_i$, すなわち $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ である.

$(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ に対し, $d_i(y_i, x_i) = d_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ だから, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} d((y_1, y_2, \ldots, y_n), (x_1, x_2, \ldots, x_n)) &= \max\{d_1(y_1, x_1), d_2(y_2, x_2), \ldots, (y_n, x_n)\} \\ &= \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\} = d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) \end{aligned}$$

証明の続き

$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n), \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n), \boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\dots,z_n)\in X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ ならば,

三角不等式より $i=1,2,\dots,n$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
d_i(x_i,z_i) &\leqq d_i(x_i,y_i)+d_i(y_i,z_i)\\
&\leqq \max\{d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)\}+\max\{d_1(y_1,z_1),d_2(y_2,z_2),\dots,(y_n,z_n)\}\\
&= d((x_1,x_2,\dots,x_n),(y_1,y_2,\dots,y_n))+d((y_1,y_2,\dots,y_n),(z_1,z_2,\dots,z_n))
\end{aligned}
$$

故に

$$
\begin{aligned}
d((x_1,x_2,\dots,x_n),(z_1,z_2,\dots,z_n)) &= \max\{d_1(x_1,z_1),d_2(x_2,z_2),\dots,(x_n,z_n)\}\\
&\leqq d((x_1,x_2,\dots,x_n),(y_1,y_2,\dots,y_n))+d((y_1,y_2,\dots,y_n),(z_1,z_2,\dots,z_n))
\end{aligned}
$$

が得られ, d に関して三角不等式が成り立つ.

以上から d は $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ の距離関数である.

命題 9.13
$(X_1,d_1),(X_2,d_2),\ldots,(X_n,d_n)$ を距離空間とし, 距離関数 d_i から定まる X_i の位相を $\mathcal{O}_{d_i}$ とする. 位相空間 $(X_1,\mathcal{O}_{d_1}),(X_2,\mathcal{O}_{d_2}),\ldots,(X_n,\mathcal{O}_{d_n})$ の直積位相と補題9.12で定義した距離関数 d から定まる $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ の位相は一致する.

証明
$(X_1,\mathcal{O}_{d_1}),(X_2,\mathcal{O}_{d_2}),\ldots,(X_n,\mathcal{O}_{d_n})$ の直積位相を $\mathcal{O}$ とし, d から定まる $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ の位相を $\mathcal{O}_d$ とする. $O_i\in\mathcal{O}_{d_i}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ とし, $O_1\times O_2\times\cdots\times O_n$ の任意の点 $p=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ に対し, $p_i\in O_i$ で O_i は X_i の開集合だから, $r_i>0$ で $B_{d_i}(p_i\,;r_i)\subset O_i$ を満たすものがある. $r=\min\{r_1,r_2,\ldots,r_n\}$ とおき, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in B_d(p\,;r)$ ならば $d_j(x_j,p_j)\leqq d(x,p)<r\leqq r_j$ が各 $j=1,2,\ldots,n$ に対して成り立つため, $x_j\in B_{d_j}(p_j\,;r_j)\subset O_j$ である. 故に $x\in O_1\times O_2\times\cdots\times O_n$ だから $B_d(p\,;r)\subset O_1\times O_2\times\cdots\times O_n$ が成り立つため p は位相 $\mathcal{O}_d$ に関して $O_1\times O_2\times\cdots\times O_n$ の内点だから $O_1\times O_2\times\cdots\times O_n\in\mathcal{O}_d$ である.

証明の続き

例8.6の(1)と命題9.10から, $\mathcal{O}$ の各要素は $O_1\times O_2\times\cdots\times O_n$ $(O_i\in\mathcal{O}_{d_i})$ という形の集合の合併集合として表されるため, $\mathcal{O}\subset\mathcal{O}_d$ が成り立つ.

$O\in\mathcal{O}_d$ ならば任意の $p=(p_1,p_2,\ldots,p_n)\in O$ に対し, $r_p>0$ で $B_d(p\,;r_p)\subset O$ を満たすものがある. $O_{p,i}=B_{d_i}(p_i;r_p)$ とおくと $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in O_{p,1}\times O_{p,2}\times\cdots\times O_{p,n}$ ならば各 $i=1,2,\ldots,n$ に対して $x_i\in O_{p,i}$ より $d_i(x_i,p_i)<r_p$ だから $d(x,p)=\max\{d_1(x_1,p_1),d_2(x_2,p_2),\ldots,d_n(x_n,p_n)\}<r_p$ が成り立つ. 従って

であり, $B_d(p\,;r_p)\subset O$ から $x\in O$ である. 故に $O_{p,1}\times O_{p,2}\times\cdots\times O_{p,n}\subset O$ が任意の $p\in O$ に対して成り立つため $\bigcup_{p\in O}(O_{p,1}\times O_{p,2}\times\cdots\times O_{p,n})\subset O$ である. また, 各 $p\in O$ に対して $p\in O_{p,1}\times O_{p,2}\times\cdots\times O_{p,n}$ より $O=\bigcup_{p\in O}\{p\}\subset\bigcup_{p\in O}(O_{p,1}\times O_{p,2}\times\cdots\times O_{p,n})$ も成り立つ. 従って $O=\bigcup_{p\in O}(O_{p,1}\times O_{p,2}\times\cdots\times O_{p,n})$ であり, 命題9.10から $O_{p,1}\times O_{p,2}\times\cdots\times O_{p,n}\in\mathcal{O}$ だから, $O_1\times O_2\times\cdots\times O_n$ の合併である O も $\mathcal{O}$ に属する.

証明の続き

従って $\mathcal{O}_d \subset \mathcal{O}$ も成り立つため $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$ が得られる.

命題9.13から直ちに次の結果が得られる.

系 9.14

距離関数 d_n から定まる $\boldsymbol{R}^n$ の位相を $\mathcal{O}_n$ とすれば, $\mathcal{O}_n$ は位相空間 $(\boldsymbol{R}, \mathcal{O}_1)$ の n 個の直積位相と一致する.

最後に後ほど必要になる結果を示しておく.

補題 9.16
$(X,\mathscr{O}_X),(Y,\mathscr{O}_Y)$を位相空間, $\mathrm{pr}_1:X\times Y\to X$, $\mathrm{pr}_2:X\times Y\to Y$ をそれぞれ $\mathrm{pr}_1(x,y)=x$, $\mathrm{pr}_2(x,y)=y$ で定義される写像とする. $p\in X, q\in Y$に対し, $X\times Y$の部分空間 $\mathrm{pr}_2^{-1}(\{q\})=X\times\{q\}$, $\mathrm{pr}_1^{-1}(\{p\})=\{p\}\times Y$ はそれぞれ X, Y と同相である.

証明

相対位相の定義から包含写像 $i_1:X\times\{q\}\to X\times Y$ は連続で, 直積位相の定義から $\mathrm{pr}_1:X\times Y\to X$も連続だから命題7.7から合成写像$\mathrm{pr}_1\circ i_1:X\times\{q\}\to X$は連続である. 写像$f:X\to X\times\{q\}$ を $f(x)=(x,q)$ で定めれば, 合成写像 $\mathrm{pr}_1\circ i_1\circ f:X\to X$ は X の恒等写像だから連続であり(注意8.2), $\mathrm{pr}_2\circ i_1\circ f:X\to Y$ は q への定値写像だから連続である. 従って命題9.8によって$i_1\circ f:X\to X\times Y$は連続であり, さらに 命題9.4から f も連続である. $f\circ\mathrm{pr}_1\circ i_1$ は $X\times\{q\}$ の恒等写像だから, f は $\mathrm{pr}_1\circ i_1:X\times\{q\}\to X$ の連続な逆写像である. 故に $X\times\{q\}$ は X と同相である. $\{p\}\times Y$が Y と同相であることも同様に示される.

幾何学 I

第10節　連結性（その1）

第6節で位相空間の概念を導入して, 第7, 8, 9節と位相空間の基礎的な事柄について論じてきたが, ここで第6節から第9節までの内容を振り返ると以下のようになる.

- 第6節では位相空間の概念を定義し, 距離空間の場合と同様に部分集合の「内部」,「外部」,「閉包」,「境界」や「開集合」,「閉集合」の概念を定義し, 距離空間の場合に示した命題に倣ってそれらの概念に関する命題を示した.
- 第7節では位相空間の間の写像の極限や連続写像の概念を定義して, 写像が連続であるためには開集合(閉集合)の逆像が開集合(閉集合)であることを示した.
- 第8節では位相の強弱の概念を定義し, 集合XとXの部分集合を要素とする集合$\mathscr{B}$が与えられたとき, $\mathscr{B}$の要素を開集合とするXの位相の中で最も弱いものを与えて,「$\mathscr{B}$ から生成される位相」という概念を定義した.
- 第9節では位相空間の部分集合や, 直積集合にそれぞれ「相対位相」,「直積位相」と呼ばれる「良い性質」をもつ位相を定義した.

以上をふまえ, この授業の残りの節では「中間値の定理」と「最大値・最小値の定理」の証明と応用を目標に位相空間の理論を展開する.

閉包を用いて位相空間の2つの部分集合が「離れている」という概念を定義し, それを用いて位相空間が連結であることを定義する.

定義 10.1　連結・弧状連結

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする.

(1) X の部分集合 Y, Z が $Y \cap \overline{Z} = \overline{Y} \cap Z = \emptyset$ を満たすとき, Y と Z は**離れている**という.

(2) X が離れている2つの空でない部分集合の合併集合にならないとき, 言い換えれば「X の部分集合 Y, Z が $Y \cap \overline{Z} = \overline{Y} \cap Z = \emptyset$ かつ $X = Y \cup Z$ を満たすならば Y か Z の一方は空集合である」とき, $(X, \mathcal{O})$ は**連結**であるという.

(3) X の任意の2点 p, q に対し, 連続写像 $\omega : [0,1] \to X$ で, $\omega(0) = p$, $\omega(1) = q$ を満たすものがあるとき $(X, \mathcal{O})$ は**弧状連結**であるという.

注意 10.2

(X, d) は距離空間で, $\mathcal{O}_d$ を距離関数 d から定まる X の位相とする. 位相空間 $(X, \mathcal{O}_d)$ において X の部分集合 Y と Z が離れているためには, Y のどの点も Z に含まれる点列の極限にならず, かつ Z のどの点も Y に含まれる点列の極限にならないことが必要十分であることが命題4.17から分かる.

命題 10.3

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対し, 次の4つは同値である.

(i) $(X, \mathcal{O})$ は連結である.

(ii) $(X, \mathcal{O})$ の開かつ閉集合は $\varnothing$ と X だけである.

(iii) $X = Y \cup Z, Y \cap Z = \varnothing$ で, Y, Z が開集合ならば $Y=\varnothing$ または $Z=\varnothing$ である.

(iv) $X = Y \cup Z, Y \cap Z = \varnothing$ で, Y, Z が閉集合ならば $Y=\varnothing$ または $Z=\varnothing$ である.

証明

$(i) \Rightarrow (ii)$: Y を X の開かつ閉集合とし, $Z = X - Y$ とおけば, Z は X の開かつ閉集合 Y の補集合だから Z は閉集合である. 従って $Y = \overline{Y}$, $Z = \overline{Z}$ だから $Y \cap \overline{Z} = \overline{Y} \cap Z = Y \cap Z = \emptyset$ となるため, Y と Z は離れている. さらに $X = Y \cup (X - Y) = Y \cup Z$ だから, 仮定より $Y = \emptyset$ または $Z = \emptyset$ である. 後者の場合は $Y = X - (X - Y) = X - Z = X$ となるため, X の開かつ閉集合は $\emptyset$ と X だけである.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: $X = Y \cup Z$, $Y \cap Z = \emptyset$ ならば $Y = X - Z$ だから, Y, Z が開集合ならば Y は閉集合 Z の補集合になるため, Y は閉集合でもある. 従って Y は $\emptyset$ または X であり, 後者の場合は $Z = X - Y = \emptyset$ である.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: $X = Y \cup Z$, $Y \cap Z = \emptyset$ ならば $Y = X - Z$, $Z = X - Y$ だから Y, Z が閉集合ならば Y, Z はそれぞれ閉集合 Z, Y の補集合になるため, Y, Z は開集合でもある. 従って仮定から $Y = \emptyset$ または $Z = \emptyset$ である.

証明の続き

$(vi) \Rightarrow (i)$: $X = Y \cup Z$ で, Y と Z は離れているとすれば, $Y \cap \bar{Z} = \emptyset$ だから $Y \subset X - \bar{Z}$ より $X = Y \cup Z \subset (X - \bar{Z}) \cup Z \subset X$ となるため $X = (X - \bar{Z}) \cup Z$ である. $Z \subset \bar{Z}$ だから $X - \bar{Z} \subset X - Z$ であることに注意すれば $(X - \bar{Z}) \cap Z \subset (X - Z) \cap Z = \emptyset$ となるため, $(X - \bar{Z}) \cap Z = \emptyset$ である. 従って $X = (X - \bar{Z}) \cup Z$ より $Z = X - (X - \bar{Z}) = \bar{Z}$ が得られるため, Z は閉集合である. 同様に $\bar{Y} \cap Z = \emptyset$ から Y も閉集合であることが示される. $Y \cap Z = Y \cap \bar{Z} = \emptyset$ だから, 仮定より $Y = \emptyset$ または $Z = \emptyset$ である.

故に X は離れている2つの空でない部分集合の和集合にならないため X は連結である.

命題 10.4
位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の部分空間 Y が連結であることは, 次の条件 $(*)$ と同値である.

$(*)$ X の開集合 U, V が $Y \subset U \cup V$, $Y \cap U \cap V = \emptyset$ を満たせば $Y \cap U = \emptyset$ または $Y \cap V = \emptyset$ である.

証明
X の部分空間 Y に対し, X の開集合 U, V が $Y \subset U \cup V$, $Y \cap U \cap V = \emptyset$ を満たすとする.
$Z = Y \cap U$, $W = Y \cap V$ とおけば Z, W は Y の開集合であり, $Y \subset U \cup V$ より

$$Z \cup W = (Y \cap U) \cup (Y \cap V) = Y \cap (U \cup V) = Y$$

が成り立つ. また, $Z \cap W = (Y \cap U) \cap (Y \cap V) = Y \cap U \cap V = \emptyset$ だから Y が連結ならば命題10.3より $Y \cap U = Z = \emptyset$ または $Y \cap V = W = \emptyset$ である.

逆に $(*)$ が満たされると仮定し, $Y = Z \cup W$, $Z \cap W = \emptyset$ で Z, W が Y の開集合であるとすれば $Z = Y \cap U$, $W = Y \cap V$ を満たす X の開集合 U, V が存在して次の式が成り立つ.

$$Y = Z \cup W = (Y \cap U) \cup (Y \cap V) = Y \cap (U \cup V) \subset U \cup V$$

$$Y \cap U \cap V = (Y \cap U) \cap (Y \cap V) = Z \cap W = \emptyset$$

故に仮定から $Z = Y \cap U = \emptyset$ または $W = Y \cap V = \emptyset$ だから命題10.3より Y は連結である.

命題 10.5
$(X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間とし, $f : X \to Y$ を連続写像とする.
X が連結ならば Y の部分空間 $f(X)$ も連結である.

証明

Y の開集合 U, V が $f(X) \subset U \cup V$, $f(X) \cap U \cap V = \varnothing$ を満たすとする.

$f(X) \subset U \cup V$ より $X = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ であり, $f(X) \cap U \cap V = \varnothing$ より

$U \cap V \subset Y - f(X)$ だから $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) \subset f^{-1}(Y - f(X)) = \varnothing$ である.

実際 $x \in f^{-1}(Y - f(X))$ ならば $f(x) \in Y - f(X)$ となって $f(x) \in f(X)$ と矛盾する.

故に $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \varnothing$ である. さらに f の連続性により $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ は X の

開集合だから, X の連結性により $f^{-1}(U) = \varnothing$ または $f^{-1}(V) = \varnothing$ である.

前者の場合は $f(X) \cap U = \varnothing$ であり, 後者の場合は $f(X) \cap V = \varnothing$ となるため, 命題10.4

により $f(X)$ は連結である.

命題 10.6

$(X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間とし, $f: X \to Y$ を連続写像とする.
X が弧状連結ならば Y の部分空間 $f(X)$ も弧状連結である.

証明

$p, q \in f(X)$ に対し, $f(a) = p, f(b) = q$ を満たす $a, b \in X$ をとれば, 仮定から連続写像 $\omega: [0,1] \to X$ で $\omega(0) = a, \omega(1) = b$ を満たすものが存在する.

このとき, 合成写像 $f \circ \omega: [0,1] \to Y$ は連続で, $(f \circ \omega)([0,1]) = f(\omega([0,1])) \subset f(X)$ だから, 写像 $\zeta: [0,1] \to f(X)$ を $\zeta(t) = (f \circ \omega)(t)$ で定めることができる.

命題9.4から ζ は連続であり, $\zeta(0) = f(\omega(0)) = f(a) = p, \zeta(1) = f(\omega(1)) = f(b) = q$ が成り立つため, $f(X)$ も弧状連結である.

命題 10.7
位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の部分空間 Y が連結で, $Y \subset Z \subset \overline{Y}$ ならば Z も連結である.

証明
X の開集合 U, V が $Z \subset U \cup V$, $Z \cap U \cap V = \emptyset$ を満たすとすれば, $Y \subset Z$ より $Y \subset U \cup V$, $Y \cap U \cap V = \emptyset$ である. Y の連結性から命題10.4より $Y \cap U = \emptyset$ または $Y \cap V = \emptyset$ である.
前者の場合は $Y \subset X - U$ であり $X - U$ は X の閉集合だから命題6.14より $\overline{Y} \subset X - U$ が得られる. このとき, 仮定 $Z \subset \overline{Y}$ より $Z \subset X - U$ だから $Z \cap U = \emptyset$ である.
後者の場合も同様にして $Z \cap V = \emptyset$ が得られるため, 命題10.4により Z は連結である.

命題 10.8
$(X_1, \mathscr{O}_1), (X_2, \mathscr{O}_2), \ldots, (X_n, \mathscr{O}_n)$ がすべて連結な位相空間ならば, これらの直積空間も連結である.

証明
命題9.11により, 直積空間 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ と $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$ の位相は一致するため, $n = 2$ の場合に主張を示せば, n による帰納法で一般の場合も主張が示される.

証明の続き

$X_1\times X_2$ の開集合 U, V で $X_1\times X_2=U\cup V$, $U\cap V=\emptyset$ を満たすものが存在して, $U\neq\emptyset$ であると仮定する. $(x_1, x_2)\in U$ ならば $\mathrm{pr}_i^{-1}(x_i)\cap U$ $(i=1,2)$ は (x_1, x_2) を含むため, 空集合ではなく, 補題9.15によって $\mathrm{pr}_1^{-1}(x_1)$, $\mathrm{pr}_2^{-1}(x_2)$ はそれぞれ連結な位相空間 X_2, X_1 に同相だから, これらは連結な $X_1\times X_2$ の部分空間である.

さらに $\mathrm{pr}_i^{-1}(x_i)\subset X_1\times X_2=U\cup V$, $\mathrm{pr}_i^{-1}(x_i)\cap U\cap V=\emptyset$ だから $\mathrm{pr}_i^{-1}(x_i)$ の連結性と命題10.4から $\mathrm{pr}_i^{-1}(x_i)\cap V=\emptyset$ すなわち $\mathrm{pr}_i^{-1}(x_i)\subset X_1\times X_2-V=U$ であることがわかる.

U は空集合でないため $(p_1, p_2)\in U$ を一つ選べば, 上で示したことから $\mathrm{pr}_2^{-1}(p_2)\subset U$ であり, 任意の $(x_1, x_2)\in X_1\times X_2$ に対し, $(x_1, p_2)\in\mathrm{pr}_2^{-1}(p_2)$ だから $(x_1, p_2)\in U$ である. 従って, 上の結果を再度用いれば $\mathrm{pr}_1^{-1}(x_1)\subset U$ であり, $(x_1, x_2)\in\mathrm{pr}_1^{-1}(x_1)$ だから $(x_1, x_2)\in U$ である. 故に $U=X_1\times X_2$ となるため, U の補集合 V は空集合になり, $X_1\times X_2$ は連結であることが示された.

補題 10.9
X を $\boldsymbol{R}$ の連結な部分空間とするとき, $p, q \in X$ かつ $p < q$ ならば $(p, q) \subset X$ である.

証明
もし, $c \in (p, q)$ で $c \notin X$ であるものが存在すれば $p \in X \cap (-\infty, c)$, $q \in X \cap (c, \infty)$ だから $X \cap (-\infty, c)$, $X \cap (c, \infty)$ はともに空集合ではない. $(-\infty, c)$, (c, ∞) は $\boldsymbol{R}$ の開集合で, $c \notin X$ より $X \subset \boldsymbol{R} - \{c\} = (-\infty, c) \cup (c, \infty)$ および $(-\infty, c) \cap (c, \infty) = \emptyset$ が成り立つため, 命題10.4より X が連結であることと矛盾する. 故に $(p, q) \subset X$ である.

定理 10.10　中間値の定理
$(X, \mathcal{O})$ を連結な位相空間, $f : X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする. $p, q \in X$ に対し, $f(p) < f(q)$ ならば $f(p) < m < f(q)$ である任意の $m \in \boldsymbol{R}$ に対して $f(c) = m$ となる $c \in X$ がある.

証明
命題10.5より $f(X)$ は $\boldsymbol{R}$ の連結な部分集合で, $f(p)$ と $f(q)$ を含むため, 補題10.9から $f(X)$ は $(f(p), f(q))$ を含む. 従って $m \in (f(p), f(q))$ ならば $m \in f(X)$ だから $f(c) = m$ となる $c \in X$ が存在する.

幾何学 I

第10節　連結性（その2）

定理10.10の一般化された「中間値の定理」の証明が2行ちょっとで終わったのは, 関数の定義域が連結であることを仮定したからである. この証明で用いたのは命題10.5と補題10.9だけで, これらの結果はともに連結性の定義10.1を言い換えた命題10.3から直ちに導かれた部分空間の連結性に関する命題10.4を用いて示されたものである.

このように定理10.10の証明には連結性の定義と開区間が$\boldsymbol{R}$の開集合であるという事実だけしか用いていないので, 位相空間が「つながっている」ことを表す「連結」という概念の定義が正しくなされた時点で定理10.10の証明がほとんど終わっていたといえる.

微積分で学び, よく知られた形の実数の区間で定義された連続関数に関する通常の中間値の定理を定理10.10から導くには, $\boldsymbol{R}$が連結であるという定理10.13を示す必要がある. そのために「上に有界な単調増加数列は収束する.」という実数の集合がもつ重要な性質を用いるが, 実数の部分集合に関する「上界」,「上限」という概念を定義して, この性質を使いやすい定理10.12の形にしたものを定理10.13の証明に用いる.

また, 最大値・最小値の定理を示すために「コンパクト」という概念を定義して$\boldsymbol{R}$の有限閉区間がコンパクトであることを定理11.3で示すが, その際にも定理10.12を用いる.

定義 10.11　上界・下界・上限・下限

A を $\boldsymbol{R}$ の部分集合とする.

(1) $A \subset (-\infty, b]$ を満たす実数 b を A の上界といい, A の上界が存在するとき, A は上に有界であるという. また $A \subset [a, \infty)$ を満たす実数 a を A の下界といい, A の下界が存在するとき, A は下に有界であるという. A が上と下に有界であるとき, A は有界であるという.

(2) A が上に有界であるとき, A の上界のうちで最小のものを A の上限といい, $\sup A$ で表す. 言い換えれば s が $\boldsymbol{R}$ の部分集合 A の上限であるとは,
「すべての $x \in A$ に対して $x \leqq s$」と「$t < s$ ならば $x > t$ を満たす $x \in A$ が存在する.」が成り立つことである. また, A が下に有界であるとき, A の下界のうちで最大のものを A の下限といい, $\inf A$ で表す.

定理 10.12
$\boldsymbol{R}$ の空でない部分集合 A が上に有界ならば, A は上限をもつ.

証明
A の上界全体からなる集合を B として, 数列 $(a_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$, $(b_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を次のように帰納的に定める. まず $a_1\in A$, $b_1\in B$ を一つずつ選ぶ. $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ が, 条件 $a_i\in A$, $b_i\in B$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$, $b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n$, $b_i-a_i \leqq 2^{1-i}(b_1-a_1)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ を満たすように選べたと仮定する.

$\dfrac{a_n+b_n}{2}\in B$ の場合は $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ と定めれば, $a_{n+1}\in A$, $b_{n+1}\in B$ である. $b_n\in B$ より $a_n\leqq b_n$ だから, $b_n\geqq b_{n+1}$ で, $b_{n+1}-a_{n+1}=\dfrac{b_n-a_n}{2}\leqq 2^{-n}(b_1-a_1)$ が成り立つ.

$\dfrac{a_n+b_n}{2}\notin B$ の場合は A の要素で, $\dfrac{a_n+b_n}{2}$ より大きなものがある. その一つを a_{n+1} として $b_{n+1}=b_n$ と定めれば, $a_{n+1}\in A$, $b_{n+1}\in B$ である. $b_n\in B$ より $a_n\leqq b_n$ だから, $a_n\leqq\dfrac{a_n+b_n}{2}<a_{n+1}$ であり, $b_{n+1}-a_{n+1}<b_n-\dfrac{a_n+b_n}{2}=\dfrac{b_n-a_n}{2}\leqq 2^{-n}(b_1-a_1)$ が成り立つ.

証明の続き

以上から, すべての項が A に属する単調増加数列 $(a_k)_{k\in N}$ とすべての項が B に属する単調減少数列 $(b_k)_{k\in N}$ で, 任意の n に対して $b_n - a_n \leqq 2^{1-n}(b_1 - a_1)$ を満たすものがある. $a_1 \leqq a_n \leqq b_n \leqq b_1$ がすべての n に対して成り立つため, $(a_k)_{k\in N}$ は上に有界であり, $(b_k)_{k\in N}$ は下に有界である. 上に有界な単調増加数列と下に有界な単調減少数列は収束するため $(a_k)_{k\in N}$ と $(b_k)_{k\in N}$ は収束する. そこで $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$ とおけば, $a_n \leqq b_n$ より $\alpha \leqq \beta$ であり $b_n - a_n \leqq 2^{1-n}(b_1 - a_1)$ より $\beta - \alpha \leqq 0$ だから $\alpha = \beta$ である.

任意の $x \in A$ と自然数 n に対し, $b_n \in B$ だから $x \leqq b_n$ が成り立つ. この不等式で $n \to \infty$ とすれば, $x \leqq \beta = \alpha$ が得られるため, $\alpha \in B$ であることがわかる. もし α より小さな B の要素 γ が存在すれば, $a_n \leqq \gamma$ が任意の自然数 n に対して成り立つため, $n \to \infty$ とすれば, $\alpha \leqq \gamma$ が得られて, γ が α より小さいことと矛盾する. 従って, α より小さい B の要素は存在しないため, α は B の最小元, すなわち α は A の上限である.

定理 10.13
$\boldsymbol{R}$ は連結である.

証明
$\boldsymbol{R}$ の空でない開集合 U, V で $\boldsymbol{R}=U\cup V$, $U\cap V=\emptyset$ を満たすものが存在すると仮定する. U, V は空でないため $a\in U$, $b\in V$ が選べて, $a<b$ と仮定してよい. U は a を含む開集合だから, $(a-r, a+r)\subset U$ を満たす $r>0$ があるため, $A=\{x\in\boldsymbol{R}\,|\,(a,x)\subset U\}$ とおけば, $a+r\in A$ である. また $x\in A$ ならば $x\leqq b$ である. 実際, もし $x>b$ ならば $b\in(a,x)\subset U$ となるが, $b\in V$ であるため $b\in U\cap V$ となって $U\cap V=\emptyset$ と矛盾する. 従って A は空でない上に有界な $\boldsymbol{R}$ の部分集合だから, 定理10.12より上限が存在し, $m=\sup A$ とおけば $m\geqq a+r>a$ である.

U は開集合だから, $m\in U$ ならば $(m-s, m+s)\subset U$ となる $0<s<m-a$ が存在し, m が A の上限であることから $m-s<c$ を満たす $c\in A$ がある. このとき $(a,c)\subset U$ となるため, $(a, m+s)\subset(a,c)\cup(m-s, m+s)\subset U$ だから $m+s\in A$ となり, m が A の上界であることと矛盾する. 従って $m\notin U$ である.

証明の続き

Vは開集合だから, $m\in V$ならば$(m-t,m+t)\subset V$となる$0<t<m-a$が存在し, mがAの上限であることから$m-t<d\leqq m$を満たす$d\in A$がある. $m-t<e<d$を満たすeをとれば, $e\in(a,d)\subset U$ かつ $e\in(m-t,m+t)\subset V$ だから $e\in U\cap V$ となって $U\cap V=\varnothing$ であることと矛盾する. 従って $m\notin V$ である.

故に $m\notin U\cup V$ となるが, これは $\boldsymbol{R}=U\cup V$ と矛盾するので $\boldsymbol{R}$ の空でない開集合 U, V で $\boldsymbol{R}=U\cup V, U\cap V=\varnothing$ を満たすものは存在しない. よって $\boldsymbol{R}$ は連結である.

系 10.14

任意の $a,b\in\boldsymbol{R}$ $(a<b)$ に対し, 区間 (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$, (a,∞), $[a,\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$ は連結である.

証明

関数 $f:\boldsymbol{R}\to(-1,1)$, $g:(-1,1)\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$, $g(x)=\dfrac{x}{1-|x|}$ で定めれば, g は f の逆関数だから f は全単射である. 定理10.13より $\boldsymbol{R}$ は連結で, f は連続関数だから命題10.5により, $(-1,1)$ は連結である.

証明の続き

$a<b$ ならば, 関数 $h:(-1,1)\to(a,b)$ を $h(x)=\frac{b-a}{2}x+\frac{b+a}{2}$ で定めれば, h は連続な全単射だから命題10.5により, (a,b) は連結である. $\overline{(a,b)}=[a,b]$ であり, I が $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$ のいずれかならば $(a,b)\subset I\subset\overline{(a,b)}$ だから, 命題10.7より I は連結である.

関数 $p:\boldsymbol{R}\to(0,\infty)$, $q:(0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ をそれぞれ

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & x\leqq 0\\ 1+x & x\geqq 0\end{cases},\quad q(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x} & 0<x\leqq 1\\ x-1 & x\geqq 1\end{cases}$$

で定めれば, q は p の逆関数だから p は全単射である. p は連続関数で $\boldsymbol{R}$ は連結だから命題10.5より, $(0,\infty)$ は連結である. 関数 $r:(0,\infty)\to(a,\infty)$ を $r(x)=x+a$ で定めれば, r は連続な全単射だから命題10.5により, (a,∞) は連結である. $\overline{(a,\infty)}=[a,\infty)$ だから, 命題10.7により, $[a,\infty)$ も連結である. さらに関数 $u:(-b,\infty)\to(-\infty,b)$, $v:[-b,\infty)\to(-\infty,b]$ を $u(x)=-x$, $v(x)=-x$ で定めれば, これらは連続な全単射だから, 命題10.5により, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$ も連結である.

定理10.10と系10.14から「通常の形」の中間値の定理が導かれる.

系 10.15　中間値の定理
X を $\boldsymbol{R}$ の部分空間とし, $f: X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする. 閉区間 $[a,b]$ が X に含まれており, $f(a) \neq f(b)$ であるとき, $f(a) < m < f(b)$ または $f(b) < m < f(a)$ を満たす任意の実数 m に対して $f(c) = m$ を満たす $c \in (a,b)$ が存在する.

証明
$i: [a,b] \to X$ を包含写像とすれば, $f \circ i: [a,b] \to \boldsymbol{R}$ は相対位相の定義と命題7.7から連続関数である. 系10.14から $[a,b]$ は連結だから定理10.10により

$$f(c) = (f \circ i)(c) = m$$

を満たす $c \in [a,b]$ が存在する. $f(c) = m \neq f(a), f(b)$ だから $c \neq a, b$ である.

系 10.16
弧状連結な位相空間は連結である.

証明

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が連結でないならば, 空でない開集合 U, V で $X = U \cup V$, $U \cap V = \varnothing$ を満たすものが存在する. U, V は空でないため $p \in U$, $q \in V$ を選ぶことができる. $(X, \mathcal{O})$ が弧状連結ならば連続写像 $\omega : [0,1] \to X$ で $\omega(0) = p$, $\omega(1) = q$ を満たすものが存在する. $0 \in \omega^{-1}(U)$, $1 \in \omega^{-1}(V)$ だから $\omega^{-1}(U)$, $\omega^{-1}(V)$ はともに $[0,1]$ の空でない開集合である. さらに $X = U \cup V$, $U \cap V = \varnothing$ だから

$$\omega^{-1}(U) \cup \omega^{-1}(V) = \omega^{-1}(U \cup V) = \omega^{-1}(X) = [0,1],$$

$$\omega^{-1}(U) \cap \omega^{-1}(V) = \omega^{-1}(U \cap V) = \varnothing$$

となって, $[0,1]$ が連結であるという系9.15と矛盾する.
従って X が弧状連結ならば連結である.

次の結果は系9.15の逆で, 定理9.13の応用例である.

命題 10.17
$\boldsymbol{R}$ の連結な部分空間は $\boldsymbol{R}$ 全体か, 系10.14の区間のいずれかである.

証明
X を $\boldsymbol{R}$ の連結な部分空間とする. X が下に有界である場合は $a=\inf X$ とおけば, $X\subset[a,\infty)$ であり, 下に有界でない場合は $a=-\infty$ とおく. また, X が上に有界である場合は $b=\sup X$ とおけば, $X\subset(-\infty,b]$ であり, 上に有界でない場合は $b=\infty$ とおく. 従って X が有界ならば $X\subset[a,b]$ である.
$x\in(a,b)$ に対し, $a\neq-\infty$ の場合は a が X の下限であることから $a<p<x$ を満たす $p\in X$ が存在し, $a=-\infty$ の場合は X が下に有界ではないため, $p<x$ を満たす $p\in X$ が存在する. 同様に, $b\neq\infty$ の場合は b が X の上限であることから $x<q<b$ を満たす $q\in X$ が存在し, $b=\infty$ の場合は X が上に有界ではないため, $q>x$ を満たす $q\in X$ が存在する. 従って, 補題10.9から $(p,q)\subset X$ であり, $x\in(p,q)$ だから $x\in X$ である.
故に $(a,b)\subset X$ である.

証明の続き

以上から, 次のように場合が分かれる.

X が有界ならば $(a, b) \subset X \subset [a, b]$ となるため, X は (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ のいずれかである.

X が下に有界であるが上に有界でない場合は $(a, \infty) \subset X \subset [a, \infty)$ となるため, X は (a, ∞), $[a, \infty)$ のいずれかである.

X が上に有界であるが下に有界でない場合は $(-\infty, b) \subset X \subset (\infty, b]$ となるため, X は $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ のいずれかである.

X が上にも下にも有界でない場合は $(-\infty, \infty) \subset X$ だから $X = (-\infty, \infty) = \boldsymbol{R}$ である.

幾何学 I

第11節　コンパクト性（その1）

中間値の定理を証明するためには, 位相空間の連結性という概念が重要であったように, 最大値・最小値の定理を証明するためには, コンパクト性という概念が重要である.

定義 11.1　コンパクト性

位相空間 $(X, \mathscr{O})$ が次の条件を満たすとき, $(X, \mathscr{O})$ はコンパクトであるという.

(C) X の開集合を要素とする集合 Γ が $X = \bigcup_{O \in \Gamma} O$ を満たせば有限個の $O_1, O_2, \ldots, O_n \in \Gamma$ で $X = O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n$ を満たすものがある.

部分空間が連結であるための条件を示した命題10.4と同様に, 部分空間がコンパクトであるための条件は以下で与えられる.

命題 11.2

位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の部分空間 Y がコンパクトであることと, 次の条件 $(*)$ は同値である.

$(*)$ X の開集合を要素とする集合 Γ が $Y \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O$ を満たせば有限個の $O_1, O_2, \ldots, O_n \in \Gamma$ で $Y \subset O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n$ を満たすものがある.

証明

$(*)$ が満たされると仮定し, Y の開集合からなる集合 Δ は $Y=\bigcup_{O\in\Delta} O$ を満たすとする.

各 $U\in\Delta$ に対し, $U=Y\cap O_U$ となる X の開集合 O_U を選び, $\Gamma=\{O_U \mid U\in\Delta\}$ とおけば

Γ は X の開集合を要素とする集合であり, 各 $U\in\Delta$ は O_U に含まれるため,

$$Y=\bigcup_{O\in\Delta} O \subset \bigcup_{O_U\in\Gamma} O_U$$

である. 従って仮定から有限個の $O_{U_1}, O_{U_2}, \ldots, O_{U_n}\in\Gamma$ で, $Y\subset O_{U_1}\cup O_{U_2}\cup\cdots\cup O_{U_n}$

を満たすものがある. ここで $i=1,2,\ldots,n$ に対して $Y\cap O_{U_i}=U_i$ だから

$$\begin{aligned}Y&=Y\cap(O_{U_1}\cup O_{U_2}\cup\cdots\cup O_{U_n})=(Y\cap O_{U_1})\cup(Y\cap O_{U_2})\cup\cdots\cup(Y\cap O_{U_n})\\&=U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_n\end{aligned}$$

となるため, Y はコンパクトである.

証明の続き

Y はコンパクトであると仮定し, X の開集合を要素とする集合 Γ は $Y \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O$ を満たすとする. $\Delta = \{Y \cap O \mid O \in \Gamma\}$ とおけば, Δ は Y の開集合からなる集合であり,

$$Y = Y \cap \left(\bigcup_{O \in \Gamma} O \right) = \bigcup_{O \in \Gamma} (Y \cap O) = \bigcup_{U \in \Delta} U$$

だから, 仮定から有限個の $Y \cap O_1, Y \cap O_2, \ldots, Y \cap O_n \in \Delta$ で次を満たすものがある.

$$Y = (Y \cap O_1) \cup (Y \cap O_2) \cup \cdots \cup (Y \cap O_n)$$

各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $O_i \in \Gamma$ であり $Y \cap O_i \subset O_i$ だから, 上式より

$$Y \subset O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n$$

となるため, $(*)$ が満たされる.

(上の証明で, 集合 A, B が $A \subset B$ を満たせば $A = A \cap B$ が成り立つことを用いた.)

最大値・最小値の定理を証明する際に必要な結果である有限閉区間のコンパクト性を次に示す.

定理 11.3
$\boldsymbol{R}$ の有限閉区間 $[a,b]$ はコンパクトである.

証明
$\boldsymbol{R}$ の開集合を要素とする集合 Γ に対して, $[a,b]\subset \bigcup_{O\in\Gamma} O$ が成り立つと仮定する.
このとき, 区間 $(a,b]$ の部分集合 A を

$$A=\{x\in(a,b] \mid [a,x]\subset O_1\cup O_2\cup\cdots\cup O_n \text{ を満たす } O_1, O_2, \ldots, O_n\in\Gamma \text{ が存在する.}\}$$

で定めて, $b\in A$ であることを示せば, 命題11.2により $[a,b]$ はコンパクトである.

$a\in[a,b]\subset \bigcup_{O\in\Gamma} O$ だから $a\in O$ を満たす $O\in\Gamma$ が存在し, a は O の内点だから $(a-r,a+r)\subset O$ を満たす $r>0$ がある. $c=\min\left\{a+\frac{r}{2}, b\right\}$ とおけば, $[a,c]\subset O$ となるため, $c\in A$ であり, A は空集合ではない. A の定義から b は A の上界だから, A は上に有界である. 故に定理10.12から A の上限が存在して, u を A の上限とする. $c\in A$ だから $u\geqq c>a$ であり, b は A の上界だから $u\leqq b$ であることに注意する.

証明の続き

$u<b$ と仮定すれば, $u\in[a,b]\subset \bigcup_{O\in\Gamma} O$ だから $u\in U$ を満たす $U\in\Gamma$ がある. u は U の内点だから $(u-s,u+s)\subset U$ を満たす $s>0$ が存在するため, $d=\min\left\{u+\frac{s}{2},b\right\}$ とおけば, $u<d\leqq b$ かつ $(u-s,d]\subset U$ である. また, u は A の上限だから $u-s<v\leqq u$ を満たす $v\in A$ が存在し, さらに $[a,v]\subset O_1\cup O_2\cup\cdots\cup O_n$ を満たす $O_1,O_2,\ldots,O_n\in\Gamma$ が存在する. このとき $[a,d]\subset[a,v]\cup(u-s,d]\subset O_1\cup O_2\cup\cdots\cup O_n\cup U$ が成り立つため, $d\in A$ となり, u が A の上限であることと矛盾する. 故に $u=b$ である.

$b\in[a,b]\subset \bigcup_{O\in\Gamma} O$ だから $b\in V$ を満たす $V\in\Gamma$ がある. b は V の内点だから $(b-t,b+t)\subset V$ を満たす $t>0$ が存在する. また, b は A の上限だから $b-t<w<b$ を満たす $w\in A$ が存在し, さらに $[a,w]\subset W_1\cup W_2\cup\cdots\cup W_n$ を満たす $W_1,W_2,\ldots,W_n\in\Gamma$ が存在する. このとき, $[a,b]\subset[a,w]\cup(b-t,b]\subset W_1\cup W_2\cup\cdots\cup W_n\cup V$ が成り立つため, $b\in A$ であり $[a,b]$ はコンパクトである.

次の結果も最大値・最小値の定理の証明に必要で, 定理10.12を証明に用いる.

補題 11.4
$\boldsymbol{R}$ の有界な閉集合は最大値と最小値をもつ.

証明

X を $\boldsymbol{R}$ の有界な閉集合とすれば定理10.12により X の上限と下限が存在する.

M を X の上限とする. もし $M \notin X$ ならば $M \in \boldsymbol{R} - X$ であり, $\boldsymbol{R} - X$ は開集合だから $r > 0$ で $(M-r, M+r) \subset \boldsymbol{R} - X$ を満たすものが存在する.

一方 M は X の上限だから $M - r < a \leqq M$ を満たす $a \in X$ が存在する. このとき $a \in (M-r, M+r) \subset \boldsymbol{R} - X$ だから $a \notin X$ となり, 矛盾が生じる. 故に $M \in X$ である.

m を X の下限とすれば $m \in X$ であることも同様に示され, M が X の最大値, m が X の 最小値である.

コンパクトな位相空間の直積空間がコンパクトであることを示すために, 次の補題を示す.

補題 11.5

次の条件 (i) と (ii) は同値である.

(i) 位相空間 $(X, \mathscr{O})$ はコンパクトである.

(ii) $(X, \mathscr{O})$ の基底 $\mathscr{B}$ で次の条件を満たすものがある.

$\Gamma \subset \mathscr{B}$ かつ $X = \bigcup_{O \in \Gamma} O$ ならば $O_1, O_2, \ldots, O_n \in \Gamma$ で

$X = O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n$ を満たすものがある.

証明

$(i) \Rightarrow (ii)$: $\mathscr{B} = \mathscr{O}$ とすればよい.

$(ii) \Rightarrow (i)$: $\Gamma \subset \mathscr{O}$ は $X = \bigcup_{O \in \Gamma} O$ を満たすとする. 任意の $x \in X$ に対し, x を含む $O_x \in \Gamma$ が存在し, さらに $\mathscr{B}$ が $(X, \mathscr{O})$ の基底であることから O_x は $\mathscr{B}$ の要素の合併集合になるため, $U_x \in \mathscr{B}$ で $x \in U_x \subset O_x$ を満たすものがある.

証明の続き

そこで $\Delta=\{U_x \mid x\in X\}$ とおくと, $\Gamma\subset\mathscr{B}$ かつ $X=\bigcup_{U_x\in\Delta} U_x$ である.

従って, 仮定から $U_{x_1}, U_{x_2},\ldots, U_{x_n}\in\Delta$ で $X=U_{x_1}\cup U_{x_2}\cup\cdots\cup U_{x_n}$ を満たすものがある.

このとき $U_{x_i}\subset O_{x_i}$ が $i=1,2,\ldots,n$ に対して成り立つため,

$$X=U_{x_1}\cup U_{x_2}\cup\cdots\cup U_{x_n}\subset O_{x_1}\cup O_{x_2}\cup\cdots\cup O_{x_n}$$

だから $X=O_{x_1}\cup O_{x_2}\cup\cdots\cup O_{x_n}$ である. 故に X はコンパクトである.

定理 11.6

$(X_1,\mathscr{O}_1),(X_2,\mathscr{O}_2),\ldots,(X_n,\mathscr{O}_n)$ がすべてコンパクトな位相空間ならば, これらの直積空間もコンパクトである.

定理11.3と定理11.6から次の結果が得られる.

系 11.7

有限閉区間の直積 $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ はコンパクトな $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間である.

定理11.6の証明

命題9.11により, 直積空間 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ と $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$ の位相は一致するため, $n=2$ の場合に主張を示せば, n による帰納法で一般の場合も主張が示される.

$\mathscr{B} = \{U \times V \mid U \in \mathscr{O}_1, V \in \mathscr{O}_2\}$ とおくと命題9.10から $\mathscr{B}$ は $(X_1, \mathscr{O}_1)$, $(X_2, \mathscr{O}_2)$ の直積空間の基底である.

$\Gamma \subset \mathscr{B}$ が $X_1 \times X_2 = \bigcup_{O \in \Gamma} O$ を満たすとする. 各 $y \in X_2$ に対し, 補題9.15により, X_1 と $\mathrm{pr}_2^{-1}(y)$ は同相だから $\mathrm{pr}_2^{-1}(y)$ はコンパクトである.

従って $U_{y,1} \times V_{y,1}, U_{y,2} \times V_{y,2}, \ldots, U_{y,n(y)} \times V_{y,n(y)} \in \Gamma$ で, $\mathrm{pr}_2^{-1}(y) \subset \bigcup_{i=1}^{n(y)} (U_{y,i} \times V_{y,i})$ を満たすものが存在する. $y \notin V_{y,i}$ ならば $\mathrm{pr}_2^{-1}(y) \cap (U_{y,i} \times V_{y,i}) = \emptyset$ だから, $y \in V_{y,i}$ である i のみについての $U_{y,i} \times V_{y,i}$ の合併集合は $\mathrm{pr}_2^{-1}(y)$ を含むため, $y \notin V_{y,i}$ である番号 i は除外して番号を付け直し, すべての $i = 1, 2, \ldots, n(y)$ に対して $y \in V_{y,i}$ であるとしてよい.

証明の続き

そこで, $V_y = \bigcap_{i=1}^{n(y)} V_{y,i}$ とおけば V_y は y を含む開集合である.

故に $X_2 = \bigcup_{y \in X_2} \{y\} \subset \bigcup_{y \in X_2} V_y \subset X_2$ より $X_2 = \bigcup_{y \in X_2} V_y$ だから X_2 のコンパク}ト性から,

$y_1, y_2, \ldots, y_k \in X_2$ で $X_2 = \bigcup_{j=1}^{k} V_{y_j}$ を満たすものが存在する.

このとき, $X_1 \times X_2 = \bigcup_{1 \leqq j \leqq k, 1 \leqq i \leqq n(y_j)} (U_{y_j,i} \times V_{y_j,i})$ が成り立つ. 実際, 任意の $(x, y) \in X_1 \times X_2$

に対し, $y \in V_{y_j}$ となる j が存在し, さらに $(x, y_j) \in \mathrm{pr}_2^{-1}(y_j) \subset \bigcup_{i=1}^{n(y_j)} (U_{y_j,i} \times V_{y_j,i})$ だから

$(x, y_j) \in U_{y_j,l} \times V_{y_j,l}$ となる l が存在し, $y \in V_{y_j} = \bigcap_{i=1}^{n(y_j)} V_{y_j,i} \subset V_{y_j,l}$ だから $(x, y) \in U_{y_j,l} \times V_{y_j,l}$

が得られる. $1 \leqq j \leqq k$, $1 \leqq i \leqq n(y_j)$ に対して $U_{y_j,i} \times V_{y_j,i} \in \Gamma$ だから補題11.5により

$X_1 \times X_2$ はコンパクトである.

幾何学 I

第11節　コンパクト性 （その2）

命題 11.8
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ がコンパクトで, X の部分空間 Y が X の閉集合ならば Y もコンパクトである.

証明
X の開集合を要素とする集合 Γ が $Y \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O$ を満たすとする. Y は X の閉集合だから $X-Y$ は X の開集合で, $X = Y \cup (X-Y)$ と $Y \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O$ より $X = \left(\bigcup_{O \in \Gamma} O\right) \cup (X-Y)$ が成り立つ. 故に仮定から $O_1, O_2, \ldots, O_n \in \Gamma$ で $X = O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n \cup (X-Y)$ を満たすものがある. このとき $Y \cap (X-Y) = \varnothing$ に注意すれば

$$
\begin{aligned}
Y = Y \cap X &= Y \cap (O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n \cup (X-Y)) \\
&= (Y \cap (O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n)) \cup (Y \cap (X-Y)) \\
&= Y \cap (O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n) \subset O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n
\end{aligned}
$$

が成り立つため, 命題11.2から Y はコンパクトである.

命題 11.9
位相空間 $(X, \mathscr{O})$ がコンパクトで, $f\colon X \to Y$ が連続写像ならば Y の部分空間 $f(X)$ はコンパクトである.

証明
Y の開集合を要素とする集合 Γ が $f(X) \subset \bigcup_{O\in\Gamma} O$ を満たすとして $\Delta = \{f^{-1}(O) \mid O \in \Gamma\}$ とおく. このとき f の連続性から Δ は X の開集合からなる集合である. 任意の $x \in X$ に対して $f(x) \in f(X)$ だから $f(x) \in O$ となる $O \in \Gamma$ が存在する. このとき, $x \in f^{-1}(O)$ だから $X = \bigcup_{O\in\Delta} O$ である. X のコンパクト性より, $f^{-1}(O_1), f^{-1}(O_2), \ldots, f^{-1}(O_n) \in \Delta$ $(O_1, O_2, \ldots, O_n \in \Gamma)$ で $X = f^{-1}(O_1) \cup f^{-1}(O_2) \cup \cdots \cup f^{-1}(O_n)$ を満たすものがある. 任意の $y \in f(X)$ に対して $y = f(x)$ となる $x \in X$ をとれば, $x \in f^{-1}(O_k)$ となる k がある. このとき $y = f(x) \in O_k$ だから, $f(X) \subset O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n$ が成り立つことがわかる.
故に命題11.2から $f(X)$ はコンパクトである.

定義 11.10
位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次の条件 (T_2) を満たすとき $(X, \mathcal{O})$ を Hausdorff 空間または T_2 空間という.

(T_2) $x, y \in X$ かつ $x \neq y$ ならば X の開集合 U, V で $x \in U$, $y \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在する.

注意 11.11
Hausdorff 空間 $(X, \mathcal{O})$ において, 一点だけからなる部分集合は閉集合である. 実際, $p \in X$ ならば任意の $x \in X - \{p\}$ に対して $x \neq p$ だから X の開集合 U, V で $x \in U$, $p \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在する. もし $p \in U$ ならば $p \in U \cap V$ となって矛盾が生じるため, $p \notin U$ である. 従って $x \in U \subset X - \{p\}$ だから x は $X - \{p\}$ の内点である. $X - \{p\}$ の任意の点が $X - \{p\}$ の内点だから $X - \{p\}$ は開集合である. 故に $\{p\}$ は X の閉集合である.

例 11.12

(X, d) を距離空間とし, $\mathcal{O}_d$ を距離関数 d から定まる X の位相とする. x, y を X の異なる2点として $U = B_d\left(x; \dfrac{d(x,y)}{2}\right), V = B_d\left(y; \dfrac{d(x,y)}{2}\right)$ とおけば, U, V はそれぞれ x, y の開近傍である. もし $z \in U \cap V$ が存在すれば $d(x,z) < \dfrac{d(x,y)}{2}, d(z,y) = d(y,z) < \dfrac{d(x,y)}{2}$ だから, 三角不等式から $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < d(x,y)$ が得られるため, 矛盾が生じる. 故に $U \cap V = \emptyset$ だから位相空間 $(X, \mathcal{O}_d)$ は Hausdorff 空間である.

命題 11.13

Hausdorff 空間の任意の部分空間は Hausdorff 空間である.

証明

$(X, \mathcal{O})$ を Hausdorff 空間, Y を X の部分空間とする. x, y を Y の異なる2点とすれば, 仮定から X の開集合 U, V で $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在する.

このとき $U \cap Y, V \cap Y$ はともに Y の開集合で, それぞれ x, y を含み,

$(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = (U \cap V) \cap Y = \emptyset \cap Y = \emptyset$ である. 故に Y は Hausdorff 空間である.

命題 11.14

$(X_1, \mathscr{O}_1), (X_2, \mathscr{O}_2), \dots, (X_n, \mathscr{O}_n)$ がすべてHausdorff空間ならば, これらの直積空間もHausdorff 空間である.

証明

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ が $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の異なる2点ならば $x_i \neq y_i$ となる i $(i = 1, 2, \dots, n)$ がある. X_i はHausdorff 空間だから X_i の開集合 U, V で $x_i \in U$, $y_i \in V$, $U \cap V = \varnothing$ を満たすものが存在する. $\mathrm{pr}_i^{-1}(U)$, $\mathrm{pr}_i^{-1}(V)$ はともに $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の開集合で, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathrm{pr}_i^{-1}(U)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathrm{pr}_i^{-1}(V)$ であり,

$$\mathrm{pr}_i^{-1}(U) \cap \mathrm{pr}_i^{-1}(V) = \mathrm{pr}_i^{-1}(U \cap V) = \mathrm{pr}_i^{-1}(\varnothing) = \varnothing$$

を満たす. 故に $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ はHausdorff 空間である.

次の命題はHausdorff 空間という概念が重要である理由の一つである命題であると同時に, 最大値・最小値の定理を証明する上で, 鍵になっている命題である.

命題 11.15

$(X, \mathcal{O})$ を Hausdorff 空間, A, B を X のコンパクトな部分空間とする.
$A \cap B = \emptyset$ ならば X の開集合 U, V で $U \cap V = \emptyset$, $A \subset U$, $B \subset V$ となるものがある.
とくに Hausdorff 空間のコンパクトな部分空間は閉集合である.

証明

$A \cap B = \emptyset$ だから $x \in A$, $y \in B$ ならば $x \neq y$ であるため, X の開集合 $U_{x,y}$, $V_{x,y}$ で $x \in U_{x,y}$, $y \in V_{x,y}$, $U_{x,y} \cap V_{x,y} = \emptyset$ を満たすものが存在する.

各 $x \in A$ に対し, $B = \bigcup_{y \in B} \{y\} \subset \bigcup_{y \in B} V_{x,y}$ より B のコンパクト性から $y_1, y_2, \ldots, y_n \in B$ で $B \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_{x,y_j}$ を満たすものが存在する. $U_x = \bigcap_{j=1}^{n} U_{x,y_j}$ とおけば, 各 U_{x,y_j} は x を含むため, $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} U_x$ である. 従って A のコンパクト性により $x_1, x_2, \ldots, x_m \in A$ で $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}$ を満たすものが存在する.

証明の続き

$U=\bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}$, $V=\bigcap_{i=1}^{m}\left(\bigcup_{j=1}^{n} V_{x_i,y_j}\right)$ とおけば, $A\subset U$ であり, 各 $i=1,2,\ldots,m$ に対して

$B\subset\bigcup_{j=1}^{n} V_{x_i,y_j}$ より $B\subset V$ である.

$V\subset\bigcup_{j=1}^{n} V_{x_i,y_j}$, $U_{x_i}\subset U_{x_i,y_j}$ であることに注意すれば次の式から $U\cap V=\emptyset$ がわかる.

$$
\begin{aligned}
U\cap V &= \left(\bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}\right)\cap V=\bigcup_{i=1}^{m}\left(\bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}\cap V\right)\subset\bigcup_{i=1}^{m}\left(U_{x_i}\cap\left(\bigcup_{j=1}^{n} V_{x_i,y_j}\right)\right)\\
&=\bigcup_{i=1}^{m}\left(\bigcup_{j=1}^{n}\left(U_{x_i}\cap V_{x_i,y_j}\right)\right)\subset\bigcup_{i=1}^{m}\left(\bigcup_{j=1}^{n}\left(U_{x_i,y_j}\cap V_{x_i,y_j}\right)\right)=\bigcup_{i=1}^{m}\left(\bigcup_{j=1}^{n}\emptyset\right)=\emptyset
\end{aligned}
$$

とくに任意の $y\in X-A$ に対して $B=\{y\}$ として上の結果を用いれば, y を含む開集合 V で A と交わらないものが存在するため, y は $X-A$ の内点であることがわかる.

従って A は閉集合である.

命題 11.16
コンパクトな位相空間から Hausdorff 空間への連続写像は閉写像(定義7.8)である.

証明
$(X, \mathcal{O}_X)$ をコンパクトな位相空間, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を Hausdorff 空間とし, $f\colon X \to Y$ を連続写像とする. A を X の閉集合とすれば, 命題11.8により A は X のコンパクトな部分空間だから, 命題11.9により $f(A)$ も Y のコンパクトな部分空間である.
Y は Hausdorff 空間だから, 命題11.15により $f(A)$ は閉集合である.

定義 11.17
(X, d) を距離空間とする. X の部分集合 A に対して $p \in X$ と $R > 0$ で, $A \subset B_d(p\,; R)$ を満たすものがあるとき, A は有界であるという.

注意 11.18
$p, q \in X$ と $R > 0$ に対して三角不等式から $B_d(p\,; R) \subset B_d(q\,; R + d(p, q))$ が示されるため, p_0 を X の定点とするとき, A が有界ならば $R' > 0$ で, $A \subset B_d(p_0\,; R')$ を満たすものがある.

定理 11.19
$\boldsymbol{R}^n$ の部分空間 X がコンパクトであるためには X が有界な閉集合であることが必要十分である.

証明

$\boldsymbol{R}^n$ の部分空間 X がコンパクトならば, 例11.12から $\boldsymbol{R}^n$ は Hausdorff 空間だから, 命題11.15より X は閉集合である. 自然数 k に対して, 原点を中心として半径が k である $\boldsymbol{R}^n$ の開球 $B(\mathbf{0};k)$ を考えれば $X \subset \boldsymbol{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(\mathbf{0};k)$ だから, X のコンパクト性により, $X \subset \boldsymbol{R}^n = \bigcup_{i=1}^{m} B(\mathbf{0};k_i)$ を満たす自然数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ がある. これらのうちで最大のものを K とすれば, $i = 1,2,\ldots,m$ に対して $B(\mathbf{0};k_i) \subset B(\mathbf{0};K)$ だから $X \subset B(\mathbf{0};K)$ となるため, X は有界である.

X が $\boldsymbol{R}^n$ の有界な閉集合ならば注意11.18により $X \subset B(\mathbf{0};K)$ を満たす $K > 0$ がある. $[-K,K]^n$ を閉区間 $[-K,K]$ の n 個の直積集合とすれば $B(\mathbf{0};K) \subset [-K,K]^n$ だから X は $[-K,K]^n$ の閉集合である. 故に系11.7と命題11.8から X はコンパクトである.

定理 11.20　最大値・最小値の定理
コンパクトな位相空間で定義された実数値連続関数は最大値と最小値をもつ.

証明

$(X, \mathscr{O})$ をコンパクトな位相空間, $f\colon X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする. 命題11.9により $f(X)$ は $\boldsymbol{R}$ のコンパクトな部分空間だから, 定理11.19によって $f(X)$ は $\boldsymbol{R}$ の有界な閉集合である. 従って, 補題11.4により $f(X)$ は最大値と最小値をもつ.

$f(X)$ の最大値は f の最大値で, $f(X)$ の最小値は f の最小値に他ならない.

定理11.19と定理11.20から, 次の結果が得られる.

系 11.21
$\boldsymbol{R}^n$ の有界な閉集合で定義された実数値連続関数は最大値と最小値をもつ.

幾何学 I

第12節　一様連続写像

命題 12.1
距離空間 (X,d), (Y,d') に対し, $d_1:(X\times Y)\times(X\times Y)\to \boldsymbol{R}$ を次のように定義する.
$$d_1((x,y),(z,w))=d(x,z)+d'(y,w)$$
このとき d_1 は $X\times Y$ の距離関数であり, d_1 から定まる $X\times Y$ の位相は d から定まる X の位相と d' から定まる Y の位相の直積位相と一致する.

証明

d_1 が $X\times Y$ の距離関数であることは容易に確かめられる. $d_\infty:(X\times Y)\times(X\times Y)\to\boldsymbol{R}$ を $d_\infty((x,y),(z,w))=\max\{d(x,z),d'(y,w)\}$ で定めれば命題9.12から d_∞ は $X\times Y$ の距離関数であり, 命題9.13から d_∞ から定まる $X\times Y$ の位相は d から定まる X の位相と d' から定まる Y の位相の直積位相と一致する. 任意の $(x,y),(z,w)\in X\times Y$ に対し,

$d_\infty((x,y),(z,w))=\max\{d(x,z),d'(y,w)\}\leqq d(x,z)+d'(y,w)=d_1((x,y),(z,w))$ かつ

$d_1((x,y),(z,w))=d(x,z)+d'(y,w)\leqq 2\max\{d(x,z),d'(y,w)\}=2d_\infty((x,y),(z,w))$

だから不等式 $d_\infty((x,y),(z,w))\leqq d_1((x,y),(z,w))\leqq 2d_\infty((x,y),(z,w))$ が成り立つ.

証明の続き

故に注意5.12より d_1 から定まる $X\times X$ の位相は d_∞ から定まる $X\times X$ の位相に一致するため, 主張が示された.

命題 12.2

(X, d) を距離空間とし, d_1 を命題12.1で $Y=X$, $d'=d$ として定義した $X\times X$ の距離関数とする.

(1) $(x, y), (p, q)\in X\times X$ に対し, $|d(x, y)-d(p, q)|\leqq d(x, p)+d(y, q)$ が成り立つ.

(2) 距離関数 $d: X\times X\to \boldsymbol{R}$ は距離空間 $(X\times X, d_1)$ 上の実数値連続関数である.

証明

(1) 三角不等式より $d(x, y)\leqq d(x, p)+d(p, y)\leqq d(x, p)+d(p, q)+d(y, p)$ が得られるため $d(x, y)-d(p, q)\leqq d(x, p)+d(y, p)$ であり, この不等式の x と p, y と q を入れ替えれば $d(p, q)-d(x, y)\leqq d(p, x)+d(q, y)=d(x, p)+d(y, q)$ が得られるので $|d(x, y)-d(p, q)|\leqq d(x, p)+d(y, q)$ が成り立つ.

(2) (1)の結果から $(x, y), (p, q)\in X\times X$ に対し, $|d(x, y)-d(p, q)|\leqq d_1((x, y), (p, q))$ だから, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $d_1((x, y), (p, q))<\varepsilon$ ならば $|d(x, y)-d(p, q)|<\varepsilon$ が成り立つ. 故に d は任意の $(p, q)\in X\times X$ で連続である.

距離空間 (X, d) が与えられたとき, X の部分集合 A と $p \in X$ に対し,

$$d(A, p) = \inf\{d(x, p) \mid x \in A\}$$

とおく.

命題 12.3

(X, d) を距離空間, A を X の部分集合とするとき, $|d(A, x) - d(A, y)| \leqq d(x, y)$ が成り立つ. 従って, 関数 $d_A : X \to \boldsymbol{R}$ を $d_A(x) = d(A, x)$ で定めれば d_A は連続である.

証明

$a \in A$, $x, y \in X$ に対して三角不等式から次の不等式が成り立つ.

$$d(A, x) \leqq d(a, x) \leqq d(a, y) + d(y, x) = d(a, y) + d(x, y)$$

故に任意の $a \in A$ に対して $d(A, x) - d(x, y) \leqq d(a, y)$ が成り立つ. この不等式の左辺は a に無関係だから, $d(A, y)$ の定義から $d(A, x) - d(x, y) \leqq d(A, y)$ である.

従って $d(A, x) - d(A, y) \leqq d(x, y)$ が得られ, x と y を入れ替えれば,

$d(A, y) - d(A, x) \leqq d(y, x) = d(x, y)$ が得られるため, $|d(A, x) - d(A, y)| \leqq d(x, y)$ が成り立つ.

命題 12.4
(X, d) を距離空間, A を X の部分集合とすれば $\overline{A} = d_A^{-1}(\{0\})$ が成り立つ.
従って A が X の閉集合であることと, $A = d_A^{-1}(\{0\})$ は同値である.

証明

$\{0\}$ は $\boldsymbol{R}$ の閉集合で, 命題12.3から d_A は連続関数だから, 命題7.6により $d_A^{-1}(\{0\})$ は閉集合である. $x \in A$ ならば $d_A(x) = d(A, x) = 0$ だから $x \in d_A^{-1}(\{0\})$ となるので, $A \subset d_A^{-1}(\{0\})$ である. 従って命題6.14から $\overline{A} \subset d_A^{-1}(\{0\})$ である.

$x \in d_A^{-1}(\{0\})$ ならば $d(A, x) = 0$ だから任意の自然数 n に対して $d(a_n, x) < \dfrac{1}{n}$ を満たす $a_n \in A$ が存在する. このとき点列 $(a_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ は x に収束するため, 命題4.17から $x \in \overline{A}$ である. 故に $d_A^{-1}(\{0\}) \subset \overline{A}$ も成り立つので $\overline{A} = d_A^{-1}(\{0\})$ である.

$r>0$ に対し, X の部分集合 $U(A\,;r)$ を $U(A\,;r)=\{x\in X\,|\,d(A,x)<r\}$ で定める.

命題 12.5
(X,d) を距離空間, C を X のコンパクトな部分空間, O を X の開集合で, C を含むものとする. このとき $r>0$ で, $U(C\,;r)\subset O$ を満たすものが存在する.

証明
関数 $d_{X-O}:X\to\boldsymbol{R}$ の定義域を C に制限すれば, 最大値・最小値の定理から d_{X-O} は C における最小値をとり, その値を r とする. もし $r=0$ ならば $d_{X-O}(p)=0$ となる $p\in C$ をとれば, O は開集合だから $X-O$ は閉集合であることと命題12.4から $p\in d_{X-O}^{-1}(\{0\})=\overline{X-O}=X-O$ である. 従って $p\in C\cap(X-O)$ となるが, $C\subset O$ だから $C\cap(X-O)=\emptyset$ であることと矛盾が生じる. 故に $r>0$ である.

$x\in X-O$ ならば任意の $c\in C$ に対して $d(c,x)=d(x,c)\geqq d(X-O,c)\geqq r$ が成り立つため, $d(C,x)\geqq r$ である.

$x\in U(C\,;r)$ ならば $d(C,x)<r$ だから, 上の不等式から $x\notin X-O$ すなわち $x\in O$ である. よって $U(C\,;r)\subset O$ である.

定義 12.6　一様連続写像

$(X,d),(Y,d')$ を距離空間, $f\colon X\to Y$ を写像とする. 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ で条件

「$d(x,y)<\delta$ ならば $d'(f(x),f(y))<\varepsilon$」

を満たすものが存在するとき, f は一様連続であるという.

注意 12.7

距離空間 (X,d) が与えられたとき, $r>0$ に対して $X\times X$ の部分集合 $D_X(r)$ を

$$D_X(r)=\{(x,y)\in X\times X\mid d(x,y)<r\}$$

で定める.

さらに距離空間 (Y,d') と写像 $f\colon X\to Y$ が与えられたとき, $f\times f\colon X\times X\to Y\times Y$ を $(f\times f)(x,y)=(f(x),f(y))$ で定める. このとき, f が一様連続であるためには, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $(f\times f)(D_X(\delta))\subset D_Y(\varepsilon)$ が成り立つような $\delta>0$ が存在することが必要十分である.

$D_X(r)=d^{-1}((-\infty,r))$ だから, 命題7.4の(2)と命題12.2から次の結果が得られる.

補題 12.8
$r>0$ に対して $D_X(r)$ は距離空間 $(X\times X, d_1)$ における開集合である.

$X\times X$ の部分集合 Δ_X を $\Delta_X=\{(x,y)\in X\times X \mid x=y\}$ で定める.

補題 12.9
距離空間 $(X\times X, d_1)$ において, $r>0$ に対して $U(\Delta_X;r)=D_X(r)$ が成り立つ.

証明
$(x,y)\in U(\Delta_X;r)$ が $d(x,y)\geqq r$ を満たすと仮定すれば, 任意の $(z,z)\in\Delta_X$ に対して
$r\leqq d(x,y)\leqq d(x,z)+d(z,y)=d(z,x)+d(z,y)=d_1((z,z),(x,y))$ が成り立つため,
$d(\Delta_X,(x,y))=\inf\{d((z,z),(x,y)) \mid (z,z)\in\Delta_X\}\geqq r$ となって $(x,y)\in U(\Delta_X;r)$ と
矛盾する. 従って $d(x,y)<r$ だから $(x,y)\in D_X(r)$ である.
$(x,y)\in D_X(r)$ が $d(\Delta_X,(x,y))\geqq r$ を満たすと仮定すれば, $(x,x)\in\Delta_X$ に対して
$d(x,y)=d(x,x)+d(x,y)=d_1((x,x),(x,y))\geqq d(\Delta_X,(x,y))\geqq r$ となって $(x,y)\in D_X(r)$
と矛盾する. 従って $d(\Delta_X,(x,y))<r$ だから $(x,y)\in U(\Delta_X;r)$ である.

定理 12.10
$(X,d),(Y,d')$ を距離空間とし, d から定まる X の位相に関して, X はコンパクトであるとする. このとき $f\colon X\to Y$ が連続写像ならば一様連続である.

証明
$\mathrm{pr}_{X1},\mathrm{pr}_{X2}\colon X\times X\to X$, $\mathrm{pr}_{Y1},\mathrm{pr}_{Y2}\colon Y\times Y\to Y$ をそれぞれ $\mathrm{pr}_{X1}(x,y)=x$, $\mathrm{pr}_{X2}(x,y)=y$, $\mathrm{pr}_{Y1}(z,w)=z$, $\mathrm{pr}_{Y2}(z,w)=w$ で定めれば

$$(\mathrm{pr}_{Y1}\circ(f\times f))(x,y)=\mathrm{pr}_{Y1}(f(x),f(y))=f(x)=(f\circ\mathrm{pr}_{X1})(x,y),$$
$$(\mathrm{pr}_{Y2}\circ(f\times f))(x,y)=\mathrm{pr}_{Y2}(f(x),f(y))=f(y)=(f\circ\mathrm{pr}_{X2})(x,y)$$

だから $\mathrm{pr}_{Y1}\circ(f\times f)=f\circ\mathrm{pr}_{X1}$, $\mathrm{pr}_{Y2}\circ(f\times f)=f\circ\mathrm{pr}_{X2}$ が成り立つ. これらの右辺はともに連続写像だから, 命題9.8により $f\times f$ は連続写像である.

任意の $\varepsilon>0$ に対し, 補題12.8から $D_Y(\varepsilon)$ は $Y\times Y$ の開集合だから, 命題7.4の(2)から $(f\times f)^{-1}(D_Y(\varepsilon))$ は $X\times X$ の開集合である.

$(x,x)\in\Delta_X$ ならば $(f\times f)(x,x)=(f(x),f(x))\in D_Y(\varepsilon)$ だから $\Delta_X\subset(f\times f)^{-1}(D_Y(\varepsilon))$ である.

証明の続き

Δ_X は $x \mapsto (x, x)$ で与えられる X から $X \times X$ への写像の像であり, この写像は命題9.8を用いれば連続であることがわかる. 従って X がコンパクトならば命題11.9から Δ_X もコンパクトであり, 命題12.5から $\delta > 0$ で, $U(\Delta_X; \delta) \subset (f \times f)^{-1}(D_Y(\varepsilon))$ を満たすものが存在する.

故に補題12.9から $D_X(\delta) \subset (f \times f)^{-1}(D_Y(\varepsilon))$ だから $(f \times f)(D_X(\delta)) \subset D_Y(\varepsilon)$ が得られるため, $f: X \to Y$ は一様連続である.

定理11.3と定理12.10から, とくに有限閉区間で定義された実数値連続関数は一様連続である. このことを用いて有限閉区間で定義された実数値連続関数がリーマン積分可能であることが示される.