幾何学III

第1節　位相空間についての復習と補足

定義 1.1　位相空間

X を集合, $\mathcal{O}$ を X の部分集合からなる集合とする. $\mathcal{O}$ が次の3つの条件 (O1), (O2), (O3) を満たすとき $\mathcal{O}$ を X の位相といい, 対 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間という.

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

(O2) $U, V \in \mathcal{O}$ ならば $U \cap V \in \mathcal{O}$

(O3) 各 $i \in I$ に対して $O_i \in \mathcal{O}$ ならば $\displaystyle\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$

このとき, $\mathcal{O}$ の要素を X の開集合という.

定義 1.2　内部・外部・閉包・境界・近傍

$(X, \mathscr{O})$ を位相空間, A を X の部分集合, $p \in X$ とする.

(1) X の開集合 O で, $p \in O$ かつ $O \subset A$ を満たすものがあるとき, p を A の内点という. A の内点全体からなる集合を A の内部といい, A^i で表す.

(2) X の開集合 O で, $p \in O$ かつ $O \cap A = \emptyset$ を満たすものがあるとき, p を A の外点という. A の外点全体からなる集合を A の外部といい, A^e で表す.

(3) p を含む X の任意の開集合 O に対して, $O \cap A \neq \emptyset$ であるとき, p を A の触点という. A の触点全体からなる集合を A の閉包といい, $\overline{A}$ で表す.

(4) p を含む X の任意の開集合 O に対して, $O \cap A \neq \emptyset$ かつ $O \not\subset A$ であるとき, p を A の境界点という. A の境界点全体からなる集合を A の境界といい, ∂A で表す.

(5) A が $p \in A^i$ を満たすとき, A を p の近傍といい, 開集合である p の近傍を p の開近傍という.

定義 1.3　閉集合

$(X, \mathscr{O})$ を位相空間, A を X の部分集合とする. A の触点がすべて A に属するとき, A を X の閉集合という.

命題 1.4

$(X, \mathscr{O})$ を位相空間とする. X の部分集合 A が閉集合であるためには $X - A$ が開集合であることが必要十分である.

命題 1.5

位相空間 $(X, \mathscr{O})$ における閉集合全体からなる集合を $\mathscr{F}$ で表せば, 次の (C1), (C2), (C3) が成り立つ.

(C1) $X, \varnothing \in \mathscr{F}$.

(C2) $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ ならば $F_1 \cup F_2 \in \mathscr{F}$.

(C3) すべての $i \in I$ に対して $F_i \in \mathscr{F}$ ならば $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathscr{F}$.

命題 1.6

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする. X の部分集合 A, B に対して以下のことが成り立つ.

(1) A^i は A に含まれる開集合であり, O が A に含まれる開集合ならば $O \subset A^i$ である.

(2) $\overline{A}$ は A を含む閉集合であり, F が A を含む閉集合ならば $\overline{A} \subset F$ である.

(3) $\overline{A} = A^i \cup \partial A = \{p \in X \,|\, p \in O$ かつ $O \in \mathcal{O}$ ならば $A \cap O \neq \emptyset\}$

(4) $(A^i)^i = A^i,\ \ (A \cap B)^i = A^i \cap B^i,\ \ (X - A)^i = X - \overline{A}$

(5) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A},\ \ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B},\ \ \overline{X - A} = X - A^i$

(6) $X = A^i \cup \partial A \cup A^e,\ \ A^i \cap \partial A = A^i \cap A^e = \partial A \cap A^e = \emptyset$

(7) $A^e = (X - A)^i = X - \overline{A},\ \ \partial A = \overline{A} \cap (X - A^i) = \overline{A} \cap \overline{(X - A)}$

$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を写像とする.

定義 1.7　連続写像

(1) $p \in X$ とする. $f(p)$ の任意の開近傍 V に対して, p を含む X の開集合 U で, $f(U) \subset V$ を満たすものが存在するとき, f は p で連続であるという.

(2) f が X のすべての点 p で連続であるとき, f を連続写像という. X と Y の位相を明示する必要があるときは $f : X \to Y$ を $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ で表す.

命題 1.8

(1) f が $p \in X$ で連続であるためには, $f(p)$ の任意の開近傍 V に対して, p が $f^{-1}(V)$ の内点であることが必要十分である.

(2) f が連続写像であるためには, 任意の $O \in \mathcal{O}_Y$ に対して, $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$ が成り立つことが必要十分である.

命題 1.9

(1) 位相空間$(X, \mathcal{O}_X)$に対し, Xの恒等写像$id_X : (X, \mathcal{O}_X) \to (X, \mathcal{O}_X)$は連続である.

(2) $f : X \to Y$, $g : X \to Z$が連続写像ならば, 合成写像$g \circ f : X \to Z$も連続写像である.

定義 1.10　同相写像・開写像・閉写像

(1) $f : X \to Y$が連続な全単射で, fの逆写像$f^{-1} : Y \to X$も連続写像であるとき, fを同相写像または位相同型写像という. 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ から $(Y, \mathcal{O}_Y)$ への同相写像が存在するとき $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は同相であるという.

(2) $f : X \to Y$によるXの任意の開集合の像がYの開集合であるとき, fを開写像といい, $f : X \to Y$によるXの任意の閉集合の像がYの閉集合であるとき, fを閉写像という.

定義 1.11　部分空間

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間, Y を X の部分集合とするとき, Y の部分集合からなる集合 $\mathcal{O}_Y$ を

$$\mathcal{O}_Y = \{O \subset Y \mid O = U \cap Y \text{ を満たす } U \in \mathcal{O} \text{ が存在する.}\}$$

で定めれば $\mathcal{O}_Y$ は Y の位相である. $\mathcal{O}_Y$ を $(X, \mathcal{O})$ の**相対位相**, 位相空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を $(X, \mathcal{O})$ の**部分空間**または**部分位相空間**という.

以後, 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対し, X の部分集合 Y が与えられたとき, とくに断らない限り Y には $(X, \mathcal{O})$ の相対位相が与えられているものとする.

命題 1.12

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間, Y を X の部分集合, $i : Y \to X$ を包含写像とする.

(1) $i : Y \to X$ は連続写像である.

(2) 位相空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ と写像 $f : Z \to Y$ が与えられたとき, 合成写像 $i \circ f : Z \to X$ が連続写像ならば f も連続写像である.

定義 1.13　直積空間

$(X, \mathscr{O}_X), (Y, \mathscr{O}_Y)$を位相空間とする. 直積集合$X \times Y$の部分集合からなる集合$\mathscr{B}$を

$$\mathscr{B} = \{W \subset X \times Y \mid W = U \times V \text{ を満たす } U \in \mathscr{O}_X, V \in \mathscr{O}_Y \text{ が存在する.}\}$$

で定め, $\mathscr{B}$ の要素の合併集合で表される $X \times Y$ の部分集合からなる集合

$$\mathscr{O}_{X \times Y} = \left\{ O \subset X \times Y \,\middle|\, O = \bigcup_{i \in I} W_i \text{ を満たす } W_i \in \mathscr{B}\ (i \in I) \text{ が存在する.} \right\}$$

は$X \times Y$の位相である. $\mathscr{O}_{X \times Y}$を$(X, \mathscr{O}_X)$と$(Y, \mathscr{O}_Y)$の**直積位相**といい,
位相空間$(X \times Y, \mathscr{O}_{X \times Y})$を$(X, \mathscr{O}_X)$と$(Y, \mathscr{O}_Y)$の**直積空間**という.

以後, 位相空間$(X, \mathscr{O}_X)$, $(Y, \mathscr{O}_Y)$に対し, とくに断らない限り $X \times Y$ には$(X, \mathscr{O}_X)$と$(Y, \mathscr{O}_Y)$の直積位相が与えられているものとする.

命題 1.14

$(X, \mathscr{O}_X)$, $(Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間とし, 写像 $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$, $\mathrm{pr}_2 : X \times Y \to Y$ をそれぞれ $\mathrm{pr}_1(x, y) = x$, $\mathrm{pr}_2(x, y) = y$ で定める.

(1) $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$, $\mathrm{pr}_2 : X \times Y \to Y$ は連続写像である.

(2) 位相空間$(Z, \mathscr{O}_Z)$と写像$f : Z \to X \times Y$ が与えられたとき, 合成写像 $\mathrm{pr}_1 \circ f : Z \to X$ と $\mathrm{pr}_2 \circ f : Z \to Y$ が連続写像ならば f も連続写像である.

定義 1.15　位相空間の連結性

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする.

(1) X の部分集合 Y, Z が条件 $\overline{Y} \cap Z = Y \cap \overline{Z} = \emptyset$ を満たすとき, Y と Z は離れているという.

(2) X が離れている空でない2つの部分集合の合併集合にならないとき, X は連結であるという.

(3) X の任意の2点 p, q に対し, 連続写像 $\omega : [0,1] \to X$ で, $\omega(0) = p$, $\omega(1) = q$ を満たすものがあるとき $(X, \mathcal{O})$ は弧状連結であるという.

命題 1.16

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とするとき, 次の4つの条件は同値である.

(i)　$(X, \mathcal{O})$ は連結である.

(ii)　$(X, \mathcal{O})$ の開かつ閉集合は $\emptyset$ と X だけである.

(iii) $X = U \cup V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ で, U, V が開集合ならば $U = \emptyset$ または $V = \emptyset$.

(iv) $X = F \cup G$ かつ $F \cap G = \emptyset$ で, F, G が閉集合ならば $F = \emptyset$ または $G = \emptyset$.

命題 1.17
$(X, \mathscr{O}_X)$, $(Y, \mathscr{O}_Y)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を連続写像とする.
$(X, \mathscr{O}_X)$ が連結ならば f の像 $f(X)$ は Y の連結な部分空間 である.

定理 1.18　中間値の定理
$(X, \mathscr{O})$ を連結な位相空間, $f : X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする. $p, q \in X$ と実数 c が
$f(p) < c < f(q)$ を満たすとき, $f(x_0) = c$ を満たす $x_0 \in X$ が存在する.

定理 1.19
実数全体 $\boldsymbol{R}$ と区間 (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$
$(a \leqq b)$ はすべて連結である.
また, $\boldsymbol{R}$ の部分空間で連結なものは上の形のものに限る.

系 1.20
弧状連結な位相空間は連結である.

定義 1.21　コンパクト性

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次の条件を満たすとき, $(X, \mathcal{O})$ はコンパクトであるという.

$X = \bigcup_{i \in I} O_i$ を満たす X の任意の開集合の族 $(O_i)_{i \in I}$ に対し, 有限個の $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ で, $X = O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \cdots \cup O_{i_n}$ を満たすものがある.

命題 1.22

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ がコンパクトで X の部分空間 Y が閉集合ならば Y もコンパクトである.

命題 1.23

$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を連続写像とする.

$(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクトならば f の像 $f(X)$ は Y のコンパクトな部分空間である.

定義 1.24　Hausdorff 空間

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次の条件を満たすとき, $(X, \mathcal{O})$ をHausdorff空間という.

$x, y \in X$ かつ $x \neq y$ ならば $x \in U, y \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を満たす開集合 U, V が存在する.

命題 1.25

A, B をHausdorff空間 $(X, \mathcal{O})$ のコンパクトな部分空間とする $A \cap B = \emptyset$ ならば X の開集合 U, V で $A \subset U, B \subset V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を満たすものがある.
とくにHausdorff空間のコンパクトな部分空間は閉集合である.

命題 1.26

コンパクトな位相空間からHausdorff空間への連続写像は閉写像である.

命題 1.27
位相空間 $(X, \mathscr{O}_X)$, $(Y, \mathscr{O}_Y)$ がともにコンパクトならば直積空間 $(X \times Y, \mathscr{O}_{X \times Y})$ もコンパクトである.

定理 1.28　最大値・最小値の定理
コンパクトな位相空間で定義された実数値連続関数は最大値と最小値をとる.

X をユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合とする. 正の実数 r で, すべての $\boldsymbol{x} \in X$ に対して $\|\boldsymbol{x}\| \leqq r$ となるものが存在するとき X は有界であるという.

定理 1.29
ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間 X がコンパクトであるためには, X が有界な閉集合であることが必要十分である.

定義 1.30　同値関係
X を集合とするとき, $X \times X$ の部分集合 R が次の3つの条件を満たすとき, R を X の**同値関係**という.

(反射律) 任意の $x \in X$ に対して $(x, x) \in R$.

(対称律) $(x, y) \in R$ ならば $(y, x) \in R$.

(推移律) $(x, y) \in R$ かつ $(y, z) \in R$ ならば $(x, z) \in R$.

例 1.31
(1) $X = \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})$ とおいて $X \times X$ の部分集合 R を

$$R = \{((a, b), (c, d)) \in X \times X \mid ad = bc\}$$

によって定めれば, R は X の同値関係である.

(2) $Y = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ とおいて $Y \times Y$ の部分集合 S を

$$S = \{((k, l), (m, n)) \in Y \times Y \mid k + n = l + m\}$$

によって定めれば, S は Y の同値関係である.

定義 1.32　商集合・商写像

R を集合 X の同値関係とする.

$x \in X$ に対して X の部分集合 R_x を $R_x = \{y \in X \mid (x, y) \in R\}$ によって定め,

X の部分集合を要素とする集合 X/R を次のように定める.

$$X/R = \{C \subset X \mid C = R_x \text{ となる } x \in X \text{ が存在する.}\}$$

X/R を X の同値関係 R による商集合という.

また $x \in X$ に対して R_x を対応させる写像 $p : X \to X/R$ を商写像という.

注意 1.33

(1) 任意の $x \in X$ に対して $(x, x) \in R$ だから $x \in R_x$ である. 従って $R_x \neq \emptyset$ である.

(2) 商写像 $p : X \to X/R$ は全射である.

命題 1.34
R を集合 X の同値関係とする.
(1) $R_x = R_y$ と $R_x \cap R_y \neq \emptyset$ と $(x, y) \in R$ は同値である.
(2) $C \in X/R$ に対し, $x \in C$ ならば $C = R_x$ である.

証明

(1) $R_x = R_y$ ならば注意1.33の(1)から $R_x \cap R_y = R_x \neq \emptyset$ である.
$R_x \cap R_y \neq \emptyset$ ならば $z \in R_x \cap R_y$ が存在するため, $(x, z) \in R$ かつ $(y, z) \in R$ であり, 後者から対称律により $(z, y) \in R$ である. 従って推移律から $(x, y) \in R$.
$(x, y) \in R$ と仮定する. $z \in R_y$ ならば $(y, z) \in R$ だから推移律より $(x, z) \in R$, すなわち $z \in R_x$ である. $z \in R_x$ ならば $(x, z) \in R$ であり, 仮定と対称律により $(y, x) \in R$ だから, 推移律から $(y, z) \in R$, すなわち $z \in R_y$ である. 故に $R_x = R_y$.

(2) $C \in X/R$ に対して $C = R_y$ となる $y \in X$ がある. 故に $x \in C$ ならば $x \in R_y$ だから $(y, x) \in R$ である. 従って(1)から $R_y = R_x$ となるため, $C = R_x$ である.

命題 1.35
R を集合 X の同値関係, $p : X \to X/R$ を商写像とする. 写像 $f : X \to Y$ が条件

「$(x, y) \in R$ ならば $f(x) = f(y)$」

を満たすとき, 写像 $\bar{f} : X/R \to Y$ で $f = \bar{f} \circ p$ を満たすものがただ1つ存在する.

証明

任意の $C \in X/R$ に対して $x \in C$ を選べば, 命題1.34の(2)から $C = R_x$ である.
別の $y \in C$ を選べば $y \in C = R_x$ だから $(x, y) \in R$ となるため, 仮定によって
$f(x) = f(y)$ が成り立つ. 故に $f(x)$ の値は $x \in C$ である x の選び方に依存しない.

そこで写像 $\bar{f} : X/R \to Y$ を $C \in X/R$ に対して $x \in C$ を選んで $\bar{f}(C) = f(x)$ で
定めることができる. 任意の $x \in X$ に対して $x \in R_x = p(x)$ だから $\bar{f}$ の定義から,
$(\bar{f} \circ p)(x) = \bar{f}(p(x)) = \bar{f}(R_x) = f(x)$ が成り立つため, $f = \bar{f} \circ p$ である.
写像 $\tilde{f} : X/R \to Y$ も $f = \tilde{f} \circ p$ を満たすならば, $\tilde{f} \circ p = f = \bar{f} \circ p$ である. p は全射
だから $\tilde{f} = \bar{f}$ が得られるため, $f = \bar{f} \circ p$ を満たす写像 $\bar{f} : X/R \to Y$ はただ1つである.

例 1.36（命題1.35の応用）

例1.31の同値関係 R, S を考える. $X=\boldsymbol{Z}\times(\boldsymbol{Z}-\{0\})$ から有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ への写像 $f:X\to\boldsymbol{Q}$ と $Y=\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ から整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ への写像 $g:Y\to\boldsymbol{Z}$ をそれぞれ $f(a,b)=\frac{a}{b}$, $g(k,l)=k-l$ によって定めれば f, g はそれぞれ以下の条件を満たす.

$$「((a,b),(c,d))\in R \text{ ならば } f(a,b)=f(c,d)」,$$

$$「((k,l),(m,n))\in S \text{ ならば } g(k,l)=g(m,n)」$$

$p:X\to X/R$, $q:Y\to Y/S$ を商写像とすれば, 命題1.35より, 写像 $\bar{f}:X/R\to\boldsymbol{Q}$, $\bar{g}:Y/S\to\boldsymbol{Z}$ で, $f=\bar{f}\circ p$, $g=\bar{g}\circ q$ を満たすものが存在する.

f, g はともに全射だから $\bar{f}$ と $\bar{g}$ も全射である. さらに,

$$「f(a,b)=f(c,d) \text{ ならば } ((a,b),(c,d))\in R」,$$

$$「g(k,l)=g(m,n) \text{ ならば } ((k,l),(m,n))\in S」$$

が成り立つため, $\bar{f}$ と $\bar{g}$ はともに単射だから, 全単射である. 従って $\bar{f}$, $\bar{g}$ によって商集合 X/R, Y/S はそれぞれ $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Z}$ と同一視される.

命題 1.37
$(X,\mathscr{O})$ を位相空間, R を X の同値関係, $p : X \to X/R$ を商写像とする.
X/R の部分集合からなる集合 $\mathscr{O}_{X/R}$ を $\mathscr{O}_{X/R} = \{O \subset X/R \mid p^{-1}(O) \in \mathscr{O}\}$
で定めれば, $\mathscr{O}_{X/R}$ は X/R の位相である.

証明
$p^{-1}(\varnothing)=\varnothing\in\mathscr{O}$, $p^{-1}(X/R)=X\in\mathscr{O}$ だから $\varnothing, X/R\in\mathscr{O}_{X/R}$ である.
$U,V\in\mathscr{O}_{X/R}$ ならば $p^{-1}(U),p^{-1}(V)\in\mathscr{O}$ だから, $\mathscr{O}$ が X の位相であることから
$p^{-1}(U\cap V)=p^{-1}(U)\cap p^{-1}(V)\in\mathscr{O}$ である. 従って $\mathscr{O}_{X/R}$ の定義から $U\cap V\in\mathscr{O}_{X/R}$
である.
$(O_i)_{i\in I}$ を各 $i\in I$ に対して $O_i\in\mathscr{O}_{X/R}$ を満たす集合族とすれば, 各 $i\in I$ に対して
$p^{-1}(O_i)\in\mathscr{O}$ だから, $\mathscr{O}$ が X の位相であることから $p^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}O_i\right)=\bigcup_{i\in I}p^{-1}(O_i)\in\mathscr{O}$
である. 従って $\mathscr{O}_{X/R}$ の定義から $\bigcup_{i\in I}O_i\in\mathscr{O}_{X/R}$ である.
以上から $\mathscr{O}_{X/R}$ は X/R の位相である.

定義 1.38　商空間
$(X, \mathscr{O})$ を位相空間, R を X の同値関係とするとき $\mathscr{O}_{X/R}$ を R による $(X, \mathscr{O})$ の**商位相**, 位相空間 $(X/R, \mathscr{O}_{X/R})$ を R による $(X, \mathscr{O})$ の**商空間**という.

例 1.39　射影空間
$n+1$ 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の部分空間 $X = \boldsymbol{R}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ の同値関係 R を

$$R = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in X \times X \mid \boldsymbol{y} = r\boldsymbol{x} \text{ を満たす実数 } r \text{ が存在する.}\}$$

によって定める. このとき商空間 X/R を n 次元実射影空間といい, $\boldsymbol{R}P^n$ で表す.
$S^n = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ とおけば, S^n は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の有界閉集合だから定理1.29により S^n はコンパクトである. $p : \boldsymbol{R}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\} \to \boldsymbol{R}P^n$ を商写像とすれば任意の $\alpha \in \boldsymbol{R}P^n$ に対して $p(\boldsymbol{x}) = \alpha$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ が存在する. $\boldsymbol{x}' = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}$ とおけば $\boldsymbol{x}' \in S^n$ であり, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \in R$ だから $p(\boldsymbol{x}') = p(\boldsymbol{x}) = \alpha$ が成り立つため, $p(S^n) = \boldsymbol{R}P^n$ である.
従って命題1.23から $\boldsymbol{R}P^n$ はコンパクトである.

命題 1.40

$(X,\mathscr{O}), (Y,\mathscr{O}')$ を位相空間, R を X の同値関係, $p: X \to X/R$ を商写像とする. X/R に商位相を与えたとき, p は連続写像であり, 写像 $f: X/R \to Y$ が連続であることと合成写像 $f\circ p: X \to Y$ が連続であることは同値である.

証明

命題1.8の(2)と商位相の定義から p は連続写像である. 従って f が連続写像ならば命題1.9の(2)から $f\circ p$ は連続写像である. 逆に $f\circ p$ が連続であると仮定して O を Y の任意の開集合とすれば, $p^{-1}(f^{-1}(O)) = (f\circ p)^{-1}(O)$ だから, 命題1.8の(2)と $f\circ p$ の連続性により上式の左辺は X の開集合である. 故に商位相の定義から $f^{-1}(O)$ は X/R の開集合だから, 命題1.8の(2)により f は連続である.

幾何学 III

第2節　微分可能多様体の定義

位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の位相 $\mathscr{O}$ を明記する必要が無いときは $(X, \mathscr{O})$ を X と略記する.

定義 2.1　局所座標系

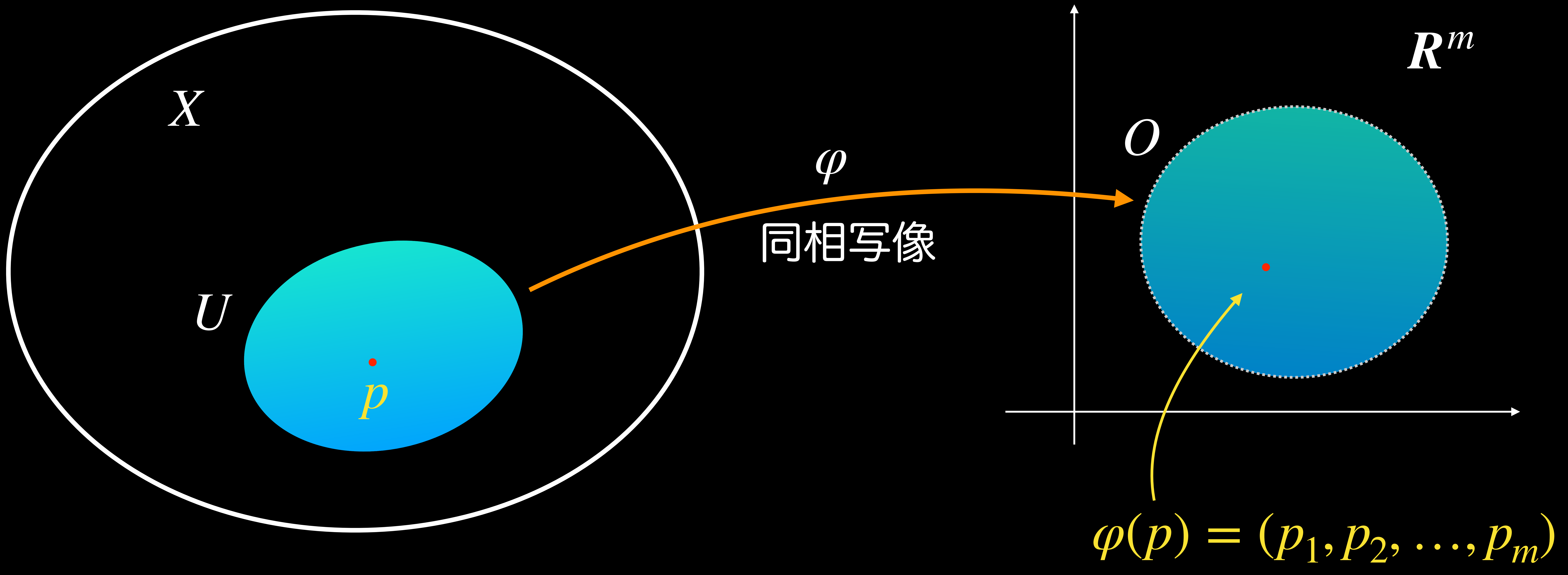
位相空間 X の開集合 U から m 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 O への同相写像 $\varphi : U \to O$ があるとき, U と φ の対 (U, φ) を X の m 次元局所座標系という.

U の点 p に対し, $\varphi(p) = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ を (U, φ) に関する p の局所座標という.

X の点 p に対し, $p \in U$ を満たす X の m 次元局所座標系 (U, φ) を p の m 次元座標近傍という.

定義 2.2　位相多様体

位相空間 M が Hausdorff 空間であり, M の各点 p に対し, p の m 次元座標近傍が存在するとき, M を m 次元位相多様体という.



局所座標系

M を m 次元位相多様体, (U,φ), (V,ψ) を M の局所座標系とする.

φ と ψ は同相写像だから, $U\cap V\neq\emptyset$ のとき, $x\in U\cap V$ を $\varphi(x)\in\varphi(U\cap V)$ に対応させる $U\cap V$ から $\varphi(U\cap V)$ への同相写像を $\varphi_V\colon U\cap V\to\varphi(U\cap V)$ で表し, $x\in U\cap V$ を $\psi(x)\in\psi(U\cap V)$ に対応させる $U\cap V$ から $\psi(U\cap V)$ への同相写像を $\psi_U : U\cap V\to\psi(U\cap V)$ で表す. この状況の下で次の定義を行う.

定義 2.3　座標変換

M を m 次元位相多様体, (U,φ), (V,ψ) を M の m 次元局所座標系とする.
$U\cap V\neq\emptyset$ のとき, 合成写像 $\psi_U\circ\varphi_V^{-1}\colon\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$ を (U,φ) から (V,ψ) への**座標変換**という.

注意 2.4

(1) $\varphi : U \to O$, $\psi : V \to Q$ とすれば, $U \cap V$ は U の開集合で, φ は $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 O への同相写像だから $\varphi(U \cap V)$ は O の開集合である. 故に $\varphi(U \cap V)$ は $\boldsymbol{R}^m$ の開集合でもある. 同様に $\psi(U \cap V)$ も $\boldsymbol{R}^m$ の開集合である. 故に (U, φ) から (V, ψ) への座標変換 $\psi_U \circ \varphi_V^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ は $\boldsymbol{R}^m$ の2つの開集合の間の同相写像である.

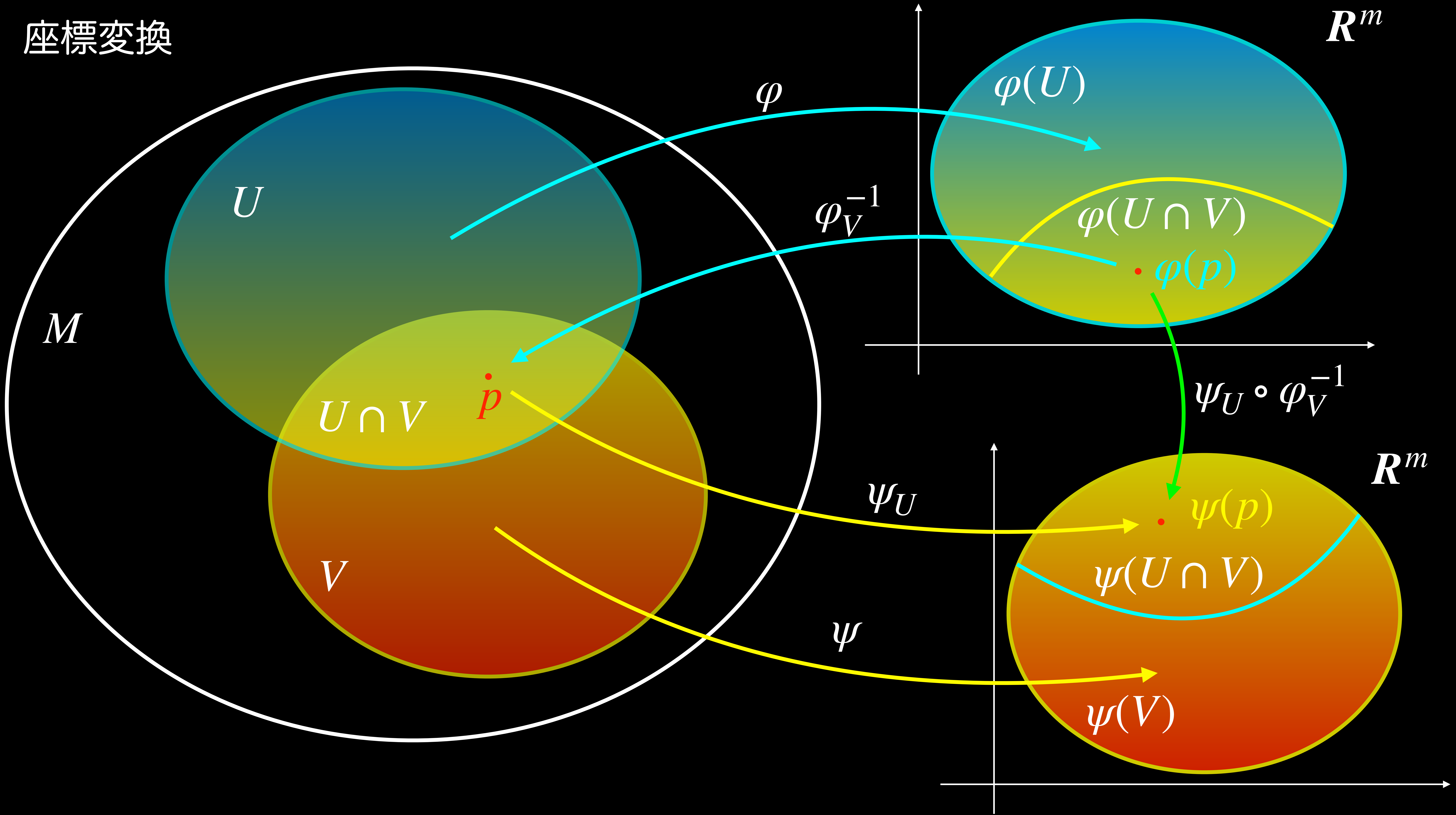
(2) $p \in U \cap V$ に対し, (U, φ) に関する p の局所座標を $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, (V, ψ) に関する p の局所座標を $(q_1, q_2, \ldots, q_m)$ とすれば, $\varphi^{-1}(p_1, p_2, \ldots, p_m) = p$ だから

$$(\psi_U \circ \varphi_V^{-1})(p_1, p_2, \ldots, p_m) = \psi(p) = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$$

が成り立つ. 従って (U, φ) から (V, ψ) への座標変換は $U \cap V$ の各点の (U, φ) に関する局所座標を (V, ψ) に関する局所座標に対応させる写像である.

(3) 記号の乱用であるが, 以後は φ_V も φ で表し, ψ_U も ψ で表すことが多い.

座標変換


$\boldsymbol{R}^m$
$\varphi(U)$
φ
U
φ_V^{-1}
$\varphi(U \cap V)$
$\varphi(p)$
M
p
$\psi_U \circ \varphi_V^{-1}$
$U \cap V$
$\boldsymbol{R}^m$
ψ_U
$\psi(p)$
V
$\psi(U \cap V)$
ψ
$\psi(V)$

例 2.5　極座標変換

$\boldsymbol{R}^2$ の開集合 U_1, U_2, U_3 を $U_1=\boldsymbol{R}\times(0,\infty)$, $U_2=\boldsymbol{R}\times(-\infty,0)$, $U_3=(0,\infty)\times\boldsymbol{R}$ で定めて $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ とおけば, 各 $(x, y)\in U$ に対し, $\cos\theta_{(x,y)} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ かつ $\sin\theta_{(x,y)} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を満たす $\theta_{(x,y)}\in(-\pi,\pi)$ は, $(x,y)\in U_1$ ならば $\theta_{(x,y)}=\cos^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y)\in U_2$ ならば $\theta_{(x,y)}=-\cos^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y)\in U_3$ ならば $\theta_{(x,y)}=\sin^{-1}\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ として1通りに定まる.

そこで $\varphi : U \to (0,\infty)\times(-\pi,\pi)$ を $\varphi(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \theta_{(x,y)}\right)$ で定める.

$V=\boldsymbol{R}^2$ とおき, $\psi : V \to \boldsymbol{R}^2$ を $\boldsymbol{R}^2$ の恒等写像とすれば, (U,φ) と (V,ψ) は $\boldsymbol{R}^2$ の局所座標系である. このとき $\varphi^{-1}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ だから, (U,φ) から (V,ψ) への座標変換 $\psi_U\circ\varphi_V^{-1} : \varphi(U\cap V)=(0,\infty)\times(-\pi,\pi)\to U=\psi(U\cap V)$ は極座標変換 $(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta, r\sin\theta)$ に他ならない.

定義 2.6　C^r 級写像

(1) U を $\boldsymbol{R}^m$ の開集合, rを自然数とする. U 上の実数値連続関数 $f : U \to \boldsymbol{R}$ が r次までのすべての偏導関数 $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} : U \to \boldsymbol{R}$ $(1 \leqq k \leqq r,\ 1 \leqq i_1, i_2, \ldots, i_k \leqq m)$ をもち, これらがすべて連続であるとき, f を C^r 級関数という.

すべての自然数 r に対して C^r 級関数である関数を C^∞ 級関数という.

また, 連続関数を C^0 級関数ということがある.

(2) r を 0 以上の整数または ∞ とし, $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 U から $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 V への写像 $f : U \to V$ が与えられているとする.

$\boldsymbol{x} \in U$ に対し $f(\boldsymbol{x}) \in V$ の第 i 成分を $f_i(\boldsymbol{x})$ とし, $\boldsymbol{x} \in U$ を $f_i(\boldsymbol{x})$ に対応させる関数 $f_i : U \to \boldsymbol{R}$ が, すべての $i = 1,2,\ldots,n$ に対して C^r 級関数であるとき, f を C^r 級写像という. さらに f が全単射で, f の逆写像も C^r 級写像であるとき, f を C^r 級微分同相写像という.

定義 2.7　微分可能多様体

r を自然数または ∞ とする.

位相空間 M が Hausdorff 空間であり, 次の条件を満たす M の m 次元局所座標系の族 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が存在するとき, M を m 次元 C^r 級微分可能多様体という.

(1) M の各点 p に対し, $p \in U_\alpha$ となる $\alpha \in A$ が存在する. すなわち $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

(2) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ を満たす任意の $\alpha, \beta \in A$ に対して $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ から (U_β, φ_β) への座標変換 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は C^r 級写像である.

注意 2.8

(U_β, φ_β) から $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ への座標変換 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ は $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ から (U_β, φ_β) への座標変換 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ の逆写像である. これらはいずれも C^r 級写像だから, C^r 級微分同相写像である.

定義2.7の条件(1), (2)を満たす M の m 次元局所座標系の族 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を M の C^r 級座標近傍系という.

以後 C^r 級微分可能多様体を略して C^r 級多様体と呼ぶことにする.

定義 2.9　開部分多様体

M は $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を C^r 級座標近傍系とする m 次元 C^r 級多様体であるとし, U を M の開集合とする. $B = \{\alpha \in A \,|\, U_\alpha \cap U \neq \emptyset\}$ とおいて, 各 $\alpha \in B$ に対し, 写像 $\varphi_\alpha^U : U_\alpha \cap U \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U)$ を $\varphi_\alpha^U(x) = \varphi_\alpha(x)$ で定めれば, U は $\{(U_\alpha \cap U, \varphi_\alpha^U)\}_{\alpha \in B}$ を C^r 級座標近傍系とする m 次元 C^r 級多様体である. U を M の開部分多様体という.

例 2.10　$\boldsymbol{R}^n$ の開集合

$\boldsymbol{R}^n$ は $\{(\boldsymbol{R}^n, id_{\boldsymbol{R}^n})\}$ を C^∞ 級座標近傍系とする n 次元 C^∞ 級多様体だから, $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U は $\{(U, id_U)\}$ を C^∞ 級座標近傍系とする $\boldsymbol{R}^n$ の開部分多様体である.

例 2.11　n 次元球面（その1）

$\boldsymbol{R}^{n+1}$ の部分集合 S^n を $S^n=\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})\in\boldsymbol{R}^{n+1}\,\middle|\,x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n+1}^2=1\right\}$ で定め, S^n を n 次元球面という. 以下で S^n が n 次元 C^∞ 級多様体であることを示す.

S^n はHausdorff空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の部分空間だから S^n もHausdorff空間である.

S^n の局所座標系を定義するために, $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の開集合 O_i^+, O_i^- $(i=1,2,\ldots,n+1)$ を

$$O_i^+=\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})\in\boldsymbol{R}^{n+1}\,\middle|\,x_i>0\right\},\ O_i^+=\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})\in\boldsymbol{R}^{n+1}\,\middle|\,x_i<0\right\}$$

で定めて, $U_i^+=S^n\cap O_i^+$, $U_i^-=S^n\cap O_i^-$ とおけば, U_i^+, U_i^- は S^n の開集合である.

$\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\ldots,p_{n+1})\in S^n$ ならば $p_i\neq 0$ となる i が存在して, $p_i>0$ ならば $\boldsymbol{p}\in U_i^+$,

$p_i<0$ ならば $\boldsymbol{p}\in U_i^-$ だから $S^n=\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n+1}(U_i^+\cup U_i^-)$ が成り立つ.

$\mathring{D}^n$ を $\boldsymbol{R}^n$ における中心が原点である半径 1 の開球とする. すなわち

$$\mathring{D}^n=\left\{(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\boldsymbol{R}^n\,\middle|\,y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2<1\right\}.$$

$\varphi_i^+ : U_i^+ \to \mathring{D}^n$, $\varphi_i^- : U_i^- \to \mathring{D}^n$ $(i = 1,2,\ldots,n+1)$ をそれぞれ次のように定義する.

$$\varphi_i^+(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_{n+1}) = (x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_{n+1})$$

$$\varphi_i^-(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_{n+1}) = (x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_{n+1})$$

このとき φ_i^+, φ_i^- の逆写像 $(\varphi_i^+)^{-1} : \mathring{D}^n \to U_i^+$, $(\varphi_i^-)^{-1} : \mathring{D}^n \to U_i^-$ は次で与えられる.

$$(\varphi_i^+)^{-1}(y_1, y_2,\ldots,y_n) = \left(y_1,\ldots,y_{i-1},\sqrt{1-y_1^2-y_2^2-\cdots-y_n^2},y_i,\ldots,y_n\right)$$

$$(\varphi_i^-)^{-1}(y_1, y_2,\ldots,y_n) = \left(y_1,\ldots,y_{i-1},-\sqrt{1-y_1^2-y_2^2-\cdots-y_n^2},y_i,\ldots,y_n\right)$$

φ_i^+, φ_i^- はともに連続で, これらの逆写像 $(\varphi_i^+)^{-1}$, $(\varphi_i^-)^{-1}$ も連続だから φ_i^+, φ_i^- は同相写像である. 以上から S^n は n 次元位相多様体である.

次に座標変換 $\varphi_j^+\circ(\varphi_i^+)^{-1}$, $\varphi_j^-\circ(\varphi_i^+)^{-1}$, $\varphi_j^+\circ(\varphi_i^-)^{-1}$, $\varphi_j^-\circ(\varphi_i^-)^{-1}$ が C^∞ 級写像であることを確かめる.

$\varphi_i^+\circ(\varphi_i^+)^{-1}$ と $\varphi_i^-\circ(\varphi_i^-)^{-1}$ は $\mathring{D}^n$ の恒等写像だから C^∞ 級写像である.

$U_i^+ \cap U_i^- = \emptyset$ だから, $(\varphi_i^+)^{-1} : \mathring{D}^n \to U_i^+$ と $\varphi_i^- : U_i^- \to \mathring{D}^n$ の合成は定義域を縮小しても定義できず, 同様に $(\varphi_i^-)^{-1} : \mathring{D}^n \to U_i^-$ と $\varphi_i^+ : U_i^+ \to \mathring{D}^n$ の合成も定義できない.

φ_j^+, φ_j^- は第 j 成分を取り除く写像だから $i \neq j$ のとき, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathring{D}^n$ に対して $(\varphi_j^+ \circ (\varphi_i^+)^{-1})(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ と $(\varphi_j^- \circ (\varphi_i^+)^{-1})(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ の各成分は y_k または $\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_n^2}$ という形であり, $(\varphi_j^+ \circ (\varphi_i^-)^{-1})(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ と $(\varphi_j^- \circ (\varphi_i^-)^{-1})(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ の各成分は y_k または $-\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_n^2}$ という形になるため, 座標変換 $\varphi_j^+ \circ (\varphi_i^+)^{-1}, \varphi_j^- \circ (\varphi_i^+)^{-1}, \varphi_j^+ \circ (\varphi_i^-)^{-1}, \varphi_j^- \circ (\varphi_i^-)^{-1}$ はすべて C^∞ 級写像である. 故に $\{(U_i^+, \varphi_i^+), (U_i^-, \varphi_i^-)\}_{i=1,2,\ldots,n+1}$ は S^n の C^∞ 級座標近傍系になるため, S^n は n 次元 C^∞ 級多様体である.

例 2.12　n 次元球面（その2）

S^n 上の点 $\boldsymbol{n} = (0,0,\ldots,0,1)$ (北極) と $\boldsymbol{s} = (0,0,\ldots,0,-1)$ (南極) を考えて,

$U_{\boldsymbol{n}} = S^n - \{\boldsymbol{n}\}$, $U_{\boldsymbol{s}} = S^n - \{\boldsymbol{s}\}$ とおけば, $U_{\boldsymbol{n}}$, $U_{\boldsymbol{s}}$ は S^n の開集合であり, $\boldsymbol{n} \in U_{\boldsymbol{s}}$

だから $S^n = U_{\boldsymbol{n}} \cup U_{\boldsymbol{s}}$ である.

各 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in U_{\boldsymbol{n}}$ と $\boldsymbol{n}$ を結ぶ「直線」のパラメータ表示は

$$\boldsymbol{n} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{n}) = (tx_1, tx_2, \ldots, tx_n, tx_{n+1} - t + 1)$$

で与えられ, この直線と方程式 $x_{n+1} = 0$ で定義される「平面」との交点の座標は

$t = \dfrac{1}{1 - x_{n+1}}$ より $\left(\dfrac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dfrac{x_2}{1-x_{n+1}}, \ldots, \dfrac{x_n}{1-x_{n+1}}, 0\right)$ である.

そこで写像 $\varphi_{\boldsymbol{n}} : U_{\boldsymbol{n}} \to \boldsymbol{R}^n$ を

$$\varphi_{\boldsymbol{n}}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \frac{x_2}{1-x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$$

によって定義する. このとき $\varphi_{\boldsymbol{n}}(U_{\boldsymbol{n}} \cap U_{\boldsymbol{s}}) = \boldsymbol{R}^n - \{\boldsymbol{0}\}$ が成り立つ.

同様に各 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in U_{\boldsymbol{s}}$ と $\boldsymbol{s}$ を結ぶ「直線」と方程式 $x_{n+1} = 0$ で定義

される「平面」との交点の座標は $\left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \frac{x_2}{1+x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}}, 0\right)$ である.

そこで写像 $\varphi_{\boldsymbol{s}} : U_{\boldsymbol{s}} \to \boldsymbol{R}^n$ を

$$\varphi_{\boldsymbol{s}}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \frac{x_2}{1+x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}}\right)$$

によって定義する. このとき $\varphi_{\boldsymbol{s}}(U_{\boldsymbol{n}} \cap U_{\boldsymbol{s}}) = \boldsymbol{R}^n - \{\boldsymbol{0}\}$ が成り立つ.

$\varphi_{\boldsymbol{n}}$ の逆写像を求めるために, 平面 $x_{n+1}=0$ 上の点 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, 0)$ と $\boldsymbol{n}$ を結ぶ

直線を考える. この直線のパラメータ表示は $\boldsymbol{n} + t(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{n}) = (ty_1, ty_2, \ldots, ty_n, 1-t)$

だから, この直線と S^n との $\boldsymbol{n}$ 以外の交点の座標は $t = \dfrac{2}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 + 1}$ より,

次のようになる.

$$\left(\frac{2y_1}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 + 1}, \frac{2y_2}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 + 1}, \ldots, \frac{2y_n}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 + 1}, \frac{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 - 1}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 + 1}\right)$$

従って $\varphi_{\boldsymbol{n}}$ の逆写像 $\varphi_{\boldsymbol{n}}^{-1} : \boldsymbol{R}^n \to U_{\boldsymbol{n}}$ は次で与えられる.

$$\varphi_{\boldsymbol{n}}^{-1}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \left(\frac{2y_1}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 + 1}, \ldots, \frac{2y_n}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 + 1}, \frac{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 - 1}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 + 1} \right)$$

同様に $\varphi_{\boldsymbol{s}}$ の逆写像 $\varphi_{\boldsymbol{s}}^{-1} : \boldsymbol{R}^n \to U_{\boldsymbol{s}}$ は次で与えられる.

$$\varphi_{\boldsymbol{s}}^{-1}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \left(\frac{2y_1}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 + 1}, \ldots, \frac{2y_n}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 + 1}, -\frac{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 - 1}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 + 1} \right)$$

$\varphi_{\boldsymbol{n}}, \varphi_{\boldsymbol{s}}, \varphi_{\boldsymbol{n}}^{-1}, \varphi_{\boldsymbol{s}}^{-1}$ はすべて連続だから, $\varphi_{\boldsymbol{n}}$ と $\varphi_{\boldsymbol{s}}$ は同相写像である.

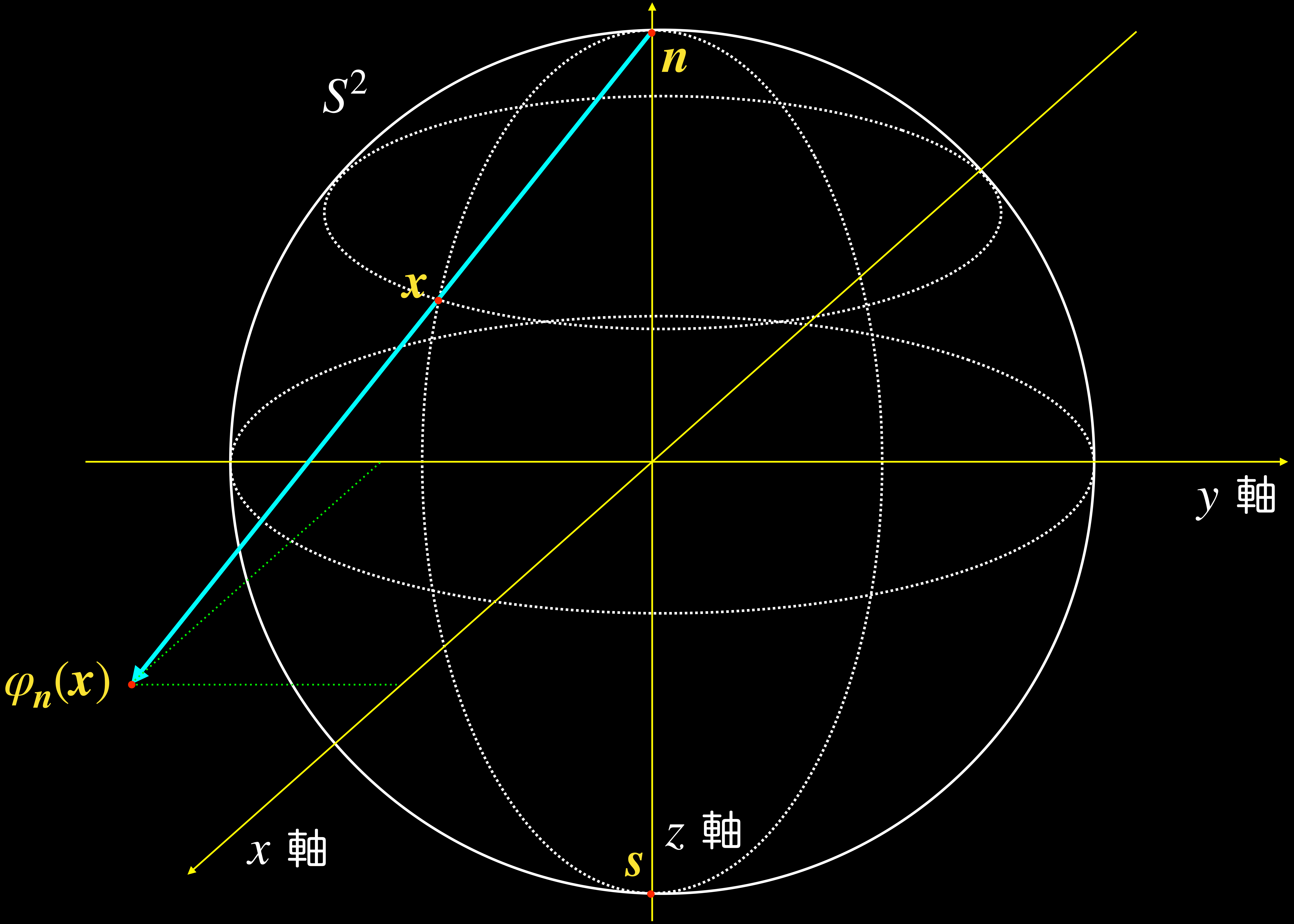
$(U_{\boldsymbol{n}}, \varphi_{\boldsymbol{n}})$ から $(U_{\boldsymbol{s}}, \varphi_{\boldsymbol{s}})$ への座標変換 $\varphi_{\boldsymbol{s}} \circ \varphi_{\boldsymbol{n}}^{-1} : \boldsymbol{R}^n - \{\boldsymbol{0}\} \to \boldsymbol{R}^n - \{\boldsymbol{0}\}$ と

$(U_{\boldsymbol{s}}, \varphi_{\boldsymbol{s}})$ から $(U_{\boldsymbol{n}}, \varphi_{\boldsymbol{n}})$ への座標変換 $\varphi_{\boldsymbol{n}} \circ \varphi_{\boldsymbol{s}}^{-1} : \boldsymbol{R}^n - \{\boldsymbol{0}\} \to \boldsymbol{R}^n - \{\boldsymbol{0}\}$ は一致して,

ともに $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ を $\left(\frac{y_1}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}, \ldots, \frac{y_i}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}, \ldots, \frac{y_n}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2} \right)$ に

写す写像である. 故にこれらの座標変換はともに C^∞ 級写像だから S^n は

$\{(U_{\boldsymbol{n}}, \varphi_{\boldsymbol{n}}), (U_{\boldsymbol{s}}, \varphi_{\boldsymbol{s}})\}$ を C^∞ 級座標近傍系とする n 次元 C^∞ 級多様体である.



S^2
$\boldsymbol{n}$
$\boldsymbol{x}$
$\varphi_n(\boldsymbol{x})$
y 軸
z 軸
x 軸
$\boldsymbol{s}$

例 2.13　射影空間

例1.39で定義したn次元実射影空間$\boldsymbol{R}P^n$に座標近傍系$\{(U_i,\varphi_i)\}_{i=1,2,\dots,n+1}$を以下のように定義する.

$p:X=\boldsymbol{R}^{n+1}-\{\boldsymbol{0}\}\to\boldsymbol{R}P^n$ を商写像として $V_i=\{(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})\in X\mid x_i\neq 0\}$ とおけば, V_i は X の開集合で $X=\bigcup_{i=1}^{n+1}V_i$ が成り立つ. $\boldsymbol{x}\in p^{-1}(p(V_i))$ ならば $\boldsymbol{x}=r\boldsymbol{y}$ を満たす$\boldsymbol{y}\in V_i$ が存在する. $\boldsymbol{y}$ の第i成分とrは0ではないので, $\boldsymbol{x}$の第i成分も0でないため, $\boldsymbol{x}\in V_i$ である. $V_i\subset p^{-1}(p(V_i))$ はつねに成り立つため, $p^{-1}(p(V_i))=V_i$ だから $U_i=p(V_i)$ とおけば, 商位相の定義から U_i は $\boldsymbol{R}P^n$ の開集合である.

$\bar{\varphi}_i:V_i\to\boldsymbol{R}^n$ を次で定める.

$$\bar{\varphi}_i(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})=\left(\frac{x_1}{x_i},\dots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\dots,\frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$$

$x\in U_i$ に対して $p(\boldsymbol{x})=x$ を満たす $\boldsymbol{x}\in X$ を選べば $p^{-1}(U_i)=p^{-1}(p(V_i))=V_i$ より $\boldsymbol{x}\in V_i$ である.

また $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}), \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_{n+1})\in V_i$ が $p(\boldsymbol{x})=p(\boldsymbol{y})=x$ を満たせば $\boldsymbol{y}=r\boldsymbol{x}$ を満たす $r\in\boldsymbol{R}$ が存在し, $r\neq 0$ である. 従って $j=1,2,\ldots,n+1$ に $x\in U_i$ に対して $p(\boldsymbol{x})=x$ を満たす $\boldsymbol{x}\in X$ の選び方によらずに一通りに定まる. そこで写像 $\varphi_i : U_i\to\boldsymbol{R}$ を, $x\in U_i$ に対して $p(\boldsymbol{x})=x$ を満たす $\boldsymbol{x}\in X$ を選んで $\varphi_i(x)=\bar{\varphi}_i(\boldsymbol{x})$ で定める. このとき $p_i : V_i\to U_i$ を $p_i(\boldsymbol{x})=p(\boldsymbol{x})$ で定めれば, $\bar{\varphi}_i=\varphi_i\circ p_i$ である. 従って $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 O に対して $p_i^{-1}(\varphi_i^{-1}(O))=(\varphi_i\circ p_i)^{-1}(O)=\bar{\varphi}_i^{-1}(O)$ だから, $\bar{\varphi}_i$ の連続性から $p_i^{-1}(\varphi_i^{-1}(O))$ は U_i の開集合になるため $p_i^{-1}(\varphi_i^{-1}(O))$ は X の開集合である.
一方, $p^{-1}(\varphi_i^{-1}(O))\subset p^{-1}(U_i)=V_i$ より

$$p_i^{-1}(\varphi_i^{-1}(O))=V_i\cap p^{-1}(\varphi_i^{-1}(\varphi_i^{-1}(O)))=p^{-1}(\varphi_i^{-1}(O))$$

だから商位相の定義から $\varphi_i^{-1}(O)$ は $\boldsymbol{R}P^n$ の開集合になるため φ_i は連続である.
$\psi_i : \boldsymbol{R}^n\to U_i$ を

$$\psi_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=p_i(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_i,\ldots,x_n)$$

で定めれば ψ_i は連続写像の合成写像だから連続である.

$x\in U_i$ に対し $p_i(\boldsymbol{x})=p(\boldsymbol{x})=x$ を満たす $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})\in V_i$ を選べば

$$(\psi_i\circ\varphi_i)(x)=\psi_i(\varphi_i(p_i(\boldsymbol{x})))=\psi_i(\bar{\varphi}_i(\boldsymbol{x}))=\psi_i\left(\frac{x_1}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,\frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$$

$$=p_i\left(\frac{x_1}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},1,\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,\frac{x_{n+1}}{x_i}\right)=p_i\left(\frac{1}{x_i}\boldsymbol{x}\right)=p_i(\boldsymbol{x})=x$$

が成り立つため $\psi_i\circ\varphi_i=id_{U_i}$ である.

$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})\in\boldsymbol{R}^n$ ならば次の等式が成り立つ.

$$(\varphi_i\circ\psi_i)(\boldsymbol{x})=\varphi_i(\psi_i(\boldsymbol{x}))=\varphi_i(p_i(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_i,\ldots,x_n))=\bar{\varphi}_i(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_i,\ldots,x_n)=\boldsymbol{x}$$

従って $\varphi_i\circ\psi_i=id_{\boldsymbol{R}^n}$ も成り立つため φ_i は同相写像で, $\varphi_i^{-1}=\psi_i$ である.

$i\neq j$ ならば $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\varphi_i(U_i\cap U_j)$ に対し次の等式が成り立つ.

$$\varphi_j(\varphi_i^{-1}(\boldsymbol{x}))=\varphi_j(\psi_i(\boldsymbol{x}))=\varphi_j(p(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_i,\ldots,x_n))=\bar{\varphi}_j(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_i,\ldots,x_n)$$

故に $\varphi_j(\varphi_i^{-1}(\boldsymbol{x}))$ は $\left(\frac{x_1}{x_j},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_j},\frac{1}{x_j},\frac{x_i}{x_j},\ldots,\frac{x_n}{x_j}\right)$ から第 j 成分を除いたものだから,

(U_i,φ_i) から (U_j,φ_j) への座標変換 $\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}$ は C^∞ 級写像である. また $\boldsymbol{R}P^n$ は Hausdorff 空間であることが確かめられるので $\boldsymbol{R}P^n$ は n 次元 C^∞ 級多様体である.

定義 2.14　積多様体

M は $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を C^r 級座標近傍系とする m 次元 C^r 級多様体であり, N は $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ を C^r 級座標近傍系とする n 次元 C^r 級多様体であるとする.

O_α, Q_β をそれぞれ $\varphi_\alpha, \psi_\beta$ の像とすれば O_α, Q_β はそれぞれ $\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n$ の開集合だから $O_\alpha \times Q_\beta$ は $\boldsymbol{R}^{m+n}$ の開集合とみなされ, $(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)(x, y) = (\varphi_\alpha(x), \psi_\beta(y))$ で定義される写像 $\varphi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \to O_\alpha \times Q_\beta$ は $(\varphi_\alpha^{-1} \times \psi_\beta^{-1})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\varphi_\alpha^{-1}(\boldsymbol{x}), \psi_\beta^{-1}(\boldsymbol{y}))$ で定義される写像 $\varphi_\alpha^{-1} \times \psi_\beta^{-1} : O_\alpha \times Q_\beta \to U_\alpha \times V_\beta$ を逆写像とする同相写像である.

このとき, 直積空間 $M \times N$ は $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}_{\alpha\in A, \beta\in B}$ を C^r 級座標近傍系とする $m+n$ 次元 C^r 級多様体である.

この多様体 $M \times N$ を M と N の**積多様体**という.

例 2.15　n 次元トーラス

n 個の C^r 級多様体 $M_1, M_2, \ldots, M_n$ が与えたれたとき, 定義2.13の構成を繰り返せば n 個の多様体の積多様体 $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ が帰納的に定義できる.

とくに $M_1 = M_2 = \cdots = M_n = S^1$ (1次元球面＝円周) の場合, 積多様体

$$\overbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}^{n\text{ 個}}$$

を n 次元トーラスと呼んで, T^n で表す.

幾何学Ⅲ

第3節　微分構造

前節では微分可能多様体の定義を行ない, m 次元球面 S^m が C^∞ 級多様体であることを例2.11と例2.12の2通りの方法で示した.

すなわち例2.11では S^m に座標近傍系 $\{(U_i^+, \varphi_i^+), (U_i^-, \varphi_i^-)\}_{i=1,2,\ldots,m+1}$ を与えて,

「座標近傍系 $\{(U_i^+, \varphi_i^+), (U_i^-, \varphi_i^-)\}_{i=1,2,\ldots,m+1}$ をもつ C^∞ 級多様体 S^m」$\cdots$ (i)

を考え, 例2.12では S^m に座標近傍系 $\{(U_n, \varphi_n), (U_s, \varphi_s)\}$ を与えて,

「座標近傍系 $\{(U_n, \varphi_n), (U_s, \varphi_s)\}$ をもつ C^∞ 級多様体 S^m」 $\cdots$ (ii)

を考えた. そこで (U, φ) を (U_i^+, φ_i^+) か (U_i^-, φ_i^-) のいずれかとし, (V, ψ) を (U_n, φ_n) か (U_s, φ_s) のいずれかとしたとき, (U, φ) から (V, ψ) への座標変換と (V, ψ) から (U, φ) への座標変換はともに C^∞ 級写像である. これは $\{(U_i^+, \varphi_i^+), (U_i^-, \varphi_i^-)\}_{i=1,2,\ldots,m+1}$ と $\{(U_n, \varphi_n), (U_s, \varphi_s)\}$ が「両立する」座標近傍系であることを意味しており, これらの座標近傍系を合わせた $\{(U_i^+, \varphi_i^+), (U_i^-, \varphi_i^-), (U_n, \varphi_n), (U_s, \varphi_s)\}_{i=1,2,\ldots,m+1}$ も S^m の C^∞ 級座標近傍系である. 従って (i) と (ii) は同じ C^∞ 級多様体と考えるのが自然である.

一方, 関数 $\varphi:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $\varphi(x)=x^3$ で定めれば φ は同相写像だから, $(\boldsymbol{R},\varphi)$ は $\boldsymbol{R}$ の1次元局所座標系であり, $\boldsymbol{R}$ は座標近傍系 $\{(\boldsymbol{R},\varphi)\}$ をもつ C^∞ 級多様体である. また, $\boldsymbol{R}$ の恒等写像 $id_{\boldsymbol{R}}:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ も同相写像だから, $(\boldsymbol{R},id_{\boldsymbol{R}})$ は $\boldsymbol{R}$ の1次元の局所座標系であり, $\boldsymbol{R}$ は座標近傍系 $\{(\boldsymbol{R},id_{\boldsymbol{R}})\}$ をもつ C^∞ 級多様体である. このとき局所座標系 $(\boldsymbol{R},\varphi)$ から $(\boldsymbol{R},id_{\boldsymbol{R}})$ への座標変換 $id_{\boldsymbol{R}}\circ\varphi^{-1}:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ は x を $x^{\frac{1}{3}}$ に写すため連続関数ではあるが 0 で微分不可能である. 従って $\{(\boldsymbol{R},\varphi),(\boldsymbol{R},id_{\boldsymbol{R}})\}$ は $\boldsymbol{R}$ の C^1 級座標近傍系ではない.

従って, 局所座標系 $(\boldsymbol{R},\varphi)$ と $(\boldsymbol{R},id_{\boldsymbol{R}})$ は「両立」しないため,

「座標近傍系 $\{(\boldsymbol{R},\varphi)\}$ をもつ C^∞ 級多様体 $\boldsymbol{R}$」と

「座標近傍系 $\{(\boldsymbol{R},id_{\boldsymbol{R}})\}$ をもつ C^∞ 級多様体 $\boldsymbol{R}$」

は「同じ C^∞ 級多様体」ではないと考えるのが自然である.

そこで, 一般の Hausdorff 空間 M に C^r 級座標近傍系 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ が与えられたとき, この座標近傍系と「両立する局所座標系」, 「両立する座標近傍系」の概念を次で定義する.

定義 3.1　座標近傍系の両立

M を Hausdorff 空間, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を M の C^r 級座標近傍系とする.

(1) M の局所座標系 (V, ψ) が次の条件を満たすとき, (V, ψ) は $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ と **両立する** という.

$U_\alpha \cap V \neq \emptyset$ を満たす任意の $\alpha \in A$ に対して $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ から (V, ψ) への座標変換は C^r 級微分同相写像である.

(2) M の C^r 級座標近傍系 $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ が次の条件を満たすとき, $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ は $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ と **両立する** (同値である)という.

任意の $\beta \in B$ に対して (V_β, ψ_β) は $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ と両立する.

注意 3.2

M の C^r 級座標近傍系 $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ が M の C^r 級座標近傍系 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ と両立するためには, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha), (V_\beta, \psi_\beta)\}_{\alpha\in A, \beta\in B}$ が M の C^r 級座標近傍系であることが必要十分である.

定義3.1をふまえて, Hausdorff 空間 M に2つの C^r 級座標近傍系 $\mathscr{S}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ と $\mathscr{T}=\{(V_\beta,\psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ が与えられた場合に定まる2つの多様体

「座標近傍系 $\mathscr{S}$ をもつ C^r 級多様体 M」と「座標近傍系 $\mathscr{T}$ をもつ C^r 級多様体 M」は, $\mathscr{S}$ と $\mathscr{T}$ が両立する場合に「同じもの」であるとみなしたいのであるが, 座標近傍系が違っていて, 見かけが違う2つのものを「同じ」とみなすときに, 数学では同値関係の考えを用いることが多い. そこで, 以下のような同値関係を考える.

M の C^r 級座標近傍系全体からなる集合を $\mathrm{Atl}^r(M)$ で表し, $\mathrm{Atl}^r(M)\times\mathrm{Atl}^r(M)$ の部分集合 R を次のように定める. (以後 M の次元を m とする.)

$$R=\{(\mathscr{S},\mathscr{T})\in\mathrm{Atl}^r(M)\times\mathrm{Atl}^r(M)\mid \mathscr{S}\text{ と }\mathscr{T}\text{ は両立する.}\}$$

補題 3.3
R は $\mathrm{Atl}^r(M)$ の同値関係である.

証明

R が定義1.30の反射律と対称律を満たすことは定義3.1と注意3.2から明らかである.
$\mathscr{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}, \mathscr{T} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}, \mathscr{U} = \{(W_\gamma, \rho_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma} \in \mathrm{Atl}^r(M)$ が $(\mathscr{S}, \mathscr{T}) \in R$ かつ $(\mathscr{T}, \mathscr{U}) \in R$ を満たすとする. $\alpha \in A, \gamma \in \Gamma$ に対し, $U_\alpha \cap W_\gamma \neq \varnothing$ であるとき,
$U_\alpha \cap W_\gamma \subset M = \bigcup_{\beta \in B} V_\beta$ より, $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap W_\gamma) = \bigcup_{\beta \in B} \varphi_\alpha(U_\alpha \cap W_\gamma \cap V_\beta)$ であり,
$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap W_\gamma \cap V_\beta)$ は $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap W_\gamma)$ の開部分集合だから $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ から (W_γ, ρ_γ) への座標変換

$$\rho_\gamma \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap W_\gamma) \to \rho_\gamma(U_\alpha \cap W_\gamma)$$

の定義域を $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap W_\gamma)$ の開部分集合 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap W_\gamma \cap V_\beta)$ に制限して得られる写像

$$(\rho_\gamma \circ \varphi_\alpha^{-1})|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap W_\gamma \cap V_\beta)} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap W_\gamma \cap V_\beta) \to \rho_\gamma(U_\alpha \cap W_\gamma \cap V_\beta)$$

が $U_\alpha \cap W_\gamma \cap V_\beta \neq \varnothing$ を満たす $\beta \in B$ に対して C^r 級写像であることを示せば,
$\rho_\gamma \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap W_\gamma) \to \rho_\gamma(U_\alpha \cap W_\gamma)$ が C^r 級写像であることが示される.

証明の続き

$x\in\varphi_\alpha(U_\alpha\cap W_\gamma\cap V_\beta)$ に対して $\psi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(x))\in\psi_\beta(U_\alpha\cap W_\gamma\cap V_\beta)$ であり, 次が成り立つ.

$$(\rho_\gamma\circ\varphi_\alpha^{-1})(x)=\rho_\gamma(\varphi_\alpha^{-1}(x))=\rho_\gamma(\psi_\beta^{-1}(\psi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(x))))=((\rho_\gamma\circ\psi_\beta^{-1})\circ(\psi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}))(x)\ \cdots(i)$$

ここで, $(\mathscr{S},\mathscr{T})\in R$ かつ $(\mathscr{T},\mathscr{U})\in R$ より $\psi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ と $\rho_\gamma\circ\psi_\beta^{-1}$ は C^r 級写像であり,

(i) より $(\rho_\gamma\circ\varphi_\alpha^{-1})|_{\varphi_\alpha(U_\alpha\cap W_\gamma\cap V_\beta)}$ は $\psi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ の定義域を $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap W_\gamma\cap V_\beta)$ に制限して得られる写像と $\rho_\gamma\circ\psi_\beta^{-1}$ の定義域を $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 $\psi_\beta(U_\alpha\cap W_\gamma\cap V_\beta)$ に制限して得られる写像の合成写像である. 故に $(\rho_\gamma\circ\varphi_\alpha^{-1})|_{\varphi_\alpha(U_\alpha\cap W_\gamma\cap V_\beta)}$ は C^r 級写像だから $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ から (W_γ,ρ_γ) への座標変換 $\rho_\gamma\circ\varphi_\alpha^{-1}$ は C^r 級写像である.

同様にして (W_γ,ρ_γ) から $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ への座標変換 $\varphi_\alpha\circ\rho_\gamma^{-1}:\rho_\gamma(U_\alpha\cap W_\gamma)\to\varphi_\alpha(U_\alpha\cap W_\gamma)$ も C^r 級写像であることが示されるため, $\mathscr{S}$ と $\mathscr{U}$ は両立する. 故に $(\mathscr{S},\mathscr{U})\in R$ だから, 推移律も成り立つ.

$\boldsymbol{R}^m$
φ_α^{-1}
$\varphi_\alpha(U_\alpha)$
$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap W_\gamma \cap V_\beta)$
U_α
M
$\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$
$\boldsymbol{R}^m$
ψ_β
$\psi_\beta(V_\beta)$
$\rho_\gamma \circ \varphi_\alpha^{-1}$
$U_\alpha \cap W_\gamma \cap V_\beta$
$\psi_\beta(U_\alpha \cap W_\gamma \cap V_\beta)$
ψ_β^{-1}
$\rho_\gamma \circ \psi_\beta^{-1}$
$\boldsymbol{R}^m$
W_γ
$\rho_\gamma(U_\alpha \cap W_\gamma \cap V_\beta)$
ρ_γ
$\rho_\gamma(W_\gamma)$

$\mathrm{Atl}^r(M)$ の R による商集合 $\mathrm{Atl}^r(M)/R$ の各要素は M の両立する C^r 級座標近傍系を全部集めた集合だから, $\mathscr{S}$ と $\mathscr{T}$ が両立する $\mathrm{Atl}^r(M)$ の要素であるとき, M と $\mathscr{S}, \mathscr{T} \in \boldsymbol{D}$ である $\mathrm{Atl}^r(M)/R$ の要素 $\boldsymbol{D}$ の対 $(M, \boldsymbol{D})$ は「座標近傍系 $\mathscr{S}$ をもつ C^r 級多様体 M」と「座標近傍系 $\mathscr{T}$ をもつ C^r 級多様体 M」を1つの要素とみなしたものと考えられる.
そこで対 $(M, \boldsymbol{D})$ を改めて C^r 級多様体と定義してもよいが, 以下で $\mathrm{Atl}^r(M)$ の構造について調べてから「微分構造」の概念を定義し, C^r 級多様体の概念を定義し直す.
$\mathrm{Atl}^r(M)$ の要素 $\mathscr{S}$ を M の C^r 級局所座標系を要素とする集合とみなせば, $\mathrm{Atl}^r(M)$ の要素の間の合併 $\cup$ と包含関係 $\subset$ が考えられる. 注意3.2で指摘したが $\mathscr{S}, \mathscr{T} \in \mathrm{Atl}^r(M)$ に対し, $\mathscr{S}$ と $\mathscr{T}$ が両立することと $\mathscr{S} \cup \mathscr{T} \in \mathrm{Atl}^r(M)$ であることは同値である.

定義 3.4
$\mathrm{Atl}^r(M)$ の要素 $\mathscr{S}$ が次の条件を満たすとき, $\mathscr{S}$ は**極大**であるという.

「$\mathscr{T} \in \mathrm{Atl}^r(M)$ が $\mathscr{T} \supset \mathscr{S}$ を満たすならば $\mathscr{T} = \mathscr{S}$ である.」

$\boldsymbol{D} \in \mathrm{Atl}^r(M)/R$ に対し, $\mathscr{M}(\boldsymbol{D}) = \displaystyle\bigcup_{\mathscr{S} \in \boldsymbol{D}} \mathscr{S}$ とおき, $\mathscr{S} \in \mathrm{Atl}^r(M)$ に対し, $\mathscr{S}$ と両立する M の C^r 級座標近傍系全体からなる集合を $\boldsymbol{D}_{\mathscr{S}}$ で表す. このとき, $\mathscr{S} \in \boldsymbol{D}_{\mathscr{S}}$ が成り立つ.

命題 3.5

(1) $\mathscr{M}(\boldsymbol{D}) \in \boldsymbol{D}$ かつ $\mathscr{M}(\boldsymbol{D})$ は極大である.

(2) $\boldsymbol{D}_{\mathscr{S}} \in \mathrm{Atl}^r(M)/R$ であり, $\mathscr{T} \in \mathrm{Atl}^r(M)$ が $\mathscr{T} \supset \mathscr{S}$ を満たせば $\mathscr{T} \subset \mathscr{M}(\boldsymbol{D}_{\mathscr{S}})$ である.

証明

(1) $\mathscr{M}(\boldsymbol{D})$ が定義2.7の条件を満たすことを確かめて, まず $\mathscr{M}(\boldsymbol{D}) \in \mathrm{Alt}^r(M)$ を示す.

注意1.33の(1)から $\boldsymbol{D} \neq \emptyset$ だから $\mathscr{T} \in \boldsymbol{D}$ を選べる. $\mathscr{T} \in \mathrm{Atl}^r(M)$ だから,
$\mathscr{T} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ とおけば, $\mathscr{T}$ は定義2.7の条件(1)を満たすので $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ が
成り立つ. $\mathscr{T} \subset \bigcup_{\mathscr{S} \in \boldsymbol{D}} \mathscr{S} = \mathscr{M}(\boldsymbol{D})$ だから $\mathscr{M}(\boldsymbol{D})$ は定義2.7の(1)の条件を満たす.

$(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathscr{M}(\boldsymbol{D})$ ならば $\mathscr{S}, \mathscr{T} \in \boldsymbol{D}$ で $(U, \varphi) \in \mathscr{S}, (V, \psi) \in \mathscr{T}$ を満たすものがある. このとき $\mathscr{S}, \mathscr{T}$ は同じ $\boldsymbol{D} \in \mathrm{Atl}^r(M)/R$ に属しているので $\mathscr{S}$ と $\mathscr{T}$ は両立して $\mathscr{S} \cup \mathscr{T} \in \mathrm{Atl}^r(M)$ が成り立ち, $\mathscr{S} \cup \mathscr{T}$ は定義2.7の(2)の条件を満たす. 故に $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathscr{S} \cup \mathscr{T}$ より, $U \cap V \neq \emptyset$ の場合, (U, φ) から (V, ψ) への座標変換は C^r 級写像となり, $\mathscr{M}(\boldsymbol{D})$ は定義2.7の条件(2)も満たすので $\mathscr{M}(\boldsymbol{D}) \in \mathrm{Alt}^r(M)$ である.

証明の続き

$\mathscr{T}\in\boldsymbol{D}$ を選べば, $\mathscr{T}\subset\bigcup_{\mathscr{S}\in\boldsymbol{D}}\mathscr{S}=\mathscr{M}(\boldsymbol{D})$ だから $\mathscr{M}(\boldsymbol{D})\cup\mathscr{T}=\mathscr{M}(\boldsymbol{D})\in\mathrm{Atl}^r(M)$ が成り立ち, $\mathscr{T}$ と $\mathscr{M}(\boldsymbol{D})$ は両立するため $(\mathscr{T},\mathscr{M}(\boldsymbol{D}))\in R$ である. 故に $\mathscr{M}(\boldsymbol{D})$ は $\mathscr{T}$ と同じ $\boldsymbol{D}$ に属する. すなわち $\mathscr{M}(\boldsymbol{D})\in\boldsymbol{D}$ である.

$\mathscr{T}\in\mathrm{Atl}^r(M)$ が $\mathscr{T}\supset\mathscr{M}(\boldsymbol{D})$ を満たせば, $\mathscr{M}(\boldsymbol{D})\in\boldsymbol{D}$ かつ $\mathscr{M}(\boldsymbol{D})\cup\mathscr{T}=\mathscr{T}\in\mathrm{Atl}^r(M)$ だから $\mathscr{T}$ と $\mathscr{M}(\boldsymbol{D})$ は両立して $(\mathscr{T},\mathscr{M}(\boldsymbol{D}))\in R$ である. 故に $\mathscr{T}$ は $\mathscr{M}(\boldsymbol{D})$ と同じ $\boldsymbol{D}$ に属する. 従って $\mathscr{T}\subset\bigcup_{\mathscr{S}\in\boldsymbol{D}}\mathscr{S}=\mathscr{M}(\boldsymbol{D})$ が成り立つため $\mathscr{T}=\mathscr{M}(\boldsymbol{D})$ である.

(2) $\boldsymbol{D}_{\mathscr{S}}\in\mathrm{Atl}^r(M)/R$ は定義1.32の商集合の定義から明らか. $\mathscr{T}\in\mathrm{Atl}^r(M)$ が $\mathscr{T}\supset\mathscr{S}$ を満たせば $\mathscr{T}\cup\mathscr{S}=\mathscr{T}\in\mathrm{Atl}^r(M)$ だから $\mathscr{S}$ と $\mathscr{T}$ は両立して $(\mathscr{T},\mathscr{S})\in R$ である. 故に $\mathscr{T}$ は $\mathscr{S}$ と同じ $\boldsymbol{D}_{\mathscr{S}}$ に属する. 故に $\mathscr{T}\subset\bigcup_{\mathscr{U}\in\boldsymbol{D}_{\mathscr{S}}}\mathscr{U}=\mathscr{M}(\boldsymbol{D}_{\mathscr{S}})$ である.

M の C^r 級座標近傍系 $\mathscr{S}$ に対して, $\mathscr{S}\in\boldsymbol{D}_{\mathscr{S}}$ だから命題3.5の(2)により $\mathscr{M}(\boldsymbol{D}_{\mathscr{S}})$ は $\mathscr{S}$ を含む最大の M の C^r 級座標近傍系である. 以上のことをふまえて次の定義を行う.

定義 3.6　微分構造

Hausdorff 空間 M の極大な C^r 級座標近傍系を M の**微分構造**といい, M と M の微分構造 $\mathscr{D}$ の対 $(M, \mathscr{D})$ を **C^r 級多様体**と呼ぶ.
M の C^r 級座標近傍系 $\mathscr{S}$ に対して $\mathscr{M}(\boldsymbol{D}_{\mathscr{S}})$ を **$\mathscr{S}$ から定まる M の微分構造**という.

$\mathscr{S}$ と $\mathscr{T}$ が Hausdorff 空間 M の両立する C^r 級座標近傍系ならば命題1.34の(1)から $\boldsymbol{D}_{\mathscr{S}} = \boldsymbol{D}_{\mathscr{T}}$ だから, $\mathscr{S}$ から定まる M の微分構造 $\mathscr{M}(\boldsymbol{D}_{\mathscr{S}})$ と $\mathscr{T}$ から定まる M の微分構造 $\mathscr{M}(\boldsymbol{D}_{\mathscr{T}})$ は一致する. 従って, $\mathscr{D} = \mathscr{M}(\boldsymbol{D}_{\mathscr{S}}) = \mathscr{M}(\boldsymbol{D}_{\mathscr{T}})$ とおけば,

「座標近傍系 $\mathscr{S}$ をもつ C^r 級多様体 M」と「座標近傍系 $\mathscr{T}$ をもつ C^r 級多様体 M」は同じ C^r 級多様体 $(M, \mathscr{D})$ を定めることになる. このことから, M の座標近傍系は M の微分構造を「生成」する「基底」に相等すると考えられる.

例えば, 開球全体の集合と有限開区間の n 個の直積がともに n 次元ユークリッド空間の通常の位相を生成する開集合の基底であるように, 一般の位相空間においても「異なる開集合の基底が同じ位相を生成する」という, 上記と似た状況がある.

例 3.7

Hausdorff空間 X が m 次元ユークリッド空間のある開集合 O と同相であるとき, $\varphi:X\to O$ を同相写像とすれば, (X,φ) は X の局所座標系である. このとき, ただ1つの局所座標系 (X,φ) からなる集合 $\{(X,\varphi)\}$ は X の C^∞ 級座標近傍系になるため, $(X,\mathscr{M}(\boldsymbol{D}_{\{(X,\varphi)\}}))$ は C^∞ 級多様体である. ただし X の微分構造 $\mathscr{M}(\boldsymbol{D}_{\{(X,\varphi)\}})$ は「得体の知れないもの」である.

例 3.8

関数 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ で定めて X を f のグラフ $\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid x\in\boldsymbol{R}, y=f(x)\}$ とする. $\varphi,\psi:X\to\boldsymbol{R}$ をそれぞれ $\varphi(x,y)=x$, $\psi(x,y)=\sqrt[3]{x}$ で定めれば, これらは同相写像で, 逆写像はそれぞれ $\varphi^{-1}(x)=(x,f(x))$, $\psi^{-1}(x)=(x^3,x^2)$ で与えられる. (X,φ) から (X,ψ) への座標変換 $\psi\circ\varphi^{-1}:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ は $\psi\circ\varphi^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ で与えられ, $\psi\circ\varphi^{-1}$ は 0 で微分不可能であるため, X の C^∞ 級座標近傍系 $\{(X,\varphi)\}$ と $\{(X,\psi)\}$ は両立しない. 故に $\{(X,\varphi)\}$ と $\{(X,\psi)\}$ から定まる X の微分構造は一致しない.

幾何学III

第4節　C^r級写像

ユークリッド空間の開集合の間の写像について定義2.6でC^r級写像の概念を定義した.
微分可能多様体は「局所的」にはユークリッド空間の開集合と同相だから, 微分可能多様体の概念はユークリッド空間の開集合を一般化したものであると考えられる.
そこで, ユークリッド空間の開集合の間のC^r級写像の概念をC^r級多様体の間のC^r級写像の概念に一般化して, C^r級多様体の間の「滑らかな」写像を定義する.

定義 4.1　座標近傍系に関するC^r級写像

Mは$\mathscr{S}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$を$C^r$級座標近傍系とする$m$次元$C^r$級多様体であり, Nは$\mathscr{T}=\{(V_\beta,\psi_\beta)\}_{\beta\in B}$を$C^r$級座標近傍系とする$n$次元$C^r$級多様体であるとする.
次の条件を満たす連続写像$f\colon M\to N$を座標近傍系$\mathscr{S}$, $\mathscr{T}$に関するC^r級写像という.

$U_\alpha\cap f^{-1}(V_\beta)\neq\emptyset$を満たす任意の$\alpha\in A$と$\beta\in B$に対して, $\boldsymbol{x}\in\varphi_\alpha(U_\alpha\cap f^{-1}(V_\beta))$を$\psi_\beta(f(\varphi_\alpha^{-1}(\boldsymbol{x})))\in\psi_\beta(V_\beta)$に写す写像$\psi_\beta\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1}\colon\varphi_\alpha(U_\alpha\cap f^{-1}(V_\beta))\to\psi_\beta(V_\beta)$は$C^r$級写像である.


M
$f^{-1}(V_\beta)$
f
N
$U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)$
U_α
V_β
φ_α
φ_α^{-1}
$\boldsymbol{R}^m$
$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$
ψ_β
$\boldsymbol{R}^n$
$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta))$
$\varphi_\alpha(U_\alpha)$
$\psi_\beta(V_\beta)$

注意 4.2

(1) $f: M \to N$ の連続性から $f^{-1}(V_\beta)$ は M の開集合だから $U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)$ も M の開集合である. また $\varphi_\alpha, \psi_\beta$ はそれぞれ $\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n$ の開集合への同相写像だから, $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)), \psi_\beta(V_\beta)$ はそれぞれ $\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n$ の開集合である.

(2) M の恒等写像 $id_M : M \to M$ は座標近傍系 $\mathscr{S}, \mathscr{S}$ に関して C^r 級写像である.

定義 4.3　C^r級写像

M, N を C^r 級多様体とし, $\mathscr{D}_M, \mathscr{D}_N$ をそれぞれ M, N の微分構造とする. このとき座標近傍系 $\mathscr{D}_M, \mathscr{D}_N$ に関する C^r 級写像 $f: M \to N$ をたんに C^r 級写像という.

定義4.1の状況の下で, $\mathscr{U}$ が $\mathscr{S}$ と両立する M の C^r 級座標近傍系で $\mathscr{V}$ が $\mathscr{T}$ と両立する N の C^r 級座標近傍系であるとき, 写像 $f: M \to N$ が座標近傍系 $\mathscr{S}, \mathscr{T}$ に関して C^r 級写像ならば, f は $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ に関しても C^r 級写像であることを示すために次の命題を示す.

命題 4.4
M は $\mathscr{S}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を C^r 級座標近傍系とする m 次元 C^r 級多様体であり, N は $\mathscr{T}=\{(V_\beta,\psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ を C^r 級座標近傍系とする n 次元 C^r 級多様体であるとする.
また M の局所座標系 (U,φ) は $\mathscr{S}$ と両立し, N の局所座標系 (V,ψ) は $\mathscr{T}$ と両立していると仮定する. $\mathscr{S},\mathscr{T}$ に関する C^r 級写像 $f\colon M\to N$ に対し, $U\cap f^{-1}(V)\neq\emptyset$ が成り立つとき, $\boldsymbol{x}\in\varphi(U\cap f^{-1}(V))$ を $\psi(f(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x})))\in\psi(V)$ に写す写像

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap f^{-1}(V))\to\psi(V)$$

は $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 $\varphi(U\cap f^{-1}(V))$ から $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 $\psi(V)$ への C^r 級写像である.

証明
$\boldsymbol{p}\in\varphi(U\cap f^{-1}(V))$ に対し, $\varphi^{-1}(\boldsymbol{p})\in U_\alpha$ となる $\alpha\in A$ と $f(\varphi^{-1}(\boldsymbol{p}))\in V_\beta$ となる $\beta\in B$ を選ぶ. このとき $\varphi(U_\alpha\cap U\cap f^{-1}(V)\cap f^{-1}(V_\beta))$ は $\boldsymbol{p}$ を含む $\boldsymbol{R}^m$ の開集合である.
$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap f^{-1}(V))\to\psi(V)$ の定義域を $\varphi(U_\alpha\cap U\cap f^{-1}(V)\cap f^{-1}(V_\beta))$ に制限した写像(以下でこの写像も $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ で表す.)が C^r 級写像であることを示せばよい.

証明の続き

f は $f^{-1}(V)\cap f^{-1}(V_\beta)$ の点を $V\cap V_\beta$ に写し, $x\in U_\alpha, y\in V_\beta$ に対して $\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(x))=x$ と $\psi_\beta^{-1}(\psi_\beta(y))=y$ が成り立ち, さらに仮定から, $\varphi_\alpha\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap U_\alpha)\to\varphi_\alpha(U\cap U_\alpha)$, $\psi\circ\psi_\beta^{-1}:\psi_\beta(V\cap V_\beta)\to\psi(V\cap V_\beta)$, $\psi_\beta\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap f^{-1}(V_\beta))\to\psi_\beta(V_\beta)$ は C^r 級写像である. $\boldsymbol{x}\in\varphi(U_\alpha\cap U\cap f^{-1}(V)\cap f^{-1}(V_\beta))$ に対して以下の等式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\boldsymbol{x}) &= \psi(f(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}))) = \psi(f(\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}))))) = \psi((f\circ\varphi_\alpha^{-1})((\varphi_\alpha\circ\varphi^{-1})(\boldsymbol{x}))) \\
&= \psi(\psi_\beta^{-1}(\psi_\beta((f\circ\varphi_\alpha^{-1})((\varphi_\alpha\circ\varphi^{-1})(\boldsymbol{x}))))) = (\psi\circ\psi_\beta^{-1})((\psi_\beta\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1})((\varphi_\alpha\circ\varphi^{-1})(\boldsymbol{x})))
\end{aligned}
$$

従って $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ は C^r 級写像の合成になるため, 主張が示された.

$$
\begin{tikzcd}
\varphi(U_\alpha\cap U\cap f^{-1}(V)\cap f^{-1}(V_\beta)) \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[d, "\varphi_\alpha\circ\varphi^{-1}"] \arrow[rrr, bend left, "\psi\circ f\circ\varphi^{-1}"] & U_\alpha\cap U\cap f^{-1}(V)\cap f^{-1}(V_\beta) \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "\varphi_\alpha"'] \arrow[d, "\text{恒等写像}"] & V\cap V_\beta \arrow[r, "\psi"] & \psi(V\cap V_\beta) \\
\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U\cap f^{-1}(V)\cap f^{-1}(V_\beta)) \arrow[r, "\varphi_\alpha^{-1}"] \arrow[rrr, bend right, "\psi_\beta\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1}"'] & U_\alpha\cap U\cap f^{-1}(V)\cap f^{-1}(V_\beta) \arrow[r, "f"] & V\cap V_\beta \arrow[r, "\psi_\beta"] \arrow[u, "\text{恒等写像}"] & \psi_\beta(V\cap V_\beta) \arrow[ul, "\psi_\beta^{-1}"'] \arrow[u, "\psi\circ\psi_\beta^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

系 4.5
M は $\mathscr{S}$ を C^r 級座標近傍系とする m 次元 C^r 級多様体, N は $\mathscr{T}$ を C^r 級座標近傍系とする n 次元 C^r 級多様体であるとする. また, $\mathscr{U}$ を $\mathscr{S}$ と両立する M の C^r 級座標近傍系, $\mathscr{V}$ を $\mathscr{T}$ と両立する N の C^r 級座標近傍系とする. $f\colon M \to N$ が $\mathscr{S}, \mathscr{T}$ に関して C^r 級写像ならば, f は $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ に関しても C^r 級写像である.

証明
$\mathscr{U} = \{(W_\gamma, \xi_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}, \mathscr{V} = \{(Z_\lambda, \zeta_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ とする.
$W_\gamma \cap f^{-1}(Z_\lambda) \neq \varnothing$ を満たす任意の $\gamma\in\Gamma$ と $\lambda\in\Lambda$ に対して, 仮定から (W_γ, ξ_γ) は $\mathscr{S}$ と両立し, $(Z_\lambda, \zeta_\lambda)$ は $\mathscr{T}$ と両立しているため, 命題4.4によって $\boldsymbol{x}\in\xi_\gamma(W_\gamma\cap f^{-1}(Z_\lambda))$ を $\zeta_\lambda(f(\xi_\gamma^{-1}(\boldsymbol{x})))\in\zeta_\lambda(Z_\lambda)$ に写す写像 $\zeta_\lambda\circ f\circ\xi_\gamma^{-1} : \xi_\gamma(W_\gamma\cap f^{-1}(Z_\lambda)) \to \zeta_\lambda(Z_\lambda)$ は C^r 級写像である. 故に f は $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ に関して C^r 級写像である.

系4.5により写像 $f\colon M \to N$ が C^r 級写像であるかどうか座標近傍系によらないので, f が M と N のある C^r 級座標近傍系に関して C^r 級写像であるとき, f は定義4.3の意味で C^r 級写像である.

命題 4.6
M, N, L を C^r 級多様体とする. C^r 級写像 $f: M \to N$ と $g: N \to L$ の合成写像 $g \circ f: M \to L$ は C^r 級写像である.

証明
$\mathscr{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, $\mathscr{T} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$, $\mathscr{U} = \{(W_\gamma, \xi_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ をそれぞれ M, N, L の C^r 級座標近傍系として $\alpha \in A, \gamma \in \Gamma$ は $U_\alpha \cap (g \circ f)^{-1}(W_\gamma) \neq \emptyset$ を満たすとする.
$N = \bigcup_{\beta \in B} V_\beta$ だから $M = \bigcup_{\beta \in B} f^{-1}(V_\beta)$ が成り立つため, 任意の $p \in U_\alpha \cap (g \circ f)^{-1}(W_\gamma)$ に対して, $p \in U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)$ となる $\beta \in B$ がある. 従って $f(p) \in V_\beta$ であり,
$g(f(p)) = (g \circ f)(p) \in W_\gamma$ より $f(p) \in g^{-1}(W_\gamma)$ だから $f(p) \in V_\beta \cap g^{-1}(W_\gamma)$ である.
このとき, $\boldsymbol{x} \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap (g \circ f)^{-1}(W_\gamma))$ を $\psi_\beta(g(f(\varphi_\alpha^{-1}(\boldsymbol{x})))) \in \psi_\beta(V_\beta)$ に写す写像
$\psi_\beta \circ g \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap (g \circ f)^{-1}(W_\gamma)) \to \xi_\gamma(W_\gamma)$ の定義域を $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap (g \circ f)^{-1}(W_\gamma))$ の開部分集合 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta) \cap (g \circ f)^{-1}(W_\gamma))$ に制限して得られる写像

$$\psi_\beta \circ g \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta) \cap (g \circ f)^{-1}(W_\gamma)) \to \xi_\gamma(W_\gamma) \cdots (i)$$

が C^r 級写像であることを示せばよい.

証明の続き

$f:M\to N$ は C^r 級写像だから $\boldsymbol{x}\in\varphi_\alpha(U_\alpha\cap f^{-1}(V_\beta))$ を $\psi_\beta(f(\varphi_\alpha^{-1}(\boldsymbol{x})))\in\psi_\beta(V_\beta)$ に写す写像 $\psi_\beta\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap f^{-1}(V_\beta))\to\psi_\beta(V_\beta)$ は C^r 級写像である. ここで

$$f^{-1}(V_\beta)\cap(g\circ f)^{-1}(W_\gamma)=f^{-1}(V_\beta)\cap f^{-1}(g^{-1}(W_\gamma))=f^{-1}(V_\beta\cap g^{-1}(W_\gamma))$$

だから $\psi_\beta\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1}$ は $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap f^{-1}(V_\beta)\cap(g\circ f)^{-1}(W_\gamma))$ の点を $\psi_\beta(V_\beta\cap g^{-1}(W_\gamma))$ に写すため, $\psi_\beta\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1}$ の定義域を $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap f^{-1}(V_\beta)\cap(g\circ f)^{-1}(W_\gamma))$ に制限すれば C^r 級写像

$$\psi_\beta\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap f^{-1}(V_\beta)\cap(g\circ f)^{-1}(W_\gamma))\to\psi_\beta(V_\beta\cap g^{-1}(W_\gamma))\cdots(ii)$$

が得られる. 一方, $g:N\to L$ は C^r 級写像だから $\boldsymbol{y}\in\psi_\beta(V_\beta\cap g^{-1}(W_\gamma))$ を $\xi_\gamma(g(\psi_\beta^{-1}(\boldsymbol{y})))\in\xi_\gamma(W_\gamma)$ に写す写像 $\xi_\gamma\circ g\circ\psi_\beta^{-1}:\psi_\beta(V_\beta\cap g^{-1}(W_\gamma))\to\xi_\gamma(W_\gamma)$ は C^r 級写像である. この写像に (ii) の写像を合成した以下の写像 (iii) は C^r 級写像で, $\boldsymbol{x}$ を $\xi_\gamma(g(\psi_\beta^{-1}(\psi_\beta(f(\varphi_\alpha^{-1}(\boldsymbol{x}))))))=\xi_\gamma(g(f(\varphi_\alpha^{-1}(\boldsymbol{x}))))$ に写すため (i) の写像に一致する.

$$(\xi_\gamma\circ g\circ\psi_\beta^{-1})\circ(\psi_\beta\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1}):\varphi_\alpha(U_\alpha\cap f^{-1}(V_\beta)\cap(g\circ f)^{-1}(W_\gamma))\to\xi_\gamma(W_\gamma)\cdots(iii)$$

定義 4.7　局所座標表示

M, N を C^r 級多様体とし, $f: M \to N$ を写像とする. (U, φ) は M の局所座標系, (V, ψ) は N の局所座標系で, $U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ が成り立つとき, $\boldsymbol{x} \in \varphi(U \cap f^{-1}(V))$ を $\psi(f(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}))) \in \psi(V)$ に写す写像

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$$

を (U, φ) と (V, ψ) に関する f の局所座標表示という.

注意 4.8

f が C^r 級写像の場合, (U, φ) が M の微分構造に含まれる M の局所座標系で, (V, ψ) が N の微分構造に含まれる N の局所座標系ならば (U, φ) と (V, ψ) に関する f の局所座標表示は C^r 級写像である.

例 4.9
写像 $f: S^3 \to S^2$ を以下の式で定める.

$$f(x,y,z,w) = \left(2(xz+yw), 2(xw-yz), x^2+y^2-z^2-w^2\right)$$

このとき $f(x,y,z,w) = (0,0,1)$ が成り立つ条件は $x^2+y^2=1,\ z=w=0$ であり,
$f(x,y,z,w) = (0,0,-1)$ が成り立つ条件は $x=y=0,\ z^2+w^2=1$ であることが
示されるため, $V_n = S^2 - \{(0,0,1)\}, V_s = S^2 - \{(0,0,-1)\}$ とおけば次の等式が成り立つ.

$$f^{-1}(V_n) = \{(x,y,z,w) \in S^3 \mid x^2+y^2<1\} \cdots (i)$$

$$f^{-1}(V_s) = \{(x,y,z,w) \in S^3 \mid z^2+w^2<1\} \cdots (ii)$$

従って $U_n = S^3 - \{(0,0,0,1)\},\ U_s = S^3 - \{(0,0,0,-1)\}$ とおけば $U_n \supset f^{-1}(V_n)$ かつ
$U_s \supset f^{-1}(V_s)$ であり, 次の等式が成り立つ.

$$U_n \cap f^{-1}(V_s) = \{(x,y,z,w) \in S^3 \mid x^2+y^2<1, w \neq 1\} \cdots (iii)$$

$$U_s \cap f^{-1}(V_n) = \{(x,y,z,w) \in S^3 \mid x^2+y^2<1, w \neq -1\} \cdots (iv)$$

例2.12で定めた S^3, S^2 の座標近傍系をそれぞれ $\{(U_n, \varphi_n), (U_s, \varphi_s)\}$,
$\{(V_n, \psi_n), (V_s, \psi_s)\}$ とする.

このとき $\varphi_{\boldsymbol{n}}^{-1}:\boldsymbol{R}^3\to U_{\boldsymbol{n}}$, $\varphi_{\boldsymbol{s}}^{-1}:\boldsymbol{R}^3\to U_{\boldsymbol{s}}$ は次で与えられる.

$$\varphi_{\boldsymbol{n}}^{-1}(x,y,z)=\left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2+1},\frac{2y}{x^2+y^2+z^2+1},\frac{2z}{x^2+y^2+z^2+1},\frac{x^2+y^2+z^2-1}{x^2+y^2+z^2+1}\right)$$

$$\varphi_{\boldsymbol{s}}^{-1}(x,y,z)=\left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2+1},\frac{2y}{x^2+y^2+z^2+1},\frac{2z}{x^2+y^2+z^2+1},-\frac{x^2+y^2+z^2-1}{x^2+y^2+z^2+1}\right)$$

$\left(\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2+1}\right)^2+\left(\dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2+1}\right)^2<1$, $\left(\dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2+1}\right)^2+\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2-1}{x^2+y^2+z^2+1}\right)^2<1$ は

それぞれ $(x^2+y^2+z^2+1)^2>4(x^2+y^2)$, $x^2+y^2>0$ と同値で, 前者は条件

「$x^2+y^2\neq 1$ または $z\neq 0$」と同値であり, 後者は条件「$x\neq 0$ または $y\neq 0$」と同値

である. そこで

$$D=\{(x,y,z)\in\boldsymbol{R}^3\,|\,x^2+y^2\neq 1 \text{ または } z\neq 0\}$$

$$E=\{(x,y,z)\in\boldsymbol{R}^3\,|\,x\neq 0 \text{ または } y\neq 0\}$$

とおけば(i), (ii), (iii), (iv)から次の等式が得られる.

$$\varphi_{\boldsymbol{n}}(U_{\boldsymbol{n}}\cap f^{-1}(V_{\boldsymbol{n}}))=\varphi_{\boldsymbol{s}}(U_{\boldsymbol{s}}\cap f^{-1}(V_{\boldsymbol{n}}))=D,\ \ \varphi_{\boldsymbol{n}}(U_{\boldsymbol{n}}\cap f^{-1}(V_{\boldsymbol{s}}))=\varphi_{\boldsymbol{s}}(U_{\boldsymbol{s}}\cap f^{-1}(V_{\boldsymbol{s}}))=E$$

$\psi_{\boldsymbol{n}}\colon V_{\boldsymbol{n}} \to \boldsymbol{R}^2$ は $\psi_{\boldsymbol{n}}(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{1-z}, \dfrac{y}{1-z}\right)$, $\psi_{\boldsymbol{s}}\colon V_{\boldsymbol{s}} \to \boldsymbol{R}^2$ は

$\psi_{\boldsymbol{s}}(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{1+z}, \dfrac{y}{1+z}\right)$ で与えられることから以下の結果が得られる.

$(U_{\boldsymbol{n}}, \varphi_{\boldsymbol{n}}), (V_{\boldsymbol{n}}, \psi_{\boldsymbol{n}})$ に関する f の局所座標表示 $\psi_{\boldsymbol{n}} \circ f \circ \varphi_{\boldsymbol{n}}^{-1}\colon D \to \boldsymbol{R}^2$ は

$$(\psi_{\boldsymbol{n}} \circ f \circ \varphi_{\boldsymbol{n}}^{-1})(x,y,z) = \left(\frac{2(y(x^2+y^2+z^2-1)+2xz)}{(x^2+y^2+z^2+1)^2-4(x^2+y^2)}, \frac{2(x(x^2+y^2+z^2-1)-2yz)}{(x^2+y^2+z^2+1)^2-4(x^2+y^2)}\right).$$

$(U_{\boldsymbol{n}}, \varphi_{\boldsymbol{n}}), (V_{\boldsymbol{s}}, \psi_{\boldsymbol{s}})$ に関する f の局所座標表示 $\psi_{\boldsymbol{s}} \circ f \circ \varphi_{\boldsymbol{n}}^{-1}\colon E \to \boldsymbol{R}^2$ は

$$(\psi_{\boldsymbol{s}} \circ f \circ \varphi_{\boldsymbol{n}}^{-1})(x,y,z) = \left(\frac{y(x^2+y^2+z^2-1)+2xz}{2(x^2+y^2)}, \frac{x(x^2+y^2+z^2-1)-2yz}{2(x^2+y^2)}\right).$$

$(U_{\boldsymbol{s}}, \varphi_{\boldsymbol{s}}), (V_{\boldsymbol{n}}, \psi_{\boldsymbol{n}})$ に関する f の局所座標表示 $\psi_{\boldsymbol{n}} \circ f \circ \varphi_{\boldsymbol{s}}^{-1}\colon D \to \boldsymbol{R}^2$ は

$$(\psi_{\boldsymbol{n}} \circ f \circ \varphi_{\boldsymbol{s}}^{-1})(x,y,z) = \left(\frac{2(-y(x^2+y^2+z^2-1)+2xz)}{(x^2+y^2+z^2+1)^2-4(x^2+y^2)}, \frac{2(-x(x^2+y^2+z^2-1)-2yz)}{(x^2+y^2+z^2+1)^2-4(x^2+y^2)}\right).$$

$(U_{\boldsymbol{s}}, \varphi_{\boldsymbol{s}}), (V_{\boldsymbol{s}}, \psi_{\boldsymbol{s}})$ に関する f の局所座標表示 $\psi_{\boldsymbol{s}} \circ f \circ \varphi_{\boldsymbol{s}}^{-1}\colon E \to \boldsymbol{R}^2$ は

$$(\psi_{\boldsymbol{s}} \circ f \circ \varphi_{\boldsymbol{s}}^{-1})(x,y,z) = \left(\frac{-y(x^2+y^2+z^2-1)+2xz}{2(x^2+y^2)}, \frac{-x(x^2+y^2+z^2-1)-2yz}{2(x^2+y^2)}\right).$$

とくに断らない限り, 実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ は局所座標系 $(\boldsymbol{R}, id_{\boldsymbol{R}})$ と両立する微分構造をもつ C^r 級多様体 $(1 \leqq r \leqq \infty)$ とする.

定義 4.10　C^r級関数

M を C^r 級多様体とする. C^r 級写像である M 上の実数値関数 $\varphi : M \to \boldsymbol{R}$ を M 上の C^r 級関数という.

注意 4.11

M 上の C^r 級関数全体からなる集合を $C^r(M)$ で表せば, 関数の和, 積, 実数倍によって $C^r(M)$ は $\boldsymbol{R}$-代数である. また, M の開集合 U を M の開部分多様体(定義2.9)とみなせば, U 上の C^r 級関数全体からなる $\boldsymbol{R}$-代数 $C^r(U)$ が得られる.

C^r 級写像 $f: M \to N$, N の開集合 V と $U \subset f^{-1}(V)$ を満たす M の開集合 U が与えられたとき, $\varphi \in C^r(V)$ に対して $x \in U$ を $\varphi(f(x))$ に対応させる関数を $f^*(\varphi)$ で表せば命題4.8により $f^*(\varphi)$ は $C^r(U)$ の要素になるため, $\varphi \in C^r(V)$ を $f^*(\varphi) \in C^r(U)$ に対応させる写像 $f^* : C^r(V) \to C^r(U)$ が定義され, これは $\boldsymbol{R}$-代数の準同形写像である.

定義 4.12　微分同相写像
M, N を m 次元 C^r 級多様体とする. C^r 級写像 $f\colon M \to N$ が全単射で f の逆写像 $f^{-1}\colon N \to M$ も C^r 級写像であるとき, f を C^r 級微分同相写像という.

注意 4.13
C^r 級多様体 M に2つの微分構造 $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2$ が与えられたとき, $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_2$ であるためには M の恒等写像が C^r 級微分同相写像であることが必要十分である.

例 4.14
関数 $\varphi\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $\varphi(x) = x^3$ で定め, 座標近傍系 $\{(\boldsymbol{R}, \varphi)\}$ から定まる微分構造をもつ C^∞ 級多様体 $\left(\boldsymbol{R}, \mathscr{M}\left(D_{\{(\boldsymbol{R},\varphi)\}}\right)\right)$ を考えれば, $\boldsymbol{R}$ の通常の座標近傍系 $\{(\boldsymbol{R}, id_{\boldsymbol{R}})\}$ は $\{(\boldsymbol{R}, \varphi)\}$ と両立しないため $\mathscr{M}\left(D_{\{(\boldsymbol{R},\varphi)\}}\right)$ は $\boldsymbol{R}$ の通常の微分構造 $\mathscr{M}\left(D_{\{(\boldsymbol{R},id_{\boldsymbol{R}})\}}\right)$ とは異なる. 一方, $(\boldsymbol{R}, id_{\boldsymbol{R}})$ と $(\boldsymbol{R}, \varphi)$ に関する φ の局所座標表示は $\boldsymbol{R}$ の恒等写像になるため, φ は $\left(\boldsymbol{R}, \mathscr{M}\left(D_{\{(\boldsymbol{R},id_{\boldsymbol{R}})\}}\right)\right)$ から $\left(\boldsymbol{R}, \mathscr{M}\left(D_{\{(\boldsymbol{R},\varphi)\}}\right)\right)$ への C^∞ 級微分同相写像である.

幾何学III

第5節　接ベクトル空間（その1）

ユークリッド空間の開集合の間の微分可能な写像に対して，線形写像の階数の概念を一般化できるが，そのために写像の微分についておさらいする．

定義 5.1　写像の微分と方向微分

U, V をそれぞれ $\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m$ の開集合，$\boldsymbol{p} \in U$ とし，$f : U \to V$ が与えられているとする．

(1) $m \times n$ 行列 A で次の等式を満たすものがあるとき，f は $\boldsymbol{p}$ で微分可能であるという．

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - (f(\boldsymbol{p}) + A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}))}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|} = \boldsymbol{0}$$

(2) $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して次の極限が存在するとき，f は $\boldsymbol{p}$ で $\boldsymbol{v}$ 方向に微分可能であるという．

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{p})}{t}$$

上の極限を f の $\boldsymbol{p}$ における $\boldsymbol{v}$ 方向の微分という．

注意 5.2
写像 $f: U \to V$, $m \times n$ 行列 A, $\boldsymbol{p} \in U$ に対して写像 $\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}: U \to \boldsymbol{R}^m$ を次のように定める.

$$\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{f(\boldsymbol{x}) - (f(\boldsymbol{p}) + A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}))}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|} & \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} \end{cases}$$

このとき, A が定義5.1の(1)の条件を満たすことは $\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}$ が $\boldsymbol{p}$ で連続であることと同値であり, $\boldsymbol{x} \in U$ に対して次の等式が成り立つ.

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p}) + A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}) + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| \varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})$$

命題 5.3
$m \times n$ 行列 A が定義5.1の(1)の条件を満たすとき, $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して次の等式が成り立つ.

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{p})}{t} = A\boldsymbol{v}$$

証明

注意5.2から $\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}\in U$ を満たす $t\in\boldsymbol{R}$ に対して次の等式が成り立つ.

$$f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{p}) + tA\boldsymbol{v} + |t|\|\boldsymbol{v}\|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})$$

従って次の等式が成り立つ.

$$\left\|\frac{f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{p})}{t} - A\boldsymbol{v}\right\| = \left\|\frac{|t|}{t}\|\boldsymbol{v}\|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(t\boldsymbol{v})\right\| = \|\boldsymbol{v}\|\|\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})\|$$

$t\to 0$ のとき $\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}\to\boldsymbol{p}$ だから, 仮定と注意5.2から $\lim_{t\to 0}\varepsilon_{f,A,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ である.

故に $t\to 0$ のとき, 上の等式の右辺は0に近づくため $\lim_{t\to 0}\left\|\frac{f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{p})}{t} - A\boldsymbol{v}\right\|=0$ が成り立つ. よって $\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{p})}{t} = A\boldsymbol{v}$ である.

写像 $f:U\to V$ が与えられたとき, $\boldsymbol{x}\in U$ に対して $f(\boldsymbol{x})$ の第 i 成分を $f_i(\boldsymbol{x})$ で表して, $\boldsymbol{x}\in U$ を $f_i(\boldsymbol{x})$ に対応させる関数 $f_i:U\to\boldsymbol{R}$ を考える. $\boldsymbol{R}^n$ の標準基底を $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ として, A が定義5.1の(1)の条件を満たすならば命題5.3から $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{e}_j)-f(\boldsymbol{p})}{t}=A\boldsymbol{e}_j$ である. この等式の左辺の第 i 成分は $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f_i(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{e}_j)-f_i(\boldsymbol{p})}{t}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ であり, 左辺の第 i 成分は A の (i,j) 成分だから次の結果が得られる.

系 5.4
f が $\boldsymbol{p}$ で微分可能ならば定義5.1の(1)の条件を満たす $m\times n$ 行列 A は1通りに定まり, その (i,j) 成分は $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ に等しい.

上の結果をふまえて次の定義をする.

定義 5.5　微分可能な写像の微分と階数
f が $\boldsymbol{p}$ で微分可能であるとき, (i,j) 成分が $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ である $m\times n$ 行列を f の $\boldsymbol{p}$ における微分といい, $f'(\boldsymbol{p})$ で表す. $f'(\boldsymbol{p})$ の階数を f の $\boldsymbol{p}$ における階数といい, $\mathrm{rank}_{\boldsymbol{p}}\, f$ で表す.

命題 5.6

U を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合とし, 写像 $f: U \to \boldsymbol{R}^m$ と関数 $\varphi: U \to \boldsymbol{R}$ はともに $\boldsymbol{p} \in U$ で微分可能とする. 写像 $F: U \to \boldsymbol{R}^m$ を $F(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x})$ で定めれば次の等式が成り立つ.

$$F'(\boldsymbol{p}) = f(\boldsymbol{p})\varphi'(\boldsymbol{p}) + \varphi(\boldsymbol{p}) f'(\boldsymbol{p})$$

証明

積の微分の公式から $F'(\boldsymbol{p})$ の (i, j) 成分は

$$\frac{\partial \varphi f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}) f_i(\boldsymbol{p}) + \varphi(\boldsymbol{p}) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$$

であり, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}) f_i(\boldsymbol{p})$ は $f(\boldsymbol{p})\varphi'(\boldsymbol{p})$ の (i, j) 成分, $\varphi(\boldsymbol{p}) \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{p})$ は $\varphi(\boldsymbol{p}) f'(\boldsymbol{p})$ の (i, j) 成分

だから主張が成り立つ.

本節ではm次元C^r級多様体上の各点に対して「接ベクトル空間」と呼ばれるm次元ベクトル空間で, 曲線の接線や局面の接平面を一般化する概念を定義する.
そのためにまず曲線の接ベクトルについて考える.

Iを開区間とし, C^r級写像$\boldsymbol{x}:I\to\boldsymbol{R}^n$を$\boldsymbol{R}^n$の$C^r$級曲線という. $\boldsymbol{x}$上の点$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{x}(c)$に対して $\lim_{t\to c}\dfrac{\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(c)}{t-c}$ を$\boldsymbol{p}$における$\boldsymbol{x}$の接ベクトルと呼んで$\boldsymbol{x}'(c)$で表す. $\boldsymbol{x}'(c)\neq\boldsymbol{0}$のとき, $\boldsymbol{x}'(c)$で生成される$\boldsymbol{R}^n$の1次元部分空間を$\boldsymbol{p}$における$\boldsymbol{x}$の接ベクトル空間または接空間という.

次にm次元C^r級多様体Mがm次元球面のように, 十分高い次元のユークリッド空間$\boldsymbol{R}^N$に「滑らかに」埋め込まれている状況について考える. すなわちMは$\boldsymbol{R}^N$の部分空間であり, Mの任意の局所座標系(U,φ)は次の条件$(*)$を満たすとする.

$(*)$ 任意の$\boldsymbol{p}\in\varphi(U)$に対して$\varphi^{-1}:\varphi(U)\to U$と包含写像$i_U:U\to\boldsymbol{R}^N$の合成写像$i_U\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\boldsymbol{R}^N$の$\boldsymbol{p}$における階数は$m$である.

条件$(*)$の下で, $p\in M$ における接ベクトル空間は次のように定義される.

局所座標系(U,φ)で, $p\in U$ となるものを選んで, $\varphi(p)=\boldsymbol{c}$ とおく.

$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\dots,\boldsymbol{e}_m$ を $\boldsymbol{R}^m$ の標準基底として, 次の条件が満たされるように $\varepsilon>0$ を選ぶ.

「$|t|<\varepsilon$ ならば $j=1,2,\dots,m$ に対して $\boldsymbol{c}+t\boldsymbol{e}_j\in\varphi(U)$」

$\boldsymbol{R}^N$ の C^r 級曲線 $\boldsymbol{x}_j:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\boldsymbol{R}^N$ を $\boldsymbol{x}_j(t)=(i_U\circ\varphi^{-1})(\boldsymbol{c}+t\boldsymbol{e}_j)$ で定めると, $\boldsymbol{x}_j$ は p を通る M 上の曲線で, 命題5.3から曲線 $\boldsymbol{x}_j$ の点 p における接ベクトルに関して

$$\boldsymbol{x}_j'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{\boldsymbol{x}_j(t)-\boldsymbol{x}_j(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(i_U\circ\varphi^{-1})(\boldsymbol{c}+t\boldsymbol{e}_j)-(i_U\circ\varphi^{-1})(\boldsymbol{c})}{t}=(i_U\circ\varphi^{-1})'(\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{e}_j$$

が得られる. $(i_U\circ\varphi^{-1})'(\boldsymbol{c})$ の階数は m だから, 上の等式から $\boldsymbol{x}_1'(0),\boldsymbol{x}_2'(0),\dots,\boldsymbol{x}_m'(0)$ は1次独立である. このとき, $\boldsymbol{x}_1'(0),\boldsymbol{x}_2'(0),\dots,\boldsymbol{x}_m'(0)$ で生成される $\boldsymbol{R}^N$ の m 次元部分空間を M の p における接ベクトル空間と定義する.

上で述べた M の p における接ベクトル空間の定義が p を含む局所座標系 (U, φ) の選び方に依存しないことは, 合成写像の微分法の公式を用いれば証明できるが, この定義は M がユークリッド空間に埋め込まれていることを前提として, M の点 p を通る曲線 $\boldsymbol{x}_j$ の微分 $\boldsymbol{x}_j'(0)$ がベクトルとして得られることを用いているので, 一般の微分可能多様体に拡張することは困難である.

M が一般の m 次元 C^r 級多様体のとき, C^r 級写像 $\omega : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ で $\omega(0) = p$ を満たすものを, p を通る M 上の C^r 級曲線と呼ぶ. このとき $\omega'(0)$ は考えられないので, この曲線から直接 p における M の接ベクトルを定義することはできないが, もしも p における M の接ベクトル $\boldsymbol{v}$ があれば, p の近傍で定義されている実数値関数に対して,「$\boldsymbol{v}$ 方向の微分」が定義されるはずなので, ここではまず p を通る M 上の C^r 級曲線を用いて,「$\boldsymbol{v}$ 方向の微分」の代わりになる概念を定義し, それをもとに p における M の接ベクトルの概念の定義のやり方を考えてゆくことにする.

本節ではとくに断らない限り, M を m 次元 C^r 級多様体とする.

定義 5.7
$\omega:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ を p を通る M 上の C^r 級曲線とする. p の開近傍 U に対して ε を $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\omega^{-1}(U)$ となるように取り直す. U 上の C^r 級関数 f に対し, 合成関数 $f\circ\omega:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\boldsymbol{R}$ の 0 における微分係数 $(f\circ\omega)'(0)$ を f の ω に沿った p における方向微分という.

注意 5.8
(1) M が m 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^m$ の場合, $\boldsymbol{p},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^m$ に対して $\omega:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\boldsymbol{R}^m$ を $\omega(t)=\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{v}$ で定めた場合, $(f\circ\omega)'(0)$ は定義5.1の(2)で定義した f の $\boldsymbol{p}$ における $\boldsymbol{v}$ 方向の微分に他ならない.
(2) 注意4.13の記号を使えば, ω は $f\in C^r(U)$ を $(f\circ\omega)'(0)\in\boldsymbol{R}$ に対応させる関数 $C^r(U)\to\boldsymbol{R}$ を定義している. この関数を $D_{\omega,U}$ で表して, 以下でその性質を調べる.

M の開集合 U, V が $V \subset U$ を満たすとき, $f \in C^r(U)$ の定義域を V に制限して得られる V 上の C^r 級関数を $f|_V$ で表す. $f \in C^r(U)$ を $f|_V \in C^r(V)$ に対応させる写像を

$$\rho_V^U : C^r(U) \to C^r(V)$$

で表せば, $f, g \in C^r(U)$, $a, b \in \boldsymbol{R}$ に対して次の等式が成り立つ.

$$\rho_V^U(af + bg) = a\rho_V^U(f) + b\rho_V^U(g), \qquad \rho_V^U(fg) = \rho_V^U(f)\rho_V^U(g)$$

命題 5.9

p を M の点とし, $\omega : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ を p を通る M 上の C^r 級曲線とする.

(1) p の開近傍 U, V が $V \subset U$ を満たすとき, $D_{\omega,U} = D_{\omega,V} \circ \rho_V^U : C^r(U) \to \boldsymbol{R}$ である.

(2) U, V を p の開近傍, $f \in C^r(U)$, $g \in C^r(V)$ とする. p の開近傍 W で $W \subset U \cap V$ かつ $f|_W = g|_W$ を満たすものがあれば $D_{\omega,U}(f) = D_{\omega,V}(g)$ である.

(3) U を p の開近傍, $f, g \in C^r(U)$, $a, b \in \boldsymbol{R}$ とするとき, 以下の等式が成り立つ.

$$D_{\omega,U}(af + bg) = aD_{\omega,U}(f) + bD_{\omega,U}(g)$$
$$D_{\omega,U}(fg) = D_{\omega,U}(f)g(p) + f(p)D_{\omega,U}(g)$$

証明

(1) $(-\varepsilon', \varepsilon') \subset \omega^{-1}(V)$ を満たす $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ をとれば, $f \in C^r(U)$ と $t \in (-\varepsilon', \varepsilon')$ に対して $(f|_V \circ \omega)(t) = (f|_V)(\omega(t)) = f(\omega(t)) = (f \circ \omega)(t)$ だから次の等式を得る.

$$(D_{\omega,V} \circ \rho_V^U)(f) = (D_{\omega,V}(\rho_V^U(f)) = D_{\omega,V}(f|_V) = (f|_V \circ \omega)'(0) = (f \circ \omega)'(0) = D_{\omega,U}(f)$$

(2) 仮定から $\rho_W^U(f) = \rho_W^V(g)$ だから(1)の結果から次の等式を得る.

$$D_{\omega,U}(f) = (D_{\omega,W} \circ \rho_W^U)(f) = D_{\omega,W}(f|_W) = D_{\omega,W}(g|_W) = (D_{\omega,W} \circ \rho_W^V)(g) = D_{\omega,V}(g)$$

(3) $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して以下の等式が成り立つ.

$$((af + bg) \circ \omega)(t) = (af + bg)(\omega(t)) = af(\omega(t)) + bg(\omega(t)) = a(f \circ \omega)(t) + b(g \circ \omega)(t)$$
$$((fg) \circ \omega)(t) = (fg)(\omega(t)) = f(\omega(t))g(\omega(t)) = (f \circ \omega)(t)(g \circ \omega)(t)$$

これらの両辺の関数の $t = 0$ における微分係数を考えれば以下の等式が得られる.

$$D_{\omega,U}(af + bg) = ((af + bg) \circ \omega)'(0) = a(f \circ \omega)'(0) + b(g \circ \omega)(0) = aD_{\omega,U}(f) + bD_{\omega,U}(g)$$
$$\begin{aligned} D_{\omega,U}(fg) &= ((fg) \circ \omega)'(0) = (f \circ \omega)'(0)(g \circ \omega)(0) + (f \circ \omega)(0)(g \circ \omega)'(0) \\ &= D_{\omega,U}(f)g(p) + f(p)D_{\omega,U}(g) \end{aligned}$$

$\omega:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$, $\chi:(-\eta,\eta)\to M$ を M の点 p を通る M 上の C^r 級曲線とする.
$M=\boldsymbol{R}^m$ の場合, p の開近傍 U で定義された任意の C^r 級関数 f に対して, 合成写像の微分法から次の等式が成り立つ.

$$D_{\omega,U}(f)=(f\circ\omega)'(0)=f'(\omega(0))\omega'(0)=f'(p)\omega'(0)$$

$$D_{\chi,U}(f)=(f\circ\chi)'(0)=f'(\omega(0))\chi'(0)=f'(p)\chi'(0)$$

ω と χ の p における接ベクトルが一致するとは $\omega'(0)=\chi'(0)$ が成り立つことであるが, このことは $D_{\omega,U}=D_{\chi,U}$ が成り立つことと同値である. 実際 $\omega'(0)=\chi'(0)$ ならば上式から任意の $f\in C^r(U)$ に対して $D_{\omega,U}(f)=D_{\chi,U}(f)$ が成り立つ. 逆に $D_{\omega,U}=D_{\chi,U}$ ならば $x\in U$ に対して x の第 j 成分($j=1,2,\ldots,m$)を対応させる関数を f とすれば, $f'(p)$ は $(1,j)$ 成分だけが 1 で, 他の成分はすべて 0 である $1\times m$ 行列だから, $D_{\omega,U}(f)=f'(p)\omega'(0)$ は $\omega'(0)$ の第 j 成分, $D_{\chi,U}(f)=f'(p)\chi'(0)$ は $\chi'(0)$ の第 j 成分である. 従って $D_{\omega,U}(f)=D_{\chi,U}(f)$ から $\omega'(0)=\chi'(0)$ が得られる.

以上の考察から, M が一般の C^r 級多様体の場合は, 点 p を通る M 上の C^r 級曲線 ω が定める関数 $D_{\omega,U}\colon C^r(U)\to\boldsymbol{R}$ が M の p における接ベクトルの実体(に近いもの)を表していると考えられる. しかしながら, 本来 p における接ベクトルは p の開近傍 U の選び方によらずに定義されるべきものであるので, 接ベクトルの概念をきちんと定義するにはもう一工夫をする必要がある.

M の点 p の開近傍全体からなる集合を $\mathcal{N}_p$ で表すとき, p を通る M 上の C^r 級曲線 ω から関数の族 $(D_{\omega,U}\colon C^r(U)\to\boldsymbol{R})_{U\in\mathcal{N}_p}$ が得られるが, 命題5.9の(1)と(2)の結果を手がかりにして, 以下で $\boldsymbol{R}$-代数 $C^r(p)$ を定義する.

まず, 集合族 $(C^r(U))_{U\in\mathcal{N}_p}$ の(交わらない)合併集合 $\displaystyle\coprod_{U\in\mathcal{N}_p} C^r(U)$ を $\overline{C}^r(p)$ とおき, 次の条件を満たす $\overline{C}^r(p)$ の要素の対 (f,g) 全体の集合を R とする.

「$f\in C^r(U), g\in C^r(V)$ のとき, $W\subset U\cap V$ かつ $f|_W=g|_W$ を満たす $W\in\mathcal{N}_p$ がある.」

要するに R は p の十分小さい開近傍に定義域を制限すれば同じ関数になるような, p の開近傍上の C^r 級関数の対全体の集合である.

補題 5.10
R は $\overline{C^r}(p)$ における同値関係である.

証明
$f\in\overline{C^r}(p)$ に対し, $f\in C^r(U)$ を満たす $U\in\mathcal{N}_p$ をとれば, $f|_U=f|_U$ だから $(f,f)\in R$ となり, 反射律が成り立つ.
$f,g\in\overline{C^r}(p)$ が $(f,g)\in R$ を満たすとする. $f\in C^r(U)$, $g\in C^r(V)$ を満たす $U,V\in\mathcal{N}_p$ をとれば, $W\subset U\cap V$ かつ $f|_W=g|_W$ を満たす $W\in\mathcal{N}_p$ がある. このとき $g|_W=f|_W$ だから $(g,f)\in R$ である. 従って対称律が成り立つ.
$f,g,h\in\overline{C^r}(p)$ が $(f,g)\in R$ かつ $(g,h)\in R$ を満たすとする. $f\in C^r(U)$, $g\in C^r(V)$, $h\in C^r(W)$ を満たす $U,V,W\in\mathcal{N}_p$ をとれば, $S\subset U\cap V$ かつ $f|_S=g|_S$ を満たす $S\in\mathcal{N}_p$ と $T\subset V\cap W$ かつ $g|_T=h|_T$ を満たす $T\in\mathcal{N}_p$ がある. このとき $S\cap T\in\mathcal{N}_p$, であり, $f|_{S\cap T}=(f|_S)|_{S\cap T}=(g|_S)|_{S\cap T}=g|_{S\cap T}=(g|_T)|_{S\cap T}=(h|_T)|_{S\cap T}=h|_{S\cap T}$, $S\cap T\subset U\cap V\cap W\subset U\cap W$ が成り立つため $(f,h)\in R$ である. 故に推移律も成り立つ.

$\overline{C}^r(p)$ の R による商集合 $\overline{C}^r(p)/R$ を $C^r(p)$ とおき, $\pi_p : \overline{C}^r(p) \to C^r(p)$ を商写像とする.
$U \in \mathcal{N}_p$ に対して $\iota_U : C^r(U) \to \overline{C}^r(p)$ を包含写像として, 写像 $\rho_p^U : C^r(U) \to C^r(p)$ を ι_U と π_p の合成写像 $\rho_p^U = \pi_p \circ \iota_U : C^r(U) \to C^r(p)$ とする.

命題 5.11

(1) M の開集合 U, V, W が $W \subset V \subset U$ を満たせば $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$ である.

(2) $U, V \in \mathcal{N}_p$ が $V \subset U$ を満たせば $\rho_p^V \circ \rho_V^U = \rho_p^U$ である.

証明

(1) $f \in C^r(U)$ に対し, $(\rho_W^V \circ \rho_V^U)(f) = \rho_W^V(\rho_V^U(f)) = \rho_W^V(f|_V) = (f|_V)|_W = f|_W = \rho_W^U(f)$ だから, $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$ が成り立つ.

(2) $V \subset U$ かつ $U, V \in \mathcal{N}_p$ ならば, $f \in C^r(U)$ に対して $(f|_V, f) \in R$ だから $\rho_p^V(\rho_V^U(f)) = \pi_p(f|_V) = \pi_p(f) = \rho_p^U(f)$ が成り立つ. 従って $\rho_p^V \circ \rho_V^U = \rho_p^U$ である.

幾何学III

第5節　接ベクトル空間（その2）

$\alpha,\beta\in C^r(p)$ に対して, $\alpha=\rho_p^U(f)$, $\beta=\rho_p^V(g)$ を満たす $f\in C^r(U)$, $g\in C^r(V)$ を選び,
和 $\alpha+\beta$, 積 $\alpha\beta$, 実数倍 $r\alpha$ を次のように定義する.

$$\alpha+\beta=\rho_p^{U\cap V}(\rho_{U\cap V}^U(f)+\rho_{U\cap V}^V(g)),\ \ \alpha\beta=\rho_p^{U\cap V}(\rho_{U\cap V}^U(f)\rho_{U\cap V}^V(g)),\ \ r\alpha=\rho_p^U(rf)$$

このとき, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$, $r\alpha$ の定義が $\alpha=\rho_p^U(f)$, $\beta=\rho_p^V(g)$ を満たす $f\in C^r(U)$, $g\in C^r(V)$ の選び方によらないことを確認する必要がある.

$\alpha=\rho_p^{U'}(f')$, $\beta=\rho_p^{V'}(g')$ を満たす $f'\in C^r(U')$, $g'\in C^r(V')$ を選べば,

$$\pi_p(f)=\rho_p^U(f)=\alpha=\rho_p^{U'}(f')=\pi_p(f'),\qquad \pi_p(g)=\rho_p^V(g)=\beta=\rho_p^{V'}(g')=\pi_p(g')$$

だから, 同値関係 R の定義から $U''\subset U\cap U'$ かつ $f|_{U''}=f'|_{U''}$ を満たす $U''\in\mathcal{N}_p$ と $V''\subset V\cap V'$ かつ $g|_{V''}=g'|_{V''}$ を満たす $V''\in\mathcal{N}_p$ が存在する. 従って
$\rho_{U''}^U(f)=\rho_{U''}^{U'}(f')$, $\rho_{V''}^V(g)=\rho_{V''}^{V'}(g')$ が成り立つため, これらの式と命題5.11を用いて
$\rho_p^{U\cap V}(\rho_{U\cap V}^U(f)+\rho_{U\cap V}^V(g))$, $\rho_p^{U\cap V}(\rho_{U\cap V}^U(f)\rho_{U\cap V}^V(g))$, $\rho_p^U(rf)$ を式変形して, それぞれ
$\rho_p^{U'\cap V'}(\rho_{U'\cap V'}^{U'}(f')+\rho_{U'\cap V'}^{V'}(g'))$, $\rho_p^{U'\cap V'}(\rho_{U'\cap V'}^{U'}(f')\rho_{U'\cap V'}^{V'}(g'))$, $\rho_p^{U'}(rf)$ に等しいことを示す.

$$\begin{aligned}
\rho_p^{U\cap V}(\rho_{U\cap V}^{U}(f)+\rho_{U\cap V}^{V}(g)) &= \rho_p^{U''\cap V''}(\rho_{U''\cap V''}^{U\cap V}(\rho_{U\cap V}^{U}(f)+\rho_{U\cap V}^{V}(g))) \\
&= \rho_p^{U''\cap V''}(\rho_{U''\cap V''}^{U\cap V}(\rho_{U\cap V}^{U}(f))+\rho_{U''\cap V''}^{U\cap V}(\rho_{U\cap V}^{V}(g))) \\
&= \rho_p^{U''\cap V''}(\rho_{U''\cap V''}^{U}(f)+\rho_{U''\cap V''}^{V}(g)) \\
&= \rho_p^{U''\cap V''}(\rho_{U''\cap V''}^{U''}(\rho_{U''}^{U}(f))+\rho_{U''\cap V''}^{V''}(\rho_{V''}^{V}(g))) \\
&= \rho_p^{U''\cap V''}(\rho_{U''\cap V''}^{U''}(\rho_{U''}^{U'}(f'))+\rho_{U''\cap V''}^{V''}(\rho_{V''}^{V'}(g'))) \\
&= \rho_p^{U''\cap V''}(\rho_{U''\cap V''}^{U'}(f')+\rho_{U''\cap V''}^{V'}(g')) \\
&= \rho_p^{U''\cap V''}(\rho_{U''\cap V''}^{U'\cap V'}(\rho_{U'\cap V'}^{U'}(f'))+\rho_{U''\cap V''}^{U'\cap V'}(\rho_{U'\cap V'}^{V'}(g'))) \\
&= \rho_p^{U''\cap V''}(\rho_{U''\cap V''}^{U'\cap V'}(\rho_{U'\cap V'}^{U'}(f')+\rho_{U'\cap V'}^{V'}(g'))) \\
&= \rho_p^{U'\cap V'}(\rho_{U'\cap V'}^{U'}(f')+\rho_{U'\cap V'}^{V'}(g'))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\rho_p^{U\cap V}(\rho_{U\cap V}^{U}(f)\rho_{U\cap V}^{V}(g)) &= \rho_p^{U''\cap V''}(\rho_{U''\cap V''}^{U\cap V}(\rho_{U\cap V}^{U}(f)\rho_{U\cap V}^{V}(g)))\\
&= \rho_p^{U''\cap V''}(\rho_{U''\cap V''}^{U\cap V}(\rho_{U\cap V}^{U}(f))\rho_{U''\cap V''}^{U\cap V}(\rho_{U\cap V}^{V}(g)))\\
&= \rho_p^{U''\cap V''}(\rho_{U''\cap V''}^{U}(f)\rho_{U''\cap V''}^{V}(g))\\
&= \rho_p^{U''\cap V''}(\rho_{U''\cap V''}^{U''}(\rho_{U''}^{U}(f))\rho_{U''\cap V''}^{V''}(\rho_{V''}^{V}(g)))\\
&= \rho_p^{U''\cap V''}(\rho_{U''\cap V''}^{U''}(\rho_{U''}^{U'}(f'))\rho_{U''\cap V''}^{V''}(\rho_{V''}^{V'}(g')))\\
&= \rho_p^{U''\cap V''}(\rho_{U''\cap V''}^{U'}(f')\rho_{U''\cap V''}^{V'}(g'))\\
&= \rho_p^{U''\cap V''}(\rho_{U''\cap V''}^{U'\cap V'}(\rho_{U'\cap V'}^{U'}(f'))\rho_{U''\cap V''}^{U'\cap V'}(\rho_{U'\cap V'}^{V'}(g')))\\
&= \rho_p^{U''\cap V''}(\rho_{U''\cap V''}^{U'\cap V'}(\rho_{U'\cap V'}^{U'}(f')\rho_{U'\cap V'}^{V'}(g')))\\
&= \rho_p^{U'\cap V'}(\rho_{U'\cap V'}^{U'}(f')\rho_{U'\cap V'}^{V'}(g'))
\end{aligned}
$$

$$
\rho_p^{U}(rf) = \rho_p^{U''}(\rho_{U''}^{U}(rf)) = \rho_p^{U''}(r\rho_{U''}^{U}(f)) = \rho_p^{U''}(r\rho_{U''}^{U'}(f')) = \rho_p^{U''}(\rho_{U''}^{U'}(rf')) = \rho_p^{U'}(rf')
$$

以上から $C^r(p)$ に加法, 乗法と実数倍が定義されて, $C^r(p)$ は $\boldsymbol{R}$-代数になり, これらの演算の定義から $\rho_p^U : C^r(U) \to C^r(p)$ は $\boldsymbol{R}$-代数の準同形写像になることがわかる.
関数 $\bar{e}_p : \overline{C}^r(p) \to \boldsymbol{R}$ を $U \in \mathcal{N}_p, f \in C^r(U)$ である $f \in \overline{C}^r(p)$ に対して $\bar{e}_p(f) = f(p)$ によって定義する.

$f \in C^r(U), g \in C^r(V)$ に対し, $W \subset U \cap V$ かつ $f|_W = g|_W$ を満たす $W \in \mathcal{N}_p$ があれば $\bar{e}_p(f) = f(p) = (f|_W)(p) = (g|_W)(p) = g(p) = \bar{e}_p(g)$ だから, 命題1.35によって関数 $e_p : C^r(p) \to \boldsymbol{R}$ で, $\bar{e}_p = e_p \circ \pi_p$ を満たすものがただ1つ存在する. このとき, $\bar{e}_p \circ \iota_U = e_p \circ \pi_p \circ \iota_U = e_p \circ \rho_p^U$ が成り立つことに注意する.

命題 5.12
M の点 p を通る M 上の C^r 級曲線 ω から得られる関数の族 $(D_{\omega,U} : C^r(U) \to \boldsymbol{R})_{U \in \mathcal{N}_p}$ に対し, 関数 $D_\omega : C^r(p) \to \boldsymbol{R}$ で, すべての $U \in \mathcal{N}_p$ に対して $D_\omega \circ \rho_p^U = D_{\omega,U}$ を満たすものがただ1つ存在する. さらに $\alpha, \beta \in C^r(p), a, b \in \boldsymbol{R}$ に対して次の等式が成り立つ.

$$D_\omega(a\alpha + b\beta) = aD_\omega(\alpha) + bD_\omega(\beta), \quad D_\omega(\alpha\beta) = D_\omega(\alpha)e_p(\beta) + e_p(\alpha)D_\omega(\beta)$$

証明

$\overline{D}_\omega:\overline{C}^r(p)\to\boldsymbol{R}$ を $f\in C^r(U)$ である $f\in\overline{C}^r(p)$ に対して $\overline{D}_\omega(f)=D_{\omega,U}(f)$ で定義する. $f\in C^r(U)$, $g\in C^r(V)$ に対し, $W\subset U\cap V$ かつ $f|_W=g|_W$ を満たす $W\in\mathcal{N}_p$ があれば 命題5.9の(2)によって $D_{\omega,U}(f)=D_{\omega,V}(g)$ だから $\overline{D}_\omega(f)=D_{\omega,U}(f)=D_{\omega,V}(g)=\overline{D}_\omega(g)$ が成り立つ. 故に命題1.35によって関数 $D_\omega:C^r(p)\to\boldsymbol{R}$ で, $D_\omega\circ\pi_p=\overline{D}_\omega$ を満たすものがただ1つ存在する. 従って $U\in\mathcal{N}_p$ に対して $D_\omega\circ\rho_p^U=D_\omega\circ\pi_p\circ\iota_U=\overline{D}_\omega\circ\iota_U=D_{\omega,U}$ である. 逆にすべての $U\in\mathcal{N}_p$ に対して $D_\omega\circ\rho_p^U=D_{\omega,U}$ ならば任意の $f\in\overline{C}^r(p)$ に対して $f\in C^r(U)$ となる $U\in\mathcal{N}_p$ をとれば $f=\iota_U(f)$ だから次の等式が成り立つ.

$$(D_\omega\circ\pi_p)(f)=D_\omega(\pi_p(\iota_U(f)))=D_\omega(\rho_p^U(f))=(D_\omega\circ\rho_p^U)(f)=D_{\omega,U}(f)=\overline{D}_\omega(f)$$

故に $D_\omega\circ\pi_p=\overline{D}_\omega$ が成り立ち, 命題1.35よりこのような関数 D_ω はただ1つしかないので, すべての $U\in\mathcal{N}_p$ に対して $D_\omega\circ\rho_p^U=D_{\omega,U}$ を満たす関数 $D_\omega:C^r(p)\to\boldsymbol{R}$ はただ1つである.

$\alpha=\rho_p^U(f)$, $\beta=\rho_p^V(g)$ を満たす $f\in C^r(U)$, $g\in C^r(V)$ を選ぶが, 命題5.11の(2)から

$$\alpha=\rho_p^U(f)=\rho_p^{U\cap V}(\rho_{U\cap V}^U(f)),\ \beta=\rho_p^V(g)=\rho_p^{U\cap V}(\rho_{U\cap V}^V(g))$$

証明の続き

であり, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$, $r\alpha$ の定義が $\alpha=\rho_p^U(f)$, $\beta=\rho_p^V(g)$ を満たす $f\in C^r(U)$, $g\in C^r(V)$ の選び方によらないことから, $\rho_{U\cap V}^U(f)$, $\rho_{U\cap V}^V(g)$ をそれぞれ f, g とおき直し, さらに $U\cap V$ を U とおき直して $\alpha=\rho_p^U(f)$, $\beta=\rho_p^U(g)$ と仮定してよい.

$\rho_p^U: C^r(U)\to C^r(p)$ は $\boldsymbol{R}$-代数の準同形写像だから $a\alpha+b\beta=\rho_p^U(af+bg)$, $\alpha\beta=\rho_p^U(fg)$ であることに注意すれば, 命題5.9の(3)と $D_\omega\circ\rho_p^U=D_{\omega,U}$ から次の等式が得られる.

$$\begin{aligned} D_\omega(a\alpha+b\beta)&=D_\omega(\rho_p^U(af+bg))=D_{\omega,U}(af+bg)=aD_{\omega,U}(f)+bD_{\omega,U}(g)\\ &=aD_\omega(\rho_p^U(f))+bD_\omega(\rho_p^U(g))=aD_\omega(\alpha)+bD_\omega(\beta)\\ D_\omega(\alpha\beta)&=D_\omega(\rho_p^U(fg))=D_{\omega,U}(fg)=D_{\omega,U}(f)g(p)+f(p)D_{\omega,U}(g)\\ &=D_\omega(\rho_p^U(f))e_U(g)+e_U(f)D_\omega(\rho_p^U(g))=D_\omega(\alpha)e_p(\beta)+e_p(\alpha)D_\omega(\beta) \end{aligned}$$

命題5.12により M の点 p を通る C^r 級曲線 ω に対し, ω に沿った p における方向微分を考えることにより $C^r(p)$ から $\boldsymbol{R}$ への線形写像 $D_\omega: C^r(p)\to\boldsymbol{R}$ で関数の積に関する微分の公式と類似の公式を満たすものが得られた.

そこで, 次の定義のように命題5.12の主張における最後の2つの等式を満たす関数全体からなる集合を考える.

定義 5.13
M の点 p に対し, 関数 $D: C^r(p) \to \boldsymbol{R}$ で任意の $\alpha, \beta \in C^r(p)$, $a, b \in \boldsymbol{R}$ に対して次の条件を満たすもの全体からなる集合を $\mathrm{Der}_p(C^r(p))$ で表す.

$$D(a\alpha + b\beta) = aD(\alpha) + bD(\beta), \ \ D(\alpha\beta) = D(\alpha)e_p(\beta) + e_p(\alpha)D(\beta)$$

まず $\mathrm{Der}_p(C^r(p))$ が $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間であることをみる.

命題 5.14
$D, E \in \mathrm{Der}_p(C^r(p))$ と $c \in \boldsymbol{R}$ に対して $D+E, cD: C^r(p) \to \boldsymbol{R}$ を $\alpha \in C^r(p)$ に対して

$$(D+E)(\alpha) = D(\alpha) + E(\alpha), \ \ (cD)(\alpha) = cD(\alpha)$$

で定めれば $D+E, cD \in \mathrm{Der}_p(C^r(p))$ であり, $\mathrm{Der}_p(C^r(p))$ はこれらの演算によって $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間になる.

証明

$D, E \in \mathrm{Der}_p(C^r(p))$ だから任意の $\alpha, \beta \in C^r(p)$, $a, b \in \boldsymbol{R}$ に対して D, E は

$$D(a\alpha + b\beta) = aD(\alpha) + bD(\beta) \cdots (i) \qquad E(a\alpha + b\beta) = aE(\alpha) + bE(\beta) \cdots (ii)$$

$$D(\alpha\beta) = D(\alpha)e_p(\beta) + e_p(\alpha)D(\beta) \cdots (iii) \qquad E(\alpha\beta) = E(\alpha)e_p(\beta) + e_p(\alpha)E(\beta) \cdots (iv)$$

を満たす. (i) と (ii) を辺々加え, (iii) と (iv) を辺々加えれば, $D+E$ の定義から次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}
(D+E)(a\alpha + b\beta) &= D(a\alpha + b\beta) + E(a\alpha + b\beta) \\
&= aD(\alpha) + bD(\beta) + aE(\alpha) + bE(\beta) \\
&= a(D(\alpha) + E(\alpha)) + b(D(\beta) + E(\beta)) \\
&= a(D+E)(\alpha) + b(D+E)(\beta) \\
(D+E)(\alpha\beta) &= D(\alpha\beta) + E(\alpha\beta) \\
&= D(\alpha)e_p(\beta) + e_p(\alpha)D(\beta) + E(\alpha)e_p(\beta) + e_p(\alpha)E(\beta) \\
&= (D(\alpha) + E(\alpha))e_p(\beta) + e_p(\alpha)(D(\beta) + E(\beta)) \\
&= (D+E)(\alpha)e_p(\beta) + e_p(\alpha)(D+E)(\beta)
\end{aligned}$$

証明の続き

また, (i) と (iii) の両辺を c 倍すれば, cD の定義から次の等式が得られる.

$$(cD)(a\alpha+b\beta)=cD(a\alpha+b\beta)=acD(\alpha)+bcD(\beta)=a(cD)(\alpha)+b(cD)(\beta)$$

$$(cD)(\alpha\beta)=cD(\alpha\beta)=cD(\alpha)e_p(\beta)+e_p(\alpha)cD(\beta)=(cD)(\alpha)e_p(\beta)+e_p(\alpha)(cD)(\beta)$$

以上から $D+E, cD\in \mathrm{Der}_p(C^r(p))$ である. この加法と実数倍によって $\mathrm{Der}_p(C^r(p))$ が $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間になることは容易に確かめられる.

定義 5.15

(1) M の点 p を通る M 上の C^r 級曲線全体からなる集合を $C^r(M;p)$ で表す.

(2) $\omega\in C^r(M;p)$ に対して, 命題5.12から $D_\omega\in \mathrm{Der}_p(C^r(p))$ だから, 写像

$$\Delta_p: C^r(M;p)\to \mathrm{Der}_p(C^r(p))$$ を $\Delta_p(\omega)=D_\omega$ で定義する.

M の点 p に対して $p\in U$ である M の局所座標系 (U,φ) を選んで p を通る M 上の C^r 級曲線 $\omega_{\varphi,1},\omega_{\varphi,2},\dots,\omega_{\varphi,m}:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ を次のように定義する.
$\varphi(U)$ は $\boldsymbol{R}^m$ の開集合だから $\varphi(p)=(p_1,p_2,\dots,p_m)$ とおけば, $\varepsilon>0$ で

$$(p_1-\varepsilon,p_1+\varepsilon)\times(p_2-\varepsilon,p_2+\varepsilon)\times\cdots\times(p_m-\varepsilon,p_m+\varepsilon)\subset\varphi(U)$$

を満たすものがある. そこで $\omega_{\varphi,j}$ を

$$\omega_{\varphi,j}(t)=\varphi^{-1}(p_1,\dots,p_{j-1},p_j+t,p_{j+1},\dots,p_m)$$

で定義する. このとき $\omega_{\varphi,1},\omega_{\varphi,2},\dots,\omega_{\varphi,m}\in C^r(M;p)$ で, 次の結果が成り立つ.

命題 5.16

$\Delta_p:C^r(M;p)\to\mathrm{Der}_p(C^r(p))$ による $\omega_{\varphi,1},\omega_{\varphi,2},\dots,\omega_{\varphi,m}$ の像は1次独立である.

証明

$x \in U$ に対して $\varphi(x)$ の第 i 成分を $\varphi_i(x)$ として, $x \in U$ を $\varphi_i(x)$ に対応させる U で定義された実数値関数 φ_i を考える. このとき $\varphi_i \in C^r(U)$ だから $\hat{\varphi}_i = \rho_p^U(\varphi_i)$ とおけば, $\hat{\varphi}_i \in C^r(p)$ であり, 命題5.12から $D_{\omega_{\varphi,j}}(\hat{\varphi}_i) = D_{\omega_{\varphi,j},U}(\varphi_i)$ が成り立つ. さらに $\omega_{\varphi,j}$ の定義から $(\varphi_i \circ \omega_{\varphi,j})(t) = \begin{cases} p_i + t & i = j \\ p_i & i \neq j \end{cases}$ だから, 次の等式が得られる.

$$D_{\omega_{\varphi,j}}(\hat{\varphi}_i) = D_{\omega_{\varphi,j},U}(\varphi_i) = (\varphi_i \circ \omega_{\varphi,j})'(0) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$r_1, r_2, \ldots, r_m \in \boldsymbol{R}$ に対して $r_1 D_{\omega_{\varphi,1}} + r_2 D_{\omega_{\varphi,2}} + \cdots + r_m D_{\omega_{\varphi,m}} = 0$ ならば $\left(r_1 D_{\omega_{\varphi,1}} + r_2 D_{\omega_{\varphi,2}} + \cdots + r_m D_{\omega_{\varphi,m}}\right)(\hat{\varphi}_i) = 0$ であり, 上式からこの左辺は

$$r_1 D_{\omega_{\varphi,1}}(\hat{\varphi}_i) + r_2 D_{\omega_{\varphi,2}}(\hat{\varphi}_i) + \cdots + r_m D_{\omega_{\varphi,m}}(\hat{\varphi}_i) = r_i$$

に等しいため, $r_1 = r_2 = \cdots = r_m = 0$ が得られる. 故に $D_{\omega_{\varphi,1}}, D_{\omega_{\varphi,2}}, \ldots, D_{\omega_{\varphi,m}}$ は1次独立である. Δ_p の定義から $\Delta_p(\omega_{\varphi,j}) = D_{\omega_{\varphi,j}}$ だから主張が示された.

次の命題は合成写像の微分法(幾何学 II のプリントの定理2.11)の特別な場合である.

命題 5.17

U を $\boldsymbol{R}^m$ の開集合, $\varepsilon>0$ とし, 写像 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to U$, $\psi:U\to\boldsymbol{R}$ がそれぞれ 0, $\gamma(0)$ で微分可能であるとする. $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ に対して $\gamma(t)$ の第 j 成分を対応させる関数を γ_j とすれば $\psi\circ\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\boldsymbol{R}$ の 0 における微分係数は次の式で与えられる.

$$(\psi\circ\gamma)'(0)=\psi'(\gamma(0))\,\gamma'(0)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}(\gamma(0))\,\gamma_j'(0)$$

命題 5.18

$\hat{\varphi}_j\in C^r(p)$ を命題5.16の証明で定義したものとして, $\omega\in C^r(M;p)$ に対して $c_j=D_\omega(\hat{\varphi}_j)$ とおけば $D_\omega=c_1D_{\omega_{\varphi,1}}+c_2D_{\omega_{\varphi,2}}+\cdots+c_mD_{\omega_{\varphi,m}}$ が成り立つ.

証明

任意の $\alpha \in C^r(p)$ に対して, $\alpha = \rho_p^V(f)$ を満たす $f \in C^r(V)$ を選ぶ. 必要ならば M の局所座標系 (U, φ) の開集合 U を小さく取り直して $p \in U \subset V$ が成り立つとする. さらに $\eta > 0$ を $(-\eta, \eta) \subset \omega^{-1}(U)$ が成り立つようにとれば, $(-\eta, \eta)$ で定義された関数 $f \circ \omega$ は $(f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \omega)$ に等しい. ここで, $c_j = D_\omega(\hat{\varphi}_j) = D_{\omega,U}(\varphi_j) = (\varphi_j \circ \omega)'(0)$ であり, $(\varphi \circ \omega)(t)$ の第 j 成分は $(\varphi_j \circ \omega)(t)$ に等しい. また $\omega_{\varphi,j}$ の定義から $(f \circ \varphi^{-1})(p_1, \ldots, p_{j-1}, p_j + t, p_{j+1}, \ldots, p_m) = (f \circ \omega_{\varphi,j})(t)$ だから

$$\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j}(\varphi(p)) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j}(p_1, p_2, \ldots, p_m) = (f \circ \omega_{\varphi,j})'(0) = D_{\omega_{\varphi,j},V}(f) = D_{\omega_{\varphi,j}}(\alpha)$$

が成り立つ. 従って命題5.17から

$$\begin{aligned} D_\omega(\alpha) &= D_{\omega,V}(f) = (f \circ \omega)'(0) = ((f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \omega))'(0) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j}(\varphi(p))(\varphi_j \circ \omega)'(0) = \sum_{j=1}^{m} c_j D_{\omega_{\varphi,j}}(\alpha) \end{aligned}$$

が得られるため, $D_\omega = c_1 D_{\omega_{\varphi,1}} + c_2 D_{\omega_{\varphi,2}} + \cdots + c_m D_{\omega_{\varphi,m}}$ が成り立つ.

命題5.18から $D_{\omega_{\varphi,1}}, D_{\omega_{\varphi,2}}, \dots, D_{\omega_{\varphi,m}}$ は $\Delta_p : C^r(M;p) \to \mathrm{Der}_p(C^r(p))$ の像を生成し,
命題5.17から $D_{\omega_{\varphi,1}}, D_{\omega_{\varphi,2}}, \dots, D_{\omega_{\varphi,m}}$ は1次独立だから, 次の定理が得られた.

定理 5.19
$\Delta_p : C^r(M;p) \to \mathrm{Der}_p(C^r(p))$ の像は $D_{\omega_{\varphi,1}}, D_{\omega_{\varphi,2}}, \dots, D_{\omega_{\varphi,m}}$ を基底とする $\mathrm{Der}_p(C^r(p))$ の m 次元部分空間である.

$\Delta_p : C^r(M;p) \to \mathrm{Der}_p(C^r(p))$ の像は M の局所座標系の選び方とは無関係に定まっていることに注意して, 接ベクトル空間を次のように定義する.

定義 5.20　接ベクトル空間
$\Delta_p : C^r(M;p) \to \mathrm{Der}_p(C^r(p))$ の像を M の p における**接ベクトル空間**(または**接空間**)といい, T_pM で表す.

定理5.19から T_pM は $\boldsymbol{R}$ 上の m 次元ベクトル空間である.

接ベクトル空間を定義するために用いた写像 $\Delta_p : C^r(M;p) \to \mathrm{Der}_p(C^r(p))$ について
ここでおさらいしておく.

まず $C^r(p)$ は p の近傍で定義された C^r 級関数全体の集合みたいなもの, (正確には p の開近傍で定義された2つの C^r 級関数が, p のある開近傍で一致していれば, それらを同じものと見做して得られる p の近傍で定義された C^r 級関数全体の集合の商集合)

であるが, この各要素に対して「p を通る曲線に沿った p における方向微分」という実数が対応している.

そこで, 各 $\omega \in C^r(M;p)$ に対して $\alpha \in C^r(p)$ の ω に沿った p における“方向微分”を $D_\omega(\alpha)$ で表して, 関数 $D_\omega : C^r(p) \to \boldsymbol{R}$ を定義すれば, 命題5.12より D_ω は定義5.13の条件を満たすので, 定義5.13の条件を満たす $C^r(p)$ 上の実数値関数全体の集合

$\mathrm{Der}_p(C^r(p))$ は D_ω を要素として含む. 従って $\omega \in C^r(M;p)$ を D_ω に対応させることによって写像 $\Delta_p : C^r(M;p) \to \mathrm{Der}_p(C^r(p))$ が定義される.

$\mathrm{Der}_p(C^r(p))$ は p の近傍で定義された C^r 級関数に p における方向微分を対応させる関数全体の集合のようなもので,「実際に存在する p を通る曲線 ω」に沿った p における方向微分を対応させる関数 D_ω 全体からなる集合 T_pM が M の p における接ベクトル空間である. ということで, T_pM が接ベクトル空間と呼ぶにふさわしいと考えられる.

次に T_pM の基底について考える.

命題5.16を述べるために $p \in U$ である M の局所座標系 (U, φ) から $\omega_{\varphi,j} \in C^r(M;p)$ を $\omega_{\varphi,j}(t) = \varphi^{-1}(p_1, \ldots, p_{j-1}, p_j + t, p_{j+1}, \ldots, p_m)$ によって定義したが, この定義から $\omega_{\varphi,j}$ の $\Delta_p : C^r(M;p) \to \mathrm{Der}_p(C^r(p))$ による像 $\Delta_p(\omega_{\varphi,j}) = D_{\omega_{\varphi,j}}$ は p の近傍で定義された C^r 級関数に対して p における j 番目の座標軸方向の方向微分を対応させる関数だから $D_{\omega_{\varphi,j}}$ を $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$ や $\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p$ などで表すことが多い.

また, (V, ψ) も $p \in V$ である M の局所座標系であるとき, $\psi(p) = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$ とおいて $\omega_{\psi,i} \in C^r(M;p)$ を $\omega_{\psi,i}(t) = \psi^{-1}(q_1, \ldots, q_{i-1}, q_i + t, q_{i+1}, \ldots, q_m)$ で定義する.

そこで $D_{\omega_{\varphi,j}}=\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$, $D_{\omega_{\psi,j}}=\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p$ とおき, 次の命題を示す.

命題 5.21
T_pM の基底 $\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_p$ から $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$ への基底の変換行列は (U,φ) から (V,ψ) への座標変換 $\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$ の $\varphi(p)$ における微分 $(\psi\circ\varphi^{-1})'(\varphi(p))$ である.

証明
$c_{ij}=D_{\omega_{\varphi,j}}(\hat{\psi}_i)$ とおけば命題5.18から次の等式が成り立つ.

$$D_{\omega_{\varphi,j}}=c_{1j}D_{\omega_{\psi,1}}+c_{2j}D_{\omega_{\psi,2}}+\cdots+c_{mj}D_{\omega_{\psi,m}} \cdots (*)$$

(U,φ) から (V,ψ) への座標変換 $\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$ の第 i 成分の関数を $(\psi\circ\varphi^{-1})_i$ とすれば $(\psi\circ\varphi^{-1})_i=\psi_i\circ\varphi^{-1}$ であり, $\lambda_j:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\boldsymbol{R}^m$ を

$$\lambda_j(t)=(p_1,\ldots,p_{j-1},p_j+t,p_{j+1},\ldots,p_m)$$

で定義すれば $\omega_{\varphi,j}=\varphi^{-1}\circ\lambda_j$ である. 従って次の等式が得られる.

証明の続き

$$
\begin{aligned}
c_{ij} &= D_{\omega_{\varphi,j}}(\hat{\psi}_i) = D_{\omega_{\varphi,j},V}(\psi_i) = (\psi_i \circ \omega_{\varphi,j})'(0) = ((\psi_i \circ \varphi^{-1}) \circ \lambda_j)'(0) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(\psi_i \circ \varphi^{-1})(p_1, \ldots, p_j + t, \ldots, p_m) - (\psi_i \circ \varphi^{-1})(p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_m)}{t} \\
&= \frac{\partial(\psi_i \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j}(\varphi(p)) = \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_i}{\partial x_j}(\varphi(p))
\end{aligned}
$$

$D_{\omega_{\varphi,j}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$, $D_{\omega_{\psi,i}} = \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p$ と上の等式を $(*)$ に代入すれば次の等式が得られる.

$$
\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = \frac{\partial(\psi \circ \varphi)_1^{-1}}{\partial x_j}(\varphi(p))\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p + \frac{\partial(\psi \circ \varphi)_2^{-1}}{\partial x_j}(\varphi(p))\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_p + \cdots + \frac{\partial(\psi \circ \varphi)_m^{-1}}{\partial x_j}(\varphi(p))\left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_p
$$

(U, φ) から (V, ψ) への座標変換 $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ の $\varphi(p)$ における微分 $(\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p))$ の (i, j) 成分は系5.4によって $\frac{\partial(\psi \circ \varphi)_i}{\partial x_j}(\varphi(p))$ に等しいため, 主張が示された.

次回は $C^r(p)$ と $\mathrm{Der}_p(C^r(p))$ の関係について調べる.

幾何学III

第5節　接ベクトル空間（その3）

補題 5.22

$D \in \mathrm{Der}_p(C^r(p))$ とする.

(1) $\alpha \in C^r(p)$ に対し, $\alpha = \rho_p^U(f)$ を満たす $U \in \mathcal{N}_p$ と $f \in C^r(U)$ で, f が U 上の定数値関数となるものが存在すれば $D(\alpha) = 0$ である.

(2) $\alpha, \beta \in C^r(p)$ が $e_p(\alpha) = e_p(\beta) = 0$ を満たせば $D(\alpha\beta) = 0$ である.

証明

(1) U で常に値が 1 である関数を 1_U で表して $\imath = \rho_p^U(1_U)$ とおく. $1_U^2 = 1_U$ だから $\imath^2 = \rho_p^U(1_U)^2 = \rho_p^U(1_U^2) = \rho_p^U(1_U) = \imath$ であり, $e_p(\imath) = e_U(1_U) = 1_U(p) = 1$ より

$$D(\imath) = D(\imath^2) = D(\imath)e_p(\imath) + e_p(\imath)D(\imath) = 2D(\imath)$$

が得られるため $D(\imath) = 0$ である. 一方, 仮定から f は U で常に値が $f(p)$ だから $f = f(p)1_U$ である. 従って $\alpha = \rho_p^U(f) = \rho_p^U(f(p)1_U) = f(p)\rho_p^U(1_U) = f(p)\imath$ だから $D(\alpha) = D(f(p)\imath) = f(p)D(\imath) = 0$ である.

(2) 仮定から $D(\alpha\beta) = D(\alpha)e_p(\beta) + e_p(\alpha)D(\beta) = 0$ である.

ここでベクトル空間の部分ベクトル空間による商ベクトル空間について説明する.
$\boldsymbol{K}$を$\boldsymbol{R}$または$\boldsymbol{C}$とする. $\boldsymbol{K}$上のベクトル空間Vとその部分ベクトル空間Wが与えられたとき, $V\times V$の部分集合Rを $R=\{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\in V\times V|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\in W\}$ で定義すれば R は V の同値関係である. 実際, $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\in W$ だから$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\in R$であり, $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\in R$ならば $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\in W$ だから $\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}=(-1)(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})\in W$ が成り立つため, $(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})\in R$ である.
さらに $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\in R$ かつ $(\boldsymbol{w},\boldsymbol{z})\in R$ ならば $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\in W$ かつ $\boldsymbol{w}-\boldsymbol{z}\in W$ だから $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})+(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{z})\in W$ が成り立つため, $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{z})\in R$ である.
このとき, V の R による商集合 V/R には, 商写像 $p_W:V\to V/R$ が線形写像になるような $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間の構造が次のように定義される.
$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V/R$ と $r\in\boldsymbol{K}$ に対して $\boldsymbol{\alpha}=p_W(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{\beta}=p_W(\boldsymbol{w})$ を満たす $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V$ を選んで $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=p_W(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}),\ r\boldsymbol{\alpha}=p_W(r\boldsymbol{v})$ によって $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\ r\boldsymbol{\alpha}$ を定義する. $\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}'\in V$ に対して $\boldsymbol{\alpha}=p_W(\boldsymbol{v})=p_W(\boldsymbol{v}'),\boldsymbol{\beta}=p_W(\boldsymbol{w})=p_W(\boldsymbol{w}')$ ならば $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'\in W$ かつ $\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}'\in W$ だから $(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})-(\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{w}')=(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')+(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w})'\in W,\ r\boldsymbol{v}-r\boldsymbol{v}'=r(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')\in W$ である.
故に$p_W(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=p_W(\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{w}'),\ p_W(r\boldsymbol{v})=p_W(r\boldsymbol{v}')$だから$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\ r\boldsymbol{\alpha}$の定義は$\boldsymbol{\alpha}=p_W(\boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{\beta}=p_W(\boldsymbol{w})$ を満たす $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V$ の選び方によらない.

このように定義した V/R の加法とスカラー倍によって V/R が $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間になり, 商写像 $p_W\colon V\to V/R$ が線形写像になることは容易に確かめられる.
ベクトル空間 V/R を V/W で表して, V の W による商ベクトル空間という.

注意 5.23
$\boldsymbol{v}\in W$ であることと $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{0})\in R$ は同値だから, $\mathrm{Ker}\,(p_W\colon V\to V/W)=W$ が成り立つ.

$\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V, Z に対して, $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(V,Z)$ で V から Z への線形写像全体からなる集合を表し, $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(V,Z)$ は写像の和とスカラー倍で $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間になる.

命題 5.24
$\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V, Z と V の部分ベクトル空間 W に対して写像

$$p_W^*:\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(V/W,Z)\to\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(V,Z)$$

を $p_W^*(\varphi)=\varphi\circ p_W$ で定めれば p_W^* は単射で次が成り立つ.

$$\mathrm{Im}\,p_W^*=\{\psi\in\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(V,Z)\mid\mathrm{Ker}\,\psi\supset W\}$$

証明

$\varphi, \varphi' \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(V/W, Z)$ に対して $p_W^*(\varphi) = p_W^*(\varphi')$ ならば $\varphi \circ p_W = \varphi' \circ p_W$ である.

任意の $\boldsymbol{\alpha} \in V/W$ に対して $\boldsymbol{\alpha} = p_W(\boldsymbol{v})$ を満たす $\boldsymbol{v} \in V$ を選べば

$$\varphi(\alpha) = \varphi(p_W(\boldsymbol{v})) = (\varphi \circ p_W)(\boldsymbol{v}) = (\varphi' \circ p_W)(\boldsymbol{v}) = \varphi'(p_W(\boldsymbol{v})) = \varphi'(\alpha)$$

だから $\varphi = \varphi'$ である. 従って p_W^* は単射である.

$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(V/W, Z)$ ならば $\boldsymbol{v} \in W$ に対して, 注意5.23から $p_W(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ だから

$$(p_W^*(\varphi))(\boldsymbol{v}) = (\varphi \circ p_W)(\boldsymbol{v}) = \varphi(p_W(\boldsymbol{v})) = \varphi(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$$

が成り立つため, $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}\,(p_W^*(\varphi))$ である. 故に $W \subset \mathrm{Ker}\,(p_W^*(\varphi))$ が成り立つため

$$\mathrm{Im}\, p_W^* \subset \{\psi \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(V, Z) \,|\, \mathrm{Ker}\,\psi \supset W\}$$

である. $\psi \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(V, Z)$ が $\mathrm{Ker}\,\psi \supset W$ を満たすとき, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in R$ ならば $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in W$ だから $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in \mathrm{Ker}\,\psi$ である. 故に $\psi(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0}$ より $\psi(\boldsymbol{v}) = \psi(\boldsymbol{w})$ が成り立つため命題1.35から写像 $\bar{\psi} : V/W \to Z$ で, $\psi = \bar{\psi} \circ p_W = p_W^*(\bar{\psi})$ を満たすものが存在する.

従って $\psi \in \mathrm{Im}\, p_W^*$ だから $\{\psi \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(V, Z) \,|\, \mathrm{Ker}\,\psi \supset W\} \subset \mathrm{Im}\, p_W^*$ も成り立つため, 主張が示された.

$\mathfrak{m}_p = \mathrm{Ker}\,(e_p : C^r(p) \to \boldsymbol{R}) = \{\alpha \in C^r(p) \mid e_p(\alpha) = 0\}$ とおいて

$\mathfrak{m}_p^2 = \{\alpha \mid \alpha = \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \cdots + \beta_k\gamma_k$ を満たす $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \in \mathfrak{m}_p$ がある.$\}$

とおけば, e_p は和と積を保つため, $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間として $\mathfrak{m}_p^2$ は $\mathfrak{m}_p$ の部分空間

だから, 商ベクトル空間 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ が考えられる. $\pi_p : \mathfrak{m}_p \to \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ を商写像とすれば

命題5.24により $\pi_p^* : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2, \boldsymbol{R}) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{m}_p, \boldsymbol{R})$ は $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{m}_p, \boldsymbol{R})$ の

部分ベクトル空間 $\{\psi \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{m}_p, \boldsymbol{R}) \mid \mathrm{Ker}\,\psi \supset \mathfrak{m}_p^2\}$ への同型写像である.

一方, 補題5.22の(2)から $D \in \mathrm{Der}_p(C^r(p))$ は $\mathfrak{m}_p^2$ の要素をすべて 0 に写すため,

D の定義域を $\mathfrak{m}_p$ に制限して得られる関数 $D|_{\mathfrak{m}_p} : \mathfrak{m}_p \to \boldsymbol{R}$ は π_p^* の像に含まれている.

そこで写像 $\Phi : \mathrm{Der}_p(C^r(p)) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2, \boldsymbol{R})$ を $\Phi(D) = (\pi_p^*)^{-1}\left(D|_{\mathfrak{m}_p}\right)$ で定める.

命題 5.25

$\Phi : \mathrm{Der}_p(C^r(p)) \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2, \boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間の同型写像である.

証明

$\psi \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{m}_p, \boldsymbol{R})$ で $\mathrm{Ker}\,\psi \supset \mathfrak{m}_p^2$ を満たすものに対し, 関数 $\mathscr{D}_\psi : C^r(p) \to \boldsymbol{R}$ を次のように定める. ι を補題5.22の(1)の証明で定めたものとすれば, $e_p(\iota) = 1$ より $\alpha \in C^r(p)$ に対し, $e_p(\alpha - e_p(\alpha)\iota) = e_p(\alpha) - e_p(\alpha)e_p(\iota) = 0$ だから $\alpha - e_p(\alpha)\iota \in \mathfrak{m}_p$ である. そこで $\mathscr{D}_\psi(\alpha) = \psi(\alpha - e_p(\alpha)\iota)$ と定めて $\mathscr{D}_\psi \in \mathrm{Der}_p(C^r(p))$ を示す.

任意の $\alpha, \beta \in C^r(p)$, $a, b \in \boldsymbol{R}$ に対して次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_\psi(a\alpha + b\beta) &= \psi(a\alpha + b\beta - e_p(a\alpha + b\beta)\iota) = \psi(a(\alpha - e_p(\alpha)\iota) + b(\beta - e_p(\beta)\iota)) \\ &= a\psi(\alpha - e_p(\alpha)\iota) + b\psi(\beta - e_p(\beta)\iota) = a\mathscr{D}_\psi(\alpha) + b\mathscr{D}_\psi(\beta)\end{aligned}$$

また $(\alpha - e_p(\alpha)\iota)(\beta - e_p(\beta)\iota) \in \mathfrak{m}_p^2$ だから $\psi((\alpha - e_p(\alpha)\iota)(\beta - e_p(\beta)\iota)) = 0$ である.

さらに, $\alpha\iota = \alpha$, $\beta\iota = \beta$, $\iota^2 = \iota$ から次の等式が成り立つため $\mathscr{D}_\psi \in \mathrm{Der}_p(C^r(p))$ である.

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_\psi(\alpha\beta) &= \psi(\alpha\beta - e_p(\alpha\beta)\iota) = \psi(\alpha\beta - e_p(\alpha\beta)\iota - (\alpha - e_p(\alpha)\iota)(\beta - e_p(\beta)\iota)) \\ &= \psi(e_p(\beta)\alpha - e_p(\alpha)e_p(\beta)\iota + e_p(\alpha)\beta - e_p(\alpha)e_p(\beta)\iota) \\ &= e_p(\beta)\psi(\alpha - e_p(\alpha)\iota) + e_p(\alpha)\psi(\beta - e_p(\beta)\iota) = \mathscr{D}_\psi(\alpha)e_p(\beta) + e_p(\alpha)\mathscr{D}_\psi(\beta)\end{aligned}$$

証明の続き

写像 $\Psi:\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2,\boldsymbol{R})\to\mathrm{Der}_p(C^r(p))$ を $\Psi(\varphi)=\mathscr{D}_{\varphi\circ\pi_p}=\mathscr{D}_{\pi_p^*(\varphi)}$ で定めて Ψ が Φ の逆写像であることを確かめればよい. $D\in\mathrm{Der}_p(C^r(p))$ に対して $\psi=D|_{\mathfrak{m}_p}$ とおくと, 補題5.22の(2)から $\mathrm{Ker}\,\psi\supset\mathfrak{m}_p^2$ であり, 補題5.22の(1)から $D(\iota)=0$ だから任意の $\alpha\in C^r(p)$ に対して, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_\psi(\alpha)&=\psi(\alpha-e_p(\alpha)\iota)=\left(D|_{\mathfrak{m}_p}\right)(\alpha-e_p(\alpha)\iota)=D(\alpha-e_p(\alpha)\iota)\\&=D(\alpha)-e_p(\alpha)D(\iota)=D(\alpha)\end{aligned}$$

故に $\mathscr{D}_\psi=D$ である. また $\Phi(D)=(\pi_p^*)^{-1}(\psi)$ だから, 次の等式を得る.

$$\Psi(\Phi(D))=\Psi((\pi_p^*)^{-1}(\psi))=\mathscr{D}_{\pi_p^*((\pi_p^*)^{-1}(\psi))}=\mathscr{D}_\psi=D$$

$\varphi\in\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2,\boldsymbol{R})$ に対して $\Phi(\Psi(\varphi))=\varphi$ を示すには, π_p^* が単射であることから $\pi_p^*(\Phi(\Psi(\varphi)))=\pi_p^*(\varphi)$ を示せばよい. $\pi_p^*(\Phi(\Psi(\varphi)))=\Psi(\varphi)|_{\mathfrak{m}_p}=\mathscr{D}_{\pi_p^*(\varphi)}|_{\mathfrak{m}_p}$ であり, $\alpha\in\mathfrak{m}_p$ に対して $e_p(\alpha)=0$ だから, 下の等式から $\mathscr{D}_{\pi_p^*(\varphi)}|_{\mathfrak{m}_p}=\pi_p^*(\varphi)$ が得られる.

$$\left(\mathscr{D}_{\pi_p^*(\varphi)}|_{\mathfrak{m}_p}\right)(\alpha)=\mathscr{D}_{\pi_p^*(\varphi)}(\alpha)=\pi_p^*(\varphi)(\alpha-e_p(\alpha)\iota)=\pi_p^*(\varphi)(\alpha)$$

本節の最後に次の結果を示す.

「M が C^∞ 級多様体の場合には $T_pM = \mathrm{Der}_p(C^\infty(p))$ である.」

M の次元を m とすると, $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2, \boldsymbol{R})$ が $\boldsymbol{R}$ 上の m 次元ベクトル空間であることを示せば, 命題5.25から $\mathrm{Der}_p(C^\infty(p))$ も $\boldsymbol{R}$ 上の m 次元ベクトル空間になり, 定理5.19から, 上の主張が導かれる. さらに次の結果から $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ が m 次元ベクトル空間であることが示されればよい.

命題 5.26

V, W をそれぞれ $\boldsymbol{K}$ 上の m 次元, n 次元のベクトル空間とするとき, $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(V, W)$ は $\boldsymbol{K}$ 上の mn 次元ベクトル空間である.

証明

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ を V の基底, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ を W の基底とし, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して線形写像 $f_{ij} : V \to W$ を $f_{ij}(\boldsymbol{v}_k) = \begin{cases} \boldsymbol{w}_j & k = i \\ \boldsymbol{0} & k \neq i \end{cases}$ で定めれば, $f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{mn}$ は $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(V, W)$ の基底であることが以下のように確かめられる.

証明の続き

$r_{ij}\in\boldsymbol{K}$ に対して $\displaystyle\sum_{1\leqq i\leqq m,1\leqq j\leqq n} r_{ij}f_{ij}=\mathbf{0}$ が成り立つならば $k=1,2,\ldots,m$ に対して $\displaystyle\sum_{1\leqq i\leqq n,1\leqq j\leqq m} r_{ij}f_{ij}(\boldsymbol{v}_k)=\mathbf{0}$ であり, f_{ij} の定義から $\displaystyle\sum_{1\leqq i\leqq n,1\leqq j\leqq m} r_{ij}f_{ij}(\boldsymbol{v}_k)=\sum_{1\leqq j\leqq n} r_{kj}\boldsymbol{w}_j$ である.

故に $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\ldots,\boldsymbol{w}_n$ の1次独立性より $r_{kj}=0$ だから $f_{11},f_{12},\ldots,f_{mn}$ は1次独立である.

任意の $f\in\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(V,W)$ と $k=1,2,\ldots,m$ に対して $f(\boldsymbol{v}_k)=\displaystyle\sum_{1\leqq j\leqq n} a_{kj}\boldsymbol{w}_j$ を満たす $a_{kj}\in\boldsymbol{K}$ が1通りに定まるため $\displaystyle\sum_{1\leqq i\leqq m,1\leqq j\leqq n} a_{ij}f_{ij}(\boldsymbol{v}_k)=\sum_{1\leqq j\leqq n} a_{kj}\boldsymbol{w}_i=f(\boldsymbol{v}_k)$ が $k=1,2,\ldots,m$ に対して成り立つ. 従って $f=\displaystyle\sum_{1\leqq i\leqq m,1\leqq j\leqq n} a_{ij}f_{ij}$ だから $f_{11},f_{12},\ldots,f_{nm}$ は $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(V,W)$ を生成する.

補題 5.27

$I_1, I_2, \ldots, I_m$ を開区間として, f を $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 $V = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_m$ で定義された C^∞ 級関数とする. $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m) \in V$ に対し, V で定義された C^∞ 級関数 $f_1, f_2, \ldots, f_m$ で, 任意の $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in V$ に対して, 次の等式を満たすものがある.

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p}) + \sum_{i=1}^{m} (x_i - p_i) f_i(\boldsymbol{x})$$

証明

$i = 0, 1, \ldots, m$ に対し, $\boldsymbol{x}_i = (x_1, \ldots, x_i, p_{i+1}, \ldots, p_m)$ とおくと, V の形状から $\boldsymbol{x}_i \in V$ である.

$i = 1, 2, \ldots, m$ に対して関数 $g_i : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を $g_i(t) = f(\boldsymbol{x}_{i-1} + t(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}))$ で定める.

$i = 1, 2, \ldots, m$ ならば $\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1} = (x_i - p_i)\, \boldsymbol{e}_i$ だから, 合成写像の微分法により

$$g_i'(t) = (x_i - p_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_{i-1} + t(x_i - p_i)\, \boldsymbol{e}_i)$$

である. 従って, 微分積分学の基本定理から次の等式が得られる.

$$f(\boldsymbol{x}_i) - f(\boldsymbol{x}_{i-1}) = g_i(1) - g_i(0) = \int_0^1 g_i'(t)\, dt = (x_i - p_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_{i-1} + t(x_i - p_i)\, \boldsymbol{e}_i)\, dt$$

証明の続き

そこで, V 上の関数 f_i を $f_i(\boldsymbol{x})=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_{i-1}+t(x_i-p_i)\,\boldsymbol{e}_i)\,dt$ で定めれば f_i は C^∞ 級関数

であり $f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{p})+\sum_{i=1}^{m}(f(\boldsymbol{x}_i)-f(\boldsymbol{x}_{i-1}))=f(\boldsymbol{p})+\sum_{i=1}^{m}(x_i-p_i)f_i(\boldsymbol{x})$ が成り立つ.

注意 5.28

補題5.27で, f が V で定義された C^r 級関数ならば $f_1,f_2,\ldots,f_m$ は C^{r-1} 級関数である.

補題 5.29

M を m 次元 C^∞ 級多様体, p を M の点とし, (U,φ) を $p\in U$ である M の座標近傍系とする. φ が U から $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 V への同相写像で V が補題5.27の形であると仮定し, $x\in U$ を $\varphi(x)$ の第 i 成分に対応させる U で定義された実数値関数を φ_i とする.

このとき各 $f\in C^\infty(U)$ に対して $f_1,f_2,\ldots,f_m\in C^\infty(U)$ で, 任意の $x\in U$ に対して

$$f(x)=f(p)+\sum_{i=1}^{m}(\varphi_i(x)-\varphi_i(p))f_i(x)$$

を満たすものがある.

証明

V で定義された C^∞ 級関数 $f\circ\varphi^{-1}$ と $\boldsymbol{p}=\varphi(p)$ に対して補題5.28を用いると V で定義された C^∞ 級関数 $\tilde{f}_1,\tilde{f}_2,\ldots,\tilde{f}_m$ で, 任意の $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in V$ に対して, 等式

$$(f\circ\varphi^{-1})(\boldsymbol{x}) = f(p) + \sum_{i=1}^{m}(x_i - \varphi_i(p))\tilde{f}_i(\boldsymbol{x})$$

を満たすものがある. $f_i = \tilde{f}_i\circ\varphi$ で f_i を定め, $x\in U$ に対して $\boldsymbol{x}=\varphi(x)$ とおいて上式に代入すれば $x_i=\varphi_i(x)$ だから結果が得られる.

定理 5.30

M を m 次元 C^∞ 級多様体とする. $p\in M$ に対し, $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ は m 次元ベクトル空間である.

証明

(U,φ) を $p\in U$ である M の座標近傍系とし, $x\in U$ を $\varphi(x)$ の第 i 成分に対応させる U で定義された実数値関数を φ_i とする. また $\bar{\varphi}_i\in C^\infty(U)$ を $\bar{\varphi}_i(x)=\varphi_i(x)-\varphi_i(p)$ で定義して $\hat{\varphi}_i\in C^\infty(p)$ を $\hat{\varphi}_i=\rho_p^U(\bar{\varphi}_i)$ で定めると $e_p : C^\infty(p)\to \boldsymbol{R}$ の定義(命題5.12の前)から $e_p(\hat{\varphi}_i)=e_p(\rho_p^U(\bar{\varphi}_i))=\bar{e}_p(\bar{\varphi}_i)=\bar{\varphi}_i(p)=\varphi_i(p)-\varphi_i(p)=0$ より $\hat{\varphi}_i\in\mathfrak{m}_p$ である.

証明の続き

任意の $\alpha \in C^\infty(p)$ に対して $\alpha = \rho_p^W(f)$ を満たす p の開近傍 W と $f \in C^\infty(W)$ を選ぶ. $\varphi(p)$ の開近傍 V を $V \subset \varphi(U \cap W)$ かつ補題5.27の形になるようにとり $Z = \varphi^{-1}(V)$ とおくと $p \in Z \subset U \cap W$ であり, $f|_Z = \rho_Z^W(f) \in C^\infty(Z)$ に補題5.29を適用できる.

命題5.11の(2)から, $\alpha = \rho_p^Z(f|_Z)$, $\hat{\varphi}_i = \rho_p^Z(\bar{\varphi}_i|_Z)$ だから, $f|_Z$, $\varphi_i|_Z$ をそれぞれ f, φ_i とおき直せば補題5.29から $f_1, f_2, \ldots, f_m \in C^\infty(Z)$ で, 任意の $x \in Z$ に対して

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\varphi}_i(x) f_i(x) \cdots (i)$$

を満たすものがある. さらに各 f_i に対して補題5.29を用いると $f_{i1}, f_{i2}, \ldots, f_{im} \in C^\infty(Z)$ で, 任意の $x \in Z$ に対して次の等式を満たすものがある.

$$f_i(x) = f_i(p) + \sum_{j=1}^{m} \bar{\varphi}_j(x) f_{ij}(x) \cdots (ii)$$

そこで, $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して (ii) を (i) に代入すれば次の等式が得られる.

証明の続き

$$f(x)=f(p)+\sum_{i=1}^{m} f_i(p)\bar{\varphi}_i(x)+\sum_{1\leqq i,j\leqq m}\bar{\varphi}_i(x)\bar{\varphi}_j(x)f_{ij}(x)\ \cdots\ (iii)$$

$\alpha\in\mathfrak{m}_p$ ならば $f(p)=e_Z(f)=e_p(\rho_p^Z(f))=e_p(\alpha)=0$ が成り立つため (iii) から $C^\infty(Z)$ における等式 $f=\sum_{i=1}^{m} f_i(p)\bar{\varphi}_i+\sum_{1\leqq i,j\leqq m}\bar{\varphi}_i\bar{\varphi}_j f_{ij}$ を得る. この両辺を $\rho_p^Z: C^\infty(Z)\to C^\infty(p)$ で写せば $C^\infty(p)$ における次の等式が得られる.

$$\alpha=\sum_{i=1}^{m} f_i(p)\hat{\varphi}_i+\sum_{1\leqq i,j\leqq m}\hat{\varphi}_i\hat{\varphi}_j\rho_p^Z(f_{ij})\ \cdots\ (vi)$$

$\hat{\varphi}_i\in\mathfrak{m}_p$ より $\hat{\varphi}_i\hat{\varphi}_j\in\mathfrak{m}_p^2$ に注意して (vi) の両辺を商写像 $\pi_p:\mathfrak{m}_p\to\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ で写せば $\pi_p(\alpha)=\sum_{i=1}^{m} f_i(p)\pi_p(\hat{\varphi}_i)$ が得られる. 故に $\pi_p(\hat{\varphi}_1),\pi_p(\hat{\varphi}_2),\ldots,\pi_p(\hat{\varphi}_m)$ は $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ を生成するため, $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ の次元を d とすれば $d\leqq m$ である. 一方, 命題5.25, 命題5.26より $\mathrm{Der}_p(C^\infty(p))$ は d 次元ベクトル空間であるが, 定理5.19より $\mathrm{Der}_p(C^\infty(p))$ は m 次元の部分空間 T_pM を含むため $d\geqq m$ でもある. 従って $d=m$ である.

注意 5.31
$\pi_p(\hat{\varphi}_1), \pi_p(\hat{\varphi}_2), \ldots, \pi_p(\hat{\varphi}_m)$ は $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ の基底である.

M が m 次元 C^∞ 級多様体ならば定理5.30より $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ は m 次元ベクトル空間だから, 命題5.25, 命題5.26より $\mathrm{Der}_p(C^\infty(p))$ は m 次元ベクトル空間である. 一方定理5.19によって, $\Delta_p : C^\infty(M;p) \to \mathrm{Der}_p(C^\infty(p))$ の像は $\mathrm{Der}_p(C^\infty(p))$ の m 次元の部分空間だから, 次の結果が得られる.

系 5.32
M が C^∞ 級多様体ならば任意の $p \in M$ に対して $\Delta_p : C^\infty(M;p) \to \mathrm{Der}_p(C^\infty(p))$ は全射である. 従って $T_pM = \mathrm{Der}_p(C^\infty(p))$ が成り立つ.

最後に $r \neq \infty$ ならば $T_0\boldsymbol{R} \neq \mathrm{Der}_0(C^r(0))$ であることを示す.

例 5.33

r を自然数とし $\boldsymbol{R}$ の座標近傍系 $\{(\boldsymbol{R}, id_{\boldsymbol{R}})\}$ と両立する C^r 級局所座標系全体からなる微分構造を $\boldsymbol{R}$ に与えて $\boldsymbol{R}$ を C^r 級多様体とみなす. $\alpha \in \mathfrak{m}_0^2$ に対し, 0を含む開区間 I と $\rho_0^I(f) = \alpha$ を満たす $f \in C^r(I)$ を選べば, 以下の主張が成り立つ.

$$(i)\ \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} \text{ が存在する.} \qquad (ii)\ (f^{(r)})'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(r)}(x) - f^{(r)}(0)}{x} \text{ が存在する.}$$

$\alpha \in \mathfrak{m}_0^2$ ならば $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \gamma_i$ を満たす $\beta_i, \gamma_i \in \mathfrak{m}_0$ が存在し, 0を含み I に含まれる開区間 J と $g_i, h_i \in C^r(J)$ で 各 i に対して $\rho_0^J(g_i) = \beta_i$, $\rho_0^J(h_i) = \gamma_i$ を満たすものが存在する. $\tilde{f} = \sum_{i=1}^{n} g_i h_i$ とおけば $\rho_0^J(\tilde{f}) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \gamma_i = \alpha = \rho_0^I(f)$ だから開区間 K で $0 \in K \subset J$ かつ $\rho_K^I(f) = \rho_K^J(\tilde{f})$ を満たすものがあるため, $\tilde{f}$ に対して (i) と (ii) を示せばよい.

$\rho_0^J(g_i) = \beta_i \in \mathfrak{m}_0$ だから $g_i(0) = \bar{e}_0(g_i) = e_0(\rho_0^J(g_i)) = e_0(\beta_i) = 0$ であり, 同様に $\rho_0^J(\gamma_i) = \gamma_i \in \mathfrak{m}_0$ だから $h_i(0) = 0$ である. 従って補題5.17から $\bar{g}_i, \bar{h}_i \in C^{r-1}(J)$ で $g_i(x) = x\bar{g}_i(x)$, $h_i(x) = x\bar{h}_i(x)$ を満たすものがある.

故に $\bar{g}_i, \bar{h}_i$ の連続性から次の等式が得られるため(i)が示された.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tilde{f}(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i(x)=\lim_{x\to 0}\sum_{i=1}^{n}\bar{g}_i(x)\bar{h}_i(x)=\sum_{i=1}^{n}\bar{g}_i(0)\bar{h}_i(0)$$

$j=1,2,\cdots,r-1$ ならば $g_i^{(j)}h_i^{(r-j)}$ はC^1級関数だから

$$(g_i^{(j)}h_i^{(r-j)})'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g_i^{(j)}(x)h_i^{(r-j)}(x)-g_i^{(j)}(0)h_i^{(r-j)}(0)}{x}$$

は存在する. また $g_i(x)=x\bar{g}_i(x),\ h_i(x)=x\bar{h}_i(x)$ より

$$(g_ih_i^{(r)})'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g_i(x)h_i^{(r)}(x)-g_i(0)h_i^{(r)}(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\bar{g}_i(x)h_i^{(r)}(x)=\bar{g}_i(0)h_i^{(r)}(0)$$
$$(g_i^{(r)}h_i)'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g_i^{(r)}(x)h_i(x)-g_i^{(r)}(0)h_i(0)}{x}=\lim_{x\to 0}g_i^{(r)}(x)\bar{h}_i(x)=g_i^{(r)}(0)\bar{h}_i(0)$$

が成り立つため, $\tilde{f}^{(r)}(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}g_i^{(j)}(x)h_i^{(r-j)}(x)$ より $(\tilde{f}^{(r)})'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\tilde{f}^{(r)}(x)-\tilde{f}^{(r)}(0)}{x}$

は存在する. よって(ii)が示された.

関数 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=x^{r+\frac{1}{3}}$ で定めれば f は C^r 級関数(第5節の課題その3(1)参照)で $\rho_0^{\boldsymbol{R}}:C^r(\boldsymbol{R})\to C^r(0)$ による f の像を λ とすれば $f(0)=0$ だから $\lambda\in\mathfrak{m}_0$ であるが $(f^{(r)})'(0)$ は存在しない(第5節の課題その3(1)参照)ため, (ii) によって $\lambda\notin\mathfrak{m}_0^2$ である.

また $\rho_0^{\boldsymbol{R}}:C^r(\boldsymbol{R})\to C^r(0)$ による $\boldsymbol{R}$ の恒等写像 $id_{\boldsymbol{R}}$ の像を μ とおき, $a,b\in\boldsymbol{R}$ に対して $a\pi_0(\lambda)+b\pi_0(\mu)=0$ が $\mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2$ において成り立つならば $\pi_0(a\lambda+b\mu)=0$ だから $a\lambda+b\mu\in\mathfrak{m}_0^2$ であり, $\rho_0^{\boldsymbol{R}}(af+b\,id_{\boldsymbol{R}})=a\lambda+b\mu$ だから (i) より $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{af(x)+b\,id_{\boldsymbol{R}}(x)}{x^2}$ が存在する. このことから $b=0$ が得られる(第5節の課題その3(2)参照)ため $a\lambda\in\mathfrak{m}_0^2$ となるが, $\mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2$ は $\boldsymbol{R}$ 上の1次元ベクトル空間ではない.

従って命題5.25から $\mathrm{Der}_0(C^r(0))$ も1次元ベクトル空間ではないため, $T_0\boldsymbol{R}$ と $\mathrm{Der}_0(C^r(0))$ は一致しないことがわかる.

幾何学III

第6節　C^r級写像の微分

C^r 級写像 $f\colon M\to N$ と $p\in M$ に対して写像 $(df)_p\colon T_pM\to T_{f(p)}N$ を定義するために, 準備をする.

命題 6.1
M を m 次元 C^r 級多様体, p を M の点とする. p を通る M 上の C^r 級曲線 ω, λ に対し, 以下の条件は同値である.
(i) $D_\omega = D_\lambda$
(ii) (U,φ) が $p\in U$ を満たす M の局所座標系ならば $(\varphi\circ\omega)'(0) = (\varphi\circ\lambda)'(0)$ である.
(iii) $p\in U$ を満たす M の局所座標系 (U,φ) で, $(\varphi\circ\omega)'(0) = (\varphi\circ\lambda)'(0)$ を満たすものが存在する.

証明
M の局所座標系 (U,φ) に対し, $x\in U$ を $\varphi(x)$ の第 i 成分に対応させる U で定義された C^r 級関数を φ_i とし, $\hat{\varphi}_i = \rho_p^U(\varphi_i)$ とおくと命題5.12での D_ω, D_λ の定義から

$$D_\omega(\hat{\varphi}_i) = D_\omega(\rho_p^U(\varphi_i)) = (\varphi_i\circ\omega)'(0), \quad D_\lambda(\hat{\varphi}_i) = D_\lambda(\rho_p^U(\varphi_i)) = (\varphi_i\circ\lambda)'(0) \cdots (*)$$

が成り立つ.

証明の続き

$(i)\Rightarrow(ii)$; $p\in U$ を満たす M の局所座標系 (U,φ) に対し, 仮定から $D_\omega(\hat{\varphi}_i)=D_\lambda(\hat{\varphi}_i)$ が $i=1,2,\ldots,m$ に対して成り立つ. 従って $(*)$ から $(\varphi_i\circ\omega)'(0)=(\varphi_i\circ\lambda)'(0)$ が $i=1,2,\ldots,m$ に対して成り立ち, $(\varphi_i\circ\omega)'(0)$, $(\varphi_i\circ\lambda)'(0)$ はそれぞれ $(\varphi\circ\omega)'(0)$, $(\varphi\circ\lambda)'(0)$ の第 i 成分だから $(\varphi\circ\omega)'(0)=(\varphi\circ\lambda)'(0)$ である.

$(ii)\Rightarrow(iii)$; 明らかである.

$(iii)\Rightarrow(i)$; $(\varphi\circ\omega)'(0)=(\varphi\circ\lambda)'(0)$ の両辺の第 i 成分どうしは等しいので, $i=1,2,\ldots,m$ に対して $(\varphi_i\circ\omega)'(0)=(\varphi_i\circ\lambda)'(0)$ が成り立つため $(*)$ から $D_\omega(\hat{\varphi}_i)=D_\lambda(\hat{\varphi}_i)$ である. 一方命題5.18より $c_i=D_\omega(\hat{\varphi}_i)$, $d_i=D_\lambda(\hat{\varphi}_i)$ とおけば

$$D_\omega=c_1D_{\omega_{\varphi,1}}+c_2D_{\omega_{\varphi,2}}+\cdots+c_mD_{\omega_{\varphi,m}},\quad D_\lambda=d_1D_{\omega_{\varphi,1}}+d_2D_{\omega_{\varphi,2}}+\cdots+d_mD_{\omega_{\varphi,m}}$$

が成り立つが, $i=1,2,\ldots,m$ に対して $c_i=d_i$ だから $D_\omega=D_\lambda$ である.

本節では以後, M を m 次元 C^r 級多様体, N を n 次元 C^r 級多様体とし, $f: M \to N$ を C^r 級写像とする.

補題 6.2
$p \in M$ を通る M 上の C^r 級曲線 ω, λ が $D_\omega = D_\lambda$ を満たせば $D_{f\circ\omega} = D_{f\circ\lambda}$ が成り立つ.

証明

$f(p) \in V$ を満たす N の局所座標系 (V, ψ) をとる. 必要ならば ω, λ の 0 を含む定義域を縮小して合成写像 $(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\omega)$, $(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\omega)$ が定義されるようにする.

このとき, 合成写像の微分法から次の等式が得られる.

$$(\psi\circ f\circ\omega)'(0) = ((\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\omega))'(0) = (\psi\circ f\circ\varphi^{-1})'(\varphi(p))(\varphi\circ\omega)'(0)$$

$$(\psi\circ f\circ\lambda)'(0) = ((\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\lambda))'(0) = (\psi\circ f\circ\varphi^{-1})'(\varphi(p))(\varphi\circ\lambda)'(0)$$

仮定と命題6.1から $(\varphi\circ\omega)'(0) = (\varphi\circ\lambda)'(0)$ だから, 上式から

$(\psi\circ f\circ\omega)'(0) = (\psi\circ f\circ\lambda)'(0)$ が得られる. 従って命題6.1から $D_{f\circ\omega} = D_{f\circ\lambda}$ が成り立つ.

$v \in T_pM$ に対して p を通る M 上の C^r 級曲線 ω で $v = D_\omega$ を満たすものを選び, v に $D_{f\circ\omega} \in T_{f(p)}N$ を対応させることによって写像 $(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ を定義する.
命題6.2から $D_{f\circ\omega}$ は ω の選び方によらないことに注意する.
次に $(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ が線形写像であることを示すために, まず $p \in U$ かつ $\varphi(p) = \mathbf{0}$ を満たす M の局所座標系 (U, φ) を1つ選ぶ. p を通る M 上の C^r 級曲線 ω, λ と $a \in \boldsymbol{R}$ に対し, ω, λ と φ の連続性から, $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \omega^{-1}(U) \cap \lambda^{-1}(U)$ かつ条件

「$t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ならば $(\varphi\circ\omega)(t) + (\varphi\circ\lambda)(t), a(\varphi\circ\omega)(t) \in \varphi(U)$」

を満たす $\varepsilon > 0$ を選ぶことができる. そこで $\eta, \chi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ を

$$\eta(t) = \varphi^{-1}((\varphi\circ\omega)(t) + (\varphi\circ\lambda)(t)), \quad \chi(t) = \varphi^{-1}(a(\varphi\circ\omega)(t))$$

によって定義する. このとき η, χ は p を通る M 上の C^r 級曲線である.

補題 6.3
上で定義した $\eta, \chi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ は $D_\omega + D_\lambda = D_\eta$, $aD_\omega = D_\chi$ を満たす.

証明

$\alpha\in C^r(p)$ に対して, $\alpha=\rho_p^V(u)$ を満たす p の開近傍 V と $u\in C^r(V)$ を選ぶと, 合成写像の微分法から次の等式が得られるため, 主張が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
D_\eta(\alpha)=D_\eta(\rho_p^V(u))=(u\circ\eta)'(0)&=((u\circ\varphi^{-1})\circ((\varphi\circ\omega)+(\varphi\circ\lambda)))'(0)\\
&=(u\circ\varphi^{-1})'(\mathbf{0})((\varphi\circ\omega)+(\varphi\circ\lambda))'(0)\\
&=(u\circ\varphi^{-1})'(\mathbf{0})(\varphi\circ\omega)'(0)+(u\circ\varphi^{-1})'(\mathbf{0})(\varphi\circ\lambda)'(0)\\
&=((u\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\omega))'(0)+((u\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\lambda))'(0)\\
&=(u\circ\omega)'(0)+(u\circ\lambda)'(0)=D_\omega(\rho_p^V(u))+D_\lambda(\rho_p^V(u))\\
&=D_\omega(\alpha)+D_\lambda(\alpha)=(D_\omega+D_\lambda)(\alpha)\\
D_\chi(\alpha)=D_\chi(\rho_p^V(u))=(u\circ\chi)'(0)&=((u\circ\varphi^{-1})\circ(a(\varphi\circ\omega)))'(0)\\
&=(u\circ\varphi^{-1})'(\mathbf{0})(a(\varphi\circ\omega))'(0)=a(u\circ\varphi^{-1})'(\mathbf{0})(\varphi\circ\omega)'(0)\\
&=a((u\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\omega))'(0)=a(u\circ\omega)'(0)\\
&=aD_\omega(\rho_p^V(u))=aD_\omega(\alpha)=(aD_\omega)(\alpha)
\end{aligned}
$$

命題 6.4

$(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ は線形写像である.

証明

$v, w \in T_pM$ に対して p を通る M 上の C^r 級曲線 ω, λ で $v = D_\omega, w = D_\lambda$ を満たすものを選び, さらに $a \in \boldsymbol{R}$ に対し, 補題6.3の p を通る M 上の C^r 級曲線 η, χ を考えれば $v + w = D_\omega + D_\lambda = D_\eta$, $av = aD_\omega = D_\chi$ だから $(df)_p$ の定義から次の等式が成り立つ.

$$(df)_p(v+w) = D_{f\circ\eta}, \quad (df)_p(av) = D_{f\circ\chi} \cdots (i)$$

一方, $f(p) \in V$ かつ $\psi(f(p)) = \mathbf{0}$ 満たす N の局所座標系 (V, ψ) を選んで, $\delta > 0$ を十分小さくとり $\bar{\eta}, \bar{\chi} : (-\delta, \delta) \to N$ を以下のように定める.

$$\bar{\eta}(t) = \psi^{-1}((\psi\circ f\circ\omega)(t) + (\psi\circ f\circ\lambda)(t)), \quad \bar{\chi}(t) = \psi^{-1}(a(\psi\circ f\circ\omega)(t))$$

このとき $(df)_p$ の定義と補題6.3から次の等式が成り立つ.

$$(df)_p(v) + (df)_p(w) = D_{f\circ\omega} + D_{f\circ\lambda} = D_{\bar{\eta}}, \quad a(df)_p(v) = aD_{f\circ\omega} = D_{\bar{\chi}} \cdots (ii)$$

証明の続き

合成写像の微分法から

$$
\begin{aligned}
(\psi\circ f\circ\eta)'(0) &= ((\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ((\varphi\circ\omega)+(\varphi\circ\lambda)))'(0)\\
&= (\psi\circ f\circ\varphi^{-1})'(\mathbf{0})((\varphi\circ\omega)+(\varphi\circ\lambda))'(0)\\
&= (\psi\circ f\circ\varphi^{-1})'(\mathbf{0})(\varphi\circ\omega)'(0)+(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})'(\mathbf{0})(\varphi\circ\lambda)'(0)\\
&= ((\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\omega))'(0)+((\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\lambda))'(0)\\
&= (\psi\circ f\circ\omega)'(0)+(\psi\circ f\circ\lambda)'(0)\\
&= ((\psi\circ f\circ\omega)+(\psi\circ f\circ\lambda))'(0)=(\psi\circ\bar{\eta})'(0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\psi\circ f\circ\chi)'(0) &= ((\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ(a(\varphi\circ\omega)))'(0)=(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})'(\mathbf{0})(a(\varphi\circ\omega))'(0)\\
&= a(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})'(\mathbf{0})(\varphi\circ\omega)'(0)=a((\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\omega))'(0)\\
&= a(\psi\circ f\circ\omega)'(0)=(a(\psi\circ f\circ\omega))'(0)=(\psi\circ\bar{\chi})'(0)
\end{aligned}
$$

が成り立つため命題6.1から $D_{f\circ\eta}=D_{\bar{\eta}}$, $D_{f\circ\chi}=D_{\bar{\chi}}$ が得られる. 故に (i), (ii) から

$(df)_p(v+w)=(df)_p(v)+(df)_p(w)$, $(df)_p(av)=a(df)_p(v)$ が成り立つ.

定義 6.5　C^r 級写像の微分
写像 $(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ を p における $f\colon M \to N$ の**微分**という.

$p \in U$ である M の局所座標系 (U, φ) と $f(p) \in V$ である N の局所座標系 (V, ψ) に対し,
p を通る M 上の C^r 級曲線 $\omega_{\varphi,1}, \omega_{\varphi,2}, \ldots, \omega_{\varphi,m}$ と $f(p)$ を通る N 上の C^r 級曲線
$\omega_{\psi,1}, \omega_{\psi,2}, \ldots, \omega_{\psi,n}$ を次のように定める(命題5.16参照).

$\varphi(p) = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, $\psi(f(p)) = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ とおいて, $\varepsilon > 0$ を十分小さく選び,

$$\lambda_j(t) = (p_1, \ldots, p_{j-1}, p_j + t, p_{j+1}, \ldots, p_m), \quad \mu_i(t) = (q_1, \ldots, q_{i-1}, q_i + t, q_{i+1}, \ldots, q_n)$$

により $\lambda_j : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \boldsymbol{R}^m$, $\mu_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \boldsymbol{R}^n$ を定め, $\omega_{\varphi,j} = \varphi^{-1} \circ \lambda_j$, $\omega_{\psi,i} = \psi^{-1} \circ \mu_i$ とおく.
定理5.19から $D_{\omega_{\varphi,1}}, D_{\omega_{\varphi,2}}, \ldots, D_{\omega_{\varphi,m}}$ は T_pM の基底であり, $D_{\omega_{\psi,1}}, D_{\omega_{\psi,2}}, \ldots, D_{\omega_{\psi,n}}$ は
$T_{f(p)}N$ の基底である. 習慣に従って $D_{\omega_{\varphi,j}} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$, $D_{\omega_{\psi,j}} = \left(\dfrac{\partial}{\partial y_j}\right)_{f(p)}$ とおけば, これらの
基底に関する $(df)_p$ の表現行列は次の命題で与えられる.

命題 6.6

写像 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap f^{-1}(V))\to\psi(V)$ の第 i 成分の関数を $(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})_i$ とすれば

$$(df)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})_i}{\partial x_j}(\varphi(p))\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{f(p)}$$

が成り立つ. 従って T_pM の基底 $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p,\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p,\ldots,\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$ と $T_{f(p)}N$ の基底 $\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{f(p)},\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{f(p)},\ldots,\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_{f(p)}$ に関する $(df)_p$ の表現行列は写像 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ の $\varphi(p)$ における微分である.

証明

ψ の第 i 成分の関数を ψ_i として $\hat{\psi}_i = \rho^V_{f(p)}(\psi_i)$, $c_{ij} = D_{f\circ\omega_{\varphi,j}}(\hat{\psi}_i)$ とおけば $(df)_p$ の定義と命題5.18から次の等式が成り立つ.

$$(df)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) = D_{f\circ\omega_{\varphi,j}} = c_{1j}D_{\omega_{\psi,1}} + c_{2j}D_{\omega_{\psi,2}} + \cdots + c_{nj}D_{\omega_{\psi,n}} \quad \cdots (*)$$

また $(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})_i = \psi_i\circ f\circ\varphi^{-1}$ であることに注意すれば次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}
c_{ij} &= D_{f\circ\omega_{\varphi,j}}(\hat{\psi}_i) = D_{f\circ\omega_{\varphi,j}}(\rho^V_{f(p)}(\psi_i)) = D_{f\circ\omega_{\varphi,j},V}(\psi_i) \\
&= (\psi_i\circ f\circ\omega_{\varphi,j})'(0) = ((\psi_i\circ f\circ\varphi^{-1})\circ\lambda_j)'(0) \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(\psi_i\circ f\circ\varphi^{-1})(p_1,\ldots,p_j+t,\ldots,p_m) - (\psi_i\circ f\circ\varphi^{-1})(p_1,\ldots,p_j,\ldots,p_m)}{t} \\
&= \frac{\partial(\psi_i\circ f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_j}(\varphi(p)) = \frac{\partial(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})_i}{\partial x_j}(\varphi(p))
\end{aligned}$$

故に $(*)$ から主張が得られる.

命題 6.7　合成写像の微分

M, N, L を C^r 級多様体とし, $f\colon M\to N$, $g\colon N\to L$ を C^r 級写像とする. $p\in M$ に対して次の等式が成り立つ.

$$(d(g\circ f))_p = (dg)_{f(p)}\circ (df)_p : T_pM \to T_{(g\circ f)(p)}L$$

証明

$v\in T_pM$ に対して p を通る M 上の C^r 級曲線 ω で $v=D_\omega$ を満たすものを選べば, $(df)_p(v)=D_{f\circ\omega}$ であり, $f\circ\omega$ は $f(p)$ を通る N 上の C^r 級曲線だから,

$$(dg)_{f(p)}((df)_p(v))=(dg)_{f(p)}(D_{f\circ\omega})=D_{g\circ(f\circ\omega)}=D_{(g\circ f)\circ\omega}=(d(g\circ f))_p(v)$$

が成り立つため主張が示される.

注意 6.8　恒等写像の微分

$id_M\colon M\to M$ を M の恒等写像とする. $v\in T_pM$ に対して p を通る M 上の C^r 級曲線 ω で $v=D_\omega$ を満たすものを選べば, $(d(id_M))_p(v)=D_{id_M\circ\omega}=D_\omega=v$ だから M の p における恒等写像の微分 $(d(id_M))_p$ は T_pM の恒等写像である.

命題 6.9　微分同相写像の微分

M, N をそれぞれ m 次元, n 次元 C^r 級多様体とし, $f\colon M \to N$ を C^r 級微分同相写像とすれば, 任意の $p \in M$ に対して $(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ はベクトル空間の同型写像である. 従って M と N の間に C^r 級微分同相写像が存在すれば $m = n$ である.

証明

f の逆写像 $f^{-1}\colon N \to M$ も C^r 級写像で, $f^{-1}(f(p)) = p$ だから命題6.7と注意6.8から

$$(df^{-1})_{f(p)} \circ (df)_p = (d(f^{-1} \circ f))_p = (d(id_M))_p = id_{T_pM}$$

$$(df)_p \circ (df^{-1})_{f(p)} = (d(f \circ f^{-1}))_{f(p)} = (d(id_N))_{f(p)} = id_{T_{f(p)}N}$$

が成り立つため, $(df^{-1})_{f(p)}$ は $(df)_p$ の逆写像である. 故に $(df)_p$ はベクトル空間の同型写像である.

幾何学III

第7節　部分多様体

幾何学IIの授業で示した陰関数定理と逆写像定理のおさらいから始める.

$((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n))\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m$ と $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)\in\boldsymbol{R}^{n+m}$ を対応させることによって, $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m$ と $\boldsymbol{R}^{n+m}$ を以下では同一視する.

$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m$ の開集合 U から $\boldsymbol{R}^m$ への写像 F が $\boldsymbol{p}\in U$ で微分可能であるとき, F の $\boldsymbol{p}$ における微分である $m\times(n+m)$ 行列 $F'(\boldsymbol{p})$ の第1列目から第 n 列目からなる $m\times n$ 行列を $D_1F(\boldsymbol{p})$ で表し, $F'(\boldsymbol{p})$ の第 $n+1$ 列目から第 $n+m$ 列目からなる $m\times m$ 行列を $D_2F(\boldsymbol{p})$ で表す. 従って $F'(\boldsymbol{p})=(D_1F(\boldsymbol{p})\ \ D_2F(\boldsymbol{p}))$ である.

このとき, 陰関数定理と逆関数定理は次のように述べられる.

証明は幾何学IIのプリントの第5節を参照せよ.

定理 7.1　陰関数定理

F は $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$ の開集合 U から $\boldsymbol{R}^m$ への C^r 級写像で, U の点 $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ に対し, $F(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{0}$ かつ $D_2F(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ は正則行列であるとする. このとき $\boldsymbol{R}^n$ における $\boldsymbol{x}_0$ の開近傍 U_0 が存在して, U_0 に含まれる $\boldsymbol{x}_0$ の任意の連結な開近傍 U_1 に対し, C^r 級写像 $f: U_1 \to \boldsymbol{R}^m$ で $f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}_0$ かつ, すべての $\boldsymbol{x} \in U_1$ に対して $(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) \in U$, $F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$ を満たすものがただ一つ存在する. さらに f の微分は以下で与えられる.

$$f'(\boldsymbol{x}) = -D_2F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))^{-1} D_1F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))$$

定理 7.2　逆写像定理

f を $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$ の開近傍 U から $\boldsymbol{R}^n$ への C^r 級写像とする. $f'(\boldsymbol{x}_0)$ が正則行列ならば U に含まれる $\boldsymbol{x}_0$ の開近傍 U_0 で f の U_0 への制限が $\boldsymbol{R}^n$ における $f(\boldsymbol{x}_0)$ のある開近傍の上への C^r 級微分同相写像になるようなものが存在する.

逆写像定理の応用として以下の結果が示される.

命題 7.3

$m \geqq n$ とし, U を $\boldsymbol{R}^m$ における $\mathbf{0}$ の開近傍, V を $\boldsymbol{R}^n$ における $\mathbf{0}$ の開近傍とする.
$f:U \to V$ が C^r 級写像で, $f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ かつ f の $\mathbf{0}$ における微分 $f'(\mathbf{0})$ の階数が n であるとき, $\boldsymbol{R}^m$ における $\mathbf{0}$ の開近傍 U', U'' と C^r 級微分同相写像 $g:U' \to U''$ で, $U'' \subset U$ かつ $(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_m) \in U'$ ならば次の等式を満たすものが存在する.

$$f(g(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_m)) = (x_1,\ldots,x_n)$$

証明

$f'(\mathbf{0})$ の第1列目から第 n 列目までの列ベクトルからなる正方行列を $D_1 f(\mathbf{0})$ とする.
$f'(\mathbf{0})$ の階数は n だから, $\boldsymbol{R}^m$ の成分を入れ替える同型写像を f の手前に合成することによって $D_1 f(\mathbf{0})$ は正則行列であると仮定してよい. f の第 i 成分の関数を f_i として,
写像 $F:U \to \boldsymbol{R}^m$ を以下のように定める.

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_m) = (f_1(x_1,x_2,\ldots,x_m),\ldots,f_n(x_1,x_2,\ldots,x_m),x_{n+1},x_{n+2},\ldots,x_m)$$

証明の続き

このとき $D_1f(\mathbf{0})$ が正則行列であることから, E_{m-n} を $m-n$ 次単位行列とすれば

$$F'(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} D_1f(\mathbf{0}) & * \\ O & E_{m-n} \end{pmatrix}$$

は正則行列である. 従って逆写像定理から $\boldsymbol{R}^m$ における $\mathbf{0}$ の開近傍 U'' で, F の定義域を U'' に制限して得られる写像 $F|_{U''}: U'' \to F(U'')$ が C^r 級微分同相写像になるものが存在する. そこで, $\mathrm{pr}: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$ を $\mathrm{pr}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n)$ で定めて $U' = F(U'')$, $g = (F|_{U''})^{-1}: U' \to U''$ とおけば $f = \mathrm{pr} \circ F$ だから

$$\begin{aligned} f(g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m)) &= (\mathrm{pr} \circ F)(g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m)) \\ &= \mathrm{pr}(F((F|_{U''})^{-1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m))) \\ &= \mathrm{pr}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m) \end{aligned}$$

が $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m) \in U'$ に対して成り立つ.

命題 7.4
$m \leqq n$ とし, U を $\boldsymbol{R}^m$ における $\mathbf{0}$ の開近傍, V を $\boldsymbol{R}^n$ における $\mathbf{0}$ の開近傍とする.
$f : U \to V$ が C^r 級写像で, $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ かつ f の $\mathbf{0}$ における微分 $f'(\mathbf{0})$ の階数が m であるとき, $\boldsymbol{R}^n$ における $\mathbf{0}$ の開近傍 V', V'' と C^r 級微分同相写像 $g : V' \to V''$ で, 次の条件を満たすものが存在する.
(i) $V' \subset V$ であり $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in f^{-1}(V')$ ならば次の等式が成り立つ.

$$g(f(x_1, x_2, \ldots, x_m)) = (x_1, x_2, \ldots, x_m, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-m})$$

(ii) $(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in V'' \cap (\boldsymbol{R}^m \times \{(\overbrace{0, \ldots, 0}^{n-m})\})$ ならば $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in f^{-1}(V')$ である.

証明
$f'(\mathbf{0})$ の第1行目から第 m 行目まで行ベクトルからなる正方行列を $D_1^* f(\mathbf{0})$ とする.
$f'(\mathbf{0})$ の階数が m だから, $\boldsymbol{R}^n$ の成分を入れ替える写像を f の後ろに合成することによって $D_1^* f(\mathbf{0})$ は正則行列であると仮定してよい.

証明の続き

写像 $F:U\times\boldsymbol{R}^{n-m}\to\boldsymbol{R}^n$ を以下のように定める.

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_n)=f(x_1,x_2,\ldots,x_m)+(\overbrace{0,\ldots,0}^{m},x_{m+1},\ldots,x_n)$$

このとき $D_1^*f(\mathbf{0})$ が正則行列であることから, E_{n-m} を $n-m$ 次単位行列とすれば

$$F'(\mathbf{0})=\begin{pmatrix} D_1^*f(\mathbf{0}) & O \\ * & E_{n-m} \end{pmatrix}$$

は正則行列である. 従って逆写像定理から $\boldsymbol{R}^n$ における $\mathbf{0}$ の開近傍 V'' で, F の定義域を V'' に制限して得られる写像 $F|_{V''}:V''\to F(V'')$ が C^r 級微分同相写像になるものが存在する. そこで $i:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^n$ を $i(x_1,\ldots,x_m)=(x_1,\ldots,x_m,\overbrace{0,\ldots,0}^{n-m})$ で定めて $V'=F(V'')$, $g=(F|_{V''})^{-1}:V'\to V''$ とおけば $f=F\circ i$ だから次の等式が $(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in f^{-1}(V')$ に対して成り立つため (*i*) が成り立つことがわかる.

$$g(f(x_1,x_2,\ldots,x_m))=g((F\circ i)(x_1,x_2,\ldots,x_m))=(F|_{V''})^{-1}(F(x_1,\ldots,x_m,\overbrace{0,\ldots,0}^{n-m}))$$
$$=(x_1,\ldots,x_m,\overbrace{0,\ldots,0}^{n-m})$$

証明の続き

$(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in V'' \cap (\boldsymbol{R}^m \times \{(\overbrace{0, \ldots, 0}^{n-m})\})$ ならば F の定義から次の式が成り立ち,

$$g^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) = (F|_{V''})(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = g^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in V'$ だから $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in f^{-1}(V')$ が得られるため (ii) が成り立つことがわかる.

命題 7.5

M, N をそれぞれ m 次元, n 次元 C^r 級多様体とし, $f: M \to N$ を C^r 級写像とする. $m \geqq n$, $p \in M$ とし, (V, ψ) は $f(p) \in V$ かつ $\psi(f(p)) = \mathbf{0}$ を満たす N の局所座標系で, $(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ が全射であるとき, $p \in U$ である M の局所座標系 (U, φ) で, (U, φ) と (V, ψ) に関する f の局所座標表示 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$ が任意の $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m) \in \varphi(U \cap f^{-1}(V))$ に対して

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n)$$

となるものが存在する.

証明

(W,η) を $p\in W$ である M の局所座標系とする. η の後ろに $\boldsymbol{R}^m$ の平行移動 $\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{x}-\eta(p)$ を合成することにより, $\eta(p)=\boldsymbol{0}$ としてよい.

$(df)_p$ は全射だから, その階数は n である. 故に命題6.6から (W,η) と (V,ψ) に関する f の局所座標表示 $\psi\circ f\circ\eta^{-1}:\eta(W\cap f^{-1}(V))\to\psi(V)$ は命題7.3の仮定を満たす.

故に $\boldsymbol{R}^m$ における $\boldsymbol{0}$ の開近傍 U', U'' と C^r 級微分同相写像 $g:U'\to U''$ で, $U''\subset\eta(W\cap f^{-1}(V))$ かつ $(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_m)\in U'$ ならば

$$(\psi\circ f\circ\eta^{-1})(g(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_m))=(x_1,\dots,x_n)\ \cdots\ (*)$$

を満たすものが存在する. そこで $U=\eta^{-1}(U'')$, $\varphi=g^{-1}\circ\eta:U\to U'$ とおけば $\eta(U\cap f^{-1}(V))\subset\eta(U)=U''$ より以下の包含関係が成り立つ.

$$\varphi(U\cap f^{-1}(V))=g^{-1}(\eta(U\cap f^{-1}(V)))\subset g^{-1}(U'')=U'$$

さらに $\varphi^{-1}=\eta^{-1}\circ g$ だから, $(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_m)\in\varphi(U\cap f^{-1}(V))$ ならば $(*)$ より

$$(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_m)=(x_1,\dots,x_n)$$

が成り立つ.

命題 7.6

M, Nをそれぞれm次元, n次元C^r級多様体とし, $f: M \to N$をC^r級写像とする.
$m \leqq n$, $p \in M$とし, (U, φ)は$p \in U$かつ$\varphi(p) = \mathbf{0}$を満たすMの局所座標系で,
$(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$が単射であるとき, $f(p) \in V$であるNの局所座標系(V, ψ)で,
(U, φ)と(V, ψ)に関するfの局所座標表示$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$が
次の条件を満たすものが存在する.

(i) $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \varphi(U \cap f^{-1}(V))$ ならば次の等式が成り立つ.

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-m})$$

(ii) $(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in \psi(V) \cap (\boldsymbol{R}^m \times \{(\overbrace{0, \ldots, 0}^{n-m})\})$ ならば
$(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \varphi(U \cap f^{-1}(V))$ である.

証明

(Z, λ)を$f(p) \in Z$であるNの局所座標系とする. λの後ろに$\boldsymbol{R}^n$の平行移動
$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} - \lambda(f(p))$を合成することにより, $\lambda(f(p)) = \mathbf{0}$としてよい.

証明の続き

$(df)_p$ は単射だから, その階数は m である. 故に命題6.6から (U,φ) と (Z,λ) に関する f の局所座標表示 $\lambda\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap f^{-1}(Z))\to\lambda(Z)$ は命題7.4の仮定を満たす. 故に $i:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^n$ を命題7.4の証明で定めたものとすれば, $\boldsymbol{R}^n$ における $\boldsymbol{0}$ の開近傍 V', V'' と C^r 級微分同相写像 $g:V'\to V''$ で, 次の条件を満たすものが存在する.

(i′) $V'\subset\lambda(Z)$ であり $\boldsymbol{x}\in(\lambda\circ f\circ\varphi^{-1})^{-1}(V')$ ならば $g((\lambda\circ f\circ\varphi^{-1})(\boldsymbol{x}))=i(\boldsymbol{x})$ である.

(ii′) $i(\boldsymbol{x})\in V''\cap(\boldsymbol{R}^m\times\{(\overbrace{0,\ldots,0}^{n-m})\})$ ならば $\boldsymbol{x}\in(\lambda\circ f\circ\varphi^{-1})^{-1}(V')$ である.

ここで $x\in(\lambda\circ f\circ\varphi^{-1})^{-1}(V')$ は $(\lambda\circ f\circ\varphi^{-1})(x)\in V'$ と同値で, $V=\lambda^{-1}(V')$ とおくと $(\lambda\circ f\circ\varphi^{-1})(x)\in V'$ は $f(\varphi^{-1}(x))\in\lambda^{-1}(V')=V$ と同値である. さらに φ の定義域は U だから $f(\varphi^{-1}(x))\in V$ は $\varphi^{-1}(x)\in U\cap f^{-1}(V)$ と同値である. 故に $x\in(\lambda\circ f\circ\varphi^{-1})^{-1}(V')$ は $x\in\varphi(U\cap f^{-1}(V))$ と同値になり, $\varphi(U\cap f^{-1}(V))=(\lambda\circ f\circ\varphi^{-1})^{-1}(V')$ が成り立つ. $\psi=g\circ\lambda:V\to V''$ とおけば $\psi(V)=g(\lambda(V))=g(V')=V''$ だから (i′), (ii′) から (i), (ii) がそれぞれ成り立つことがわかる.

定義 7.7　はめ込み

M, N をそれぞれ m 次元, n 次元 C^r 級多様体とし, $f: M \to N$ を C^r 級写像とする.
すべての $p \in M$ に対して $(df)_p: T_pM \to T_{f(p)}N$ が単射であるとき, f を**はめ込み**という.

例 7.8

n を 0 でない実数とし, $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ を $f(t) = (\sin(nt)\cos t, \sin(nt)\sin t)$ で定義すれば

$$f'(t) = \begin{pmatrix} n\cos(nt)\cos t - \sin(nt)\sin t \\ n\cos(nt)\sin t + \sin(nt)\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n\cos(nt) \\ \sin(nt) \end{pmatrix}$$

が成り立つ. $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ は正則行列で, すべての実数 t に対して $\begin{pmatrix} n\cos(nt) \\ \sin(nt) \end{pmatrix}$ は零ベクトルでないため, f ははめ込みである.

例 7.9

$R>r>0$ とし, $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^3$ を $f(x,y)=((R+r\cos y)\cos x,(R+r\cos y)\sin x, r\sin y)$ で定義すれば $f'(x,y)$ は次の式で与えられる.

$$f'(x,y)=\begin{pmatrix} -(R+r\cos y)\sin x & -r\sin y\cos x \\ (R+r\cos y)\cos x & -r\sin y\sin x \\ 0 & r\cos y \end{pmatrix}$$

$f'(x,y)$ の第3行を除いて得られる 2×2 行列の行列式の値は $r\sin y(R+r\cos y)$ である. $\sin y\neq 0$ の場合, この値は0でないため $\operatorname{rank} f'(x,y)=2$ である. $\sin y=0$ の場合は $\cos y\neq 0$ だから, この場合も $f'(x,y)$ の第1列と第2列は1次独立となり $\operatorname{rank} f'(x,y)=2$ である. 従って, f ははめ込みである.

定義 7.10　埋め込み

M, N をそれぞれ m 次元, n 次元 C^r 級多様体とし, $f:M\to N$ を C^r 級写像とする. f がはめ込みであり, $x\in M$ を $f(x)$ に対応させる M から N の部分空間 $f(M)$ への写像が同相写像であるとき, f を**埋め込み**という.

命題 7.11
$f\colon M\to N$ が C^r 級写像で, はめ込みであるとき, 任意の $p\in M$ に対して p の開近傍 W で, f の W への制限 $f|_W\colon W\to N$ が埋め込みになるようなものが存在する.

証明

任意の $p\in M$ に対して $(df)_p\colon T_pM\to T_{f(p)}N$ は単射だから命題7.6により $p\in U$ である M の局所座標系 (U,φ) と $f(p)\in V$ である N の局所座標系 (V,ψ) で, (U,φ) と (V,ψ) に関する f の局所座標表示 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\colon\varphi(U\cap f^{-1}(V))\to\psi(V)$ が任意の $(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in\varphi(U\cap f^{-1}(V))$ に対して以下の式を満たすものが存在する.

$$(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(x_1,x_2,\ldots,x_m)=(x_1,\ldots,x_m,\overbrace{0,\ldots,0}^{n-m})\ \cdots\ (*)$$

$W=U\cap f^{-1}(V)$ とおき, $i\colon\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^n$ を命題7.4の証明で定めたものとすれば, $(*)$ から $\boldsymbol{x}\in\varphi(W)$ に対して $(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\boldsymbol{x})=i(\boldsymbol{x})$ だから $x\in W$ に対して $f(x)=\psi^{-1}(i(\varphi(x)))$ が成り立つ.

証明の続き

故に $\psi^{-1}(i(\varphi(W)))=f(W)$ であり, ψ^{-1} は $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 $\psi(V)$ から V への同相写像だから, ψ^{-1} は $i(\varphi(W))$ から $f(W)$ への同相写像を与える. また, φ は W から $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 $\varphi(W)$ への同相写像を与え, i は $\varphi(W)$ から $i(\varphi(W))$ への同相写像である.

従って $f|_W : W \to N$ は $f(W)$ への同相写像である.

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & f(W) & \subset & V \\
\varphi(W) \arrow[r, "i"] & i(\varphi(W)) \arrow[u, "\psi^{-1}|_{i(\varphi(W))}"] & \subset & \psi(V) \arrow[u, "\psi^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

定義 7.12　部分多様体

N を n 次元 C^r 級多様体とする. N の部分空間 M が次の条件を満たすとき, M を N の m 次元 C^r 級部分多様体という.

(i)　$m=n$ の場合 : M は N の開集合である.

(ii) $0 \leqq m < n$ の場合 : 各 $p \in M$ に対して $p \in V$ を満たす N の局所座標系 (V, ψ) で, ψ の第 i 成分の関数を ψ_i とするとき次の等式を満たすものが存在する.

$$M \cap V = \{x \in V \mid \psi_{m+1}(x) = \psi_{m+2}(x) = \cdots = \psi_n(x) = 0\}$$

命題 7.13

n 次元 C^r 級多様体 N の m 次元 C^r 級部分多様体 M は m 次元 C^r 級多様体である.

証明

$m=n$ の場合, M は N の開集合だから M は N の開部分多様体(定義2.9)である.

$0 \leqq m < n$ の場合, M に N の部分空間としての位相を与えて M の C^r 級座標近傍系を以下のように定義する.

証明の続き

各 $p\in M$ に対して N の局所座標系 (V_p,ψ_p) で, 定義7.12の (ii) の条件を満たすものを選び, $U_p=M\cap V_p$ とおくと U_p は p を含む M の開集合で, $M=\bigcup_{p\in M} U_p$ が成り立つ.

$\mathrm{pr}:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ を $\mathrm{pr}(x_1,\ldots,x_m,\ldots,x_n)=(x_1,\ldots,x_m)$ で定めて, $\varphi_p(x)=\mathrm{pr}(\psi_p(x))$ で $\varphi_p:U_p\to\boldsymbol{R}^m$ を定める. また $i:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^n$ を命題7.4の証明で定めたものとし, $j_p:U_p\to V_p$ を包含写像とすれば, (V_p,ψ_p) が定義7.12の (ii) の条件を満たすことから, $i\circ\varphi_p=\psi_p\circ j_p$ が成り立つため $\varphi_p(U_p)\subset i^{-1}(\psi_p(U_p))$ である. $\boldsymbol{x}\in i^{-1}(\psi_p(U_p))$ ならば $i(\boldsymbol{x})=\psi_p(x)$ を満たす $x\in U_p$ が存在する. $i(\varphi_p(x))=\psi_p(j_p(x))=\psi_p(x)=i(\boldsymbol{x})$ で i は単射だから $\boldsymbol{x}=\varphi_p(x)\in\varphi_p(U_p)$ が得られて $\varphi_p(U_p)=i^{-1}(\psi_p(U_p))$ がわかる.

$\varphi_p^{-1}:\varphi_p(U_p)\to U_p$ を $\varphi_p^{-1}(\boldsymbol{x})=\psi_p^{-1}(i(\boldsymbol{x}))$ で定めれば $\boldsymbol{x}\in\varphi_p(U_p)$ に対して $\varphi_p(\varphi_p^{-1}(\boldsymbol{x}))=\mathrm{pr}(\psi_p(\psi_p^{-1}(i(\boldsymbol{x}))))=\mathrm{pr}(i(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{x}$ であり, $x\in U_p$ に対して $i(\boldsymbol{x})=\psi_p(x)$ を満たす $\boldsymbol{x}\in i^{-1}(\psi_p(U_p))$ が存在するため, 次の等式が成り立つ.

証明の続き

$$\varphi_p^{-1}(\varphi_p(x))=\psi_p^{-1}(i(\mathrm{pr}(\psi_p(x))))=\psi_p^{-1}(i(\mathrm{pr}(i(\boldsymbol{x}))))=\psi_p^{-1}(i(\boldsymbol{x}))=\psi_p^{-1}(\psi_p(x))=x$$

故に φ_p^{-1} は φ_p の逆写像だから $\varphi_p : U_p \to \varphi_p(U_p)=i^{-1}(\psi_p(U_p))$ は同相写像である.

$p, q \in M$ に対し, $\boldsymbol{x} \in \varphi_p(U_p \cap U_q)$ ならば, φ_p と φ_p^{-1} の定義から次の等式が成り立つ.

$$\varphi_q(\varphi_p^{-1}(\boldsymbol{x}))=\mathrm{pr}(\psi_q(\psi_p^{-1}(i(\boldsymbol{x}))))=\mathrm{pr}((\psi_q \circ \psi_p^{-1})(i(\boldsymbol{x})))$$

$\psi_q \circ \psi_p^{-1}$ は C^r 級写像だから, 上式から $\varphi_q \circ \varphi_p^{-1}$ も C^r 級写像である.

従って $\{(U_p, \varphi_p)\}_{p \in M}$ は M の C^r 級座標近傍系である.

また M はHausdorff空間 N の部分空間だから M もHausdorff空間である.

以上により M は m 次元 C^r 級多様体である.

命題 7.14
N を n 次元 C^r 級多様体とする. M が N の m 次元 C^r 級部分多様体ならば包含写像 $i_M : M \to N$ は埋め込みである.

証明
部分空間の位相の定義から i_M は M から N の部分空間 M への同相写像である.
$m = n$ の場合, M は N の開部分多様体で, 任意の $p \in M$ に対して $(di_M)_p : T_pM \to T_pN$ は同型写像だから i_M ははめ込みである.
$0 \leqq m < n$ の場合, 各 $p \in M$ に対して N の局所座標系 (V_p, ψ_p) で, 定義7.12の (ii) の条件を満たすものを選び, 命題7.13の証明で与えた M の座標近傍系 (U_p, φ_p) を考える.
(U_p, φ_p) と (V_p, ψ_p) に関する i_M の局所座標表示 $\psi_p \circ i_M \circ \varphi_p^{-1} : \varphi_p(U_p) \to \psi_p(V_p)$ は

$$(\psi_p \circ i_M \circ \varphi_p^{-1})(\boldsymbol{x}) = \psi_p(\psi_p^{-1}(i(\boldsymbol{x}))) = i(\boldsymbol{x})$$

で与えられ, この写像の階数は m だから, i_M ははめ込みである.
以上から $i_M : M \to N$ は埋め込みである.

命題 7.15
M, N を m 次元 C^r 級多様体とし, $f: M \to N$ を C^r 級のはめ込みとする. 各 $p \in M$ に対して p の開近傍 W と $f(p)$ の開近傍 Z で, f の定義域を W に制限したものが W から Z への C^r 級微分同相写像になるものが存在し, $f(M)$ は N の開集合である.

証明
$p \in U$ である M の局所座標系 (U, φ) と $f(p) \in V$ である N の局所座標系 (V, ψ) に関する f の局所座標表示 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$ の $\varphi(p)$ における階数は m だから, 逆写像定理から $\varphi(p)$ の開近傍 U' と $\psi(f(p))$ の開近傍 V' で $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ の定義域を U' に制限したものが U' から V' への C^r 級微分同相写像になるものが存在する. 従って $W = \varphi^{-1}(U')$, $Z = \psi^{-1}(V')$ とおけば, f の定義域を W に制限したものが W から Z への C^r 級微分同相写像になる.
各 $q \in f(M)$ に対して $f(p) = q$ を満たす $p \in M$ をとれば, 上の結果から p の開近傍 W と $q = f(p)$ の開近傍 Z で $Z = f(W) \subset f(M)$ を満たすものがあるので q は $f(M)$ の内点である. 従って $f(M)$ は N の開集合である.

命題 7.16
M, N をそれぞれ m 次元, n 次元 C^r 級多様体とし, $f: M \to N$ を C^r 級の埋め込みとする. このとき f の像 $f(M)$ は N の m 次元 C^r 級部分多様体であり, f は M から $f(M)$ への C^r 級微分同相写像を定める.

証明
$m = n$ の場合, 命題7.15から $f(M)$ は N の開集合である. さらに f から定まる C^r 級写像 $M \to f(M)$ は全単射で, 命題7.15から各 $p \in M$ に対して p の開近傍 W と $f(p)$ の開近傍 Z で, f の定義域を W に制限したものが W から Z への C^r 級微分同相写像になるものが存在するため, f は M から $f(M)$ への C^r 級微分同相写像を定める.

$m < n$ の場合, 各 $q \in f(M)$ に対して $f(p) = q$ を満たす $p \in M$ が存在する. $i: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$ を命題7.4の証明で定めたものとすれば, 命題7.6から $p \in U$ である M の局所座標系 (U, φ) と $q = f(p) \in V$ である N の局所座標系 (V, ψ) で, (U, φ) と (V, ψ) に関する f の局所座標表示 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$ が次の条件を満たすものが存在する.

証明の続き

(i) $\boldsymbol{x}\in\varphi(U\cap f^{-1}(V))$ ならば $(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\boldsymbol{x})=i(\boldsymbol{x})$ が成り立つ.

(ii) $i(\boldsymbol{x})\in\psi(V)\cap(\boldsymbol{R}^m\times\{(\overbrace{0,\ldots,0}^{n-m})\})$ ならば $\boldsymbol{x}\in\varphi(U\cap f^{-1}(V))$ である.

$\bar{f}:M\to f(M)$ を $\bar{f}(x)=f(x)$ で定義される写像とすれば $\bar{f}$ は同相写像だから,

$f(U\cap f^{-1}(V))=\bar{f}(U\cap f^{-1}(V))=f(M)\cap O$ を満たす N の開集合 O がある. ここで

$$f(M)\cap O=f(U\cap f^{-1}(V))\subset f(f^{-1}(V))\subset V$$

が成り立つため, $f(U\cap f^{-1}(V))=f(M)\cap(O\cap V)$ だから, $O\cap V$ を O と置き直すことによって, $O\subset V$ と仮定してよい. また f は単射だから次の等式が成り立つ.

$$f(U\cap f^{-1}(V))=f(U)\cap f(f^{-1}(V))=f(U)\cap V\cap f(M)=f(U)\cap V$$

従って $f(U)\cap V=f(M)\cap O$ であるが $O\subset V$ より, この両辺と O との共通部分をとれば $f(U)\cap O=f(M)\cap O$ が得られる.

ψ の定義域を O に制限して得られる写像も ψ で表し, ψ の第 i 成分の関数を ψ_i とすれば $f(M)\cap O=\{x\in O\,|\,\psi_{m+1}(x)=\psi_{m+2}(x)=\cdots=\psi_n(x)=0\}$ であることを示す.

証明の続き

$f(U)\cap O = f(M)\cap O$ より $x\in f(M)\cap O$ ならば $u\in U$ で $f(u)=x$ を満たすものがある.

このとき $f(u)=x\in O\subset V$ より $u\in U\cap f^{-1}(V)$ だから, (i) より

$$\psi(x)=\psi(f(u))=(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\varphi(u))=i(\varphi(u))$$

となるため, $\psi_{m+1}(x)=\psi_{m+2}(x)=\cdots=\psi_n(x)=0$ である. 逆に $x\in O$ が左の等式を満たすとき, $\boldsymbol{x}=(\psi_1(x),\psi_2(x),\ldots,\psi_m(x))$ とおけば

$$i(\boldsymbol{x})=(\psi_1(x),\psi_2(x),\ldots,\psi_m(x),0,\ldots,0)=\psi(x)\in\psi(V)\cap(\boldsymbol{R}^m\times\{\overbrace{(0,\ldots,0)}^{n-m}\})$$

だから (ii) より $\boldsymbol{x}\in\varphi(U\cap f^{-1}(V))$ だから $\varphi(u)=\boldsymbol{x}$ を満たす $u\in U\cap f^{-1}(V)$ がある.

このとき $f(u)\in f(U)\cap V=f(M)\cap O$ であり, $\psi(f(u))=(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(\boldsymbol{x})=i(\boldsymbol{x})=\psi(x)$

だから $x=f(u)\in f(M)\cap O$ が得られる.

故に $f(M)$ は N の m 次元 C^r 級部分多様体であり, $\bar{\psi}: f(M)\cap O\to\boldsymbol{R}^m$ を

$\bar{\psi}(x)=(\psi_1(x),\psi_2(x),\ldots,\psi_m(x))$ で定めれば $(f(M)\cap O,\bar{\psi})$ は $f(M)$ の局所座標系である.

(U,φ) と $(f(M)\cap O,\bar{\psi})$ に関する $\bar{f}:M\to f(M)$ の局所座標表示 $\bar{\psi}\circ\bar{f}\circ\varphi^{-1}$ は (i) により

$\boldsymbol{x}\in\varphi(U\cap\bar{f}^{-1}(f(M)\cap O))=\varphi(U\cap f^{-1}(O))$ を $\boldsymbol{x}\in\bar{\psi}(f(M)\cap O)$ に写す写像である.

証明の続き

(ii) により, この写像は $\varphi(U\cap f^{-1}(O))$ の恒等写像だから, 微分同相写像である.
従って $\bar{f}:M\to f(M)$ の逆写像も C^r 級写像になるため, $\bar{f}$ は微分同相写像である.

例 7.17

$R>r>0$ とし, 2次元トーラス T^2 (例2.15)から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 $j:T^2\to\boldsymbol{R}^3$ を次で定める.

$$j((x,y),(z,w))=(x(R+rz),y(R+rz),rw) \quad (x^2+y^2=z^2+w^2=1)$$

$\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}$ に対し, $U_{\alpha,\beta}=(\alpha-\pi,\alpha+\pi)\times(\beta-\pi,\beta+\pi)$ とおき, $\rho_{\alpha,\beta}:U_{\alpha,\beta}\to T^2$ を $\rho_{\alpha,\beta}(u,v)=((\cos u,\sin u),(\cos v,\sin v))$ で定めれば, $\rho_{\alpha,\beta}$ の像は T^2 の開集合で, $\rho_{\alpha,\beta}$ は像の上への同相写像だから, $(\rho_{\alpha,\beta}(U_{\alpha,\beta}),\rho_{\alpha,\beta}^{-1})$ は T^2 の局所座標系である. このとき $j\circ\rho_{\alpha,\beta}:U_{\alpha,\beta}\to\boldsymbol{R}^3$ は例7.9の写像の定義域を制限したものだから, $j\circ\rho_{\alpha,\beta}$ ははめ込みである. このことから j もはめ込みであり, さらに j は単射で埋め込みであることが示される. 従って命題7.16から j の像は2次元トーラス T^2 と微分同相である.

幾何学III

第8節　正則点と臨界点（その1）

定義 8.1　正則点・臨界点・正則値・臨界値・階数・沈め込み

M, N をそれぞれ m 次元, n 次元 C^r 級多様体とし, $f: M \to N$ を C^r 級写像とする.

(1) $p \in M$ において $(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ が全射であるとき, p を f の正則点という.
　f の正則点でない M の点を f の臨界点という.

(2) f の臨界点全体からなる集合を C_f で表すとき, C_f の f による像 $f(C_f)$ に属する
　N の点を f の臨界値といい, $f(C_f)$ に属さない N の点を f の正則値という.

(3) $p \in M$ に対し, 線形写像 $(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ の階数を f の p における階数と
　いう.

(4) M の点がすべて f の正則点であるとき, f を沈め込みという.

注意 8.2

$p \in U$ である M の局所座標系 (U, φ) と $f(p) \in V$ である N の局所座標系 (V, ψ) に関する f の局所座標表示 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$ を考えると, 命題6.6により, f の p における階数は写像 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ の $\varphi(p)$ における微分の階数に等しい.

定理 8.3
M, Nをそれぞれm次元, n次元C^r級多様体とし, $f: M \to N$をC^r級写像とする. $q \in f(M)$ が f の正則値ならば $f^{-1}(q) = \{x \in M \mid f(x) = q\}$ は M の$m-n$次元部分多様体である.

証明
任意の$p \in f^{-1}(q)$に対して$(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$は全射だから, 命題7.5により$p \in U$である$M$の局所座標系$(U, \varphi)$と$q = f(p) \in V$, $\psi(q) = \mathbf{0}$ を満たすNの局所座標系(V, ψ)で, これらに関するfの局所座標表示 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$が任意の $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m) \in \varphi(U \cap f^{-1}(V))$ に対して

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n)$$

となるものが存在する. φ の第i成分の関数を φ_i とすれば, 上の主張は「任意の$x \in U \cap f^{-1}(V)$に対して$\psi(f(x)) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$となる$N$の局所座標系$(V, \psi)$ が存在する.」と言い換えられる.

証明の続き

$x\in U\cap f^{-1}(V)$ が $x\in f^{-1}(q)$ を満たせば $f(x)=q$ と $\psi(q)=\mathbf{0}$ から

$$(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))=\psi(f(x))=\psi(q)=\mathbf{0}$$

が成り立つため, $\varphi_1(x)=\cdots=\varphi_n(x)=0$ である.

逆に $x\in U\cap f^{-1}(V)$ が $\varphi_1(x)=\cdots=\varphi_n(x)=0$ を満たせば

$$\psi(f(x))=(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))=\mathbf{0}=\psi(q)$$

だから $f(x)=q$ が得られるため, $x\in f^{-1}(q)$ である.

以上から φ の定義域を $U\cap f^{-1}(V)$ に制限した写像も φ で表して, M の局所座標系 $(U\cap f^{-1}(V),\varphi)$ を考えれば

$$f^{-1}(q)\cap U\cap f^{-1}(V)=\{x\in U\cap f^{-1}(V)\mid\varphi_1(x)=\varphi_2(x)=\cdots=\varphi_n(x)=0\}$$

が成り立つため, $f^{-1}(q)$ は M の $m-n$ 次元部分多様体である.

例 8.4

$f\colon S^m \to \boldsymbol{R}$ を $f(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}) = x_{m+1}$ で定める. 例2.12の局所座標系 $(U_{\boldsymbol{n}}, \varphi_{\boldsymbol{n}})$, $(U_{\boldsymbol{s}}, \varphi_{\boldsymbol{s}})$ と $(\boldsymbol{R}, id_{\boldsymbol{R}})$ に関する f の局所座標表示 $f\circ\varphi_{\boldsymbol{n}}^{-1}, f\circ\varphi_{\boldsymbol{s}}^{-1}\colon \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}$ はそれぞれ

$$(f\circ\varphi_{\boldsymbol{n}}^{-1})(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \frac{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_m^2-1}{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_m^2+1} = 1 - \frac{2}{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_m^2+1}$$

$$(f\circ\varphi_{\boldsymbol{s}}^{-1})(y_1, y_2, \ldots, y_m) = -\frac{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_m^2-1}{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_m^2+1} = -1 + \frac{2}{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_m^2+1}$$

で与えられる. 故に $\dfrac{\partial(f\circ\varphi_{\boldsymbol{n}}^{-1})}{\partial y_i} = \dfrac{4y_i}{(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_m^2+1)^2}$, $\dfrac{\partial(f\circ\varphi_{\boldsymbol{s}}^{-1})}{\partial y_i} = -\dfrac{4y_i}{(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_m^2+1)^2}$

だから, f の臨界点は $\boldsymbol{s} = \varphi_{\boldsymbol{n}}^{-1}(\boldsymbol{0})$ と $\boldsymbol{n} = \varphi_{\boldsymbol{s}}^{-1}(\boldsymbol{0})$ であり, f の臨界値は 1 と -1 である.

例 8.5

$f\colon \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ を $f(x, y, z, w) = (x^2-y^2+z^2-w^2, 2(xy+zw), x^2+y^2+z^2+w^2)$ で定める と f の (x, y, z, w) における微分は以下で与えられる.

$$f'(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 2z & -2w \\ 2y & 2x & 2w & 2z \\ 2x & 2y & 2z & 2w \end{pmatrix}$$

$f'(x,y,z,w)$ を行に関して基本変形すれば $\begin{pmatrix} x & 0 & z & 0 \\ 0 & y & 0 & w \\ y & x & w & z \end{pmatrix}$ となり, この行列を A とおく.

$f(x,y,z,w)=(0,0,1)$ のとき, $x^2+z^2=y^2+w^2$ かつ $x^2+y^2+z^2+w^2=1$ だから,

$(x,z)\neq(0,0)$ かつ $(y,w)\neq(0,0)$ が成り立つので, A の1行目と2行目は1次独立である.

$$\alpha(x,0,z,0)+\beta(0,y,0,w)=(y,x,w,z)$$

とおけば $\alpha x=y$, $\alpha z=w$ であり, これらを $xy+zw=0$ に代入すれば $x^2+z^2\neq 0$ より $\alpha=0$ が得られるため, $y=w=0$ となって矛盾が生じる. 故に $f(x,y,z,w)=(0,0,1)$ のとき A の行はすべて1次独立だから A の階数は3である.

従って $f(x,y,z,w)=(0,0,1)$ ならば $f'(x,y,z,w)$ の階数は3だから, $(0,0,1)$ は f の正則値である. また, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)=(0,0,1)$ だから $f^{-1}(0,0,1)$ は空集合ではないので, 定理8.4により $f^{-1}(0,0,1)$ は $\boldsymbol{R}^4$ の1次元部分多様体である.

幾何学III

第8節　正則点と臨界点（その2）

次に C^r 級写像の臨界値全体の集合は「体積が 0」であることを主張する Sard の定理を示すために,「多様体の部分集合の体積が 0」であるという概念を以下で定義する.

記号 8.6

$m\times n$ 行列 $A=(a_{ij})$ に対し, $\|A\|_\infty=\max\{\,|a_{ij}|\,|\,i=1,2,\ldots,m, j=1,2,\ldots,n\}$ とおく.
また $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n$ に対し, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max\{\,|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|\,\}$ とおいて $d_\infty:\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ を $d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_\infty$ で定めれば d_∞ も $\boldsymbol{R}^n$ の距離関数である.
距離空間 $(\boldsymbol{R}^n,d_\infty)$ における中心が $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$, 半径 r の開球 $\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\,|\,d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})<r\}$ を $C^n(\boldsymbol{p};r)$ で表し, その閉包 $\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\,|\,d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\leqq r\}$ を $\overline{C}^n(\boldsymbol{p};r)$ で表す.
また $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$ 場合, $C^n(\boldsymbol{0};r)$, $\overline{C}^n(\boldsymbol{0};r)$ をそれぞれ $C^n(r)$, $\overline{C}^n(r)$ と略記する.

注意 8.7

幾何学 I 例5.13より $d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqq d_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqq\sqrt{n}\,d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ だから, d_2 から定まる $\boldsymbol{R}^n$ の位相と d_∞ から定まる $\boldsymbol{R}^n$ の位相は一致して, 幾何学演習 II 例題1.12, 例題1.13から $\mathscr{B}_n=\left\{C^n\left(\boldsymbol{p};\frac{1}{m}\right)\,\middle|\,\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{Q}^n, m\in\boldsymbol{N}\right\}$ は d_∞ から定まる $\boldsymbol{R}^n$ の位相の可算基である.

$C^n(\boldsymbol{p}; r), \overline{C}^n(\boldsymbol{p}; r)$ は一辺の長さが $2r$ の「n 次元立方体」だから, これらの体積は $2^n r^n$ であると定め, まずユークリッド空間の部分集合の測度が0であることを定義する.

定義 8.8
A を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合とする. 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\boldsymbol{p}_i \in \boldsymbol{R}^n$, $r_i>0$ $(i\in\boldsymbol{N})$ で, 条件

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C^n(\boldsymbol{p}_i; r_i) \text{ かつ } \sum_{i=1}^{\infty} (C^n(\boldsymbol{p}_i; r_i) \text{ の体積}) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^n r_i^n < \varepsilon$$

を満たすものが存在するとき, A の測度は0であるという.

注意 8.9
$\boldsymbol{p}$ が A の内点ならば $C^n(\boldsymbol{p}; r) \subset A$ となる $r>0$ があるので, A の測度は0ではない.
故に A の測度が0ならば $A^i = \emptyset$ だから命題1.6の(5)から $\overline{\boldsymbol{R}^n - A} = \boldsymbol{R}^n$ である.

n 次実直交行列 P と $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, $T_{P,\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}) = P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$ で定義される写像 $T_{P,\boldsymbol{c}} : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ を $\boldsymbol{R}^n$ の合同変換という. P は直交行列だから P から定まる1次変換はベクトルの長さを保つため2点間の距離を保ち, 平行移動も2点間の距離を保つため, これらの合成写像である合同変換も2点間の距離を保つ.

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$ とし, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の第 i 成分をそれぞれ a_i, b_i とする. $a_i > b_i$ となる i があれば $I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} = \emptyset$ とし, すべての i に対して $a_i \leqq b_i$ のときは $I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ とおいて $I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ を n 次元直方体という. また, すべての i に対して $a_i \leqq b_i$ のとき $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$ を $I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ の体積といい, $v(I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ で表す.

補題 8.10

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_N \in \boldsymbol{R}^n$ と $r_1, r_2, \ldots, r_N > 0$ で $I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} \subset \bigcup_{i=1}^{N} C^n(\boldsymbol{p}_i; r_i)$ かつ $\sum_{i=1}^{N} 2^n r_i^n - v(I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) < \varepsilon$ を満たすものが存在する.

証明

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の第 i 成分をそれぞれ a_i, b_i として, すべての $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $k > \dfrac{1}{\sqrt{b_i - a_i}}$ を満たす自然数 k を任意にとる. $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し $j > k(b_i - a_i) - \frac{1}{k}$ を満たす最小の整数 j を k_i とすれば $k_i - 1 \leqq k(b_i - a_i) - \frac{1}{k} < k_i$ だから $a_i + \dfrac{k_i - 1}{k} - \dfrac{1}{k^2} \leqq b_i < a_i + \dfrac{k_i}{k} + \dfrac{1}{k^2}$ である.

証明の続き

故に $[a_i, b_i] \subset \bigcup_{j=1}^{k_i} \left(a_i + \frac{j-1}{k} - \frac{1}{k^2}, a_i + \frac{j}{k} + \frac{1}{k^2}\right)$ が成り立つため, 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $1 \leqq j_i \leqq k_i$ を満たす自然数の列 $j_1, j_2, \ldots, j_n$ に対し $a_i + \frac{2j_i - 1}{2k}$ を第 i 成分とする $\boldsymbol{R}^n$ のベクトルを $\boldsymbol{p}_{j_1, j_2, \ldots, j_n}$ とすれば $I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} \subset \bigcup_{1 \leqq j_i \leqq k_i} C^n\left(\boldsymbol{p}_{j_1, j_2, \ldots, j_n}; \frac{1}{2k} + \frac{1}{k^2}\right)$ が成り立つ. この右辺は体積が $\left(\frac{1}{k} + \frac{2}{k^2}\right)^n$ である立方体の $\prod_{i=1}^{n} k_i$ 個の合併集合である. $k_i \leqq k(b_i - a_i) - \frac{1}{k} + 1$ だから次の不等式が成り立つ.

$$\left(\frac{1}{k} + \frac{2}{k^2}\right)^n \prod_{i=1}^{n} k_i \leqq \left(\frac{1}{k} + \frac{2}{k^2}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \left(k(b_i - a_i) - \frac{1}{k} + 1\right) = \left(1 + \frac{2}{k}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \left(b_i - a_i - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k}\right)$$

$\lim\limits_{k \to \infty} \left(1 + \frac{2}{k}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \left(b_i - a_i - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k}\right) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = v(I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ だから任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 K で $k \geqq K$ ならば $\left(1 + \frac{2}{k}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \left(b_i - a_i - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k}\right) - v(I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) < \varepsilon$ となるものが存在するため, 主張が成り立つ.

合同変換によるn次元直方体の像もn次元直方体といい, その体積はもとのn次元直方体に等しいとする.
すなわち, n次直交行列 P, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して $v(T_{P,\boldsymbol{c}}(I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}))=v(I_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ とする.

命題 8.11
A を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合とする. 任意の $\varepsilon>0$ に対して $A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$ かつ $\sum_{i=1}^{\infty}v(I_i)<\varepsilon$ を満たすn次元直方体の族 $(I_i)_{i\in\boldsymbol{N}}$ が存在すればAの測度は0である.

証明
仮定から任意の$\varepsilon>0$に対して $A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$ かつ $\sum_{i=1}^{\infty}v(I_i)<\dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{n^n}}$ を満たすn次元直方体の族 $(I_i)_{i\in\boldsymbol{N}}$ が存在する. 各 $i\in\boldsymbol{N}$ に対してn次直交行列 P_i と $\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{c}_i\in\boldsymbol{R}^n$ で $I_i=T_{P_i,\boldsymbol{c}_i}(I_{\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{b}_i})$ を満たすものが存在し, さらに補題8.10から $\boldsymbol{p}_{ij}\in\boldsymbol{R}^n$, $r_{ij}>0$ $(j=1,2,\ldots,N_i)$ で $I_{\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{b}_i}\subset\bigcup_{j=1}^{N_i}C^n(\boldsymbol{p}_{ij};r_{ij})$ かつ $\sum_{j=1}^{N_i}2^n r_{ij}^n<v(I_{\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{b}_i})+\dfrac{\varepsilon}{2^{i+1}\sqrt{n^n}}$ を満たすものが存在する. 故に $v(I_{\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{b}_i})=v(I_i)$ と $\sum_{i=1}^{\infty}v(I_i)<\dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{n^n}}$ を上の不等式に用いれば

証明の続き

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N_i} 2^n r_{ij}^n < \sum_{i=1}^{\infty} v(I_{\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{b}_i}) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{i+1}\sqrt{n^n}} = \sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n^n}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n^n}} \quad \cdots (*)$$

が得られる. ここで $C^n(\boldsymbol{p}_{ij}\,;r_{ij})$ は $\boldsymbol{p}_{ij}$ を中心とし, 半径が $\sqrt{n}r_{ij}$ の開球 $B_n\left(\boldsymbol{p}_{ij}\,;\sqrt{n}r_{ij}\right)$ に含まれ, $T_{P_i,\boldsymbol{c}_i}$ が距離を保つことから $T_{P_i,\boldsymbol{c}_i}$ による $B_n\left(\boldsymbol{p}_{ij}\,;\sqrt{n}r_{ij}\right)$ の像は $B_n\left(T_{P_i,\boldsymbol{c}_i}(\boldsymbol{p}_{ij})\,;\sqrt{n}r_{ij}\right)$ に一致するため次の包含関係が成り立つ.

$$\begin{aligned} I_i = T_{P_i,\boldsymbol{c}_i}(I_{\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{b}_i}) &\subset \bigcup_{j=1}^{N_i} T_{P_i,\boldsymbol{c}_i}(C^n(\boldsymbol{p}_{ij}\,;r_{ij})) \subset \bigcup_{j=1}^{N_i} T_{P_i,\boldsymbol{c}_i}\left(B_n\left(\boldsymbol{p}_{ij}\,;\sqrt{n}r_{ij}\right)\right) \\ &= \bigcup_{j=1}^{N_i} B_n\left(T_{P_i,\boldsymbol{c}_i}(\boldsymbol{p}_{ij})\,;\sqrt{n}r_{ij}\right) \subset \bigcup_{j=1}^{N_i} C^n\left(T_{P_i,\boldsymbol{c}_i}(\boldsymbol{p}_{ij})\,;\sqrt{n}r_{ij}\right) \end{aligned}$$

故に $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{N_i} C^n\left(T_{P_i,\boldsymbol{c}_i}(\boldsymbol{p}_{ij})\,;\sqrt{n}r_{ij}\right)$ が得られ, $C^n\left(T_{P_i,\boldsymbol{c}_i}(\boldsymbol{p}_{ij})\,;\sqrt{n}r_{ij}\right)$ は体積が $\left(2\sqrt{n}r_{ij}\right)^n = 2^n\sqrt{n^n}r_{ij}^n$ の立方体で, $(*)$ より $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N_i} 2^n\sqrt{n^n}r_{ij}^n < \varepsilon$ だから A の測度は 0 である.

C^r 級多様体 M の部分集合 A の測度が 0 であることの定義には局所座標系を用いる.

定義 8.12

C^r 級多様体 M の部分集合 A が次の条件を満たすとき, A の測度は 0 であるという.

「M の任意の局所座標系 (U, φ) に対して $\varphi(A \cap U)$ の測度が 0 である.」

命題 8.13
M を C^r 級多様体とする. すべての $i\in\boldsymbol{N}$ に対して M の部分集合 A_i の測度が 0 ならば $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ の測度も 0 である.

証明
$M=\boldsymbol{R}^n$ の場合, 仮定から任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\boldsymbol{p}_{ij}\in\boldsymbol{R}^n$, $r_{ij}>0$ $(i,j\in\boldsymbol{N})$ で $A_i\subset\bigcup_{j=1}^{\infty} C^n(\boldsymbol{p}_{ij};r_{ij})$ かつ $\sum_{j=1}^{\infty} 2^n r_{ij}^n<\dfrac{\varepsilon}{2^i}$ を満たすものが存在する. このとき $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} C^n(\boldsymbol{p}_{ij};r_{ij})$ であり, $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} 2^n r_{ij}^n<\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{\varepsilon}{2^i}=\varepsilon$ が成り立つため, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ は測度が 0 である. M を C^r 級多様体とし, (U,φ) を M の任意の局所座標系とする.
仮定から各 $i\in\boldsymbol{N}$ に 対して $\varphi(A_i\cap U)$ は測度が 0 である $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合だから上の結果より $\varphi\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\cap U\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\varphi(A_i\cap U)$ も測度が 0 である $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合である.
従って $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ は測度が 0 である.

補題 8.14
$m\times n$ 行列 A, $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して $\|A\boldsymbol{x}\|_\infty \leqq n\|A\|_\infty\|\boldsymbol{x}\|_\infty$ が成り立つ.

証明
$A=(a_{ij})$ とおき, $\boldsymbol{x}$ の第 j 成分を x_j とすれば $i=1,2,\dots,m$ に対して

$$|(A\boldsymbol{x}\text{ の第 }i\text{ 成分})| = \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \leqq \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| \leqq \sum_{j=1}^n \|A\|_\infty\|\boldsymbol{x}\|_\infty = n\|A\|_\infty\|\boldsymbol{x}\|_\infty$$

だから $\|A\boldsymbol{x}\|_\infty \leqq n\|A\|_\infty\|\boldsymbol{x}\|_\infty$ である.

次の補題は幾何学 II 系3.10の類似である.

補題 8.15
b を定数とし, C^1 級写像 $f\colon C^n(\boldsymbol{p};r)\to\boldsymbol{R}^m$ が任意の $\boldsymbol{x}\in C^n(\boldsymbol{p};r)$ と $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$ に対して $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\right|\leqq b$ を満たすとき, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in C^n(\boldsymbol{p};r)$ に対して不等式 $\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\|_\infty\leqq bn\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_\infty$ が成り立つ.

証明

$i=1,2,\ldots,m$ に対して $g_i:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ を $g_i(t)=f_i(\boldsymbol{y}+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))$ で定めると, g_i は $(0,1)$ の各点で微分可能であり, 合成写像の微分法から $g_i'(t)=f_i'(\boldsymbol{y}+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ が成り立つ. 平均値の定理から $g_i(1)-g_i(0)=g_i'(\theta_i)$ を満たす $0<\theta_i<1$ があるため,

$$f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{y})=g_i(1)-g_i(0)=g_i'(\theta_i)=f_i'(\boldsymbol{y}+\theta_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \cdots (*)$$

である. 従って $(*)$ と補題8.14から次の不等式が得られる.

$$|f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{y})|=|f_i'(\boldsymbol{y}+\theta_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|\leqq n\|f_i'(\boldsymbol{y}+\theta_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))\|_\infty\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_\infty$$

仮定から任意の $\boldsymbol{x}\in C^n(\boldsymbol{p};r)$ に対して $\|f_i'(\boldsymbol{x})\|_\infty\leqq b$ だから, 上式から

$$|f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{y})|\leqq bn\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_\infty$$

が $i=1,2,\ldots,m$ に対して成り立つ. 従って $\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\|_\infty\leqq bn\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_\infty$ である.

命題 8.16
U を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合, $f\colon U\to\boldsymbol{R}^n$ を C^1 級写像とする. U の部分集合 A の測度が 0 ならば $f(A)$ の測度も 0 である.

証明
$\overline{C}^n(\boldsymbol{p};r)\subset U$ を満たす $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$, $r>0$ に対し, すべての $\boldsymbol{x}\in\overline{C}^n(\boldsymbol{p};r)$ と $i,j=1,2,\dots,n$ に対して $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\right|\leqq b$ が成り立つように b を定める.
$A\cap C^n(\boldsymbol{p};r)$ の測度は 0 だから, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{R}^n$, $r_i>0$ $(i\in\boldsymbol{N})$ で $A\cap C^n(\boldsymbol{p};r)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}C^n(\boldsymbol{x}_i;r_i)\subset C^n(\boldsymbol{p};r)$ かつ $\sum_{i=1}^{\infty}2^n r_i^n<\dfrac{\varepsilon}{b^n n^n}$ を満たすものがある.
補題8.15から $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in C^n(\boldsymbol{p};r)$ に対して $\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\|_\infty\leqq bn\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_\infty$ が成り立つため $\boldsymbol{x}\in C^n(\boldsymbol{x}_i;r_i)$ ならば $\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_i)\|_\infty\leqq bn\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i\|_\infty<bnr_i$ だから $f(\boldsymbol{x})\in C^n(f(\boldsymbol{x}_i);bnr_i)$ である. 故に $f(C^n(\boldsymbol{x}_i;r_i))\subset C^n(f(\boldsymbol{x}_i);bnr_i)$ より $f(A\cap C^n(\boldsymbol{p};r))\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}f(C^n(\boldsymbol{x}_i;r_i))\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}C^n(f(\boldsymbol{x}_i);bnr_i)$ かつ $\sum_{i=1}^{\infty}2^n b^n n^n r_i^n<\varepsilon$ が成り立つため, $f(A\cap C^n(\boldsymbol{p};r))$ の測度は 0 である.

証明の続き

注意8.7から $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C^n\left(\boldsymbol{p}_i; \frac{1}{m_i}\right)$ かつ $\overline{C^n}\left(\boldsymbol{p}_i; \frac{1}{m_i}\right) \subset U$ を満たす $\boldsymbol{p}_i \in \boldsymbol{Q}^n$, $m_i \in \boldsymbol{N}$ $(i \in \boldsymbol{N})$ が存在して $f(A) = f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(A \cap C^n\left(\boldsymbol{p}_i; \frac{1}{m_i}\right)\right)\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f\left(A \cap C^n\left(\boldsymbol{p}_i; \frac{1}{m_i}\right)\right)$ だから, 上の結果と命題8.13から $f(A)$ の測度は 0 である.

補題 8.17

C^r 級多様体 M の部分集合 A に対し, M の局所座標系 (U, φ) で $A \subset U$ を満たすものが存在して $\varphi(A)$ が測度 0 ならば A は測度が 0 である.

証明

M の任意の局所座標系 (V, ψ) に対し, (U, φ) から (V, ψ) への座標変換 $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ による $\varphi(A)$ の部分集合 $\varphi(A \cap V)$ の像 $\psi(A \cap V)$ は命題8.16によって測度は 0 である. 従って A は測度 0 である.

命題 8.18

M を C^r 級多様体とする. M の部分集合 A に対し, M の座標近傍系 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ で I が可算集合であり, すべての $i\in I$ に対して $\varphi_i(A\cap U_i)$ の測度が 0 になるものが存在すれば, A の測度は 0 である.

証明

(U,φ) を M の任意の局所座標系とする. 仮定から任意の $i\in I$ に対して $\varphi_i(A\cap U\cap U_i)$ は 0 で, (U_i,φ_i) から (U,φ) への座標変換 $\varphi\circ\varphi_i^{-1}:\varphi_i(U\cap U_i)\to\varphi(U\cap U_i)$ による $\varphi_i(A\cap U\cap U_i)$ の像 $\varphi(A\cap U\cap U_i)$ は命題8.16によって測度が 0 である.

$M=\bigcup_{i\in I} U_i$ より $\varphi(A\cap U)=\varphi\left(A\cap U\cap\bigcup_{i\in I} U_i\right)=\bigcup_{i\in I}\varphi(A\cap U\cap U_i)$ だから命題8.13から $\varphi(A\cap U)$ の測度は 0 である.

補題 8.19
$n<m$ ならば $C^n(\boldsymbol{p};r)\times\{(\overbrace{0,\ldots,0}^{m-n\text{ 個}})\}=\{(\boldsymbol{x},\overbrace{0,\ldots,0}^{m-n\text{ 個}})\in\boldsymbol{R}^m \mid \boldsymbol{x}\in C^n(\boldsymbol{p};r)\}$ の形の $\boldsymbol{R}^m$ の部分集合の測度は 0 である.

証明

$\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ とおく. 自然数 k と $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,2k-1$ に対して,
$p_{i,j}=p_i-r+\dfrac{jr}{k}$ とおき, $I_{i,j}=\left(p_{i,j}-\dfrac{r}{k},p_{i,j}+\dfrac{r}{k}\right)$ によって開区間 $I_{i,j}$ を定めれば
$(p_i-r,p_i+r)=I_{i,1}\cup I_{i,2}\cup\cdots\cup I_{i,2k-1}$ が成り立つ.
$C^n(\boldsymbol{p};r)=(p_1-r,p_1+r)\times(p_2-r,p_2+r)\times\cdots\times(p_n-r,p_n+r)$ だから
$C^n(\boldsymbol{p};r)=\displaystyle\bigcup_{1\leqq j_1,j_2,\ldots,j_n\leqq 2k-1}(I_{1,j_1}\times I_{2,j_2}\times\cdots\times I_{n,j_n})$ である.
$1\leqq j_1,j_2,\ldots,j_n\leqq 2k-1$ に対し, $\boldsymbol{p}_{j_1,j_2,\ldots,j_n}=(p_{1,j_1},p_{2,j_2},\ldots,p_{n,j_n},\overbrace{0,\ldots,0}^{m-n\text{ 個}})\in\boldsymbol{R}^m$ とおけば,
上式から $C^n(\boldsymbol{p};r)\times\{(\overbrace{0,\ldots,0}^{m-n\text{ 個}})\}\subset\displaystyle\bigcup_{1\leqq j_1,j_2,\ldots,j_n\leqq 2k-1}C^m\left(\boldsymbol{p}_{j_1,j_2,\ldots,j_n};\dfrac{r}{k}\right)$ が得られるため
$C^n(\boldsymbol{p};r)\times\{(\overbrace{0,\ldots,0}^{m-n\text{ 個}})\}$ は体積が $\dfrac{2^mr^m}{k^m}$ の m 次元立方体 $(2k-1)^n$ 個の合併集合に含まれる.

証明の続き

これらの立方体の体積の合計は $\dfrac{2^m r^m (2k-1)^n}{k^m}$ で, $\dfrac{2^m r^m (2k-1)^n}{k^m} < \dfrac{2^m r^m (2k)^n}{k^m} = \dfrac{2^{m+n} r^m}{k^{m-n}}$ だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $k > \left(\dfrac{2^{m+n} r^m}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{m-n}}$ を満たす自然数 k を選べば, 上記の立方体の体積の合計 $\dfrac{2^m r^m (2k-1)^n}{k^m}$ は ε より小さくなる. 故に $C^n(\boldsymbol{p}; r) \times \{\overbrace{(0, \cdots, 0)}^{m-n\ 個}\}$ の測度は 0 である.

命題 8.20
U を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合, $f\colon U\to\boldsymbol{R}^m$ を C^1 級写像とする. $n<m$ ならば $f(U)$ の測度は 0 である.

証明

注意8.7から $U=\bigcup_{i=1}^{\infty} C^n(\boldsymbol{p}_i;r_i)$ を満たす $\boldsymbol{p}_i\in\boldsymbol{Q}^n$, $r_i>0\,(i\in\boldsymbol{N})$ が存在するため, $\boldsymbol{R}^m$ の部分集合として $U\times\{\boldsymbol{0}\}=\bigcup_{i=1}^{\infty}(C^n(\boldsymbol{p}_i;r_i)\times\{\boldsymbol{0}\})$ である. 補題8.19から $C^n(\boldsymbol{p}_i;r_i)\times\{\boldsymbol{0}\}$ の測度は 0 だから命題8.13から $U\times\{\boldsymbol{0}\}$ の測度も 0 である. 一方 $\mathrm{pr}_U\colon U\times\boldsymbol{R}^{m-n}\to U$ を $\mathrm{pr}_U(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}$ で定めて合成写像 $f\circ\mathrm{pr}_U\colon U\times\boldsymbol{R}^{m-n}\to\boldsymbol{R}^m$ を考える. $U\times\boldsymbol{R}^{m-n}$ は $\boldsymbol{R}^m$ の開集合で, $f(U)=(f\circ\mathrm{pr}_U)(U\times\{\boldsymbol{0}\})$ だから命題8.16により $f(U)$ の測度は 0 である.

補題 8.21
C^r 級多様体 M が可算基をもつ(幾何学演習 II 定義1.9)ならば, 可算集合である M の基底 $\mathscr{C}$ と $\{(U,\varphi_U)\}_{U\in\mathscr{C}}$ という形の M の座標近傍系が存在する.

証明

$\mathscr{B}$ を可算集合である M の基底とし, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を M の座標近傍系として, $\mathscr{B}$ の部分集合 $\mathscr{C}$ を次で定義する.

$$\mathscr{C} = \{U\in\mathscr{B} \mid U\subset U_\alpha \text{ を満たす } \alpha\in A \text{ が存在する.}\}$$

M の開集合 O と $\alpha\in A$ に対し, $\Gamma_\alpha\subset\mathscr{B}$ で $O\cap U_\alpha = \bigcup_{U\in\Gamma_\alpha} U$ を満たすものがある.

各 $U\in\Gamma_\alpha$ に対して $U\subset U_\alpha$ だから $\Gamma_\alpha\subset\mathscr{C}$ である. 故に $\Gamma = \bigcup_{\alpha\in A}\Gamma_\alpha$ とおくと $\Gamma\subset\mathscr{C}$ であり, $M = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ から次の等式が得られるため, $\mathscr{C}$ は M の基底である.

$$O = O\cap M = O\cap\left(\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in A}(O\cap U_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in A}\left(\bigcup_{U\in\Gamma_\alpha} U\right) = \bigcup_{U\in\Gamma} U$$

各 $U\in\mathscr{C}$ に対して $U\subset U_{\alpha_U}$ を満たす $\alpha_U\in A$ を選び, φ_{α_U} の定義域を U に制限して得られる写像を $\varphi_U : U\to\varphi_{\alpha_U}(U)$ とすれば, (U, φ_U) は M の局所座標系である.

このとき $\{(U, \varphi_U)\}_{U\in\mathscr{C}}$ は M の座標近傍系で, $\mathscr{C}$ は可算集合である M の基底である.

命題 8.22
M, N をそれぞれ m 次元, n 次元 C^r 級多様体とし, $f: M \to N$ を C^r 級写像とする. M が可算基をもち, $m<n$ ならば $f(M)$ の測度は 0 である.

証明
(V, ψ) を N の局所座標系とし, 補題8.21のような M の局所座標系 $\{(U, \varphi_U)\}_{U\in\mathscr{C}}$ をとる. $f^{-1}(V)$ は M の開集合だから, $\Gamma\subset\mathscr{C}$ で $f^{-1}(V)=\bigcup_{U\in\Gamma} U$ を満たすものがあって

$$\begin{aligned}\psi(f(M)\cap V)&=\psi(f(f^{-1}(V)))=\psi\left(f\left(\bigcup_{U\in\Gamma} U\right)\right)\\&=\bigcup_{U\in\Gamma}\psi(f(U))=\bigcup_{U\in\Gamma}(\psi\circ f\circ\varphi_U^{-1})(\varphi_U(U))\end{aligned}$$

が成り立つ. $(\psi\circ f\circ\varphi_U^{-1})(\varphi_U(U))$ は命題8.20により測度が 0 で, Γ はたかだか可算な集合だから, 上式と命題8.13によって $\psi(f(M)\cap V)$ の測度は 0 である.

幾何学Ⅲ

第8節　正則点と臨界点（その3）

補題 8.23
M を可算基をもつ m 次元 C^r 級多様体とする. $M = \bigcup_{i \in I} O_i$ を満たす M の開集合族 $(O_i)_{i \in I}$ に対し, M の座標近傍系 $\{(\tilde{U}_k, \varphi_k)\}_{k \in \boldsymbol{N}}$ で, 次の条件を満たすものがある.

(i) 各 $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $\varphi_k(\tilde{U}_k) = C^m(2)$ かつ $\tilde{U}_k \subset O_{i(k)}$ となる $i(k) \in I$ がある.

(ii) $U_k = \varphi_k^{-1}(C^m(1))$ とおけば $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ である.

証明
$\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ を M の座標近傍系とし, 各 $p \in M$ に対し $p \in O_{i_p} \cap V_{j_p}$ を満たす $i_p \in I$, $j_p \in J$ を選ぶ. ψ_{j_p} を $\psi'_{j_p}(x) = \psi_{j_p}(x) - \psi_{j_p}(p)$ で定義される写像 ψ'_{j_p} で置き換えることにより $\psi_{j_p}(p) = \boldsymbol{0}$ であるとすれば $\psi_{j_p}(O_{i_p} \cap V_{j_p})$ は $\boldsymbol{0}$ の開近傍だから $r_p > 0$ で $C^n(r_p) \subset \psi_{j_p}(O_{i_p} \cap V_{j_p})$ を満たすものがある. このとき $\psi_{j_p}^{-1}\left(C^m\left(\frac{r_p}{2}\right)\right)$ は $O_{i_p} \cap V_{j_p}$ に含まれる p の開近傍であり $M = \bigcup_{p \in M} \psi_{j_p}^{-1}\left(C^m\left(\frac{r_p}{2}\right)\right)$ である.

証明の続き

従って, 幾何学演習 II 例題3.1から $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots \in M$ で $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} \psi_{j_{p_k}}^{-1}\left(C^m\left(\frac{r_{p_k}}{2}\right)\right)$ を満たすものがある.

$\tilde{U}_k = \psi_{j_{p_k}}^{-1}(C^m(r_{p_k}))$ とおけば $\tilde{U}_k \subset O_{i_{p_k}} \cap V_{j_{p_k}}$ かつ $\psi_{j_{p_k}}(\tilde{U}_k) = C^m(r_{p_k})$ が成り立つ.

故に $\varphi_k : \tilde{U}_k \to C^n(2)$ を $\varphi_k(x) = 2r_{p_k}^{-1}\psi_{j_{p_k}}(x)$ で定めれば $\varphi_k(\tilde{U}_k) = C^m(2)$,

$\varphi_k^{-1}(C^m(1)) = \psi_{j_{p_k}}^{-1}\left(C^m\left(\frac{r_{p_k}}{2}\right)\right)$ が成り立つため, $\{(\tilde{U}_k, \varphi_k)\}_{k \in N}$ は与えられた条件を満たす M の座標近傍系である.

(X,d), (Y,d') を距離空間とし, d から定まる X の位相 を $\mathcal{O}_d$ とすれば, 位相空間 $(X,\mathcal{O}_d)$ はコンパクトであるとする. 幾何学 I 命題12.2より距離関数 $d: X\times X\to \boldsymbol{R}$ は連続だから $r>0$ に対して $d^{-1}((-\infty,r])$ は $X\times X$ の閉集合である. 命題1.27から $X\times X$ はコンパクトだから命題1.22により $d^{-1}((-\infty,r])$ もコンパクトである.
従って連続写像 $g: X\to Y$が与えられたとき, $(x,y)\in d^{-1}((-\infty,r])$ を $d'(g(x),g(y))$ に対応させる $d^{-1}((-\infty,r])$上の実数値関数は最大値をもつ. この最大値を $\mu(r)$ で表し, $r>0$ を $\mu(r)$ に対応させる関数を $\mu:(0,\infty)\to \boldsymbol{R}$ とする.

補題 8.24
$\displaystyle\lim_{r\to+0}\mu(r)=0$ である.

証明
幾何学 I 定理12.10より g は一様連続だから, 任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ で条件

「$d(x,y)<\delta$ ならば $d'(g(x),g(y))<\varepsilon$」

を満たすものが存在する. 故に $0<r<\delta$ かつ $(x,y)\in d^{-1}((-\infty,r])$ ならば $d(x,y)\leqq r<\delta$ だから $d'(g(x),g(y))<\varepsilon$ となるため, $0\leqq\mu(r)<\varepsilon$ である.

A を正則行列でない m 次正方行列とするとき, A から定まる1次変換 $T_A : \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ の像は T_A の臨界値全体の集合であり, $m-1$ 次元以下の $\boldsymbol{R}^m$ の部分空間だから測度が 0 である. 従って $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^m$ に対して $T_{A,\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{c}$ で定義される写像 $T_{A,\boldsymbol{c}} : \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ の臨界値全体の集合の測度は 0 である. f が $\boldsymbol{R}^m$ の開集合から $\boldsymbol{R}^m$ の開集合への写像で, $\boldsymbol{x}$ が f の臨界点ならば f の $\boldsymbol{x}$ における微分 $f'(\boldsymbol{x})$ は正則行列ではなく, f は $\boldsymbol{x}$ の近くで $T_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$ で定義される写像 $T_{\boldsymbol{x}} : \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ によって近似される. 従って f は $\boldsymbol{x}$ の近くの領域 D を $T_{\boldsymbol{x}}$ の像の近くに写し, $T_{\boldsymbol{x}}$ の像は測度が 0 の集合だから f による D の像の「体積」はもとの D の体積に比べて「非常に小さく」なっていると考えられる. この点に着目して f を $\boldsymbol{x}$ の近くで $T_{\boldsymbol{x}}$ で近似したときの誤差を評価することにより, f の臨界値全体の集合の測度は 0 であることを主張する次の定理を示す.

定理 8.25

M, N を m 次元 C^1 級多様体とし, $f : M \to N$ を C^1 級写像とする. M が可算基をもつとき, f の臨界値全体の集合の測度は 0 である.

証明

$\{(V_i,\psi_i)\}_{i\in I}$ を N の座標近傍系とすれば, $(f^{-1}(V_i))_{i\in I}$ は $M=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(V_i)$ を満たす M の開集合族だから, $O_i=f^{-1}(V_i)$ とおけば M の座標近傍系 $\{(\tilde{U}_k,\varphi_k)\}_{k\in\boldsymbol{N}}$ で補題8.23の条件を満たすものが存在する. $U_k=\varphi_k^{-1}(C^m(1))$ とおき, f の臨界点全体の集合を C_f とすれば $M=\bigcup_{i=1}^{\infty}U_k$ より $C_f=\bigcup_{k=1}^{\infty}(U_k\cap C_f)$ だから $f(C_f)=\bigcup_{k=1}^{\infty}f(U_k\cap C_f)$ が成り立つため, 各 $k\in\boldsymbol{N}$ に対して $f(U_k\cap C_f)$ の測度が 0 であることを示せば, 命題8.13より f の臨界値全体の集合 $f(C_f)$ の測度が 0 であることが示される.

$f(\tilde{U}_k)\subset V_{i(k)}$ を満たす $i(k)\in I$ を選び, $\tilde{f}:C^m(2)\to\boldsymbol{R}^m$ を $\tilde{f}(\boldsymbol{x})=\psi_{i(k)}(f(\varphi_k^{-1}(\boldsymbol{x})))$ で定義する. また, $\tilde{f}$ の定義域を $C^m(1)$ に制限した写像を $\hat{f}:C^m(1)\to\boldsymbol{R}^m$ とすれば命題6.6より, $\hat{f}$ の臨界点全体の集合は $\varphi_k(U_k\cap C_f)$ だから, $\hat{f}$ の臨界値全体の集合は $\hat{f}(\varphi_k(U_k\cap C_f))=\psi_{i(k)}(f(U_k\cap C_f))$ である. 故に $\hat{f}$ の臨界点全体の集合が測度 0 であることを示せば, 補題8.17により $f(U_k\cap C_f)$ の測度が 0 であることが導かれる.

証明の続き

$\tilde{f}$ の第 i 成分の関数を $\tilde{f}_i : C^m(2) \to \boldsymbol{R}$ とすれば $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C^m(1)$ に対して補題8.15の証明における等式(*)

$$\tilde{f}_i(\boldsymbol{y}) - \tilde{f}_i(\boldsymbol{x}) = \tilde{f}_i'(\boldsymbol{x} + \theta_i(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}))(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \ \cdots (i)$$

を満たす $0 < \theta_i < 1$ がある. $\boldsymbol{x} \in C^m(2)$ を $\max\left\{ \left| \dfrac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) \right| \,\middle|\, i, j = 1, 2, \ldots, m \right\}$ に対応させる関数を g とすれば, g は連続だから $\overline{C}^m(1)$ における最大値が存在する. g の $\overline{C}^m(1)$ における最大値を b とすれば, 任意の $\boldsymbol{x} \in C^m(1)$ と $i, j = 1, 2, \ldots, m$ に対して $\left| \dfrac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) \right| \leqq b$ だから補題8.15から $\|\tilde{f}(\boldsymbol{x}) - \tilde{f}(\boldsymbol{y})\|_\infty \leqq bm\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_\infty$ が $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C^m(1)$ に対して成り立つ. 従って $\varepsilon > 0$ に対して $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C^m(1)$ かつ $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_\infty \leqq \varepsilon$ ならば $\|\tilde{f}(\boldsymbol{x}) - \tilde{f}(\boldsymbol{y})\|_\infty \leqq bm\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_\infty \leqq \varepsilon bm$ だから次の不等式が成り立つ.

$$\tilde{f}(\boldsymbol{y}) \in \overline{C}^m(\tilde{f}(\boldsymbol{x}) \,;\, \varepsilon bm) \ \cdots (ii)$$

$\boldsymbol{x} \in C^m(1)$ を固定して写像 $T_{\boldsymbol{x}} : C^m(2) \to \boldsymbol{R}^n$ を $T_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = \tilde{f}(\boldsymbol{x}) + \tilde{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$ で定義する.

証明の続き

$T_{\boldsymbol{x}}$ の第 i 成分の関数を $T_{\boldsymbol{x},i} : C^m(2) \to \boldsymbol{R}$ とすれば $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C^m(1)$ に対して

$$T_{\boldsymbol{x},i}(\boldsymbol{y}) = \tilde{f}_i(\boldsymbol{x}) + \tilde{f}_i'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$$

だから (i) より次の等式が得られる.

$$\tilde{f}_i(\boldsymbol{y}) - T_{\boldsymbol{x},i}(\boldsymbol{y}) = (\tilde{f}_i'(\boldsymbol{x}+\theta_i(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})) - \tilde{f}_i'(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \quad \cdots (iii)$$

$r > 0$ に対し, $D(r) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \overline{C}^m(1) \times \overline{C}^m(1) \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_\infty \leqq r\}$ とおく.

$\overline{C}^m(1)$ は コンパクトだから $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in D(r)$ を $\|\tilde{f}'(\boldsymbol{x}) - \tilde{f}'(\boldsymbol{y})\|_\infty$ に対応させる関数は最大値をもつため, その値を $\mu(r)$ とする. $0 < \theta_i < 1$ だから $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in D(r)$ ならば $(\boldsymbol{x}+\theta_i(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) \in D(r)$ であることに注意すれば $\mu(r)$ の定義から

$$\|\tilde{f}_i'(\boldsymbol{x}+\theta_i(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})) - \tilde{f}_i'(\boldsymbol{x})\|_\infty \leqq \|\tilde{f}'(\boldsymbol{x}+\theta_i(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})) - \tilde{f}'(\boldsymbol{x})\|_\infty \leqq \mu(r)$$

である. 従って (iii) と補題8.14より, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C^m(1)$ かつ $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_\infty \leqq r$ ならば $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して次の不等式が成り立つ.

証明の続き

$$|\tilde{f}_i(\boldsymbol{y})-T_{\boldsymbol{x},i}(\boldsymbol{y})|=|(\tilde{f}_i'(\boldsymbol{x}+\theta_i(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))-\tilde{f}_i'(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})|$$

$$\leqq\|(\tilde{f}_i'(\boldsymbol{x}+\theta_i(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))-\tilde{f}_i'(\boldsymbol{x})\|_\infty\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|_\infty\leqq\mu(r)\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|_\infty$$

が成り立つため, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in C^m(1)$ かつ $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_\infty\leqq r$ ならば次の不等式が成り立つ.

$$\|\tilde{f}(\boldsymbol{y})-T_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})\|_\infty\leqq\mu(r)\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|_\infty \cdots (iv)$$

$\boldsymbol{x}\in C^m(1)$ が $\hat{f}$ の臨界点ならばm次正方行列 $\tilde{f}'(\boldsymbol{x})$ の階数はmより小さいため $\tilde{f}'(\boldsymbol{x})$ の全ての列ベクトルと直交する単位ベクトル $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{R}^m$ が存在し,

$H_{\boldsymbol{x}}=\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^m\,|\,(\boldsymbol{v}-\tilde{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}})=0\}$ とおけば $T_{\boldsymbol{x}}$ の像は $H_{\boldsymbol{x}}$ に含まれる.

以後 $\boldsymbol{x}\in C^m(1)$ は $\hat{f}$ の臨界点とする. $\boldsymbol{y}\in C^m(1)$ かつ $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_\infty\leqq r$ ならば(iv)より

$$\|\tilde{f}(\boldsymbol{y})-T_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})\|\leqq\sqrt{m}\|\tilde{f}(\boldsymbol{y})-T_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})\|_\infty\leqq\sqrt{m}\mu(\varepsilon)\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|_\infty\leqq\sqrt{m}\varepsilon\mu(\varepsilon) \cdots(v)$$

が成り立つ. $S_{\boldsymbol{x}}=\left\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^n\,\middle|\,|(\boldsymbol{v}-\tilde{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}})|\leqq\sqrt{m}\varepsilon\mu(\varepsilon)\right\}$ とおく. $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{u}\in H_{\boldsymbol{x}}$

ならば $(\boldsymbol{u}-\tilde{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}})=0$ であり, $\bar{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}-\tilde{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}}$ とおけば

$(\bar{\boldsymbol{v}}-\tilde{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}})=0$ だから $(\bar{\boldsymbol{v}}-\boldsymbol{u},\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}})=((\bar{\boldsymbol{v}}-\tilde{f}(\boldsymbol{x}))-(\boldsymbol{u}-\tilde{f}(\boldsymbol{x})),\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}})=0$ が成り立つため,

証明の続き

$$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|^2=\|\bar{\boldsymbol{v}}+(\boldsymbol{v}-\tilde{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{n}_x-\boldsymbol{u}\|^2=\|\bar{\boldsymbol{v}}-\boldsymbol{u}\|^2+(\boldsymbol{v}-\tilde{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{n}_x)^2\geqq(\boldsymbol{v}-\tilde{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{n}_x)^2$$

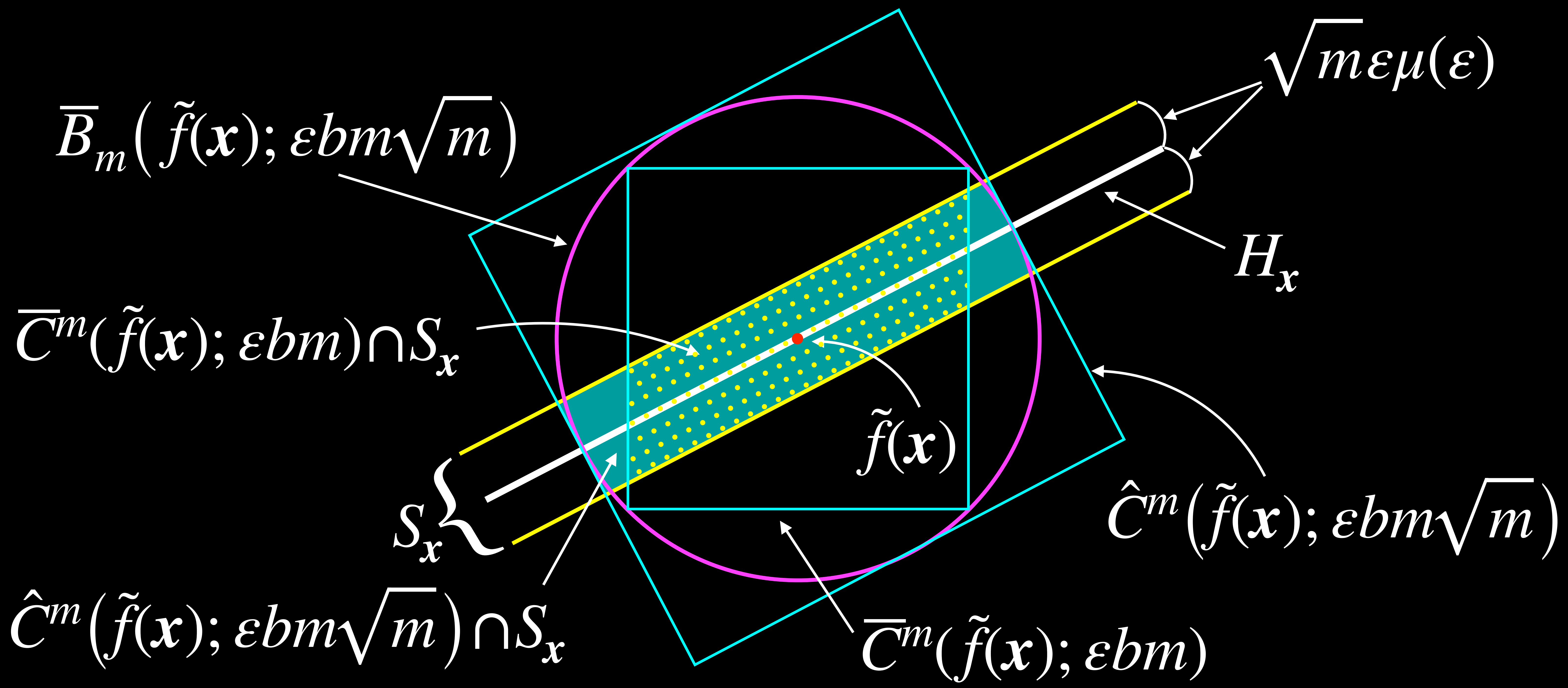
が得られる. 従って $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^m$ に対し, $\boldsymbol{u}\in H_x$ で $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|\leqq\sqrt{m}\varepsilon\mu(\varepsilon)$ を満たすものが存在すれば $\boldsymbol{v}\in S_x$ だから(v)から $\boldsymbol{y}\in C^m(1)$ かつ $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|_\infty\leqq\varepsilon$ ならば $\tilde{f}(\boldsymbol{y})\in S_x$ である.

上の結果と(ii)により $\boldsymbol{y}\in C^m(1)$ かつ $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_\infty\leqq r$ ならば $\tilde{f}(\boldsymbol{y})\in\overline{C}^m(\tilde{f}(\boldsymbol{x});\varepsilon bm)\cap S_x$ である.

$\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^m$ と $r>0$ に対し, $\overline{B}_m(\boldsymbol{p};r)=\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^m \mid \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{p}\|\leqq r\}$ とおくと $\overline{C}^m(\boldsymbol{p};r)\subset\overline{B}_m\left(\boldsymbol{p};\sqrt{m}r\right)$ だから $\overline{C}^m(\tilde{f}(\boldsymbol{x});\varepsilon bm)\cap S_x\subset\overline{B}_m\left(\tilde{f}(\boldsymbol{x});\varepsilon bm\sqrt{m}\right)\cap S_x$ である.

$\tilde{f}(\boldsymbol{x})$ を中心として m 次元立方体 $\overline{C}^m\left(\tilde{f}(\boldsymbol{x});\varepsilon bm\sqrt{m}\right)$ を回転して $x_m=0$ の面が H_x に平行になるようにしたものを $\hat{C}^m\left(\tilde{f}(\boldsymbol{x});\varepsilon bm\sqrt{m}\right)$ とすれば $\overline{B}_m\left(\tilde{f}(\boldsymbol{x});\varepsilon bm\sqrt{m}\right)$ が $\overline{C}^m\left(\tilde{f}(\boldsymbol{x});\varepsilon bm\sqrt{m}\right)$ に含まれるので $\overline{B}_m\left(\tilde{f}(\boldsymbol{x});\varepsilon bm\sqrt{m}\right)$ は $\hat{C}^m\left(\tilde{f}(\boldsymbol{x});\varepsilon bm\sqrt{m}\right)$ にも含まれる. 故に $\overline{C}^m(\tilde{f}(\boldsymbol{x});\varepsilon bm)\cap S_x$ は $\hat{C}^m\left(\tilde{f}(\boldsymbol{x});\varepsilon bm\sqrt{m}\right)\cap S_x$ に含まれる.

証明の続き



$\hat{C}^m\left(\tilde{f}(\boldsymbol{x});\varepsilon bm\sqrt{m}\right)\cap S_{\boldsymbol{x}}$ は一辺の長さが $2\varepsilon bm\sqrt{m}$ である $m-1$ 次元立方体を底面とし, 高さが $2\sqrt{m}\varepsilon\mu(\varepsilon)$ である m 次元直方体だから, その体積は次の値である.

$$\left(2\varepsilon bm\sqrt{m}\right)^{m-1}\cdot 2\sqrt{m}\varepsilon\mu(\varepsilon)=(2\varepsilon)^m b^{m-1}\sqrt{m^{3m-2}}\mu(\varepsilon)$$

従って, $\boldsymbol{y}\in C^m(1)$ かつ $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|_\infty\leqq\varepsilon$ ならば $\tilde{f}(\boldsymbol{y})$ は体積が $(2\varepsilon)^m b^{m-1}\sqrt{m^{3m-2}}\mu(\varepsilon)$ である m 次元直方体に含まれる.

証明の続き

kを自然数とし, $1-k$以上k以下の整数の列$i_1, i_2, \ldots, i_m$に対し, $\boldsymbol{p}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$を第$l$成分が$\dfrac{2i_l-1}{2k}$である$\boldsymbol{R}^m$のベクトルとすれば, $\overline{C}^m(1)$は$(2k)^m$個の立方体$\overline{C}^m\left(\boldsymbol{p}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}; \frac{1}{k}\right)$の合併集合である. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \overline{C}^m\left(\boldsymbol{p}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}; \frac{1}{k}\right)$ならば

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|_\infty &= \|(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{p}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}) + (\boldsymbol{p}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}-\boldsymbol{x})\|_\infty \\ &\leqq \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{p}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\|_\infty + \|\boldsymbol{p}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}-\boldsymbol{x}\|_\infty \leqq \frac{2}{k}\end{aligned}$$

だから$\overline{C}^m\left(\boldsymbol{p}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}; \frac{1}{k}\right)$の中に$\hat{f}$の臨界点$\boldsymbol{x}$が含まれていれば, $\tilde{f}$による$\overline{C}^m\left(\boldsymbol{p}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}; \frac{1}{k}\right)$の像は体積が$k^{-m}b^{m-1}\sqrt{m^{3m-2}}\mu\left(\frac{2}{k}\right)$の$m$次元直方体に含まれる. $\hat{f}$の臨界点を含む立方体$\overline{C}^m\left(\boldsymbol{p}_{i_1,i_2,\ldots,i_m} \frac{1}{k}\right)$の個数は最大でも$(2k)^m$個だから, $\hat{f}$の臨界値全体の集合は体積の合計が

$$(2k)^m \cdot k^{-m}b^{m-1}\sqrt{m^{3m-2}}\mu\left(\frac{2}{k}\right) = 2^m b^{m-1}\sqrt{m^{3m-2}}\mu\left(\frac{2}{k}\right)$$

以下であるm次元直方体の合併集合に含まれる.

証明の続き

補題8.24により $k \to \infty$ のとき, $2^m b^{m-1} \sqrt{m^{3m-2}} \mu\left(\frac{2}{k}\right)$ は0に近づくため, 命題8.11により $\hat{f}$ の臨界値全体の集合の測度は0である.

より精密な次の形のSardの定理が知られている.

定理 8.26

M, Nをそれぞれm次元, n次元C^r級多様体とし, $f: M \to N$をC^r級写像とする.
$r-1 \geqq \max\{m-n, 0\}$ ならばfの臨界値全体からなる集合の測度は0である.

幾何学Ⅲ

第9節　パラコンパクト性

定義 9.1
$(X,\mathcal{O})$ を位相空間とする. X の各点がコンパクトな近傍をもつとき $(X,\mathcal{O})$ は**局所コンパクト**であるという.

注意 9.2
$\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\ldots,p_n)\in\boldsymbol{R}^n$, $r>0$ に対し, 記号8.5で定義した $\overline{C}^n(\boldsymbol{p};r)$ は有限閉区間の直積空間 $[p_1-r,p_1+r]\times[p_2-r,p_2+r]\times\cdots\times[p_n-r,p_n+r]$ だから幾何学 I 系11.7よりコンパクトである. また $\overline{C}^n(\boldsymbol{p};r)$ は $\boldsymbol{p}$ の近傍だから $\boldsymbol{R}^n$ は局所コンパクトである. 従って各点が $\boldsymbol{R}^n$ の開集合と同相な開近傍をもつ位相多様体は局所コンパクトである.

命題 9.3
$(X, \mathscr{O})$ を局所コンパクトなHausdorff空間とする. 任意の $p \in X$ と p の開近傍 U に対して p の開近傍 V で $\overline{V} \subset U$ かつ $\overline{V}$ がコンパクトであるものが存在する.

証明

D を p のコンパクトな近傍とすると, $D-U$ はコンパクトな部分空間 D の閉集合だから命題1.22よりコンパクトである. 従って命題1.25から X の開集合 W, V で $W \cap V = \emptyset$, $D-U \subset W$, $p \in V$ を満たすものがある. ここで, p は D の内点だから, V と D の内部 D^i と U の共通部分 $D^i \cap U \cap V$ を改めて V とおき直すことで $V \subset D^i \cap U$ としてよい. D はHausdorff空間のコンパクトな部分空間だから閉集合であり $V \subset D^i \subset D$ だから $\overline{V} \subset D$ である. 従って $\overline{V}$ はコンパクトな部分空間 D の閉部分集合だからコンパクトである. また $W \cap V = \emptyset$ より $V \subset X-W$ で, $X-W$ は閉集合だから $\overline{V} \subset X-W$ である. 故に $\overline{V} \subset D$ と $D-U \subset W$ から次の等式が成り立つため, $\overline{V} \subset U$ が得られる.

$$\overline{V} \cap (X-U) = \overline{V} \cap D \cap (X-U) = \overline{V} \cap (D-U) \subset (X-W) \cap W = \emptyset$$

系 9.4
$(X,\mathscr{O})$ が局所コンパクトなHausdorff空間で, 可算基をもつならばたかだか可算な $\mathscr{O}$ の基底 $\mathscr{B}$ で, 各 $U\in\mathscr{B}$ に対して $\overline{U}$ がコンパクトであるものが存在する.

証明
$\mathscr{B}'=\{U_1,U_2,\dots,U_n,\dots\}$ をたかだか可算な $\mathscr{O}$ の基底とする. 命題9.3から各 U_n と $p\in U_n$ に対して p の開近傍 $U_{p,n}$ で $\overline{U}_{p,n}\subset U_n$ かつ $\overline{U}_{p,n}$ がコンパクトであるものが存在する. $\mathscr{B}'$ は $\mathscr{O}$ の基底だから $p\in U_{k(p,n)}\subset U_{p,n}$ を満たす自然数 $k(p,n)$ がある.
$\overline{U}_{k(p,n)}\subset\overline{U}_{p,n}$ だから $\overline{U}_{k(p,n)}$ は $\overline{U}_{p,n}$ の閉部分集合で, $\overline{U}_{p,n}$ はコンパクトだから命題1.22より $\overline{U}_{k(p,n)}$ もコンパクトである. $\{k(p,n)\,|\,n\in\boldsymbol{N},p\in U_n\}$ は自然数を要素とする集合だから, この集合を $\{k_1,k_2,\dots,k_n,\dots\}$ とおき, $\mathscr{B}=\{U_{k_1},U_{k_2},\dots,U_{k_n},\dots\}$ とおけば, $\mathscr{B}$ はたかだか可算な集合である.
$\mathscr{B}'$ は $\mathscr{O}$ の基底だから X の任意の開集合 O と $p\in O$ に対して $p\in U_n$ かつ $U_n\subset O$ を満たす $U_n\in\mathscr{B}'$ がある. このとき $p\in U_{k(p,n)}\subset U_{p,n}\subset\overline{U}_{p,n}\subset U_n\subset O$ であり $U_{k(p,n)}\in\mathscr{B}$ が成り立つため, 幾何学I 命題8.5から $\mathscr{B}$ は $\mathscr{O}$ の基底である.

定義 9.5

$(X,\mathscr{O})$ を位相空間, $(A_i)_{i\in I}$ を X の部分集合からなる集合族とする.

(1) $(A_i)_{i\in I}$ が $X=\bigcup_{i\in I}A_i$ を 満たすとき, $(A_i)_{i\in I}$ を X の**被覆**という. さらにすべての $i\in I$ に対して A_i が X の開集合であるとき, $(A_i)_{i\in I}$ を X の**開被覆**という.

(2) $(A_i)_{i\in I}$ が次の条件を満たすとき $(A_i)_{i\in I}$ は**局所有限**であるという.

「任意の $p\in X$ に対して, p の開近傍 U で $U\cap A_i\neq\varnothing$ を満たす $i\in I$ が有限個しか存在しないようなものがある.」

(3) X の部分集合からなる集合族 $(B_j)_{j\in J}$ が次の条件を満たすとき $(B_j)_{j\in J}$ を $(A_i)_{i\in I}$ の**細分**という.

「任意の $j\in J$ に対して, $B_j\subset A_i$ を満たす $i\in I$ が存在する.」

(4) $(X,\mathscr{O})$ が Hausdorff 空間で, X の任意の開被覆に対して, その局所有限な細分である開被覆が存在するとき $(X,\mathscr{O})$ は**パラコンパクト**であるという.

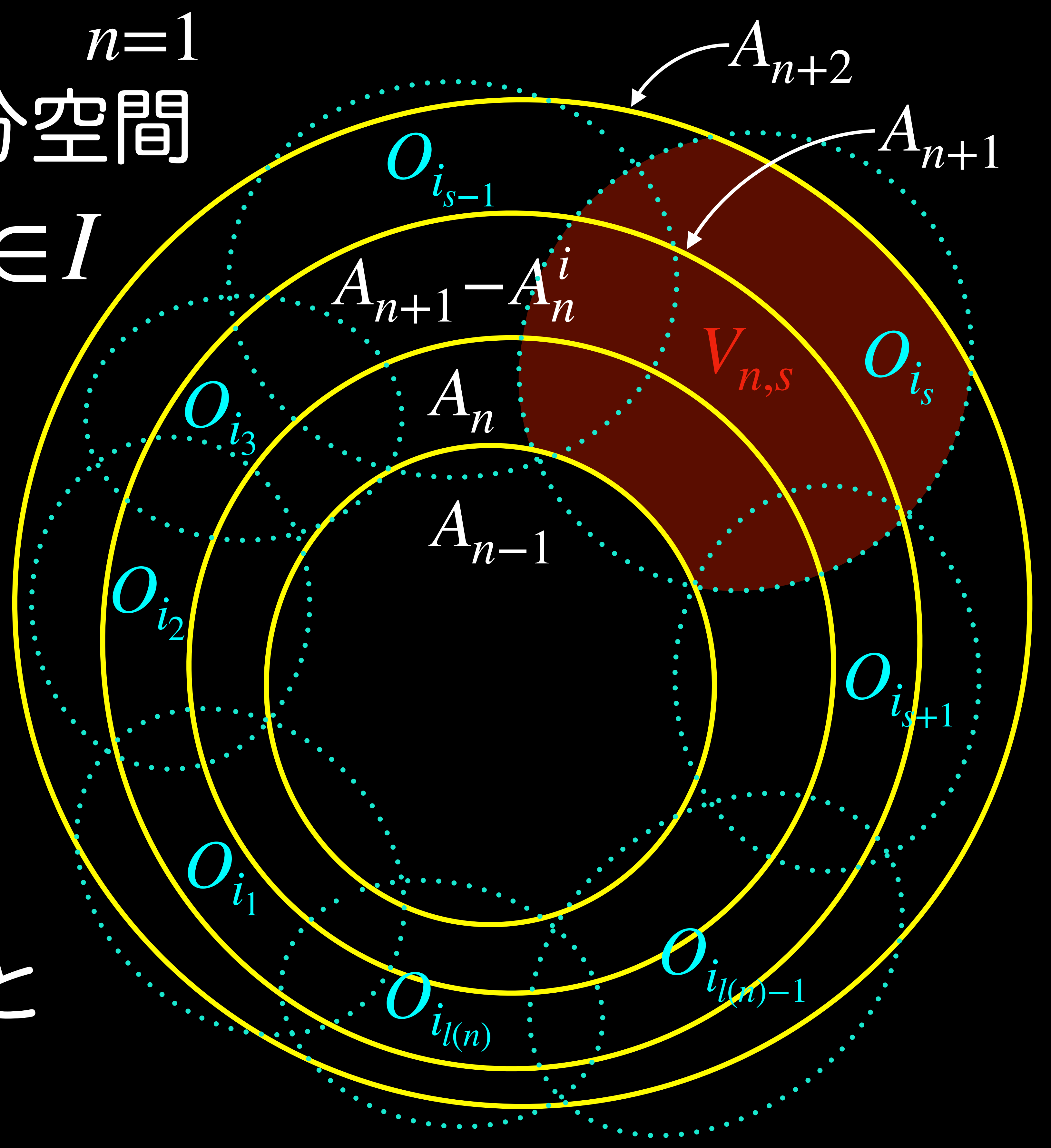
定理 9.6
$(X, \mathcal{O})$ が可算基をもつ局所コンパクトなHausdorff空間ならばパラコンパクトである.

証明
系9.4からたかだか可算な $\mathcal{O}$ の基底 $\mathscr{B}=\{U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots\}$ で各 $\overline{U}_n$ がコンパクトであるものが存在する. X の部分空間の列 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ を以下で帰納的に定める.
$A_1=\overline{U}_1$ とし, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ がすべてコンパクトで $U_k \subset A_k \subset A_{k+1}^{i}$ が $k=1,2,\ldots,n-1$ に対して成り立つように定められたと仮定する. $A_n \subset X=\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ で, A_n はコンパクトだから $A_n \subset U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k$ を満たす最小の自然数 k が存在し, それを k_n とする.
$A_{n+1}=\overline{U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_{k_n}} \cup \overline{U}_{n+1}$ とおけば, $U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_{k_n} \subset \overline{U}_1 \cup \overline{U}_2 \cup \cdots \cup \overline{U}_{k_n}$ で, この右辺は閉集合だから, $\overline{U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_{k_n}} \subset \overline{U}_1 \cup \overline{U}_2 \cup \cdots \cup \overline{U}_{k_n}$ が成り立つため,
$A_{n+1}=\overline{U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_{k_n}} \cup \overline{U}_{n+1} \subset \overline{U}_1 \cup \overline{U}_2 \cup \cdots \cup \overline{U}_{k_n} \cup \overline{U}_{n+1}$ が得られる. さらに左式の右辺はコンパクトで左辺は閉集合だから, A_{n+1} はコンパクトである.

証明の続き

また, $A_n \subset U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_{k_n} \subset \overline{U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_{k_n}} \cup \overline{U}_{n+1} = A_{n+1}$ で, $U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_{k_n}$ は開集合だから $A_n \subset U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_{k_n} \subset A^i_{n+1}$ が成り立つ. 以上から X のコンパクトな部分空間の列 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ で, 各自然数 n に対して $U_n \subset A_n \subset A^i_{n+1}$ を満たすものが定義された. このとき $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ だから $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ が成り立つ.

$(O_i)_{i \in I}$ を X の開被覆とする. $A_{n+1} - A^i_n$ はコンパクトな部分空間 A_{n+1} の閉集合だからコンパクトである. 故に $i_1, i_2, \ldots, i_{l(n)} \in I$ で $A_{n+1} - A^i_n \subset O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \cdots \cup O_{i_{l(n)}}$ を満たすものがある. $A_{n+1} \subset A^i_{n+2}$ かつ $A_{n-1} \subset A^i_n$ より $A_{n+1} - A^i_n \subset A^i_{n+2} - A_{n-1}$ が成り立つため, $V_{n,s} = O_{i_s} \cap (A^i_{n+2} - A_{n-1})$ とおけば, $V_{n,s}$ は開集合で $A_{n+1} - A^i_n \subset V_{n,1} \cup V_{n,2} \cup \cdots \cup V_{n,l(n)}$ が成り立つ. $V_{n,s} \subset O_{i_s}$ だから $J = \{(n, s) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \mid 1 \leqq s \leqq l(n)\}$ とおくと $(V_{n,s})_{(n,s) \in J}$ は $(O_i)_{i \in I}$ の細分である.



証明の続き

$V_{n,s}$ の定義から $V_{n,s} \cap A_{n-1} = \varnothing$ であり, $A_1 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n \subset \cdots$ だから $n > m$ ならば $V_{n,s} \cap A_m = \varnothing$ が成り立つことに注意する. 任意の $p \in X$ に対して p はコンパクトな近傍 W をもち, $W \subset X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ かつ $A_n \subset A_{n+1}^i$ だから $(A_n^i)_{n \in N}$ は W の開被覆である. 従って $W \subset A_{n_1}^i \cup A_{n_2}^i \cup \cdots \cup A_{n_k}^i$ を満たす自然数 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ が存在するが, $A_n^i \subset A_{n+1}^i$ より $W \subset A_{n_k}^i$ となるため, 上で注意したことから $n > n_k$ ならば $V_{n,s} \cap W = \varnothing$ である. 故に $V_{n,s} \cap W \neq \varnothing$ となる $V_{n,s}$ は有限個しかないので $(V_{n,s})_{(n,s) \in J}$ は局所有限であり, $(X, \mathcal{O})$ がパラコンパクトであることが示された.

補題 9.7

M を C^r 級多様体, $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ を M の座標近傍系とする. M の開被覆 $(O_i)_{i \in I}$ に対し, M の座標近傍系 $\{(\tilde{V}_k, \tilde{\psi}_k)\}_{k \in K}$ で, $(\tilde{V}_k)_{k \in K}$ が $(O_i)_{i \in I}$ と $(V_j)_{j \in J}$ の両方の細分であるものが存在する.

証明

$K=\{(i,j)\in I\times J \mid O_i\cap V_j\neq\varnothing\}$, $\tilde{V}_{(i,j)}=O_i\cap V_j$ とおけば $(\tilde{V}_{(i,j)})_{(i,j)\in K}$ は $(O_i)_{i\in I}$ と $(V_j)_{j\in J}$ の両方の細分で, $\tilde{\psi}_{(i,j)}:\tilde{V}_{(i,j)}\to\psi_j(O_i\cap V_j)$ を $\tilde{\psi}_{(i,j)}(x)=\psi_j(x)$ で定めれば $\{(\tilde{V}_{(i,j)},\tilde{\psi}_{(i,j)})\}_{(i,j)\in K}$ は M の座標近傍系である.

定理 9.8

M を n 次元 C^r 級多様体とする. M が可算基をもつとき M の開被覆 $(O_i)_{i\in I}$ に対し, M の座標近傍系 $\{(U_\lambda,\varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ で次の条件を満たすものが存在する.

(i)　Λ は可算集合で $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は $(O_i)_{i\in I}$ の局所有限な細分である.

(ii)　各 $\lambda\in\Lambda$ に対して $\varphi_\lambda(U_\lambda)=C^n(3)$.

(iii) $W_\lambda=\varphi_\lambda^{-1}(C^n(1))$ とおくと, $(W_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は M の開被覆である.

証明

M は可算基をもつ局所コンパクトなHausdorff空間だから, 定理9.6の証明で与えた M のコンパクトな部分空間の列 $A_1, A_2, \ldots, A_l, \ldots$ で, $A_l \subset A_{l+1}^i$ かつ $M = \bigcup_{l=1}^{\infty} A_l$ を満たすものがある. $\{(V_j, \psi_j)\}_{j\in J}$ を M の座標近傍系とすれば, 補題9.7から M の座標近傍系 $\{(\tilde{V}_k, \tilde{\psi}_k)\}_{k\in K}$ で, $(\tilde{V}_k)_{k\in K}$ が $(O_i)_{i\in I}$ と $(V_j)_{j\in J}$ の両方の細分であるものが存在する. 故に K を J に, $(\tilde{V}_k, \tilde{\psi}_k)$ を (V_j, ψ_j) におき直して, $\{(V_j, \psi_j)\}_{j\in J}$ は $(V_j)_{j\in J}$ が $(O_i)_{i\in I}$ の細分である M の座標近傍系であるとしてよい.

各 $l \in \boldsymbol{N}$ と $p \in A_{l+1} - A_l^i$ に対し, $p \in V_{j_p}$ を満たす $j_p \in J$ を選び, $\bar{\psi}_p(x) = \psi_{j_p}(x) - \psi_{j_p}(p)$ によって $V_{j_p} \cap (A_{l+2}^i - A_{l-1})$ から $\boldsymbol{R}^n$ の原点のある開近傍 W_p への同相写像 $\bar{\psi}_p$ を定める. $C^n(r) \subset W_p$ を満たす $r > 0$ を1つ選び, $\tilde{\psi}_p : V_{j_p} \cap (A_{l+2}^i - A_{l-1}) \to \boldsymbol{R}^n$ を $\tilde{\psi}_p(x) = \frac{3}{r}\bar{\psi}_p(x)$ で定めれば $C^n(3) \subset \tilde{\psi}_p(V_{j_p} \cap (A_{l+2}^i - A_{l-1}))$ であり, $V_{l,p} = \tilde{\psi}_p^{-1}(C^n(3))$ とおけば $p \in V_{l,p} \subset V_{j_p} \cap (A_{l+2}^i - A_{l-1})$ である. 写像 $\psi_{l,p} : V_{l,p} \to C^n(3)$ を $\psi_{l,p}(x) = \tilde{\psi}_p(x)$ で定める.

証明の続き

このとき $(V_{l,p},\psi_{l,p})$ は M の局所座標系で, $\psi_{l,p}(p)=\mathbf{0}$ より $\psi_{l,p}^{-1}(C^n(1))$ は p を含む開集合だから $A_{l+1}-A_l^i\subset\bigcup_{p\in A_{l+1}-A_l^i}\psi_{l,p}^{-1}(C^n(1))$ が成り立つ. 故に $p_1,p_2,\ldots,p_{s(l)}\in M$ で

$$A_{l+1}-A_l^i\subset\psi_{l,p_1}^{-1}(C^n(1))\cup\psi_{l,p_2}^{-1}(C^n(1))\cup\cdots\cup\psi_{l,p_{s(l)}}^{-1}(C^n(1))$$

を満たすものがある.

$\Lambda=\{(l,t)\in\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}\mid 1\leqq t\leqq s(l)\}$, $U_{(l,t)}=V_{l,p_t}$, $\varphi_{(l,t)}=\psi_{l,p_t}:U_{(l,t)}\to C^n(3)$ とおけば

Λ は可算集合で, $\{(U_\lambda,\varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ は M の座標近傍系であり, 定理9.6の証明と同様にして, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は $(O_i)_{i\in I}$ の局所有限な細分であることが示される.

また, 条件 (ii), (iii) は上記の ψ_{l,p_t}の定義のしかたから満たされることがわかる.

最後に次節で必要になる結果を示す.

補題 9.9
関数 $\rho:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $\rho(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x>0 \\ 0 & x\leqq 0 \end{cases}$ で定めれば, ρ は C^∞ 級関数である.

証明

$\rho^{(n)}$ を $x\neq 0$ の範囲での ρ の n 次導関数とする. $x>0$ に対し, $P_n(x)=x^{2n}e^{\frac{1}{x}}\rho^{(n)}(x)$ とおくと $P_n(x)$ は x の多項式であることを示す. $\rho'(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ より

$$P_1(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}\rho'(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=1$$

だから $n=1$ の場合は主張が成り立つ. $P_n(x)=x^{2n}e^{\frac{1}{x}}\rho^{(n)}(x)$ の両辺を x で微分する.
$\rho^{(n)}(x)=x^{-2n}e^{-\frac{1}{x}}P_n(x)$ に注意すれば次の等式が得られる.

$$\begin{aligned} P_n'(x)&=2nx^{2n-1}e^{\frac{1}{x}}\rho^{(n)}(x)-x^{2n-2}e^{\frac{1}{x}}\rho^{(n)}(x)+x^{2n}e^{\frac{1}{x}}\rho^{(n+1)}(x) \\ &=2nx^{-1}P_n(x)-x^{-2}P_n(x)+x^{-2}P_{n+1}(x)=\frac{1}{x^2}(P_{n+1}(x)+(2nx-1)P_n(x)) \end{aligned}$$

$P_n(x)$ が x の多項式であると仮定すれば, 上式より $P_{n+1}(x)=x^2P_n'(x)-(2nx-1)P_n(x)$ で, $x^2P_n'(x)$ と $(2nx-1)P_n(x)$ はともに x の多項式だから $P_{n+1}(x)$ も x の多項式である.

証明の続き

ρ が n 回微分可能で $\rho^{(n)}(0)=0$ であることを n による帰納法で示す.

$n=0$ のときは, $\rho^{(0)}(0)=\rho(0)=0$ より主張は成立する. $n=k$ のとき, 帰納法の仮定が成り立つとする. ρ は $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ においては, 無限回微分可能であるため $\rho^{(k)}$ は 0 以外で微分可能である. $y=\frac{1}{x}$ とおくと, $x=\frac{1}{y}$ で, $x\to+0$ のとき, $y\to\infty$ だから

$$\lim_{x\to+0}\frac{\rho^{(k)}(x)-\rho^{(k)}(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{x^{-2k}e^{-\frac{1}{x}}P_k(x)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2k+1}}\lim_{x\to0}P_k(x)=\lim_{y\to\infty}y^{2k+1}e^{-y}P_k(0)=0$$

となり, $\rho^{(k)}$ の 0 における右微分係数は 0 である. また, $x\leqq0$ ならば $\rho(x)=0$ だから $x<0$ ならば $\rho^{(k)}(x)=0$ である. 故に $\rho^{(k)}$ の 0 における左微分係数は

$$\lim_{x\to-0}\frac{\rho^{(k)}(x)-\rho^{(k)}(0)}{x-0}=0$$

となって, $\rho^{(k)}$ の 0 における右微分係数に一致するため, $\rho^{(k)}$ は 0 においても微分可能で, $\rho^{(k+1)}(0)=0$ が成り立つ.

補題 9.10

ρ を用いて関数 $\psi:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $\psi(x)=\dfrac{\rho(2+x)\rho(2-x)}{\rho(2+x)\rho(2-x)+\rho(x-1)+\rho(-x-1)}$ で定め，さらに関数 $\varphi:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ を $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\psi(x_1)\psi(x_2)\cdots\psi(x_1)$ で定める．このとき φ は C^∞ 級関数であり，$\boldsymbol{x}\in\overline{C}^n(1)$ ならば $\varphi(\boldsymbol{x})=1$, $\boldsymbol{x}\in C^n(2)-\overline{C}^n(1)$ ならば $0<\varphi(\boldsymbol{x})<1$, $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n-C^n(2)$ ならば $\varphi(\boldsymbol{x})=0$ が成り立つ．

証明

補題9.9より φ は C^∞ 級関数である．$\rho(x-1)=\rho(-x-1)=0$ は $x-1\leqq 0$ かつ $-x-1\leqq 0$ すなわち $|x|\leqq 1$ と同値で，このとき $\rho(2+x)\rho(2-x)>0$ だから $\psi(x)$ の分母はつねに正であり，$|x|\leqq 1$ ならば $\psi(x)=1$ であることがわかる．

$1<x<2$ ならば $\rho(x-1)>0$ かつ $\rho(2+x)\rho(2-x)>0$ であり，$-2<x<-1$ ならば $\rho(-x-1)>0$ かつ $\rho(2+x)\rho(2-x)>0$ だから，$1<|x|<2$ ならば $0<\psi(x)<1$ である．

$x>2$ ならば $\rho(2-x)=0$, $x<-2$ ならば $\rho(2+x)=0$ だから，$|x|>2$ ならば $\psi(x)=0$ である．以上のことと φ の定義から主張が成り立つ．

補題 9.11

$(A_i)_{i\in I}$ が位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の局所有限な部分集合の族ならば $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}=\bigcup_{i\in I}\overline{A_i}$ が成り立つ.
とくに $(A_i)_{i\in I}$ が局所有限な閉集合の族ならば $\bigcup_{i\in I} A_i$ は X の閉集合である.

証明

各 $j\in I$ に対して $\overline{A_j}\subset\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$ だから $\bigcup_{i\in I}\overline{A_i}\subset\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$ である. $p\in\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$ とする. 仮定から p の開近傍 U で $\{i\in I\mid U\cap A_i\neq\varnothing\}$ が有限集合になるものが存在する. この集合を $\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}$ とおき, $V=U\cap\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X-\overline{A_{i_k}})\right)$ とおけば V は X の開集合である.
もし $p\notin\bigcup_{i\in I}\overline{A_i}$ ならば V は p の開近傍だから $p\in\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$ より $V\cap\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\neq\varnothing$ となるため, $V\cap A_j\neq\varnothing$ となる $j\in I$ が存在する. $U\supset V$ より $U\cap A_j\supset V\cap A_j\neq\varnothing$ が成り立ち $U\cap A_j\neq\varnothing$ を満たす j は $i_1,i_2,\ldots,i_n$ のいずれかだから $j=i_k$ となる $k=1,2,\ldots,n$ が存在する. V の定義より $V\subset X-A_{i_k}$ だから $V\cap A_{i_k}=\varnothing$ となり, $V\cap A_{i_k}\neq\varnothing$ と矛盾する.

証明の続き

故に $p \in \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ となるため $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \subset \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ が成り立つ.

補題 9.12

$(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし, K を X のコンパクトな部分空間, $p \in Y$ とする. $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の直積空間において $K \times \{p\} \subset W$ を満たす $X \times Y$ の開集合 W に対して K を含む X の開集合 U と p の開近傍 V で $U \times V \subset W$ を満たすものがある.

証明

各 $x \in K$ に対して x の開近傍 U_x と p の開近傍 V_x で $U_x \times V_x \subset W$ を満たすものがある. $K \subset \bigcup_{x \in K} U_x$ だから K のコンパクト性から $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ で

$$K \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \cdots \cup U_{x_n}$$

を満たすものがある. $U = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \cdots \cup U_{x_n}$, $V = V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap \cdots \cap V_{x_n}$ とおけば $K \subset U$ であり, 各 i に対して $U_{x_i} \times V \subset U_{x_i} \times V_{x_i} \subset W$ が成り立つため, $U \times V \subset W$ である.

幾何学III

第10節　はめ込み定理

記号 10.1
実数を成分とする$m\times n$行列全体の集合を$M_{m,n}(\boldsymbol{R})$で表し, 階数がkである$m\times n$行列全体からなる$M_{m,n}(\boldsymbol{R})$の部分集合を$M_{m,n}(\boldsymbol{R};k)$で表す.
$M_{m,n}(\boldsymbol{R})$には$M_{m,n}(\boldsymbol{R})$をユークリッド空間$\boldsymbol{R}^{mn}$と同一視した位相を与え, $M_{m,n}(\boldsymbol{R};k)$には$M_{m,n}(\boldsymbol{R})$の部分空間としての位相を与える.

注意 10.2
m次正則行列Pとn次正則行列Qに対して写像$T_{P,Q}:M_{m,n}(\boldsymbol{R})\to M_{m,n}(\boldsymbol{R})$を$T_{P,Q}(A)=PAQ$で定めると$T_{P,Q}$は$T_{P^{-1},Q^{-1}}$を逆写像とする微分同相写像で$M_{m,n}(\boldsymbol{R};k)$から$M_{m,n}(\boldsymbol{R};k)$への同相写像を与える.

命題 10.3
$m\geqq n$のとき, $M_{m,n}(\boldsymbol{R};n)$は$M_{m,n}(\boldsymbol{R})$の開集合である.

証明

$1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqq m$ を満たす自然数の列 $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ 全体の集合を S とする. $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in S$ と $m \times n$ 行列 A に対し, A の第 i_k 行を第 k 行とする n 次正方行列を $A(I)$ で表し, 関数 $f_I : M_{m,n}(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ を $f_I(A) = |A(I)| = (A(I)$ の行列式$)$ で定義する. A の階数が n であるためには $f_I(A) \neq 0$ すなわち $A \in f_I^{-1}(\boldsymbol{R} - \{0\})$ を満たす $I \in S$ が存在することが必要十分だから, $M_{m,n}(\boldsymbol{R}\,; n) = \bigcup_{I \in S} f_I^{-1}(\boldsymbol{R} - \{0\})$ が成り立つ. $f_I(A)$ は A の成分の多項式だから, $f_I : M_{m,n}(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ は連続関数であり, $\boldsymbol{R} - \{0\}$ は $\boldsymbol{R}$ の開集合だから $f_I^{-1}(\boldsymbol{R} - \{0\})$ は $M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ の開集合である. 故に $M_{m,n}(\boldsymbol{R}\,; n) = \bigcup_{I \in S} f_I^{-1}(\boldsymbol{R} - \{0\})$ から, $M_{m,n}(\boldsymbol{R}; n)$ は $M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ の開集合である.

命題 10.4

$k \leqq \min\{m, n\}$ のとき, $M_{m,n}(\boldsymbol{R}; k)$ は $M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ の $k(m+n-k)$ 次元部分多様体である.

証明

$X_0 \in M_{m,n}(\boldsymbol{R};k)$ とする. $X_0 = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$ とし, A_0 が k 次正則行列の場合を考える.

k 次正則行列行列全体の集合は $M_{k,k}(\boldsymbol{R})$ の開集合だから $\varepsilon > 0$ で, 条件

「$\|A - A_0\|_\infty < \varepsilon$ ならば $A \in M_{k,k}(\boldsymbol{R})$ は正則行列である.」

を満たすものがある. そこで $U = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\boldsymbol{R}) \,\middle|\, \|A - A_0\|_\infty < \varepsilon \right\}$ とおけば U は $M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ における X_0 の開近傍である.

$A \in M_{k,k}(\boldsymbol{R})$ が正則行列の場合, $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\boldsymbol{R};k)$ に対して $Y = \begin{pmatrix} E_k & O \\ -CA^{-1} & E_{m-k} \end{pmatrix}$ とおくと Y は対角成分がすべて 1 である下半三角行列だから正則行列である.

従って $\operatorname{rank} YX = \operatorname{rank} X$ であり, $YX = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$ だから $D = CA^{-1}B$ ならば $\operatorname{rank} YX = \operatorname{rank} A = k$ である. もし $D \neq CA^{-1}B$ ならば YX の第 k 行より下の行で零でない行があるので, $\operatorname{rank} YX > k$ である.

故に $\operatorname{rank} X = k$ であるためには $D = CA^{-1}B$ であることが必要十分である.

証明の続き

写像 $\varphi:U\to U$ を $\varphi\left(\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$ で定めれば φ は微分同相写像で, 逆写像は $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}A & B\\ C & D+CA^{-1}B\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に (U,φ) は $M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ の局所座標系である.

$\varphi(X)=\begin{pmatrix}\varphi_{11}(X) & \varphi_{12}(X)\\ \varphi_{21}(X) & \varphi_{22}(X)\end{pmatrix}$ とおけば, 上で示したことから次の等式が成り立つ.

$$M_{m,n}(\boldsymbol{R};k)\cap U=\{X\in U\,|\,\varphi_{22}(X)=O\}$$

一般の $X_0\in M_{m,n}(\boldsymbol{R};k)$ に対して X_0 の行を入れ替える m 次正則行列 P と列を入れ替える n 次正則行列 Q を適当に選べば $T_{P,Q}(X_0)=\begin{pmatrix}A_0 & B_0\\ C_0 & D_0\end{pmatrix}$ で, A_0 が k 次正則行列になるようにできるので, 合成写像 $\varphi\circ T_{P,Q}:T_{P,Q}^{-1}(U)\to U$ を考えれば, $T_{P,Q}^{-1}(U)$ は $M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ における X_0 の開近傍で, 次の等式が成り立つ.

$$M_{m,n}(\boldsymbol{R};k)\cap T_{P,Q}^{-1}(U)=\{X\in T_{P,Q}^{-1}(U)\,|\,\varphi_{22}(T_{P,Q}(X))=O\}$$

故に $M_{m,n}(\boldsymbol{R};k)$ は $M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ の $mn-(m-k)(n-k)=k(m+n-k)$ 次元部分多様体である.

定理 10.5
U を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合, $f:U\to\boldsymbol{R}^m$ を C^2 級写像とする. $m\geqq 2n$ のとき, 任意の $\varepsilon>0$ に対し $A\in M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ で, $\|A\|_\infty<\varepsilon$ かつ $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ を列ベクトルとみなして $g(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})+A\boldsymbol{x}$ で定義される写像 $g:U\to\boldsymbol{R}^m$ がはめ込みになるものが存在する.

証明

$g'(\boldsymbol{x})=f'(\boldsymbol{x})+A$ だから, $g'(\boldsymbol{x})$ の階数がすべての $\boldsymbol{x}\in U$ に対して n になるように A を選べばよい. 写像 $F_k:M_{m,n}(\boldsymbol{R};k)\times U\to M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ を $F_k(Q,\boldsymbol{x})=Q-f'(\boldsymbol{x})$ で定めれば命題10.4から F_k の定義域は $k(m+n-k)+n$ 次元の多様体で, F_k は C^1 級写像である. $m\geqq 2n$ だから $k(m+n-k)+n$ は k の関数として $k<n$ の範囲で単調増加関数である. 故に $k<n$ ならば, F_k の定義域の次元は $(n-1)(m+n-(n-1))+n=2n-m+mn-1$ 以下で, $m\geqq 2n$ だから, この値は $M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ の次元である mn より小さい.
従って命題8.22から $F_k(M_{m,n}(\boldsymbol{R};k)\times U)$ は $M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ において測度が 0 になるため, 命題8.13から $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n-1}F_k(M_{m,n}(\boldsymbol{R};k)\times U)$ の測度も 0 である.

証明の続き

注意8.9から $M_{m,n}(\boldsymbol{R}) - \bigcup_{k=0}^{n-1} F_k(M_{m,n}(\boldsymbol{R};k)\times U)$ の閉包に零行列が含まれるため,

$\|A\|_\infty < \varepsilon$ である $A \in M_{m,n}(\boldsymbol{R}) - \bigcup_{k=0}^{n-1} F_k(M_{m,n}(\boldsymbol{R};k)\times U)$ が存在する. この A に対して

$g'(\boldsymbol{x}) = f'(\boldsymbol{x}) + A$ の階数が n より小さい値 k になるなるような $\boldsymbol{x} \in U$ が存在すれば

$A = g'(\boldsymbol{x}) - f'(\boldsymbol{x}) = F_k(g'(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) \in F_k(M_{m,n}(\boldsymbol{R};k)\times U)$ となり, A の選び方と矛盾する.

故に $g'(\boldsymbol{x})$ の階数はすべての $\boldsymbol{x} \in U$ に対して n になる.

定理 10.6

U を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合, $f: U \to \boldsymbol{R}^m$ を C^2 級写像とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $A \in M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ と $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^m$ で, $\|A\|_\infty < \varepsilon$, $\|\boldsymbol{b}\|_\infty < \varepsilon$ かつ $g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ で定義される写像 $g: U \to \boldsymbol{R}^m$ が原点を正則値にもつようなものが存在する.

証明

$n < m$ ならば命題8.20から $f(U)$ の測度は 0 だから, $A = O$ として, 原点が g の像にならないような $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^m$ で $\|\boldsymbol{b}\|_\infty < \varepsilon$ を満たすものを選ぶことができる.

証明の続き

$n \geqq m$ とし, 写像 $F_k : M_{m,n}(\boldsymbol{R}; k) \times U \to M_{m,n}(\boldsymbol{R}) \times \boldsymbol{R}^m$ を次のように定める.

$$F_k(Q, \boldsymbol{x}) = (Q - f'(\boldsymbol{x}), -f(\boldsymbol{x}) - (Q - f'(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{x})$$

命題10.4から F_k の定義域は $k(m+n-k)+n$ 次元の多様体で, F_k は C^1 級写像である.

故に $k<m$ ならば F_k の定義域の次元は $(m-1)(m+n-(m-1))+n = mn+m-1$

以下で, $M_{m,n}(\boldsymbol{R}) \times \boldsymbol{R}^m$ は $m(n+1)$ 次元だから命題8.22より $F_k(M_{m,n}(\boldsymbol{R}; k) \times U)$ は $M_{m,n}(\boldsymbol{R}) \times \boldsymbol{R}^m$ において測度が 0 になる. 故に命題8.13から $\bigcup_{k=0}^{m-1} F_k(M_{m,n}(\boldsymbol{R}; k) \times U)$ の測度も 0 である. 注意8.9から $M_{m,n}(\boldsymbol{R}) \times \boldsymbol{R}^m - \bigcup_{k=0}^{m-1} F_k(M_{m,n}(\boldsymbol{R}; k) \times U)$ の閉包に零行列が含まれるため, $\|A\|_\infty < \varepsilon$, $\|\boldsymbol{b}\|_\infty < \varepsilon$ を満たす

$$(A, \boldsymbol{b}) \in M_{m,n}(\boldsymbol{R}) \times \boldsymbol{R}^m - \bigcup_{k=0}^{m-1} F_k(M_{m,,n}(\boldsymbol{R}; k) \times U)$$

がある. この A, $\boldsymbol{b}$ に対し $g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ かつ $g'(\boldsymbol{x}) = f'(\boldsymbol{x}) + A$ の階数が m より小さい値 k になる $\boldsymbol{x} \in U$ が存在すると仮定する.

証明の続き

このとき $F_k(g'(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = (A, \boldsymbol{b})$ となって, 左辺は $F_k(M_{m,n}(\boldsymbol{R}; k) \times U)$ に属するため, $(A, \boldsymbol{b})$ の選び方と矛盾する.

故に $g'(\boldsymbol{x})$ の階数は $g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ を満たすすべての $\boldsymbol{x} \in U$ に対して m になる.

定義 10.7

X を集合, (Y, d) を距離空間, $\delta: X \to \boldsymbol{R}$ を値がつねに正の実数である関数とする.
写像 $f: X \to Y$ に対し, 写像 $g: X \to Y$ が条件

「すべての $x \in X$ に対して $d(f(x), g(x)) < \delta(x)$」

を満たすとき, g は f の δ-近似であるという.

次の定理は「はめ込み定理」と呼ばれている. 以下で r を2以上の整数または ∞ とする.

定理 10.8

M を可算基をもつ n 次元 C^r 級多様体, $f: M \to \boldsymbol{R}^m$ を C^r 級写像, $\delta: M \to \boldsymbol{R}$ を値がつねに正の実数である関数とする. $m \geqq 2n$ ならば f の δ-近似であるはめ込み $g: M \to \boldsymbol{R}^m$ が存在する. もし M のある閉集合 N の各点で f の階数が n ならば, g は条件「$x \in N$ ならば $g(x) = f(x)$」を満たすように選ぶことができる.

証明

f の階数が n である M の点全体からなる集合を U とすれば, 命題7.6から U の各点は U の内点であるため, U は M の開集合である. N の各点で f の階数が n ならば $N\subset U$ だから $(U, M-N)$ は M の開被覆である. 定理9.8より M の座標近傍系 $\{(U_i, h_i)\}_{i\in I}$ で次の条件を満たすものが存在する.

(i)　I は可算集合で $(U_i)_{i\in I}$ は $(U, M-N)$ の局所有限な細分である.

(ii)　各 $i\in I$ に対して $h_i(U_i)=C^n(3)$.

(iii) $W_i=h_i^{-1}(C^n(1))$ とおくと, $(W_i)_{i\in I}$ は M の開被覆である.

I は可算集合だから I を整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ とし, 番号を付け替えることで $i\leqq 0$ ならば $U_i\subset U$, $i\geqq 1$ ならば $U_i\subset M-N$ であるとしてよい. 各 $i\in\boldsymbol{Z}$ に対して $\overline{W}_i=h_i(\overline{C}^n(1))\subset h_i(C^n(3))=U_i$ であり $(U_i)_{i\in I}$ は局所有限だから $(\overline{W}_i)_{i\in I}$ も局所有限である. 故に $N_k=\bigcup_{i\leqq k}\overline{W}_i$ とおけば補題9.11より N_k は閉集合である. さらに $i\leqq 0$ ならば $\overline{W}_i\subset U_i\subset U$ だから $N_0\subset U$ である. $f_0=f$ とおき, 帰納的に C^r 級写像 $f_{k-1}:M\to\boldsymbol{R}^m$ が定義されて, N_{k-1} の各点で f_{k-1} の階数は n であるとする.

証明の続き

合成写像 $f_{k-1}\circ h_k^{-1}:C^n(3)\to\boldsymbol{R}^m$ を考え, $m\times n$ 行列 A に対して $F_A:C^n(3)\to\boldsymbol{R}^m$ を $F_A(\boldsymbol{x})=(f_{k-1}\circ h_k^{-1})(\boldsymbol{x})+\varphi(\boldsymbol{x})A\boldsymbol{x}$ で定義する. ここで $\boldsymbol{x}$ は n 次元列ベクトル, $\varphi:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ は補題9.10で定義した関数で, A は後ほど定める.

$V_i=h_i^{-1}(C^n(2))$, $K=h_k(N_{k-1}\cap\overline{V}_k)$ とおけば, 帰納法の仮定から各 $\boldsymbol{x}\in K$ における $f_{k-1}\circ h_k^{-1}$ の階数は n である. 命題5.6より $F_A'(\boldsymbol{x})=(f_{k-1}\circ h_k^{-1})'(\boldsymbol{x})+A\boldsymbol{x}\varphi'(\boldsymbol{x})+\varphi(\boldsymbol{x})A$ だから, $G(\boldsymbol{x},A)=F_A'(\boldsymbol{x})$ によって写像 $G:K\times M_{m,n}(\boldsymbol{R})\to M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ を定めれば, G は連続である. G による $K\times\{O\}$ の像は $M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ の部分集合 $M_{m,n}(\boldsymbol{R};n)$ に含まれ, K はコンパクト, $M_{m,n}(\boldsymbol{R};n)$ は命題10.3によって開集合だから補題9.12より $c_k>0$ で条件「$\boldsymbol{x}\in K$ かつ $\|A\|_\infty<c_k$ ならば $G(\boldsymbol{x},A)\in M_{m,n}(\boldsymbol{R};n)$」を満たすものがある.

コンパクトな部分空間 $\overline{V}_i$ における δ の最小値を ε_i とする. 定理10.5から, $A\in M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ を $\bar{f}_k(\boldsymbol{x})=(f_{k-1}\circ h_k^{-1})(\boldsymbol{x})+A\boldsymbol{x}$ で定義される写像 $\bar{f}_k:C^n(3)\to\boldsymbol{R}^m$ がはめ込みになり, かつ $\|A\|_\infty<\min\left\{c_k,\dfrac{\varepsilon_k}{3\cdot 2^k n}\right\}$ が成り立つように選ぶことができる.

証明の続き

そこで $f_k: M \to \boldsymbol{R}^m$ を次で定める.

$$f_k(x) = \begin{cases} f_{k-1}(x) + \varphi(h_k(x))Ah_k(x) & x \in U_k \\ f_{k-1}(x) & x \in M - \overline{V}_k \end{cases}$$

補題9.10から $x \in U_k - \overline{V}_k$ ならば $\varphi(h_k(x)) = 0$ だから, 上の f_k の U_k における定義と $M - \overline{V}_k$ における定義は重複する開集合の部分 $U_k - \overline{V}_k$ で一致しているため, f_k は C^r 級写像である. $k \geqq 1$ のとき $U_k \subset M - N$ より $N \subset M - U_k$ で, $x \notin U_k$ ならば $f_k(x) = f_{k-1}(x)$ だから $x \in N$ ならば $f_k(x) = f_{k-1}(x)$ である.

$\|A\|_\infty < c_k$ より $x \in N_{k-1} \cap \overline{V}_k = h_k^{-1}(K)$ ならば x における f_k の階数は n であり, $x \in N_{k-1} - \overline{V}_k$ ならば f_k の定義から $f_k(x) = f_{k-1}(x)$ だからこの場合も x における f_k の階数は n である. 故に N_{k-1} の各点における f_k の階数は n である. $\bar{f}_k: C^n(3) \to \boldsymbol{R}^m$ がはめ込みになるように A を選んだことから, $\overline{W}_k$ の各点における f_k の階数は n である. 従って $N_k = N_{k-1} \cup \overline{W}_k$ の各点における f_k の階数は n である.

証明の続き

$\|A\|_\infty < \dfrac{\varepsilon_k}{3\cdot 2^k n}$ を満たすように A を選んだので $\boldsymbol{x}\in C^n(3)$ ならば補題8.12より $\|A\boldsymbol{x}\|_\infty \leqq n\|A\|_\infty\|\boldsymbol{x}\|_\infty < \dfrac{\varepsilon_k}{2^k}$ が成り立つため, $0\leqq\varphi(h_k(x))\leqq 1$ と f_k の定義から f_k は f_{k-1} の $\dfrac{\delta}{2^k}$-近似である.

$g:M\to\boldsymbol{R}^m$ を $g(x)=\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ で定義する. $(U_i)_{i\in I}$ は局所有限だから, 各 $p\in M$ に対して p の開近傍 Z と自然数 l で「$i\geqq l$ ならば $Z\cap U_i=\varnothing$」を満たすものが存在する.

故に $i\geqq l$ ならば $Z\subset M-U_i\subset M-\overline{V}_i$ であり, f_k と f_{k-1} は $M-\overline{V}_k$ の部分では一致しているため, $x\in Z$ かつ $i\geqq l$ ならば $g(x)=f_i(x)$ である. 従って g は C^r 級写像であり, $(W_i)_{i\in I}$ が M の開被覆であることから, M のすべての点で g の階数は n である.

さらに $f_k=f_0+(f_1-f_0)+\cdots+(f_k-f_{k-1})$ は $f=f_0$ の $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^k}\right)\delta$-近似だから g は f の δ-近似であり, $x\in N$ ならば $f_k(x)=f_{k-1}(x)$ だから $g(x)=f(x)$ である.

幾何学III

第11節　埋め込み定理

本節では “Whitneyの埋め込み定理”と呼ばれる主張

「n 次元 C^r 級多様体から $2n+1$ 次元ユークリッド空間への埋め込みが存在する.」

の証明をJ. W. Milnor の Princeton大学での講義録“Differential Topology” に従って行う.

$\mathscr{B}$ が位相空間 $(X, \mathscr{O})$ の基底で Y が $(X, \mathscr{O})$ の部分空間ならば $\{O \cap Y \mid O \in \mathscr{B}\}$ は Y の基底だから $(X, \mathscr{O})$ が可算基をもてば, その任意の部分空間も可算基をもつため, 多様体 M から $\boldsymbol{R}^n$ への埋め込みが存在すれば, 命題7.16と幾何学演習 II 例題1.13に よって M は可算基をもつ. そのため, 以後扱う多様体は可算基をもつと仮定する.

この仮定は, あまりに「巨大な」多様体を除外するだけで, 可算集合である座標近傍系をもつような多様体は幾何学演習 II 例題1.6と幾何学演習 II 例題1.13によって可算基をもつことが示される.

補題 11.1
rを2以上の整数または∞とし, Mをn次元C^r級多様体, $f\colon M\to\boldsymbol{R}^m$をはめ込み, $\delta\colon M\to\boldsymbol{R}$を値がつねに正の実数である関数とする. $m>2n$ ならばfのδ-近似である単射のはめ込み $g\colon M\to\boldsymbol{R}^m$が存在する. もし$M$のある閉集合$N$を含む開集合$U$の上で$f$が単射ならば, 上の$g$は条件「$x\in N$ ならば $g(x)=f(x)$」を満たすように選ぶことができる.

証明
命題7.6から M の開被覆 $(O_\alpha)_{\alpha\in A}$ で, f の各 O_α への制限が埋め込みになるものが存在する. また$(U, M-N)$もMの開被覆だから$(O_\alpha\cap U, O_\alpha\cap(M-N))_{\alpha\in A}$も$M$の開被覆である. よって定理9.8から M の座標近傍系$\{(U_i, h_i)\}_{i\in\boldsymbol{Z}}$ で条件

(i) $(U_i)_{i\in\boldsymbol{Z}}$ は $(O_\alpha\cap U, O_\alpha\cap(M-N))_{\alpha\in A}$ の局所有限な細分である.
(ii) 各 $i\in I$ に対して $h_i(U_i)=C^n(3)$.
(iii) $W_i=h_i^{-1}(C^n(1))$ とおくと, $(W_i)_{i\in\boldsymbol{Z}}$ は M の開被覆である.

を満たすものが存在する. 定理10.8の証明と同様に$\{(U_i, h_i)\}_{i\in\boldsymbol{Z}}$の番号を付け直して$i\leqq 0$ならば$U_i\subset U$, $i\geqq 1$ならば$U_i\subset M-N$であるとし, $V_i=h_i^{-1}(C^n(2))$ とおく.

証明の続き

$\varphi : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ を補題9.9で定義した関数として $\varphi_i : M \to \boldsymbol{R}$ を次のように定めると φ_i は C^r 級関数である.

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi(h_i(x)) & x \in U_i \\ 0 & x \notin U_i \end{cases}$$

$F'_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x})$ に写す

$f_0 = f$ とおき, 帰納的にはめ込み $f_{k-1} : M \to \boldsymbol{R}^m$ が定義されたとして $\boldsymbol{b}_k \in \boldsymbol{R}^m$ に対して f_k を $f_k(x) = f_{k-1}(x) + \varphi_k(x)\boldsymbol{b}_k$ で定義して, 以下で $\boldsymbol{b}_k \in \boldsymbol{R}^m$ を定める.

$\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^m$ に対して $F_{\boldsymbol{b}} : C^n(3) \to \boldsymbol{R}^m$ を $F_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) = (f_{k-1} \circ h_k^{-1})(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}$ で定義する.

$K = h_k(\overline{V}_k)$ とおき, 各 $\boldsymbol{x} \in K$ における $F_{\boldsymbol{b}}$ の階数が n になるように, いくらでも $\|\boldsymbol{b}\|_\infty$ が小さい $\boldsymbol{b}$ を選べることを示す. 仮定から各 $\boldsymbol{x} \in K$ における $f_{k-1} \circ h_k^{-1}$ の階数は n である. ここで $F'_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) = (f_{k-1} \circ h_k^{-1})'(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}\varphi'(\boldsymbol{x})$ だから写像 $G : K \times \boldsymbol{R}^m \to M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ を $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = F'_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x})$ で定めれば, G は連続である. G による $K \times \{\boldsymbol{0}\}$ の像は $M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ の開集合 $M_{m,n}(\boldsymbol{R}; n)$ に含まれ, K はコンパクトだから補題9.12より $c_k > 0$ で条件「$\boldsymbol{x} \in K$ かつ $\|\boldsymbol{b}\|_\infty < c_k$ ならば $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) \in M_{m,n}(\boldsymbol{R}; n)$」を満たすものがある.

証明の続き

従って $\|\boldsymbol{b}_k\|_\infty < c_k$ ならば f_k ははめ込みである.

コンパクトな部分空間 $\overline{V}_k = h_k^{-1}(\overline{C}^n(2))$ における δ の最小値を ε_k とすると,

$\|\boldsymbol{b}_k\|_\infty < \dfrac{\varepsilon_k}{2^k}$ ならば f_k は f_{k-1} の $\dfrac{\delta}{2^k}$-近似である.

$$D = \{(x, y) \in M \times M \mid \varphi_k(x) \neq \varphi_k(y)\}$$

とおくと, φ_k の連続性から D は $M \times M$ の開集合だから D は $2n$ 次元多様体 $M \times M$ の開部分多様体である. 写像 $\Phi : D \to \boldsymbol{R}^m$ を $\Phi(x, y) = -\dfrac{f_{k-1}(x) - f_{k-1}(y)}{\varphi_k(x) - \varphi_k(y)}$ で定めれば Φ は C^r 級写像である. $m > 2n$ だから, 命題8.22より $\Phi(D)$ の測度は 0 である. 故に $\|\boldsymbol{b}_k\|_\infty < \min\left\{c_k, \dfrac{\varepsilon_k}{2^k}\right\}$ かつ $\boldsymbol{b}_k \notin \Phi(D)$ を満たす $\boldsymbol{b}_k \in \boldsymbol{R}^m$ を選ぶことができる.

このとき $f_k(x) = f_k(y)$ は $f_{k-1}(x) - f_{k-1}(y) = -(\varphi_k(x) - \varphi_k(y))\boldsymbol{b}_k$ と同値であり, もし $\varphi_k(x) \neq \varphi_k(y)$ ならば $(x, y) \in W$ であり, $\Phi(x, y) = \boldsymbol{b}_k$ となって $\boldsymbol{b}_k \notin \Phi(D)$ と矛盾する.

故に $f_k(x) = f_k(y)$ ならば「$f_{k-1}(x) = f_{k-1}(y)$ かつ $\varphi_k(x) = \varphi_k(y)$」であり, 逆も成り立つ.

証明の続き

$g\colon M\to \boldsymbol{R}^m$ を $g(x)=\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ で定義する. $(U_i)_{i\in\boldsymbol{Z}}$ は局所有限だから, 各 $p\in M$ に対して p の開近傍 Z と自然数 l で「$i\geqq l$ ならば $Z\cap U_i=\emptyset$」を満たすものが存在する.

故に $i\geqq l$ ならば $Z\subset M-U_i=M-h_i^{-1}(C^n(3))\subset M-h_i^{-1}(\overline{C}^n(2))=M-\overline{V}_i$ であり, f_k と f_{k-1} は $M-\overline{V}_k$ の部分では一致しているため, $x\in Z$ かつ $i\geqq l$ ならば $g(x)=f_i(x)$ である. 従って g は C^r 級写像であり, M のすべての点で g の階数は n である.

さらに $f_k=f_0+(f_1-f_0)+\cdots+(f_k-f_{k-1})$ は $f=f_0$ の $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\delta$-近似だから g は f の δ-近似である.

また $k\geqq 1$ のとき, $U_k\subset M-N$ で $x\notin U_k$ ならば $f_k(x)=f_{k-1}(x)$ だから, $x\in N$ ならば $f_k(x)=f_{k-1}(x)$ となるため, $x\in N$ ならば $g(x)=f(x)$ である.

最後に $g(x)=g(y)$ かつ $x\neq y$ となる $x, y\in M$ が存在すると仮定して矛盾を導く.

証明の続き

$L \geqq 0$ で $k \geqq L$ ならば $g(x) = f_k(x)$, $g(y) = f_k(y)$ を満たすものがあり, $f_k(x) = f_k(y)$ ならば「$f_{k-1}(x) = f_{k-1}(y)$ かつ $\varphi_k(x) = \varphi_k(y)$」だから, すべての $k \geqq 1$ に対して「$f_{k-1}(x) = f_{k-1}(y)$ かつ $\varphi_k(x) = \varphi_k(y)$」が成り立つ. とくに $f(x) = f_0(x) = f_0(y) = f(y)$ だから $x, y \in O_\alpha$ を満たす $\alpha \in A$ は存在しない. $(U_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ は $(O_\alpha)_{\alpha \in A}$ の細分だから $x, y \in U_i$ を満たす $i \in \mathbf{Z}$ は存在しない. 一方, すべての $k \geqq 1$ に対して $\varphi_k(x) = \varphi_k(y)$ が成り立つことから, もし $x \in W_k$ となる $k \geqq 1$ があれば $y \notin U_k$ だから $\varphi_k(x) = 1$, $\varphi_k(y) = 0$ となって矛盾が生じる. 同様に $y \in W_k$ となる $k \geqq 1$ があっても矛盾が生じるため, $i, k \leqq 0$ で $x \in U_i$, $y \in U_k$ となるものがあるが, $U_i, U_k \subset U$ だから $x, y \in U$ となって, f の定義域を U に制限したものが単射であるという仮定と矛盾が生じる.

故に g は単射である.

定義 11.2

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間, A を X の部分集合とする. $x \in X$ が $x \in \overline{A - \{x\}}$ を満たすとき, x を A の集積点という.

X の点列 $(x_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ に対して $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ の集積点を $(x_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ の集積点という.

定義 11.3

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間, (Y, d) を距離空間とし, 写像 $f: X \to Y$ が与えられているとする.

集積点をもたない X の点列 $(x_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ に対して $\lim_{n \to \infty} f(x_n)$ の形に表される Y の点全体からなる集合を f の極限集合といい, $L(f)$ で表す.

補題 11.4

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間, (Y, d) を距離空間, $f: X \to Y$ を連続写像とする.

$f(X)$ が Y の閉集合であるためには $L(f) \subset f(X)$ であることが必要十分である.

証明

$f(X)$ が Y の閉集合であるとし, $y\in L(f)$ ならば集積点をもたない X の点列 $(x_n)_{n\in N}$ で $y=\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ となるものがある. $(f(x_n))_{n\in N}$ は閉集合 $f(X)$ の点列だから幾何学 I 命題4.17から $y\in f(X)$ である. 従って $L(f)\subset f(X)$ である.

逆に $L(f)\subset f(X)$ として任意の $y\in \overline{f(X)}$ をとれば, 幾何学 I 命題4.19から $f(X)$ の点列 $(y_n)_{n\in N}$ で $y=\lim_{n\to\infty} y_n$ となるものがある. $y_n\in f(X)$ より $y_n=f(x_n)$ を満たす X の点列 $(x_n)_{n\in N}$ がある. $(x_n)_{n\in N}$ の集積点が存在すればその集積点に収束する部分列 $(x_{n_i})_{i\in N}$ があるため, $x=\lim_{i\to\infty} x_{n_i}$ とおけば $f(x)=\lim_{i\to\infty} f(x_{n_i})=\lim_{i\to\infty} y_{n_i}=y$ だから $y\in f(X)$ となり, $\overline{f(X)}=f(X)$ が成り立つため, $f(X)$ は Y の閉集合である.

補題 11.5

$(X,\mathcal{O})$ を位相空間, (Y,d) を距離空間, $f:X\to Y$ を連続な単射とする. f が $f(X)$ への同相写像であるためには, $L(f)\cap f(X)=\emptyset$ であることが必要十分である.

証明

$f\colon X\to Y$ を $f(X)$ への同相写像であるとし, $L(f)\cap f(X)\neq\varnothing$ と仮定する.
$y\in L(f)\cap f(X)$ ならば $y=f(x)$ を満たす $x\in X$ と集積点をもたない X の点列 $(x_n)_{n\in N}$ で $y=\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ となるものがある. f から定まる同相写像 $X\to f(X)$ の逆写像を $f^{-1}\colon f(X)\to X$ とすれば $x=f^{-1}(y)=f^{-1}\left(\lim_{n\to\infty} f(x_n)\right)=\lim_{n\to\infty} f^{-1}(f(x_n))=\lim_{n\to\infty} x_n$ となって, $(x_n)_{n\in N}$ が集積点をもたないことと矛盾する. 故に $L(f)\cap f(X)=\varnothing$ である.

$L(f)\cap f(X)=\varnothing$ と仮定して, $f^{-1}\colon f(X)\to X$ が $f(p)\in f(X)$ で連続でないとすれば, $p\in X$ の開近傍 V で, 任意の自然数 n に対して $f^{-1}\left(B_d\left(f(p);\frac{1}{n}\right)\cap f(X)\right)\not\subset V$ を満たすものがあるため, 各自然数 n に対して $x_n\in X-V$ で $d(f(x_n),f(p))<\frac{1}{n}$ を満たすものがある. このとき $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(p)\in f(X)$ だから, 仮定から $\lim_{n\to\infty} f(x_n)\notin L(f)$ より, $(x_n)_{n\in N}$ は集積点をもつ. その集積点を q とし, q に収束する部分列を $(x_{n_i})_{i\in N}$ とすれば $f(p)=\lim_{i\to\infty} f(x_{n_i})=f\left(\lim_{i\to\infty} x_{n_i}\right)=f(q)$ となり, f は単射だから $p=q$ を得る. 一方, 各 i に対して $x_{n_i}\in X-V$ だから, $(x_{n_i})_{i\in N}$ は p には収束しないので矛盾が生じる.

補題 11.6
M を n 次元 C^r 級多様体とするとき, C^r 級関数 $f: M \to \boldsymbol{R}$ で $L(f) = \emptyset$ となるものが存在する.

証明
定理9.8から M の座標近傍系 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ で次の条件を満たすものが存在する.
(i)　Λ は可算集合で $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は局所有限な M の開被覆である.
(ii)　各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi_\lambda(U_\lambda) = C^n(3)$.
(iii) $W_\lambda = \varphi_\lambda^{-1}(C^n(1))$ とおくと, $(W_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は M の開被覆である.
Λ は可算集合だから $\Lambda = \boldsymbol{N}$ と仮定してよい. また, $\varphi: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ を補題9.10で定義した関数として $\varphi_i: M \to \boldsymbol{R}$ を次のように定めると φ_i は C^r 級関数である.

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi(h_i(x)) & x \in U_i \\ 0 & x \notin U_i \end{cases}$$

$(U_i)_{i \in \boldsymbol{N}}$ は局所有限だから各 $p \in M$ の開近傍 O で, $\varphi_i(x) \neq 0$ となる $x \in O$ が存在する $i \in \boldsymbol{N}$ は有限個しかないことに注意する.

証明の続き

従って $f:M\to\boldsymbol{R}$ を $f(x)=\sum_{i\in\boldsymbol{N}} i\varphi_i(x)$ で定めれば, f は C^r 級関数である.

$(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ を集積点をもたない M の点列とすれば, 各 $\overline{W}_i$ はコンパクトだから幾何学II 定理1.4により $x_n\in\overline{W}_i$ となる $n\in\boldsymbol{N}$ は有限個である. 従って各 $m\in\boldsymbol{N}$ に対して $x_i\notin\overline{W}_1\cup\overline{W}_2\cup\cdots\cup\overline{W}_m$ となる $i\in\boldsymbol{N}$ が存在し, このとき $j>m$ を満たす j に対して $x_i\in\overline{W}_j$ となり, $f(x_i)\geqq j\varphi_j(x_i)=j>m$ が成り立つ. 従って実数列 $(f(x_n))_{n\in\boldsymbol{N}}$ は有界ではないため, 収束しない. 故に $L(f)=\emptyset$ である.

定理 11.7　Whitenyの埋め込み定理
r を2以上の整数または ∞ とし, M を n 次元 C^r 級多様体とするとき, M から $\boldsymbol{R}^{2n+1}$ への埋め込みで, M の像が $\boldsymbol{R}^{2n+1}$ の閉集合になるものが存在する.

証明

$f:M\to\boldsymbol{R}$ を補題11.6で定めた C^r 級関数とし, $x\in\boldsymbol{R}$ を $(x,0,\ldots,0)\in\boldsymbol{R}^{2n+1}$ に写す写像を $\eta:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^{2n+1}$ とする. また $\delta:M\to\boldsymbol{R}$ を値がつねに 1 である定数値関数とする.

証明の続き

定理10.7から合成写像 $\eta\circ f: M\to \boldsymbol{R}^{2n+1}$ の $\frac{\delta}{2}$-近似であるはめ込み $g: M\to \boldsymbol{R}^{2n+1}$ が存在し, 補題11.1から g の $\frac{\delta}{2}$-近似である単射のはめ込み $h: M\to \boldsymbol{R}^{2n+1}$ が存在する.

$\boldsymbol{p}\in L(h)$ ならば集積点をもたない M の点列 $(x_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ で $\boldsymbol{p}=\lim_{n\to\infty} h(x_n)$ となるものがある. 故に $\boldsymbol{R}^{2n+1}$ の点列 $(h(x_n))_{n\in \boldsymbol{N}}$ は有界だから $R>0$ で, すべての $n\in \boldsymbol{N}$ に対して $\|h(x_n)\|\leqq R$ を満たすものがある. 一方 $(f(x_n))_{n\in \boldsymbol{N}}$ は有界ではないため $\boldsymbol{R}^{2n+1}$ の点列 $((\eta\circ f)(x_n))_{n\in \boldsymbol{N}}$ も有界ではない. ここで h は $\eta\circ f$ の δ-近似だから, 任意の $n\in \boldsymbol{N}$ に対して $\|(\eta\circ f)(x_n)-h(x_n)\|\leqq 1$ が成り立つため, 三角不等式から

$$\|(\eta\circ f)(x_n)\|=\|(\eta\circ f)(x_n)-h(x_n)+h(x_n)\|\leqq\|(\eta\circ f)(x_n)-h(x_n)\|+\|h(x_n)\|\leqq 1+R$$

が得られて $((\eta\circ f)(x_n))_{n\in \boldsymbol{N}}$ が有界ではないことと矛盾する.

従って $L(h)=\varnothing$ だから, 補題11.5から h は埋め込みで補題11.4から h の像は $\boldsymbol{R}^{2n+1}$ の閉集合である.