幾何学演習 I

目次

1　命題と集合

論理記号　集合 A の要素 x をを変数とする命題関数 $P(x)$ と命題 Q, R が与えられているとする.

(1) 全称記号 : “$^\forall x \in A\ P(x)$” とは「すべての $x \in A$ に対して $P(x)$ が成り立つ.」という命題を表す.

(2) 存在記号 : “$^\exists x \in A\ P(x)$” とは「$P(x)$ が成り立つような $x \in A$ が存在する.」という命題を表す.

(3) 論理包含 : “$Q \Rightarrow R$” とは「Q ならば R である.」という命題を表す. この命題は「(Q でない) または R である.」という命題と同値である.

例題 1.1　f を区間 I で定義された実数値関数とする. 以下の各命題とその否定を簡潔な日本語で述べよ.

(1) $^\forall a \in I,\ ^\forall \varepsilon > 0,\ ^\exists \delta > 0\ (x \in I,\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$

(2) $^\forall \varepsilon > 0,\ ^\exists \delta > 0,\ ^\forall a \in I\ (x \in I,\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$

解答例　与えられた命題を簡潔な日本語にすれば, それぞれ次のようになる.

(1) 任意の $a \in I$ と $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ で, 次の条件を満たすものが存在する.

「$x \in I$ かつ $|x-a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ である.」

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ で, 次の条件を満たすものが存在する.

「$x, a \in I$ かつ $|x-a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ である.」

これらの命題の否定はそれぞれ次のようになる.

(1) ある $a_0 \in I$ と $\varepsilon_0 > 0$ で, 次の条件を満たすものが存在する.

「任意の $\delta > 0$ に対して $|x_0 - a_0| < \delta$ かつ $|f(x_0) - f(a_0)| \geqq \varepsilon_0$ を満たす $x_0 \in I$ が存在する.」

(2) ある $\varepsilon_0 > 0$ で, 次の条件を満たすものが存在する.

「任意の $\delta > 0$ に対して $|x_0 - a_0| < \delta$ かつ $|f(x_0) - f(a_0)| \geqq \varepsilon_0$ を満たす $x_0, a_0 \in I$ が存在する.」　□

2 つの集合 A, B について $A \subset B$ であることを示すには「$x \in A$ ならば $x \in B$」を示すことが基本である. また, $A = B$ であることを示すには「$x \in A$ ならば $x \in B$」と「$x \in B$ ならば $x \in B$」を示すことが基本である.

例題 1.2　A, B を集合 X の部分集合とするとき, $A \cap B = \emptyset$ と $A \subset B^c$ は同値であることを示せ.

解答例　「$A \cap B = \emptyset$ ならば $A \subset B^c$」の証明

$A \cap B = \emptyset$ であるとき, $A \subset B^c$ が成り立たないと仮定して矛盾を導けばよい. $A \subset B^c$ でないならば $x \in A$ で $x \notin B^c$ であるものが存在する. $x \notin B^c$ ならば $x \in B$ であり, $x \in A$ でもあるので, $x \in A \cap B$ となって, 仮定 $A \cap B = \emptyset$ と矛盾する.

「$A \subset B^c$ ならば $A \cap B = \emptyset$」の証明

$A \subset B^c$ であるとき, $A \cap B = \emptyset$ が成り立たないと仮定して矛盾を導けばよい. $A \cap B = \emptyset$ でないならば $x \in A \cap B$ が存在する. このとき $x \in A$ かつ $x \in B$ であるが, 仮定 $A \subset B^c$ と $x \in A$ から $x \in B^c$ が得られる. ところが $x \in B^c$ は $x \in B$ と矛盾する.　□

例題 1.3　集合 A, B, C に対して次の等式が成り立つことを示せ.

(1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$　　(2) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

(3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$　　(4) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

解答例　(1) $x \in A \cup (B \cap C)$ ならば $x \in A$ または $x \in B \cap C$ である. $x \in A$ の場合, $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ だから $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ である. $x \in B \cap C$ の場合, $x \in B$ かつ $x \in C$ だから $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ である. 従って, この場合も $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ である.

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ならば $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ である. $x \in A$ の場合は $x \in A \cup (B \cap C)$ である. $x \notin A$ の

場合は $x\in A\cup B$ かつ $x\in A\cup C$ より $x\in B$ かつ $x\in C$ だから $x\in B\cap C$ である. 故に $x\in A\cup(B\cap C)$ である.

(2) $x\in A-(B\cap C)$ ならば $x\in A$ かつ $x\notin B\cap C$ である. $x\notin B\cap C$ より $x\notin B$ または $x\notin C$ である. $x\in A$ だから $x\notin B$ の場合は $x\in A-B$ であり, $x\notin C$ の場合は $x\in A-C$ である. 故に $x\in A-B$ または $x\in A-C$ だから $x\in(A-B)\cup(A-C)$ である.

$x\in(A-B)\cup(A-C)$ ならば $x\in A-B$ または $x\in A-C$ である. $x\in A-B$ の場合は $x\in A$ かつ $x\notin B$ であり, $x\notin B$ ならば $x\notin B\cap C$ だから $x\in A-(B\cap C)$ である, $x\in A-C$ の場合は $x\in A$ かつ $x\notin C$ であり, $x\notin C$ ならば $x\notin B\cap C$ だから $x\in A-(B\cap C)$ である.

(3) $x\in A\cap(B\cup C)$ ならば $x\in A$ かつ $x\in B\cup C$ である. $x\in B\cup C$ より, $x\in B$ または $x\in C$ である. $x\in B$ の場合は $x\in A$ より $x\in A\cap B$ だから $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ である. $x\in C$ の場合は $x\in A$ より $x\in A\cap C$ だから, この場合も $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ である.

$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ならば $x\in A\cap B$ または $x\in A\cap C$ である. $x\in A\cap B$ の場合は $x\in B$ だから $x\in B\cup C$ であり, $x\in A$ でもあるので $x\in A\cap(B\cup C)$ である. $x\in A\cap C$ の場合は $x\in C$ だから $x\in B\cup C$ であり, $x\in A$ でもあるので, この場合も $x\in A\cap(B\cup C)$ である.

(4) $x\in A-(B\cup C)$ ならば $x\in A$ かつ $x\notin B\cup C$ である. $x\notin B\cup C$ より $x\notin B$ かつ $x\notin C$ である. $x\in A$ かつ $x\notin B$ より $x\in A-B$ であり, $x\in A$ かつ $x\notin C$ より $x\in A-C$ である. 故に $x\in A-B$ かつ $x\in A-C$ だから $x\in(A-B)\cap(A-C)$ である.

$x\in(A-B)\cap(A-C)$ ならば $x\in A-B$ かつ $x\in A-C$ である. 従って $x\in A$ かつ $x\notin B$ かつ $x\notin C$ だから $x\in A$ かつ $x\notin B\cup C$ である. 故に $x\in A-(B\cup C)$ である. $\square$

例題 1.4　A, B を集合, $x,z\in A$, $y,w\in B$ とする. このとき $\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{z\},\{z,w\}\}$ が成り立つためには「$x=z$ かつ $y=w$」であることが必要十分であることを示せ.

解答例　「$x=z$ かつ $y=w$」ならば $\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{z\},\{z,w\}\}$ であることは明らかである.

$\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{z\},\{z,w\}\}$ と仮定する. $\{x\}\in\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{z\},\{z,w\}\}$ だから $\{x\}\in\{\{z\},\{z,w\}\}$ である. 従って $\{x\}=\{z\}$ または $\{x\}=\{z,w\}$ が成り立つ. $\{x\}=\{z\}$ の場合は $x=z$ であり, $\{x\}=\{z,w\}$ の場合は $z=w=x$ だから, いずれにしても $x=z$ が成り立つ. 故に $\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{x\},\{x,w\}\}$ であり, $\{x,y\}\in\{\{x\},\{x,y\}\}$ だから $\{x,y\}\in\{\{x\},\{x,w\}\}$ となって $\{x,y\}=\{x\}$ または $\{x,y\}=\{x,w\}$ が成り立つ.

$\{x,y\}=\{x\}$ の場合は $x=y$ だから $\{\{x\}\}=\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{x\},\{x,w\}\}$ より $\{x\}=\{x,w\}$ が得られるため, $x=w$ でもある. 従って $y=x=w$ である.

$\{x,y\}=\{x,w\}$ の場合は $y\in\{x,y\}$ だから $y\in\{x,w\}$ となるため, $y=x$ または $y=w$ である. $y=x$ ならば $\{x\}=\{x,y\}=\{x,w\}$ だから $x=w$ が得られるため, この場合も $y=w$ である. $\square$

上の例題から集合 A の要素 x と集合 B の要素 y の順序対 (x,y) を $(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$ で定義できる.

集合 X,Y に対し $A\subset X$, $B\subset Y$ のとき $A\times B$ を $X\times Y$ の部分集合 $\{(x,y)\in X\times Y\,|\,x\in A,\,y\in B\}$ とみなす.

例題 1.5　X,Y を集合, A, B を X の部分集合, C, D を Y の部分集合とするとき次の等式が成り立つことを示せ.

$$(A\times C)\cap(B\times D)=(A\cap B)\times(C\cap D)$$

解答例　$(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$ ならば $(x,y)\in A\times C$ かつ $(x,y)\in B\times D$ だから $x\in A$ かつ $y\in C$ かつ $x\in B$ かつ $y\in D$ である. 故に $x\in A\cap B$ かつ $y\in C\cap D$ が成り立つため $(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$ である.

$(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$ ならば $x\in A\cap B$ かつ $y\in C\cap D$ だから $x\in A$ かつ $x\in B$ かつ $y\in C$ かつ $y\in D$ である. 故に $(x,y)\in A\times C$ かつ $(x,y)\in B\times D$ が成り立つため $(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$ である. $\square$

2 関係・写像

定義 2.1 (1) 集合 X, Y の直積 $X\times Y$ の部分集合を X と Y の関係という．R が X と Y の関係であるとき $(x,y)\in R$ を xRy と表すことがある．とくに $X=Y$ の場合 R を X における (二項) 関係という．

(2) F が X と Y の関係で, すべての $x\in X$ に対して $F\cap(\{x\}\times Y)$ がただひとつの要素からなる集合になるとき F を X から Y への写像と呼び, $F:X\to Y$ で表す．このとき各 $x\in X$ に対し $F\cap(\{x\}\times Y)=\{(x,y)\}$ を満たす $y\in Y$ がただ 1 つ存在するが, この y を $F(x)$ で表し, x の F による像と呼ぶ．また X を F の定義域という．

定義 2.2 X, Y, Z を集合とする．R を X と Y の関係, S を Y と Z の関係とするとき X と Z の関係 $S\circ R$ を $S\circ R=\{(x,z)\in X\times Z\,|\,(x,y)\in R\text{かつ}\,(y,z)\in S\text{を満たす}\,y\in Y\text{が存在する.}\}$ で定めて R と S の合成という．また Y と X の関係 $\{(y,x)\in Y\times X|\,(x,y)\in R\}$ を R の逆の関係と呼び, R^{-1} で表す．

例題 2.3 X, Y, Z, W を集合, R, S, T をそれぞれ X と Y の関係, Y と Z の関係, Z と W の関係とする．

(1) $T\circ(S\circ R)=(T\circ S)\circ R$, $(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$, $(R^{-1})^{-1}=R$ が成り立つことを示せ．

(2) R, S がともに写像ならば $S\circ R$ は X から Z への写像であることを示せ．

解答例 (1) $(x,w)\in T\circ(S\circ R)$ ならば $(x,z)\in S\circ R$ かつ $(z,w)\in T$ を満たす $z\in Z$ が存在する．$(x,z)\in S\circ R$ より $(x,y)\in R$ かつ $(y,z)\in S$ を満たす $y\in Y$ が存在する．従って $(y,z)\in S$ かつ $(z,w)\in T$ が成り立つため, $(y,w)\in T\circ S$ であり, さらに $(x,y)\in R$ だから $(x,w)\in(T\circ S)\circ R$ である．

$(x,w)\in(T\circ S)\circ R$ ならば $(x,y)\in R$ かつ $(y,w)\in T\circ S$ を満たす $y\in Y$ が存在する．$(y,w)\in T\circ S$ より $(y,z)\in S$ かつ $(z,w)\in T$ を満たす $z\in Z$ が存在する．従って $(x,y)\in R$ かつ $(y,z)\in S$ が成り立つため, $(x,z)\in S\circ R$ であり, さらに $(z,w)\in T$ だから $(x,w)\in T\circ(S\circ R)$ である．故に $T\circ(S\circ R)=(T\circ S)\circ R$ である．

$(z,x)\in(S\circ R)^{-1}$ ならば $(x,z)\in S\circ R$ だから $(x,y)\in R$ かつ $(y,z)\in S$ を満たす $y\in Y$ が存在する．このとき $(z,y)\in S^{-1}$ かつ $(y,x)\in R^{-1}$ だから $(z,x)\in R^{-1}\circ S^{-1}$ である．

$(z,x)\in R^{-1}\circ S^{-1}$ ならば $(z,y)\in S^{-1}$ かつ $(y,x)\in R^{-1}$ を満たす $y\in Y$ が存在する．このとき $(x,y)\in R$ かつ $(y,z)\in S$ だから $(x,z)\in S\circ R$ となるため $(z,x)\in(S\circ R)^{-1}$ である．故に $(z,x)\in(S\circ R)^{-1}$ が成り立つ．

$(x,y)\in(R^{-1})^{-1}$ は $(y,x)\in R^{-1}$ と同値であり, これは $(x,y)\in R$ と同値である．故に $(R^{-1})^{-1}=R$ である．

(2) 仮定から各 $x\in X$ に対して $R\cap(\{x\}\times Y)=\{(x,R(x))\}$ かつ $S\cap(\{R(x)\}\times Z)=\{(R(x),S(R(x)))\}$ だから $(x,R(x))\in R$ かつ $(R(x),S(R(x)))\in S$ である．故に $(x,S(R(x)))\in S\circ R$ だから $(x,S(R(x)))\in(S\circ R)\cap(\{x\}\times Z)$ が成り立つ．$(x',z')\in(S\circ R)\cap(\{x\}\times Z)$ ならば $(x',z')\in S\circ R$ かつ $(x',z')\in\{x\}\times Z$ だから, $y'\in Y$ で $(x',y')\in R$ かつ $(y',z')\in S$ を満たすものが存在し, $x'=x$ である．従って $(x,y')\in R\cap(\{x\}\times Y)=\{(x,R(x))\}$ が成り立つため $y'=R(x)$ である．このとき $(R(x),z')\in S\cap(\{R(x)\}\times Z)=\{(R(x),S(R(x)))\}$ となるため $z'=S(R(x))$ である．以上から $(x',z')\in(S\circ R)\cap(\{x\}\times Z)$ ならば $(x',z')=(x,S(R(x)))$ が成り立つため $(S\circ R)\cap(\{x\}\times Z)$ はただ 1 つの要素 $(x,S(R(x)))$ からなる集合である．故に $S\circ R$ は X から Z への写像である． □

定義 2.4 集合 X と Y の関係 R と X の部分集合 A に対し $R(A)=\{y\in Y\,|\,(x,y)\in R\text{を満たす}\,x\in A\text{が存在する.}\}$ とおく．とくに F が X から Y への写像であるとき, $F(A)$ を F による A の像と呼び, $F(X)$ を F の値域という．さらに, Y の部分集合 B に対し $F^{-1}(B)$ を F による B の逆像という．

例題 2.5 R, S をそれぞれ X と Y, Y と Z の関係とする．

(1) $B\subset A\subset X$ ならば $R(B)\subset R(A)$, $(S\circ R)(A)=S(R(A))$ が成り立つことを示せ．

(2) R が写像ならば $A\subset X$, $B\subset Y$ に対し, 次の等式が成り立つことを示せ．

$$R(A)=\{y\in Y\,|\,y=R(x)\text{を満たす}\,x\in A\text{が存在する.}\},\qquad R^{-1}(B)=\{x\in X\,|\,R(x)\in B\}$$

解答例 (1) $y\in R(B)$ ならば $(x,y)\in R$ を満たす $x\in B$ が存在し, $B\subset A$ だから $x\in A$ である．従って $y\in R(A)$

だから $R(B) \subset R(A)$ である. $z \in (S \circ R)(A)$ ならば $(x,z) \in S \circ R$ を満たす $x \in A$ が存在するため, $y \in Y$ で $(x,y) \in R$ かつ $(y,z) \in S$ を満たすものがある. 故に $x \in A$ かつ $(x,y) \in R$ だから $y \in R(A)$ であり, さらに $(y,z) \in S$ だから $z \in S(R(A))$ である. 逆に $z \in S(R(A))$ ならば $y \in R(A)$ で $(y,z) \in S$ を満たすものがある. さらに $y \in R(A)$ だから $x \in A$ で $(x,y) \in R$ を満たすものが存在するため, $(x,y) \in R$ かつ $(y,z) \in S$ が成り立つ. 従って $(x,z) \in S \circ R$ であり, $x \in A$ だから $z \in (S \circ R)(A)$ である.

(2) $y \in R(A)$ ならば $(x,y) \in R$ を満たす $x \in A$ が存在するため, $(x,y) \in R \cap (\{x\} \times Y)$ である. 一方, R が写像であることから $R \cap (\{x\} \times Y)$ はただ 1 つの要素 $(x, R(x))$ からなる集合だから $y = R(x)$ である. 逆に $y = R(x)$ を満たす $x \in A$ が存在すれば $(x,y) = (x, R(x)) \in R$ だから $y \in R(A)$ である.

$x \in R^{-1}(B)$ ならば $(y,x) \in R^{-1}$ を満たす $y \in B$ が存在し $(x,y) \in R$ である. 故に $(x,y) \in R \cap (\{x\} \times Y)$ であり, R が写像であることから $R \cap (\{x\} \times Y)$ はただ 1 つの要素 $(x, R(x))$ からなる集合だから $R(x) = y \in B$ である. 任意の $x \in X$ に対し, $(x, R(x)) \in R$ だから $(R(x), x) \in R^{-1}$ が成り立つため $R(x) \in B$ ならば $x \in R^{-1}(B)$ である. □

集合 X, Y に対し, X から Y への写像全体からなる集合を $\mathrm{Map}(X,Y)$ で表す. また, 写像 $f : X \to Z$, $g : Y \to W$ に対し, $(x,y) \in X \times Y$ を $(f(x), g(y)) \in Z \times W$ に対応させる $X \times Y$ から $Z \times W$ への写像を $f \times g : X \times Y \to Z \times W$ で表し, $\varphi \in \mathrm{Map}(Z,X)$ を $f \circ \varphi \in \mathrm{Map}(Z,Y)$ に対応させる写像を $f_* : \mathrm{Map}(Z,X) \to \mathrm{Map}(Z,Y)$ で表す.

例題 2.6 (1) 集合 Y, Z に対し $\varepsilon : \mathrm{Map}(Y,Z) \times Y \to Z$ を $\varepsilon(g,y) = g(y)$ で定めれば, ε は次の条件を満たすことを示せ.
「任意の集合 X と写像 $f : X \times Y \to Z$ に対し, $f = \varepsilon \circ (g \times id_Y)$ を満たす写像 $g : X \to \mathrm{Map}(Y,Z)$ がただ 1 つ存在する.」

(2) 集合 X, Y と $x \in X$ に対し, $y \in Y$ を $(x,y) \in X \times Y$ に対応させる写像を $\eta_x : Y \to X \times Y$ とする. 各 $x \in X$ を $\eta_x \in \mathrm{Map}(Y, X \times Y)$ に対応させる写像を $\eta : X \to \mathrm{Map}(Y, X \times Y)$ とすれば η は次の条件を満たすことを示せ.
「任意の集合 Z と写像 $g : X \to \mathrm{Map}(Y,Z)$ に対し, $g = f_* \circ \eta$ を満たす写像 $f : X \times Y \to Z$ がただ 1 つ存在する.」

(3) $f \in \mathrm{Map}(X \times Y, Z)$ に対して $f = \varepsilon \circ (g \times id_Y)$ を満たす写像 $g \in \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y,Z))$ を対応させる写像を $\Phi : \mathrm{Map}(X \times Y, Z) \to \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y,Z))$ とすれば, Φ は全単射であることを示せ.

解答例 (1) 集合 X と写像 $f : X \times Y \to Z$ が与えられたとき, 各 $x \in X$ に対し, $y \in Y$ を $f(x,y)$ に対応させる Y から Z への写像を f_x で表せば $f_x \in \mathrm{Map}(Y,Z)$ である. そこで $\hat{f} : X \to \mathrm{Map}(Y,Z)$ を $\hat{f}(x) = f_x$ で定義する. このとき任意の $(x,y) \in X \times Y$ に対して $(\varepsilon \circ (\hat{f} \times id_Y))(x,y) = \varepsilon((\hat{f} \times id_Y)(x,y)) = \varepsilon(\hat{f}(x), y) = \varepsilon(f_x, y) = f_x(y) = f(x,y)$ が成り立つため $\varepsilon \circ (\hat{f} \times id_Y) = f$ である. $g : X \to \mathrm{Map}(Y,Z)$ に対し, $f = \varepsilon \circ (g \times id_Y)$ が成り立つならば, 任意の $x \in X$, $y \in Y$ に対して $(\hat{f}(x))(y) = f_x(y) = f(x,y) = (\varepsilon \circ (g \times id_Y))(x,y) = \varepsilon((g \times id_Y)(x,y)) = \varepsilon(g(x), y) = (g(x))(y)$ が成り立つため, $\hat{f}(x) = g(x)$ だから $\hat{f} = g$ が得られる. 以上から ε は与えられた条件を満たす写像である.

(2) 集合 Z と写像 $g : X \to \mathrm{Map}(Y,Z)$ に対して, 写像 $\check{g} : X \times Y \to Z$ を $\check{g}(x,y) = (g(x))(y)$ で定義する. 任意の $x \in X$ に対して $(\check{g}_* \circ \eta)(x) = \check{g}_*(\eta(x)) = \check{g} \circ \eta_x$ だから写像 $(\check{g}_* \circ \eta)(x) : Y \to Z$ は $y \in Y$ を $(\check{g} \circ \eta_x)(y) = \check{g}(\eta_x(y)) = \check{g}(x,y) = (g(x))(y)$ に写す写像である. 従って $(\check{g}_* \circ \eta)(x) = g(x)$ が任意の $x \in X$ に対して成り立つため $g = \check{g}_* \circ \eta$ を満たす写像 $\check{g} : X \times Y \to Z$ が存在する. $f : X \times Y \to Z$ に対し, $g = f_* \circ \eta$ が成り立つならば, 任意の $x \in X$ に対して $g(x) = (f_* \circ \eta)(x) = f_*(\eta(x)) = f \circ \eta_x$ が成り立つため, 任意の $y \in Y$ に対して $\check{g}(x,y) = (g(x))(y) = (f \circ \eta_x)(y) = f(\eta_x(y)) = f(x,y)$ である. 故に $\check{g} = f$ だから $g = f_* \circ \eta$ を満たす写像 $f : X \times Y \to Z$ は $\check{g}$ に限るため, η は与えられた条件を満たす写像である.

(3) $g \in \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y,Z))$ に対し, $\Phi(\check{g}) = h$ とおけば (1) の証明から $h = \hat{\check{g}}$ だから $x \in X$ に対して $h(x) = (\check{g})_x$ である. 故に $y \in Y$ に対して $(h(x))(y) = (\check{g})_x(y) = \check{g}(x,y) = (g(x))(y)$ だから $h(x) = g(x)$ が任意の $x \in X$ に対して成り立ち $h = g$ となるため Φ は全射である. $\Phi(f) = \Phi(f')$ ならば $\hat{f} = \hat{f}'$ だから任意の $x \in X$ に対して $f_x = \hat{f}(x) = \hat{f}'(x) = f'_x$ が成り立ち, 任意の $y \in Y$ に対し $f(x,y) = f_x(y) = f'_x(y) = f'(x,y)$ だから $f = f'$ である. □

3　ユークリッド空間の距離と極限

合成写像の極限について, 次が成り立つ.

命題 3.1　$X \subset \boldsymbol{R}^n$, $Y \subset \boldsymbol{R}^m$, $Z \subset \boldsymbol{R}^l$ とし, 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ が与えられているとする. $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{q} \in Y$ に対して $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ かつ $\lim_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{q}} g(\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{q})$ が成り立つならば $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} g(f(\boldsymbol{x})) = g(\boldsymbol{q})$ である.

証明　$\lim_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{q}} g(\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{q})$ より, 任意の正の実数 ε に対して正の実数 δ' で次の条件を満たすものが存在する.

$$「``\boldsymbol{y} \in B_m(\boldsymbol{q}\,;\delta') \cap Y \text{ かつ } \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{q}" \text{ ならば } g(\boldsymbol{y}) \in B_l(g(\boldsymbol{q})\,;\varepsilon)」\cdots (i)$$

$g(\boldsymbol{q}) \in B_l(g(\boldsymbol{q})\,;\varepsilon)$ だから (i) より次が成り立つ.

$$「\boldsymbol{y} \in B_m(\boldsymbol{q}\,;\delta') \cap Y \text{ ならば } g(\boldsymbol{y}) \in B_l(g(\boldsymbol{q})\,;\varepsilon)」\cdots (ii)$$

$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ より, 上の δ' に対して正の実数 δ で, 次の条件を満たすものがある.

$$「``\boldsymbol{x} \in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta) \cap X \text{ かつ } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}" \text{ ならば } f(\boldsymbol{x}) \in B_m(\boldsymbol{q}\,;\delta')」\cdots (iii)$$

さらに $\boldsymbol{x} \in X$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \in Y$ だから, (iii) より次が成り立つ.

$$「``\boldsymbol{x} \in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta) \cap X \text{ かつ } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}" \text{ ならば } f(\boldsymbol{x}) \in B_m(\boldsymbol{q}\,;\delta') \cap Y」\cdots (iv)$$

"$\boldsymbol{x} \in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta) \cap X$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$" ならば, (iv) より (ii) の $\boldsymbol{y}$ に $f(\boldsymbol{x})$ を代入できるので,

$$「``\boldsymbol{x} \in B_n(\boldsymbol{p}\,;\delta) \cap X \text{ かつ } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}" \text{ ならば } g(\boldsymbol{y}) \in B_l(g(\boldsymbol{q})\,;\varepsilon)」$$

が成り立つ. これは $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} g(f(\boldsymbol{x})) = g(\boldsymbol{q})$ であることに他ならない. □

系 3.2　$X \subset \boldsymbol{R}^n$, $Y \subset \boldsymbol{R}^m$ とし, 写像 $f : X \to Y$ と $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n - X$ が与えられているとする. もし写像 $\varphi : U \to X$, $\psi : V \to X$ $(U \subset \boldsymbol{R}^k, V \subset \boldsymbol{R}^l)$ と点 $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^k$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^l$ で $\lim_{\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{a}} \varphi(\boldsymbol{u}) = \lim_{\boldsymbol{v}\to\boldsymbol{b}} \psi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{p}$ かつ $\lim_{\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{a}} f(\varphi(\boldsymbol{u})) \neq \lim_{\boldsymbol{v}\to\boldsymbol{b}} f(\psi(\boldsymbol{v}))$ を満たすものがあれば, 極限 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x})$ は存在しない.

証明　$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x})$ が存在すると仮定して $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$ とおく. 写像 $\bar{f} : X \cup \{\boldsymbol{p}\} \to \boldsymbol{R}^m$ を

$$\bar{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{x} \in X \\ \boldsymbol{q} & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} \end{cases}$$

によって定めれば, $\boldsymbol{x} \in X$ のときは $\bar{f}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ だから $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \bar{f}(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q} = \bar{f}(\boldsymbol{p})$ が成り立つ. 故に $\bar{f}$ は命題 3.1 における g の仮定を満たすため, $\lim_{\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{a}} f(\varphi(\boldsymbol{u})) = \lim_{\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{a}} \bar{f}(\varphi(\boldsymbol{u})) = \bar{f}(\boldsymbol{p})$, $\lim_{\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{b}} f(\psi(\boldsymbol{u})) = \lim_{\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{b}} \bar{f}(\psi(\boldsymbol{u})) = \bar{f}(\boldsymbol{p})$ が得られる. 従って $\lim_{\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{a}} f(\varphi(\boldsymbol{u})) = \lim_{\boldsymbol{v}\to\boldsymbol{b}} f(\psi(\boldsymbol{v}))$ となって. 仮定 $\lim_{\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{a}} f(\varphi(\boldsymbol{u})) \neq \lim_{\boldsymbol{v}\to\boldsymbol{b}} f(\psi(\boldsymbol{v}))$ と矛盾するため $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{x})$ は存在しない. □

系 3.2 を用いれば, 具体的に与えられた写像の極限が存在しないことが示される.

例題 3.3　関数 $f : \boldsymbol{R}^2 - \{(0,0)\} \to \boldsymbol{R}$ が以下で与えられるとき, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が存在する場合はその極限値を求め, 存在しない場合はそのことを示せ.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$　　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^4}$

解答例 (1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が存在すると仮定して $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=p$ とおく. $\bar{f}:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を

$$\bar{f}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ p & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

で定義すれば $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\bar{f}(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=p=\bar{f}(0,0)$ である. 定数 k に対して写像 $\varphi:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ を $\varphi(t)=(kt^2,t)$ で定義すれば $\lim_{t\to 0}\varphi(t)=(0,0)$ が成り立つため $\lim_{t\to 0}\bar{f}(\varphi(t))=\bar{f}(0,0)=p$ である. ところが $\bar{f}$ と φ の定義から $\lim_{t\to 0}\bar{f}(\varphi(t))=\lim_{t\to 0}\dfrac{kt^4}{k^2t^4+t^4}=\dfrac{k}{k^2+1}$ が成り立ち, $\lim_{t\to 0}\bar{f}(\varphi(t))$ が k によらない一定の値 p であることと矛盾する. 故に $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない.

(2) (相加平均)≧(相乗平均) より $\dfrac{x^2+y^4}{2}\geqq\sqrt{x^2y^4}=|x|y^2$ が成り立つため, $(x,y)\neq(0,0)$ ならば $\dfrac{|x|y^2}{x^2+y^4}\leqq\dfrac{1}{2}$ が成り立つ. この不等式の両辺に $|y|$ をかければ, 不等式 $\left|\dfrac{xy^3}{x^2+y^4}\right|=\dfrac{|x||y|y^2}{x^2+y^4}\leqq\dfrac{|y|}{2}$ が得られる. $(x,y)\to(0,0)$ のとき $\dfrac{|y|}{2}\to 0$ だから, 上の不等式から $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^3}{x^2+y^4}=0$ である. □

例題 3.4 $a_i>0,\ k_i\geqq 0,\ p_i>0\ (i=1,2,\dots,n)$ に対し, 関数 $f:\boldsymbol{R}^n-\{(0,0,\dots,0)\}\to\boldsymbol{R}$ を

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{|x_1|^{k_1}|x_2|^{k_2}\cdots|x_n|^{k_n}}{a_1|x_1|^{p_1}+a_2|x_2|^{p_2}+\cdots+a_n|x_n|^{p_n}}$$

で定義するとき $\lim_{(x_1,x_2,\dots,x_n)\to(0,0,\dots,0)} f(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$ であるための必要十分条件を求めよ.

解答例 $b_i>0\ (i=1,2,\dots,n)$ と $t>0$ に対し, 次の等式が成り立つ.

$$f\Big((b_1t)^{\frac{1}{p_1}},(b_2t)^{\frac{1}{p_2}},\dots,(b_nt)^{\frac{1}{p_n}}\Big)=\frac{(b_1t)^{\frac{k_1}{p_1}}(b_2t)^{\frac{k_2}{p_2}}\cdots(b_nt)^{\frac{k_n}{p_n}}}{a_1b_1t+a_2b_2t+\cdots+a_nb_nt}=\frac{b_1^{\frac{k_1}{p_1}}b_2^{\frac{k_2}{p_2}}\cdots b_n^{\frac{k_n}{p_n}}t^{\frac{k_1}{p_1}+\frac{k_2}{p_2}+\cdots+\frac{k_n}{p_n}-1}}{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}$$

故に $\dfrac{k_1}{p_1}+\dfrac{k_2}{p_2}+\cdots+\dfrac{k_n}{p_n}<1$ ならば $\lim_{t\to+0}f\Big((b_1t)^{\frac{1}{p_1}},(b_2t)^{\frac{1}{p_2}},\dots,(b_nt)^{\frac{1}{p_n}}\Big)=\infty$ であり, $\dfrac{k_1}{p_1}+\dfrac{k_2}{p_2}+\cdots+\dfrac{k_n}{p_n}=1$ ならば $\lim_{t\to+0}f\Big((b_1t)^{\frac{1}{p_1}},(b_2t)^{\frac{1}{p_2}},\dots,(b_nt)^{\frac{1}{p_n}}\Big)=\dfrac{b_1^{\frac{k_1}{p_1}}b_2^{\frac{k_2}{p_2}}\cdots b_n^{\frac{k_n}{p_n}}}{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}$ となって, この場合の極限値は $b_1,b_2,\dots,b_n$ に依存するため, $\dfrac{k_1}{p_1}+\dfrac{k_2}{p_2}+\cdots+\dfrac{k_n}{p_n}\leqq 1$ ならば $\lim_{(x_1,x_2,\dots,x_n)\to(0,0,\dots,0)} f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ は存在しない.

$\alpha=\min\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ とおき, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\neq(0,0,\dots,0)$ に対し, $m_{\boldsymbol{x}}=\max\{|x_1|^{p_1},|x_2|^{p_2},\dots,|x_n|^{p_n}\}$ とおけば, $m_{\boldsymbol{x}}=|x_l|^{p_l}$ となる l があるため $a_1|x_1|^{p_1}+a_2|x_2|^{p_2}+\cdots+a_n|x_n|^{p_n}\geqq a_l|x_l|^{p_l}\geqq\alpha m_{\boldsymbol{x}}$ であり, $i=1,2,\dots,n$ に対して $|x_i|^{k_i}\leqq m_{\boldsymbol{x}}^{\frac{k_i}{p_i}}$ だから次の不等式が成り立つ.

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)\leqq\frac{m_{\boldsymbol{x}}^{\frac{k_1}{p_1}}m_{\boldsymbol{x}}^{\frac{k_2}{p_2}}\cdots m_{\boldsymbol{x}}^{\frac{k_n}{p_n}}}{\alpha m_{\boldsymbol{x}}}=\frac{m_{\boldsymbol{x}}^{\frac{k_1}{p_1}+\frac{k_2}{p_2}+\cdots+\frac{k_n}{p_n}-1}}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}(\max\{|x_1|^{p_1},|x_2|^{p_2},\dots,|x_n|^{p_n}\})^{\frac{k_1}{p_1}+\frac{k_2}{p_2}+\cdots+\frac{k_n}{p_n}-1}$$

$\lim_{(x_1,x_2,\dots,x_n)\to(0,0,\dots,0)}\max\{|x_1|^{p_1},|x_2|^{p_2},\dots,|x_n|^{p_n}\}=0$ が成り立つため, 上の不等式から $\dfrac{k_1}{p_1}+\dfrac{k_2}{p_2}+\cdots+\dfrac{k_n}{p_n}>1$ ならば $\lim_{(x_1,x_2,\dots,x_n)\to(0,0,\dots,0)} f(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$ である. 以上から, $\dfrac{k_1}{p_1}+\dfrac{k_2}{p_2}+\cdots+\dfrac{k_n}{p_n}>1$ が求める条件である. □

4 距離空間と極限

p を 1 以上の実数または ∞ とし, 幾何学 I 例 3.3 で与えた次の距離空間の例について考える.

例 4.1 $a,b\in\boldsymbol{R}$ $(a<b)$ に対し, 区間 $[a,b]$ で連続な実数値関数全体の集合を $C[a,b]$ で表す. $d_p:C[a,b]\times C[a,b]\to\boldsymbol{R}$ を

$$d_p(f,g)=\begin{cases}\displaystyle\left(\int_a^b|f(x)-g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} & p\geqq 1\\ (|f(x)-g(x)| \text{ の } a\leqq x\leqq b \text{ における最大値}) & p=\infty\end{cases}$$

により定義すると, d_p は $C[a,b]$ の距離関数になる.

$1<p<\infty$ の場合, d_p が $C[a,b]$ の距離関数になることは幾何学 I 例 3.3 ですでに示した.

例題 4.2 $p=1$ と $p=\infty$ の場合に $d_p:C[a,b]\times C[a,b]\to\boldsymbol{R}$ は $C[a,b]$ の距離関数であることを示せ.

解答例 距離空間の定義における以下の 3 つの条件が $p=1,\infty$ の場合に任意の $f,g,h\in C[a,b]$ に対して満たされることを確かめればよい.

(i) $d_p(f,g)\geqq 0$ であり, $d_p(f,g)=0$ となるのは, $f=g$ の場合に限る.
(ii) $d_p(g,f)=d_p(f,g)$
(iii) $d_p(f,h)\leqq d_p(f,g)+d_p(g,h)$

$p=1,\infty$ の場合に (ii) は明らかに成り立つ. また幾何学 I 例 3.3 で $p=1$ の場合に (i) が満たされることを示した.

$d_\infty(f,g)$ の定義から $d_\infty(f,g)\geqq|f(x)-g(x)|\geqq 0$ がすべての $x\in[a,b]$ に対して成り立つ. 従って $d_\infty(f,g)\geqq 0$ であり, $d_\infty(f,g)=0$ ならば, $x\in[a,b]$ に対して $|f(x)-g(x)|=0$ だから $f=g$ である. $d_\infty(f,f)=0$ は明らかだから $p=\infty$ の場合も (ii) が満たされる.

すべての $x\in[a,b]$ に対し, 不等式 $|f(x)-g(x)|\leqq d_\infty(f,g)$, $|g(x)-h(x)|\leqq d_\infty(g,h)$ と次の不等式 $(*)$ が成り立つ.

$$|f(x)-h(x)|=|(f(x)-g(x))+(g(x)-h(x))|\leqq|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|\cdots(*)$$

故にすべての $x\in[a,b]$ に対して $|f(x)-h(x)|\leqq d_\infty(f,g)+d_\infty(g,h)$ だから

$$d_\infty(f,h)=(|f(x)-h(x)| \text{ の } a\leqq x\leqq b \text{ における最大値})\leqq d_\infty(f,g)+d_\infty(g,h)$$

が得られる. 従って $p=\infty$ の場合に (iii) が満たされる.

$(*)$ と積分の性質から次の不等式が成り立つため, $p=1$ の場合も (iii) が満たされる.

$$\begin{aligned}d_1(f,h)&=\int_a^b|f(x)-h(x)|\,dx\leqq\int_a^b(|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|)\,dx\\&=\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx+\int_a^b|g(x)-h(x)|\,dx=d_1(f,g)+d_1(g,h).\end{aligned}$$

以上から, d_1 と d_∞ は $C[a,b]$ の距離関数である. □

$a,b\in\boldsymbol{R}$ $(a<b)$ に対し, 閉区間 $[a,b]$ で定義された実数値関数全体の集合を $F[a,b]$ で表す. このとき $F[a,b]$ の要素は連続とは限らないので, 例 4.1 のような形で $F[a,b]$ に距離関数を定義することはできないが, 次のように $F[a,b]$ の要素の列 (以後, 関数列と呼ぶ) の収束の概念が定義できる.

定義 4.3 $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ を $F[a,b]$ の関数列, $g\in F[a,b]$ とする. すべての $x\in[a,b]$ に対して $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=g(x)$ が成り立つとき, $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は g に各点収束するという.

例 4.4 $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+|x|)^n}$ によって $f_n \in F[-1,1]$ を定義すれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$ が成り立つ．従って $g \in F[-1,1]$ を $g(0) = 1$, $g(x) = 0$ $(x \neq 0)$ で定義される関数とすれば，$(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は g に各点収束する．ここで，すべての自然数 n に対して $f_n \in C[-1,1]$ であるが $g \notin C[-1,1]$ だから，連続関数からなる関数列が各点収束して得られる関数は連続とは限らないことに注意する．

距離空間 $(C[a,b], d_\infty)$ において収束する関数列は各点収束するが (命題 4.5 参照)，上の例はその逆が成り立たないことを示している．また $p \neq \infty$ の場合は例題 4.6 でみるように $(C[a,b], d_p)$ において収束する関数列の極限が，各点収束で得られる関数とは異なる場合や，例題 4.7 の関数列のように各点収束はしないが $(C[a,b], d_p)$ において収束する関数列もある．

命題 4.5 $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は $C[a,b]$ の関数列で，距離空間 $(C[a,b], d_\infty)$ において関数 g に収束するならば $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は g に各点収束する．

証明 各 $x \in [a,b]$ に対して $0 \leqq |f_n(x) - g(x)| \leqq d_\infty(f_n, g)$ が成り立つ．また $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は距離空間 $(C[a,b], d_\infty)$ において関数 g に収束するため，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, g) = 0$ である．故に上の不等式から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - g(x)| = 0$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ となって $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は g に各点収束する． □

例題 4.6 $f_n \in C[-1,1]$ を例 4.4 で定義した関数とする．

(1) $n \geqq 2$ に対して $d_p(f_n, 0)$ を求めよ (ただし 0 は常に値が 0 である定数値関数)．

(2) $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ を距離空間 $(C[-1,1], d_p)$ の関数列とみなす．このとき，$(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ が収束する場合はその極限を求め，収束しない場合はそのことを示せ．

解答例 (1) $p \neq \infty$ の場合，$d_p(f_n, 0) = \left(\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+|x|)^{pn}}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(2\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(1+x)^{pn}}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\dfrac{2(1-2^{1-pn})}{pn-1}\right)^{\frac{1}{p}}$ である．$|f_n(x)| = \dfrac{1}{(1+|x|)^n}$ は $x = 0$ で最大値 1 をとるため，$d_\infty(f_n, 0) = 1$ である．

(2) $p \neq \infty$ の場合，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_p(f_n, 0) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2(1-2^{1-pn})}{pn-1}\right)^{\frac{1}{p}} = 0$ だから $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は距離空間 $(C[-1,1], d_p)$ において 0 に収束する．$(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ が距離空間 $(C[-1,1], d_\infty)$ において $g \in C[-1,1]$ に収束するならば命題 4.5 により $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は g に各点収束する．$g(0) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ であり，$x \neq 0$ ならば $g(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+|x|)^n} = 0$ だから g は連続関数ではない．これは $g \in C[-1,1]$ であることと矛盾するため，$(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は距離空間 $(C[-1,1], d_\infty)$ において収束しない． □

例題 4.7 p, q を 1 以上の実数とする．自然数 n に対し，関数 $f_n : [-1,1] \to \boldsymbol{R}$ を次のように定める．

「$x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ ならば $f_n(x) = n^{\frac{1}{q}}(1 - n|x|)$, $x \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ ならば $f_n(x) = 0$.」

(1) $d_p(f_n, 0)$ を求めよ． (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_p(f_n, 0) = 0$ であるためには $p < q$ であることが必要十分であることを示せ．

解答例 (1) d_p と f_n の定義から $d_p(f_n, 0)$ は次のように求まる．

$$d_p(f_n, 0) = \left(\int_{-1}^{1} |f_n(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} n^{\frac{p}{q}}(1 - n|x|)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(2\int_{0}^{\frac{1}{n}} n^{\frac{p}{q}}(1 - nx)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{2^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}$$

(2) $p < q$ ならば $\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p} < 0$ だから (1) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_p(f_n, 0) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} = 0$ である．

$p = q$ ならば $\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p} = 0$ だから (1) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_p(f_n, 0) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{p}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} = \frac{2^{\frac{1}{p}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \neq 0$ である．

$p > q$ ならば $\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p} > 0$ だから (1) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_p(f_n, 0) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} = \infty$ である．

以上から $\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_p(f_n, 0) = 0$ であるためには $p < q$ であることが必要十分である． □

5　距離空間の性質

例題 5.1　距離空間 $(\boldsymbol{R}, d_1)$ において, $\boldsymbol{R}$ の部分集合 A を $A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \boldsymbol{N} \right\}$ で定める.

(1) A の内部を求めよ.　　(2) A の閉包を求めよ.　　(3) A の境界を求めよ.

解答例　$(\boldsymbol{R}, d_1)$ における開球 $B_1(p\,;r)$ は開区間 $(p-r, r+r)$ であることに注意する.

(1) p が A の内点ならば $(p-r, r+r) \subset A$ を満たす $r > 0$ がある. このとき $p \in A$ だから $p = \frac{1}{n}$ となる自然数 n が存在する. $\max\left\{\frac{1}{n+1}, p-r\right\} < a < \frac{1}{n} = p$ を満たす実数 a は A に属さないが $(p-r, r+r)$ に属するため, $(p-r, r+r) \subset A$ と矛盾する. 故に A の内点は存在しないので, A の内部は空集合である.

(2) $p < 0$ ならば $B_1(p\,;-p) \cap A = (2p, 0) \cap A = \emptyset$ だから p は A の触点でない. 任意の $r > 0$ に対して, $n > \frac{1}{r}$ を満たす自然数 n をとれば $\frac{1}{n} \in (-r, r) \cap A$ だから $B_1(0\,;r) \cap A = (-r, r) \cap A \neq \emptyset$ となるため 0 は A の触点である.

$0 < p \leqq 1$ の場合, $p \in A$ ならば p は A の触点である. $p \notin A$ ならば $\frac{1}{p} - 1 < n < \frac{1}{p}$ を満たす自然数 n がとれるため, $\frac{1}{n+1} < p < \frac{1}{n}$ が成り立つ. $r = \min\left\{p - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} - p\right\}$ とおけば $B_1(p\,;r) = (p-r, p+r) \subset \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ だから $B_1(p\,;r) \cap A = \emptyset$ である. 従って p は A の触点でない.

$p > 1$ ならば $B_1(p\,;p-1) \cap A = (1, 2p-1) \cap A = \emptyset$ だから p は A の触点でない. 以上から A の触点は A の点または 0 に限るため, A の閉包は $A \cup \{0\}$ である.

(3) A の境界 ∂A と A の内部 A^i の合併は A の閉包 $\overline{A}$ に一致し, (1) から $A^i = \emptyset$, (2) から $\overline{A} = A \cup \{0\}$ だから $\partial A = \partial A \cup A^i = \overline{A} = A \cup \{0\}$ である. □

注意 5.2　一般の距離空間 (X, d) において X の点列 $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ が $p \in X$ に収束するとき, $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$ とおけば p は A の触点である. 実際, 点列の収束の定義から, 任意の $r > 0$ に対して条件「$k \geqq N$ ならば $x_k \in B_d(p\,;r)$」を満たす自然数 N が存在するため $B_d(p\,;r) \cap A \neq \emptyset$ が成り立つ.

例題 5.3　距離空間 $(\boldsymbol{R}^2, d_2)$ において, $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 A を以下のように定める.

$$A = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 \text{ かつ } x \text{ と } y \text{ は有理数.}\}$$

(1) A の内部を求めよ.　　(2) A の閉包を求めよ.　　(3) A の境界を求めよ.

解答例　(1) $\boldsymbol{p} = (a, b)$ が A の内点ならば $B_2(\boldsymbol{p}\,;r) \subset A$ を満たす $r > 0$ がある. このとき, $a - r < \alpha < a + r$ を満たす無理数 α が存在し, $\boldsymbol{q} = (\alpha, b)$ とおけば $d_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = |\alpha - a| < r$ だから $\boldsymbol{q} \in B_2(\boldsymbol{p}\,;r)$ であるが $\boldsymbol{q} \notin A$ であるため, $B_2(\boldsymbol{p}\,;r) \subset A$ と矛盾する. 故に A の内点は存在しないので, A の内部は空集合である.

(2) $\boldsymbol{p} = (a, b) \in \boldsymbol{R}^2$ とする. $a < 0$ の場合, $B_2(\boldsymbol{p}\,;-a)$ に属する点の x 座標は負であるため, $B_2(\boldsymbol{p}\,;-a) \cap A = \emptyset$ だから $\boldsymbol{p}$ は A の触点でない. $a > 1$ の場合, $B_2(\boldsymbol{p}\,;a-1)$ に属する点の x 座標は 1 より大きいため, $B_2(\boldsymbol{p}\,;a-1) \cap A = \emptyset$ だから $\boldsymbol{p}$ は A の触点でない. $b < 0$ の場合, $B_2(\boldsymbol{p}\,;-b)$ に属する点の y 座標は負であるため, $B_2(\boldsymbol{p}\,;-b) \cap A = \emptyset$ だから $\boldsymbol{p}$ は A の触点でない. $b > 1$ の場合, $B_2(\boldsymbol{p}\,;b-1)$ に属する点の y 座標は 1 より大きいため, $B_2(\boldsymbol{p}\,;b-1) \cap A = \emptyset$ だから $\boldsymbol{p}$ は A の触点でない. $0 \leqq a, b \leqq 1$ の場合, 任意の $r > 0$ に対して有理数 α, β で $\alpha, \beta \in [0, 1]$ かつ $a - \frac{r}{2} < \alpha < a + \frac{r}{2}$, $b - \frac{r}{2} < \beta < b + \frac{r}{2}$ を満たすものが存在する. $\boldsymbol{q} = (\alpha, \beta)$ とおけば $\boldsymbol{q} \in A$ であり $d_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sqrt{(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2} < \frac{r}{\sqrt{2}}$ だから $\boldsymbol{q} \in B_2(\boldsymbol{p}\,;r)$ である. 故にこの場合には $\boldsymbol{p}$ は A の触点である. 以上から A の閉包は $[0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$ である.

(3) A の境界 ∂A と A の内部 A^i の合併は A の閉包 $\overline{A}$ に一致し, (1) から $A^i = \emptyset$, (2) から $\overline{A} = [0, 1] \times [0, 1]$ だから $\partial A = \partial A \cup A^i = \overline{A} = [0, 1] \times [0, 1]$ である. □

例題 5.4　(X, d) を距離空間, A を X の部分集合とする.

(1) A の内部 A^i は開集合であり, O が A に含まれる開集合ならば $O \subset A^i$ であることを示せ.

(2) A の閉包 $\overline{A}$ は閉集合であり, C が A を含む閉集合ならば $C \supset \overline{A}$ であることを示せ.

解答例 (1) $p \in A^i$ ならば $r > 0$ で $B_d(p\,;r) \subset A$ を満たすものがある. 幾何学 I 命題 4.8 の (1) の証明より $q \in B_d(p\,;r)$ ならば $B_d(q\,;r-d(p,q)) \subset B_d(p\,;r) \subset A$ だから q は A の内点である. 従って $B_d(p\,;r) \subset A^i$ だから p は A^i の内点である. 故に A^i は開集合である. O を A に含まれる開集合とする. $p \in O$ ならば p は O の内点だから $s > 0$ で, $B_d(p\,;s) \subset O$ を満たすものがある. $O \subset A$ だから $B_d(p\,;s) \subset A$ となるため, p は A の内点である. 従って $p \in A^i$ だから $O \subset A^i$ である.

(2) p を $\overline{A}$ の触点とする. $p \notin \overline{A}$ ならば $c > 0$ で $B_d(p\,;c) \cap A = \emptyset$ を満たすものがある. 一方 p が $\overline{A}$ の触点であることから $B_d(p\,;c) \cap \overline{A} \neq \emptyset$ だから $q \in B_d(p\,;c) \cap \overline{A}$ が選べる. ここで幾何学 I 命題 4.8 の (1) の証明より $B_d(q\,;c-d(p,q)) \subset B_d(p\,;c)$ だから $B_d(p\,;c) \cap A = \emptyset$ より $B_d(q\,;c-d(p,q)) \cap A = \emptyset$ が得られるが, これは $q \in \overline{A}$ と矛盾する. 故に $p \in \overline{A}$ だから $\overline{A}$ は閉集合である. C は A を含む閉集合であるとする. もし $C \not\supset \overline{A}$ ならば $p \in \overline{A}$ で $p \notin C = \overline{C}$ を満たすものがある. p は C の触点ではないので, $r > 0$ で $B_d(p\,;r) \cap C = \emptyset$ を満たすものがある. $C \supset A$ だから $B_d(p\,;r) \cap C = \emptyset$ より $B_d(p\,;r) \cap A = \emptyset$ が得られるが, これは $p \in \overline{A}$ と矛盾する. 故に $C \supset \overline{A}$ である. □

例題 5.5 1 以上の実数 p に対して $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ が収束するような実数列 $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n \geqq 0}$ 全体からなる集合を H_p とする. このとき $\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ とおく.

(1) $(x_n)_{n \geqq 0}, (y_n)_{n \geqq 0} \in H_p$, $r \in \boldsymbol{R}$ ならば $(x_n + y_n)_{n \geqq 0}, (rx_n)_{n \geqq 0} \in H_p$ であることを示せ.
そこで $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n \geqq 0}, \boldsymbol{y} = (y_n)_{n \geqq 0} \in H_p$ と $r \in \boldsymbol{R}$ に対して $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_n + y_n)_{n \geqq 0}$, $r\boldsymbol{x} = (rx_n)_{n \geqq 0}$ によって H_p の加法と実数倍を定めることによって H_p は $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間になる.

(2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H_p$, $r \in \boldsymbol{R}$ に対して $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p \leqq \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p$, $\|r\boldsymbol{x}\|_p = |r|\|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つことを示せ.

(3) 関数 $d_p : H_p \times H_p \to \boldsymbol{R}$ を $d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_p$ で定めれば d_p は H_p の距離関数になることを示せ.

解答例 (1) $(x_n)_{n \geqq 0}, (y_n)_{n \geqq 0} \in H_p$ ならば任意の自然数 k に対して $\sum_{n=0}^{k} |x_n|^p \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$, $\sum_{n=0}^{k} |y_n|^p \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^p$ が成り立つため, $\left(\sum_{n=0}^{k} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\boldsymbol{x}\|_p$, $\left(\sum_{n=0}^{k} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\boldsymbol{y}\|_p$ が任意の自然数 k に対して成り立つ. 従って幾何学 I 例 3.2 の (iii) で示した不等式から, 任意の自然数 k に対して次の不等式が成り立つ.

$$\left(\sum_{n=0}^{k} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{n=0}^{k} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=0}^{k} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p \quad \cdots (*)$$

故に $\sum_{n=0}^{k} |x_n + y_n|^p \leqq (\|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p)^p$ が任意の自然数 k に対して成り立つため, 正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n + y_n|^p$ は上に有界だから収束する. $\sum_{n=0}^{\infty} |rx_n|^p = \sum_{n=0}^{\infty} (|r||x_n|)^p = \sum_{n=0}^{\infty} |r|^p|x_n|^p = |r|^p \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ であり, $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ は収束するため, $\sum_{n=0}^{\infty} |rx_n|^p$ も収束する. 以上から $(x_n + y_n)_{n \geqq 0}, (rx_n)_{n \geqq 0} \in H_p$ である.

(2) (1) で得た不等式 $(*)$ において $k \to \infty$ とすれば $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p$ が得られる. (1) で示した等式 $\sum_{n=0}^{\infty} |rx_n|^p = |r|^p \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ の両辺の p 乗根を考えれば $\|r\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |rx_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |r|\left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |r|\|\boldsymbol{x}\|$ が得られる.

(3) すべての項が 0 である数列を $\boldsymbol{0}$ で表すと $\boldsymbol{0} \in H_p$ である. $\boldsymbol{x} \in H_p$ に対し $\|\boldsymbol{x}\|_p \geqq 0$ であり, $\|\boldsymbol{x}\|_p = 0$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ と同値である. 従って $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H_p$ に対して $d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_p \geqq 0$ であり $d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_p = 0$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ と同値である. (2) の結果から $d_p(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|_p = \|(-1)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\|_p = |-1|\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_p = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_p = d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が得られる. さらに $\boldsymbol{z} \in H_p$ に対して $d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\|_p = \|(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z})\|_p \leqq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_p + \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\|_p = d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_p(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が (2) で示した不等式から得られるため, d_p は H_p の距離関数である. □

6 距離空間の位相

定義 6.1　区間 I で定義された関数 $\varphi : I \to \boldsymbol{R}$ が $s+t=1$ を満たす $s,t>0$ と $x,y \in I$ に対して $\varphi(sx+ty) \leqq s\varphi(x)+t\varphi(y)$ を満たすとき, φ を凸関数という.

次の定理の証明は微積分学の教科書を参照せよ.

定理 6.2　区間 I で定義された関数 $\varphi : I \to \boldsymbol{R}$ が I の内部の各点 x で 2 回微分可能であり, $\varphi''(x) \geqq 0$ が成り立てば φ は凸関数である.

補題 6.3　区間 I で定義された関数 $\varphi : I \to \boldsymbol{R}$ が凸関数ならば, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ と $t_1, t_2, \ldots, t_n > 0$ で $t_1+t_2+\cdots+t_n=1$ を満たすものに対して, $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \in I$ であり, 不等式 $\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{n} t_i \varphi(x_i)$ が成り立つ.

証明　n による数学的帰納法で主張を示す. $n=1$ の場合は主張は明らかである. $n-1$ のとき, 主張が成り立つと仮定して, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ と正の実数 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ で $t_1+t_2+\cdots+t_n=1$ を満たすものが与えられたとする. $s=\sum_{i=1}^{n-1} t_i$, $y=\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{s} x_i$ とおけば, $i=1,2,\ldots,n-1$ に対して $\frac{t_i}{s}>0$ であり $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{s}=1$ が成り立つため、帰納法の仮定によって $y \in I$ であり, 不等式 $\varphi(y)=\varphi\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{s} x_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{s} a\varphi(x_i)$ が成り立つ. $s+t_n=1$ だから $sy+t_n x_n=\sum_{i=1}^{n} t_i x_i$ は, 区間 I に含まれる値 y と x_n を両端とする区間を $t_n : s$ に内分するため, $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i$ も区間 I に含まれる. φ が凸関数であることと, 上の不等式から次の不等式が得られるため, n のときも主張が成り立つ.

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right)=\varphi(sy+t_n x_n) \leqq s\varphi(y)+t_n\varphi(x_n) \leqq \sum_{i=1}^{n-1} t_i\varphi(x_i)+t_n\varphi(x_n)=\sum_{i=1}^{n} t_i\varphi(x_i) \qquad \square$$

p を 1 以上の実数とし幾何学 I 例 3.2 で定義した $\boldsymbol{R}^n$ の距離関数 d_p を考える.

例題 6.4　$1 \leqq p < q$ のとき, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して不等式 $d_q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leqq d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leqq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} d_q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成り立つことを示せ.

解答例　$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \boldsymbol{R}^n$ とする.
$\|\boldsymbol{x}\|_q \leqq \|\boldsymbol{x}\|_p$ の証明; $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ ならば主張は明らかだから, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ と仮定する. $c=\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|_q}$ とおくと $c>0$ であり $j=1,2,\ldots,n$ に対して $\|\boldsymbol{x}\|_q \geqq |x_j|$ だから $|cx_j| \leqq 1$ である. 故に $p<q$ より $|cx_j|^q \leqq |cx_j|^p$ が $j=1,2,\ldots,n$ に対して成り立つ. 従って $1=c^q\|\boldsymbol{x}\|_q^q=\sum_{i=1}^{n}|cx_i|^q \leqq \sum_{i=1}^{n}|cx_i|^p=c^p\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p=c^p\|\boldsymbol{x}\|_p^p$ だから $\|\boldsymbol{x}\|_q=\frac{1}{c} \leqq \|\boldsymbol{x}\|_p$ を得る.
$\|\boldsymbol{x}\|_p \leqq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|\boldsymbol{x}\|_q$ の証明; $\varphi(x)=x^{\frac{q}{p}}$ で関数 $\varphi : [0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ を定めれば $\frac{q}{p}>1$ だから $x>0$ ならば $\varphi''(x) \geqq 0$ である. 従って φ は定理 6.2 により凸関数だから, 補題 6.3 の x_i に $|x_i|^p$ を代入して $t_1=t_2=\cdots=t_n=\frac{1}{n}$ とすれば次の不等式が得られる.

$$n^{-\frac{q}{p}}\|\boldsymbol{x}\|_p^q=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i|^p}{n}\right)^{\frac{q}{p}}=\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i|^p}{n}\right) \leqq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\varphi(|x_i|^p)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}|x_i|^q=\frac{1}{n}\|\boldsymbol{x}\|_q^q$$

故に $\|\boldsymbol{x}\|_p^q \leqq n^{\frac{q}{p}-1}\|\boldsymbol{x}\|_q^q$ で, この両辺を $\frac{1}{q}$ 乗すれば目的の不等式が得られる. $d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_p$, $d_q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_q$ だから, 上で示した 2 つの不等式から結果が得られる. $\square$

p を 1 以上の実数とし幾何学 I 例 3.3 で定義した $C[a,b]$ の距離関数 d_p を考える.

例題 6.5　$1 \leqq p < q$ のとき, $f,g \in C[a,b]$ に対して不等式 $d_p(f,g) \leqq (b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} d_q(f,g)$ が成り立つことを示せ.

解答例　例題 6.4 の解答で用いた凸関数 $\varphi : [0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ を補題 6.3 の不等式に適用して両辺の q 乗根を考えれば, 不等

式 $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}}$ が得られる．$x_i = \left|f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)\right|$ を左の不等式に代入すれば次の不等式が得られる．

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)\right|^p\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)\right|^q\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{q}}$$

故に $\frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{p}}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right|^p\frac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{q}}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right|^q\frac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{q}}$ が成り立つ．この不等式で $n\to\infty$ とすれば左辺は $\frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_a^b|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$ に近づき，右辺は $\frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{q}}}\left(\int_a^b|f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$ に近づくため，不等式 $\frac{\|f\|_p}{(b-a)^{\frac{1}{p}}} = \frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_a^b|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{q}}}\left(\int_a^b|f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{\|f\|_q}{(b-a)^{\frac{1}{q}}}$ が成り立つ．故に $\|f\|_p \leqq (b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_q$ が成り立つため $d_p(f,g)=\|f-g\|_p \leqq (b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f-g\|_q = (b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}d_q(f,g)$ である．□

例題 6.6 p を与えられた素数とし，a は $0<a<1$ を満たす実数の定数とする．$x\in\boldsymbol{Q}-\{0\}$ に対し，$x=\frac{m}{n}p^{l_x}$ (ただし m, n は p で割れない整数，l_x は整数) を満たす整数 l_x は一通りに定まるため，関数 $\nu_p:\boldsymbol{Q}-\{0\}\to\boldsymbol{R}$ が $\nu_p(x)=a^{l_x}$ で定義できる．

(1) $x,y\in\boldsymbol{Q}-\{0\}$ に対して $\nu_p(xy)=\nu_p(x)\nu_p(y)$ が成り立ち，さらに $x+y\neq0$ ならば $\nu_p(x+y)\leqq\max\{\nu_p(x),\nu_p(y)\}$ が成り立つことを示せ．

(2) 関数 $d_p:\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}\to\boldsymbol{R}$ を，$d_p(x,y)=\begin{cases}\nu_p(x-y) & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$ で定義する．このとき任意の $x,y,z\in\boldsymbol{Q}$ に対して $d_p(x,z)\leqq\max\{d_p(x,y),d_p(y,z)\}$ が成り立つことを示して d_p は $\boldsymbol{Q}$ の距離関数になることを示せ．

解答例 (1) $x=\frac{m}{n}p^{l_x}$, $y=\frac{k}{q}p^{l_y}$ (ただし m, n, k, q は p で割れない整数，l_x, l_y は整数) とすれば $\nu_p(x)=a^{l_x}$, $\nu_p(y)=a^{l_y}$ である．$xy=\frac{km}{nq}p^{l_x+l_y}$ であり，km と nq はともに p で割れないため，$\nu_p(xy)=a^{l_x+l_y}=a^{l_x}a^{l_y}=\nu_p(x)\nu_p(y)$ が得られる．$x+y\neq0$ の場合，示すべき不等式 $\nu_p(x+y)\leqq\max\{\nu_p(x),\nu_p(y)\}$ の x と y を入れ替えても同じ不等式になるため，$l_x\leqq l_y$ と仮定してよい．このとき $x+y=\frac{mqp^{l_x}+knp^{l_y}}{nq}=\frac{\left(mq+knp^{l_y-l_x}\right)p^{l_x}}{nq}$ であり，$mq+knp^{l_y-l_x}$ は 0 でない整数だから $mq+knp^{l_y-l_x}=sp^r$ を満たす p で割れない整数 s と 0 以上の整数 r がただ 1 つ存在するため，$x+y=\frac{sp^{l_x+r}}{nq}$ である．$0<a<1$ だから a^x が x の単調減少関数であることに注意すれば $\nu_p(x+y)=a^{l_x+r}\leqq a^{l_x}=a^{\min\{l_x,l_y\}}=\max\{a^{l_x},a^{l_y}\}=\max\{\nu_p(x),\nu_p(y)\}$ が成り立つ．

(2) x, y, z のうち 2 つが等しい場合は $d_p(x,z)\leqq\max\{d_p(x,y),d_p(y,z)\}$ は成り立つので x, y, z が相異なる場合を考える．d_p の定義と (1) の結果から次の不等式が成り立つ．

$$d_p(x,z)=\nu_p(x-z)=\nu_p((x-y)+(y-z))\leqq\max\{\nu_p(x-y),\nu_p(y-z)\}=\max\{d_p(x,y),d_p(y,z)\}\leqq d_p(x,y)+d_p(y,z)$$

また $d_p(x,y)\geqq0$ であり，$d_p(x,y)=0$ が $x=y$ と同値であることは d_p の定義から明らかである．ν_p の定義から $x\in\boldsymbol{Q}-\{0\}$ に対し，$\nu_p(-x)=\nu_p(x)$ が成り立つため，$d_p(y,x)=d_p(x,y)$ が成り立つ．以上から d_p は $\boldsymbol{Q}$ の距離関数である．□

7　集合算と写像

例題 7.1　集合 A と集合族 $(S_i)_{i\in I}$ に対し, $A\cap\bigcup_{i\in I}S_i=\bigcup_{i\in I}(A\cap S_i)$, $A\cup\bigcap_{i\in I}S_i=\bigcap_{i\in I}(A\cup S_i)$ が成り立つことを示せ.

解答例　$x\in A\cap\bigcup_{i\in I}S_i$ ならば $x\in A$ かつ $x\in\bigcup_{i\in I}S_i$ である. 後者の式から $x\in S_i$ となる $i\in I$ があるため $x\in\bigcup_{i\in I}(A\cap S_i)$ である. $x\in\bigcup_{i\in I}(A\cap S_i)$ ならば $x\in A\cap S_i$ となる $i\in I$ がある. このとき $x\in S_i$ だから $x\in\bigcup_{i\in I}S_i$ であり, $x\in A$ でもあるので $x\in A\cap\bigcup_{i\in I}S_i$ である. 以上から $A\cap\bigcup_{i\in I}S_i=\bigcup_{i\in I}(A\cap S_i)$ が成り立つ.

$x\in A\cup\bigcap_{i\in I}S_i$ ならば $x\in A$ または $x\in\bigcap_{i\in I}S_i$ である. $x\in A$ の場合, すべての $i\in I$ に対して $x\in A\cup S_i$ だから $x\in\bigcap_{i\in I}(A\cup S_i)$ である. $x\in\bigcap_{i\in I}S_i$ の場合, すべての $i\in I$ に対して $x\in A\cup S_i$ だから $x\in A\cup S_i$ がすべての $i\in I$ に対して成り立つ. 従って $x\in\bigcap_{i\in I}(A\cup S_i)$ である. $x\in\bigcap_{i\in I}(A\cup S_i)$ ならばすべての $i\in I$ に対して $x\in A\cup S_i$ だから, $x\notin A$ の場合は $x\in S_i$ がすべての $i\in I$ に対して成り立つ. 従って $x\in\bigcap_{i\in I}S_i$ だから $x\in A\cup\bigcap_{i\in I}S_i$ である. $x\in A$ の場合は明らかに $x\in A\cup\bigcap_{i\in I}S_i$ である. 以上から $A\cup\bigcap_{i\in I}S_i=\bigcap_{i\in I}(A\cup S_i)$ が成り立つ. □

例題 7.2　実数列 $(a_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$, $(b_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ を満たし, すべての $n\in\boldsymbol{N}$ に対して $a_n>\alpha$ かつ $b_n<\beta$ であり, さらに (3) では $a_n\leqq b_n$ であるとする.

(1) $\beta\leqq\alpha$ のとき $\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}[b_n,a_n]=\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}[b_n,a_n)=\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}(b_n,a_n]=\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}(b_n,a_n)=[\beta,\alpha]$ であることを示せ.

(2) $\beta\leqq\alpha$ のとき $\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}(\beta,a_n]=\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}(\beta,a_n)=(\beta,\alpha]$, $\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}[\beta,a_n]=\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}[\beta,a_n)=[\beta,\alpha]$ であることを示せ.

(3) $\alpha\leqq\beta$ のとき $\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}[a_n,b_n]=\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}[a_n,b_n)=\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(a_n,b_n]=\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(a_n,b_n)=(\alpha,\beta)$ であることを示せ.

(4) $\alpha\leqq\beta$ のとき $\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}[\alpha,b_n]=\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}[\alpha,b_n)=[\alpha,\beta)$, $\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(\alpha,b_n]=\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(\alpha,b_n)=(\alpha,\beta)$ であることを示せ.

解答例　(1) $[\beta,\alpha]\subset(b_n,a_n)\subset[b_n,a_n]$ がすべての $n\in\boldsymbol{N}$ に対して成り立つため $[\beta,\alpha]\subset\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}(b_n,a_n)\subset\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}[b_n,a_n]$ である. $x\in\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}[b_n,a_n]$ ならばすべての $n\in\boldsymbol{N}$ に対して $b_n\leqq x\leqq a_n$ が成り立つため $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ より $\beta\leqq x\leqq\alpha$ だから $x\in[\beta,\alpha]$ である. 故に $\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}[b_n,a_n]=\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}(b_n,a_n)=[\beta,\alpha]$ である. $\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}[b_n,a_n)$ と $\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}(b_n,a_n]$ はともに $\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}(b_n,a_n)$ を含み $\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}[b_n,a_n]$ に含まれるため $\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}[b_n,a_n)=\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}(b_n,a_n]=[\beta,\alpha]$ である.

(2) 任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対し, $(\beta,\alpha]\subset(\beta,a_n)\subset(\beta,a_n]$, $[\beta,\alpha]\subset[\beta,a_n)\subset[\beta,a_n]$ だから $(\beta,\alpha]\subset\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}(\beta,a_n)\subset\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}(\beta,a_n]$, $[\beta,\alpha]\subset\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}[\beta,a_n)\subset\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}[\beta,a_n]$ である. $x\in\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}(\beta,a_n]$ ならば任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対して $\beta<x\leqq a_n$ が成り立ち, $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ より $\beta<x\leqq\alpha$ だから $x\in(\beta,\alpha]$ である. 故に $\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}(\beta,a_n]=\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}(\beta,a_n)=(\beta,\alpha]$ である. $x\in\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}[\beta,a_n]$ ならばすべての $n\in\boldsymbol{N}$ に対して $\beta\leqq x\leqq a_n$ が成り立ち $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ より $\beta\leqq x\leqq\alpha$ だから $x\in[\beta,\alpha]$ である. 故に $\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}[\beta,a_n]=\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}[\beta,a_n)=[\beta,\alpha]$ である.

(3) $(\alpha,\beta)\supset[a_n,b_n]\supset(a_n,b_n)$ がすべての $n\in\boldsymbol{N}$ に対して成り立つため $(\alpha,\beta)\supset\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}[a_n,b_n]\supset\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(a_n,b_n)$ である. $x\in(\alpha,\beta)$ ならば仮定から自然数 N_1, N_2 で $n\geqq N_1$ ならば $a_n-\alpha<x-\alpha$, $n\geqq N_2$ ならば $\beta-b_n<\beta-x$ を満たすものがある. $m=\max\{N_1,N_2\}$ とおけば $a_m<x<b_m$ だから $x\in(a_m,b_m)$ となるため $x\in\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(a_n,b_n)$ である. 故に $(\alpha,\beta)\subset\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(a_n,b_n)$ が得られるため $\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(a_n,b_n)=\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}[a_n,b_n]=(\alpha,\beta)$ である. $\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}[b_n,a_n)$ と $\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(b_n,a_n]$ はともに $\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(b_n,a_n)$ を含み $\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}[b_n,a_n]$ に含まれるため $\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}[b_n,a_n)=\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(b_n,a_n]=(\alpha,\beta)$ である.

(4) 任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対し, $[\alpha,\beta)\supset[\alpha,b_n]\supset[\alpha,b_n)$, $(\alpha,\beta)\supset(\alpha,b_n]\supset(\alpha,b_n)$ だから $[\alpha,\beta)\supset\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}[\alpha,b_n]\supset\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}[\alpha,b_n)$, $(\alpha,\beta)\supset\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(\alpha,b_n]\supset\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(\alpha,b_n)$ である. $x\in(\alpha,\beta)$ ならば仮定から自然数 N で $n\geqq N$ ならば $\beta-b_n<\beta-x$ を満たすものがあるため $x\in(\alpha,b_N)\subset\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(\alpha,b_n)$ である. 故に $(\alpha,\beta)\subset\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(\alpha,b_n)$ だから $\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(\alpha,b_n]=\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(\alpha,b_n)=$

(α,β) である．この結果と $\alpha \in \bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}[\alpha,b_n) \supset \bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(\alpha,b_n)$ から $\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}[\alpha,b_n] = \bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}[\alpha,b_n) = [\alpha,\beta)$ が得られる． □

例題 7.3 写像 $f: X \to Y$ と X の部分集合族 $(A_i)_{i\in I}$, Y の部分集合族 $(B_i)_{i\in I}$ に対し，次の等式を示せ．

(1) $f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ (2) $f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ (3) $f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

解答例 (1) $y \in f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)$ ならば $f(x) = y$ を満たす $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ が存在する．さらに $x \in A_j$ となる $j \in I$ があるため, $f(x) = y$ より $y \in f(A_j)$ である．従って $y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ が成り立つ．$y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ ならば $y \in f(A_j)$ となる $j \in I$ が存在し，さらに $f(x) = y$ を満たす $x \in A_j$ が存在する．このとき $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ であり $f(x) = y$ だから $y \in f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)$ である．以上から $f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ が成り立つ．

(2) $x \in f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big)$ ならば $f(x) \in \bigcup_{i\in I} B_i$ だから $f(x) \in B_j$ となる $j \in I$ がある．このとき $x \in f^{-1}(B_j)$ だから $x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ である．$x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ ならば $x \in f^{-1}(B_j)$ となる $j \in I$ がある．このとき $f(x) \in B_j$ だから $f(x) \in \bigcup_{i\in I} B_i$ が成り立つため, $x \in f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big)$ である．以上から $f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ が成り立つ．

(3) $x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big)$ ならば $f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i$ だから，すべての $i \in I$ に対して $f(x) \in B_i$ である．従ってすべての $i \in I$ に対して $x \in f^{-1}(B_j)$ だから $x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ である．$x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ ならばすべての $i \in I$ に対して $x \in f^{-1}(B_j)$ である．従ってすべての $i \in I$ に対して $f(x) \in B_i$ だから $f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i$ が成り立つため, $x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big)$ である．以上から $f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ である． □

例題 7.4 写像 $f: X \to Y$ と X の部分集合族 $(A_i)_{i\in I}$ に対して $f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ が成り立つことと, f が単射ならば $f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ が成り立つことを示せ．

解答例 $y \in f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)$ ならば $f(x) = y$ を満たす $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ が存在する．このとき，すべての $i \in I$ に対して $x \in A_i$ であり, $y \in f(A_i)$ がすべての $i \in I$ に対して成り立つ．従って $y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ が成り立つため, $f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ である．$y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ ならばすべての $i \in I$ に対して $y \in f(A_i)$ だから，各 $i \in I$ に対して $f(x_i) = y$ を満たす $x_i \in A_i$ が存在する．f が単射ならば $f(x_i) = y$ を満たす $x_i \in X$ が存在すれば，ただ一つしかないため, x_i はすべて等しい．そのような x_i を x とおくと，すべての $i \in I$ に対して $x \in A_i$ だから $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ であり, $f(x) = y$ だから $y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ が成り立つ．故に f が単射の場合，前半の主張も用いれば $f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ が得られる． □

注意 7.5 $X = Y = \boldsymbol{R}$, $A_1 = (-\infty, 0]$, $A_2 = [0, \infty)$ で, f が $f(x) = x^2$ の場合, $A_1 \cap A_2 = \{0\}$ だから $f(A_1 \cap A_2) = \{0\}$ である．一方, $f(A_1) = f(A_2) = [0, \infty)$ だから $f(A_1) \cap f(A_2) = [0, \infty)$ となるため, $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ である．従って $f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ は一般には成り立たない．

例題 7.6 写像 $f: X \to Y$ と X の部分集合 A, Y の部分集合 B に対し，等式 $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$ を示せ．

解答例 $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$ ならば $f(x) = y$ を満たす $x \in A \cap f^{-1}(B)$ が存在する．このとき $x \in A$ で $f(x) = y$ だから $y \in f(A)$ である．また $x \in f^{-1}(B)$ だから $y = f(x) \in B$ である．故に $y \in f(A) \cap B$ が成り立つ．$y \in f(A) \cap B$ ならば $y = f(x) \in B$ だから $f(x) = y$ を満たす $x \in A$ が存在する．このとき $f(x) = y \in B$ なので $x \in f^{-1}(B)$ でもある．従って $x \in A \cap f^{-1}(B)$ で, $f(x) = y$ だから $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$ である．故に $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$. □

8 位相空間

定義 8.1 (X,d) を距離空間, A を X の部分集合とする. X の点 p と正の実数 r で条件「$x\in A$ ならば $d(x,p)\leqq r$」を満たすものが存在するとき A は有界であるという.

例題 8.2 $\boldsymbol{R}^2$ における x 軸と点 $(0,1)$ の合併集合を X とする. すなわち, X は

$$X=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,y=0\}\cup\{(0,1)\}$$

によって定義される $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合である. X の部分集合を要素とする集合 $\mathcal{O}$ は次の条件 (i) または (ii) を満たす集合 O 全体からなるとする.

(i) $(0,1)$ を含まない $\boldsymbol{R}^2$ の開集合 U が存在して $O=U\cap X$ である.

(ii) $(0,1)$ を含む $\boldsymbol{R}^2$ の開集合 V で, $X-V$ が有界であるものが存在して $O=V\cap X$ である.

このとき $\mathcal{O}$ は X の位相であることを示せ.

解答例 幾何学 I の定義 6.2 の条件 (O1), (O2), (O3) を順に確かめてゆく.

$U=\emptyset$ とすれば, U は $(0,1)$ を含まない $\boldsymbol{R}^2$ の開集合で, $\emptyset=U\cap X$ だから, $\emptyset$ は条件 (i) を満たすため, $\emptyset\in\mathcal{O}$ である. $V=\boldsymbol{R}^2$ とすれば, V は $(0,1)$ を含む $\boldsymbol{R}^2$ の開集合で, $X-V=\emptyset$ は有界であり, $X=V\cap X$ だから X は条件 (ii) を満たすため, $X\in\mathcal{O}$ である.

$O_1,O_2\in\mathcal{O}$ とする.

$(0,1)$ を含まない $\boldsymbol{R}^2$ の開集合 U_1, U_2 が存在して $O_1=U_1\cap X$, $O_2=U_2\cap X$ の場合, $U_1\cap U_2$ は $(0,1)$ を含まない $\boldsymbol{R}^2$ の開集合であり, $O_1\cap O_2=(U_1\cap X)\cap(U_2\cap X)=(U_1\cap U_2)\cap X$ が成り立つ. 従って $O_1\cap O_2$ は条件 (i) を満たすため, $O_1\cap O_2\in\mathcal{O}$ である.

$(0,1)$ を含まない $\boldsymbol{R}^2$ の開集合 U と $(0,1)$ を含む $\boldsymbol{R}^2$ の開集合 V で $X-V$ が有界であるものが存在して $O_1=U\cap X$, $O_2=V\cap X$ が成り立つとする. $U\cap V$ は $(0,1)$ を含まない $\boldsymbol{R}^2$ の開集合であり, $O_1\cap O_2=(U\cap X)\cap(V\cap X)=(U\cap V)\cap X$ が成り立つ. 従って $O_1\cap O_2$ は条件 (i) を満たすため, $O_1\cap O_2\in\mathcal{O}$ である.

$(0,1)$ を含む $\boldsymbol{R}^2$ の開集合 V_1, V_2 で $X-V_1$ と $X-V_2$ が有界であるものが存在して $O_1=V_1\cap X$, $O_2=V_2\cap X$ が成り立つとする. $V_1\cap V_2$ は $(0,1)$ を含む $\boldsymbol{R}^2$ の開集合であり, $X-V_1$ と $X-V_2$ はともに有界だから, $X-(V_1\cap V_2)=(X-V_1)\cup(X-V_2)$ も有界である. さらに $O_1\cap O_2=(V_1\cap X)\cap(V_2\cap X)=(V_1\cap V_2)\cap X$ が成り立つ. 従って $O_1\cap O_2$ は条件 (ii) を満たすため, $O_1\cap O_2\in\mathcal{O}$ である.

$O_i\in\mathcal{O}$ $(i\in I)$ ならば, 各 $i\in I$ に対して $\boldsymbol{R}^2$ の開集合 U_i で「$(0,1)\in U_i$ ならば $X-U_i$ は有界」かつ $O_i=U_i\cap X$ を満たすものが存在する.

すべての $i\in I$ に対して $(0,1)\notin O_i=U_i\cap X$ であるとき, $(0,1)\in X$ より U_i は $(0,1)$ を含まない $\boldsymbol{R}^2$ の開集合である. 従って $\bigcup_{i\in I}U_i$ も $(0,1)$ を含まない $\boldsymbol{R}^2$ の開集合であり, $\bigcup_{i\in I}O_i=\bigcup_{i\in I}(U_i\cap X)=\left(\bigcup_{i\in I}U_i\right)\cap X$ だから $\bigcup_{i\in I}O_i$ は条件 (i) を満たすため, $\bigcup_{i\in I}O_i\in\mathcal{O}$ である.

$(0,1)\in O_j=U_j\cap X$ となる $j\in I$ が存在するとき, $(0,1)\in U_j$ だから $X-U_j$ は有界である. このとき $X-\left(\bigcup_{i\in I}U_i\right)\subset X-U_j$ より $X-\left(\bigcup_{i\in I}U_i\right)$ も有界で, $\bigcup_{i\in I}O_i=\bigcup_{i\in I}(U_i\cap X)=\left(\bigcup_{i\in I}U_i\right)\cap X$ かつ $\bigcup_{i\in I}U_i$ は $\boldsymbol{R}^2$ の開集合だから $\bigcup_{i\in I}O_i$ は条件 (ii) を満たすため, $\bigcup_{i\in I}O_i\in\mathcal{O}$ である. □

例題 8.3 集合 X の部分集合を要素とする集合 $\mathcal{O}(X)$ を $\mathcal{O}(X)=\{O\subset X\,|\,O=\emptyset$ または $X-O$ は有限集合.$\}$ で定める.

(1) $\mathcal{O}(X)$ は X の位相であることを示せ.

(2) X が無限集合の場合, A が X の無限部分集合ならば $\overline{A}=X$ であることを示せ.

解答例 (1) $\mathcal{O}(X)$ の定義から $\emptyset \in \mathcal{O}(X)$ である. $X - X = \emptyset$ は有限集合だから $X \in \mathcal{O}(X)$ である.

$O_1, O_2 \in \mathcal{O}(X)$ とする. $O_1 = \emptyset$ または $O_2 = \emptyset$ の場合は $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ だから $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}(X)$ である. $O_1, O_2 \neq \emptyset$ ならば $X - O_1$ と $X - O_2$ は有限集合だから, これらの合併 $(X - O_1) \cup (X - O_2)$ も有限集合である. $X - (O_1 \cap O_2) = (X - O_1) \cup (X - O_2)$ だから $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}(X)$ である.

$O_i \in \mathcal{O}(X)$ $(i \in I)$ とする. すべての $i \in I$ に対して $O_i = \emptyset$ ならば $\bigcup_{i \in I} O_i = \emptyset$ だから $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}(X)$ である. $O_j \neq \emptyset$ となる $j \in I$ がある場合, $X - O_j$ は有限集合で, $X - \bigcup_{i \in I} O_i = \bigcap_{i \in I} (X - O_i)$ は有限集合 $X - O_j$ の部分集合だから, 有限集合である. 故に $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}(X)$ である. 以上から $\mathcal{O}(X)$ は X の位相である.

(2) p を X の任意の点とする. p を含む任意の開集合 U に対し, U は空集合でないので $\mathcal{O}(X)$ の定義から $X - U$ は有限集合だから, $X - U$ は無限集合 A を部分集合に含まない. 従って A の要素で $X - U$ の補集合 U に含まれるものがあるため $A \cap U \neq \emptyset$ である. 故に $p \in \overline{A}$ だから, X の任意の点は A の触点である. □

例題 8.4 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, A, B を X の部分集合とするとき, 次の等式が成り立つことを示せ.

(1) $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$ (2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

解答例 (1) $A \cap B$ の内点は A の内点かつ B の内点だから $(A \cap B)^i \subset A^i$ かつ $(A \cap B)^i \subset B^i$ が成り立つため, $(A \cap B)^i \subset A^i \cap B^i$ である. $A^i \subset A$ かつ $B^i \subset B$ だから $A^i \cap B^i \subset A \cap B$ である. 従って $A^i \cap B^i$ は $A \cap B$ に含まれる開集合だから幾何学 I 命題 6.9 より $A^i \cap B^i \subset (A \cap B)^i$ である. 以上から $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$ である.

(2) 幾何学 I 注意 6.5(3) より $A, B \subset A \cup B \subset \overline{A \cup B}$ だから $\overline{A \cup B}$ は A と B を含む閉集合である. 従って幾何学 I 命題 6.14 により $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ と $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ が成り立つ. 故に $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ である.

$\overline{A}$ と $\overline{B}$ は閉集合だから, 幾何学 I 命題 6.13 より $\overline{A} \cup \overline{B}$ も閉集合である. 一方, $A \subset \overline{A}$, $B \subset \overline{B}$ だから $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ となるため幾何学 I 命題 6.14 により $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ が成り立つ. 以上から $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ である. □

定義 8.5 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, A を X の部分集合とする. $x \in X$ が $x \in \overline{A - \{x\}}$ を満たすとき, x を A の集積点といい, A の集積点全体からなる集合を A^d で表す. また, A の点であるが A の集積点ではない点を A の孤立点といい, A の孤立点全体からなる集合を A^s で表す.

例題 8.6 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, A を X の部分集合とする.

(1) $x \in A^s$ であるためには $O \in \mathcal{O}$ で $O \cap A = \{x\}$ を満たすものが存在することが必要十分であることを示せ.

(2) $\overline{A} = A^d \cup A^s$ であること示せ.

解答例 (1) $x \in A^s$ とすると, $x \in A$ かつ $x \notin \overline{A - \{x\}}$ である. 従って x を含む開集合 O で $O \cap (A - \{x\}) = \emptyset$ を満たすものが存在する. $x \in O$ であり, $A = \{x\} \cup (A - \{x\})$ だから

$$O \cap A = O \cap (\{x\} \cup (A - \{x\})) = (O \cap \{x\}) \cup (O \cap (A - \{x\})) = \{x\} \cup \emptyset = \{x\}.$$

逆に, $O \in \mathcal{O}$ で $O \cap A = \{x\}$ を満たすものが存在すると仮定すると, $x \in O$, $x \in A$ かつ $O \cap (A - \{x\}) \subset O \cap A = \{x\}$ であり, $O \cap (A - \{x\})$ は x を含まないため $O \cap (A - \{x\}) = \emptyset$ である. このことと O は x を含む開集合だから, $x \notin \overline{A - \{x\}}$ である. 従って $x \in A^s$ である.

(2) $x \in A^d$ ならば $x \in \overline{A - \{x\}} \subset \overline{A}$ だから $A^d \subset \overline{A}$ である. $x \in A^s$ ならば $x \in A \subset \overline{A}$ だから $A^s \subset \overline{A}$ である. 故に $A^d \cup A^s \subset \overline{A}$ である. $x \in \overline{A} - A^d$ ならば $x \notin \overline{A - \{x\}}$ だから x を含む開集合 O で $O \cap (A - \{x\}) = \emptyset$ を満たすものが存在する. 一方 $x \in \overline{A}$ より $O \cap A \neq \emptyset$ が成り立つ. もし $x \notin A$ ならば $A - \{x\} = A$ だから $O \cap A = O \cap (A - \{x\}) = \emptyset$ となり, 矛盾が生じるため $x \in A$ である. 従って $x \in A^s$ だから $\overline{A} - A^d \subset A^s$ は成り立つため $\overline{A} \subset A^d \cup A^s$ が得られる. 以上から $\overline{A} = A^d \cup A^s$ である. □

9 連続写像

例題 9.1 $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f:X\to Y$ を写像とする.

(1) f が $p\in X$ で連続であるためには $p\in\overline{A}$ を満たす X の任意の部分集合 A に対して $f(p)\in\overline{f(A)}$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

(2) f が連続写像であるためには X の任意の部分集合 A に対して $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

解答例 (1) f が p で連続で, $A\subset X$ は $p\in\overline{A}$ を満たすとする. 仮定から $f(p)$ の任意の開近傍 V に対し, p の開近傍 U で $f(U)\subset V$ を満たすものがある. $p\in\overline{A}$ より $U\cap A\neq\emptyset$ だから $q\in U\cap A$ が存在するため $f(q)\in f(U)\subset V$ であり $f(q)\in f(A)$ だから $f(q)\in V\cap f(A)$ が成り立つ. 故に $V\cap f(A)\neq\emptyset$ だから $f(p)\in\overline{f(A)}$ である.

f が p で連続でないならば $f(p)$ の開近傍 V で条件「p の任意の開近傍 U に対して $f(U)\not\subset V$ である.」を満たすものが存在する. $f(U)\not\subset V$ は $U\not\subset f^{-1}(V)$ と同値で, これは $U\cap(X-f^{-1}(V))\neq\emptyset$ と同値だから, $A=X-f^{-1}(V)$ とおけば V は $p\in\overline{A}$ を満たす. 第 7 節の問題から $f(A)=f(X-f^{-1}(V))=f(X)-V$ だから $V\cap f(A)=\emptyset$ となるため $p\notin\overline{f(A)}$ が成り立つ. 故に $p\in\overline{A}$ を満たす任意の $A\subset X$ に対して $f(p)\in\overline{f(A)}$ ならば f は p で連続である.

(2) $\overline{f(A)}$ は Y の閉集合だから, 幾何学 I 命題 7.6 より f が連続写像ならば $f^{-1}(\overline{f(A)})$ は X の閉集合である. $A\subset f^{-1}(f(A))\subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ だから幾何学 I 命題 6.14 より $\overline{A}\subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ が成り立つため $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ である.

任意の $A\subset X$ に対して $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ が成り立つとする. 任意の $p\in X$ と $p\in\overline{A}$ を満たす X の任意の部分集合 A に対して $f(p)\in f(\overline{A})$ であり, 仮定から $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ だから $f(p)\in\overline{f(A)}$ が成り立つため (1) の結果から f は p で連続である. 故に f は連続写像である. □

例題 9.2 $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f:X\to Y$ を写像とする.

(1) f が開写像であるためには任意の $A\subset X$ に対して $f(A^i)\subset f(A)^i$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

(2) f が閉写像であるためには任意の $A\subset X$ に対して $\overline{f(A)}\subset f(\overline{A})$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

解答例 (1) f を開写像, $A\subset X$ とする. $A^i\subset A$ より $f(A^i)\subset f(A)$ で, $f(A^i)$ は開集合だから幾何学 I 命題 6.9 より $f(A^i)\subset f(A)^i$ である. 逆に任意の $A\subset X$ に対して $f(A^i)\subset f(A)^i$ が成り立つとし, O が X の開集合ならば $O=O^i$ より $f(O)=f(O^i)\subset f(O)^i\subset f(O)$ だから $f(O)^i=f(O)$ である. 従って幾何学 I 命題 6.9 より $f(O)$ は Y の開集合になるため f は開写像である.

(2) f を閉写像, $A\subset X$ とする. $A\subset\overline{A}$ より $f(A)\subset f(\overline{A})$ で, $f(\overline{A})$ は閉集合だから幾何学 I 命題 6.14 より $\overline{f(A)}\subset f(\overline{A})$ である. 逆に任意の $A\subset X$ に対して $\overline{f(A)}\subset f(\overline{A})$ が成り立つとし, A が X の閉集合ならば $\overline{A}=A$ より $\overline{f(A)}\subset f(\overline{A})=f(A)$ だから $\overline{f(A)}=f(A)$ である. 従って幾何学 I 命題 6.14 より $f(A)$ は Y の閉集合になるため f は閉写像である. □

例題 9.3 $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. 写像 $f:X\to Y$ が開写像であるためには, 任意の $x\in X$ と x の近傍 U に対し, $f(x)$ の近傍 V で $f(U)\supset V$ となるものが存在することが必要十分であることを示せ.

解答例 f を開写像, $x\in X$, U を x の近傍とする. $x\in U^i$ で, $V=f(U^i)$ とおけば V は $f(x)$ を含む開集合だから V は $f(x)$ の開近傍であり, $f(U)\supset f(U^i)=V$ が成り立つ. 逆に任意の $x\in X$ と x の近傍 U に対し, $f(x)$ の近傍 V で $f(U)\supset V$ となるものが存在すると仮定して, O を X の開集合とする. 任意の $y\in f(O)$ に対して $y=f(x)$ となる $x\in O$ が存在し, 仮定から $f(x)$ の近傍 V_y で $f(O)\supset V_y$ となるものがある. このとき $\{y\}\subset V_y^i\subset V_y\subset f(O)$ だから $f(O)=\bigcup_{y\in f(O)}\{y\}\subset\bigcup_{y\in f(O)}V_y^i\subset f(O)$ が成り立つ. 故に $f(O)=\bigcup_{y\in f(O)}V_y^i$ であり, V_y^i は Y の開集合だから $f(O)$ も Y の開集合である. 従って f は開写像である. □

例題 9.4 $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, Y を集合, $p: X \to Y$ 全射とする.

(1) $\mathcal{O}_p = \{O \subset Y \,|\, p^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X\}$ で定義される集合 $\mathcal{O}_p$ は Y の位相であることを示せ.

(2) Y に位相 $\mathcal{O}_p$ を与えるとき $p: X \to Y$ は連続写像であり, 位相空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ と写像 $f: Y \to Z$ が与えられていて $f \circ p: X \to Z$ が連続写像ならば $f: Y \to Z$ も連続写像であることを示せ.

解答例 (1) $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{O}_X$, $p^{-1}(Y) = X \in \mathcal{O}_X$ より $\emptyset, Y \in \mathcal{O}_p$ である. $O_1, O_2 \in \mathcal{O}_p$ ならば $p^{-1}(O_1), p^{-1}(O_2) \in \mathcal{O}_X$ だから, $\mathcal{O}_X$ が X の位相であることと例題 7.3 の (3) から $p^{-1}(O_1 \cap O_2) = p^{-1}(O_1) \cap p^{-1}(O_2) \in \mathcal{O}_X$ である. 故に $\mathcal{O}_p$ の定義から $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_p$ である. 各 $i \in I$ に対して $O_i \in \mathcal{O}_p$ である集合族 $(O_i)_{i \in I}$ が与えられたとき, すべての $i \in I$ に対して $p^{-1}(O_i) \in \mathcal{O}_X$ だから, $\mathcal{O}_X$ が X の位相であることと例題 7.3 の (2) から $p^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} O_i\Big) = \bigcup_{i \in I} p^{-1}(O_i) \in \mathcal{O}_X$ である. 従って $\mathcal{O}_p$ の定義から $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}_p$ である. 以上から $\mathcal{O}_p$ は Y の位相である.

(2) $V \in \mathcal{O}_p$ ならば $\mathcal{O}_p$ の定義から $p^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ だから $p: X \to Y$ は連続写像である. Z の任意の開集合 O に対し, $U = f^{-1}(O)$ とおいて U が Y の開集合であることを示す. 幾何学 I 補題 9.3 より $p^{-1}(U) = p^{-1}(f^{-1}(O)) = (f \circ p)^{-1}(O)$ であり, 仮定により $f \circ p$ は連続写像だから $(f \circ p)^{-1}(O)$ は X の開集合である. 従って $p^{-1}(U)$ は X の開集合だから, $\mathcal{O}_p$ の定義から U は Y の開集合である. 故に $f: Y \to Z$ は連続写像である. □

定義 9.5 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. 連続な全射 $p: X \to Y$ が次の条件を満たすとき, p を商写像という.

「Y の部分集合 O が $p^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$ を満たせば $O \in \mathcal{O}_Y$ である.」

注意 9.6 連続な全射 $p: X \to Y$ が商写像であることと Y の位相が例題 9.4 で与えた $\mathcal{O}_p$ と一致することは同値である.

例題 9.7 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. 連続な全射 $p: X \to Y$ が開写像または閉写像ならば p は商写像であることを示せ.

解答例 $O \subset Y$ は $p^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$ を満たすとする. p は全射だから例題 7.6 により $p(p^{-1}(O)) = p(X \cap p^{-1}(O)) = p(X) \cap O = O$ が成り立つため p が開写像ならば $O = p(p^{-1}(O))$ は Y の開集合である. $X - p^{-1}(O)$ は X の閉集合で, 第 7 節の問題より $p(X - p^{-1}(O)) = p(X) - O = Y - O$ が成り立つため p が閉写像ならば $Y - O = p(X - p^{-1}(O))$ は Y の閉集合である. 従って O は Y の開集合である. 故に p は商写像である. □

例題 9.8 $c \in [a, b]$ に対し, 関数 $e_c : C[a, b] \to \boldsymbol{R}$ を $e_c(f) = f(c)$ で定める.

(1) e_c は幾何学 I 例 3.3 で与えた距離空間 $(C[a, b], d_\infty)$ で定義された連続関数であることを示せ.

(2) $a = -1$, $b = 1$ で p が 1 以上の実数ならば e_0 は幾何学 I 例 3.3 で与えた距離空間 $(C[-1, 1], d_p)$ で定義された関数として連続ではないことを示せ.

解答例 (1) $f, g \in C[a, b]$ に対し $d_\infty(g, f)$ は $x \in [a, b]$ を $|g(x) - f(x)|$ に対応させる関数の最大値だから $|e_c(g) - e_c(f)| = |g(c) - f(c)| \leqq d_\infty(g, f)$ が成り立つ. 故に任意の $\varepsilon > 0$ に対して $d_\infty(g, f) < \varepsilon$ ならば $|e_c(g) - e_c(f)| < \varepsilon$ が成り立つため, e_c は f で連続である. 従って e_c は距離空間 $(C[a, b], d_\infty)$ で定義された連続関数である.

(2) つねに値が 0 である定数値関数を 0 で表す. 自然数 n に対して $f_n(x) = \begin{cases} 1 - n|x| & |x| \leqq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \leqq |x| \leqq 1 \end{cases}$ で関数 $f_n : [-1, 1] \to \boldsymbol{R}$ を定めれば $f_n \in C[-1, 1]$ であり $d_p(f_n, 0)^p = \displaystyle\int_{-1}^{1} |f_n(x)|^p dx = 2\int_0^{\frac{1}{n}} (1 - nx)^p dx = \frac{2}{n(p+1)}$ より $d_p(f_n, 0) = \left(\dfrac{2}{n(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}$ である. 従って $\displaystyle\lim_{n \to \infty} d_p(f_n, 0) = 0$ だから距離空間 $(C[-1, 1], d_p)$ において $\displaystyle\lim_{n \to \infty} f_n = 0$ である. 一方 $e_0(f_n) = f_n(0) = 1$ だから $\displaystyle\lim_{n \to \infty} e_0(f_n) = \lim_{n \to \infty} f_n(0) = 1 \neq 0$ となるため e_0 は 0 で連続ではない. □

10　位相の生成

例題 10.1　集合 X の部分集合を要素とする集合 $\mathcal{B}$ で生成される X の位相を $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ とする．$\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の基底になるためには $\mathcal{B}$ が条件「任意の $V, W \in \mathcal{B}$ と $x \in V \cap W$ に対し，$x \in U \subset V \cap W$ となる $U \in \mathcal{B}$ が存在する.」を満たすことが必要十分であることを示せ.

解答例　$\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の基底であるとする．任意の $V, W \in \mathcal{B}$ と $x \in V \cap W$ に対し，$V \cap W \in \mathcal{O}(\mathcal{B})$ だから仮定により $V \cap W = \bigcup_{U \in \Gamma} U$ を満たす $\mathcal{B}$ の部分集合 Γ が存在するため，$x \in U \subset V \cap W$ となる $U \in \Gamma \subset \mathcal{B}$ が存在する.

逆に任意の $V, W \in \mathcal{B}$ と $x \in V \cap W$ に対し，$x \in U \subset V \cap W$ となる $U \in \mathcal{B}$ が存在すると仮定し，帰納的に $V_1, V_2, \ldots, V_n \in \mathcal{B}$ と $x \in V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$ に対し，$x \in U \subset V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$ となる $U \in \mathcal{B}$ が存在すると仮定する．$V_1, V_2, \ldots, V_n, V_{n+1} \in \mathcal{B}$ と $x \in V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \cap V_{n+1}$ に対して $x \in U \subset V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$ となる $U \in \mathcal{B}$ が存在するが $U, V_{n+1} \in \mathcal{B}$ かつ $x \in U \cap V_{n+1}$ だから $W \in \mathcal{B}$ で $x \in W \subset U \cap V_{n+1} \subset V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \cap V_{n+1}$ を満たすものがある．故に任意の自然数 n と $x \in V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$ に対し，$x \in U \subset V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$ となる $U \in \mathcal{B}$ が存在する．$O \in \mathcal{O}(\mathcal{B})$, $x \in O$ とする．O は $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$ $(V_1, V_2, \ldots, V_n \in \mathcal{B})$ の形の集合の合併集合だから $x \in V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \subset O$ を満たす $V_1, V_2, \ldots, V_n \in \mathcal{B}$ が存在する．従って $x \in U \subset V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$ となる $U \in \mathcal{B}$ が存在するため $x \in U \subset O$ が成り立ち，$\mathcal{B}$ は幾何学 I 命題 8.5 の条件を満たす．故に $\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の基底である．　□

例題 10.2　$\mathcal{B} = \{[a, b) \,|\, a, b \in \boldsymbol{R},\ a < b\}$ とおき，$\mathcal{B}$ で生成される $\boldsymbol{R}$ の位相を $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ とする.

(1) $\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の基底であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{R}$ の通常の距離関数 $d(x, y) = |x - y|$ から定まる位相を $\mathcal{O}_d$ とすれば，$\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は $\mathcal{O}_d$ より強いことを示せ.

(3) 半開区間 $[a, b)$ は位相空間 $(\boldsymbol{R}, \mathcal{O}(\mathcal{B}))$ の閉集合であることを示せ.

解答例　(1) $[a, b), [c, d) \in \mathcal{B}$ $(a \leqq c)$ に対し $x \in [a, b) \cap [c, d)$ ならば $[a, b) \cap [c, d) \neq \emptyset$ だから $c < b$ である．従って $[a, b) \cap [c, d) = [c, \min\{b, d\}) \in \mathcal{B}$ が成り立つため，例題 10.1 により $\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の基底である.

(2) $a < b$ を満たす $a, b \in \boldsymbol{R}$ に対し，$a_n = a + \dfrac{b-a}{n+1}$, $b_n = b - \dfrac{b-a}{n+1}$ で $(a_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$, $(b_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ を定めれば $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, $\lim_{n \to \infty} b_n = b$ で，すべての $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $a_n > a$, $b_n < b$, $a_n \leqq b_n$ が成り立つため例題 7.2(3) より $\bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} [a_n, b_n) = (a, b)$ である．故に $(a, b) \in \mathcal{O}(\mathcal{B})$ で，$\mathcal{O}_d$ の要素は有限開区間の合併集合だから $\mathcal{O}_d \subset \mathcal{O}(\mathcal{B})$ となり，$\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は $\mathcal{O}_d$ より強い.

(3) $\boldsymbol{R} - [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$ であるが，$(-\infty, a) = \bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} [a - n, a)$, $[b, \infty) = \bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} [b, b + n)$ が成り立つことから $(-\infty, a), [b, \infty) \in \mathcal{O}(\mathcal{B})$ だから $\boldsymbol{R} - [a, b) \in \mathcal{O}(\mathcal{B})$ すなわち $\boldsymbol{R} - [a, b)$ は $(\boldsymbol{R}, \mathcal{O}(\mathcal{B}))$ の開集合である．故に $[a, b)$ は位相空間 $(\boldsymbol{R}, \mathcal{O}(\mathcal{B}))$ の閉集合である.　□

例題 10.3　X の位相 $\mathcal{O}$ が 例題 8.3 で定義した X の位相 $\mathcal{O}(X)$ より強いためには X の任意の点 p に対して p だけからなる集合 $\{p\}$ が位相空間 $(X, \mathcal{O})$ における閉集合であることが必要十分であることを示せ.

解答例　X の位相 $\mathcal{O}$ が $\mathcal{O}(X)$ より強いと仮定する．任意の $p \in X$ に対して $O = X - \{p\}$ とおけば $X - O = \{p\}$ だから $X - O$ は有限集合である．従って $O \in \mathcal{O}(X)$ であり，$\mathcal{O}$ が $\mathcal{O}(X)$ より強いため，$O \in \mathcal{O}$ である．故に $X - O = \{p\}$ は位相空間 $(X, \mathcal{O})$ における閉集合である.

X の任意の点 p に対して p だけからなる集合 $\{p\}$ が位相空間 $(X, \mathcal{O})$ における閉集合であると仮定する．$O \in \mathcal{O}(X)$ ならば $O = \emptyset$ または $X - O$ は有限集合であるが，前者の場合は $\mathcal{O}$ が X の位相であることから $O \in \mathcal{O}$．後者の場合は $X - O$ が有限個の点 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ からなる集合であるとすれば，$X - O = \{p_1\} \cup \{p_2\} \cup \cdots \cup \{p_n\}$ だから，$O = X - (\{p_1\} \cup \{p_2\} \cup \cdots \cup \{p_n\}) = (X - \{p_1\}) \cap (X - \{p_2\}) \cap \cdots \cap (X - \{p_n\})$ であり，仮定から $X - \{p_i\}$ は $(X, \mathcal{O})$ の開集合だから，それらの有限個の共通部分 $(X - \{p_1\}) \cap (X - \{p_2\}) \cap \cdots \cap (X - \{p_n\})$ も開集合である．従って O は開集合，すなわち $O \in \mathcal{O}$ である．故に $\mathcal{O}(X) \subset \mathcal{O}$ が成り立つので X の位相 $\mathcal{O}$ は $\mathcal{O}(X)$ より強い.　□

例題 10.4　$\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ を X の位相とし, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ をそれぞれ $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ の基底とする. $\mathcal{O}'$ が $\mathcal{O}$ より強いためには任意の $x \in X$ と x を含む任意の $U \in \mathcal{B}$ に対して $x \in V \subset U$ を満たす $V \in \mathcal{B}'$ が存在することが必要十分であることを示せ.

解答例　$\mathcal{O}'$ が $\mathcal{O}$ より強いとする. $x \in X$ と x を含む $U \in \mathcal{B}$ に対し, $U \in \mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ だから U は $\mathcal{B}'$ の要素の合併集合である. 従って $\Gamma \subset \mathcal{B}'$ で $U = \bigcup_{W\in\Gamma} W$ を満たすものがある. $x \in U$ だから $x \in V$ となる $V \in \Gamma$ がある. このとき $V \subset \bigcup_{W\in\Gamma} W = U$ であり $V \in \mathcal{B}'$ が成り立つ. 任意の $O \in \mathcal{O}$ に対し, $x \in O$ ならば幾何学 I 命題 8.5 により $x \in U \subset O$ を満たす $U \in \mathcal{B}$ が存在する. $x \in V_x \subset U$ を満たす $V_x \in \mathcal{B}'$ が存在すると仮定すれば $\{x\} \subset V_x \subset O$ だから $O = \bigcup_{x\in O} \{x\} \subset \bigcup_{x\in O} V_x \subset O$ が成り立つ. 故に $O = \bigcup_{x\in O} V_x$ となり $O \in \mathcal{O}'$ が得られるため, $\mathcal{O}'$ は $\mathcal{O}$ より強い. □

例題 10.5　集合 I の各要素 i に対して位相空間 $(X_i, \mathcal{O}_i)$ と写像 $f_i : X_i \to Y$ が与えられているとする. Y の部分集合を要素とする集合 $\mathcal{O}$ を $\mathcal{O} = \{O \subset Y \,|\, \text{すべての}\, i \in I\, \text{に対して}\, f_i^{-1}(O) \in \mathcal{O}_i.\}$ で定義する.

(1) $\mathcal{O}$ は Y の位相であることを示せ.

(2) Y の位相 $\mathcal{O}'$ が条件「すべての $i \in I$ に対して f_i は位相空間 $(X_i, \mathcal{O}_i)$ から $(Y, \mathcal{O}')$ への連続写像である.」を満たすならば $\mathcal{O}'$ は $\mathcal{O}$ より弱いことを示せ.

(3) 位相空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ と写像 $g : Y \to Z$ が与えられていて, すべての $i \in I$ に対して合成写像 $g \circ f_i : X_i \to Z$ が連続写像ならば Y に位相 $\mathcal{O}$ を与えたとき, g は連続写像であることを示せ.

解答例　(1) すべての $i \in I$ に対して $f_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{O}_i$, $f_i^{-1}(Y) = X_i \in \mathcal{O}_i$ だから $\emptyset, Y \in \mathcal{O}$ である. $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ ならばすべての $i \in I$ に対して $f_i^{-1}(O_1), f_i^{-1}(O_2) \in \mathcal{O}_i$ だから, $\mathcal{O}_i$ が X_i の位相であることと例題 7.3 の (3) から $f_i^{-1}(O_1 \cap O_2) = f_i^{-1}(O_1) \cap f_i^{-1}(O_2) \in \mathcal{O}_i$ である. 故に $\mathcal{O}$ の定義から $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$ である. 各 $j \in J$ に対して $O_j \in \mathcal{O}$ である集合族 $(O_j)_{j\in J}$ が与えられたとき, 任意の $i{\in}I$, $j{\in}J$ に対して $f_i^{-1}(O_j) \in \mathcal{O}_i$ だから, $\mathcal{O}_i$ が X_i の位相であることと例題 7.3 の (2) から $f_i^{-1}\Bigl(\bigcup_{j\in J} O_j\Bigr) = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(O_j) \in \mathcal{O}_i$ である. 故に $\mathcal{O}$ の定義から $\bigcup_{j\in J} O_j \in \mathcal{O}$ である.

(2) $O \in \mathcal{O}'$ ならば仮定と幾何学 I 命題 7.4 の (2) により, すべての $i \in I$ に対して $f_i^{-1}(O) \in \mathcal{O}_i$ だから $\mathcal{O}$ の定義により $O \in \mathcal{O}$ である. 故に $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ となるため $\mathcal{O}'$ は $\mathcal{O}$ より弱い.

(3) O を Z の任意の開集合とすれば, 各 $i \in I$ に対して $g \circ f_i : X_i \to Z$ が連続であることから幾何学 I 命題 7.4 の (2) と補題 9.3 より $f_i^{-1}(g^{-1}(O)) = (g \circ f_i)^{-1}(O) \in \mathcal{O}_i$ が成り立つ. 従って $\mathcal{O}$ の定義から $g^{-1}(O) \in \mathcal{O}$ となるため, g は連続写像である. □

例題 10.6　集合 I の各要素 i に対して位相空間 $(X_i, \mathcal{O}_i)$ と写像 $f_i : Y \to X_i$ が与えられているとする. Y の部分集合を要素とする集合 $\mathcal{B}$ を $\mathcal{B} = \bigcup_{i\in I} \{O \subset Y \,|\, O = f_i^{-1}(U)\, \text{を満たす}\, U \in \mathcal{O}_i\, \text{が存在する.}\}$ で定義する.

(1) Y の位相 $\mathcal{O}'$ が条件「すべての $i \in I$ に対して f_i が位相空間 $(Y, \mathcal{O}')$ から $(X_i, \mathcal{O}_i)$ への連続写像である.」を満たすならば $\mathcal{O}'$ は $\mathcal{B}$ で生成される Y の位相より強いことを示せ.

(2) 位相空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ と写像 $g : Z \to Y$ が与えられていて, すべての $i \in I$ に対して合成写像 $f_i \circ g : Z \to X_i$ が連続写像ならば Y に $\mathcal{B}$ で生成される位相を与えたとき, g は連続写像であることを示せ.

解答例　(1) $O \in \mathcal{B}$ ならば $O = f_i^{-1}(U)$ を満たす $i \in I$ と $U \in \mathcal{O}_i$ が存在する. f_i が $(Y, \mathcal{O}')$ から $(X_i, \mathcal{O}_i)$ への連続写像ならば幾何学 I 命題 7.4 の (2) により $O = f_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}'$ である. 故に $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}'$ だから幾何学 I 命題 8.3 から $\mathcal{O}'$ は $\mathcal{B}$ で生成される Y の位相より強い.

(2) $O \in \mathcal{B}$ ならば $O = f_i^{-1}(U)$ を満たす $i \in I$ と $U \in \mathcal{O}_i$ が存在し, $f_i \circ g : Z \to X_i$ が連続写像であることと幾何学 I 命題 7.4 の (2) と補題 9.3 より $g^{-1}(O) = g^{-1}(f_i^{-1}(U)) = (f_i \circ g)^{-1}(U) \in \mathcal{O}_Z$ が成り立つ. 従って幾何学 I 命題 8.7 により g は連続写像である. □

11　部分空間・直積空間

例題 11.1　$(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし, X は開集合族 $(U_j)_{j\in J}$ の合併 $X=\bigcup_{j\in J}U_j$ であるとする．また $i_j:U_j\to X$ $(j\in J)$ を包含写像 $i_j(x)=x$ $(x\in U_j)$ として $(X,\mathcal{O}_X)$ に関する相対位相を U_j に与える．このとき写像 $f:X\to Y$ が条件「すべての $j\in J$ に対して合成写像 $f\circ i_j:U_j\to Y$ は連続写像である.」を満たせば $f:X\to Y$ は連続写像であることを示せ.

解答例　O を Y の任意の開集合とする．i_j は包含写像だから幾何学 I 補題 9.3 より各 $j\in J$ に対して $(f\circ i_j)^{-1}(O)=i_j^{-1}(f^{-1}(O))=f^{-1}(O)\cap U_j$ が成り立つ．従って例題 7.1(1) より

$$\bigcup_{j\in J}(f\circ i_j)^{-1}(O)=\bigcup_{j\in J}(f^{-1}(O)\cap U_j)=f^{-1}(O)\cap\bigcup_{j\in J}U_j=f^{-1}(O)\cap X=f^{-1}(O)\ \cdots(*)$$

が成り立つ．一方, 仮定と幾何学 I 命題 7.4 の (2) から各 $j\in J$ に対し $(f\circ i_j)^{-1}(O)$ は U_j の開集合だから X の開集合 V_j で $(f\circ i_j)^{-1}(O)=V_j\cap U_j$ を満たすものがある．故に $(f\circ i_j)^{-1}(O)$ は X の開集合だから $\bigcup_{j\in J}(f\circ i_j)^{-1}(O)$ も X の開集合で, $(*)$ からこの集合は $f^{-1}(O)$ に一致する．従って幾何学 I 命題 7.4(2) から f は連続写像である．　□

例題 11.2　$(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし, X は n 個の閉集合 $A_1,A_2,\dots,A_n$ の合併 $X=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ とする．$i_j:A_j\to X$ $(j=1,2,\dots,n)$ を包含写像 $i_j(x)=x$ $(x\in A_j)$ として $(X,\mathcal{O}_X)$ に関する相対位相を A_j に与える．このとき写像 $f:X\to Y$ が条件「$j=1,2,\dots,n$ に対して合成写像 $f\circ i_i:A_j\to Y$ は連続写像である.」を満たせば $f:X\to Y$ は連続写像であることを示せ.

解答例　F を Y の任意の閉集合とすると, 仮定と幾何学 I 命題 7.6 から $(f\circ i_j)^{-1}(F)$ は A_j の閉集合である．従って $A_j-(f\circ i_j)^{-1}(F)$ は A_j の開集合だから X の開集合 U_j で $A_j-(f\circ i_j)^{-1}(F)=U_j\cap A_j$ を満たすものがある．故に $(f\circ i_j)^{-1}(F)=A_j-(A_j-(f\circ i_j)^{-1}(F))=A_j-U_j\cap A_j=(X-U_j)\cap A_j$ が成り立つ．A_j, $X-U_j$ は X の閉集合だから $(f\circ i_j)^{-1}(F)$ も X の閉集合であり, 例題 11.1 の解答例の $(*)$ から $f^{-1}(F)=\bigcup_{j=1}^{n}(f\circ i_j)^{-1}(F)$ が成り立つ．従って幾何学 I 命題 6.13 より $f^{-1}(F)$ は X の閉集合だから, 幾何学 I 命題 7.6 によって f は連続写像である．　□

例題 11.3　位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の部分集合 A, B, C が $C\subset A\cap B$ を満たすとする．C が部分空間 A の開集合かつ部分空間 B の開集合ならば C は部分空間 $A\cup B$ の開集合であることを示せ.

解答例　仮定から $C=A\cap U=B\cap V$ を満たす X の開集合 U, V が存在する．このとき $C=A\cap U\subset U$ だから $C=C\cap U=B\cap V\cap U$ であり, $C=B\cap V\subset V$ だから $C=C\cap V=A\cap U\cap V$ である．従って $W=U\cap V$ とおけば $C=A\cap W=B\cap W$ だから $C=C\cup C=(A\cap W)\cup(B\cap W)=(A\cup B)\cap W$ が成り立ち, W は X の開集合だから C は $A\cup B$ の開集合である．　□

例題 11.4　X を集合とし, $X\times X$ の部分集合 Δ_X を $\Delta_X=\{(x,y)\in X\times X\,|\,x=y\}$ で定める．このとき X の部分集合 U, V に対し $U\cap V=\emptyset$ と $(U\times V)\cap\Delta_X=\emptyset$ は同値であることを示せ.

解答例　$U\cap V\neq\emptyset$ ならば $x\in U\cap V$ があるので, $(x,x)\in U\times V$ かつ $(x,x)\in\Delta_X$ が成り立つ．従って $(x,x)\in(U\times V)\cap\Delta_X$ だから $(U\times V)\cap\Delta_X\neq\emptyset$ である.

$(U\times V)\cap\Delta_X\neq\emptyset$ ならば $(x,y)\in(U\times V)\cap\Delta_X$ が存在し, $(x,y)\in U\times V$ かつ $(x,y)\in\Delta_X$ である．$(x,y)\in U\times V$ より $x\in U$ かつ $y\in V$ であり, $(x,y)\in\Delta_X$ より $x=y$ だから $x=y\in U\cap V$ が成り立つため $U\cap V=\emptyset$ である．故に $U\cap V=\emptyset$ と $(U\times V)\cap\Delta_X\neq\emptyset$ は同値だから, 対偶を考えれば $U\cap V=\emptyset$ と $(U\times V)\cap\Delta_X=\emptyset$ は同値である.□

例題 11.5　$(X,\mathcal{O}_X)$ を位相空間とし, 直積集合 $X\times X$ に $(X,\mathcal{O}_X)$ と $(X,\mathcal{O}_X)$ の直積位相を与える．このとき例題 11.4 で定めた $X\times X$ の部分集合 Δ_X が $X\times X$ の閉集合であるためには $(X,\mathcal{O}_X)$ が次の条件 (T_2) を満たすことが

必要十分であることを示せ.

(T_2) $x, y \in X$ かつ $x \neq y$ ならば X の開集合 U, V で $x \in U, y \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在する.

解答例 Δ_X が $X \times X$ の閉集合ならば $X \times X - \Delta_X$ は $X \times X$ の開集合だから, 直積位相の定義から X の開集合族 $(U_i)_{i \in I}, (V_i)_{i \in I}$ で $X \times X - \Delta_X = \bigcup_{i \in I}(U_i \times V_i)$ を満たすものが存在する. $x, y \in X$ かつ $x \neq y$ ならば $(x, y) \notin \Delta_X$ だから $(x, y) \in X \times X - \Delta_X = \bigcup_{i \in I}(U_i \times V_i)$ となるため, $(x, y) \in U_j \times V_j$ を満たす $j \in I$ が存在する. このとき $x \in U_j$ かつ $y \in V_j$ であり, $U_j \times V_j \subset \bigcup_{i \in I}(U_i \times V_i) = X \times X - \Delta_X$ より $(U_j \times V_j) \cap \Delta_X = \emptyset$ が成り立つため, 例題 11.4 から $U_j \cap V_j = \emptyset$ となり, 条件 (T_2) が満たされることがわかる.

$(X, \mathcal{O}_X)$ が (T_2) を満たすと仮定して $X \times X - \Delta_X$ が $X \times X$ の開集合であることを示す. $(x, y) \in X \times X - \Delta_X$ ならば $(x, y) \notin \Delta_X$ だから $x \neq y$ である. 従って仮定から X の開集合 $U_{x,y}, V_{x,y}$ で $x \in U_{x,y}, y \in V_{x,y}$ かつ $U_{x,y} \cap V_{x,y} = \emptyset$ を満たすものが存在する. このとき例題 11.4 から $(U_{x,y} \times V_{x,y}) \cap \Delta_X = \emptyset$ だから $U_{x,y} \times V_{x,y} \subset X \times X - \Delta_X$ が成り立つため, $\bigcup_{(x,y) \in X \times X - \Delta_X}(U_{x,y} \times V_{x,y}) \subset X \times X - \Delta_X$ が成り立つ. また, すべての $(x, y) \in X \times X - \Delta_X$ に対して $(x, y) \in U_{x,y} \times V_{x,y}$ だから $X \times X - \Delta_X = \bigcup_{(x,y) \in X \times X - \Delta_X}\{(x, y)\} \subset \bigcup_{(x,y) \in X \times X - \Delta_X}(U_{x,y} \times V_{x,y})$ が成り立つ. 故に $X \times X - \Delta_X = \bigcup_{(x,y) \in X \times X - \Delta_X}(U_{x,y} \times V_{x,y})$ だから, 直積位相の定義から $X \times X - \Delta_X$ は $X \times X$ の開集合である. よって Δ_X は $X \times X$ の閉集合である. □

例題 11.6 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f, g : X \to Y$ を連続写像とする. $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が例題 11.5 の条件 (T_2) を満たすとき, $\{x \in X \,|\, f(x) = g(x)\}$ は X の閉集合であることを示せ.

解答例 f と g はともに連続写像だから写像 $F : X \to Y \times Y$ を $F(x) = (f(x), g(x))$ で定めると, 幾何学 I 命題 9.8 より F は連続写像である. 例題 11.5 から $\Delta_Y = \{(x, y) \in Y \times Y \,|\, x = y\}$ は $Y \times Y$ の閉集合だから $F^{-1}(\Delta_Y)$ は幾何学 I 命題 7.6 から X の閉集合である. ここで $x \in F^{-1}(\Delta_Y)$ は $(f(x), g(x)) = F(x) \in \Delta_Y$ と同値で, さらに $(f(x), g(x)) \in \Delta_Y$ は $f(x) = g(x)$ すなわち $x \in \{x \in X \,|\, f(x) = g(x)\}$ と同値だから $F^{-1}(\Delta_Y) = \{x \in X \,|\, f(x) = g(x)\}$ が成り立つ. 故に $\{x \in X \,|\, f(x) = g(x)\}$ は X の閉集合である. □

注意 11.7 $x, y \in \boldsymbol{R}$ かつ $x < y$ ならば $U = \left(-\infty, \frac{x+y}{2}\right)$, $V = \left(\frac{x+y}{2}, \infty\right)$ とおけば U, V は X の開集合で, $x \in U$, $y \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ だから $\boldsymbol{R}$ は例題 11.5 の条件 (T_2) を満たす. 故に $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, f, g を X で定義された連続な実数値関数とすれば例題 11.6 から X の部分集合 $\{x \in X \,|\, f(x) = g(x)\}$ は X の閉集合である.

例題 11.8 位相空間 $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), \dots, (X_n, \mathcal{O}_n)$ の直積位相空間 $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \mathcal{O})$ を考える. $A_i \subset X_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ に対し, $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の部分集合 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ の閉包は $\overline{A_1} \times \overline{A_2} \times \cdots \times \overline{A_n}$ に一致することを示せ.

解答例 第 i 成分への射影 $\mathrm{pr}_i : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to X_i$ は連続写像であり, $\mathrm{pr}_i(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = A_i$ だから例題 9.1 の (2) から $\mathrm{pr}_i(\overline{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n}) \subset \overline{\mathrm{pr}_i(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)} = \overline{A_i}$ が成り立つ. $p \in \overline{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n}$ ならば $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ とおくと上式から $p_i \in \overline{A_i}$ だから $\overline{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n} \subset \overline{A_1} \times \overline{A_2} \times \cdots \times \overline{A_n}$ である.

$p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \overline{A_1} \times \overline{A_2} \times \cdots \times \overline{A_n}$ とし, O を p の開近傍とすれば, 直積位相の定義から p_i の開近傍 O_i で $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \subset O$ を満たすものがある. $i = 1, 2, \dots, n$ に対して $p_i \in \overline{A_i}$ だから $O_i \cap A_i \neq \emptyset$ である. 故に $O \cap (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) \supset (O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n) \cap (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = (O_1 \cap A_1) \times (O_2 \cap A_2) \times \cdots \times (O_n \cap A_n) \neq \emptyset$ だから $O \cap (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) \neq \emptyset$ であり $p \in \overline{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n}$ が得られる. 従って $\overline{A_1} \times \overline{A_2} \times \cdots \times \overline{A_n}$ は $\overline{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n}$ に含まれるため, $\overline{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n} = \overline{A_1} \times \overline{A_2} \times \cdots \times \overline{A_n}$ である. □

12　位相空間の連結性

例題 12.1　$\mathcal{O}(\mathcal{B})$ を例題 10.2 で定義した $\boldsymbol{R}$ の位相とする.

(1) 位相空間 $(\boldsymbol{R}, \mathcal{O}(\mathcal{B}))$ の空でない部分空間 X が連結ならば, X は一点からなる集合であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{R}$ の通常の距離関数 $d(x,y) = |x-y|$ から定まる位相を $\mathcal{O}_d$ とすれば, 位相空間 $(\boldsymbol{R}, \mathcal{O}_d)$ から $(\boldsymbol{R}, \mathcal{O}(\mathcal{B}))$ への連続写像は定数値関数に限ることを示せ.

解答例　(1) X が 2 点 p, q $(p<q)$ を含めば連結でないことを示せばよい. $a = \dfrac{p+q}{2}$ とおけば $p \in (-\infty, a) \cap X$, $q \in [a, \infty) \cap X$ だから $(-\infty, a) \cap X \neq \emptyset$, $[a,\infty) \cap X \neq \emptyset$ である. 例題 10.2 の (3) で示したように $(-\infty, a), [a, \infty) \in \mathcal{O}(\mathcal{B})$ であり, $X \subset \boldsymbol{R} = (-\infty, a) \cup [a, \infty)$ かつ $X \cap (-\infty, a) \cap [a, \infty) = \emptyset$ である. 故に幾何学 I 命題 10.4 により X は連結ではない.

(2) f を位相空間 $(\boldsymbol{R}, \mathcal{O}_d)$ から $(\boldsymbol{R}, \mathcal{O}(\mathcal{B}))$ への連続写像とすれば, 幾何学 I 定理 10.13 より $(\boldsymbol{R}, \mathcal{O}_d)$ は連結な位相空間だから, 幾何学 I 命題 10.6 により f の像 $f(\boldsymbol{R})$ は $(\boldsymbol{R}, \mathcal{O}(\mathcal{B}))$ の空でない連結な部分空間である. 故に (1) の結果から $f(\boldsymbol{R})$ は一点からなる集合だから f は定数値関数である. □

例題 12.2　$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする. 任意の $x, y \in X$ に対し, X の連結な部分空間 C で $x, y \in C$ となるものが存在するとき, X は連結であることを示せ.

解答例　X が連結でないならば, X の空でない開集合 U, V で $X = U \cup V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在する. U, V は空でないので $x \in U$ と $y \in V$ を選ぶことができて, 仮定から X の連結な部分空間 C で $x, y \in C$ となるものが存在する. このとき $x \in C \cap U$ かつ $y \in C \cap V$ だから $C \cap U \neq \emptyset$ かつ $C \cap V \neq \emptyset$ である. 一方, $C \subset X = U \cup V$ かつ $C \cap U \cap V = C \cap \emptyset = \emptyset$ だから C の連結性から $C \cap U = \emptyset$ または $C \cap V = \emptyset$ となって, 上のことと矛盾する. 故に X は連結である. □

例題 12.3　$(X, \mathcal{O})$ を位相空間, A, B を X の閉集合とする. $A \cup B$ と $A \cap B$ がともに連結ならば, A と B はともに連結であることを示せ.

解答例　A が連結でないならば $A = F \cup G$, $F \cap G = \emptyset$ を満たす A の空でない閉集合 F, G が存在する. A は X の閉集合だから F, G は X の閉集合で, $A \cap B = (F \cup G) \cap B = (F \cap B) \cup (G \cap B)$, $(F \cap B) \cap (G \cap B) = F \cap G \cap B = \emptyset$ が成り立つ. $F \cap B$ と $G \cap B$ はともに X の閉集合だから, 上式と $A \cap B$ の連結性から $F \cap B = \emptyset$ または $G \cap B = \emptyset$ である. $F \cap B = \emptyset$ と仮定すれば $F \cap (G \cup B) = (F \cap G) \cup (F \cap B) = \emptyset$ である. さらに $A \cup B = (F \cup G) \cup B = F \cup (G \cup B)$ であり, $F, G \neq \emptyset$ より F と $G \cup B$ は X の空でない閉集合だから, $A \cup B$ の連結性と矛盾する. 同様に $G \cap B = \emptyset$ と仮定しても矛盾が生じるため, A は連結である. B が連結であることも同様に示される. □

例題 12.4　位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分空間 Y, Z が 連結で $Y \cap \overline{Z} \neq \emptyset$ ならば $Y \cup Z$ も連結であることを示せ.

解答例　X の開集合 U, V が $Y \cup Z \subset U \cup V$, $(Y \cup Z) \cap U \cap V = \emptyset$ を満たすとすれば, $Y, Z \subset Y \cup Z$ より $Y \subset U \cup V$, $Y \cap U \cap V = \emptyset$, $Z \subset U \cup V$, $Z \cap U \cap V = \emptyset$ である. Y, Z の連結性から幾何学 I 命題 10.4 より「$Y \cap U = \emptyset$ または $Y \cap V = \emptyset$」かつ「$Z \cap U = \emptyset$ または $Z \cap V = \emptyset$」が成り立つ. $Y \cap U = \emptyset$ かつ $Z \cap V = \emptyset$ と仮定すれば $Y \subset U \cup V$ より $Y \subset V$ であり, Z は閉集合 $X - V$ に含まれるため, 幾何学 I 命題 6.14 より $\overline{Z} \subset X - V$ が成り立つ. 故に $Y \cap \overline{Z} \subset V \cap (X - V) = \emptyset$ となって, 仮定 $Y \cap \overline{Z} \neq \emptyset$ と矛盾する. 同様に $Y \cap V = \emptyset$ かつ $Z \cap U = \emptyset$ であると仮定しても矛盾が生じるため, $Y \cap U = Z \cap U = \emptyset$ または $Y \cap V = Z \cap V = \emptyset$ が成り立つ. 前者が成り立てば $(Y \cup Z) \cap U = (Y \cap U) \cup (Z \cap U) = \emptyset$ であり, 後者が成り立てば $(Y \cup Z) \cap V = (Y \cap V) \cup (Z \cap V) = \emptyset$ となるため, 幾何学 I 命題 10.4 より $Y \cup Z$ は連結である. □

例題 12.5　$(Y_i)_{i\in I}$ は位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の空でない連結な部分空間の族で，任意の $i,j\in I$ に対して $Y_i\cap Y_j\neq\emptyset$ ならば $\bigcup_{i\in I} Y_i$ は連結であることを示せ．

解答例　X の開集合 U, V が $\bigcup_{i\in I} Y_i\subset U\cup V$, $\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right)\cap U\cap V=\emptyset$ を満たすとする．二つ目の等式の左辺は $\bigcup_{i\in I}(Y_i\cap U\cap V)$ に等しいため，すべての $i\in I$ に対して $Y_i\cap U\cap V=\emptyset$ であり，$Y_i\subset\bigcup_{i\in I} Y_i$ だから，一つ目の関係式から $Y_i\subset U\cup V$ である．各 Y_i は連結だから $Y_i\cap U=\emptyset$ または $Y_i\cap V=\emptyset$ である．もし，すべての $i\in I$ に対して $Y_i\cap U=\emptyset$ ならば $\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right)\cap U=\bigcup_{i\in I}(Y_i\cap U)=\emptyset$ が成り立つ．$Y_j\cap U\neq\emptyset$ を満たす $j\in I$ が存在する場合は，$Y_j\cap V=\emptyset$ だから $Y_j\subset X-V$ である．仮定から任意の $i\in I$ に対して $p\in Y_i\cap Y_j$ となる p があるため，$p\in Y_i\cap(X-V)$ であり，一方 $Y_i\subset U\cup V$ だから $p\in Y_i\cap U$ である．従って任意の $i\in I$ に対して $Y_i\cap U\neq\emptyset$ が成り立つため $Y_i\cap V=\emptyset$ であり，$\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right)\cap V=\emptyset$ が得られる．故に幾何学 I 命題 10.4 により $\bigcup_{i\in I} Y_i$ は連結である．□

例題 12.4 と例題 12.5 を用いれば例題 12.5 の主張は以下のように一般化される．

例題 12.6　$(Y_i)_{i\in I}$ が位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の空でない連結な部分空間の族で，次の条件が満たされるとき $\bigcup_{i\in I} Y_i$ は連結であることを示せ．

任意の $i,j\in I$ に対して $i_2,i_3,\dots,i_{n-1}\in I$ で，$i_1=i$, $i_n=j$ とおけば $s=2,3,\dots,n$ に対し $Y_{i_{s-1}}\cap Y_{i_s}\neq\emptyset$ を満たすものが存在する．

解答例　$i_1\in I$ を一つ選んでおき，各 $j\in I$ に対して $i_n=j$ とおけば 仮定から $i_2,\dots,i_{n-1}\in I$ で，$s=2,3,\dots,n$ に対し $Y_{i_{s-1}}\cap Y_{i_s}\neq\emptyset$ を満たすものある．$Z_j=\bigcup_{s=1}^{n} Y_{i_s}$ とおけば，例題 12.4 と n による帰納法で Z_j は連結であることが示される．$Y_{i_1}\subset\bigcap_{i\in I} Z_i$ だから $\bigcap_{i\in I} Z_i$ は空でないため，例題 12.5 から $\bigcup_{i\in I} Z_i$ は連結である．各 $j\in I$ に対し $Y_j\subset Z_j\subset\bigcup_{i\in I} Z_i$, $Z_j\subset\bigcup_{i\in I} Y_i$ だから $\bigcup_{i\in I} Y_i\subset\bigcup_{i\in I} Z_i$ と $\bigcup_{i\in I} Z_i\subset\bigcup_{i\in I} Y_i$ が成り立つため $\bigcup_{i\in I} Z_i=\bigcup_{i\in I} Y_i$ である．□

例題 12.7　$(X,\mathcal{O})$ を位相空間とする．

(1) 任意の $x\in X$ に対して x を含む連結な部分空間 C_x で条件「D が x を含む連結な部分空間ならば $D\subset C_x$」を満たすものが存在することを示せ．さらに C_x は X の閉集合であり，$x\in X$ に対して一通りに定まることを示せ．

(2) $x,y\in X$ に対して $C_x\neq C_y$ ならば $C_x\cap C_y=\emptyset$ であることを示せ．

解答例　(1) x を含む連結な部分空間全体の集合を Γ とすれば $x\in\bigcap_{C\in\Gamma} C$ だから例題 12.5 から $\bigcup_{C\in\Gamma} C$ は連結である．D が x を含む連結な部分空間ならば $D\in\Gamma$ だから $D\subset\bigcup_{C\in\Gamma} C$ である．従って $C_x=\bigcup_{C\in\Gamma} C$ とおけばよい．幾何学 I 命題 10.7 から $\overline{C_x}$ は連結な部分空間で，x を含むため $C_x\subset\overline{C_x}\subset C_x$ が成り立つ．故に $\overline{C_x}=C_x$ だから C_x は X の閉集合である．C'_x が条件「D が x を含む連結な部分空間ならば $D\subset C'_x$」を満たす x を含む連結な部分空間ならば，$C'_x\subset C_x$ と $C_x\subset C'_x$ の両方が成り立つため，$C'_x=C_x$ である．従って x を含む連結な部分空間 C_x で条件「D が x を含む連結な部分空間ならば $D\subset C_x$」を満たすものは x に対して一通りに定まる．

(2) $C_x\cap C_y\neq\emptyset$ と仮定すれば $z\in C_x\cap C_y$ がある．C_x, C_y は z を含む連結な部分空間だから $C_x\subset C_z$ かつ $C_y\subset C_z$ が成り立つ．$x\in C_x$, $y\in C_y$ だから，上式から C_z は x と y を含む連結な部分空間である．従って $C_z\subset C_x$ かつ $C_z\subset C_y$ も成り立つため $C_x=C_y=C_z$ である．故に $C_x\neq C_y$ ならば $C_x\cap C_y=\emptyset$ である．□

注意 12.8　例題 12.7 の C_x を x を含む $(X,\mathcal{O})$ の連結成分という．例題 12.7 の (2) より X は互いに交わらない C_x の形の閉集合の合併集合である．

13　弧状連結性・中間値の定理

$\boldsymbol{R}^2$ の部分空間 Y を $Y = ([0,1]\times\{0\})\cup(\{0\}\times[0,1])\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigl(\{\frac{1}{n}\}\times[0,1]\bigr)$ によって定める.

例題 13.1　連続写像 $\omega : [0,1]\to Y$ が $\omega(0)\notin\{0\}\times[0,1]$ かつ $\omega(1)=(0,1)$ を満たすならば, $\omega(a)=(0,0)$ を満たす $0<a<1$ が存在することを示せ.

解答例　$\{0\}\times[0,1]$ は $(0,1)$ を含む Y の閉集合だから, $\omega^{-1}(\{0\}\times[0,1])$ は 1 を含む $[0,1]$ の閉集合である. 従って $\omega^{-1}(\{0\}\times[0,1])$ の最小値が存在して, それを a とする. ここで, $\omega(0)\notin\{0\}\times[0,1]$ だから, $0<a\leqq 1$ であることに注意する. $\omega(a)=(0,b)$ とおくとき, $b\neq 0$ であると仮定すれば, ω の連続性より, $0<\delta\leqq a$ で, 条件「$|t-a|<\delta$ ならば $\|\omega(t)-\omega(a)\|<\dfrac{b}{2}$」を満たすものが存在する. $\omega(t)=(\omega_1(t),\omega_2(t))$ によって関数 $\omega_1,\omega_2:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ を定めれば, ω_1, ω_2 はともに連続関数であり, $|\omega_i(t)-\omega_i(a)|\leqq\|\omega(t)-\omega(a)\|$ $(i=1,2)$ だから, $a-\delta<t<a$ ならば $|\omega_1(t)|<\dfrac{b}{2}$ かつ $|\omega_2(t)-b|<\dfrac{b}{2}$ が成り立つ. 後者の不等式から $a-\delta<t<a$ ならば $\omega_2(t)>\dfrac{b}{2}>0$ が成り立ち, a の最小性から $a-\delta<t<a$ ならば $(\omega_1(t),\omega_2(t))=\omega(t)\in Y-(\{0\}\times[0,1])$ だから $a-\delta<t<a$ ならば $\omega_1(t)\in\bigl\{\frac{1}{n}\bigm| n=1,2,\dots\bigr\}$ である. ω_1 は連続関数だから, もし $\omega_1(c)=\dfrac{1}{l}$, $\omega_1(d)=\dfrac{1}{m}$ を満たす $c,d\in(a-\delta,a)$ $(c<d)$ と相異なる自然数 l, m が存在すれば中間値の定理により ω_1 は区間 (c,d) において $\dfrac{1}{l}$ と $\dfrac{1}{m}$ の間の全ての実数を値にとるため, 上のことと矛盾する. 故に自然数 k で条件「$a-\delta<t<a$ ならば $\omega_1(t)=\dfrac{1}{k}$」を満たすものがある. 一方, ω_1 の連続性から $\displaystyle\lim_{t\to a-0}\omega_1(t)=\omega_1(a)=0$ であるが, これは上と矛盾するため $\omega(a)=(0,0)$ である.　□

例題 13.2　$Y-\{(0,0)\}$ は連結であるが弧状連結ではないことを示せ.

解答例　$Z=Y-(\{0\}\times[0,1])$ とおけば $Z=((0,1]\times\{0\})\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigl(\{\frac{1}{n}\}\times[0,1]\bigr)$ である. $(0,1]\times\{0\}$ と各自然数 n に対して $\{\frac{1}{n}\}\times[0,1]$ は連結であり, $((0,1]\times\{0\})\cap\bigl(\{\frac{1}{n}\}\times[0,1]\bigr)=\bigl\{\bigl(\frac{1}{n},0\bigr)\bigr\}\neq\emptyset$ だから, 例題 12.6 によって Z は連結である. 任意の $(0,t)\in\{0\}\times[0,1]$ は $a_n=\bigl(\frac{1}{n},t\bigr)$ で与えられる Z の点列 $(a_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ の極限だから幾何学 I 命題 4.19 により $\{0\}\times[0,1]\subset\overline{Z}$ であり, $(\{0\}\times[0,1])\cup Z=Y$ だから $Y\subset\overline{Z}$ である. また, Y は $\boldsymbol{R}^2$ の開集合 $((\boldsymbol{R}-[0,1])\times\boldsymbol{R})\cup(\boldsymbol{R}\times(\boldsymbol{R}-[0,1]))\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigl(\bigl(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\bigr)\times(0,\infty)\bigr)$ の補集合だから Y は閉集合で Z を含むため, 幾何学 I 命題 6.14 により $\overline{Z}\subset Y$ である. 故に $Y=\overline{Z}$ となり, $Z\subset Y-\{(0,0)\}\subset Y=\overline{Z}$ だから幾何学 I 命題 10.7 により $Y-\{(0,0)\}$ は連結である. $Y-\{(0,0)\}$ が弧状連結ならば, 連続写像 $\omega:[0,1]\to Y-\{(0,0)\}$ で, $\omega(0)=(1,1)$ かつ $\omega(1)=(0,1)$ を満たすものが存在するが, これは例題 13.1 の結果と矛盾するため $Y-\{(0,0)\}$ は弧状連結ではない. □

例題 13.3　$(Y_i)_{i\in I}$ が位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の空でない弧状連結な部分空間の族で, 次の条件が満たされるとき $\bigcup_{i\in I}Y_i$ は弧状連結であることを示せ.

> 任意の $i,j\in I$ に対して $i_2,i_3,\dots,i_{n-1}\in I$ で, $i_1=i$, $i_n=j$ とおけば $s=2,3,\dots,n$ に対し $Y_{i_{s-1}}\cap Y_{i_s}\neq\emptyset$ を満たすものが存在する.

解答例　$p,q\in\bigcup_{i\in I}Y_i$ に対し, $p\in Y_i$, $q\in Y_j$ となる $i,j\in I$ をとる. 仮定より $i_2,\dots,i_{n-1}\in I$ で, $i_1=i$, $i_n=j$ とおけば $s=2,3,\dots,n$ に対し $Y_{i_{s-1}}\cap Y_{i_s}\neq\emptyset$ を満たすものが存在するため, $a_s\in Y_{i_{s-1}}\cap Y_{i_s}$ が選べる. $s=1,2,\dots,n$ に対し $a_s,a_{s+1}\in Y_{i_s}$ (ただし $a_1=p$, $a_{n+1}=q$) であり, Y_{i_s} の弧状連結性により, 連続写像 $\omega_s:[0,1]\to Y_{i_s}$ で $\omega_s(0)=a_s$, $\omega_s(1)=a_{s+1}$ となるものがある. 写像 $\bar{\omega}_s:\bigl[\frac{s-1}{n},\frac{s}{n}\bigr]\to Y_{i_s}$ を $\bar{\omega}_s(t)=\omega_s(nt-s+1)$ で定めれば $\bar{\omega}_s$ は連続関数 $t\mapsto nt-s+1$ と連続写像 ω_s の合成写像だから, 幾何学 I 命題 7.7 により $\bar{\omega}_s$ は連続写像である. $s=2,3,\dots,n$ に対して $\bar{\omega}_{s-1}\bigl(\frac{s-1}{n}\bigr)=\omega_{s-1}(1)=a_s=\omega_s(0)=\bar{\omega}_s\bigl(\frac{s-1}{n}\bigr)$ だから, 写像 $\omega:[0,1]\to\bigcup_{i\in I}Y_i$ を $\omega(t)=\bar{\omega}_s(t)$ $\bigl(t\in\bigl[\frac{s-1}{n},\frac{s}{n}\bigr]$, $s=1,2,\dots,n\bigr)$ で定義することができる. $j_s:Y_{i_s}\to\bigcup_{i\in I}Y_i$ を包含写像とする. $s=1,2,\dots,n$ に対して $\bigl[\frac{s-1}{n},\frac{s}{n}\bigr]$ はす

べて $[0,1]$ の閉集合で, $[0,1]=\bigcup_{s=1}^{n}\left[\frac{s-1}{n},\frac{s}{n}\right]$ が成り立ち, ω の定義から $\omega\circ j_s=\bar{\omega}_s$ であり, $\bar{\omega}_s$ は連続写像だから, 例題 11.2 により ω は連続写像である．さらに $\omega(0)=\bar{\omega}_1(0)=\omega_1(0)=p$, $\omega(1)=\bar{\omega}_n(1)=\omega_n(1)=q$ が成り立つため, $\bigcup_{i\in I}Y_i$ は弧状連結である． □

例題 13.4　位相空間 $(X,\mathcal{O})$ に対し, $c\in X$ で次の条件を満たすものがあるとき, $(X,\mathcal{O})$ は弧状連結であることを示せ．

「任意の $x\in X$ に対して, 連続写像 $\omega:[0,1]\to X$ で $\omega(0)=c$, $\omega(1)=x$ を満たすものが存在する.」

解答例　任意の $p,q\in X$ に対し, 仮定から連続写像 $\omega,\chi:[0,1]\to X$ で $\omega(0)=c$, $\omega(1)=p$, $\chi(0)=c$, $\chi(1)=q$ を満たすものが存在する．写像 $\bar{\omega}:\left[0,\frac{1}{2}\right]\to X$, $\bar{\chi}:\left[\frac{1}{2},1\right]\to X$ をそれぞれ $\bar{\omega}(t)=\omega(1-2t)$, $\bar{\chi}(t)=\chi(2t-1)$ で定めると, $\bar{\omega}$ は連続関数 $t\mapsto 1-2t$ と連続写像 ω の合成写像であり, $\bar{\chi}$ は連続関数 $t\mapsto 2t-1$ と連続写像 χ の合成写像だから, 幾何学 I 命題 7.7 により $\bar{\omega}$, $\bar{\chi}$ はともに連続写像である．$\bar{\omega}\left(\frac{1}{2}\right)=\omega(0)=c=\chi(0)=\bar{\chi}\left(\frac{1}{2}\right)$ だから写像 $\rho:[0,1]\to X$ を $\rho(t)=\begin{cases}\bar{\omega}(t) & 0\leqq t\leqq\frac{1}{2}\\ \bar{\chi}(t) & \frac{1}{2}\leqq t\leqq 1\end{cases}$ で定義することができる．$i:\left[0,\frac{1}{2}\right]\to[0,1]$, $j:\left[\frac{1}{2},1\right]\to[0,1]$ を包含写像とする．$\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2},1\right]$ はともに $[0,1]$ の閉集合で, $[0,1]=\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},1\right]$ が成り立ち, ρ の定義から $\rho\circ i=\bar{\omega}$, $\rho\circ j=\bar{\chi}$ であり, これらは連続写像だから, 例題 11.2 により ρ は連続写像である．さらに $\rho(0)=\bar{\omega}(0)=\omega(1)=p$, $\rho(1)=\bar{\chi}(1)=\chi(1)=q$ が成り立つため, $(X,\mathcal{O})$ は弧状連結である． □

複素数を成分とする n 次正方行列全体の集合を $M_n(\boldsymbol{C})$ で表す．$A=(a_{ij}),B=(B_{ij})\in M_n(\boldsymbol{C})$ に対して $(A,B)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{b_{ij}}$ とおけば, (A,B) は $M_n(\boldsymbol{C})$ の内積になる．この内積によって $M_n(\boldsymbol{C})$ を $\boldsymbol{C}$ 上の計量ベクトル空間とみなす．$\|A\|=\sqrt{(A,A)}$ とおけば三角不等式 $\|A+B\|\leqq\|A\|+\|B\|$ が成り立つので $d:M_n(\boldsymbol{C})\times M_n(\boldsymbol{C})\to\boldsymbol{R}$ を $d(A,B)=\|A-B\|$ で定めれば, d は $M_n(\boldsymbol{C})$ の距離関数になる．そこで $M_n(\boldsymbol{C})$ には d には d から定まる位相を与える．$A\in M_n(\boldsymbol{C})$ が条件 $A^*A=E_n$ を満たすとき A を n 次ユニタリー行列と呼んだが, n 次ユニタリー行列全体からなる $M_n(\boldsymbol{C})$ の部分集合を $U(n)$ で表し, $U(n)$ には $M_n(\boldsymbol{C})$ に関する相対位相を与える．

例題 13.5　$U(n)$ は弧状連結であることを示せ．

解答例　任意の $A\in U(n)$ に対して A を対角化するユニタリー行列が存在し, A の固有値はすべて絶対値が 1 である複素数であることから, A を対角化するユニタリー行列を U として, 対角行列 $U^{-1}AU$ の (j,j) 成分を $\cos\theta_j+i\sin\theta_j$ $(0\leqq\theta_j<2\pi)$ とおく．$0\leqq t\leqq 1$ に対して (j,j) 成分が $\cos(t\theta_j)+i\sin(t\theta_j)$ である対角行列を $D(t)$ とすれば, $D(t)$ はユニタリー行列である．また, ユニタリー行列の逆行列やユニタリー行列の積はユニタリー行列だから, $UD(t)U^{-1}$ もユニタリー行列である．そこで写像 $\omega:[0,1]\to U(n)$ を $\omega(t)=UD(t)U^{-1}$ で定めれば, $D(0)$ は n 次単位行列 E_n だから, $\omega(0)=E_n$ であり, $D(1)=U^{-1}AU$ だから $\omega(0)=UD(1)U^{-1}=A$ である．また, $\omega(t)$ の各成分は t の連続関数だから ω は連続写像である．従って例題 13.4 の結果から, $U(n)$ は弧状連結である． □

例題 13.6　$(X,\mathcal{O})$ を位相空間とし, 連続関数 $f:X\to\boldsymbol{R}$ と連続写像 $T:X\to X$ が与えられているとする．X が連結で, 合成写像 $T\circ T$ が X の恒等写像であるとき, $f(T(p))=f(p)$ を満たす X の点 p が存在することを示せ．

解答例　関数 $g:X\to\boldsymbol{R}$ を $g(x)=f(T(x))-f(x)$ で定めれば g は連続関数である．$c\in X$ を 1 つ選び, $g(c)=0$ ならば $p=c$ とおけば $f(T(p))=f(p)$ が成り立つ．$g(c)\neq 0$ の場合, $T\circ T$ が X の恒等写像であることから $g(T(c))=f(T(T(c)))-f(T(c))=f(c)-f(T(c))=-g(c)$ が成り立ち, $g(c)$ と $g(T(c))$ の符号が異なる．X は仮定により連結だから, 中間値の定理から $g(p)=0$ を満たす $p\in X$ が存在する．このとき $f(T(p))=f(p)$ が成り立つ． □

14　コンパクト性と最大値・最小値の定理

例題 14.1　位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分空間 Y, Z がともにコンパクトならば, $Y \cup Z$ もコンパクトであることを示せ.

解答例　X の開集合を要素とする集合 Γ が $Y \cup Z \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O$ を満たすならば, $Y \subset Y \cup Z \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O$, $Z \subset Y \cup Z \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O$ だから, Y と Z のコンパクト性から, $U_1, U_2, \ldots, U_m \in \Gamma$ と $V_1, V_2, \ldots, V_n \in \Gamma$ で $Y \subset U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_m$, $Z \subset V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$ を満たすものがある. このとき $Y \cup Z \subset U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_m \cup V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$ が成り立つため, $Y \cup Z$ もコンパクトである. □

例題 14.2　$(X, \mathcal{O})$ を例題 8.2 で定義した位相空間とする.

(1) $(X, \mathcal{O})$ はコンパクトであることを示せ.

(2) $(X, \mathcal{O})$ は Hausdorff 空間であることを示せ.

解答例　(1) $X = \bigcup_{i \in I} O_i$ を X の任意の開被覆とすると, $\mathcal{O}$ の定義から, 各 $i \in I$ に対して $O_i = W_i \cap X$ を満たす $\boldsymbol{R}^2$ の開集合 W_i が存在する. $(0,1) \in X = \bigcup_{i \in I} O_i$ だから $(0,1) \in O_{i_0}$ を満たす $i_0 \in I$ が存在する. このとき $O_{i_0} = W_{i_0} \cap X$ が成り立ち, $(0,1) \in W_{i_0}$ だから $X - W_{i_0}$ は $\boldsymbol{R}^2$ の有界な集合である. X と $\boldsymbol{R}^2 - W_{i_0}$ はともに $\boldsymbol{R}^2$ の閉集合だから $X - W_{i_0} = X \cap (\boldsymbol{R}^2 - V)$ は $\boldsymbol{R}^2$ の有界閉集合, 従ってコンパクトである. ここで, $X - W_{i_0} \subset X = \bigcup_{i \in I} O_i \subset \bigcup_{i \in I} W_i$ だから有限個の $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ で, $X - W_{i_0} \subset \bigcup_{k=1}^{n} W_{i_k}$ を満たすものが存在する. 従って

$$X \subset (X - W_{i_0}) \cup W_{i_0} \subset \left(\bigcup_{k=1}^{n} W_{i_k} \right) \cup W_{i_0} = \bigcup_{k=0}^{n} W_{i_k}$$

だから, 上の式の各辺と X との共通部分を考えれば $X = X \cap \left(\bigcup_{k=0}^{n} W_{i_k} \right) = \left(\bigcup_{k=0}^{n} (X \cap W_{i_k}) \right) = \bigcup_{k=0}^{n} O_{i_k}$ が得られる. 故に $(X, \mathcal{O})$ はコンパクトである

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in X$ かつ $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$ とする. $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が $(0,1)$ と異なる場合, $\boldsymbol{a} = (a, 0)$, $\boldsymbol{b} = (b, 0)$ とおける. $r = \min\{1, \frac{|a-b|}{2}\}$ とし, $U_1 = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < r\}$, $U_2 = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\| < r\}$ とおけば, U_1, U_2 はそれぞれ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を中心とする $\boldsymbol{R}^2$ の開円板だから開集合であり, $r \leqq 1$ より U_1 と U_2 は $(0,1)$ を含まない. 故に $O_1 = U_1 \cap X$, $O_2 = U_2 \cap X$ とおけば O_1 と O_2 は X の開集合で, $\boldsymbol{a} \in O_1$, $\boldsymbol{b} \in O_2$ である. また $r \leqq \dfrac{|a-b|}{2}$ より $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ だから $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ である.

$\boldsymbol{a} = (0,1)$ の場合, $\boldsymbol{b} \neq (0,1)$ だから, $U = \left\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\| < \frac{1}{2}\right\}$ とおけば, U は $\boldsymbol{b}$ を中心とする $\boldsymbol{R}^2$ の開円板だから開集合であり, U は $(0,1)$ を含まない. また, $V = \left\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\| > \frac{1}{2}\right\}$ とおけば, V は $\boldsymbol{R}^2$ の開集合であり, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の距離は 1 以上だから $\boldsymbol{a} \in V$ である. さらに $\boldsymbol{R}^2 - V = \left\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\| \leqq \frac{1}{2}\right\}$ は有界だから $X - V = X \cap (\boldsymbol{R}^2 - V)$ も有界である. 故に $O_1 = V \cap X$, $O_2 = U \cap X$ とおけば O_1 と O_2 は X の開集合で, $\boldsymbol{a} \in O_1$, $\boldsymbol{b} \in O_2$ であり, $U \cap V = \emptyset$ だから $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ である. 以上から $(X, \mathcal{O})$ は Hausdorff 空間である. □

注意 14.3　$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $: X \to Y$ を全単射である連続写像とする. f が閉写像ならば X の任意の閉集合 F に対して $(f^{-1})^{-1} = f(F)$ が成り立つため f の逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ は幾何学 I 命題 7.6 により連続である. 従って f は同相写像である. 同様に全単射である連続な開写像は同相写像である.

例題 14.4　S^1 を単位円 $\{(x,y) \in (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ とし, $(X, \mathcal{O})$ を例題 8.2 で定義した位相空間とする.

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2} \right) & (x,y) = (t,0) \\ (-1,0) & (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

で定義される写像 $f : X \to S^1$ は同相写像であることを示せ.

解答例 $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とおくと f の定義から $f(t,0)=(\cos\theta,\sin\theta)=(\cos(2\tan^{-1}t),\sin(2\tan^{-1}t))$ であり，t が実数全体を動けば，$2\tan^{-1}t$ は $-\pi$ から π までの間の値をすべてとる狭義単調増加関数だから，f の定義域を x 軸に制限した写像は x 軸から $S^1-\{(-1,0)\}$ への全単射であり，$f(0,1)=(-1,0)$ だから f は全単射である．x 軸を X' で表し，$U'=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|-1<y<1\}$ とおけば U' は $(0,1)$ を含まない $\boldsymbol{R}^2$ の開集合であり，$X'=U'\cap X$ が成り立つため，x 軸は X の開集合である．さらに $\mathcal{O}$ の定義から $(X,\mathcal{O})$ の部分空間として x 軸の位相は $\boldsymbol{R}^2$ の部分空間としての x 軸の位相と一致するため，f の定義より f は x 軸上の各点で連続である．等式 $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\frac{1-t^2}{1+t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{1-t^2}{1+t^2}=-1,\ \lim_{t\to-\infty}\frac{2t}{1+t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t}{1+t^2}=0$ が成り立つため，任意の $\varepsilon>0$ に対して $R>0$ で条件「$|t|>R$ ならば $\left|\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1\right|<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ かつ $\left|\dfrac{2t}{1+t^2}\right|<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$」を満たすものが存在する．$(0,1)$ を含む $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 V を $V=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,x^2+(y-1)^2<1\}\cup\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,x^2+(y-1)^2>R^2+1\}$ で定めれば V は開集合であり，

$$\begin{aligned}X-V&=((\boldsymbol{R}\times\{0\})\cup\{(0,1)\})-(\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,x^2+(y-1)^2<1\}\cup\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,x^2+(y-1)^2>R^2+1\})\\&=(\boldsymbol{R}\times\{0\})-\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,x^2+(y-1)^2>R^2+1\}=[-R,R]\times\{0\}\end{aligned}$$

だから $X-V$ は有界である．さらに $V\cap X=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,|x|>R,\ y=0\}\cup\{(0,1)\}$ だから，$(x,y)\in V\cap X$ ならば

$$\|f(x,y)-f(0,1)\|=\sqrt{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)^2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}<\varepsilon$$

が成り立つため，f は点 $(0,1)$ で連続である．従って f はコンパクト空間 X から Hausdorff 空間 S^1 への連続写像だから幾何学 I 命題 11.16 より閉写像で，全単射だから注意 14.3 より f の逆写像も連続写像である．故に f は同相写像である． □

例題 14.5 $\boldsymbol{R}^2$ の開集合 U で定義された連続関数 f,g は U の各点ですべて変数に関して偏微分可能で，f と g の偏導関数はすべて連続であるとする．さらに $X=\{\boldsymbol{x}\in U\,|\,g(\boldsymbol{x})=0\}$ とおくとき，X はコンパクトで $\boldsymbol{x}\in X$ ならば $\dfrac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{x})\neq 0$ または $\dfrac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{x})\neq 0$ であると仮定する．このとき $\boldsymbol{p}\in X$ で次の条件を満たすものが存在することを示せ．

「$\boldsymbol{v}=(u,v)$ が $\boldsymbol{p}$ における X の接ベクトルならば $u\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p})+v\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p})=0$ である．」

解答例 f の定義域を X に制限した写像 $f_X:X\to\boldsymbol{R}$ を考えれば，f_X は連続写像だから，最大値・最小値の定理から f_X は最大値をもつ．f_X が最大値をとる点を $\boldsymbol{p}=(p,q)$ とすれば，仮定から $\dfrac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{p})\neq 0$ または $\dfrac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{p})\neq 0$ である．$\dfrac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{p})\neq 0$ の場合，陰関数定理より p を含む開区間 I と微分可能な関数 $\varphi:I\to\boldsymbol{R}$ で，$\varphi(p)=q$，各 $x\in I$ に対し $(x,\varphi(x))\in U$ かつ $g(x,\varphi(x))=0$，すなわち $(x,\varphi(x))\in X$ を満たすものがある．$\bar{f}(x)=f(x,\varphi(x))$ で $\bar{f}:I\to\boldsymbol{R}$ を定めれば $(x,\varphi(x))\in X$ より $\bar{f}$ は p で最大値をとるため，$\bar{f}'(p)=0$ である．合成写像の微分法から $\bar{f}'(x)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x)$ であり，陰関数定理から $\varphi'(x)=-\dfrac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x,\varphi(x))}$ だから $\bar{f}'(p)=0$ と $\varphi(p)=q$ より $\dfrac{\partial f}{\partial x}(p,q)-\dfrac{\frac{\partial g}{\partial x}(p,q)\frac{\partial f}{\partial y}(p,q)}{\frac{\partial g}{\partial y}(p,q)}=0$ が得られる．従って $\dfrac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{p})\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p})-\dfrac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{p})\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p})=0$ が成り立つ．$\left(\dfrac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{p}),-\dfrac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{p})\right)$ は零ベクトルではない $\boldsymbol{p}$ における X の接ベクトルだから，$\boldsymbol{v}=(u,v)$ が $\boldsymbol{p}$ に おける X の接ベクトルならば $\boldsymbol{v}=(u,v)=c\left(\dfrac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{p}),-\dfrac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{p})\right)$ を満たす実数 c があるため，$\dfrac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{p})\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p})-\dfrac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{p})\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p})=0$ の両辺を c 倍すれば $u\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p})+v\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p})=0$ が得られる．$\dfrac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{p})\neq 0$ の場合は x と y を入れ替えて，上と同様にして $\boldsymbol{v}=(u,v)$ が $\boldsymbol{p}$ における X の接ベクトルならば $u\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p})+v\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p})=0$ であることが示される． □

15　コンパクト性の応用

例題 15.1　(X,d) を距離空間とする. X の部分集合 A が有界であるためには $\{d(x,y)\,|\,x,y\in A\}$ が上に有界な $\boldsymbol{R}$ の部分集合であることが必要十分であることを示せ.

解答例　A が有界ならば $p\in X$ と $R>0$ で, $A\subset B_d(p\,;R)$ となるものがあるので, $x,y\in A$ ならば $d(x,p),d(y,p)<R$ だから三角不等式から $d(x,y)\leqq d(x,p)+d(p,y)=d(x,p)+d(y,p)<R+R=2R$ が得られるため, $\{d(x,y)|x,y\in A\}$ は $2R$ を上界にもち, 上に有界である. 逆に $\{d(x,y)|x,y\in A\}$ が上に有界で, M をその上界とする. $p\in A$ を選べば, 任意の $x\in A$ に対して $d(x,p)\leqq M<M+1$ だから $A\subset B_d(p\,;M+1)$ が成り立つため A は有界である. □

定義 15.2　(X,d) を距離空間とする. X の有界な部分集合 A に対して $\delta(A)=\sup\{d(x,y)|x,y\in A\}$ とおき, $\delta(A)$ を A の直径という.

例題 15.3　(X,d) を距離空間とし, d から定まる X の位相に関して, X はコンパクトであるとする. X の開集合からなる集合族 $(O_i)_{i\in I}$ が $X=\bigcup\limits_{i\in I}O_i$ を満たすとき, 次の条件を満たす正の実数 ε が存在することを示せ.

「$\delta(A)<\varepsilon$ を満たす X の任意の部分集合 A に対して $A\subset O_i$ となる $i\in I$ が存在する.」

解答例　各 $x\in X$ に対して $x\in O_{i(x)}$ となる $i(x)\in I$ が存在し, さらに $O_{i(x)}$ は開集合だから $r(x)>0$ で $B_d(x\,;r(x))\subset O_{i(x)}$ を満たすものが存在する. このとき $X=\bigcup\limits_{x\in X}B_d\big(x\,;\frac{r(x)}{2}\big)$ であり X がコンパクトであることから $x_1,x_2,\ldots,x_n\in X$ で $X=B_d\big(x_1\,;\frac{r(x_1)}{2}\big)\cup B_d\big(x_2\,;\frac{r(x_2)}{2}\big)\cup\cdots\cup B_d\big(x_n\,;\frac{r(x_n)}{2}\big)$ を満たすものがある. そこで $\varepsilon=\min\big\{\frac{r(x_1)}{2},\frac{r(x_2)}{2},\ldots,\frac{r(x_n)}{2}\big\}$ とおき, X の部分集合 A が $\delta(A)<\varepsilon$ を満たすとする. $p\in A$ と $p\in B_d\big(x_k\,;\frac{r(x_k)}{2}\big)$ となる $k=1,2,\ldots,n$ を選べば, $A\subset B_d(x_k\,;r(x_k))$ である. 実際, $x\in A$ ならば $d(x,p)\leqq\delta(A)<\varepsilon\leqq\dfrac{r(x_k)}{2}$ だから三角不等式から不等式 $d(x,x_k)\leqq d(x,p)+d(p,x_k)<\dfrac{r(x_k)}{2}+\dfrac{r(x_k)}{2}=r(x_k)$ が成り立つ. 従って $x\in B_d(x_k\,;r(x_k))$ だから $A\subset B_d(x_k\,;r(x_k))\subset O_{i(x_k)}$ となり, 主張が成り立つ. □

定義 15.4　(X,d) を距離空間とする. X の部分集合 A と B に対し, $d(A,B)=\inf\{d(x,y)\,|\,x\in A,y\in B\}$ とおく. また $p\in X$ に対して $d(A,p)=d(A,\{p\})$ とおく.

例題 15.5　(X,d) を距離空間とする. X の部分集合 A と B に対し, $d(A,B)=\inf\{d(A,y)\,|\,y\in B\}$ を示せ.

解答例　任意の $x\in A$, $y\in B$ に対して $d(A,B)\leqq d(x,y)$ だから $d(A,B)\leqq\inf\{d(x,y)\,|\,x\in A\}=d(A,y)$ が得られる. この不等式がすべての $y\in A$ に対して成り立つため, $d(A,B)\leqq\inf\{d(A,y)|y\in B\}=d(A,y)$ である. $\inf\{d(A,y)\,|\,y\in B\}\leqq d(A,y)\leqq d(x,y)$ が任意の $x\in A$, $y\in B$ に対して成り立つため, $\inf\{d(A,y)\,|\,y\in B\}\leqq d(A,B)$ である. 以上から $d(A,B)=\inf\{d(A,y)\,|\,y\in B\}$ が成り立つ. □

例題 15.6　(X,d) を距離空間, A を X の閉集合, B を X のコンパクトな部分空間とする. $A\cap B=\emptyset$ ならば $d(A,B)>0$ であることを示せ.

解答例　関数 $d_A:X\to\boldsymbol{R}$ を $d_A(x)=d(A,x)$ で定めれば幾何学 I 命題 12.3 から d_A は連続である. d_A の定義域を B に制限すれば, B はコンパクトだから, 最大値・最小値の定理により d_A は B における最小値をとる. この最小値がもし 0 ならば $d_A(b)=0$ となる $b\in B$ が存在するが,A が閉集合であることと幾何学 I 命題 12.4 から $b\in d_A^{-1}(\{0\})=A$ である. これは $A\cap B=\emptyset$ と矛盾するため, d_A の B における最小値は正である. 一方例題 15.5 から d_A の B における最小値は $d(A,B)$ だから $d(A,B)>0$ である. □

注意 15.7　$A,B\subset\boldsymbol{R}^2$ を $A=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,y=0\}$, $B=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,xy=1\}$ で定めれば A, B は $A\cap B=\emptyset$ を満たす

閉集合である. $x>0$ に対し $(x,0)\in A$, $\left(x,\frac{1}{x}\right)\in B$ かつ $\lim\limits_{x\to\infty} d\left((x,0),\left(x,\frac{1}{x}\right)\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ だから $d(A,B)=0$ となる.

例題 15.8 $(X,\mathcal{O})$ を位相空間とする. X に属さない点 ∞ に対し, 集合 $\{\infty\}$ と X の合併集合 $X\cup\{\infty\}$ を X^* で表わし, X^* の部分集合からなる集合 $\{O\subset X^*|\, O\in\mathcal{O}$ または $X-O$ は X のコンパクトな閉部分集合.$\}$ を $\mathcal{O}^*$ とする.

(1) $\mathcal{O}^*$ は X^* の位相であり, $(X,\mathcal{O})$ は $(X^*,\mathcal{O}^*)$ の部分空間であることを示せ.

(2) 位相空間 $(X^*,\mathcal{O}^*)$ はコンパクトであることを示せ.

(3) 位相空間 $(Y,\mathcal{O}')$ に対し, 写像 $f:X^*\to Y$ が連続であるためには, f の X への制限 $f|_X:X\to Y$ が連続であり, かつ $f(\infty)$ を含まない Y の任意の閉集合 C に対して, $f^{-1}(C)$ が X のコンパクトな閉部分集合になることが必要十分であることを示せ.

解答例 (1) $\emptyset\in\mathcal{O}$ だから $\emptyset\in\mathcal{O}^*$ であり, $X-X^*=\emptyset$ は X のコンパクトな閉部分集合だから $X^*\in\mathcal{O}^*$ である. $O_1,O_2\in\mathcal{O}^*$ とする. $O_1,O_2\in\mathcal{O}$ ならば $O_1\cap O_2\in\mathcal{O}$ だから $O_1\cap O_2\in\mathcal{O}^*$ である. $O_1\in\mathcal{O}$ で $X-O_2$ が X のコンパクトな閉部分集合の場合, $X\cap O_2=X-(X-O_2)\in\mathcal{O}$ であり, $O_1\subset X$ より $O_1\cap O_2=O_1\cap(X\cap O_2)\in\mathcal{O}$ だから $O_1\cap O_2\in\mathcal{O}^*$ である. $X-O_1$ と $X-O_2$ が X のコンパクトな閉部分集合の場合, $X-(O_1\cap O_2)=(X-O_1)\cup(X-O_2)$ だから例題 14.1 から $X-(O_1\cap O_2)$ は X のコンパクトな閉部分集合になるため, この場合も $O_1\cap O_2\in\mathcal{O}^*$ である. 各 $i\in I$ に対して $O_i\in\mathcal{O}^*$ とする. すべての $i\in I$ に対して $O_i\in\mathcal{O}$ ならば $\bigcup\limits_{i\in I}O_i\in\mathcal{O}$ だから $\bigcup\limits_{i\in I}O_i\in\mathcal{O}^*$ である. $X-O_j$ が X のコンパクトな閉部分集合である $j\in I$ がある場合, $X-\bigcup\limits_{i\in I}O_i=\bigcap\limits_{i\in I}(X-O_i)\subset X-O_j$ だから $X-\bigcup\limits_{i\in I}O_i$ はコンパクトな部分空間 $X-O_j$ の閉部分空間である. 故に幾何学 I 命題 11.8 により $X-\bigcup\limits_{i\in I}O_i$ はコンパクトだから $\bigcup\limits_{i\in I}O_i\in\mathcal{O}^*$ である. 以上から $\mathcal{O}^*$ は X^* の位相である. $\mathcal{O}^*$ の定義から $\mathcal{O}\subset\mathcal{O}^*$ であり, $O\in\mathcal{O}^*$ が $O\not\subset X$ を満たせば $X-O$ は X の閉部分集合だから $X\cap O=X-(X-O)\in\mathcal{O}$ である. 故に X の相対位相は $\mathcal{O}$ に一致する.

(2) $X^*=\bigcup\limits_{i\in I}O_i$ を満たす X^* の開集合族 $(O_i)_{i\in I}$ が与えられたとき, $\infty\in O_j$ となる $j\in I$ がある. このとき $X-O_j$ は X のコンパクトな閉部分空間で, X の相対位相が $\mathcal{O}$ に一致することと $X-O_j\subset X^*=\bigcup\limits_{i\in I}O_i$ から, $i_1,i_2,\dots,i_n\in I$ で $X-O_j\subset O_{i_1}\cup O_{i_2}\cup\cdots\cup O_{i_n}$ を満たすものが存在する. 故に $X\subset O_{i_1}\cup O_{i_2}\cup\cdots\cup O_{i_n}\cup O_j$ であり, $\infty\in O_j$ より $X^*=X\cup\{\infty\}=O_{i_1}\cup O_{i_2}\cup\cdots\cup O_{i_n}\cup O_j$ が成り立つため, $(X,\mathcal{O}^*)$ はコンパクトである.

(3) $f:X^*\to Y$ を連続写像とすれば, $(X,\mathcal{O})$ が $(X^*,\mathcal{O}^*)$ の部分空間であることと幾何学 I 命題 9.4 から $f|_X:X\to Y$ も連続写像である. C を $f(\infty)\notin C$ である Y の閉集合とすれば幾何学 I 命題 7.6 より $f^{-1}(C)$ は X^* の閉集合である. $\infty\notin f^{-1}(C)$ だから $f^{-1}(C)\subset X$ であり, $X^*-f^{-1}(C)$ は ∞ を含む X^* の開集合である. 従って $\mathcal{O}^*$ の定義から $X-(X^*-f^{-1}(C))=X\cap f^{-1}(C)=f^{-1}(C)$ は X のコンパクトな閉部分集合である.

逆に $f|_X:X\to Y$ が連続であり, かつ $f(\infty)\notin C$ を満たす Y の任意の閉集合 C に対して, $f^{-1}(C)$ が X のコンパクトな閉部分集合であると仮定して, O を Y の任意の開集合とする. $\infty\notin f^{-1}(O)$ ならば $f^{-1}(O)=(f|_X)^{-1}(O)$ だから $f|_X$ の連続性から $f^{-1}(O)=(f|_X)^{-1}(O)\in\mathcal{O}\subset\mathcal{O}^*$ である. $\infty\in f^{-1}(O)$ の場合, $f(\infty)\in O$ だから $C=Y-O$ とおけば C は $f(\infty)\notin C$ を満たす Y の閉集合である. 従って仮定から $f^{-1}(C)$ は X のコンパクトな閉部分集合であり, $\infty\in f^{-1}(O)$ に注意すれば幾何学 I 補題 7.5 より $f^{-1}(C)=X^*-f^{-1}(O)=X-f^{-1}(O)$ が得られるため $\mathcal{O}^*$ の定義から $f^{-1}(O))\in\mathcal{O}^*$ である. 以上から f は連続写像である. □

注意 15.9 $(X,\mathcal{O})$ が Hausdorff 空間で, X の各点がコンパクトな近傍をもてば, 例題 15.8 で与えた位相空間 $(X^*,\mathcal{O}^*)$ は Hausdorff 空間である. 実際 $x,y\in X$ かつ $x\neq y$ ならば仮定から $x\in U$, $y\in V$, $U\cap V=\emptyset$ を満たす $U,V\in\mathcal{O}\subset\mathcal{O}^*$ が存在する. $x\in X$, $y=\infty$ ならば x のコンパクトな近傍 C をとり, $U=C^i$, $V=X^*-C$ とおく. $x\in U^i\in\mathcal{O}\subset\mathcal{O}^*$ であり, 幾何学 I 命題 11.15 より C は X の閉集合で $X-V=X\cap C=C$ だから $V\in\mathcal{O}^*$ である. さらに $C\subset X$ だから $y=\infty\in X^*-C=V$ であり, $C^i\subset C$ より $U\cap V=\emptyset$ が成り立つ.