幾何学演習 Ⅱ

目次

1　可算基をもつ距離空間

定義 1.1　集合 X に対し, 自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ から X への全単射が存在するとき, X を可算集合という. また, 有限集合または可算集合である集合をたかだか可算な集合という.

例題 1.2　自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ の部分集合はたかだか可算な集合であることを示せ.

解答例　X を $\boldsymbol{N}$ の有限集合でない部分集合とし, 写像 $f : \boldsymbol{N} \to X$ を次のように帰納的に定義する. 自然数全体の集合の空でない部分集合は最小値をもつため, $f(1) = \min X$ と定めれば $f(1) < \min(X - \{f(1)\})$ が成り立つ. X は有限集合ではないため, X の有限部分集合の補集合は空集合ではない. そこで 2 以上の自然数 n に対し, $f(n)$ を $f(n) = \min(X - \{f(1), f(2), \dots, f(n-1)\})$ で定義する. $X_1 = X$ とおき, 2 以上の自然数 n に対して $X_n = X - \{f(1), f(2), \dots, f(n-1)\}$ とおけば $X_{n+1} = X_n - \{\min X_n\}$ だから $f(n+1) = \min X_{n+1} > \min X_n = f(n)$ であり, $f(n) < m < f(n+1)$ を満たす $m \in X$ は存在しないため f は単射で $\{i \in X \,|\, i \leqq f(n)\} = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$ が成り立つ. すなわち $\{i \in X \,|\, i \leqq f(n)\}$ は X の要素を小さいものから順に n 個選んで得られる集合である.

$k \in X$ に対して $\{i \in X \,|\, i \leqq k\}$ の要素の個数を ν_k とすれば, $\{i \in X \,|\, i \leqq k\}$ は X の要素を小さいものから順に ν_k 個選んで得られる集合だから $\{i \in X \,|\, i \leqq f(\nu_k)\} = \{f(1), f(2), \dots, f(\nu_k)\}$ と一致する. さらに $k, f(\nu_k) \in X$ だから k は $\{i \in X \,|\, i \leqq k\}$ の最大値, $f(\nu_k)$ は $\{i \in X \,|\, i \leqq f(\nu_k)\}$ の最大値だから $k = f(\nu_k)$ が成り立つ. 故に f は全射でもあるため, X は可算集合である. 従って $\boldsymbol{N}$ の部分集合はたかだか可算な集合である. □

例題 1.3　X が可算集合で, $f : X \to Y$ が全射ならば, Y はたかだか可算な集合であることを示せ.

解答例　f に全単射 $\boldsymbol{N} \to X$ 合成することによって $X = \boldsymbol{N}$ としてよい. f は全射だから各 $y \in Y$ に対して $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ であり, $y, z \in Y$ かつ $y \neq z$ ならば $f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{z\}) = \emptyset$ である. 故に $f^{-1}(\{y\})$ の最小値を m_y とおけば,「$y, z \in Y$ かつ $y \neq z$ ならば $m_y \neq m_z$」が成り立つため $g : Y \to \boldsymbol{N}$ を $g(y) = m_y$ で定めれば g は単射であり, g は Y から $\boldsymbol{N}$ の部分集合 $g(Y)$ への全単射を与える. 従って例題 1.2 より Y はたかだか可算な集合である. □

例題 1.4　自然数全体の集合の直積集合 $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ も可算な集合であることを示せ.

解答例　$k = 1, 2, \dots$ に対し, $\dfrac{k(k-1)}{2} < n \leqq \dfrac{k(k+1)}{2}$ を満たす自然数 n を $\boldsymbol{R}^2$ の点

$$\left(n - \frac{k(k-1)}{2}, \frac{k(k+1)}{2} - n + 1\right)$$

に対応させることによって写像 $\varphi : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ を定義すれば, φ は全単射である. □

X, Y が可算集合ならば全単射 $f : \boldsymbol{N} \to X$, $g : \boldsymbol{N} \to Y$ が存在する. 写像 $h : \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \to X \times Y$ を $h(m, n) = (f(m), g(n))$ で定義すれば, h の逆写像は $h^{-1}(x, y) = (f^{-1}(x), g^{-1}(y))$ で与えられるため, h は全単射である. 例題 1.4 から全単射 $\varphi : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ が存在し, 全単射の合成写像は全単射だから, 次の命題が成り立つ.

命題 1.5　X, Y が可算集合ならば, 直積集合 $X \times Y$ も可算集合である.

例題 1.6　各 X_n $(n \in \boldsymbol{N})$ がたかだか可算な集合ならば, 合併集合 $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ もたかだか可算な集合であることを示せ.

解答例　X_n が可算な集合ならば, 全単射 $f_n : \boldsymbol{N} \to X_n$ があり, X_n が有限集合ならば, 全射 $f_n : \boldsymbol{N} \to X_n$ がある. そこで写像 $F : \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \to \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ を $F(m, n) = f_n(m)$ で定めれば F は全射だから例題 1.3 と例題 1.4 から $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ はたかだか可算な集合である. □

注意 1.7　(1) Y が有限集合ならば, 全射 $\boldsymbol{N} \to Y$ が存在するので, 例題 1.3 より Y がたかだか可算な集合であるためには全射 $\boldsymbol{N} \to Y$ が存在することが必要十分である.

(2) 整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ は可算集合である. 実際, 写像 $f:\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{Z}$ を $k\in\boldsymbol{N}$ に対して $f(2k-1)=1-k$, $f(2k)=k$ で定めれば f は全単射である.

例題 1.8　有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ は可算集合であることを示せ.

解答例　注意 1.7 の (2) と例題 1.5 によって $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{N}$ は可算集合である. さらに $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{Q}$ への写像 $g:\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{Q}$ を $g(m,n)=\dfrac{m}{n}$ で定めれば, g は全射だから例題 1.3 から $\boldsymbol{Q}$ はたかだか可算な集合であるが, $\boldsymbol{Q}$ は有限集合ではないので $\boldsymbol{Q}$ は可算集合である. □

定義 1.9　$(X,\mathcal{O})$ を位相空間とする.

(1) $\mathcal{O}$ のたかだか可算な集合である基底が存在するとき, $(X,\mathcal{O})$ は可算基をもつという.

(2) X のたかだか可算な部分集合 A で $X=\overline{A}$ を満たすものが存在するとき, $(X,\mathcal{O})$ は可分であるという.

例題 1.10　可算基をもつ位相空間は可分であることを示せ.

解答例　$(X,\mathcal{O})$ を可算基 $\mathcal{B}$ をもつ位相空間とする. 空集合でない各 $U\in\mathcal{B}$ から点 p_U を選び, $A=\{p_U\,|\,U\in\mathcal{B},U\neq\emptyset\}$ とおくと $\mathcal{B}$ はたかだか可算な集合だから A もたかだか可算な集合である. X の空でない任意の開集合 O は $\mathcal{B}$ の要素の合併集合だから $U\subset O$ を満たす空集合でない $U\in\mathcal{B}$ が存在する. $p_U\in U$ だから $p_U\in O$ となるため $p_U\in A\cap O$ が成り立つ. 従って X の空でない任意の開集合 O に対して $A\cap O\neq\emptyset$ だから $X=\overline{A}$ である. □

距離空間 (X,d) に対し, 距離関数 d から定まる X の位相を $\mathcal{O}_d$ で表す.

例題 1.11　(X,d) を距離空間とする. X の部分集合 A が $\overline{A}=X$ を満たすとき, (X,d) の開球からなる集合 $\mathcal{B}=\left\{B_d\left(p;\frac{1}{n}\right)\,|\,p\in A,n\in\boldsymbol{N}\right\}$ は $\mathcal{O}_d$ の基底であることを示せ.

解答例　任意の $O\in\mathcal{O}_d$ と $p\in O$ に対し, $\mathcal{O}_d$ の定義から $r>0$ で $B_d(p;r)\subset O$ を満たすものがある. $\frac{1}{n}<\frac{r}{2}$ を満たす $n\in\boldsymbol{N}$ を選ぶ. $p\in X=\overline{A}$ より $B_d\left(p;\frac{1}{n}\right)\cap A\neq\emptyset$ だから $c\in B_d\left(p;\frac{1}{n}\right)\cap A$ が選べて $B_d\left(c;\frac{1}{n}\right)\in\mathcal{B}$ かつ $p\in B_d\left(c;\frac{1}{n}\right)$ が成り立つ. $x\in B_d\left(c;\frac{1}{n}\right)$ ならば $d(x,c)<\frac{1}{n}<\frac{r}{2}$ だから $d(x,p)\leqq d(x,c)+d(c,p)<\frac{2}{n}<r$ が得られる. 従って $x\in B_d(p;r)$ だから $B_d\left(c;\frac{1}{n}\right)\subset B_d(p;r)$ が成り立つため $B_d(p;r)\subset O$ より $B_d\left(c;\frac{1}{n}\right)\subset O$ である. さらに $p\in B_d\left(c;\frac{1}{n}\right)$ かつ $B_d\left(c;\frac{1}{n}\right)\in\mathcal{B}$ が成り立つため, 幾何学 I 命題 8.5 により $\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}_d$ の基底である. □

例題 1.12　(X,d) を距離空間とする. 位相空間 $(X,\mathcal{O}_d)$ が可分ならば $\mathcal{O}_d$ は可算基をもつことを示せ.

解答例　X のたかだか可算な部分集合 A で $\overline{A}=X$ を満たすものがある. 全射 $f:\boldsymbol{N}\to A$ があるので例題 1.11 の基底 $\mathcal{B}=\left\{B_d\left(p;\frac{1}{n}\right)\,|\,p\in A,n\in\boldsymbol{N}\right\}$ を考えて写像 $g:\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}\to\mathcal{B}$ を $g(m,n)=B_d\left(f(m);\frac{1}{n}\right)$ で定義すれば, g は全射である. 従って例題 1.3 と例題 1.4 から $\mathcal{B}$ はたかだか可算な $\mathcal{O}_d$ の基底である. □

例題 1.13　$\boldsymbol{Q}^n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n\,|\,x_1,x_2,\dots,x_n\in\boldsymbol{Q}\}$ とおく. $\boldsymbol{Q}^n$ は可算集合で $\overline{\boldsymbol{Q}^n}=\boldsymbol{R}^n$ であることを示せ.

解答例　命題 1.5 から数学的帰納法で可算集合の有限個の直積は可算集合であることが示されるため, $\boldsymbol{Q}^n$ は可算集合である. 任意の $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\dots,p_n)\in\boldsymbol{R}^n$ と $r>0$ に対し, 開区間 $\left(p_i-\frac{r}{\sqrt{n}},p_i+\frac{r}{\sqrt{n}}\right)$ に含まれる有理数 q_i を各 $i=1,2,\dots,n$ に対して 1 つずつ選んで $\boldsymbol{q}=(q_1,q_2,\dots,q_n)$ とおけば $\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{Q}^n$ であり, $i=1,2,\dots,n$ に対して $|q_i-p_i|<\frac{r}{\sqrt{n}}$ が成り立つため, $\|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}\|<r$ である. 故に中心が $\boldsymbol{p}$ で半径 r の開球は $\boldsymbol{Q}^n$ の要素を含むため $\overline{\boldsymbol{Q}^n}=\boldsymbol{R}^n$ である. □

例題 1.12 と例題 1.13 から次の結果が得られる.

命題 1.14　n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の通常の距離関数から定まる $\boldsymbol{R}^n$ の位相は可算基をもつ.

2　全有界な距離空間

定義 2.1　(X,d) を距離空間とする.

(1) X の有界な部分集合 A に対して $\delta(A)=\sup\{d(x,y)|x,y\in A\}$ とおき, $\delta(A)$ を A の直径という.

(2) ε を正の実数とする. X の部分集合族 $(U_i)_{i\in I}$ が $X=\bigcup_{i\in I}U_i$ かつすべての $i\in I$ に対して $\delta(U_i)<\varepsilon$ を満たすとき, $(U_i)_{i\in I}$ を (X,d) の ε-被覆という.

(3) 任意の $\varepsilon>0$ に対して有限個の部分集合からなる (X,d) の ε-被覆が存在するとき (X,d) は全有界であるという.

(4) ε を正の実数とする. 条件「任意の $k,l\in\boldsymbol{N}$ に対して $d(x_k,x_l)<\varepsilon$.」を満たす X の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を (X,d) の ε-列という.

距離空間 (X,d) が与えられたとき, X の部分集合 A, B に対し, $d(A,B)=\inf\{d(x,y)\,|\,x\in A, y\in B\}$ とおく.

例題 2.2　(X,d) を距離空間とする.

(1) A, B が有界な X の部分集合ならば $A\cup B$ も有界で, 不等式 $\delta(A\cup B)\leqq\delta(A)+\delta(B)+d(A,B)$ を示せ.

(2) $U_1,U_2,\dots,U_n$ が有界な X の部分集合ならば次の不等式を示せ.

$$\delta(U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_n)\leqq\sum_{i=1}^{n}\delta(U_i)+\sum_{i=1}^{n-1}d(U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_i,U_{i+1})$$

(3) (X,d) が全有界ならば X は有界, すなわち $\delta(X)=\sup\{d(x,y)\,|\,x,y\in X\}$ は有限であることを示せ.

解答例　(1) $x,y\in A$ ならば $d(x,y)\leqq\delta(A)$ であり, $x,y\in B$ ならば $d(x,y)\leqq\delta(B)$ である. また任意の $\varepsilon>0$ に対して $p\in A$, $q\in B$ で $d(p,q)<d(A,B)+\varepsilon$ を満たすものがあるため, $x\in A$, $y\in B$ の場合, 三角不等式と上の不等式から $d(x,y)\leqq d(x,p)+d(p,q)+d(q,y)<\delta(A)+d(A,B)+\varepsilon+\delta(B)$ が成り立つ. 従って $x,y\in A\cup B$ ならば任意の $\varepsilon>0$ に対して $d(x,y)<\delta(A)+\delta(B)+d(A,B)+\varepsilon$ が成り立つ. もし $d(x,y)>\delta(A)+\delta(B)+d(A,B)$ ならば $\varepsilon=\dfrac{1}{2}(d(x,y)-\delta(A)-\delta(B)-d(A,B))$ とおくと $\varepsilon>0$ であり, 上の不等式から $2\varepsilon\leqq\varepsilon$ が得られ, $\varepsilon\leqq 0$ となって矛盾が生じるため $d(x,y)\leqq\delta(A)+\delta(B)+d(A,B)$ である. 故に $\{d(x,y)\,|\,x,y\in A\cup B\}$ は上に有界な $\boldsymbol{R}$ の部分集合だから幾何学演習 I 例題 15.1 から $A\cup B$ は有界であり, 上の不等式と $\delta(A\cup B)$ の定義から $\delta(A\cup B)\leqq\delta(A)+\delta(B)+d(A,B)$ が得られる.

(2) $n=2$ の場合は (1) から $\delta(U_1\cup U_2)\leqq\delta(U_1)+\delta(U_2)+d(U_1,U_2)$ が成り立つ. $n=k$ のとき, 主張が成り立つと仮定して $U_1,U_2,\dots,U_{k+1}$ が有界な X の部分集合ならば (1) と帰納法の仮定から次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\delta(U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_{k+1})&\leqq\delta(U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_k)+\delta(U_{k+1})+d(U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_k,U_{k+1})\\&\leqq\sum_{i=1}^{k}\delta(U_i)+\sum_{i=1}^{k-1}d(U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_i,U_{i+1})+\delta(U_{k+1})+d(U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_k,U_{k+1})\\&=\sum_{i=1}^{k+1}\delta(U_i)+\sum_{i=1}^{k}d(U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_i,U_{i+1})\end{aligned}$$

従って $n=k+1$ のときも主張が成り立つ.

(3) 仮定から有限個の部分集合からなる (X,d) の 1-被覆 $(U_i)_{i=1,2,\dots,n}$ が存在する. $X=U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_n$ より (2) の不等式から $\delta(X)=\delta(U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_n)\leqq\sum_{i=1}^{n}\delta(U_i)+\sum_{i=1}^{n-1}d(U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_i,U_{i+1})$ だから X は有界である.□

例題 2.3　(X,d) を全有界な距離空間, ε を正の実数とする. X の任意の点列は ε-列である部分列をもつことを示せ.

解答例　仮定から有限個の部分集合からなる (X,d) の ε-被覆 $(U_i)_{i=1,2,\dots,n}$ が存在する. $X=U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_n$ だから, X の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ に対して $S_i=\{k\in\boldsymbol{N}\,|\,x_k\in U_i\}$ とおけば $\boldsymbol{N}=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n$ が成り立つ. 従って $S_1,S_2,\dots,S_n$ の中に無限集合であるものが存在する. S_m が無限集合であるとして $S_m=\{k_1,k_2,\dots,k_i,\dots\}$

$(k_1 < k_2 < \cdots < k_i < k_{i+1} < \cdots)$ とすれば, 任意の $i, j \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_{k_i}, x_{k_j} \in U_m$ だから $d(x_{k_i}, x_{k_j}) \leqq \delta(U_m) < \varepsilon$ が成り立つため $(x_{k_i})_{i\in\boldsymbol{N}}$ は (X,d) の ε-列である. □

例題 2.4 距離空間 (X,d) が全有界ならば X の任意の点列は Cauchy 列を部分列に含むことを示せ.

解答例 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を X の任意の点列として $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ の部分列 $(x_i^{(n)})_{i\in\boldsymbol{N}}$ を次のように帰納的に定める. 例題 2.3 から, $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ の部分列で 1-列であるものが存在するため, $(x_i^{(1)})_{i\in\boldsymbol{N}}$ を 1-列である $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ の部分列とする. $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ の部分列で $\frac{1}{n}$-列である $(x_i^{(n)})_{i\in\boldsymbol{N}}$ が定まったとすれば, 例題 2.3 から, $(x_i^{(n)})_{i\in\boldsymbol{N}}$ の部分列で $\frac{1}{n+1}$-列であるものが存在するため, $(x_i^{(n+1)})_{i\in\boldsymbol{N}}$ を $\frac{1}{n+1}$-列である $(x_i^{(n)})_{i\in\boldsymbol{N}}$ の部分列とする. このとき各 $n, i \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_{k(n)_i} = x_i^{(n)}$ を満たす自然数 $k(n)_i$ が定まり, $k(n)_1 < k(n)_2 < \cdots < k(n)_i < k(n)_{i+1} < \cdots$ かつ $\{k(n+1)_1, k(n+1)_2, \dots, k(n+1)_i, \dots\}$ は $\{k(n)_1, k(n)_2, \dots, k(n)_i, \dots\}$ に含まれる. 従って $k(n)_i \leqq k(n+1)_i < k(n+1)_{i+1}$ だから, とくに $k(n)_n < k(n+1)_{n+1}$ となるため, $(x_{k(n)_n})_{n\in\boldsymbol{N}}$ は $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ の部分列である. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N > \frac{1}{\varepsilon}$ を満たす自然数 N を選べば $\frac{1}{N} < \varepsilon$ より $(x_{k(N)_i})_{i\in\boldsymbol{N}} = (x_i^{(N)})_{i\in\boldsymbol{N}}$ は ε-列である. $n \geqq N$ ならば $(x_{k(n)_i})_{i\in\boldsymbol{N}}$ は $(x_{k(N)_i})_{i\in\boldsymbol{N}}$ の部分列だから $(x_{k(n)_n})_{n\geqq N}$ は $(x_{k(N)_i})_{i\in\boldsymbol{N}}$ の部分列である. 故に $m, n \geqq N$ ならば $d(x_{k(m)_m}, x_{k(n)_n}) < \varepsilon$ だから $(x_{k(n)_n})_{n\in\boldsymbol{N}}$ は Cauchy 列である $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ の部分列である. □

例題 2.5 距離空間 (X,d) における任意の点列が Cauchy 列を部分列に含めば (X,d) は全有界であることを示せ.

解答例 (X,d) が全有界でないと仮定して Cauchy 列を部分列に含まない点列が存在することを示す. 仮定から $\varepsilon > 0$ が存在して, 有限個の部分集合からなる (X,d) の ε-被覆は存在しない. 正の実数 r と任意の $p \in X$ に対し, $x, y \in B_d(p\,;r)$ ならば $d(x,y) \leqq d(x,p) + d(p,y) \leqq 2r$ だから $\delta(B_d(p\,;r)) \leqq 2r$ であることに注意すれば, $r < \frac{\varepsilon}{2}$ ならば X の任意の有限部分集合 S に対して $X \neq \bigcup_{p\in S} B_d(p\,;r)$ が成り立つ.

$x_1 \in X$ を一つ選び, $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ が $x_i \in X - \bigcup_{j=1}^{i-1} B_d(x_j\,;r)$ $(i = 2, 3, \dots, k)$ を満たすように選べたとすれば, $X \neq \bigcup_{j=1}^{k} B_d(x_j\,;r)$ だから $x_{k+1} \in X - \bigcup_{j=1}^{k} B_d(x_j\,;r)$ が選べる. ここで $k < l$ ならば $x_l \in X - \bigcup_{j=1}^{l-1} B_d(x_j\,;r)$ より $x_l \notin B_d(x_k\,;r)$ となるため $d(x_k, x_l) \geqq r$ が成り立つ. 従って点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は Cauchy 列を部分列に含まない. □

例題 2.4, 2.5 から直ちに次の定理が得られる.

定理 2.6 距離空間が全有界であるためには, その任意の点列が Cauchy 列を部分列に含むことが必要十分である.

3 点列コンパクト

例題 3.1 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ が可算基をもつとき, $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ を満たす X の開集合族 $(U_i)_{i\in I}$ に対して, I のたかだか可算な部分集合 J で $X = \bigcup_{i\in J} U_i$ を満たすものが存在することを示せ.

解答例 $\mathcal{B}$ をたかだか可算な $\mathcal{O}$ の基底とする. 各 $O \in \mathcal{B}$ に対し $J_O = \{i \in I \,|\, O \subset U_i\}$ とおき, $\mathcal{B}' = \{O \in \mathcal{B} \,|\, J_O \neq \emptyset\}$ とおけば, $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ だから $\mathcal{B}'$ もたかだか可算な集合である. 各 $O \in \mathcal{B}'$ に対して $j_O \in J_O$ を一つずつ選んで $J = \{j_O \,|\, O \in \mathcal{B}'\}$ とおけば J は I のたかだか可算な部分集合である. $x \in X$ ならば $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ より $x \in U_i$ となる $i \in I$ が存在する. U_i は $\mathcal{B}$ の要素の合併集合だから $x \in O \subset U_i$ を満たす $O \in \mathcal{B}$ がある. このとき $i \in J_O$ だから $J_O \neq \emptyset$ となるため $O \in \mathcal{B}'$ である. 一方 $j_O \in J_O$ だから $O \subset U_{j_O}$ が成り立つため, $x \in U_{j_O} \subset \bigcup_{i\in J} U_i$ が得られる. 従って $X = \bigcup_{i\in J} U_i$ である. □

例題 3.2 距離空間 (X,d) が全有界ならば d から定まる X の位相は可算基をもつことを示せ.

解答例 例題 1.11 により d から定まる X の位相に関して X は可分であることを示せばよい．仮定から任意の自然数 n に対して有限個の X の部分集合からなる (X,d) の $\frac{1}{n}$-被覆 $(U_{n,i})_{i=1,2,\ldots,l_n}$ が存在する．各自然数 n と $i=1,2,\ldots,l_n$ に対して $a_{n,i}\in U_{n,i}$ を一つずつ選んで $A_n=\{a_{n,1},a_{n,2},\ldots,a_{n,l_n}\}$ とおき，$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ とおくと，例題 1.5 より A はたかだか可算な集合である．任意の $x\in X$ と $\varepsilon>0$ に対して $n\geqq\frac{1}{\varepsilon}$ である自然数 n をとれば $\frac{1}{n}\leqq\varepsilon$ であり，$x\in U_{n,i}$ となる $i=1,2,\ldots,l_n$ が存在するため，不等式 $d(x,a_{n,i})\leqq\delta(U_{n,i})<\frac{1}{n}\leqq\varepsilon$ が成り立つ．従って $a_{n,i}\in B_d(x;\varepsilon)$ だから $x\in\overline{A}$ が成り立つため，$X=\overline{A}$ である．故に d から定まる X の位相に関して X は可分である． □

定義 3.3 距離空間 (X,d) の任意の点列が収束する部分列をもつとき，(X,d) は点列コンパクトであるという．

例題 3.4 距離空間 (X,d) が点列コンパクトならば (X,d) は完備かつ全有界であることを示せ．

解答例 (X,d) が点列コンパクトならば，X の任意の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ に対してその部分列 $(x_{k_i})_{k_i\in\boldsymbol{N}}$ で収束するものがある．$(x_{k_i})_{k_i\in\boldsymbol{N}}$ は収束するため幾何学 II 命題 1.7 によって Cauchy 列だから例題 2.5 によって (X,d) は全有界である．また，$(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が (X,d) の Cauchy 列ならば仮定から $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は収束する部分列をもつため，幾何学 II 補題 1.9 から $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は収束する．故に (X,d) は完備である． □

例題 3.5 距離空間 (X,d) が完備かつ全有界なら (X,d) が点列コンパクトであることを示せ．

解答例 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を X の任意の点列とする．例題 2.4 から $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は Cauchy 列を部分列に含み，(X,d) の Cauchy 列は収束するため，$(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は収束する部分列をもつ．故に (X,d) は点列コンパクトである． □

例題 3.6 距離空間 (X,d) が点列コンパクトならば距離関数 d から定まる X の位相に関して X はコンパクトであることを示せ．

解答例 仮定と例題 3.4 から (X,d) は全有界だから例題 3.2 によって d から定まる X の位相は可算基をもつ．従って例題 3.1 から $X=\bigcup_{i\in I}U_i$ を満たす X の開集合族 $(U_i)_{i\in I}$ に対して，I のたかだか可算な部分集合 J で $X=\bigcup_{i\in J}U_i$ を満たすものが存在する．J が有限集合でない場合を考えればいいので $J=\{i_1,i_2,\ldots,i_n,\ldots\}$ とする．$A_n=X-(U_{i_1}\cup U_{i_2}\cup\cdots\cup U_{i_n})$ とおき，すべての自然数 n に対して $A_n\neq\emptyset$ と仮定する．このとき各 $n\in\boldsymbol{N}$ に対して $a_n\in A_n$ を一つずつ選んで X の点列 $(a_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ が得られる．(X,d) は点列コンパクトだから $(a_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ の収束する部分列 $(a_{n_k})_{k\in\boldsymbol{N}}$ が存在する．$\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=p$ とおけば $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}U_{i_n}$ より $p\in U_{i_m}$ を満たす自然数 m が存在する．U_{i_m} は開集合だから自然数 N で条件「$k\geqq N$ ならば $a_{n_k}\in U_{i_m}$」を満たすものがある．ここで $(n_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$ を満たす自然数の列だから $n_k\geqq k$ が任意の $k\in\boldsymbol{N}$ に対して成り立つため，m と N の大きい方を l とすれば $a_{n_l}\in U_{i_m}\cap A_{n_l}$ かつ $n_l\geqq l\geqq m$ が成り立つ．後者の不等式から $A_{n_l}\subset A_m$ だから

$$U_{i_m}\cap A_{n_l}\subset U_{i_m}\cap A_m=U_{i_m}\cap(X-(U_{i_1}\cup U_{i_2}\cup\cdots\cup U_{i_m}))=\emptyset$$

より $U_{i_m}\cap A_{n_l}=\emptyset$ が得られて $a_{n_l}\in U_{i_m}\cap A_{n_l}$ と矛盾が生じる．故に $A_n=\emptyset$ を満たす自然数 n が存在するため，$X=U_{i_1}\cup U_{i_2}\cup\cdots\cup U_{i_n}$ となり，X はコンパクトであることがわかる． □

これまでの結果をまとめれば次の定理が得られる．

定理 3.7 距離空間 (X,d) について次の 3 つの条件は同値である．

(i) 距離関数 d から定まる X の位相に関して X はコンパクトである．
(ii) (X,d) は点列コンパクトである．
(iii) (X,d) は完備かつ全有界である．

$(i)\Rightarrow(ii)$ は幾何学 II 定理 1.4，$(ii)\Rightarrow(iii)$ は例題 3.4，$(iii)\Rightarrow(ii)$ は例題 3.5，$(ii)\Rightarrow(i)$ は例題 3.6 で示された．

4　写像の微分

例題 4.1　実数を成分とする n 次対称行列 A に対して関数 $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ を $f(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ で定めるとき, f の $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$ における微分 $f'(\boldsymbol{p})$ を求めよ.

解答例　A は対称行列で ${}^t\boldsymbol{p}A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})$ はスカラーだから ${}^t\boldsymbol{p}A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})={}^t({}^t\boldsymbol{p}A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))={}^t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})A\boldsymbol{p}$ であり, 幾何学 II 補題 2.1 から $|{}^t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})|\leqq\|{}^t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\|\|A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\|\leqq\|{}^t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\|\|A\|\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|=\|A\|\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2$ だから

$$\left|\frac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})-2{}^t\boldsymbol{p}A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}\right|=\frac{|{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}-{}^t\boldsymbol{p}A\boldsymbol{p}-2{}^t\boldsymbol{p}A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}=\frac{|{}^t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})A\boldsymbol{x}-{}^t\boldsymbol{p}A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}$$
$$=\frac{|{}^t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})A\boldsymbol{x}-{}^t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})A\boldsymbol{p}|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}=\frac{|{}^t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}\leqq\|A\|\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|$$

が得られる. $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\|A\|\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|=0$ だから上式より $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\left|\frac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})-2{}^t\boldsymbol{p}A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}\right|=0$ が成り立つ.
故に $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\frac{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p})-2{}^t\boldsymbol{p}A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}=\boldsymbol{0}$ が成り立つため, 微分の定義から $f'(\boldsymbol{p})=2{}^t\boldsymbol{p}A$ である. □

例題 4.2　X を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合とし, 写像 $f,g:X\to\boldsymbol{R}^m$ はともに $\boldsymbol{p}\in X$ で微分可能であるとする. $F(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})$ で定義される写像 $F:X\to\boldsymbol{R}^m$ の $\boldsymbol{p}\in X$ における微分 $F'(\boldsymbol{p})$ は $F'(\boldsymbol{p})=f'(\boldsymbol{p})+g'(\boldsymbol{p})$ で与えられることを示せ.

解答例　仮定から $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\frac{f(\boldsymbol{x})-(f(\boldsymbol{p})+f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}=\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\frac{g(\boldsymbol{x})-(g(\boldsymbol{p})+g'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}=\boldsymbol{0}$ が成り立つため,

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\frac{F(\boldsymbol{x})-(F(\boldsymbol{p})+(f'(\boldsymbol{p})+g'(\boldsymbol{p}))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}=\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\frac{f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})-(f(\boldsymbol{p})+g(\boldsymbol{p})+(f'(\boldsymbol{p})+g'(\boldsymbol{p}))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}$$
$$=\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\frac{f(\boldsymbol{x})-(f(\boldsymbol{p})+f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))+g(\boldsymbol{x})-(g(\boldsymbol{p})+g'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}$$
$$=\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\frac{f(\boldsymbol{x})-(f(\boldsymbol{p})+f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}+\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\frac{g(\boldsymbol{x})-(g(\boldsymbol{p})+g'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}=\boldsymbol{0}$$

である. 従って微分の定義から $F'(\boldsymbol{p})=f'(\boldsymbol{p})+g'(\boldsymbol{p})$ である. □

例題 4.3　X を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合とし, 写像 $f:X\to\boldsymbol{R}^m$, $\varphi:X\to\boldsymbol{R}$ はともに $\boldsymbol{p}\in X$ で微分可能であるとする. $F(\boldsymbol{x})=\varphi(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})$ で定義される写像 $F:X\to\boldsymbol{R}^m$ の $\boldsymbol{p}\in X$ における微分 $F'(\boldsymbol{p})$ は $F'(\boldsymbol{p})=f(\boldsymbol{p})\varphi'(\boldsymbol{p})+\varphi(\boldsymbol{p})f'(\boldsymbol{p})$ で与えられることを示せ.

解答例　$\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}:X\to\boldsymbol{R}^m$, $\varepsilon_{\varphi,\boldsymbol{p}}:X\to\boldsymbol{R}$ を以下で定めれば, 仮定から $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\varepsilon_{\varphi,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})=0$ である.

$$\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\dfrac{f(\boldsymbol{x})-(f(\boldsymbol{p})+f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} & \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}\end{cases}\qquad\varepsilon_{\varphi,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\dfrac{\varphi(\boldsymbol{x})-(\varphi(\boldsymbol{p})+\varphi'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} & \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{p}\\ 0 & \boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}\end{cases}$$

このとき $f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{p})+f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})$, $\varphi(\boldsymbol{x})=\varphi(\boldsymbol{p})+\varphi'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\varepsilon_{\varphi,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})$ が任意の $\boldsymbol{x}\in X$ に対して成り立つため, $\varphi'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})$ がスカラーであることに注意すれば, 次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}F(\boldsymbol{x})-F(\boldsymbol{p})&=\varphi(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{p})f(\boldsymbol{p})=(\varphi(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{p}))f(\boldsymbol{x})+\varphi(\boldsymbol{p})(f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p}))\\&=(\varphi'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\varepsilon_{\varphi,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}))f(\boldsymbol{x})+\varphi(\boldsymbol{p})(f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}))\\&=\varphi'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})f(\boldsymbol{x})+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\varepsilon_{\varphi,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})+\varphi(\boldsymbol{p})f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})+\varphi(\boldsymbol{p})\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\\&=f(\boldsymbol{x})\varphi'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\varepsilon_{\varphi,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})+\varphi(\boldsymbol{p})f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\varphi(\boldsymbol{p})\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\\&=(f(\boldsymbol{x})\varphi'(\boldsymbol{p})+\varphi(\boldsymbol{p})f'(\boldsymbol{p}))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|(\varepsilon_{\varphi,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})+\varphi(\boldsymbol{p})\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}))\end{aligned}$$

従って次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}\frac{F(\boldsymbol{x})-(F(\boldsymbol{p})+(f(\boldsymbol{p})\varphi'(\boldsymbol{p})+\varphi(\boldsymbol{p})f'(\boldsymbol{p}))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} &= \frac{(f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{p}))\varphi'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}+\varepsilon_{\varphi,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})+\varphi(\boldsymbol{p})\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\\ &= \frac{(f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}))\varphi'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}+\varepsilon_{\varphi,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})+\varphi(\boldsymbol{p})\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\\ &= \frac{f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\varphi'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}+\varepsilon_{\varphi,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})+(\varphi(\boldsymbol{p})+\varphi'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\ \cdots(*)\end{aligned}$$

幾何学 II 補題 2.1 から $\|f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\| \leqq \|f'(\boldsymbol{p})\|\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|$, $|\varphi'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})| \leqq \|\varphi'(\boldsymbol{p})\|\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|$ だから

$$\left\|\frac{f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\varphi'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}\right\| \leqq \frac{\|\varphi'(\boldsymbol{p})\|\|f'(\boldsymbol{p})\|\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} = \|\varphi'(\boldsymbol{p})\|\|f'(\boldsymbol{p})\|\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|$$

が成り立つため $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\frac{f'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\varphi'(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}=\boldsymbol{0}$ である. また, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\varepsilon_{f,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\varepsilon_{\varphi,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})=0$ だから $(*)$ より $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}\frac{F(\boldsymbol{x})-(F(\boldsymbol{p})+(f(\boldsymbol{p})\varphi'(\boldsymbol{p})+\varphi(\boldsymbol{p})f'(\boldsymbol{p}))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}))}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|}=\boldsymbol{0}$ だから $F'(\boldsymbol{p})=f(\boldsymbol{p})\varphi'(\boldsymbol{p})+\varphi(\boldsymbol{p})f'(\boldsymbol{p})$ である. □

例題 4.4 m, n を 0 以上の整数, r を正の実数とし, $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を次で定義される関数とする.

$$f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{cases}\dfrac{x^my^n}{(x^2+y^2)^r} & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\\ 0 & \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\end{cases}$$

f が原点で微分可能であるためには $m+n>2r+1$ が成り立つことが必要十分条件であることを示せ.

解答例 $f\left(\begin{smallmatrix}t\\0\end{smallmatrix}\right)=\begin{cases}0 & n>0\\ t^{m-2r} & n=0\end{cases}$ より $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{f\left(\begin{smallmatrix}t\\0\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=\begin{cases}0 & n>0 \text{ または } m>2r+1\\ 1 & n=0 \text{ かつ } m=2r+1\\ \infty & n=0 \text{ かつ } m<2r+1\end{cases}$ であり,

$f\left(\begin{smallmatrix}0\\t\end{smallmatrix}\right)=\begin{cases}0 & m>0\\ t^{n-2r} & m=0\end{cases}$ より $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{f\left(\begin{smallmatrix}0\\t\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=\begin{cases}0 & m>0 \text{ または } n>2r+1\\ 1 & m=0 \text{ かつ } n=2r+1\\ \infty & m=0 \text{ かつ } n<2r+1\end{cases}$ が成り立つ.

f が原点で微分可能ならば, 幾何学 II 命題 2.9 より $f'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)$ が成り立ち, 幾何学 II 命題 2.7 より f は原点において $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ 方向に微分可能だから $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{f\left(\begin{smallmatrix}t\\t\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=f'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ が成り立つ. 一方 $t\neq0$ ならば $\dfrac{f\left(\begin{smallmatrix}t\\t\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=\dfrac{t^{m+n-2r-1}}{2^r}$ だから, $m+n=2r+1$ ならば $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{f\left(\begin{smallmatrix}t\\t\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=\frac{1}{2^r}$ であり, $m+n<2r+1$ ならば $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{f\left(\begin{smallmatrix}t\\t\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}=\infty$ である. 前者の場合は $0<\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{f\left(\begin{smallmatrix}t\\t\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}<1$ であるが, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ が存在する場合, これらの値は 0 または 1 だから $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{f\left(\begin{smallmatrix}t\\t\end{smallmatrix}\right)-f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}{t}\neq\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ である. 後者の場合, f は原点において $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ 方向に微分不可能である. 以上から, $m+n\leqq2r+1$ ならば f は原点で微分不可能である.

$m+n>2r+1$ とする. $\boldsymbol{x}=\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ に対して $|x|^m=\left(\sqrt{x^2}\right)^m\leqq\|\boldsymbol{x}\|^m$, $|y|^n=\left(\sqrt{y^2}\right)^n\leqq\|\boldsymbol{x}\|^n$ だから $\left|\dfrac{f(\boldsymbol{x})-(f(\boldsymbol{0})+(0\ 0)\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|}\right|=\left|\dfrac{x^my^n}{(x^2+y^2)^{r+\frac12}}\right|=\dfrac{|x|^m|y|^n}{\|\boldsymbol{x}\|^{2r+1}}\leqq\|\boldsymbol{x}\|^{m+n-2r-1}$ であり, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}}\|\boldsymbol{x}\|^{m+n-2r-1}=0$ だから, 上の不等式から $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}}\frac{f(\boldsymbol{x})-(f(\boldsymbol{0})+(0\ 0)\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|}=0$ が成り立つ. 故に f は原点で微分可能で, $f'(\boldsymbol{0})=(0\ 0)$ である. □

5 偏微分

例題 5.1 U を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合, $a<b$ とし, 連続関数 $f: U\times[a,b]\to\boldsymbol{R}$ に対して $F(\boldsymbol{x})=\displaystyle\int_a^b f(\boldsymbol{x},t)\,dt$ によって関数 $F: U\to\boldsymbol{R}$ を定義すれば F は連続関数であることを示せ.

解答例 U は開集合だから $\boldsymbol{p}\in U$ に対し, $B_n(\boldsymbol{p};2r)\subset U$ となる $r>0$ がある. $\bar{B}_n(\boldsymbol{p};r)=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\leqq r\}$ とおけば $\bar{B}_n(\boldsymbol{p};r)\subset B_n(\boldsymbol{p};2r)$ より $\bar{B}_n(\boldsymbol{p};r)$ は U に含まれ, 有界閉集合だから幾何学 I 定理 11.19 からコンパクトである. また幾何学 I 定理 11.3 から $[a,b]$ もコンパクトだから幾何学 I 定理 11.6 によって $\bar{B}_n(\boldsymbol{p};r)\times[a,b]$ もコンパクトである. 従って幾何学 I 定理 12.10 により f の定義域を $\bar{B}_n(\boldsymbol{p};r)\times[a,b]$ に制限して得られる関数は一様連続であるため, 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ で条件

「$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\bar{B}_n(\boldsymbol{p};r)$, $u,v\in[a,b]$ かつ $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2+|u-v|^2<\delta^2$ ならば $|f(\boldsymbol{x},u)-f(\boldsymbol{y},v)|<\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.」

を満たすものがある. 故に $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|<\min\{\delta,r\}$ ならば

$$|F(\boldsymbol{x})-F(\boldsymbol{p})|=\left|\int_a^b f(\boldsymbol{x},t)\,dt-\int_a^b f(\boldsymbol{p},t)\,dt\right|\leqq\int_a^b|f(\boldsymbol{x},t)-f(\boldsymbol{p},t)|\,dt\leqq\int_a^b\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,dt=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

が成り立つため, F は $\boldsymbol{p}$ で連続である. □

例題 5.2 U を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合, $a<b$ とする. 関数 $f: U\times[a,b]\to\boldsymbol{R}$ は連続で, i 番目 $(1\leqq i\leqq n)$ の変数に関して偏微分可能かつ偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}: U\times[a,b]\to\boldsymbol{R}$ は連続であるとする. 関数 $F: U\to\boldsymbol{R}$ を $F(\boldsymbol{x})=\displaystyle\int_a^b f(\boldsymbol{x},t)\,dt$ で定義すれば F は i 番目の変数に関して偏微分可能で, $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})=\displaystyle\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p},t)\,dt$ が成り立つことを示せ.

解答例 平均値の定理から $f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_i,t)-f(\boldsymbol{x},t)=h\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}+\theta h\boldsymbol{e}_i,t)$ を満たす $0<\theta<1$ があるため,

$$\begin{aligned}\frac{F(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_i)-F(\boldsymbol{x})}{h}&=\frac{1}{h}\left(\int_a^b f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_i,t)\,dt-\int_a^b f(\boldsymbol{x},t)\,dt\right)=\frac{1}{h}\left(\int_a^b(f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_i,t)-f(\boldsymbol{x},t))\,dt\right)\\&=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}+\theta h\boldsymbol{e}_i,t)\,dt\ \cdots(*)\end{aligned}$$

が成り立つ. U は開集合だから $\boldsymbol{p}\in U$ に対し, $\bar{B}_n(\boldsymbol{p};r)$ を例題 5.1 の解答例と同様に選べば, 仮定から $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ の定義域を $\bar{B}_n(\boldsymbol{p};r)\times[a,b]$ に制限して得られる関数は一様連続である. 故に任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ で条件

「$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\bar{B}_n(\boldsymbol{p};r)$, $u,v\in[a,b]$ かつ $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2+|u-v|^2<\delta^2$ ならば $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},u)-\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{y},v)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.」

を満たすものがある. 従って $|h|<\delta$ ならば $(*)$ から次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_i)-F(\boldsymbol{x})}{h}-\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},t)\,dt\right|&=\left|\int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}+\theta h\boldsymbol{e}_i,t)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},t)\right)dt\right|\\&\leqq\int_a^b\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}+\theta h\boldsymbol{e}_i,t)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},t)\right|dt\leqq\int_a^b\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,dt=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\end{aligned}$$

故に $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{p})=\displaystyle\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p},t)\,dt$ が成り立つ. □

注意 5.3 例題 5.2 の仮定がすべての $i=1,2,\dots,n$ に対して満たされるとき, 例題 5.1 と例題 5.2 から $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ は連続だから F は C^1 級関数である. すべての $s=1,2,\dots,r$ と $1\leqq i_1,i_2,\dots,i_s\leqq n$ に対して $\dfrac{\partial^s f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_s}}: U\times[a,b]\to\boldsymbol{R}$ が存在して連続ならば F は C^r 級関数であることが, r による数学的帰納法で示される.

例題 5.4 C^1 級関数 $g, h : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ に対して $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を $f(x,y) = \displaystyle\int_0^x g(s,0)\,ds + \int_0^y h(x,t)\,dt$ で定める.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = g$ ならば $\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y}$ であることを示せ.

(2) $\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y}$ ならば $\dfrac{\partial f}{\partial x} = g$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = h$ が成り立つことを示せ.

解答例 (1) 微分積分学の基本定理と例題 5.2 から $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,0) + \displaystyle\int_0^y \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,dt$ だから, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = g$ ならば $\displaystyle\int_0^y \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,dt = g(x,y) - g(x,0)$ が成り立つ. この両辺を y で偏微分すれば $\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y}$ が得られる.

(2) 1 番目の変数を固定して g を 2 番目の変数に関する 1 変数関数とみなしたとき, g は $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ の原始関数であことに注意すれば微分積分学の基本定理と例題 5.2 および仮定から, 次の等式が成り立つ.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,0) + \int_0^y \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,dt = g(x,0) + \int_0^y \frac{\partial g}{\partial y}(x,t)\,dt = g(x,0) + g(x,y) - g(x,0) = g(x,y)$$

$\displaystyle\int_0^x g(s,0)\,ds$ は 2 番目の変数に関しては定数値関数だから, 微分積分学の基本定理より $\dfrac{\partial f}{\partial y} = h$ である. □

例題 5.5 $I_1, I_2, \dots, I_n$ を開区間として, $X = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ とおく. X で定義された C^r 級関数 $(r \geqq 1)$ f と $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in X$ に対し, X で定義された C^{r-1} 級関数 $f_1, f_2, \dots, f_n$ で, 任意の $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ に対して次の等式を満たすものがあることを示せ.

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p}) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - p_i) f_i(\boldsymbol{x})$$

解答例 $i = 0, 1, \dots, n$ に対して $\boldsymbol{x}_i = (x_1, \dots, x_i, p_{i+1}, \dots, p_n)$ とおくと X の形状から $\boldsymbol{x}_i \in X$ である. $i = 1, 2, \dots, n$ に対して関数 $g_i : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を $g_i(t) = f(\boldsymbol{x}_{i-1} + t(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}))$ で定める. $i = 1, 2, \dots, n$ ならば $\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1} = (x_i - p_i)\boldsymbol{e}_i$ だから, 合成写像の微分法により $g_i'(t) = (x_i - p_i)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_{i-1} + t(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}))$ である. 従って, 微分積分学の基本定理から次の等式が得られる.

$$f(\boldsymbol{x}_i) - f(\boldsymbol{x}_{i-1}) = g_i(1) - g_i(0) = \int_0^1 g_i'(t)\,dt = (x_i - p_i)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_{i-1} + t(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}))\,dt$$

$f_i(\boldsymbol{x}) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_{i-1} + t(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}))\,dt$ で関数 $f_i : X \to \boldsymbol{R}$ を定義すれば, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ が C^{r-1} 級関数であることと例題 5.1, 例題 5.2 から f_i は C^{r-1} 級関数であり, $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p}) + \sum\limits_{i=1}^{n}(f(\boldsymbol{x}_i) - f(\boldsymbol{x}_{i-1})) = f(\boldsymbol{p}) + \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - p_i)f_i(\boldsymbol{x})$ が成り立つ. □

6　常微分方程式の解の存在定理

例題 6.1　0 以上の整数 n に対して関数 f_n を帰納的に $f_0(t)=1,\ f_{n+1}(t)=1+\displaystyle\int_0^t f_n(s)^2\,ds$ で定める.

(1) $n=1,2,3$ に対して $f_n(t)$ を求めよ.

(2) $f_n(t)-(1+t+t^2+\cdots+t^n)$ は t^{n+1} で割り切れる t の多項式であることを示せ.

(3) $f_n(t)$ は 2^n-1 次の t の多項式であることを示せ.

(4) $f_n(t)$ の t^k の係数を $c_{n,k}$ とおけば $0\leqq c_{n,k}\leqq 1$ であることを示せ.

(5) $|t|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(t)=\frac{1}{1-t}$ であることを示せ.

解答例　(1) $f_1(t)=1+t,\ f_2(t)=1+t+t^2+\dfrac{1}{3}t^3,\ f_3(t)=1+t+t^2+t^3+\dfrac{2}{3}t^4+\dfrac{1}{3}t^5+\dfrac{1}{9}t^6+\dfrac{1}{63}t^7$

(2) n による数学的帰納法で主張を示す. $n=0$ のときは主張は明らかに成り立つ. $f_{n-1}(t)-(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1})$ は t^n で割り切れる t の多項式であると仮定すれば, $f_{n-1}(t)-(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1})=t^n g_{n-1}(t)$ を満たす t の多項式 $g_{n-1}(t)$ がある. t の多項式 $\displaystyle\int_0^t f_{n-1}(s)^2\,ds$ の n 次以下の項は $f_{n-1}(s)^2$ の $n-1$ 次以下の項を積分して得られ, $f_{n-1}(s)^2=(1+s+s^2+\cdots+s^{n-1})^2+2s^n g_{n-1}(s)(1+s+s^2+\cdots+s^{n-1})+s^{2n}g_{n-1}(s)^2$ より $f_{n-1}(s)^2$ の $n-1$ 次以下の項は $(1+s+s^2+\cdots+s^{n-1})^2$ の $n-1$ 次以下の項に等しい.

$$(1+s+s^2+\cdots+s^{n-1})^2=\sum_{0\leqq i,j\leqq n-1} s^{i+j}=\sum_{k=0}^{2n-2}\ \sum_{0\leqq i,j\leqq n-1,\,i+j=k} s^{i+j}=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)s^k+\sum_{k=n}^{2n-2}(2n-1-k)s^k$$

だから $f_{n-1}(s)^2$ の $n-1$ 次以下の項は $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)s^k$ である. 従って $f_n(t)=1+\displaystyle\int_0^t f_{n-1}(s)^2\,ds$ の n 次以下の項は $\sum\limits_{k=0}^{n} t^k$ となるため, $f_n(t)-(1+t+t^2+\cdots+t^n)$ は t^{n+1} で割り切れる.

(3) $f_n(t)$ の次数を d_n, t^{d_n} の係数を c とすれば $c\neq 0$ である. $f_n(t)^2$ は $2d_n$ 次の多項式で, t^{2d_n} の係数は c^2 だから, $f_{n+1}(t)$ の t^{2d_n+1} の係数は $\dfrac{c^2}{2d_n+1}\neq 0$ である. 従って $f_{n+1}(t)$ は $2d_n+1$ 次の多項式だから $d_{n+1}=2d_n+1$ が成り立つ. この漸化式と $d_0=0$ から $d_n=2^n-1$ が得られる.

(4) $k\geqq 2^n$ ならば $c_{n,k}=0$ とすれば $f_n(t)=\sum\limits_{k\geqq 0}c_{n,k}t^k$ より $f_n(t)^2=\sum\limits_{i,j\geqq 0}c_{n,i}c_{n,j}t^{i+j}=\sum\limits_{k\geqq 0}\Bigl(\sum\limits_{i+j=k}c_{n,i}c_{n,j}\Bigr)t^k$ である. 従って $\sum\limits_{k\geqq 0}c_{n+1,k}t^k=1+\sum\limits_{k\geqq 0}\dfrac{1}{k+1}\Bigl(\sum\limits_{i+j=k}c_{n,i}c_{n,j}\Bigr)t^{k+1}$ だから, この両辺の t^k の係数を比較すれば $c_{n+1,0}=1$, $k\geqq 1$ ならば $c_{n+1,k}=\dfrac{1}{k}\sum\limits_{i+j=k-1}c_{n,i}c_{n,j}$ が得られる. $f_0(t)=1$ より $c_{0,0}=1$, $k\geqq 1$ ならば $c_{0,k}=0$ である. $0\leqq c_{n,k}\leqq 1$ がすべての $k\geqq 0$ に対して成り立つと仮定すれば, $0\leqq c_{n,i}c_{n,j}\leqq 1$ だから $0\leqq\sum\limits_{i+j=k-1}c_{n,i}c_{n,j}\leqq k$ である. 故に上で得た式から $0\leqq c_{n+1,k}\leqq 1$ となるため, 数学的帰納法によって主張が示された.

(5) (2) と (4) の結果から $|t|<1$ ならば次の不等式が成り立つ.

$$|f_n(t)-(1+t+t^2+\cdots+t^n)|=\left|\sum_{k\geqq n+1}c_{n,k}t^k\right|\leqq\sum_{k\geqq n+1}c_{n,k}|t|^k\leqq\sum_{k\geqq n+1}|t|^k=\frac{|t|^{n+1}}{1-|t|}$$

故に三角不等式から次の不等式が得られる.

$$\begin{aligned}\left|f_n(t)-\frac{1}{1-t}\right|&\leqq|f_n(t)-(1+t+t^2+\cdots+t^n)|+\left|(1+t+t^2+\cdots+t^n)-\frac{1}{1-t}\right|\\&\leqq\frac{|t|^{n+1}}{1-|t|}+\left|\frac{1-t^{n+1}}{1-t}-\frac{1}{1-t}\right|=\frac{|t|^{n+1}}{1-|t|}+\frac{|t|^{n+1}}{1-t}\end{aligned}$$

$|t|<1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|t|^{n+1}}{1-|t|}+\frac{|t|^{n+1}}{1-t}\right)=0$ だから, 上の不等式から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(t)=\frac{1}{1-t}$ である. □

例題 6.2　実数を成分とする n 次正方行列 A と $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, $f_0(t) = \boldsymbol{x}_0$, $f_k(t) = \boldsymbol{x}_0 + \displaystyle\int_0^t (Af_{k-1}(s) + \boldsymbol{b})\, ds$ によって写像 $f_k : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n$ を帰納的に定義する.

(1) $f_k(t) = \left(E_n + tA + \cdots + \dfrac{t^i}{i!}A^i + \cdots + \dfrac{t^k}{k!}A^k\right)\boldsymbol{x}_0 + \left(tE_n + \dfrac{t^2}{2}A + \cdots + \dfrac{t^i}{i!}A^{i-1} + \cdots + \dfrac{t^k}{k!}A^{k-1}\right)\boldsymbol{b}$ を示せ.

(2) 任意の $t \in \boldsymbol{R}$ に対して $\boldsymbol{R}^n$ の点列 $(f_k(t))_{k \geqq 0}$ は収束することを示せ.

(3) $f(t) = \displaystyle\lim_{k\to\infty} f_k(t)$ によって写像 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n$ を定めれば $f'(t) = Af(t) + \boldsymbol{b}$ が成り立つことを示せ.

解答例　(1) $f_0(t) = \boldsymbol{x}_0 = E_n\boldsymbol{x}_0$ であり, 帰納的に $f_k(t) = \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{t^i}{i!}A^i\right)\boldsymbol{x}_0 + \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{t^i}{i!}A^{i-1}\right)\boldsymbol{b}$ が成り立つと仮定する. † $\displaystyle\int_0^t \frac{s^i}{i!}A^{i+1}\boldsymbol{x}_0\, ds = \frac{t^{i+1}}{(i+1)!}A^{i+1}\boldsymbol{x}_0$, $\displaystyle\int_0^t \frac{s^i}{i!}A^i\boldsymbol{b}\, ds = \frac{t^{i+1}}{(i+1)!}A^i\boldsymbol{b}$ だから $f_{k+1}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \displaystyle\int_0^t (Af_k(s) + \boldsymbol{b})\, ds$ の右辺は

$$\boldsymbol{x}_0 + \sum_{i=0}^{k} \frac{t^{i+1}}{(i+1)!}A^{i+1}\boldsymbol{x}_0 + \sum_{i=1}^{k} \frac{t^{i+1}}{(i+1)!}A^i\boldsymbol{b} + t\boldsymbol{b} = \left(\sum_{i=0}^{k+1} \frac{t^i}{i!}A^i\right)\boldsymbol{x}_0 + \left(\sum_{i=1}^{k+1} \frac{t^i}{i!}A^{i-1}\right)\boldsymbol{b}$$

に等しい. 故に数学的帰納法によって主張が示される.

(2) $\boldsymbol{R}^n$ は完備だから $(f_k(t))_{k \geqq 0}$ が Cauchy 列であることを示せばよい. 幾何学 II 補題 2.1 を繰り返し用いると $\|A^j\boldsymbol{x}\| = \|AA^{j-1}\boldsymbol{x}\| \leqq \|A\|\|A^{j-1}\boldsymbol{x}\| \leqq \cdots \leqq \|A\|^j\|\boldsymbol{x}\|$ が得られ, さらに $K = \|A\| + 1$ とおけば $\|A\|^i \leqq K^i$, $\|A\|^{i-1} \leqq K^{i-1} \leqq K^i$ だから (1) と三角不等式から

$$\begin{aligned}\|f_{k+l}(t) - f_k(t)\| &= \left\|\sum_{i=k+1}^{k+l}\left(\frac{t^i}{i!}A^i\boldsymbol{x}_0 + \frac{t^i}{i!}A^{i-1}\boldsymbol{b}\right)\right\| \leqq \sum_{i=k+1}^{k+l}\left(\frac{|t|^i}{i!}\|A^i\boldsymbol{x}_0\| + \frac{|t|^i}{i!}\|A^{i-1}\boldsymbol{b}\|\right) \\ &\leqq \sum_{i=k+1}^{k+l}\left(\frac{|t|^i}{i!}\|A\|^i\|\boldsymbol{x}_0\| + \frac{|t|^i}{i!}\|A\|^{i-1}\|\boldsymbol{b}\|\right) \leqq \sum_{i=k+1}^{k+l} \frac{|tK|^i}{i!}(\|\boldsymbol{x}_0\| + |\boldsymbol{b}|) \cdots (*)\end{aligned}$$

が成り立つ. $m \geqq 2|tK|$ を満たす自然数 m を選べば, $i \geqq m$ に対し,

$$\frac{|tK|^i}{i!} = \frac{|tK|^{m-1}}{(m-1)!}\frac{|tK|}{m}\frac{|tK|}{m+1}\cdots\frac{|tK|}{i} \leqq \frac{|tK|^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{|tK|}{m}\right)^{i-m+1} \leqq \frac{|tK|^{m-1}}{(m-1)!}\frac{1}{2^{i-m+1}}$$

だから, $L = \|\boldsymbol{x}_0\| + \|\boldsymbol{b}\|$ とおくと $k \geqq m-1$ ならば $(*)$ より次の不等式が成り立つ.

$$\|f_{k+l}(t) - f_k(t)\| \leqq \sum_{i=k+1}^{k+l} \frac{|tK|^{m-1}}{(m-1)!}\frac{L}{2^{i-m+1}} = \frac{|tK|^{m-1}L}{2^{k-m+1}(m-1)!}\left(1 - \frac{1}{2^l}\right) \leqq \frac{|tK|^{m-1}L}{2^{k-m+1}(m-1)!}$$

$\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{|tK|^{m-1}L}{2^{k-m+1}(m-1)!} = 0$ だから, 上の不等式から $(f_k(t))_{k \geqq 0}$ は Cauchy 列である.

(3) $\|A^i\boldsymbol{x}_0 + A^{i-1}\boldsymbol{b}\| \leqq \|A^i\boldsymbol{x}_0\| + \|A^{i-1}\boldsymbol{b}\| \leqq \|A\|^i\|\boldsymbol{x}_0\| + \|A\|^{i-1}\|\boldsymbol{b}\| \leqq K^i\|\boldsymbol{x}_0\| + K^i\|\boldsymbol{b}\| = K^iL$ に注意すれば $t, h \in \boldsymbol{R}$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f_k(t+h) - f_k(t)}{h} - (Af_{k-1}(t) + \boldsymbol{b})\right\| &= \left\|\sum_{i=2}^{k}\left(\frac{1}{i(i-1)}\sum_{j=0}^{i-2}\frac{t^jh^{i-j-1}}{j!(i-j-2)!}\right)(A^i\boldsymbol{x}_0 + A^{i-1}\boldsymbol{b})\right\| \\ &\leqq |h|L\sum_{i=2}^{k}\left(\sum_{j=0}^{i-2}\frac{|t|^j|h|^{i-j-2}}{j!(i-j-2)!}\right)K^i = |h|K^2L\sum_{i=2}^{k}\frac{(K(|t|+|h|))^{i-2}}{(i-2)!} \leqq |h|K^2Le^{K(|t|+|h|)}\end{aligned}$$

上の不等式で $k \to \infty$ とすれば $\left\|\dfrac{f(t+h) - f(t)}{h} - (Af(t) + \boldsymbol{b})\right\| \leqq |h|K^2Le^{K(|t|+|h|)}$ が得られ, $h \to 0$ のとき, この右辺は 0 に近づくため, $f'(t) = Af(t) + \boldsymbol{b}$ が成り立つ. □

7 陰関数定理

例題 7.1 X, U をそれぞれ $\boldsymbol{R}^l$, $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$ の開集合とする. C^1 級写像 $f : X \to \boldsymbol{R}^n$, $g : X \to \boldsymbol{R}^m$ と $F : U \to \boldsymbol{R}^k$ が与えられており, すべての $\boldsymbol{x} \in X$ に対して $\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{x}) \\ g(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \in U$ が成り立つとき, 写像 $\varphi : X \to \boldsymbol{R}^k$ を $\varphi(\boldsymbol{x}) = F\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{x}) \\ g(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$ で定める. φ の $\boldsymbol{x} \in X$ における微分 $\varphi'(\boldsymbol{x})$ は $\varphi'(\boldsymbol{x}) = D_1F\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{x}) \\ g(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} f'(\boldsymbol{x}) + D_2F\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{x}) \\ g(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} g'(\boldsymbol{x})$ で与えられることを示せ.

解答例 写像 $h : X \to U$ を $h(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{x}) \\ g(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$ で定義すれば, $\varphi = F \circ h$ である. 幾何学 II 命題 2.10 の (1) から $h'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f'(\boldsymbol{x}) \\ g'(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$ であり, $F'\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1F\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} & D_2F\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, だから, 合成写像の微分法から次の等式が得られる.

$$\varphi'(\boldsymbol{x}) = F'(h(\boldsymbol{x}))h'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} D_1F\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{x}) \\ g(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} & D_2F\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{x}) \\ g(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(\boldsymbol{x}) \\ g'(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = D_1F\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{x}) \\ g(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} f'(\boldsymbol{x}) + D_2F\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{x}) \\ g(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} g'(\boldsymbol{x}) \qquad \square$$

U を $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$ の開集合とし, $F : U \to \boldsymbol{R}$ を C^2 級関数とする. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in U$ は $F\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0$ を満たし, $\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \neq 0$ ならば, 陰関数定理により $\boldsymbol{x}_0$ を含む $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U_0 と C^2 級関数 $f : U_0 \to \boldsymbol{R}$ で, $f(\boldsymbol{x}_0) = y_0$ かつ, すべての $\boldsymbol{x} \in U_0$ に対して $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \in U$ かつ $\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \neq 0$ であり, $F\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = 0$ を満たすものがある. さらに $\boldsymbol{x} \in U_0$ と $j = 1, 2, \dots, n$ に対し $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_j}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}}$ が成り立つ.

例題 7.2 上の設定の下で $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x})$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ は次で与えられることを示せ.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}\right)^{-3} \Bigg(& \frac{\partial F}{\partial x_i}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} + \frac{\partial F}{\partial x_j}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \\ & - \frac{\partial F}{\partial x_i}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_j}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_{n+1}^2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \Bigg)\end{aligned}$$

とくに $n = 1$ の場合は次の等式が成り立つ.

$$f''(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right)^{-3} \left(2\frac{\partial F}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \right)$$

解答例 $\psi_j : U_0 \to \boldsymbol{R}$ を $\psi_j(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\partial F}{\partial x_j}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$ で定めれば, 例題 7.1 より $\psi_j'(\boldsymbol{x}) = D_1\dfrac{\partial F}{\partial x_j}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} + D_2\dfrac{\partial F}{\partial x_j}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} f'(\boldsymbol{x})$ だから, この両辺の $(1, i)$ 成分を比較すれば次の等式が得られる.

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_j}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}} = -\dfrac{\psi_j(\boldsymbol{x})}{\psi_{n+1}(\boldsymbol{x})}$ の両辺を x_i で偏微分すれば, 上の等式から

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) &= -\frac{\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\psi_{n+1}(\boldsymbol{x}) - \psi_j(\boldsymbol{x})\frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})}{(\psi_{n+1}(\boldsymbol{x}))^2} \\ &= \frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_{n+1}^2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\right) - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\right)\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}\right)^2}\end{aligned}$$

が得られる. さらに, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_i}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}}$ だから, これを上式に代入して, 分母と分子に $\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$ をかければ, 結果が得られる. $\square$

注意 7.3 $\boldsymbol{p} \in U$ と $j = 1, 2, \dots, n$ に対し $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}) = 0$ が成り立つとき, 例題 7.2 の上の等式から $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ f(\boldsymbol{p})\end{smallmatrix}\right) = -\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ f(\boldsymbol{p})\end{smallmatrix}\right)\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}) = 0$ だから, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{p}) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ f(\boldsymbol{p})\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{p}\\ f(\boldsymbol{p})\end{smallmatrix}\right)}$ が成り立つ.

例題 7.4 a, b, c を実数の定数とし, $c \neq 0$ とする. z を x, y の関数とみなしたとき, 方程式

$$ab(a+b)z^3 - (a^2x + 2ab(x+y) + b^2y - ab)z^2 + (ax^2 + 2(a+b)xy + by^2 - ax - by + c)z - x^2y - xy^2 + xy = 0$$

で与えられる陰関数の極値を求めよ.

解答例 関数 $F : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ を次のように定義する.

$$F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = ab(a+b)z^3 - (a^2x + 2ab(x+y) + b^2y - ab)z^2 + (ax^2 + 2(a+b)xy + by^2 - ax - by + c)z - x^2y - xy^2 + xy$$

このとき $\dfrac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = -(y - az)(2x + y - (a+2b)z - 1)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = -(x - bz)(x + 2y - (2a+b)z - 1)$ だから $\dfrac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = 0$ ならば $\begin{cases} x = bz \\ y = az \end{cases}$, $\begin{cases} x = bz + 1 \\ y = az \end{cases}$, $\begin{cases} x = bz \\ y = az + 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = bz + \frac{1}{3} \\ y = az + \frac{1}{3} \end{cases}$ のいずれかが成り立つ. ここで, $F\left(\begin{smallmatrix}bz\\az\\z\end{smallmatrix}\right) = F\left(\begin{smallmatrix}bz+1\\az\\z\end{smallmatrix}\right) = F\left(\begin{smallmatrix}bz\\az+1\\z\end{smallmatrix}\right) = cz$, $F\left(\begin{smallmatrix}bz+\frac{1}{3}\\az+\frac{1}{3}\\z\end{smallmatrix}\right) = cz + \dfrac{1}{27}$ だから $F\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \dfrac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = 0$ を満たす $\boldsymbol{R}^3$ の点は $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{3}-\frac{b}{27c}\\ \frac{1}{3}-\frac{a}{27c}\\ -\frac{1}{27c}\end{smallmatrix}\right)$ の 4 つである. また,

$$\frac{\partial F}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = 3ab(a+b)z^2 - 2a(a+2b)xz - 2b(2a+b)yz + 2abz + ax^2 + 2(a+b)xy + by^2 - ax - by + c$$

だから $\dfrac{\partial F}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right) = \dfrac{\partial F}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) = \dfrac{\partial F}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) = \dfrac{\partial F}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{3}-\frac{b}{27c}\\ \frac{1}{3}-\frac{a}{27c}\\ -\frac{1}{27c}\end{smallmatrix}\right) = c \neq 0$ である. 従って, 陰関数定理から $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ の近傍で定義された関数 f_1 で $f_1\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) = 0$ を満たすもの, $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ の近傍で定義された関数 f_2 で $f_2\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = 0$ を満たすもの, $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ の近傍で定義された関数 f_3 で $f_3\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) = 0$ を満たすもの, $\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{3}-\frac{b}{27c}\\ \frac{1}{3}-\frac{a}{27c}\end{smallmatrix}\right)$ の近傍で定義された関数 f_4 で $f_4\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{3}-\frac{b}{27c}\\ \frac{1}{3}-\frac{a}{27c}\end{smallmatrix}\right) = -\dfrac{1}{27c}$ を満たすものが存在する. 従って $\boldsymbol{q}_1 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{q}_2 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{q}_3 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{q}_4 = \left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{3}-\frac{b}{27c}\\ \frac{1}{3}-\frac{a}{27c}\end{smallmatrix}\right)$ とおけば注意 7.3 より $\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}(\boldsymbol{q}_i) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{q}_i\\ f_i(\boldsymbol{q}_i)\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{q}_i\\ f_i(\boldsymbol{q}_i)\end{smallmatrix}\right)}$, $\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial y^2}(\boldsymbol{q}_i) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{q}_i\\ f_i(\boldsymbol{q}_i)\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{q}_i\\ f_i(\boldsymbol{q}_i)\end{smallmatrix}\right)}$, $\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{q}_i) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{q}_i\\ f_i(\boldsymbol{q}_i)\end{smallmatrix}\right)}{\frac{\partial F}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{q}_i\\ f_i(\boldsymbol{q}_i)\end{smallmatrix}\right)}$ が $i = 1, 2, 3, 4$ に対して成り立つため $H\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) - \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\right)^2$, $h_i(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}(\boldsymbol{x})\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial y^2}(\boldsymbol{x}) - \left(\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{x})\right)^2$ とおけば $i = 1, 2, 3, 4$ に対して $h_i(\boldsymbol{q}_i) = \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{q}_i\\ f_i(\boldsymbol{q}_i)\end{smallmatrix}\right)\right)^{-2} H\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{q}_i\\ f_i(\boldsymbol{q}_i)\end{smallmatrix}\right)$ が成り立つ.

ここで $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = 2az - 2y$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = 2bz - 2x$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = 2(a+b)z - 2x - 2y + 1$ であることから $H\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right) = H\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) = H\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) = -1$, $H\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{3}-\frac{b}{27c}\\ \frac{1}{3}-\frac{a}{27c}\\ -\frac{1}{27c}\end{smallmatrix}\right) = \dfrac{1}{3}$ となるため $h_1\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)^{-2} H\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right) = -\dfrac{1}{c^2} < 0$, $h_2\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)^{-2} H\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) = -\dfrac{1}{c^2} < 0$, $h_3\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)\right)^{-2} H\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) = -\dfrac{1}{c^2} < 0$ だから f_1, f_2, f_3 はそれぞれ $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ で極値をとらない. $h_4\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{3}-\frac{b}{27c}\\ \frac{1}{3}-\frac{a}{27c}\end{smallmatrix}\right) = \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{3}-\frac{b}{27c}\\ \frac{1}{3}-\frac{a}{27c}\\ -\frac{1}{27c}\end{smallmatrix}\right)\right)^{-2} H\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{3}-\frac{b}{27c}\\ \frac{1}{3}-\frac{a}{27c}\\ -\frac{1}{27c}\end{smallmatrix}\right) = \dfrac{1}{3c^2} > 0$ かつ $\dfrac{\partial^2 f_4}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{3}-\frac{b}{27c}\\ \frac{1}{3}-\frac{a}{27c}\end{smallmatrix}\right) = -\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{3}-\frac{b}{27c}\\ \frac{1}{3}-\frac{a}{27c}\\ -\frac{1}{27c}\end{smallmatrix}\right)\right)^{-1} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{3}-\frac{b}{27c}\\ \frac{1}{3}-\frac{a}{27c}\\ -\frac{1}{27c}\end{smallmatrix}\right) = -\dfrac{2}{3} < 0$ より f_4 は $\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{3}-\frac{b}{27c}\\ \frac{1}{3}-\frac{a}{27c}\end{smallmatrix}\right)$ で極大値 $-\dfrac{1}{27c}$ をとる. □

8 条件付き極値

X を $\boldsymbol{R}^2$ の開集合とし, $F, \varphi : X \to \boldsymbol{R}$ は C^2 級関数で, $\boldsymbol{p} = \binom{p}{q} \in X$ は $F(\boldsymbol{p}) = 0$ かつ $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p}) \neq 0$ を満たすとする. このとき, 陰関数定理により p を含む開区間 U と C^2 級関数 $f : U \to \boldsymbol{R}$ で, $f(p) = q$ であり, 各 $x \in U$ に対して $\binom{x}{f(x)} \in X$ かつ $F\binom{x}{f(x)} = 0$ を満たすものがある. また, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p}) \neq 0$ と $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, f の連続性から各 $x \in U$ に対して $\dfrac{\partial F}{\partial y}\binom{x}{f(x)} \neq 0$ であるように U をとっておく.

例題 8.1　上記の設定のもとで, 関数 $\psi : U \to \boldsymbol{R}$ を $\psi(x) = \varphi\binom{x}{f(x)}$ で定めるとき, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\begin{aligned}\psi''(x) = {} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\binom{x}{f(x)} - 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\binom{x}{f(x)}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\binom{x}{f(x)}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{f(x)} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\binom{x}{f(x)}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\binom{x}{f(x)}\right)^{-2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{f(x)}\right)^2 \\ & - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\binom{x}{f(x)}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\binom{x}{f(x)}\right)^{-1}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\binom{x}{f(x)} + 2\frac{\partial \varphi}{\partial y}\binom{x}{f(x)}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\binom{x}{f(x)}\right)^{-2}\frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{f(x)}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\binom{x}{f(x)} \\ & - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\binom{x}{f(x)}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\binom{x}{f(x)}\right)^{-3}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{f(x)}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\binom{x}{f(x)}\end{aligned}$$

解答例　関数 $\xi_1, \xi_2 : U \to \boldsymbol{R}$ を $\xi_1(x) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\binom{x}{f(x)}$, $\xi_2(x) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\binom{x}{f(x)}$ で定義すれば, 合成写像の微分法から

$$\psi'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\binom{x}{f(x)} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\binom{x}{f(x)}f'(x) = \xi_1(x) + \xi_2(x)f'(x) \quad \cdots (i)$$

$$\xi_1'(x) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\binom{x}{f(x)} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\binom{x}{f(x)}f'(x) \quad \cdots (ii) \qquad \xi_2'(x) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\binom{x}{f(x)} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\binom{x}{f(x)}f'(x) \quad \cdots (iii)$$

が得られる. 幾何学 II 系 5.3 から $f'(x) = -\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\binom{x}{f(x)}\right)^{-1}\dfrac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{f(x)}$ であり, 例題 7.2 から

$$f''(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\binom{x}{f(x)}\right)^{-3}\left(2\frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{f(x)}\frac{\partial F}{\partial y}\binom{x}{f(x)}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\binom{x}{f(x)} - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{f(x)}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\binom{x}{f(x)} - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\binom{x}{f(x)}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\binom{x}{f(x)}\right)$$

である. これらの等式と (i), (ii), (iii) より

$$\begin{aligned}\psi''(x) &= \xi_1'(x) + \xi_2'(x)f'(x) + \xi_2(x)f''(x) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\binom{x}{f(x)} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\binom{x}{f(x)}f'(x) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\binom{x}{f(x)}f'(x)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\binom{x}{f(x)}f''(x) \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\binom{x}{f(x)} - 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\binom{x}{f(x)}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\binom{x}{f(x)}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{f(x)} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\binom{x}{f(x)}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\binom{x}{f(x)}\right)^{-2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{f(x)}\right)^2 \\ &\quad + 2\frac{\partial \varphi}{\partial y}\binom{x}{f(x)}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\binom{x}{f(x)}\right)^{-2}\frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{f(x)}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\binom{x}{f(x)} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\binom{x}{f(x)}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\binom{x}{f(x)}\right)^{-3}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{f(x)}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\binom{x}{f(x)} \\ &\quad - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\binom{x}{f(x)}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\binom{x}{f(x)}\right)^{-1}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\binom{x}{f(x)}\end{aligned}$$

が得られるので, 主張が示された. □

例題 8.2　X を $\boldsymbol{R}^2$ の開集合とし, $F, \varphi : X \to \boldsymbol{R}$ は C^2 級関数で, $C = \{\boldsymbol{x} \in X \mid F(\boldsymbol{x}) = 0\}$ とおく. $\boldsymbol{p} \in C$ に対し $\dfrac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p}) \neq 0$ または $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p}) \neq 0$ であり $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(\boldsymbol{p}) = \lambda\dfrac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p})$ かつ $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(\boldsymbol{p}) = \lambda\dfrac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})$ を満たす実数 λ があると仮定する.

$$\delta = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\boldsymbol{p}) - \lambda\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\boldsymbol{p})\right)\left(\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})\right)^2 - 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{p}) - \lambda\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{p})\right)\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p})\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p}) + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(\boldsymbol{p}) - \lambda\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\boldsymbol{p})\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p})\right)^2$$

とおくとき, $\varphi : X \to \boldsymbol{R}$ の定義域を C に制限した関数 $\varphi|_C : C \to \boldsymbol{R}$ は, $\delta > 0$ ならば $\boldsymbol{p}$ において極小値をとり, $\delta < 0$ ならば $\boldsymbol{p}$ において極大値をとることを示せ.

解答例 $\boldsymbol{p} = \binom{p}{q}$ とおくと $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p}) \neq 0$ の場合, 陰関数定理により p を含む開区間 U と C^2 級関数 $f : U \to \boldsymbol{R}$ で, $f(p) = q$ であり, 各 $x \in U$ に対して $\binom{x}{f(x)} \in C$ を満たすものがある. 関数 $\psi : U \to \boldsymbol{R}$ を $\psi(x) = \varphi\binom{x}{f(x)}$ で定めれば, $f(p) = q$ より $\psi(p) = \varphi(\boldsymbol{p})$ であり, 幾何学 II 系 5.3 から $f'(p) = -\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})\right)^{-1}\dfrac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p})$ だから, 仮定から

$$\psi'(p) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\boldsymbol{p}) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\boldsymbol{p})f'(p) = \lambda\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p}) - \lambda\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})\left(\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p}) = 0$$

である. 例題 8.1 から, 次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}\psi''(p) = {} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\boldsymbol{p}) - 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{p})\left(\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p}) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(\boldsymbol{p})\left(\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})\right)^{-2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p})\right)^{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\boldsymbol{p})\left(\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})\right)^{-1}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\boldsymbol{p}) \\ & + 2\frac{\partial \varphi}{\partial y}(\boldsymbol{p})\left(\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})\right)^{-2}\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p})\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{p}) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\boldsymbol{p})\left(\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})\right)^{-3}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p})\right)^{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\boldsymbol{p})\end{aligned}$$

上式の両辺に $\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})\right)^2$ をかけて $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(\boldsymbol{p})$ に $\lambda\dfrac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})$ を代入すれば次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})\right)^2\psi''(p) &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\boldsymbol{p})\left(\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})\right)^2 - 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{p})\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p})\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p}) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(\boldsymbol{p})\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p})\right)^2 \\ &\quad - \lambda\left(\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\boldsymbol{p}) + 2\lambda\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p})\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{p}) - \lambda\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p})\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\boldsymbol{p}) \\ &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\boldsymbol{p}) - \lambda\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\boldsymbol{p})\right)\left(\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p})\right)^2 - 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{p}) - \lambda\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{p})\right)\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p})\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p}) \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(\boldsymbol{p}) - \lambda\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\boldsymbol{p})\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p})\right)^2 = \delta\end{aligned}$$

$\psi'(p) = 0$ であり, 上式から $\psi''(p)$ は δ と同符号だから $\delta > 0$ ならば ψ は p で極小値をとり, $\delta < 0$ ならば ψ は p で極大値をとる. f の選び方から $t \in U$ を $\binom{t}{f(t)}$ に対応させる写像は $\boldsymbol{p}$ の近くでの曲線 C のパラメータ表示であり $\psi(p) = \varphi(\boldsymbol{p})$ だから, φ の定義域を C に制限した関数は, $\delta > 0$ ならば $\boldsymbol{p} \in C$ において極小値をとり, $\delta < 0$ ならば $\boldsymbol{p} \in C$ において極大値をとる. δ の定義式は x と y を入れ替えても変わらない式だから, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p}) \neq 0$ の場合も同様に主張が示される. □

例題 8.3 $\varphi\binom{x}{y} = xy$ で定義される関数 $\varphi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ の条件 $ax^2y + xy^2 = 2a^2b^3$ $(a, b \neq 0)$ のもとでの極値を求めよ.

解答例 $F\binom{x}{y} = ax^2y + xy^2 - 2a^2b^3$ で $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を定義すると $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2axy + y^2$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = ax^2 + 2xy$ だから $F\binom{x}{y} = \dfrac{\partial F}{\partial x}\binom{x}{y} = \dfrac{\partial F}{\partial y}\binom{x}{y} = 0$ は $ax^2y + xy^2 = 2a^2b^3$ かつ $y(2ax + y) = x(ax + 2y) = 0$ と同値である. $a, b \neq 0$ より 1 つ目の方程式から $x \neq 0$ だから $ax + 2y = 0$ である. 故に $y = -\dfrac{a}{2}x$ だから $y(2ax + y) = 0$ から $x = 0$ が得られて矛盾が生じる. 従って $F(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}) = 0$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ は存在しないため, φ が条件 $F\binom{x}{y} = 0$ のもとで, 点 $\binom{x}{y}$ で極値をとるならば, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = x$ より, 次の関係式を満たす $\lambda \in \boldsymbol{R}$ が存在する.

$$ax^2y + xy^2 = 2a^2b^3 \cdots (i), \qquad y = \lambda(2axy + y^2) \cdots (ii), \qquad x = \lambda(ax^2 + 2xy) \cdots (iii)$$

(i) より $xy \neq 0$ だから (ii), (iii) より $\lambda(2ax + y) = \lambda(ax + 2y) = 1$ が得られるので $y = ax$ である. これを (i) に代入して $x = b$, $y = ab$ が得られるため, φ が条件 $F\binom{x}{y} = 0$ のもとで極値をとる可能性があるのは $\binom{b}{ab}$ のみである. $\dfrac{\partial F}{\partial x}\binom{b}{ab} = 3a^2b^2$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}\binom{b}{ab} = 3ab^2$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\binom{b}{ab} = 2a^2b$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\binom{b}{ab} = 4ab$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\binom{b}{ab} = 2b$, $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\binom{b}{ab} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\binom{b}{ab} = 0$, $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\binom{b}{ab} = 1$, $\lambda = \dfrac{1}{3ab}$ だから $\boldsymbol{p} = \binom{b}{ab}$ としたときの, 例題 8.2 の δ は $-6a^3b^4$ となるため, φ は条件 $F\binom{x}{y} = 0$ のもとで $\binom{b}{ab}$ において $a > 0$ ならば極大値 $\varphi\binom{b}{ab} = a^2b$ をとり, $a < 0$ ならば極小値 $\varphi\binom{a}{ab} = a^2b$ をとる. □

9 正規行列の対角化

例題 9.1　$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{C}^3$, $\lambda \in \boldsymbol{C}$, $\varepsilon = \pm 1$ として $A = \lambda E_3 + \varepsilon \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^*$ とおく. $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき, 以下の問いに答えよ.

(1) λ, $\boldsymbol{a}$, ε を用いて, A の固有値とそれらに対する固有空間を表せ.

(2) $\boldsymbol{a}$ の第 j 成分を a_j とする. $|a_1|^2 + |a_2|^2 \neq 0$ の場合に, A を対角化するユニタリー行列を一つ求めよ.

解答例　(1) $A\boldsymbol{a} = (\lambda E_3 + \varepsilon \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^*)\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a} + \varepsilon \|\boldsymbol{a}\|^2 \boldsymbol{a} = (\lambda + \varepsilon \|\boldsymbol{a}\|^2)\boldsymbol{a}$ より, $\lambda + \varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2$ は A の固有値で, $\boldsymbol{a}$ は $\lambda + \varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2$ に対する固有ベクトルである. $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{a} \rangle^\perp$ ならば $\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 0$ だから $A\boldsymbol{x} = (\lambda E_3 + \varepsilon \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^*)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ が得られる. 従って, λ は A の固有値で, $\langle \boldsymbol{a} \rangle^\perp$ は λ に対する固有空間に含まれる. $\boldsymbol{C}^3 = \langle \boldsymbol{a} \rangle \oplus \langle \boldsymbol{a} \rangle^\perp$ だから各 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^2$ に対して $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ を満たす $x \in \boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{b} \in \langle \boldsymbol{a} \rangle^\perp$ がある. $A\boldsymbol{x} = A(x\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = x(\lambda + \varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2)\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$ だから, $\mu \in \boldsymbol{C}$ に対して $A\boldsymbol{x} = \mu\boldsymbol{x}$ ならば $A\boldsymbol{x} = x\mu\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$ より $x \neq 0$ ならば $\mu = \lambda + \varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2$ かつ $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ であり, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $\mu = \lambda$ かつ $x = 0$ である. 故に A の固有値は $\lambda + \varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2$ と λ のみで, $\langle \boldsymbol{a} \rangle$ は $\lambda + \varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2$, $\langle \boldsymbol{a} \rangle^\perp$ は λ に対する固有空間である.
(2) $\boldsymbol{v} = -\bar{a}_2\boldsymbol{e}_1 + \bar{a}_1\boldsymbol{e}_2$ とおけば仮定から $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ であり $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = 0$ だから $\boldsymbol{v} \in \langle \boldsymbol{a} \rangle^\perp$ である. $\boldsymbol{w} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{v}$ の両方に垂直なベクトルとすれば $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = 0$ より $\begin{cases} \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 y + \bar{a}_3 z = 0 \\ -a_2 x + a_1 y = 0 \end{cases}$ が得られる. 従って $\boldsymbol{w} = -a_1\bar{a}_3\boldsymbol{e}_1 - a_2\bar{a}_3\boldsymbol{e}_2 + (|a_1|^2 + |a_2|^2)\boldsymbol{e}_3$ とおけば $\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{v}$ の両方に垂直で零でないベクトルである. 故に

$$P = \left(\frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a} \;\; \frac{1}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}}\boldsymbol{v} \;\; \frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}}\boldsymbol{w} \right) = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\|\boldsymbol{a}\|} & \frac{-\bar{a}_2}{\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}} & \frac{-a_1\bar{a}_3}{\|\boldsymbol{a}\|\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}} \\ \frac{a_2}{\|\boldsymbol{a}\|} & \frac{\bar{a}_1}{\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}} & \frac{-a_2\bar{a}_3}{\|\boldsymbol{a}\|\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}} \\ \frac{a_3}{\|\boldsymbol{a}\|} & 0 & \frac{\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}}{\|\boldsymbol{a}\|} \end{pmatrix}$$

は A を対角化するユニタリー行列であり, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda+\varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ である. □

例題 9.2　A を行列式の値が 1 である 3 次実直交行列とする. このとき $0 \leqq \theta \leqq \pi$ を満たす θ と行列式の値が 1 である 3 次実直交行列 P で, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるものが存在することを示し, θ は $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(\mathrm{tr}A - 1)$ を満たすことを示せ. 従って A は P の第 3 列 $P\boldsymbol{e}_3$ を方向ベクトルとして原点を通る直線を軸として $P\boldsymbol{e}_3$ の方向を向いて時計回りに θ だけ回転する 1 次変換を表す行列である.

解答例　A の固有多項式 $F_A(x)$ は x^3 の係数が 1 の実数係数の 3 次式だから, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F_A(x) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F_A(x) = \infty$ である. 従って中間値の定理から $F_A(x) = 0$ は実数解をもつ. A は正規行列だから, $F_A(x) = 0$ の解がすべて実数の場合は幾何学 II 命題 8.13 から A はエルミート行列になるが, A の成分はすべて実数なので A は対称行列である. また A は直交行列だから A の固有値の絶対値は 1 で, $F_A(x) = 0$ のすべての解の積は A の行列式の値 1 に等しいため, $F_A(x) = 0$ は 1 を三重解にもつか, 1 と重解 -1 を解にもつ. A は実対称行列だから A を対角化する実直交行列 P が存在して, 前者の場合は $P^{-1}AP = E_3$ となるため, $A = E_3$ だから $\theta = 0$ であり, 後者の場合は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

だから $\theta = \pi$ である. ここで, 必要ならば P の第 1 列と第 2 列を入れ替えることによって, $|P| = 1$ であるとしてよい.

$F_A(x) = 0$ が虚数解をもつ場合, その解を β とすれば $F_A(x)$ の係数がすべて実数であることから $\bar{\beta}$ も $F_A(x) = 0$ の解である. $F_A(x) = 0$ の実数解を α とすれば, 仮定と幾何学 II 命題 7.20 から $\alpha|\beta|^2 = \alpha\beta\bar{\beta} = |A| = 1$ であり, A はユニタリー行列だから幾何学 II 命題 8.12 から $|\beta| = 1$ となるため $\alpha = 1$ である. 従って $\beta = \cos\theta + i\sin\theta$, $\bar{\beta} = \cos\theta - i\sin\theta$ を満たす θ がある. 必要なら β を $\bar{\beta}$ で置き換えることによって $0 < \theta < \pi$ と仮定してよい. A の固有値 $\cos\theta - i\sin\theta$ に対する長さ 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{u}$ とすれば $A\boldsymbol{u} = (\cos\theta - i\sin\theta)\boldsymbol{u}$ だから, $A\bar{\boldsymbol{u}} = \bar{A}\bar{\boldsymbol{u}} = \overline{A\boldsymbol{u}} = \overline{(\cos\theta - i\sin\theta)\boldsymbol{u}} = (\cos\theta + i\sin\theta)\bar{\boldsymbol{u}}$ となるため, $\bar{\boldsymbol{u}}$ は $\cos\theta + i\sin\theta$ に対する長さ 1 の固有ベクト

ルである. $\boldsymbol{u}$ と $\bar{\boldsymbol{u}}$ は正規行列 A の相異なる固有値に対する固有ベクトルだから, 幾何学 II 命題 8.6 によりこれらは直交する. $\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}+\bar{\boldsymbol{u}})$, $\boldsymbol{y} = \dfrac{1}{\sqrt{2}i}(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})$ とおけば, $\bar{\boldsymbol{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\boldsymbol{u}}+\bar{\bar{\boldsymbol{u}}}) = \boldsymbol{x}$, $\bar{\boldsymbol{y}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}i}(\bar{\boldsymbol{u}}-\bar{\bar{\boldsymbol{u}}}) = \boldsymbol{y}$ より $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^3$ であり, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\dfrac{1}{2i}(\boldsymbol{u}+\bar{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}) = -\dfrac{1}{2i}((\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})-(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{u}})) = 0$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{u}+\bar{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{u}+\bar{\boldsymbol{u}}) = \dfrac{1}{2}((\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})+(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{u}})) = 1$, $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}) = \dfrac{1}{2}((\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})+(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{u}})) = 1$ となるため, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ は正規直交系である. さらに, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ とおくと, $\boldsymbol{z}$ は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の両方に垂直な単位ベクトルであり, $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}]$ は $\boldsymbol{R}^3$ の右手系の正規直交基底だから P を $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ をそれぞれ第 1 列, 第 2 列, 第 3 列にもつ行列とすれば P は行列式の値が 1 である直交行列である. A の固有値 1 に対する固有空間は固有値 β, $\bar{\beta}$ に対する固有空間と直交するため, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の両方に垂直である. 故に $\boldsymbol{z}$ は A の固有値 1 に対する固有ベクトルである. $A\boldsymbol{u} = (\cos\theta - i\sin\theta)\boldsymbol{u}$, $A\bar{\boldsymbol{u}} = (\cos\theta + i\sin\theta)\bar{\boldsymbol{u}}$ から, $A\boldsymbol{x} = \cos\theta\boldsymbol{x} + \sin\theta\boldsymbol{y}$, $A\boldsymbol{y} = -\sin\theta\boldsymbol{x} + \cos\theta\boldsymbol{y}$ が得られ, $A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}$ だから次の等式が得られる.

$$\begin{aligned} AP &= A\begin{pmatrix}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A\boldsymbol{x} & A\boldsymbol{y} & A\boldsymbol{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\boldsymbol{x}+\sin\theta\boldsymbol{y} & -\sin\theta\boldsymbol{x}+\cos\theta\boldsymbol{y} & \boldsymbol{z}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\cos\theta P\boldsymbol{e}_1+\sin\theta P\boldsymbol{e}_2 & -\sin\theta P\boldsymbol{e}_1+\cos\theta P\boldsymbol{e}_2 & P\boldsymbol{e}_3\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2 & -\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix} \end{aligned}$$

従って $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2 & -\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}$ が成り立つため, 前半の結果が得られる. このとき, 幾何学 II 命題 7.4 の (2) から $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}(P^{-1}AP) = 2\cos\theta + 1$ だから $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(\mathrm{tr}A - 1)$ が得られる. □

例題 9.3 A, θ を例題 9.2 と同じとする. A が対称行列でないとして, $\dfrac{1}{2}(A - {}^t\!A)$ の $(3,2)$ 成分, $(1,3)$ 成分, $(2,1)$ 成分をそれぞれ順に第 1 成分, 第 2 成分, 第 3 成分とする $\boldsymbol{R}^3$ のベクトルを $\boldsymbol{v}$ とすれば $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$, $\|\boldsymbol{v}\| = \sin\theta$ が成り立つことを示せ. また $\boldsymbol{v}$ を方向ベクトルとして原点を通る直線を ℓ とすれば, A が表す $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換は, ℓ を軸に $\boldsymbol{v}$ の方向を向いて時計回りに θ だけ回転する 1 次変換であることを示せ.

解答例 ${}^t\!\left(\dfrac{1}{2}(A - {}^t\!A)\right) = -\dfrac{1}{2}(A - {}^t\!A)$ が成り立つため $\dfrac{1}{2}(A - {}^t\!A) = \begin{pmatrix}0 & -c & b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{pmatrix}$ とおける. このとき $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ だから $\dfrac{1}{2}(A - {}^t\!A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ が成り立ち, A は対称行列ではないので $\dfrac{1}{2}(A - {}^t\!A) \neq O$ だから $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ である. A が直交行列で ${}^t\!A = A^{-1}$ であることから $\dfrac{1}{2}(A - {}^t\!A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ より $A\boldsymbol{v} = {}^t\!A\boldsymbol{v} = A^{-1}\boldsymbol{v}$, 従って $A^2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ が得られる. P を例題 9.2 の直交行列として $\boldsymbol{v}' = P^{-1}\boldsymbol{v}$ とおけば $\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{v}'$ だから $A^2P\boldsymbol{v}' = P\boldsymbol{v}'$ より $(P^{-1}AP)^2\boldsymbol{v}' = P^{-1}A^2P\boldsymbol{v}' = P^{-1}P\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}'$ である. 従って $\boldsymbol{v}'$ は $(P^{-1}AP)^2$ の固有値 1 に対する固有ベクトルである. 一方 $(P^{-1}AP)^2 = \begin{pmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ であり, この行列は z 軸の周りに 2θ の回転を表すため, $(P^{-1}AP)^2$ の固有値 1 に対する固有空間は $\boldsymbol{e}_3$ で生成される部分空間である. 故に $\boldsymbol{v}' = k\boldsymbol{e}_3$ を満たす実数 k が存在することと $P^{-1}AP$ の第 3 列が $\boldsymbol{e}_3$ だから $AP\boldsymbol{e}_3 = P\boldsymbol{e}_3$ であることから $A\boldsymbol{v} = AP\boldsymbol{v}' = kAP\boldsymbol{e}_3 = kP\boldsymbol{e}_3 = P\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}$ が成り立ち, $\boldsymbol{v}$ は A の固有値 1 に対する固有ベクトルである. 例題 9.2 の解答と同様に $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ を定めれば $A\boldsymbol{x} = \cos\theta\boldsymbol{x} + \sin\theta\boldsymbol{y}$, $A\boldsymbol{y} = -\sin\theta\boldsymbol{x} + \cos\theta\boldsymbol{y}$ が得られ, $\boldsymbol{z}$ は A の固有値 1 に対する固有空間の基底で単位ベクトルである. 従って $\boldsymbol{v} = r\boldsymbol{z}$ となる $r \in \boldsymbol{R}$ が存在する. $A\boldsymbol{x} = \cos\theta\boldsymbol{x} + \sin\theta\boldsymbol{y}$, $A\boldsymbol{y} = -\sin\theta\boldsymbol{x} + \cos\theta\boldsymbol{y}$ より $A^{-1}\boldsymbol{x} = \cos\theta\boldsymbol{x} - \sin\theta\boldsymbol{y}$ が得られ, 任意の $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して $\dfrac{1}{2}(A - {}^t\!A)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$ が成り立つことと ${}^t\!A = A$ に注意すれば

$$\begin{aligned} r &= r(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{z}, r\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{z},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{v}) = \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{v}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{v}\end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ &= \frac{1}{2}((A - {}^t\!A)\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}(A\boldsymbol{x} - A^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\sin\theta\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) = \sin\theta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) = \sin\theta \end{aligned}$$

が得られる. 故に $r = \sin\theta > 0$ で $\boldsymbol{v} = r\boldsymbol{z}$ だから $\|\boldsymbol{v}\| = \|\sin\theta\boldsymbol{z}\| = \sin\theta\|\boldsymbol{z}\| = \sin\theta$ である.

$\boldsymbol{R}^3$ の右手系の正規直交基底 $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}]$ に関する A の表現行列は $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ だから A は原点を通り $\boldsymbol{z}$ 方向の直線を軸に $\boldsymbol{z}$ 方向を向いて時計回りに θ だけ回転する $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換を表す. $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{z}$ の正の実数 $\sin\theta$ 倍をしたベクトルだから A は ℓ を軸に $\boldsymbol{v}$ の方向を向いて時計回りに θ だけ回転する 1 次変換を表す. □

10　実正規行列の標準化

$\boldsymbol{C}^n$ を $\boldsymbol{R}$ 上の $2n$ 次元ベクトル空間とみなせば, $\boldsymbol{R}^n$ は $\boldsymbol{C}^n$ の n 次元部分空間であることに注意する.

例題 10.1　$\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が $\boldsymbol{R}^n$ において 1 次独立であるためには, $\boldsymbol{R}^n \subset \boldsymbol{C}^n$ とみなしたとき, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が $\boldsymbol{C}^n$ において 1 次独立であることが必要十分であることを示せ.

解答例　$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が $\boldsymbol{C}^n$ において 1 次独立ならば $\boldsymbol{R}^n$ において 1 次独立であることは明らかである. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が $\boldsymbol{R}^n$ において 1 次独立であるとして, $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \boldsymbol{C}$ に対し $z_1\boldsymbol{v}_1 + z_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + z_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ が成り立つとする. $z_j = x_j + y_j i$ $(x_j, y_j \in \boldsymbol{R}, j = 1, 2, \ldots, k)$ とおいて上式に代入すれば次の等式が得られる.

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k + i(y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_k\boldsymbol{v}_k) = \boldsymbol{0}$$

$x_1\boldsymbol{v}_1+x_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+x_k\boldsymbol{v}_k, y_1\boldsymbol{v}_1+y_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+y_k\boldsymbol{v}_k \in \boldsymbol{R}^n$ だから, $x_1\boldsymbol{v}_1+x_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+x_k\boldsymbol{v}_k = y_1\boldsymbol{v}_1+y_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+y_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ が成り立つ. 故に $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の $\boldsymbol{R}^n$ における 1 次独立性から $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = y_1 = y_2 = \cdots = y_k = 0$ である. 従って $z_1 = z_2 = \cdots = z_k = 0$ となるため $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は $\boldsymbol{C}^n$ において 1 次独立である.　□

例題 10.2　$A \in M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ の階数 $\mathrm{rank}_{\boldsymbol{R}}A$ は, A を $A \in M_{m,n}(\boldsymbol{C})$ とみなした場合の階数 $\mathrm{rank}_{\boldsymbol{C}}A$ と等しいことを示せ.

解答例　$\mathrm{rank}_{\boldsymbol{R}}A$ は A の列ベクトル $A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \ldots, A\boldsymbol{e}_n \in \boldsymbol{R}^m$ の中で 1 次独立なベクトルの最大個数であるが, 例題 10.1 により, この個数は $A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \ldots, A\boldsymbol{e}_n$ を $\boldsymbol{C}^m$ のベクトルとみなした場合の 1 次独立なベクトルの最大個数に等しい. さらにこの個数は $\mathrm{rank}_{\boldsymbol{C}}A$ であるため $\mathrm{rank}_{\boldsymbol{R}}A = \mathrm{rank}_{\boldsymbol{C}}A$ である.　□

例題 10.3　$A \in M_{m,n}(\boldsymbol{K})$ に対し, $V = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n | \, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ とおけば, $\dim V = n - \mathrm{rank}A$ であることを示せ.

解答例　$\dim V = k$ とおいて $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を V の基底とする. また, $\mathrm{rank}A = r$ とおいて, $A\boldsymbol{e}_{j_1}, A\boldsymbol{e}_{j_2}, \ldots, A\boldsymbol{e}_{j_r}$ $(1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqq n)$ が 1 次独立であるとする. ここで, r は A の列ベクトル $A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \ldots, A\boldsymbol{e}_n$ の中で 1 次独立なベクトルの最大個数であるため, 任意の $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $A\boldsymbol{e}_{j_1}, A\boldsymbol{e}_{j_2}, \ldots, A\boldsymbol{e}_{j_r}, A\boldsymbol{e}_i$ は 1 次従属になる. 従って $A\boldsymbol{e}_i$ は $A\boldsymbol{e}_{j_1}, A\boldsymbol{e}_{j_2}, \ldots, A\boldsymbol{e}_{j_r}$ の 1 次結合で表される.

任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し, $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ とおくと $A\boldsymbol{x} = x_1A\boldsymbol{e}_1 + x_2A\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_nA\boldsymbol{e}_n$ だから, 上のことから $A\boldsymbol{x}$ は $A\boldsymbol{e}_{j_1}, A\boldsymbol{e}_{j_2}, \ldots, A\boldsymbol{e}_{j_r}$ の 1 次結合になるため $A\boldsymbol{x} = y_1A\boldsymbol{e}_{j_1} + y_2A\boldsymbol{e}_{j_2} + \cdots + y_rA\boldsymbol{e}_{j_r}$ と表すことができる. このとき $A(\boldsymbol{x} - (y_1\boldsymbol{e}_{j_1} + y_2\boldsymbol{e}_{j_2} + \cdots + y_r\boldsymbol{e}_{j_r})) = \boldsymbol{0}$ が成り立つため, $\boldsymbol{x} - (y_1\boldsymbol{e}_{j_1} + y_2\boldsymbol{e}_{j_2} + \cdots + y_r\boldsymbol{e}_{j_r}) \in V$ である. よって $\boldsymbol{x} - (y_1\boldsymbol{e}_{j_1} + y_2\boldsymbol{e}_{j_2} + \cdots + y_r\boldsymbol{e}_{j_r}) = z_1\boldsymbol{v}_1 + z_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + z_k\boldsymbol{v}_k$ と表されるため,

$$\boldsymbol{x} = y_1\boldsymbol{e}_{j_1} + y_2\boldsymbol{e}_{j_2} + \cdots + y_r\boldsymbol{e}_{j_r} + z_1\boldsymbol{v}_1 + z_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + z_k\boldsymbol{v}_k$$

である. 故に $\boldsymbol{e}_{j_1}, \boldsymbol{e}_{j_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_r}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は $\boldsymbol{K}^n$ を生成する.

$a_1\boldsymbol{e}_{j_1} + a_2\boldsymbol{e}_{j_2} + \cdots + a_r\boldsymbol{e}_{j_r} + b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ が成り立つとして, この両辺に左から A をかけると, $j = 1, 2, \ldots, k$ に対して $A\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0}$ より $a_1A\boldsymbol{e}_{j_1} + a_2A\boldsymbol{e}_{j_2} + \cdots + a_rA\boldsymbol{e}_{j_r} = \boldsymbol{0}$ である. $A\boldsymbol{e}_{j_1}, A\boldsymbol{e}_{j_2}, \ldots, A\boldsymbol{e}_{j_r}$ は 1 次独立だから $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$ であり, これより $b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ を得る. さらに $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は 1 次独立だから $b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0$ である. 従って $\boldsymbol{e}_{j_1}, \boldsymbol{e}_{j_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_r}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は 1 次独立である. 以上から $\boldsymbol{e}_{j_1}, \boldsymbol{e}_{j_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_r}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は $\boldsymbol{K}^n$ の基底であるため $r + k = n$ である. よって $\dim V = k = n - r = n - \mathrm{rank}A$ が成り立つ.　□

例題 10.4　$A \in M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ に対し, $V = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n | \, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$, $W = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n | \, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ とおく. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が W の基底ならば $\boldsymbol{R}^n \subset \boldsymbol{C}^n$ とみなしたとき, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は V の基底であることを示せ.

解答例 例題 10.3 と例題 10.2 から $\dim V = n - \mathrm{rank}_{\boldsymbol{C}} A = n - \mathrm{rank}_{\boldsymbol{R}} A = \dim V = k$ である. 一方, 例題 10.1 から $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ は V の 1 次独立な k 個のベクトルだから $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ は V の基底である. □

例題 10.5 λ を $A \in M_n(\boldsymbol{R})$ の実数の固有値とし, V_λ を λ に対する A の固有空間 $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n \,|\, A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$ とする. このとき, V_λ の正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ で, $j = 1, 2, \dots, k$ に対して $\boldsymbol{v}_j \in \boldsymbol{R}^n$ であるものが存在することを示せ.

解答例 $\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \dots, \boldsymbol{v}'_k$ を $W_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \,|\, A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$ の基底として, これらを正規直交化したものを $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ とすれば, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ は W_λ の正規直交基底である. さらに例題 10.4 により $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ は V_λ の基底である. □

例題 10.6 μ を $A \in M_n(\boldsymbol{R})$ の虚数の固有値とし, V_μ を μ に対する A の固有空間とする.

(1) μ の共役複素数 $\bar{\mu}$ も A の固有値で, $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n \,|\, \bar{\boldsymbol{x}} \in V_\mu\}$ は $\bar{\mu}$ に対する A の固有空間であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ が V_μ の基底ならば $\bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \bar{\boldsymbol{v}}_k$ は $\bar{\mu}$ に対する A の固有空間 $V_{\bar{\mu}}$ の基底であることを示せ.

(3) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ が V_μ の正規直交基底ならば $\bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \bar{\boldsymbol{v}}_k$ は $V_{\bar{\mu}}$ の正規直交基底であることを示せ.

解答例 (1) $\boldsymbol{x}$ を μ に対する A の固有ベクトルとして $A\boldsymbol{x} = \mu\boldsymbol{x}$ の両辺の共役を考えれば幾何学 II 命題 7.3 の (2) により $\overline{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\mu}\bar{\boldsymbol{x}}$ である. 一方 A の成分は実数だから $\overline{A} = A$ であるため, $A\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\mu}\bar{\boldsymbol{x}}$ となって $\bar{\mu}$ も A の固有値で, $\bar{\boldsymbol{x}}$ は $\bar{\mu}$ に対する A の固有ベクトルである. $\bar{\mu}$ に対する A の固有空間を $V_{\bar{\mu}}$ とすれば, $\bar{\boldsymbol{x}} \in V_\mu$ ならば $\boldsymbol{x} = \bar{\bar{\boldsymbol{x}}} \in V_{\bar{\mu}}$ である. 逆に $\boldsymbol{x} \in V_{\bar{\mu}}$ ならば $A\boldsymbol{x} = \bar{\mu}\boldsymbol{x}$ だから, 両辺の共役を考えると $A\bar{\boldsymbol{x}} = \mu\bar{\boldsymbol{x}}$ となるため $\bar{\boldsymbol{x}} \in V_\mu$ である. 故に $V_{\bar{\mu}} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n \,|\, \bar{\boldsymbol{x}} \in V_\mu\}$ が成り立つ.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ を V_μ の基底とする. $x_1\bar{\boldsymbol{v}}_1 + x_2\bar{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_k\bar{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{0}$ ならば, 両辺の共役を考えると $\bar{x}_1\boldsymbol{v}_1 + \bar{x}_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \bar{x}_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ が得られ, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ の 1 次独立性により $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \cdots = \bar{x}_k = 0$ である. 従って $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ となるため $\bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \bar{\boldsymbol{v}}_k$ は 1 次独立である. 任意の $\boldsymbol{x} \in V_{\bar{\mu}}$ に対して $\bar{\boldsymbol{x}} \in V_\mu$ だから $\bar{\boldsymbol{x}} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k$ と表される. この両辺の共役をとれば $\boldsymbol{x} = x_1\bar{\boldsymbol{v}}_1 + x_2\bar{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_k\bar{\boldsymbol{v}}_k$ と なるため, $\bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \bar{\boldsymbol{v}}_k$ は $V_{\bar{\mu}}$ を生成する. 従って $\bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \bar{\boldsymbol{v}}_k$ は $V_{\bar{\mu}}$ の基底である.

(3) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ を V_μ の正規直交基底とする. (2) により $\bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \bar{\boldsymbol{v}}_k$ は $V_{\bar{\mu}}$ の基底であり,

$$(\bar{\boldsymbol{v}}_i, \bar{\boldsymbol{v}}_j) = {}^t\bar{\boldsymbol{v}}_i\boldsymbol{v}_j = \overline{{}^t\boldsymbol{v}_i\bar{\boldsymbol{v}}_j} = \overline{(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

だから $\bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \bar{\boldsymbol{v}}_k$ は正規直交系である. □

共役複素数の性質から, 実数を係数にもつ方程式 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ $(a_n \neq 0)$ が α を解にもてば, $\bar{\alpha}$ も解であることが容易に示されるため, 代数学の基本定理から次の結果が得られる.

命題 10.7 実数を係数にもつ 1 変数の多項式は, 実数を係数とする 1 次式と 2 次式の積に因数分解される.

成分が実数である正規行列を実正規行列と呼ぶ. A を n 次実正規行列とすれば, 命題 10.7 により, A の固有多項式 $F_A(x)$ は $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ を相異なる実数, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ を相異なる虚数として

$$F_A(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots(x-\lambda_r)^{m_r}(x-\mu_1)^{l_1}(x-\bar{\mu}_1)^{l_1}(x-\mu_2)^{l_2}(x-\bar{\mu}_2)^{l_2}\cdots(x-\mu_s)^{l_s}(x-\bar{\mu}_s)^{l_s}$$

$(m_1 + m_2 + \cdots + m_r + 2(l_1 + l_2 + \cdots + l_s) = n)$ という形に因数分解される. A を複素数を成分とする行列とみなせば $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2, \bar{\mu}_2, \dots, \mu_s, \bar{\mu}_s$ は相異なる A の固有値であり, λ_j, μ_j, $\bar{\mu}_j$ に対する A の固有空間をそれぞれ V_{λ_j}, V_{μ_j}, $V_{\bar{\mu}_j}$ とする. このとき幾何学 II 定理 7.26 により, $\dim V_{\lambda_j} = m_j$, $\dim V_{\mu_j} = \dim V_{\bar{\mu}_j} = l_j$ であることに注意する. λ_j は実数だから, 例題 10.5 により V_{λ_j} の正規直交基底 $\boldsymbol{v}_{j1}, \boldsymbol{v}_{j2}, \dots, \boldsymbol{v}_{j\,m_j}$ で, $\boldsymbol{R}^n$ に含まれるものがとれる. また, $\boldsymbol{w}_{j1}, \boldsymbol{w}_{j2}, \dots, \boldsymbol{w}_{j\,l_j}$ を V_{μ_j} の正規直交基底とすれば, 例題 10.6 により $\bar{\boldsymbol{w}}_{j1}, \bar{\boldsymbol{w}}_{j2}, \dots, \bar{\boldsymbol{w}}_{j\,l_j}$ は $V_{\bar{\mu}_j}$ の正規直交基底である. そこで $j = 1, 2, \dots, s$, $k = 1, 2, \dots, l_j$ に対して

$$\boldsymbol{x}_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{w}_{jk} + \bar{\boldsymbol{w}}_{jk}), \qquad \boldsymbol{y}_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\boldsymbol{w}_{jk} - \bar{\boldsymbol{w}}_{jk})$$

とおくと $\boldsymbol{x}_{jk}, \boldsymbol{y}_{jk} \in \boldsymbol{R}^n$ であり, $\boldsymbol{w}_{jk} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{x}_{jk} + i\boldsymbol{y}_{jk})$, $\bar{\boldsymbol{w}}_{jk} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{x}_{jk} - i\boldsymbol{y}_{jk})$ が成り立つため,

$$A\boldsymbol{x}_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A\boldsymbol{w}_{jk} + A\bar{\boldsymbol{w}}_{jk}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu_j\boldsymbol{w}_{jk} + \bar{\mu}_j\bar{\boldsymbol{w}}_{jk}) = \frac{1}{2}(\mu_j + \bar{\mu}_j)\boldsymbol{x}_{jk} - \frac{1}{2i}(\mu_j - \bar{\mu}_j)\boldsymbol{y}_{jk}$$

$$A\boldsymbol{y}_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2}i}(A\boldsymbol{w}_{jk} - A\bar{\boldsymbol{w}}_{jk}) = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\mu_j\boldsymbol{w}_{jk} - \bar{\mu}_j\bar{\boldsymbol{w}}_{jk}) = \frac{1}{2i}(\mu_j - \bar{\mu}_j)\boldsymbol{x}_{jk} + \frac{1}{2}(\mu_j + \bar{\mu}_j)\boldsymbol{y}_{jk}$$

である. 従って $\mu_j = a_j + b_j i$ $(a_j, b_j \in \boldsymbol{R})$ とおくと

$$A\boldsymbol{x}_{jk} = a_j\boldsymbol{x}_{jk} - b_j\boldsymbol{y}_{jk}, \qquad A\boldsymbol{y}_{jk} = b_j\boldsymbol{x}_{jk} + a_j\boldsymbol{y}_{jk} \quad \cdots (*)$$

が成り立つ. 幾何学 II 命題 8.6 により

$$\boldsymbol{v}_{11}, \boldsymbol{v}_{12}, \ldots, \boldsymbol{v}_{1m_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{r1}, \boldsymbol{v}_{r2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{r\,m_r}, \boldsymbol{w}_{11}, \bar{\boldsymbol{w}}_{11}, \ldots, \boldsymbol{w}_{1l_1}, \bar{\boldsymbol{w}}_{1l_1}, \ldots, \boldsymbol{w}_{s1}, \bar{\boldsymbol{w}}_{s1}, \ldots, \boldsymbol{w}_{s\,l_s}, \bar{\boldsymbol{w}}_{s\,l_s}$$

は $\boldsymbol{C}^n$ の正規直交系だから, $\|\boldsymbol{v}_{jk}\| = \|\boldsymbol{w}_{jk}\| = \|\bar{\boldsymbol{w}}_{jk}\| = 1$, $(\boldsymbol{v}_{jk}, \boldsymbol{w}_{lm}) = (\boldsymbol{v}_{jk}, \bar{\boldsymbol{w}}_{lm}) = (\boldsymbol{w}_{jk}, \bar{\boldsymbol{w}}_{lm}) = 0$ であり, $(j,k) \neq (k,l)$ ならば $(\boldsymbol{v}_{jk}, \boldsymbol{v}_{lm}) = (\boldsymbol{w}_{jk}, \boldsymbol{w}_{lm}) = (\bar{\boldsymbol{w}}_{jk}, \bar{\boldsymbol{w}}_{lm}) = 0$ が成り立つため $\boldsymbol{x}_{jk}$, $\boldsymbol{y}_{jk}$ の定義から

$$\boldsymbol{v}_{11}, \boldsymbol{v}_{12}, \ldots, \boldsymbol{v}_{1m_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{r1}, \boldsymbol{v}_{r2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{r\,m_r}, \boldsymbol{x}_{11}, \boldsymbol{y}_{11}, \ldots, \boldsymbol{x}_{1l_1}, \boldsymbol{y}_{1l_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{s1}, \boldsymbol{y}_{s1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{s\,l_s}, \boldsymbol{y}_{s\,l_s}$$

は $\boldsymbol{R}^n$ の正規直交系である. これらのベクトルをこの順に列ベクトルにもつ行列を P とすれば, 幾何学 II 命題 8.7 により, P は直交行列である.

$A\boldsymbol{v}_{jk} = \lambda_j\boldsymbol{v}_{jk}$ と関係式 $(*)$ が成り立つことから, $C_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$ とおき, D_j を l_j 個の C_j が対角線上に並んだ

$$D_j = \begin{pmatrix} C_j & & & \huge 0 \\ & C_j & & \\ & & \ddots & \\ \huge 0 & & & C_j \end{pmatrix}$$

という形の $2l_j$ 次正方行列とすれば, $P^{-1}AP$ は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{m_1} & & & & & \\ & \ddots & & & \huge 0 & \\ & & \lambda_r E_{m_r} & & & \\ & & & D_1 & & \\ & \huge 0 & & & \ddots & \\ & & & & & D_s \end{pmatrix}$$

という形になる. 以上から, 次の定理が示された.

定理 10.8 A を実正規行列とするとき, 直交行列 P で $P^{-1}AP$ が対角線上に対角行列と $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の形の行列が並ぶようになるものがある.

実正規行列 A に対して直交行列 P で $P^{-1}AP$ が対角線上に対角行列と $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の形の行列が並ぶようになるものを求め, さらにその P に対して $P^{-1}AP$ を求めることを,「A を標準化する」という.

11　行列の級数

例題 11.1　$a_k, x_0 \in \boldsymbol{C}$ とする．$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ が収束すれば，$|x| < |x_0|$ を満たす任意の複素数 x に対して $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^k$ は絶対収束し，$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ が発散すれば，$|x| > |x_0|$ を満たす任意の複素数 x に対して $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ は発散することを示せ．

解答例　$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ が収束すれば，$\lim_{k\to\infty} a_k x_0^k = 0$ であり，収束する点列は有界だから，実数 K で 0 以上のすべての整数 k に対して $|a_k x_0^k| \leqq K$ を満たすものが存在する．$|x| < |x_0|$ ならば $|a_k x^k| = |a_k x_0^k|\left|\dfrac{x}{x_0}\right|^k \leqq K\left|\dfrac{x}{x_0}\right|^k$ が 0 以上のすべての整数 k に対して成り立つ．$\left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1$ だから等比級数 $\sum_{k=0}^{\infty} K\left|\dfrac{x}{x_0}\right|$ は収束するため，0 以上の任意の整数 N に対して $\sum_{k=0}^{N} |a_k x^k| \leqq \sum_{k=0}^{N} K\left|\dfrac{x}{x_0}\right| \leqq \sum_{k=0}^{\infty} K\left|\dfrac{x}{x_0}\right|$ だから $\sum_{k=0}^{N} |a_k x^k|$ は上に有界である．従って幾何学 II 命題 9.6 から $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ は絶対収束する．もし $|x| > |x_0|$ を満たす x で $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ が収束するものがあれば，上の結果から $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ は絶対収束する．従って $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ が $x = x_0$ で発散すれば，$|x| > |x_0|$ を満たす任意の x に対して $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ は発散する．　□

例題 11.2　複素数を係数とする整級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ について，以下の三つのうち一つが成り立つことを示せ．

(i) 任意の複素数 x に対して $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ は絶対収束する．

(ii) 条件「$|x| < \rho$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ は絶対収束し，$|x| > \rho$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ は発散する.」を満たす $\rho > 0$ がある．

(iii) $x \neq 0$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ は発散する．

解答例　明らかに (i), (ii), (iii) のうちのどの二つも同時に成り立たない．(i) と (iii) が成り立たない場合に (ii) が成り立つことを示す．(iii) が成り立たないことから，0 でない複素数 c で $\sum_{k=0}^{\infty} a_k c^k$ が収束するものがあるため，例題 11.1 から，$|x| < |c|$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ は絶対収束する．そこで，$S = \left\{ s \in \boldsymbol{R} \,\middle|\, |x| < s \text{ ならば } \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ は絶対収束する.} \right\}$ によって正の実数全体の集合の部分集合 S を定めれば $|c| \in S$ だから S は空集合ではない．また，(i) が成り立たないことから，S に属さない正の実数 d がある．もし $s_0 > d$ である S の要素 s_0 が存在すれば，$|d| = d < s_0$ だから $\sum_{k=0}^{\infty} a_k d^k$ は絶対収束するため，例題 11.1 から，$|x| < d$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ は絶対収束する．このことは，d が S に属さないことに矛盾する．故に，任意の $s \in S$ に対して $s \leqq d$ となるため，S は上に有界な空でない $\boldsymbol{R}$ の部分集合である．幾何学 I 定理 10.12 によって S は上限をもつため，それを ρ とおく．

$|x| < \rho$ ならば $\dfrac{|x| + \rho}{2} < \rho$ であり，ρ は S の上限だから $\dfrac{|x| + \rho}{2} < s \leqq \rho$ を満たす $s \in S$ が存在する．さらに $|x| < \dfrac{|x| + \rho}{2} < s$ だから $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ は絶対収束する．故に「$|x| < \rho$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ は絶対収束する.」ことが示せた．

$|x_0| > \rho$ を満たす複素数 x_0 で，$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ が収束するものが存在すると仮定する．このとき例題 11.1 によって，$|x| < |x_0|$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ は絶対収束するため，$|x_0| \in S$ となって，$|x_0| > \rho$ は ρ が S の上界であることと矛盾する．従って，$|x| > \rho$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ は発散する．　□

整級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ の収束半径を，上の例題の (i) の場合は無限大，(ii) の場合は ρ，(iii) の場合は 0 であると定義する．

例題 11.3 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$, $g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k$ をそれぞれ収束半径が $\alpha,\ \beta$ である整級数とする.

(1) $f(x)^m=\sum_{k=0}^{\infty}c_{m,k}x^k$ とするとき, $a_0,a_1,a_2,\ldots$ を用いて $c_{m,k}$ を表せ.

(2) $a_0=0$ とし, $0<\gamma\leqq\alpha$ は条件「$|x|<\gamma$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k||x|^k<\beta$」を満たすとする. $X\in M_n(\boldsymbol{C})$ が $\|X\|<\gamma$ を満たすならば $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{k}b_mc_{m,k}\right)X^k$ は $g(f(X))$ に絶対収束することを示せ.

解答例 (1) $f(x)^m=\left(\sum_{l=0}^{\infty}a_lx^l\right)^m$ を展開したときの x^k の係数と $\left(\sum_{l=0}^{k}a_lx^l\right)^m$ を展開したときの x^k の係数は等しいため, $x_l=a_lx^l$ とおけば次の等式から $c_{m,k}=\sum_{\substack{i_0+i_1+\cdots+i_k=m\\ i_1+2i_2+\cdots+ki_k=k}}\frac{m!}{i_0!i_1!\cdots i_k!}a_0^{i_0}a_1^{i_1}\cdots a_k^{i_k}$ である.

$$\left(\sum_{l=0}^{k}a_lx^l\right)^m=(x_0+x_1+\cdots+x_k)^m=\sum_{i_0+i_1+\cdots+i_k=m}\frac{m!}{i_0!i_1!\cdots i_k!}x_0^{i_0}x_1^{i_1}\cdots x_k^{i_k}$$
$$=\sum_{i_0+i_1+\cdots+i_k=m}\frac{m!}{i_0!i_1!\cdots i_k!}a_0^{i_0}a_1^{i_1}\cdots a_k^{i_k}x^{i_1+2i_2+\cdots+ki_k}=\sum_{l=0}^{km}\left(\sum_{\substack{i_0+i_1+\cdots+i_k=m\\ i_1+2i_2+\cdots+ki_k=l}}\frac{m!}{i_0!i_1!\cdots i_k!}a_0^{i_0}a_1^{i_1}\cdots a_k^{i_k}\right)x^l$$

(2) $\bar{f}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|x^k$, $\tilde{c}_{m,k}=\sum_{\substack{i_0+i_1+\cdots+i_k=m\\ i_1+2i_2+\cdots+ki_k=k}}\frac{m!}{i_0!i_1!\cdots i_k!}|a_0|^{i_0}|a_1|^{i_1}\cdots|a_k|^{i_k}$ とおけば $|x|<\alpha$ ならば (1) から $\bar{f}(x)^m=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{c}_{m,k}x^k$ であり, $|c_{m,k}|\leqq\tilde{c}_{m,k}$ が成り立つため, 0 以上の整数 l に対して次の不等式が成り立つ.

$$\sum_{k=0}^{l}\left|\sum_{m=0}^{k}b_mc_{m,k}\right||x|^k\leqq\sum_{k=0}^{l}\sum_{m=0}^{k}|b_m||c_{m,k}||x|^k\leqq\sum_{k=0}^{l}\sum_{m=0}^{k}|b_m|\tilde{c}_{m,k}|x|^k=\sum_{m=0}^{l}|b_m|\left(\sum_{k=m}^{l}\tilde{c}_{m,k}|x|^k\right)$$
$$\leqq\sum_{m=0}^{l}|b_m|\left(\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{c}_{m,k}|x|^k\right)=\sum_{m=0}^{l}|b_m|\bar{f}(|x|)^m$$

$|x|<\gamma$ を満たす x に対し, $0\leqq\bar{f}(|x|)<\beta$ だから $g(\bar{f}(|x|))=\sum_{m=0}^{\infty}b_m\bar{f}(|x|)^m$ は絶対収束するため $\sum_{m=0}^{\infty}|b_m|\bar{f}(|x|)^m$ は収束する. ここで $\tilde{h}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}|b_m|\bar{f}(x)^m=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{k}|b_m|\tilde{c}_{m,k}\right)x^k$ とおくと上の不等式から 0 以上の任意の整数 l に対して $\sum_{k=0}^{l}\left|\sum_{m=0}^{k}b_mc_{m,k}\right||x|^k\leqq\sum_{m=0}^{\infty}|b_m|\bar{f}(|x|)^m$ が成り立つため, $|x|<\gamma$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{k}b_mc_{m,k}\right)x^k$ は絶対収束する. $h(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{k}b_mc_{m,k}\right)x^k$ とおけば, 幾何学 II 命題 9.10 から $\|X\|<\gamma$ を満たす $X\in M_n(\boldsymbol{C})$ に対し, $h(X)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{k}b_mc_{m,k}\right)X^k$ は絶対収束する. 0 以上の整数 l に対して $g_l(x)=\sum_{m=0}^{l}b_mx^m$, $\tilde{h}_l(x)=\sum_{k=0}^{l}\left(\sum_{m=0}^{k}|b_m|\tilde{c}_{m,k}\right)x^k$ とおく. $|x|<\alpha$ ならば $g_l(f(x))=\sum_{m=0}^{l}b_mf(x)^m=\sum_{m=0}^{l}b_m\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_{m,k}x^k\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{l}b_mc_{m,k}\right)x^k$ である. また $a_0=0$ より $m>k$ ならば $c_{m,k}=0$ だから $\|X\|<\gamma$ ならば次の不等式が成り立つ.

$$\|g_l(f(X))-h(X)\|=\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{l}b_mc_{m,k}-\sum_{m=0}^{k}b_mc_{m,k}\right)X^k\right\|=\left\|-\sum_{k=l+1}^{\infty}\left(\sum_{m=l+1}^{k}b_mc_{m,k}\right)X^k\right\|$$
$$\leqq\sum_{k=l+1}^{\infty}\left(\sum_{m=l+1}^{k}|b_m||c_{m,k}|\right)\|X\|^k\leqq\sum_{k=l+1}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{k}|b_m|\tilde{c}_{m,k}\right)\|X\|^k$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{k}|b_m|\tilde{c}_{m,k}\right)\|X\|^k-\sum_{k=0}^{l}\left(\sum_{m=0}^{k}|b_m|\tilde{c}_{m,k}\right)\|X\|^k=\tilde{h}(\|X\|)-\tilde{h}_l(\|X\|)$$

$l\to\infty$ のとき $g_l(f(X))\to g(f(X))$, $\tilde{h}_l(\|X\|)\to\tilde{h}(\|X\|)$ だから, 上の不等式から $g(f(X))=h(X)$ が得られる. □

12　行列の指数写像（その 1）

例題 12.1　複素数 a, b, c に対し, 2 次正方行列 A を $A=\begin{pmatrix} a-bc & b^2 \\ -c^2 & a+bc \end{pmatrix}$ で定める.

(1) 2 次ユニタリー行列 P で, $P^{-1}AP$ が上半三角行列になるようなものを求めよ.

(2) $\exp(tA)$ を求めよ.

(3) a, b, c が実数のとき, 連立微分方程式 $\begin{cases} x' = (a-bc)x + b^2 y \\ y' = -c^2 x + (a+bc)y \end{cases}$ の解を求めよ.

解答例　(1) $b=c=0$ の場合は $A=aE_2$ だから $P=E_2$ とすればよい. 以下 b, c の少なくとも一方は 0 でないとする. $A=aE_2+\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c & b \end{pmatrix}$ だから $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ とおけば, $A\boldsymbol{v}=\left(aE_2+\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c & b \end{pmatrix}\right)\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{v}$ となるため, a は A の固有値で, $\boldsymbol{v}$ は a に対する A の固有ベクトルである. $\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix} -\bar{c} \\ \bar{b} \end{pmatrix}$ とおき, $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}\boldsymbol{v} & \frac{1}{\|\boldsymbol{w}\|}\boldsymbol{w} \end{pmatrix}$ とおけば, $\frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}\boldsymbol{v}, \frac{1}{\|\boldsymbol{w}\|}\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{C}^2$ の正規直交基底だから P はユニタリー行列で, $\frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}\boldsymbol{v}=P\boldsymbol{e}_1$, $\|\boldsymbol{v}\|=\|\boldsymbol{w}\|=\sqrt{|b|^2+|c|^2}$ より $A\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{w}\|}\boldsymbol{w}\right)=\frac{a}{\|\boldsymbol{w}\|}\boldsymbol{w}+\sqrt{|b|^2+|c|^2}\boldsymbol{v}=(|b|^2+|c|^2)P\boldsymbol{e}_1+aP\boldsymbol{e}_2=P\big((|b|^2+|c|^2)\boldsymbol{e}_1+a\boldsymbol{e}_2\big)$ が成り立つ. 従って $AP=\left(A\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}\boldsymbol{v}\right) \; A\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{w}\|}\boldsymbol{w}\right)\right)=\big(aP\boldsymbol{e}_1 \;\; P((|b|^2+|c|^2)\boldsymbol{e}_1+a\boldsymbol{e}_2)\big)=P\big(a\boldsymbol{e}_1 \;\; (|b|^2+|c|^2)\boldsymbol{e}_1+a\boldsymbol{e}_2\big)$ より $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} a & |b|^2+|c|^2 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ は上半三角行列となり, $P=\frac{1}{\sqrt{|b|^2+|c|^2}}\begin{pmatrix} b & -\bar{c} \\ c & \bar{b} \end{pmatrix}$ が求めるユニタリー行列である.

(2) $N=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおけば, $N^2=O$ であり, $P^{-1}AP=aE_2+(|b|^2+|c|^2)N$ だから

$$\begin{aligned}
P^{-1}\exp(tA)P &= \exp(tP^{-1}AP)=\exp(atE_2+t(|b|^2+|c|^2)N)=\exp(atE_2)\exp(t(|b|^2+|c|^2)N) \\
&= e^{at}(E_2+t(|b|^2+|c|^2)N)=e^{at}\begin{pmatrix} 1 & t(|b|^2+|c|^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\exp(tA) &= e^{at}P\begin{pmatrix} 1 & t(|b|^2+|c|^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}=\frac{e^{at}}{|b|^2+|c|^2}\begin{pmatrix} b & -\bar{c} \\ c & \bar{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t(|b|^2+|c|^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{b} & \bar{c} \\ -c & b \end{pmatrix} \\
&= \frac{e^{at}}{|b|^2+|c|^2}\begin{pmatrix} b & bt(|b|^2+|c|^2)-\bar{c} \\ c & ct(|b|^2+|c|^2)+\bar{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{b} & \bar{c} \\ -c & b \end{pmatrix}=e^{at}\begin{pmatrix} 1-bct & b^2t \\ -c^2t & 1+bct \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

が得られる.

(3) 与えられた連立微分方程式の解で $t=0$ のときの値が $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^2$ であるものは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\exp(tA)\boldsymbol{v}$ で与えられる. $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とおけば, (2) より $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\exp(tA)\boldsymbol{v}=e^{at}\begin{pmatrix} 1-bct & b^2t \\ -c^2t & 1+bct \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{at}(p+b(bq-cp)t) \\ e^{at}(q+c(bq-cp)t) \end{pmatrix}$ である. □

例題 12.2　2 次正方行列 A の固有多項式が $(x-\alpha)(x-\beta)$ であるとする.

(1) $\alpha\neq\beta$ ならば $\exp A=\frac{\beta e^{\alpha}-\alpha e^{\beta}}{\beta-\alpha}E_2+\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}A$ が成り立つことを示せ.

(2) $\alpha=\beta$ ならば $\exp A=e^{\alpha}((1-\alpha)E_2+A)$ が成り立つことを示せ.

(3) A の成分がすべて実数で, $\alpha=\lambda+\mu i$ ($\lambda,\mu\in\boldsymbol{R}$, $\mu\neq 0$) ならば, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\exp A=\frac{e^{\lambda}}{\mu}((\mu\cos\mu-\lambda\sin\mu)E_2+\sin\mu A)$$

解答例 (1) 仮定から 2 次正則行列 P で, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ を満たすものが存在するため, $Q=A-\alpha E_2$ とおけば, $P^{-1}QP=P^{-1}AP-\alpha E_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \beta-\alpha\end{pmatrix}$ より $P^{-1}Q^kP=(P^{-1}QP)^k=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & (\beta-\alpha)^k\end{pmatrix}=(\beta-\alpha)^{k-1}P^{-1}QP$ だから, $Q^k=(\beta-\alpha)^{k-1}Q$ が成り立つ. 故に

$$\exp Q=E_2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}Q^k=E_2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\beta-\alpha)^{k-1}}{k!}Q=E_2+\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\beta-\alpha)^k}{k!}-1\right)Q=E_2+\frac{e^{\beta-\alpha}-1}{\beta-\alpha}Q$$

が得られ, αE_2 と Q の積は交換可能だから次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\exp A&=\exp(\alpha E_2+Q)=\exp(\alpha E_2)\exp Q=e^{\alpha}E_2\left(E_2+\frac{e^{\beta-\alpha}-1}{\beta-\alpha}Q\right)=e^{\alpha}E_2+\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}(A-\alpha E_2)\\&=\frac{\beta e^{\alpha}-\alpha e^{\beta}}{\beta-\alpha}E_2+\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}A\end{aligned}$$

(2) $A=\alpha E_2$ ならば $\exp A=e^{\alpha}E_2=e^{\alpha}((1-\alpha)E_2+A)$ だから $A\neq\alpha E_2$ の場合を考える. このとき $|\alpha E_2-A|=0$ かつ αE_2-A は零行列ではないため, αE_2-A の階数は 1 である. α に対する固有ベクトルで単位ベクトルであるものを $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}$ とし, $\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}-\bar{q}\\ \bar{p}\end{pmatrix}$ とおけば $[\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]$ は $\boldsymbol{C}^2$ の正規直交基底である. $A\boldsymbol{v}=\alpha\boldsymbol{v}$ であり, $A\boldsymbol{w}=\beta\boldsymbol{v}+\delta\boldsymbol{w}$, $P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{pmatrix}$ とおけば, P は $\boldsymbol{C}^2$ の標準基底から $[\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]$ への基底の変換行列である. T_A を $T_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ で定義される $\boldsymbol{C}^2$ の 1 次変換とすれば, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}$ は基底 $[\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]$ に関する T_A の表現行列だから, この固有多項式と A の固有多項式は一致するため $\delta=\alpha$ である. 従って $N=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}AP=\alpha E_2+\beta N$ が成り立ち, αE_2 と βN の積が交換可能であることと, $N^2=O$ だから, 次の等式が成り立つ.

$$P^{-1}(\exp A)P=\exp(P^{-1}AP)=\exp(\alpha E_2+\beta N)=\exp(\alpha E_2)\exp(\beta N)=e^{\alpha}E_2(E_2+\beta N)=e^{\alpha}(E_2+\beta N)$$

一方, $P^{-1}AP=\alpha E_2+\beta N$ より, $A=P(\alpha E_2+\beta N)P^{-1}=\alpha E_2+\beta PNP^{-1}$ だから $\beta PNP^{-1}=A-\alpha E_2$ である. 従って $\exp A=e^{\alpha}P(E_2+\beta N)P^{-1}=e^{\alpha}(E_2+\beta PNP^{-1})=e^{\alpha}(E_2+A-\alpha E_2)=e^{\alpha}((1-\alpha)E_2+A)$.

(3) A の固有多項式の係数は実数だから, $\alpha=\lambda+\mu i$ より $\beta=\lambda-\mu i$ である. 従って

$$\begin{aligned}\frac{\beta e^{\alpha}-\alpha e^{\beta}}{\beta-\alpha}&=\frac{(\lambda-\mu i)e^{\lambda+\mu i}-(\lambda+\mu i)e^{\lambda-\mu i}}{-2\mu i}=\frac{e^{\lambda}(\mu i(e^{\mu i}+e^{-\mu i})-\lambda(e^{\mu i}-e^{-\mu i}))}{2\mu i}\\&=\frac{e^{\lambda}(\mu\mathrm{Re}(e^{\mu i})-\lambda\mathrm{Im}(e^{\mu i}))}{\mu}=\frac{e^{\lambda}(\mu\cos\mu-\lambda\sin\mu)}{\mu}\\ \frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}&=\frac{e^{\lambda-\mu i}-e^{\lambda+\mu i}}{-2\mu i}=\frac{e^{\lambda}(e^{\mu i}-e^{-\mu i})}{2\mu i}=\frac{e^{\lambda}\mathrm{Im}(e^{\mu i})}{\mu}=\frac{e^{\lambda}\sin\mu}{\mu}\end{aligned}$$

だから, (1) の結果から $\exp A=\dfrac{e^{\lambda}}{\mu}((\mu\cos\mu-\lambda\sin\mu)E_2+\sin\mu A)$ が得られる. □

13　行列の指数写像（その 2）

$\boldsymbol{K}$ の要素を成分にもつ正規行列全体からなる $M_n(\boldsymbol{K})$ の部分空間を $N_n(\boldsymbol{K})$ で表す．また $m\times n$ 行列の零行列を $O_{m,n}$ で表し, $O_{n,n}=O_n$ とおき, $a,b\in\boldsymbol{R}$ に対して $S_{a,b}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}$ とおく．

例題 13.1　exp による $N_n(\boldsymbol{C})$ の像は $N_n(\boldsymbol{C})\cap GL_n(\boldsymbol{C})$ であることを示せ．

解答例　$A\in N_n(\boldsymbol{C})$ ならば $A^*A=AA^*$ だから幾何学 II 命題 10.3 の (1) と注意 9.12 より次の等式が成り立つ．

$$(\exp A)^*(\exp A)=(\exp(A^*))(\exp A)=\exp(A^*+A)=\exp(A+A^*)=(\exp A)(\exp(A^*))=(\exp A)(\exp A)^*$$

故に $\exp A\in N_n(\boldsymbol{C})$ となり, exp による $N_n(\boldsymbol{C})$ の像は $N_n(\boldsymbol{C})$ に含まれ, 幾何学 II 命題 10.3 の (2) から exp はつねに正則行列を値にとるため, exp による $N_n(\boldsymbol{C})$ の像は $N_n(\boldsymbol{C})\cap GL_n(\boldsymbol{C})$ に含まれる．

任意の $C\in N_n(\boldsymbol{C})\cap GL_n(\boldsymbol{C})$ に対し, 幾何学 II 定理 8.11 により C を対角化するユニタリー行列 U が存在する．$U^{-1}CU$ の (j,j) 成分を $r_j(\cos\theta_j+i\sin\theta_j)$ $(r_j\geqq 0,\ 0\leqq\theta_j<2\pi)$ と表せば, C が正則行列であることから C の固有値は 0 でないため, $r_j>0$ である．従って $e^{\log r_j+i\theta_j}=r_j(\cos\theta_j+i\sin\theta_j)$ だから $\log r_j+i\theta_j$ を (j,j) 成分とする n 次対角行列を D とおけば D は正規行列で, $\exp D=U^{-1}CU$ が成り立つため, 幾何学 II 注意 9.12 から $\exp(UDU^{-1})=C$ が得られる．幾何学 II 命題 8.8 の (1) と (3) から UDU^{-1} は正規行列だから exp による $N_n(\boldsymbol{C})$ の像は $N_n(\boldsymbol{C})\cap GL_n(\boldsymbol{C})$ である．□

例題 13.2　$N_n^+(\boldsymbol{R})=\{A\in N_n(\boldsymbol{R})\cap GL_n(\boldsymbol{R})\,|\,A$ の固有方程式の負の解の重複度は偶数である.$\}$ とおくとき, exp による $N_n(\boldsymbol{R})$ の像は $N_n^+(\boldsymbol{R})$ であることを示せ．

解答例　$A\in N_n(\boldsymbol{R})$ ならば例題 13.1 から $\exp A$ も正規行列で, A の成分がすべて実数ならば $\exp A$ の成分もすべて実数だから $\exp A\in N_n(\boldsymbol{R})$ である．定理 10.8 から実直交行列 P で, $P^{-1}AP$ が対角線上に対角行列 D と $S_{a,b}$ の形の行列が並んだ形になるものがある．D の (j,j) 成分を λ_j とすれば $\exp D$ は $e^{\lambda_j}>0$ を (j,j) 成分にもつ対角行列で, 幾何学 II 例 10.4 から $\exp S_{a,b}=S_{e^a\cos b,e^a\sin b}$ だから $\exp(P^{-1}AP)$ は正の実数を対角成分にもつ対角行列 $\exp D$ と $S_{e^a\cos b,e^a\sin b}$ の形の行列が並んだ形になる．$\exp A$ の固有多項式 $F_{\exp A}(x)$ は $P^{-1}(\exp A)P=\exp(P^{-1}AP)$ の固有多項式に一致して $S_{e^a\cos b,e^a\sin b}$ の固有多項式は $(x-e^a\cos b)^2+e^{2a}\sin^2 b$ だから, 上のことから $F_{\exp A}(x)$ は 1 次式 $x-e^{\lambda_j}$ と $(x-e^a\cos b)^2+e^{2a}\sin^2 b$ という形の 2 次式の積である．後者が負の解をもつのは b が π の奇数倍のときに限り, この場合 $-e^a$ が重解になるため, $F_{\exp A}(x)=0$ の負の解の重複度は偶数である．故に $\exp A\in N_n^+(\boldsymbol{R})$ である．

$S_{a,0}=aE_2$ に注意すれば, 任意の $C\in N_n^+(\boldsymbol{R})$ に対し, 仮定と定理 10.8 より $(0,0)$ とは異なる実数の対 $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_l,b_l)$ と正の実数を対角成分とする $n-2l$ 次対角行列 D に対して直交行列 P で $P^{-1}CP$ が

$$P^{-1}CP=\begin{pmatrix} S_{a_1,b_1} & O_2 & \cdots & O_2 & O_{2,n-2l} \\ O_2 & S_{a_2,b_2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O_2 & O_{2,n-2l} \\ O_2 & \cdots & O_2 & S_{a_l,b_l} & O_{2,n-2l} \\ O_{n-2l,2} & \cdots & O_{n-2l,2} & O_{n-2l,2} & D \end{pmatrix}$$

の形になるようなものがある．$r_j=\sqrt{a_j^2+b_j^2}$ とおき, $\cos\theta_j=\dfrac{a_j}{r_j}$, $\sin\theta_j=\dfrac{b_j}{r_j}$ を満たす $0\leqq\theta_j<2\pi$ をとれば幾何学 II 例 10.4 により $\exp S_{\log r_j,\theta_j}=S_{a_j,b_j}$ である．また, D の (j,j) 成分を d_j として (j,j) 成分が $\log d_j$ である $n-2l$ 次対角行列を T とおけば $\exp T=D$ だから, 次のように n 次正方行列 A を定めれば $\exp A=P^{-1}CP$ が成り立つ．

$$A=\begin{pmatrix} S_{\log r_1,\theta_1} & O_2 & \cdots & O_2 & O_{2,n-2l} \\ O_2 & S_{\log r_2,\theta_2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O_2 & O_{2,n-2l} \\ O_2 & \cdots & O_2 & S_{\log r_l,\theta_l} & O_{2,n-2l} \\ O_{n-2l,2} & \cdots & O_{n-2l,2} & O_{n-2l,2} & T \end{pmatrix}$$

故に 幾何学 II 注意 9.12 から $\exp(PAP^{-1}) = C$ が得られる. 幾何学 II 命題 8.8 の (1) と (3) から PAP^{-1} は正規行列で, 実数を成分とするため exp による $N_n(\boldsymbol{R})$ の像は $N_n^+(\boldsymbol{R})$ である. $\square$

実数を成分とする n 次正方行列 A が ${}^tA = -A$ を満たすとき n 次交代行列という. n 次交代行列全体からなる $M_n(\boldsymbol{R})$ の部分空間を $A(n)$ で表し, 行列式の値が 1 である n 次直交行列全体からなる $M_n(\boldsymbol{R})$ の部分空間を $SO(n)$ で表す.

例題 13.3 exp による $A(n)$ の像は $SO(n)$ であることを示せ.

解答例 $A \in A(n)$ ならば A の対角成分はすべて 0 だから $\mathrm{tr}A = 0$ である. 従って $A(n) \subset SH_0(n)$ だから幾何学 II 命題 10.11 により, $\exp A$ は行列式の値が 1 のユニタリー行列である. A の各成分は実数だから $\exp A$ の各成分も実数であるため, $\exp A \in SO(n)$ である.

任意の $U \in SO(n)$ に対して, $P^{-1}UP$ が定理 10.8 の形の行列になるような直交行列 P をとると $P^{-1}UP$ も直交行列であることから対角線上に並ぶ $S_{a,b}$ の形の行列は $a^2 + b^2 = 1$ を満たし, 対角行列になっている部分の成分は 1 か -1 に等しい. さらに, U の行列式の値が 1 であることから, $P^{-1}UP$ の対角成分に並ぶ -1 の個数は偶数である. $S_{-1,0} = -E_2$ だから, U の固有値 ± 1 に対する固有ベクトルからなる P の列ベクトルを適当に入れ換えることで,

$$P^{-1}UP = \begin{pmatrix} S_{\cos\theta_1,\sin\theta_1} & O_2 & \cdots & O_2 & O_{2,n-2l} \\ O_2 & S_{\cos\theta_2,\sin\theta_2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O_2 & O_{2,n-2l} \\ O_2 & \cdots & O_2 & S_{\cos\theta_l,\sin\theta_l} & O_{2,n-2l} \\ O_{n-2l,2} & \cdots & O_{n-2l,2} & O_{n-2l,2} & E_{n-2l} \end{pmatrix}$$

という形にできる. そこで $B \in M_n(\boldsymbol{R})$ を次のように定めれば $B \in A(n)$ である.

$$B = \begin{pmatrix} S_{0,\theta_1} & O_2 & \cdots & O_2 & O_{2,n-2l} \\ O_2 & S_{0,\theta_2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O_2 & O_{2,n-2l} \\ O_2 & \cdots & O_2 & S_{0,\theta_l} & O_{2,n-2l} \\ O_{n-2l,2} & \cdots & O_{n-2l,2} & O_{n-2l,2} & O_{n-2l} \end{pmatrix}$$

幾何学 II 例 10.4 から $\exp B = P^{-1}UP$ だから幾何学 II 命題 10.3 から $\exp(PBP^{-1}) = U$ が得られる. 一方, $P^{-1} = {}^tP$ と ${}^tB = -B$ より ${}^t(PBP^{-1}) = {}^t(PB{}^tP) = {}^t(PB{}^tP) = {}^t({}^tP){}^tB{}^tP = P(-B){}^tP = -PBP^{-1}$ だから $PBP^{-1} \in A(n)$ である. 故に exp による $A(n)$ の像は $SO(n)$ である. $\square$

例題 13.4 $r > 0$ に対し, $D_n(r) = \{X \in M_n(\boldsymbol{C}) \,|\, \|X\| < r\}$ とおき, 整級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ を $L(x)$ とおく. $X \in D_n(1)$ ならば $\exp(L(X)) = E_n + X$, $X \in D_n(\log 2)$ ならば $L(\exp(X) - E_n) = X$ が成り立つことを示せ.

解答例 x の整級数 $L(x)$, $\exp x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ の収束半径はそれぞれ $1, \infty$ である. 任意の複素数 x に対して $\exp x = e^x$ であり, $|x| < 1$ ならば $L(x) = \log(1+x)$ である. $|x| < 1$ ならば $\exp(L(x)) = e^{\log(1+x)} = 1 + x$ が成り立つため, x の整級数として $\exp(L(x)) = 1 + x$ が成り立つ. 故に例題 11.3 の (2) から $X \in D_n(1)$ ならば $\exp(L(X)) = E_n + X$ である. また $|x| < \log 2$ ならば $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} = e^{|x|} - 1 < 1$ であり, このとき $\log(1 + (e^x - 1)) = x$ だから x の整級数として $L(\exp x - 1) = x$ が成り立つ. 故に例題 11.3 の (2) から $X \in D_n(\log 2)$ ならば $L(\exp(X) - E_n) = X$ である. $\square$

14 正則行列の極分解

例題 14.1 0 でない実数 r に対し, 写像 $\rho_r : H^+(n) \to H^+(n)$ を $\rho_r(A) = \exp(r \log A)$ で定める.

(1) $\rho_r \circ \rho_s = \rho_{rs}$ が成り立つことを示せ.

(2) m を 0 でない整数とするとき, $\rho_{\frac{1}{m}}(A)^m = A$ が成り立つことを示せ.

解答例 (1) $X \in H(n)$ に対し $\log(\exp X) = X$ より, $A \in H^+(n)$ ならば次の等式が成り立つため, $\rho_r \circ \rho_s = \rho_{rs}$ である.

$$(\rho_r \circ \rho_s)(A) = \rho_r(\rho_s(A)) = \rho_r(\exp(s \log A)) = \exp(r \log(\exp(s \log A))) = \exp(rs \log A) = \rho_{rs}(A)$$

(2) 任意の n 次正方行列 A と正の整数 m に対して, $\exp(mA) = (\exp A)^m$ が成り立つことを m による数学的帰納法で示す. $m = 1$ の場合は, 主張は明らかに成り立つ. $\exp(mA) = (\exp A)^m$ が成り立つ仮定すれば, $(mA)A = A(mA)$ だから幾何学 II 命題 10.3 の (1) から $\exp((m+1)A) = \exp(mA + A) = \exp(mA)(\exp A) = (\exp A)^m(\exp A) = (\exp A)^{m+1}$ が成り立つ. $\exp(0A) = \exp(O) = E_n = (\exp A)^0$ だから $m = 0$ の場合も $\exp(mA) = (\exp A)^m$ が成り立つ. m が負の整数の場合, $-m$ は正の整数だから, 上で示したことによって $\exp((-m)A) = (\exp A)^{-m}$ である. また, 正則行列 X と正の整数 k に対し, X^{-k} は X^k の逆行列だから $(X^k)^{-1} = X^{-k}$ である. 従って

$$\exp(mA) = \exp(-(-m)A) = \exp((-m)A)^{-1} = ((\exp A)^{-m})^{-1} = (\exp A)^m$$

である. 以上から, 任意の整数 m に対して $\exp(mA) = (\exp A)^m$ が成り立つ.

故に任意の $A \in H^+(n)$ に対して $\rho_{\frac{1}{m}}(A)^m = \exp\left(\dfrac{1}{m} \log A\right)^m = \exp\left(m \cdot \dfrac{1}{m} \log A\right) = \exp(\log A) = A$ が成り立つ. □

例題 14.2 正の実数 a, b と $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ を満たす実数 α, β に対し, $\log\begin{pmatrix} a\alpha^2 + b\beta^2 & (a-b)\alpha\beta \\ (a-b)\alpha\beta & b\alpha^2 + a\beta^2 \end{pmatrix}$ を求めよ.

解答例 $A = \begin{pmatrix} a\alpha^2 + b\beta^2 & (a-b)\alpha\beta \\ (a-b)\alpha\beta & b\alpha^2 + a\beta^2 \end{pmatrix}$ とおくと, 次の等式から A の固有値は $a(\alpha^2 + \beta^2)$ と $b(\alpha^2 + \beta^2)$ である.

$$\begin{vmatrix} x - (a\alpha^2 + b\beta^2) & -(a-b)\alpha\beta \\ -(a-b)\alpha\beta & x - (b\alpha^2 + a\beta^2) \end{vmatrix} = x^2 - (a+b)(\alpha^2 + \beta^2)x + ab(\alpha^2 + \beta^2)^2 = (x - a(\alpha^2 + \beta^2))(x - b(\alpha^2 + \beta^2))$$

$a(\alpha^2 + \beta^2)E_2 - A = (a-b)\begin{pmatrix} \beta^2 & -\alpha\beta \\ -\alpha\beta & \alpha^2 \end{pmatrix}$, $b(\alpha^2 + \beta^2)E_2 - A = (b-a)\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix}$ だから $a \neq b$ ならば $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ はそれぞれ $a(\alpha^2 + \beta^2)$, $b(\alpha^2 + \beta^2)$ に対する A の固有空間の正規直交基底である. $a = b$ ならば $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ は $a(\alpha^2 + \beta^2)$ に対する A の固有空間の正規直交基底である. 故に $P = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a(\alpha^2 + \beta^2) & 0 \\ 0 & b(\alpha^2 + \beta^2) \end{pmatrix}$ である. P はユニタリー行列だから, 幾何学 II 補題 11.5 の (2) より $\log A = \log(PP^{-1}APP^{-1}) = P\log(P^{-1}AP)P^{-1}$ が成り立つため

$$\begin{aligned}
\log A &= \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \log(a(\alpha^2+\beta^2)) & 0 \\ 0 & \log(b(\alpha^2+\beta^2)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix} \alpha\log(a(\alpha^2+\beta^2)) & -\beta\log(b(\alpha^2+\beta^2)) \\ \beta\log(a(\alpha^2+\beta^2)) & \alpha\log(b(\alpha^2+\beta^2)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix} \alpha^2\log(a(\alpha^2+\beta^2)) + \beta^2\log(b(\alpha^2+\beta^2)) & \alpha\beta(\log a - \log b) \\ \alpha\beta(\log a - \log b) & \alpha^2\log(b(\alpha^2+\beta^2)) + \beta^2\log(a(\alpha^2+\beta^2)) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

が得られる. □

例題 14.3 $a, b, \theta, \varphi \in \boldsymbol{R}$ に対し $A = \begin{pmatrix} (a-b)\cos\theta\cos(\theta-\varphi) + b\cos\varphi & (a-b)\cos\theta\sin(\theta-\varphi) - b\sin\varphi \\ (a-b)\cos\theta\sin(\theta-\varphi) + a\sin\varphi & -(a-b)\cos\theta\cos(\theta-\varphi) + a\cos\varphi \end{pmatrix}$ とおく．$a, b \neq 0$ のとき A の極分解を求めよ．

解答例 $AA^* = \begin{pmatrix} a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta & (a^2-b^2)\cos\theta\sin\theta \\ (a^2-b^2)\cos\theta\sin\theta & b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$ だから AA^* は例題 14.2 の解答例の行列 A の a, b, α, β をそれぞれ a^2, b^2, $\cos\theta$, $\sin\theta$ で置き換えた行列だから，$\log x^2 = 2\log|x|$ に注意すれば，例題 14.2 の結果から

$$\log(AA^*) = 2\begin{pmatrix} \cos^2\theta\log|a| + \sin^2\theta\log|b| & \cos\theta\sin\theta(\log|a| - \log|b|) \\ \cos\theta\sin\theta(\log|a| - \log|b|) & \cos^2\theta\log|b| + \sin^2\theta\log|a| \end{pmatrix}$$

が得られる．従って $\frac{1}{2}\log(AA^*)$ は例題 14.2 の解答例の行列 A の a, b, α, β をそれぞれ $\log|a|$, $\log|b|$, $\cos\theta$, $\sin\theta$ で置き換えた行列だから，$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で $P^{-1}\left(\frac{1}{2}\log(AA^*)\right)P = \begin{pmatrix} \log|a| & 0 \\ 0 & \log|b| \end{pmatrix}$ となることが例題 14.2 の解答例からわかる．$H = \exp\left(\frac{1}{2}\log(AA^*)\right)$, $U = H^{-1}A$ とおけば (H, U) は A の極分解であり，H は次で与えられる．

$$\begin{aligned}
H &= \exp\left(PP^{-1}\left(\frac{1}{2}\log(AA^*)\right)PP^{-1}\right) = P\exp\left(P^{-1}\left(\frac{1}{2}\log(AA^*)\right)P\right)P^{-1} = P\exp\begin{pmatrix} \log|a| & 0 \\ 0 & \log|b| \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |a| & 0 \\ 0 & |b| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|\cos^2\theta + |b|\sin^2\theta & (|a|-|b|)\cos\theta\sin\theta \\ (|a|-|b|)\cos\theta\sin\theta & |b|\cos^2\theta + |a|\sin^2\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{cases} \begin{pmatrix} a\cos^2\theta + b\sin^2\theta & (a-b)\cos\theta\sin\theta \\ (a-b)\cos\theta\sin\theta & b\cos^2\theta + a\sin^2\theta \end{pmatrix} & a > 0,\ b > 0 \\ \begin{pmatrix} -a\cos^2\theta + b\sin^2\theta & -(a+b)\cos\theta\sin\theta \\ -(a+b)\cos\theta\sin\theta & b\cos^2\theta - a\sin^2\theta \end{pmatrix} & a < 0,\ b > 0 \\ \begin{pmatrix} a\cos^2\theta - b\sin^2\theta & (a+b)\cos\theta\sin\theta \\ (a+b)\cos\theta\sin\theta & -b\cos^2\theta + a\sin^2\theta \end{pmatrix} & a > 0,\ b < 0 \\ \begin{pmatrix} -a\cos^2\theta - b\sin^2\theta & -(a-b)\cos\theta\sin\theta \\ -(a-b)\cos\theta\sin\theta & -b\cos^2\theta - a\sin^2\theta \end{pmatrix} & a < 0,\ b < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

故に $|H| = |ab|$, $H^{-1} = \frac{1}{|ab|}\begin{pmatrix} |b|\cos^2\theta + |a|\sin^2\theta & -(|a|-|b|)\cos\theta\sin\theta \\ -(|a|-|b|)\cos\theta\sin\theta & |a|\cos^2\theta + |b|\sin^2\theta \end{pmatrix}$ だから U は以下で与えられる．

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{|ab|}\begin{pmatrix} a|b|\cos\theta\cos(\theta-\varphi) + |a|b\sin\theta\sin(\theta-\varphi) & a|b|\cos\theta\sin(\theta-\varphi) - |a|b\sin\theta\cos(\theta-\varphi) \\ a|b|\sin\theta\cos(\theta-\varphi) - |a|b\cos\theta\sin(\theta-\varphi) & a|b|\sin\theta\sin(\theta-\varphi) + |a|b\cos\theta\cos(\theta-\varphi) \end{pmatrix} \\
&= \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} & a > 0,\ b > 0 \\ \begin{pmatrix} -\cos(2\theta-\varphi) & -\sin(2\theta-\varphi) \\ -\sin(2\theta-\varphi) & \cos(2\theta-\varphi) \end{pmatrix} & a < 0,\ b > 0 \\ \begin{pmatrix} \cos(2\theta-\varphi) & \sin(2\theta-\varphi) \\ \sin(2\theta-\varphi) & -\cos(2\theta-\varphi) \end{pmatrix} & a > 0,\ b < 0 \\ \begin{pmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} & a < 0,\ b < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

□

15 正規直交化法の応用と Cayley 変換

$\boldsymbol{K}$ の要素を成分とする n 次上半三角行列で, 対角成分がすべて正の実数であるもの全体からなる $M_n(\boldsymbol{K})$ の部分空間を $T_n^+(\boldsymbol{K})$ で表す. $T_n^+(\boldsymbol{K})$ は正の実数全体 $(0,\infty)$ の n 個の直積空間 $(0,\infty)^n$ と $\boldsymbol{K}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ の直積空間と同相であり, $(0,\infty)$ は $\boldsymbol{R}$ と同相だから $T_n^+(\boldsymbol{C})$ は $\boldsymbol{R}^{n^2}$ と同相で, $T_n^+(\boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ と同相である. このことから Schmidt の正規直交化法を使って示される次の結果からも幾何学 II 定理 12.12 が得られる.

例題 15.1 写像 $\mu_{\boldsymbol{C}}: U(n)\times T_n^+(\boldsymbol{C}) \to GL_n(\boldsymbol{C})$, $\mu_{\boldsymbol{R}}: O(n)\times T_n^+(\boldsymbol{R}) \to GL_n(\boldsymbol{R})$ をそれぞれ $\mu_{\boldsymbol{C}}(U,T)=UT$, $\mu_{\boldsymbol{R}}(U,T)=UT$ で定めるとき, これらは同相写像であることを示せ.

解答例 $A\in GL_n(\boldsymbol{K})$ に対し, 幾何学 II 定理 7.13 で示した方法で $\boldsymbol{K}^n$ の基底 $A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \dots, A\boldsymbol{e}_n$ を直交化して得られる正規直交基底を $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_n$ とする. $\boldsymbol{w}_j$ を第 j 列にもつユニタリー行列を A_U で表し, $\boldsymbol{K}^n$ の基底 $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_n$ から $A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \dots, A\boldsymbol{e}_n$ への基底の変換行列を A_T で表す. 幾何学 II 定理 7.13 から基底 $A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \dots, A\boldsymbol{e}_n$ から $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_n$ への基底の変換行列は $T_n^+(\boldsymbol{K})$ に属し, その逆行列が A_T である. 一方, 対角成分がすべて正の実数である上半三角行列の逆行列も上半三角行列であり, その対角成分はもとの行列の対応する対角成分の逆数になるため, すべて正の実数である. 従って $A_T\in T_n^+(\boldsymbol{K})$ である.

$\nu_{\boldsymbol{C}}: GL_n(\boldsymbol{C})\to U(n)\times T_n^+(\boldsymbol{C})$, $\nu_{\boldsymbol{R}}: GL_n(\boldsymbol{R})\to O(n)\times T_n^+(\boldsymbol{R})$ を $\nu_{\boldsymbol{C}}(A)=(A_U,A_T)$, $\nu_{\boldsymbol{R}}(A)=(A_U,A_T)$ で定める. $A\in GL_n(\boldsymbol{K})$ に対し, A_T の (i,j) 成分を t_{ij}, A_U の第 j 列を $\boldsymbol{w}_j$ とすれば $A\boldsymbol{e}_j = t_{1j}\boldsymbol{w}_1 + t_{2j}\boldsymbol{w}_2+\cdots+t_{nj}\boldsymbol{w}_n$ が $j=1,2,\dots,n$ に対して成り立つため $A=A_UA_T$ だから $\mu_{\boldsymbol{K}}\circ\nu_{\boldsymbol{K}}$ は $GL_n(\boldsymbol{K})$ $(\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C},\boldsymbol{R})$ の恒等写像である.

$U\in U(n)$, $T\in T_n^+(\boldsymbol{K})$ に対し, T の (i,j) 成分を t_{ij}, U の第 j 列を $\boldsymbol{z}_j$ として UT の第 j 列を $\boldsymbol{v}_j$ とおくと $j=1,2,\dots,n$ に対して $\boldsymbol{v}_j = t_{1j}\boldsymbol{z}_1+t_{2j}\boldsymbol{z}_2+\cdots+t_{jj}\boldsymbol{z}_j$ である. T の逆行列も $T_n^+(\boldsymbol{K})$ に属するため $\boldsymbol{z}_j$ は $\boldsymbol{z}_j = t'_{1j}\boldsymbol{v}_1+t'_{2j}\boldsymbol{v}_2+\cdots+t'_{jj}\boldsymbol{v}_j$ の形に表せるので $\boldsymbol{z}_j$ は $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_j$ で生成される $\boldsymbol{K}^n$ の部分空間に属する. $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n$ を幾何学 II 定理 7.13 で示した方法で直交化して得られる正規直交基底を $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_n$ として, j による数学的帰納法で $\boldsymbol{w}_j=\boldsymbol{z}_j$ であることを示す. $\boldsymbol{K}^n$ の基底 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n$ から $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_n$ への基底の変換行列は $T_n^+(\boldsymbol{K})$ に属するため, その逆行列である $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_n$ から $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n$ への基底の変換行列も $T_n^+(\boldsymbol{K})$ に属する. 従って $j=1,2,\dots,n$ に対して s_{jj} が正の実数である $s_{ij}\in\boldsymbol{K}$ で $\boldsymbol{v}_j = s_{1j}\boldsymbol{w}_1+s_{2j}\boldsymbol{w}_2+\cdots+s_{jj}\boldsymbol{w}_j$ を満たすものがある. $j=1$ のとき $t_{11}\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{v}_1=s_{11}\boldsymbol{w}_1$ であり s_{11} と t_{11} は正の実数で $\|\boldsymbol{w}_1\|=\|\boldsymbol{z}_1\|=1$ だから $t_{11}=|t_{11}|\|\boldsymbol{z}_1\|=\|t_{11}\boldsymbol{z}_1\|=\|s_{11}\boldsymbol{w}_1\|=|s_{11}|\|\boldsymbol{w}_1\|=s_{11}$ が得られ, これより $\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{z}_1$ が成り立つ. 帰納的に $j=1,2,\dots,k-1$ に対して $s_{ij}=t_{ij}$ $(i=1,2,\dots,j)$ と $\boldsymbol{w}_j=\boldsymbol{z}_j$ が成り立つと仮定する. $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_k$ で生成される $\boldsymbol{K}^n$ の部分空間を V_k とすれば $\boldsymbol{w}_k$ は $\boldsymbol{z}_k$ と同様に V_k に属し, $\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2,\dots,\boldsymbol{z}_{k-1}$ で生成される部分空間は V_{k-1} に一致する. $\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2,\dots,\boldsymbol{z}_k$, $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_k$ は正規直交系だから $\boldsymbol{w}_k$ と $\boldsymbol{z}_k$ は V_{k-1} の直交補空間 $V_{k-1}^\perp$ に属する. V_k は $\boldsymbol{K}^n$ の k 次元部分空間で V_{k-1} は V_k の $k-1$ 次元部分空間だから $V_k\cap V_{k-1}^\perp$ は 1 次元である. 故に $\boldsymbol{w}_k,\boldsymbol{z}_k\in V_k\cap V_{k-1}^\perp$ から $\boldsymbol{w}_k=c\boldsymbol{z}_k$ を満たす $c\in\boldsymbol{K}$ がある. $t_{1k}\boldsymbol{z}_1+t_{2k}\boldsymbol{z}_2+\cdots+t_{kk}\boldsymbol{z}_k=\boldsymbol{v}_k=s_{1k}\boldsymbol{w}_1+s_{2k}\boldsymbol{w}_2+\cdots+s_{kk}\boldsymbol{w}_k$ より

$$(t_{1k}-s_{1k})\boldsymbol{z}_1+(t_{2k}-s_{2k})\boldsymbol{z}_2+\cdots+(t_{k-1k}-s_{k-1k})\boldsymbol{z}_{k-1}+(t_{kk}-cs_{kk})\boldsymbol{z}_k=\boldsymbol{0}$$

が成り立つため $\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2,\dots,\boldsymbol{z}_k$ の 1 次独立性から $i=1,2,\dots,k-1$ に対して $s_{ik}=t_{ik}$ と $t_{kk}=cs_{kk}$ が成り立つ. s_{kk} と t_{kk} は正の実数だから c も正の実数になるので $c=|c|\|\boldsymbol{z}_k|=\|c\boldsymbol{z}_k\|=\|\boldsymbol{w}_k\|=1$ がわかる. 従ってすべての $i,j=1,2,\dots,n$ に対して $s_{ij}=t_{ij}$ と $\boldsymbol{w}_j=\boldsymbol{z}_j$ が成り立つため $\nu_{\boldsymbol{K}}(UT)=(U,T)$ である. これは $\nu_{\boldsymbol{K}}\circ\mu_{\boldsymbol{K}}$ が $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$ の場合は $U(n)\times T_n^+(\boldsymbol{C})$ の恒等写像, $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ の場合は $O(n)\times T_n^+(\boldsymbol{R})$ の恒等写像であることを意味する.

$\mu_{\boldsymbol{K}}$ は行列の積を対応させる写像だから連続写像である. $A\in GL_n(\boldsymbol{K})$ に対して A の列ベクトルを直交化して得られる各ベクトルの成分と A_T の成分は A の成分の間の四則演算と平方根をとることによって得られるため, A の成分の連続関数である. 故に $\nu_{\boldsymbol{K}}$ も連続写像である. 以上から $\mu_{\boldsymbol{K}}$ は同相写像である. □

$A\in M_n(\boldsymbol{C})$ に対し $M_n(\boldsymbol{C})$ の部分空間 $U(A)$, $S(A)$ を $U(A)=\{X\in M_n(\boldsymbol{C})\,|\,\det(E_n+X)\neq 0,\ X^*AX=A\}$,

$S(A)=\{Y\in M_n(\boldsymbol{C})\,|\,\det(E_n+Y)\neq 0,\,Y^*A=-AY\}$ で定義する. とくに A が n 次単位行列 E_n の場合, $U(E_n)$ は -1 を固有値にもたない n 次ユニタリー行列全体からなり, 幾何学 II 命題 8.8 の (2) から -1 を固有値にもつ歪エルミート行列は存在しないため, $S(E_n)$ は n 次歪エルミート行列全体の集合に一致することに注意する.

例題 15.2 上の記号のもとで, 以下の問いに答えよ.

(1) $X\in U(A)$, $Y\in S(A)$ ならば $(E_n-X)(E_n+X)^{-1}\in S(A)$, $(E_n-Y)(E_n+Y)^{-1}\in U(A)$ であること示せ.

(2) $f:U(A)\to S(A)$, $g:S(A)\to U(A)$ を $f(X)=(E_n-X)(E_n+X)^{-1}$, $g(Y)=(E_n-Y)(E_n+Y)^{-1}$ で定めれば, f と g は互いに逆写像であることを示せ.

解答例 (1) $X\in U(A)$, $Y\in S(A)$ に対し $f(X)=(E_n-X)(E_n+X)^{-1}$, $g(Y)=(E_n-Y)(E_n+Y)^{-1}$ とおくと

$$\begin{aligned}
(E_n+X^*)f(X)^*A(E_n+X)&=(E_n+X^*)((E_n-X)(E_n+X)^{-1})^*A(E_n+X)\\
&=(E_n+X^*)((E_n+X)^{-1})^*(E_n-X)^*(A+AX)\\
&=(E_n+X^*)(E_n+X^*)^{-1}(E_n-X^*)(A+AX)=A+AX-X^*A-X^*AX\\
&=AX-X^*A=-A-X^*A+AX+X^*AX=-(E_n+X^*)(A-AX)\\
&=-(E_n+X^*)A(E_n-X)=(E_n+X^*)(-Af(X))(E_n+X)\\
(E_n+Y^*)g(Y)^*Ag(Y)(E_n+Y)&=(E_n+Y^*)((E_n-Y)(E_n+Y)^{-1})^*A(E_n-Y)\\
&=(E_n+Y^*)(E_n+Y^*)^{-1}(E_n-Y^*)(A-AY)=A-AY-Y^*A+Y^*AY\\
&=A+Y^*AY=A+AY+Y^*A+Y^*AY=(E_n+Y^*)(A+AY)\\
&=(E_n+Y^*)A(E_n+Y)
\end{aligned}$$

が成り立つ. E_n+X, $E_n+X^*=(E_n+X)^*$, E_n+Y, $E_n+Y^*=(E_n+Y)^*$ は正則行列だから, 上式から $f(X)^*A=-Af(X)$ と $g(Y)^*Ag(Y)=A$ が得られる. さらに $\det(E_n+X)\neq 0$ ならば

$$\begin{aligned}
\det(E_n+(E_n-X)(E_n+X)^{-1})&=\det((E_n(E_n+X)+(E_n-X))(E_n+X)^{-1})\\
&=\det(2E_n)\det((E_n+X)^{-1})=\frac{2^n}{\det(E_n+X)}\neq 0
\end{aligned}$$

が成り立つ. 以上から $f(X)\in S(A)$, $g(Y)\in U(A)$ である.

(2) $X\in U(A)$ ならば次の等式が成り立つため $g\circ f$ は $U(A)$ の恒等写像である.

$$\begin{aligned}
g(f(X))&=g((E_n-X)(E_n+X)^{-1})=(E_n-(E_n-X)(E_n+X)^{-1})(E_n+(E_n-X)(E_n+X)^{-1})^{-1}\\
&=(E_n(E_n+X)-(E_n-X))(E_n+X)^{-1}(E_n+(E_n-X)(E_n+X)^{-1})^{-1}\\
&=2X((E_n+(E_n-X)(E_n+X)^{-1})(E_n+X))^{-1}=2X((E_n+X)+(E_n-X))^{-1}=2X(2E_n)^{-1}=X
\end{aligned}$$

$Y\in S(A)$ ならば上と全く同じ式変形を行えば $f(g(Y))=Y$ が得られるので $f\circ g$ は $S(A)$ の恒等写像である. □

-1 を固有値にもたない n 次正方行列 X に対して $(E_n-X)(E_n+X)^{-1}$ を対応させる写像を Cayley 変換という.