

幾何学演習 II

第1回 可算基をもつ距離空間

定義 1.1

集合 X に対し, 自然数全体の集合から X への全単射が存在するとき, X を可算集合という. また, 有限集合または可算集合である集合をたかだか可算な集合という.

例題 1.2

自然数全体の集合 N の部分集合はたかだか可算な集合であることを示せ.

解答例

X を N の有限集合でない部分集合とし, 写像 $f: N \rightarrow X$ を次のように帰納的に定義する. N の空でない部分集合は最小値をもつため, $f(1) = \min X$ と定める. このとき $f(1) < \min(X - \{f(1)\})$ が成り立つ. X は有限集合ではないため, X の有限部分集合の補集合は空集合ではない. そこで2以上の自然数 n に対し, $f(n)$ を

$$f(n) = \min(X - \{f(1), f(2), \dots, f(n-1)\})$$

で定義する. $X_1 = X$ とおき, 2以上の自然数 n に対して $X_n = X - \{f(1), f(2), \dots, f(n-1)\}$ とおけば $X_{n+1} = X_n - \{\min X_n\}$ だから $f(n+1) = \min X_{n+1} > \min X_n = f(n)$ である.

解答例の続き

$f(n) < m < f(n+1)$ を満たす $m \in X$ は存在しないため f は単射であり, 次が成り立つ.

$$\{i \in X \mid i \leq f(n)\} = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$$

すなわち $\{i \in X \mid i \leq f(n)\}$ は X の要素を小さいものから順に n 個選んで得られる集合である. $k \in X$ に対して $\{i \in X \mid i \leq k\}$ の要素の個数を ν_k とすれば, $\{i \in X \mid i \leq k\}$ は X の要素を小さいものから順に ν_k 個選んで得られる集合だから

$$\{i \in X \mid i \leq f(\nu_k)\} = \{f(1), f(2), \dots, f(\nu_k)\}$$

と一致する.

さらに $k, f(\nu_k) \in X$ だから k は $\{i \in X \mid i \leq k\}$ の最大値, $f(\nu_k)$ は $\{i \in X \mid i \leq f(\nu_k)\}$ の最大値だから $k = f(\nu_k)$ が成り立つ. 故に f は全射でもあるため, X は可算集合である.

従って N の部分集合はたかだか可算な集合である.

例題1.2により可算集合の部分集合はたかだか可算な集合であることがわかる.

例題 1.3

X が可算集合で、 $f: X \rightarrow Y$ が全射ならば、 Y はたかだか可算な集合であることを示せ。

解答例

f に全単射 $N \rightarrow X$ 合成することによって $X=N$ としてよい。 f は全射だから各 $y \in Y$ に対して $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ であり $y, z \in Y$ かつ $y \neq z$ ならば $f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{z\}) = \emptyset$ である。故に $f^{-1}(\{y\})$ の最小値を m_y とおけば、「 $y, z \in Y$ かつ $y \neq z$ ならば $m_y \neq m_z$ 」が成り立つため $g: Y \rightarrow N$ を $g(y) = m_y$ で定めれば、 g は単射であり g は Y から N の部分集合 $g(Y)$ への全単射を与える。従って例題1.2より Y はたかだか可算な集合である。

X, Y が可算集合ならば全単射 $f: N \rightarrow X, g: N \rightarrow Y$ が存在する. 写像 $h: N \times N \rightarrow X \times Y$ を $h(m, n) = (f(m), g(n))$ で定義すれば, h の逆写像は $h^{-1}(x, y) = (f^{-1}(x), g^{-1}(y))$ で与えられるため, h は全単射である. 例題1.4から全単射 $\varphi: N \rightarrow N \times N$ が存在し, 全単射の合成写像は全単射だから, 次の命題が成り立つ.

命題 1.5

X, Y が可算集合ならば, 直積集合 $X \times Y$ も可算集合である.

例題 1.6

各 $X_n (n=1, 2, \dots)$ がたかだか可算な集合ならば, 合併集合 $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ もたかだか可算な集合であることを示せ.

解答例

X_n が可算集合ならば全単射 $f_n: N \rightarrow X_n$ があり, X_n が有限集合ならば全射 $f_n: N \rightarrow X_n$ がある. そこで写像 $F: N \times N \rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ を $F(m, n) = f_n(m)$ で定めれば F は全射だから

例題1.3と例題1.4から $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ はたかだか可算な集合である.

注意 1.7

- (1) Y が有限集合ならば, 全射 $N \rightarrow Y$ が存在するので, 例題1.3より Y がただかか可算な集合であるためには全射 $N \rightarrow Y$ が存在することが必要十分である.
- (2) 整数全体の集合 Z は可算集合である. 実際, 写像 $f: N \rightarrow Z$ を $n \in N$ に対して

$$f(n) = \begin{cases} 1-k & n=2k-1 \\ k & n=2k \end{cases}$$

で定めれば f は全単射である.

例題 1.8

有理数全体の集合 Q は可算集合であることを示せ.

解答例

注意1.7の(2)と命題1.5によって $Z \times N$ は可算集合である. さらに $Z \times N$ から Q への写像 $g: Z \times N \rightarrow Q$ を $g(m, n) = \frac{m}{n}$ で定めれば g は全射だから例題1.3から Q はただかか可算な集合であるが, Q は有限集合ではないので, Q は可算集合である.

定義 1.9

(X, \mathcal{O}) を位相空間とする.

- (1) \mathcal{O} のたかだか可算な集合である基底が存在するとき, (X, \mathcal{O}) は**可算基をもつ**という.
- (2) X のたかだか可算な部分集合 A で $X = \bar{A}$ を満たすものが存在するとき, (X, \mathcal{O}) は**可分**であるという.

例題 1.10

可算基をもつ位相空間は可分であることを示せ.

解答例

(X, \mathcal{O}) を可算基 \mathcal{B} をもつ位相空間とする. 空集合でない各 $U \in \mathcal{B}$ から点 p_U を選び $A = \{p_U \mid U \in \mathcal{B}, U \neq \emptyset\}$ とおくと \mathcal{B} はたかだか可算な集合だから A もたかだか可算な集合である. X の空でない任意の開集合 O は \mathcal{B} の要素の合併集合だから $U \subset O$ を満たす空集合でない $U \in \mathcal{B}$ が存在する. $p_U \in U$ だから $p_U \in O$ となるため $p_U \in A \cap O$ が成り立つ. 従って X の空でない任意の開集合 O に対して $A \cap O \neq \emptyset$ だから $X = \bar{A}$ である.

距離空間 (X, d) に対し, 距離関数 d から定まる X の位相を \mathcal{O}_d で表す.

例題 1.11

(X, d) を距離空間とする. X の部分集合 A が $\bar{A} = X$ を満たすとき, (X, d) の開球からなる集合 $\mathcal{B} = \{B_d(p; \frac{1}{n}) \mid p \in A, n \in \mathbb{N}\}$ は \mathcal{O}_d の基底であることを示せ.

解答例

任意の $O \in \mathcal{O}_d$ と $p \in O$ に対し, \mathcal{O}_d の定義から, $r > 0$ で $B_d(p; r) \subset O$ を満たすものがある. $\frac{1}{n} < \frac{r}{2}$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ を選ぶ. $p \in X = \bar{A}$ より $B_d(p; \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$ だから $c \in B_d(p; \frac{1}{n}) \cap A$ が選べて, $B_d(c; \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}$ かつ $p \in B_d(c; \frac{1}{n})$ が成り立つ.

$x \in B_d(c; \frac{1}{n})$ ならば $d(x, c) < \frac{1}{n} < \frac{r}{2}$ だから $d(x, p) \leq d(x, c) + d(c, p) < \frac{2}{n} < r$ が得られる. 従って $x \in B_d(p; r)$ だから $B_d(c; \frac{1}{n}) \subset B_d(p; r)$ が成り立つため, $B_d(p; r) \subset O$ より $B_d(c; \frac{1}{n}) \subset O$ である. さらに $p \in B_d(c; \frac{1}{n})$ かつ $B_d(c; \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}$ が成り立つため, 幾何学 I [命題8.5](#)により \mathcal{B} は \mathcal{O}_d の基底である.

例題 1.12

(X, d) を距離空間とする. 位相空間 (X, \mathcal{O}_d) が可分ならば \mathcal{O}_d は可算基をもつことを示せ.

解答例

X のたかだか可算な部分集合 A で $\bar{A} = X$ を満たすものがある. 全射 $f: N \rightarrow A$ があるので, 例題 1.11 の基底 $\mathcal{B} = \{B_d(p; \frac{1}{n}) \mid p \in A, n \in N\}$ を考えて, 写像 $g: N \times N \rightarrow \mathcal{B}$ を $g(m, n) = B_d(f(m); \frac{1}{n})$ で定義すれば, g は全射である.

従って例題 1.3 と例題 1.4 から \mathcal{B} はたかだか可算な \mathcal{O}_d の基底である.

例題 1.13

$Q^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in Q\}$ とおけば Q^n は可算集合で, $\overline{Q^n} = R^n$ が成り立つことを示せ.

解答例

命題 1.5 から数学的帰納法によって可算集合の有限個の直積は可算集合であることが示されるため, Q^n は可算集合である.

解答例の続き

任意の $p \in \mathbf{R}^n$ と $r > 0$ に対し, 开区間 $\left(p_i - \frac{r}{\sqrt{n}}, p_i + \frac{r}{\sqrt{n}}\right)$ に含まれる有理数 q_i を各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して1つずつ選んで $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ とおけば $q \in \mathbf{Q}^n$ であり, $i = 1, 2, \dots, n$ に対して $|q_i - p_i| < \frac{r}{\sqrt{n}}$ が成り立つため, $\|q - p\| < r$ である.

故に中心が p で半径 r の開球は \mathbf{Q}^n の要素を含むため $\overline{\mathbf{Q}^n} = \mathbf{R}^n$ である.

例題1.12と例題1.13から次の結果が得られる.

命題 1.14

n 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^n の通常距離関数から定まる \mathbf{R}^n の位相は可算基をもつ.

幾何学演習 II

第2回 全有界な距離空間

定義 2.1

(X, d) を距離空間とする.

- (1) X の有界な部分集合 A に対して $\delta(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ とおき, $\delta(A)$ を A の**直径**という.
- (2) ε を正の実数とする. X の部分集合族 $(U_i)_{i \in I}$ が $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ かつすべての $i \in I$ に対して $\delta(U_i) < \varepsilon$ を満たすとき, $(U_i)_{i \in I}$ を (X, d) の **ε -被覆**という.
- (3) 任意の正の実数 ε に対して有限個の X の部分集合からなる (X, d) の ε -被覆が存在するとき, (X, d) は**全有界**であるという.
- (4) ε を正の実数とする. 次の条件を満たす X の点列 $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ を (X, d) の **ε -列**という.
「任意の $k, l \in \mathbb{N}$ に対して $d(x_k, x_l) < \varepsilon$.」

距離空間 (X, d) が与えられたとき, X の部分集合 A, B に対し,

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

とおく.

例題 2.2

(1) A, B が有界な X の部分集合ならば $A \cup B$ も有界で、次が成り立つことを示せ.

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$$

(2) U_1, U_2, \dots, U_n が有界な X の部分集合ならば次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\delta(U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n) \leq \sum_{i=1}^n \delta(U_i) + \sum_{i=1}^{n-1} d(U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_i, U_{i+1})$$

(3) (X, d) が全有界ならば X は有界, すなわち $\delta(X) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\}$ は有限であることを示せ.

解答例

(1) $x, y \in A$ ならば $d(x, y) \leq \delta(A)$ であり, $x, y \in B$ ならば $d(x, y) \leq \delta(B)$ である. また任意の $\varepsilon > 0$ に対して $p \in A, q \in B$ で $d(p, q) < d(A, B) + \varepsilon$ を満たすものがあるため, $x \in A, y \in B$ の場合, 三角不等式と上の不等式から次の不等式が成り立つ.

$$d(x, y) \leq d(x, p) + d(p, q) + d(q, y) < \delta(A) + d(A, B) + \varepsilon + \delta(B)$$

故に $x, y \in A \cup B$ ならば任意の $\varepsilon > 0$ に対し $d(x, y) < \delta(A) + \delta(B) + d(A, B) + \varepsilon$ である.

解答例の続き

$d(x, y) > \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$ ならば $\varepsilon = \frac{1}{2}(d(x, y) - \delta(A) - \delta(B) - d(A, B))$ とおくと $\varepsilon > 0$ であり, 上の不等式から $2\varepsilon \leq \varepsilon$ が得られ $\varepsilon \leq 0$ となって矛盾が生じるため, $d(x, y) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$ である. 故に $\{d(x, y) \mid x, y \in A \cup B\}$ は上に有界な \mathbf{R} の部分集合だから幾何学演習 | 例題15.1 から $A \cup B$ は有界であり, 上の不等式と $\delta(A \cup B)$ の定義から $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$ が得られる.

(2) $n=2$ の場合は(1)から $\delta(U_1 \cup U_2) \leq \delta(U_1) + \delta(U_2) + d(U_1, U_2)$ が成り立つ. $n=k$ のとき, 主張が成り立つと仮定して U_1, U_2, \dots, U_{k+1} が有界な X の部分集合ならば(1)と帰納法の仮定から次の不等式が成り立つため $n=k+1$ のときも主張が成り立つ.

$$\begin{aligned} \delta(U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_{k+1}) &\leq \delta(U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_k) + \delta(U_{k+1}) + d(U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_k, U_{k+1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^k \delta(U_i) + \sum_{i=1}^{k-1} d(U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_i, U_{i+1}) + \delta(U_{k+1}) + d(U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_k, U_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \delta(U_i) + \sum_{i=1}^k d(U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_i, U_{i+1}) \end{aligned}$$

解答例の続き

(3) 仮定から有限個の部分集合からなる (X, d) の1-被覆 $(U_i)_{i=1,2,\dots,n}$ が存在する.

$X = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$ より上の不等式から

$$\delta(X) = \delta(U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n) \leq \sum_{i=1}^n \delta(U_i) + \sum_{i=1}^{n-1} d(U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_i, U_{i+1})$$

だから X は有界である.

例題 2.3

(X, d) を全有界な距離空間, ε を任意の正の実数とする. X の任意の点列は ε -列である部分列をもつことを示せ.

解答例

仮定から有限個の部分集合からなる (X, d) の ε -被覆 $(U_i)_{i=1,2,\dots,n}$ が存在する. $X = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$ だから, X の点列 $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ に対して $S_i = \{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in U_i\}$ とおけば $\mathbb{N} = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ が成り立つ. 故に S_1, S_2, \dots, S_n の中に無限集合であるものが存在する. S_m が無限集合であるとき $S_m = \{k_1, k_2, \dots, k_i, \dots\}$ ($k_1 < \dots < k_i < k_{i+1} < \dots$) とすれば, 任意の $i, j \in \mathbb{N}$ に対して $x_{k_i}, x_{k_j} \in U_m$ だから $d(x_{k_i}, x_{k_j}) \leq \delta(U_m) < \varepsilon$ が成り立つため $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ は (X, d) の ε -列である.

例題 2.4

距離空間 (X, d) が全有界ならば X の任意の点列は Cauchy 列を部分列に含むことを示せ.

解答例

$(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ を X の任意の点列として $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ の部分列 $(x_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}}$ を次のように帰納的に定める. **例題2.3**から $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ の部分列で 1-列であるものが存在するため, $(x_i^{(1)})_{i \in \mathbb{N}}$ を 1-列である $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ の部分列とする. $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ の部分列で $\frac{1}{n}$ -列である $(x_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}}$ が定まったとすれば, **例題2.3**から, $(x_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}}$ の部分列で $\frac{1}{n+1}$ -列であるものが存在するため, $(x_i^{(n+1)})_{i \in \mathbb{N}}$ を $\frac{1}{n+1}$ -列である $(x_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}}$ の部分列とする. このとき各 $n, i \in \mathbb{N}$ に対して $x_{k(n)_i} = x_i^{(n)}$ を満たす $k(n)_i \in \mathbb{N}$ が定まり, $k(n)_1 < \dots < k(n)_i < k(n)_{i+1} < \dots$ かつ $\{k(n+1)_1, k(n+1)_2, \dots, k(n+1)_i, \dots\}$ は $\{k(n)_1, k(n)_2, \dots, k(n)_i, \dots\}$ に含まれる. 従って $k(n)_i \leq k(n+1)_i < k(n+1)_{i+1}$ だから, とくに $k(n)_n < k(n+1)_{n+1}$ となるため, $(x_{k(n)_n})_{n \in \mathbb{N}}$ は $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ の部分列である.

解答例の続き

任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $N > \frac{1}{\varepsilon}$ である自然数 N をとれば $\frac{1}{N} < \varepsilon$ より $(x_{k(N)_i})_{i \in \mathbb{N}} = (x_i^{(N)})_{i \in \mathbb{N}}$ は ε -列である. $n \geq N$ ならば $(x_{k(n)_i})_{i \in \mathbb{N}}$ は $(x_{k(N)_i})_{i \in \mathbb{N}}$ の部分列だから $(x_{k(n)_n})_{n \geq N}$ は $(x_{k(N)_i})_{i \in \mathbb{N}}$ の部分列である. 故に $m, n \geq N$ ならば $d(x_{k(m)_m}, x_{k(n)_n}) < \varepsilon$ だから $(x_{k(n)_n})_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列である $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ の部分列である.

例題 2.5

距離空間 (X, d) における任意の点列が Cauchy 列を部分列に含めば (X, d) は全有界であることを示せ.

例題2.4, 例題2.5から直ちに次の定理が得られる.

定理 2.6

距離空間 (X, d) が全有界であるためには, X の任意の点列が Cauchy 列を部分列に含むことが必要十分である.

例題2.5の解答例

(X, d) が全有界でないと仮定して Cauchy 列を部分列に含まない点列が存在することを示す. 仮定から $\varepsilon > 0$ が存在して, 有限個の部分集合からなる (X, d) の ε -被覆は存在しない. $r > 0$ と $p \in X$ に対し, $x, y \in B_d(p; r)$ ならば $d(x, y) \leq d(x, p) + d(p, y) \leq 2r$ だから $\delta(B_d(p; r)) \leq 2r$ であることに注意すれば, $r < \frac{\varepsilon}{2}$ ならば X の任意の有限部分集合 S に対して $X \neq \bigcup_{p \in S} B_d(p; r)$ が成り立つ.

$x_1 \in X$ を一つ選び, $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ が $x_i \in X - \bigcup_{j=1}^{i-1} B_d(x_j; r)$ ($i=2, 3, \dots, k$) を満たすように選べたとすれば, $X \neq \bigcup_{j=1}^k B_d(x_j; r)$ だから $x_{k+1} \in X - \bigcup_{j=1}^k B_d(x_j; r)$ が選べる.

ここで $k < l$ ならば $x_l \in X - \bigcup_{j=1}^{l-1} B_d(x_j; r)$ より $x_l \notin B_d(x_k; r)$ となるため $d(x_k, x_l) \geq r$ が成り立つ. 従って点列 $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列を部分列に含まない.

幾何学演習 II

第3回 点列コンパクト

例題 3.1

位相空間 (X, \mathcal{O}) が可算基をもつとき, $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ を満たす X の開集合族 $(U_i)_{i \in I}$ に対して, I のたかだか可算な部分集合 J で $X = \bigcup_{i \in J} U_i$ を満たすものが存在することを示せ.

解答例

\mathcal{B} をたかだか可算な \mathcal{O} の基底とする. 各 $O \in \mathcal{B}$ に対して $J_O = \{i \in I \mid O \subset U_i\}$ とおき, $\mathcal{B}' = \{O \in \mathcal{B} \mid J_O \neq \emptyset\}$ とおけば, $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ だから \mathcal{B}' もたかだか可算な集合である. 各 $O \in \mathcal{B}'$ に対して $j_O \in J_O$ を一つずつ選んで $J = \{j_O \mid O \in \mathcal{B}'\}$ とおけば J は I のたかだか可算な部分集合である. $x \in X$ ならば $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ より $x \in U_i$ となる $i \in I$ が存在する. U_i は \mathcal{B} の要素の合併集合だから $x \in O \subset U_i$ を満たす $O \in \mathcal{B}$ がある. このとき $i \in J_O$ だから $J_O \neq \emptyset$ となるため, $O \in \mathcal{B}'$ である. 一方 $j_O \in J_O$ だから $O \subset U_{j_O}$ が成り立つため, $x \in U_{j_O} \subset \bigcup_{i \in J} U_i$ が得られる. 従って $X = \bigcup_{i \in J} U_i$ である.

例題 3.2

距離空間 (X, d) が全有界ならば d から定まる X の位相は可算基をもつことを示せ.

解答例

例題1.13により d から定まる X の位相に関して X は可分であることを示せばよい.

仮定から任意の自然数 n に対して有限個の X の部分集合からなる (X, d) の $\frac{1}{n}$ -被覆 $(U_{n,i})_{i=1,2,\dots,l_n}$ が存在する. 各自然数 n と $i=1,2,\dots,l_n$ に対して $a_{n,i} \in U_{n,i}$ を一つ

ずつ選んで $A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,l_n}\}$ とおき, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおくと, 例題1.6より A は

たかだか可算な集合である. 任意の $x \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対して $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ である自然数 n を

とれば $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ であり, $x \in U_{n,i}$ となる $i=1,2,\dots,l_n$ が存在するため, 不等式

$d(x, a_{n,i}) \leq \delta(U_{n,i}) < \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ が成り立つ. 従って $a_{n,i} \in B_d(x; \varepsilon)$ だから $x \in \bar{A}$ が成り

立つため, $X = \bar{A}$ である. 故に d から定まる X の位相に関して X は可分である.

定義 3.3

(X, d) を距離空間とする. X の任意の点列が収束する部分列をもつとき, (X, d) は点列コンパクトであるという.

例題 3.4

距離空間 (X, d) が点列コンパクトならば (X, d) は完備かつ全有界であることを示せ.

解答例

(X, d) が点列コンパクトならば, X の任意の点列 $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ に対してその部分列 $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ で収束するものがある. $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ は収束するため幾何学 II 命題 1.7 によって Cauchy 列だから例題 2.5 によって (X, d) は全有界である.

また, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ が (X, d) の Cauchy 列ならば仮定から $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ は収束する部分列をもつため, 幾何学 II 補題 1.9 から $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ は収束する. 故に (X, d) は完備である.

例題 3.5

距離空間 (X, d) が完備かつ全有界ならば (X, d) は点列コンパクトであることを示せ.

解答例

$(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ を X の任意の点列とする. 例題2.4から $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列を部分列に含み, (X, d) の Cauchy 列は収束するため, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ は収束する部分列をもつ. 故に (X, d) は点列コンパクトである.

例題 3.6

距離空間 (X, d) が点列コンパクトならば, 距離関数 d から定まる X の位相に関して X はコンパクトであることを示せ.

解答例

仮定と例題3.4から (X, d) は全有界だから例題3.2によって d から定まる X の位相は可算基をもつ. 従って例題3.1から $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ を満たす X の開集合族 $(U_i)_{i \in I}$ に対して, I のたかだか可算な部分集合 J で $X = \bigcup_{i \in J} U_i$ を満たすものが存在する. J が有限集合でない場合を考えればよいので $J = \{i_1, i_2, \dots, i_n, \dots\}$ とする.

解答例の続き

$A_n = X - (U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_n})$ とおき, すべての自然数 n に対して $A_n \neq \emptyset$ と仮定する.
このとき各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \in A_n$ を一つずつ選んで X の点列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が得られる.
 (X, d) は点列コンパクトだから $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の収束する部分列 $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ が存在する.

$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = p$ とおけば, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{i_n}$ より $p \in U_{i_m}$ を満たす自然数 m が存在する. U_{i_m} は

開集合だから自然数 N で条件「 $k \geq N$ ならば $a_{n_k} \in U_{i_m}$ 」を満たすものがある. ここで $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ は $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ を満たす自然数の列だから $n_k \geq k$ が任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して成り立つため, m と N の大きい方を l とすれば $a_{n_l} \in U_{i_m} \cap A_{n_l}$ かつ $n_l \geq l \geq m$ が成り立つ. 後者の不等式から $A_{n_l} \subset A_m$ だから

$$U_{i_m} \cap A_{n_l} \subset U_{i_m} \cap A_m = U_{i_m} \cap (X - (U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_m})) = \emptyset$$

より $U_{i_m} \cap A_{n_l} = \emptyset$ が得られて $a_{n_l} \in U_{i_m} \cap A_{n_l}$ と矛盾する. 故に $A_n = \emptyset$ を満たす自然数 n が存在するため $X = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_n}$ となり, X はコンパクトであることがわかる.

これまでの結果をまとめれば, 次の定理が得られる.

定理 3.7

距離空間 (X, d) について次の3つの条件は同値である.

- (i) 距離関数 d から定まる X の位相に関して X はコンパクトである.
- (ii) (X, d) は点列コンパクトである.
- (iii) (X, d) は完備かつ全有界である.

(i) \Rightarrow (ii) は幾何学 II 定理1.4, (ii) \Rightarrow (iii) は例題3.4, (iii) \Rightarrow (ii) は例題3.5, (ii) \Rightarrow (i) は例題3.6で示された.

幾何学演習 II

第4回 写像の微分

例題 4.1

実数を成分とする n 次対称行列 A に対して関数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ を $f(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ で定めるとき、 f の $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ における微分 $f'(\mathbf{p})$ を求めよ。

解答例

A は対称行列で ${}^t\mathbf{p}A(\mathbf{x}-\mathbf{p})$ はスカラーだから ${}^t\mathbf{p}A(\mathbf{x}-\mathbf{p}) = {}^t({}^t\mathbf{p}A(\mathbf{x}-\mathbf{p})) = {}^t(\mathbf{x}-\mathbf{p})A\mathbf{p}$ であり、幾何学 II 補題 2.1 から

$$|{}^t(\mathbf{x}-\mathbf{p})A(\mathbf{x}-\mathbf{p})| \leq \|{}^t(\mathbf{x}-\mathbf{p})\| \|A(\mathbf{x}-\mathbf{p})\| \leq \|{}^t(\mathbf{x}-\mathbf{p})\| \|A\| \|\mathbf{x}-\mathbf{p}\| = \|A\| \|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|^2$$

だから次の式が得られる。

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) - 2{}^t\mathbf{p}A(\mathbf{x}-\mathbf{p})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|} \right| &= \frac{|{}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} - {}^t\mathbf{p}A\mathbf{p} - 2{}^t\mathbf{p}A(\mathbf{x}-\mathbf{p})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|} = \frac{|{}^t(\mathbf{x}-\mathbf{p})A\mathbf{x} - {}^t\mathbf{p}A(\mathbf{x}-\mathbf{p})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|} \\ &= \frac{|{}^t(\mathbf{x}-\mathbf{p})A\mathbf{x} - {}^t(\mathbf{x}-\mathbf{p})A\mathbf{p}|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|} = \frac{|{}^t(\mathbf{x}-\mathbf{p})A(\mathbf{x}-\mathbf{p})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|} \leq \|A\| \|\mathbf{x}-\mathbf{p}\| \end{aligned}$$

$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} \|A\| \|\mathbf{x}-\mathbf{p}\| = 0$ だから上式より $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} \left| \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) - 2{}^t\mathbf{p}A(\mathbf{x}-\mathbf{p})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|} \right| = 0$ である。従って

$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) - 2{}^t\mathbf{p}A(\mathbf{x}-\mathbf{p})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|} = \mathbf{0}$ が成り立つため、微分の定義から $f'(\mathbf{p}) = 2{}^t\mathbf{p}A$ である。

例題 4.2

X を \mathbf{R}^n の開集合とし, 写像 $f, g: X \rightarrow \mathbf{R}^m$ はともに $p \in X$ で微分可能であるとする.
 $F(x) = f(x) + g(x)$ で定義される写像 $F: X \rightarrow \mathbf{R}^m$ の $p \in X$ における微分 $F'(p)$ は
 $F'(p) = f'(p) + g'(p)$ で与えられることを示せ.

解答例

仮定から $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - (f(p) + f'(p)(x - p))}{\|x - p\|} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{g(x) - (g(p) + g'(p)(x - p))}{\|x - p\|} = \mathbf{0}$ が成り立つため,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow p} \frac{F(x) - (F(p) + (f'(p) + g'(p))(x - p))}{\|x - p\|} &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) + g(x) - (f(p) + g(p) + (f'(p) + g'(p))(x - p))}{\|x - p\|} \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - (f(p) + f'(p)(x - p)) + g(x) - (g(p) + g'(p)(x - p))}{\|x - p\|} \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - (f(p) + f'(p)(x - p))}{\|x - p\|} + \lim_{x \rightarrow p} \frac{g(x) - (g(p) + g'(p)(x - p))}{\|x - p\|} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

である. 従って微分の定義から $F'(p) = f'(p) + g'(p)$ である.

例題 4.3

X を \mathbf{R}^n の開集合とし, 写像 $f: X \rightarrow \mathbf{R}^m$, $\varphi: X \rightarrow \mathbf{R}$ はともに $p \in X$ で微分可能であるとする. $F(x) = \varphi(x)f(x)$ で定義される写像 $F: X \rightarrow \mathbf{R}^m$ の $p \in X$ における微分 $F'(p)$ は $F'(p) = f(p)\varphi'(p) + \varphi(p)f'(p)$ で与えられることを示せ.

解答例

写像 $\varepsilon_{f,p}: X \rightarrow \mathbf{R}^m$, $\varepsilon_{\varphi,p}: X \rightarrow \mathbf{R}$ を以下で定めれば, 仮定から $\lim_{x \rightarrow p} \varepsilon_{f,p}(x) = \mathbf{0}$ かつ $\lim_{x \rightarrow p} \varepsilon_{\varphi,p}(x) = 0$ が成り立つ.

$$\varepsilon_{f,p}(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - (f(p) + f'(p)(x - p))}{\|x - p\|} & x \neq p \\ \mathbf{0} & x = p \end{cases}$$

$$\varepsilon_{\varphi,p}(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x) - (\varphi(p) + \varphi'(p)(x - p))}{\|x - p\|} & x \neq p \\ 0 & x = p \end{cases}$$

解答例の続き

このとき

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + f'(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \varepsilon_{f, \mathbf{p}}(\mathbf{x})$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{p}) + \varphi'(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \varepsilon_{\varphi, \mathbf{p}}(\mathbf{x})$$

が任意の $\mathbf{x} \in X$ に対して成り立つため、 $\varphi'(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p})$ がスカラーであることに注意すれば、次の等式が得られる。

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{p}) &= \varphi(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{p})f(\mathbf{p}) = (\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{p}))f(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{p})(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p})) \\ &= (\varphi'(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \varepsilon_{\varphi, \mathbf{p}}(\mathbf{x}))f(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{p})(f'(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \varepsilon_{f, \mathbf{p}}(\mathbf{x})) \\ &= \varphi'(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p})f(\mathbf{x}) + \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \varepsilon_{\varphi, \mathbf{p}}(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{p})f'(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \varphi(\mathbf{p})\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \varepsilon_{f, \mathbf{p}}(\mathbf{x}) \\ &= f(\mathbf{x})\varphi'(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \varepsilon_{\varphi, \mathbf{p}}(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{p})f'(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \varphi(\mathbf{p})\varepsilon_{f, \mathbf{p}}(\mathbf{x}) \\ &= (f(\mathbf{x})\varphi'(\mathbf{p}) + \varphi(\mathbf{p})f'(\mathbf{p}))(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| (\varepsilon_{\varphi, \mathbf{p}}(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{p})\varepsilon_{f, \mathbf{p}}(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

従って次の等式が得られる。

解答例の続き

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - (F(p) + (f(p)\varphi'(p) + \varphi(p)f'(p))(x-p))}{\|x-p\|} &= \frac{(f(x) - f(p))\varphi'(p)(x-p)}{\|x-p\|} + \varepsilon_{\varphi,p}(x)f(x) + \varphi(p)\varepsilon_{f,p}(x) \\ &= \frac{(f'(p)(x-p) + \|x-p\|\varepsilon_{f,p}(x))\varphi'(p)(x-p)}{\|x-p\|} + \varepsilon_{\varphi,p}(x)f(x) + \varphi(p)\varepsilon_{f,p}(x) \\ &= \frac{f'(p)(x-p)\varphi'(p)(x-p)}{\|x-p\|} + \varepsilon_{\varphi,p}(x)f(x) + (\varphi(p) + \varphi'(p)(x-p))\varepsilon_{f,p}(x) \cdots (*) \end{aligned}$$

幾何学 II 補題2.1から

$$\|f'(p)(x-p)\| \leq \|f'(p)\| \|x-p\|, \quad |\varphi'(p)(x-p)| \leq \|\varphi'(p)\| \|x-p\|$$

だから $\left\| \frac{f'(p)(x-p)\varphi'(p)(x-p)}{\|x-p\|} \right\| \leq \frac{\|\varphi'(p)\| \|f'(p)\| \|x-p\|^2}{\|x-p\|} = \|\varphi'(p)\| \|f'(p)\| \|x-p\|$ が

成り立つ. この不等式から $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(p)(x-p)\varphi'(p)(x-p)}{\|x-p\|} = \mathbf{0}$ である. また, $\lim_{x \rightarrow p} \varepsilon_{f,p}(x) = \mathbf{0}$,

$\lim_{x \rightarrow p} \varepsilon_{\varphi,p}(x) = 0$ だから (*) より $\lim_{x \rightarrow p} \frac{F(x) - (F(p) + (f(p)\varphi'(p) + \varphi(p)f'(p))(x-p))}{\|x-p\|} = \mathbf{0}$ が

得られるため, $F'(p) = f(p)\varphi'(p) + \varphi(p)f'(p)$ が成り立つ.

例題 4.4

m, n を 0 以上の整数, r を正の実数とし, $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ を次で定義される関数とする.

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} \frac{x^m y^n}{(x^2 + y^2)^r} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

f が原点で微分可能であるための条件は $m+n > 2r+1$ であることを示せ.

解答例

$$f\left(\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} 0 & n > 0 \\ t^{m-2r} & n = 0 \end{cases}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} 0 & m > 0 \\ t^{n-2r} & m = 0 \end{cases} \quad \text{より次の等式が成り立つ.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f\left(\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)) = \begin{cases} 0 & m > 2r+1 \text{ または } n > 0 \\ 1 & m = 2r+1 \text{ かつ } n = 0 \\ \infty & m < 2r+1 \text{ かつ } n = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}\right) - f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)) = \begin{cases} 0 & m > 0 \text{ または } n > 2r+1 \\ 1 & m = 0 \text{ かつ } n = 2r+1 \\ \infty & m = 0 \text{ かつ } n < 2r+1 \end{cases}$$

解答例の続き

f が原点で微分可能ならば、幾何学II **命題2.9**より $f' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ が成り立ち、幾何学II **命題2.7**より f は原点で $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向に微分可能だから次の等式が成り立つ。

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = f' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial f}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

一方 $t \neq 0$ ならば $\frac{1}{t} (f \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \frac{t^{m+n-2r-1}}{2^r}$ だから $m+n=2r+1$ ならば

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \frac{1}{2^r}$ であり、 $m+n < 2r+1$ ならば $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \infty$ である。

前者の場合は $0 < \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) < 1$ であるが、 $\frac{\partial f}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\frac{\partial f}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が存在する場合、

これらの値は 0 または 1 だから $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \neq \frac{\partial f}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial f}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。

後者の場合は f は原点で $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向に微分不可能である。

以上から、 $m+n \leq 2r+1$ ならば f は原点で微分不可能である。

解答例の続き

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して $|x|^m = (\sqrt{x^2})^m \leq \|\mathbf{x}\|^m$, $|y|^n = (\sqrt{y^2})^n \leq \|\mathbf{x}\|^n$ だから

$$\left| \frac{f(\mathbf{x}) - (f(\mathbf{0}) + (0 \ 0)\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} \right| = \left| \frac{x^m y^n}{(x^2 + y^2)^{r+\frac{1}{2}}} \right| = \frac{|x|^m |y|^n}{\|\mathbf{x}\|^{2r+1}} \leq \|\mathbf{x}\|^{m+n-2r-1}$$

である. 故に $m+n > 2r+1$ の場合は $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \|\mathbf{x}\|^{m+n-2r-1} = 0$ だから, 上の不等式から

$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}) - (f(\mathbf{0}) + (0 \ 0)\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = 0$ が成り立つため, f は原点で微分可能である.

幾何学演習 II

第5回 偏微分

例題 5.1

U を \mathbf{R}^n の開集合, $a < b$ とし, 連続関数 $f: U \times [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ に対して関数 $F: U \rightarrow \mathbf{R}$ を $F(\mathbf{x}) = \int_a^b f(\mathbf{x}, t) dt$ によって定義すれば F は連続関数であることを示せ.

解答例

U は開集合だから $\mathbf{p} \in U$ に対し, $B_n(\mathbf{p}; 2r) \subset U$ となる $r > 0$ がある.

$\bar{B}_n(\mathbf{p}; r) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \leq r\}$ とおけば $\bar{B}_n(\mathbf{p}; r) \subset B_n(\mathbf{p}; 2r)$ より $\bar{B}_n(\mathbf{p}; r)$ は U に含まれ, 有界閉集合だから幾何学 I 定理 11.19 からコンパクトである.

また幾何学 I 定理 11.3 から $[a, b]$ もコンパクトだから幾何学 I 定理 11.6 によって

$\bar{B}_n(\mathbf{p}; r) \times [a, b]$ もコンパクトである. 故に幾何学 I 定理 12.10 により f の定義域を

$\bar{B}_n(\mathbf{p}; r) \times [a, b]$ に制限して得られる関数は一様連続だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$\delta > 0$ で次の条件を満たすものがある.

「 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{B}_n(\mathbf{p}; r), u, v \in [a, b]$ かつ $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + |u - v|^2 < \delta^2$ ならば

$$|f(\mathbf{x}, u) - f(\mathbf{y}, v)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.」$$

解答例の続き

故に $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \min\{\delta, r\}$ ならば

$$\begin{aligned} |F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{p})| &= \left| \int_a^b f(\mathbf{x}, t) dt - \int_a^b f(\mathbf{p}, t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\mathbf{x}, t) - f(\mathbf{p}, t)| dt \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dt = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つため、 F は \mathbf{p} で連続である。

例題 5.2

U を \mathbf{R}^n の開集合, $a < b$ とする. 関数 $f: U \times [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ は連続で, i 番目 ($1 \leq i \leq n$) の変数に関して偏微分可能かつ偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \times [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ は連続であるとする.

関数 $F: U \rightarrow \mathbf{R}$ を $F(\mathbf{x}) = \int_a^b f(\mathbf{x}, t) dt$ によって定義すれば F は i 番目の変数に関して偏微分可能で, $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}, t) dt$ が成り立つことを示せ.

解答例

平均値の定理から $f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i, t) - f(\mathbf{x}, t) = h \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} + \theta h\mathbf{e}_i, t)$ を満たす $0 < \theta < 1$ があるため、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{F(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - F(\mathbf{x})}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_a^b f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i, t) dt - \int_a^b f(\mathbf{x}, t) dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_a^b (f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i, t) - f(\mathbf{x}, t)) dt \right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} + \theta h\mathbf{e}_i, t) dt \cdots (*) \end{aligned}$$

U は開集合だから $\mathbf{p} \in U$ に対し、 $B_n(\mathbf{p}; 2r) \subset U$ となる $r > 0$ がある。 $\bar{B}_n(\mathbf{p}; r)$ を例題5.1の解答例と同様に選べば、仮定から $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ の定義域を $\bar{B}_n(\mathbf{p}; r) \times [a, b]$ に制限して得られる関数は一様連続である。故に任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ で条件

$$\begin{aligned} &\text{「}\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{B}_n(\mathbf{p}; r), u, v \in [a, b] \text{ かつ } \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + |u - v|^2 < \delta^2 \text{ ならば} \\ &\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, u) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{y}, v) \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \text{.」} \end{aligned}$$

を満たすものがある。従って $|h| < \delta$ ならば (*) から次の不等式が成り立つ

解答例の続き

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - F(\mathbf{x})}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) dt \right| &= \left| \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} + \theta h\mathbf{e}_i, t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) \right) dt \right| \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x} + \theta h\mathbf{e}_i, t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) \right| dt \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dt = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

故に $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}, t) dt$ が成り立つ。

注意 5.3

例題5.2の仮定がすべての $i=1, 2, \dots, n$ に対して満たされるとき、例題5.1と例題5.2

から $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ は連続だから F は C^1 級関数である。さらにすべての $s=1, 2, \dots, r$ と

$1 \leq i_1, i_2, \dots, i_s \leq n$ に対して $\frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_s}} : U \times [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ が存在して連続ならば F は

C^r 級関数であることが、 r による数学的帰納法で示される。

例題 5.4

C^1 級関数 $g, h: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ に対して $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ を $f(x, y) = \int_0^x g(s, 0) ds + \int_0^y h(x, t) dt$ で定める.

(1) $\frac{\partial f}{\partial x} = g$ ならば $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ であることを示せ.

(2) $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ ならば $\frac{\partial f}{\partial x} = g, \frac{\partial f}{\partial y} = h$ が成り立つことを示せ.

解答例

(1) 微分積分学の基本定理と例題5.2から $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) dt$ だから、
 $\frac{\partial f}{\partial x} = g$ ならば $\int_0^y \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) dt = g(x, y) - g(x, 0)$ が成り立つ. この両辺を y で偏微分すれば $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ が得られる.

(2) 1番目の変数を固定して g を2番目の変数に関する1変数関数とみなしたとき, g は $\frac{\partial g}{\partial y}$ の原始関数であることに注意すれば微分積分学の基本定理と例題5.2および仮定から, 次の等式が成り立つ.

解答例の続き

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= g(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) dt = g(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial g}{\partial y}(x, t) dt \\ &= g(x, 0) + g(x, y) - g(x, 0) = g(x, y)\end{aligned}$$

$\int_0^x g(s, 0) ds$ は2番目の変数に関しては定数値関数だから、微分積分学の基本定理より $\frac{\partial f}{\partial y} = h$ である。

例題 5.5

I_1, I_2, \dots, I_n を开区間として, $X = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ とおく. X で定義された C^r 級関数 ($r \geq 1$) f と $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in X$ に対し, X で定義された C^{r-1} 級関数 f_1, f_2, \dots, f_n で, 任意の $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ に対して次の等式を満たすものがあることを示せ.

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^n (x_i - p_i) f_i(\mathbf{x})$$

解答例

$i=1,2,\dots,n$ に対して $\mathbf{x}_i=(x_1,\dots,x_i,p_{i+1},\dots,p_n)$ とおくと X の形状から $\mathbf{x}_i \in X$ である. $i=1,2,\dots,n$ に対して関数 $g_i:[0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ を $g_i(t)=f(\mathbf{x}_{i-1}+t(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_{i-1}))$ で定める. $i=1,2,\dots,n$ ならば $\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_{i-1}=(x_i-p_i)\mathbf{e}_i$ だから, 合成写像の微分法により $g_i'(t)=(x_i-p_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_{i-1}+t(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_{i-1}))$ である. 従って, 微分積分学の基本定理から

$$f(\mathbf{x}_i)-f(\mathbf{x}_{i-1})=g_i(1)-g_i(0)=\int_0^1 g_i'(t) dt=(x_i-p_i)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_{i-1}+t(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_{i-1})) dt$$

が得られる. $f_i(\mathbf{x})=\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_{i-1}+t(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_{i-1})) dt$ で関数 $f_i:X \rightarrow \mathbf{R}$ を定義すれば, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ が C^{r-1} 級関数であることと例題5.1, 例題5.2から f_i は C^{r-1} 級関数であり,

$$f(\mathbf{x})=f(\mathbf{p})+\sum_{i=1}^n (f(\mathbf{x}_i)-f(\mathbf{x}_{i-1}))=f(\mathbf{p})+\sum_{i=1}^n (x_i-p_i)f_i(\mathbf{x}) \text{ が成り立つ.}$$

幾何学演習 II

第6回 常微分方程式の解の存在と一意性

例題 6.1

0以上の整数 n に対して関数 f_n を次の等式で帰納的に定める.

$$f_0(t) = 1, \quad f_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t f_n(s)^2 ds$$

(1) $n = 1, 2, 3$ に対して $f_n(t)$ を求めよ.

(2) $f_n(t) - (1 + t + t^2 + \dots + t^n)$ は t^{n+1} で割り切れる t の多項式であることを示せ.

(3) $f_n(t)$ は $2^n - 1$ 次の t の多項式であることを示せ.

(4) $f_n(t)$ の t^k の係数を $c_{n,k}$ とおけば $0 \leq c_{n,k} \leq 1$ であることを示せ.

(5) $|t| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \frac{1}{1-t}$ であることを示せ.

解答例

$$(1) f_1(t) = 1 + t, \quad f_2(t) = 1 + t + t^2 + \frac{1}{3}t^3, \quad f_3(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + \frac{2}{3}t^4 + \frac{1}{3}t^5 + \frac{1}{9}t^6 + \frac{1}{63}t^7$$

(2) n による数学的帰納法で主張を示す. $n = 0$ のときは主張は明らかに成り立つ.

$f_{n-1}(t) - (1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1})$ は t^n で割り切れる t の多項式であると仮定すれば,

$f_{n-1}(t) - (1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1}) = t^n g_{n-1}(t)$ を満たす t の多項式 $g_{n-1}(t)$ がある.

解答例の続き

$\int_0^t f_{n-1}(s)^2 ds$ の t の n 次以下の項は $f_{n-1}(s)^2$ の $n-1$ 次以下の項を積分して得られ、
 $f_{n-1}(s)^2 = (1+s+s^2+\cdots+s^{n-1})^2 + 2s^n g_{n-1}(s)(1+s+s^2+\cdots+s^{n-1}) + s^{2n} g_{n-1}(s)^2$
だから $f_{n-1}(s)^2$ の $n-1$ 次以下の項は $(1+s+s^2+\cdots+s^{n-1})^2$ の $n-1$ 次以下の項に等しい。

$$\begin{aligned} (1+s+s^2+\cdots+s^{n-1})^2 &= \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} s^{i+j} = \sum_{k=0}^{2n-2} \sum_{0 \leq i, j \leq n-1, i+j=k} s^{i+j} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)s^k + \sum_{k=n}^{2n-2} (2n-1-k)s^k \end{aligned}$$

より $f_{n-1}(s)^2$ の $n-1$ 次以下の項は $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)s^k$ だから、 $f_n(t) = 1 + \int_0^t f_{n-1}(s)^2 ds$ の n 次以下の項は $\sum_{k=0}^n t^k$ となるため、 $f_n(t) - (1+t+t^2+\cdots+t^n)$ は t^{n+1} で割り切れる。

(3) $f_n(t)$ の次数を d_n 、 t^{d_n} の係数を c とすれば $c \neq 0$ である。 $f_n(t)^2$ は $2d_n$ 次の多項式で、 t^{2d_n} の係数は c^2 だから、 $f_{n+1}(t)$ の t^{2d_n+1} の係数は $\frac{c^2}{2d_n+1} \neq 0$ である。

解答例の続き

故に $f_{n+1}(t)$ は $2d_n+1$ 次の多項式だから $d_{n+1}=2d_n+1$ が成り立つ。

この漸化式と $d_0=1$ から $d_n=2^n-1$ が得られる。

(4) $k \geq 2^n$ ならば $c_{n,k}=0$ とすれば $f_n(t) = \sum_{k \geq 0} c_{n,k} t^k$ より

$$f_n(t)^2 = \sum_{i,j \geq 0} c_{n,i} c_{n,j} t^{i+j} = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{i+j=k} c_{n,i} c_{n,j} \right) t^k$$

である。従って $\sum_{k \geq 0} c_{n+1,k} t^k = 1 + \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k+1} \left(\sum_{i+j=k} c_{n,i} c_{n,j} \right) t^{k+1}$ だから、この両辺の

t^k の係数を比較すれば $c_{n+1,0}=1$, $k \geq 1$ ならば $c_{n+1,k} = \frac{1}{k} \sum_{i+j=k-1} c_{n,i} c_{n,j}$ が得られる。

$f_0(t)=1$ より $c_{0,0}=1$, $k \geq 1$ ならば $c_{0,k}=0$ である。 $0 \leq c_{n,k} \leq 1$ がすべての $k \geq 0$ に

対して成り立つと仮定すれば、 $0 \leq c_{n,i} c_{n,j} \leq 1$ だから $0 \leq \sum_{i+j=k-1} c_{n,i} c_{n,j} \leq k$ である。

故に上で得た式から $0 \leq c_{n+1,k} \leq 1$ となるため、数学的帰納法により主張が示された。

解答例の続き

(5) (2)と(4)の結果から $|t| < 1$ ならば次の不等式が成り立つ.

$$|f_n(t) - (1 + t + t^2 + \cdots + t^n)| = \left| \sum_{k \geq n+1} c_{n,k} t^k \right| \leq \sum_{k \geq n+1} c_{n,k} |t|^k \leq \sum_{k \geq n+1} |t|^k = \frac{|t|^{n+1}}{1 - |t|}$$

故に三角不等式から次の不等式が得られる.

$$\begin{aligned} \left| f_n(t) - \frac{1}{1-t} \right| &\leq |f_n(t) - (1 + t + t^2 + \cdots + t^n)| + \left| (1 + t + t^2 + \cdots + t^n) - \frac{1}{1-t} \right| \\ &\leq \frac{|t|^{n+1}}{1 - |t|} + \left| \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t} - \frac{1}{1-t} \right| = \frac{|t|^{n+1}}{1 - |t|} + \frac{|t|^{n+1}}{1 - t} \end{aligned}$$

$|t| < 1$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|t|^{n+1}}{1 - |t|} + \frac{|t|^{n+1}}{1 - t} \right) = 0$ だから, 上の不等式から $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \frac{1}{1-t}$ である.

例題 6.2

実数を成分とする n 次正方行列 A と $\mathbf{b}, \mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ に対して写像 $f_k: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ を帰納的に

$f_0(t) = \mathbf{x}_0, f_k(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t (A f_{k-1}(s) + \mathbf{b}) ds$ で定義する. (E_n は n 次単位行列)

$$(1) f_k(t) = \left(E_n + tA + \cdots + \frac{t^i}{i!} A^i + \cdots + \frac{t^k}{k!} A^k \right) \mathbf{x}_0 + \left(tE_n + \frac{t^2}{2} A + \cdots + \frac{t^i}{i!} A^{i-1} + \cdots + \frac{t^k}{k!} A^{k-1} \right) \mathbf{b}$$

であることを示せ.

(2) 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して \mathbf{R}^n の点列 $(f_k(t))_{k \geq 0}$ は収束することを示せ.

(3) $f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t)$ によって写像 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ を定めれば $f'(t) = A f(t) + \mathbf{b}$ が成り立つ

ことを示せ.

解答例

(1) $f_0(t) = E_n \mathbf{x}_0$ であり, $f_k(t) = \left(\sum_{i=0}^k \frac{t^i}{i!} A^i \right) \mathbf{x}_0 + \left(\sum_{i=1}^k \frac{t^i}{i!} A^{i-1} \right) \mathbf{b}$ が成り立つと仮定すれば

$$\int_0^t \frac{s^i}{i!} A^{i+1} \mathbf{x}_0 ds = \frac{t^{i+1}}{(i+1)!} A^{i+1} \mathbf{x}_0, \quad \int_0^t \frac{s^i}{i!} A^i \mathbf{b} ds = \frac{t^{i+1}}{(i+1)!} A^i \mathbf{b} \quad \text{より次の等式が成り立つ.}$$

$$\begin{aligned} f_{k+1}(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t (A f_k(s) + \mathbf{b}) ds = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^k \frac{t^{i+1}}{(i+1)!} A^{i+1} \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^k \frac{t^{i+1}}{(i+1)!} A^i \mathbf{b} + t\mathbf{b} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{k+1} \frac{t^i}{i!} A^i \right) \mathbf{x}_0 + \left(\sum_{i=1}^{k+1} \frac{t^i}{i!} A^{i-1} \right) \mathbf{b} \end{aligned}$$

故に数学的帰納法によって主張が示される.

(2) \mathbf{R}^n は完備だから $(f_k(t))_{k \geq 0}$ がCauchy列であることを示せばよい. 幾何学 II 補題2.1

を繰り返し用いると $\|A^j \mathbf{x}\| = \|A A^{j-1} \mathbf{x}\| \leq \|A\| \|A^{j-1} \mathbf{x}\| \leq \cdots \leq \|A\|^j \|\mathbf{x}\|$ が得られ,

$K = \|A\| + 1$ とおけば $\|A\|^i \leq K^i$, $\|A\|^{i-1} \leq K^{i-1} \leq K^i$ だから(1)と三角不等式から

次の不等式が成り立つ.

解答例の続き

$$\begin{aligned}\|f_{k+l}(t) - f_k(t)\| &= \left\| \sum_{i=k+1}^{k+l} \left(\frac{t^i}{i!} A^i \mathbf{x}_0 + \frac{t^i}{i!} A^{i-1} \mathbf{b} \right) \right\| \leq \sum_{i=k+1}^{k+l} \left(\frac{|t|^i}{i!} \|A^i \mathbf{x}_0\| + \frac{|t|^i}{i!} \|A^{i-1} \mathbf{b}\| \right) \\ &\leq \sum_{i=k+1}^{k+l} \left(\frac{|t|^i}{i!} \|A\|^i \|\mathbf{x}_0\| + \frac{|t|^i}{i!} \|A\|^{i-1} \|\mathbf{b}\| \right) \\ &\leq \sum_{i=k+1}^{k+l} \frac{|tK|^i}{i!} (\|\mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{b}\|) \cdots (*)\end{aligned}$$

$m \geq 2$ $|tK|$ を満たす自然数 m を選べば, $i \geq m$ に対し,

$$\frac{|tK|^i}{i!} = \frac{|tK|^{m-1}}{(m-1)!} \frac{|tK|}{m} \frac{|tK|}{m+1} \cdots \frac{|tK|}{i} \leq \frac{|tK|^{m-1}}{(m-1)!} \left(\frac{|tK|}{m} \right)^{i-m+1} \leq \frac{|tK|^{m-1}}{(m-1)!} \frac{1}{2^{i-m+1}}$$

だから, $L = \|\mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{b}\|$ とおくと $k \geq m-1$ ならば (*) より次の不等式が成り立つ.

$$\|f_{k+l}(t) - f_k(t)\| \leq \sum_{i=k+1}^{k+l} \frac{|tK|^{m-1}}{(m-1)!} \frac{L}{2^{i-m+1}} = \frac{|tK|^{m-1} L}{2^{k-m+1} (m-1)!} \left(1 - \frac{1}{2^l} \right) \leq \frac{|tK|^{m-1} L}{2^{k-m+1} (m-1)!}$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|tK|^{m-1} L}{2^{k-m+1} (m-1)!} = 0$ だから, 上の不等式から $(f_k(t))_{k \geq 0}$ はCauchy列である.

解答例の続き

(3) $\|A^i \mathbf{x}_0 + A^{i-1} \mathbf{b}\| \leq \|A^i \mathbf{x}_0\| + \|A^{i-1} \mathbf{b}\| \leq \|A\|^i \|\mathbf{x}_0\| + \|A\|^{i-1} \|\mathbf{b}\| \leq K^i L$ に注意すれば $t, h \in \mathbf{R}$ に対して次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f_k(t+h) - f_k(t)}{h} - (A f_{k-1}(t) + \mathbf{b}) \right\| &= \left\| \sum_{i=2}^k \left(\frac{1}{i(i-1)} \sum_{j=0}^{i-2} \frac{t^j h^{i-j-1}}{j!(i-j-2)!} \right) (A^i \mathbf{x}_0 + A^{i-1} \mathbf{b}) \right\| \\ &\leq |h| L \sum_{i=2}^k \left(\sum_{j=0}^{i-2} \frac{|t|^j |h|^{i-j-2}}{j!(i-j-2)!} \right) K^i \\ &= |h| K^2 L \sum_{i=2}^k \frac{(K(|t| + |h|))^{i-2}}{(i-2)!} \\ &\leq |h| K^2 L e^{K(|t| + |h|)} \end{aligned}$$

上の不等式で $k \rightarrow \infty$ とすれば $\left\| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - (A f(t) + \mathbf{b}) \right\| \leq |h| K^2 L e^{K(|t| + |h|)}$ が

得られ、 $h \rightarrow 0$ のとき、この右辺は 0 に近づくため、 $f'(t) = A f(t) + \mathbf{b}$ が成り立つ。

幾何学演習 II

第7回 陰関数定理

例題 7.1

X, U をそれぞれ $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ の開集合とする. C^1 級写像 $f: X \rightarrow \mathbf{R}^n, g: X \rightarrow \mathbf{R}^m$ と $F: U \rightarrow \mathbf{R}^k$ が与えられており, すべての $x \in X$ に対して $\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \in U$ が成り立つとき, 写像 $\varphi: X \rightarrow \mathbf{R}^k$ を $\varphi(x) = F\left(\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}\right)$ で定めると, φ の $x \in X$ における微分 $\varphi'(x)$ は次で与えられることを示せ.

$$\varphi'(x) = D_1 F\left(\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}\right) f'(x) + D_2 F\left(\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}\right) g'(x)$$

解答例

写像 $h: X \rightarrow U$ を $h(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$ で定義すれば, $\varphi = F \circ h$ である. 幾何学 II [命題2.10](#)の(1)から $h'(x) = \begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix}$ であり, $F'\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(D_1 F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \quad D_2 F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \right)$ だから合成写像の微分法から次の等式が得られる.

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= F'(h(x))h'(x) = \left(D_1 F\left(\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}\right) \quad D_2 F\left(\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}\right) \right) \begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} \\ &= D_1 F\left(\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}\right) f'(x) + D_2 F\left(\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}\right) g'(x) \end{aligned}$$

U を $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ の開集合とし, $F: U \rightarrow \mathbf{R}$ を C^2 級関数とする. $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in U$ は $F\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0$ を満たし, $\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \neq 0$ ならば, 陰関数定理により x_0 を含む \mathbf{R}^n の開集合 U_0 と C^2 級関数 $f: U_0 \rightarrow \mathbf{R}$ で, $f(x_0) = y_0$ かつ, すべての $x \in U_0$ に対して $\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \neq 0$ であり, $F\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = 0$ を満たすものがある. さらに $x \in U_0$ と $j = 1, 2, \dots, n$ に対し, 次が成り立つ.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = - \left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x_j}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

例題 7.2

上の設定の下で $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) は次で与えられることを示せ.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \right)^{-3} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + \frac{\partial F}{\partial x_j}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \right. \\ & \left. - \frac{\partial F}{\partial x_i}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_j}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_{n+1}^2}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

とくに $n = 1$ の場合, $f''(x)$ は次で与えられる.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \right)^{-3} \left(2 \frac{\partial F}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \right)$$

解答例

$\psi_j: U_0 \rightarrow \mathbf{R}$ を $\psi_j(\mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial x_j} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{smallmatrix} \right)$ で定めれば, [例題7.1](#)より次の等式が得られる.

$$\psi_j'(\mathbf{x}) = D_1 \frac{\partial F}{\partial x_j} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{smallmatrix} \right) + D_2 \frac{\partial F}{\partial x_j} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{smallmatrix} \right) f'(\mathbf{x})$$

この両辺の $(1, i)$ 成分を比較して $\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{smallmatrix} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_{n+1}} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{smallmatrix} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \cdots (*)$ を得る.

$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = - \left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{smallmatrix} \right) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x_j} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{smallmatrix} \right) = - \frac{\psi_j(\mathbf{x})}{\psi_{n+1}(\mathbf{x})}$ の両辺を x_i で偏微分すれば, $(*)$ から

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \psi_{n+1}(\mathbf{x}) - \psi_j(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial x_i}(\mathbf{x})}{(\psi_{n+1}(\mathbf{x}))^2} =$$

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{smallmatrix} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_{n+1}} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{smallmatrix} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial x_{n+1}^2} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{smallmatrix} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right) - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{smallmatrix} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_{n+1}} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{smallmatrix} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right) \frac{\partial F}{\partial x_{n+1}} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{smallmatrix} \right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ f(\mathbf{x}) \end{smallmatrix} \right) \right)^2}$$

解答例の続き

さらに、 $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = - \left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(\mathbf{x}) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ だから、これを上式に代入して分母と分子に $\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(\mathbf{x})$ をかければ結果が得られる。

注意 7.3

$\mathbf{p} \in U$ と $j=1,2,\dots,n$ に対し $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{p})=0$ が成り立つとき、例題7.2の上の等式から

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{p}) = - \frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(\mathbf{p}) \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{p}) = 0 \text{ だから、} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p}) = - \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p})}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(\mathbf{p})} \text{ が成り立つ.}$$

例題 7.4

a, b, c を実数の定数とし、 $c \neq 0$ とする。 z を x, y の関数とみなしたとき、方程式

$$\begin{aligned} -x^2y - xy^2 + xy + ab(a+b)z^3 - (a^2x + 2ab(x+y) + b^2y - ab)z^2 \\ + (ax^2 + 2(a+b)xy + by^2 - ax - by + c)z = 0 \end{aligned}$$

で与えられる陰関数の極値を求めよ。

解答例

関数 $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ を $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ に対し, 次のように定義する.

$$F(\mathbf{x}) = -x^2y - xy^2 + xy + ab(a+b)z^3 - (a^2x + 2ab(x+y) + b^2y - ab)z^2 \\ + (ax^2 + 2(a+b)xy + by^2 - ax - by + c)z$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{x}) = -(y - az)(2x + y - (a + 2b)z - 1), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}) = -(y - bz)(x + 2y - (2a + b)z - 1)$$

だから $\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}) = 0$ ならば次の4つのいずれかが成り立つ.

$$\begin{cases} x = bz \\ y = az \end{cases}, \quad \begin{cases} x = bz + 1 \\ y = az \end{cases}, \quad \begin{cases} x = bz \\ y = az + 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = bz + \frac{1}{3} \\ y = az + \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$F\begin{pmatrix} bz \\ az \\ z \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} bz + 1 \\ az \\ z \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} bz \\ az + 1 \\ z \end{pmatrix} = cz, \quad F\begin{pmatrix} bz + \frac{1}{3} \\ az + \frac{1}{3} \\ z \end{pmatrix} = cz + \frac{1}{27} \quad \text{より } \mathbf{p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{b}{27c} \\ \frac{1}{3} - \frac{a}{27c} \\ -\frac{1}{27c} \end{pmatrix} \quad \text{とおくと,}$$

解答例の続き

$F(\mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}) = 0$ ならば \mathbf{x} は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, \mathbf{p} のいずれかである。また,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}) = & 3ab(a+b)z^2 - 2a(a+2b)xz - 2b(2a+b)yz + 2abz \\ & + ax^2 + 2(a+b)xy + by^2 - ax - by + c \end{aligned}$$

が成り立つため, $\frac{\partial F}{\partial z}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial z}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial z}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{p}) = c \neq 0$ だから陰関数定理より

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の近傍で定義された関数 f_1 で $f_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ を満たすもの, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の近傍で定義された

関数 f_2 で $f_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ を満たすもの, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の近傍で定義された関数 f_3 で $f_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ を

満たすもの, $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{b}{27c} \\ \frac{1}{3} - \frac{a}{27c} \end{pmatrix}$ の近傍で定義された関数 f_4 で $f_4\begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{b}{27c} \\ \frac{1}{3} - \frac{a}{27c} \end{pmatrix} = -\frac{1}{27c}$ を

満たすものが存在する。

解答例の続き

従って $\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q}_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{b}{27c} \\ \frac{1}{3} - \frac{a}{27c} \end{pmatrix}$ とおけば注意7.3より

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}(\mathbf{q}_i) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{q}_i \\ f_i(\mathbf{q}_i) \end{smallmatrix} \right)}{\frac{\partial F}{\partial z} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{q}_i \\ f_i(\mathbf{q}_i) \end{smallmatrix} \right)}, \quad \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2}(\mathbf{q}_i) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{q}_i \\ f_i(\mathbf{q}_i) \end{smallmatrix} \right)}{\frac{\partial F}{\partial z} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{q}_i \\ f_i(\mathbf{q}_i) \end{smallmatrix} \right)}, \quad \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y}(\mathbf{q}_i) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{q}_i \\ f_i(\mathbf{q}_i) \end{smallmatrix} \right)}{\frac{\partial F}{\partial z} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{q}_i \\ f_i(\mathbf{q}_i) \end{smallmatrix} \right)}$$

が $i=1,2,3,4$ に対して成り立つため

$$H(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\mathbf{x}) - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}) \right)^2, \quad h_i(\mathbf{u}) = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}(\mathbf{u}) \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2}(\mathbf{u}) - \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y}(\mathbf{u}) \right)^2$$

とおけば $i=1,2,3,4$ に対して $h_i(\mathbf{q}_i) = \left(\frac{\partial F}{\partial z} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{q}_i \\ f_i(\mathbf{q}_i) \end{smallmatrix} \right) \right)^{-2} H \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{q}_i \\ f_i(\mathbf{q}_i) \end{smallmatrix} \right)$ が成り立つ. ここで

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathbf{x}) = 2az - 2y, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\mathbf{x}) = 2bz - 2x, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}) = 2(a+b)z - 2x - 2y + 1$$

解答例の続き

より $H\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = H\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = H\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$, $H(\mathbf{p}) = \frac{1}{3}$ である. 故に

$$h_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^{-2} H\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{c^2} < 0, \quad h_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^{-2} H\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{c^2} < 0,$$

$$h_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^{-2} H\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{c^2} < 0$$

だから f_1, f_2, f_3 はそれぞれ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で極値をとらない.

$h_4(\mathbf{q}_4) = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{p}) \right)^{-2} H(\mathbf{p}) = \frac{1}{3c^2} > 0$ であり, [注意7.3](#)より

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2}(\mathbf{q}_4) = - \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{p}) \right)^{-1} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathbf{p}) = -\frac{2}{3} < 0$$

だから f_4 は $\mathbf{q}_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{b}{27c} \\ \frac{1}{3} - \frac{a}{27c} \end{pmatrix}$ で極大値 $-\frac{1}{27c}$ をとる.

幾何学演習 II

第8回 条件付き極値

X を \mathbf{R}^2 の開集合とし, $F, \varphi: X \rightarrow \mathbf{R}$ は級関数で, $p = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in X$ は $F(p) = 0$ かつ $\frac{\partial F}{\partial y}(p) \neq 0$ を満たすとする. このとき, 陰関数定理により p を含む開区間 U と C^2 級関数 $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ で, $f(p) = q$ であり, 各 $x \in U$ に対して $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \in X$ かつ $F\left(\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right) = 0$ を満たすものがある. また, $\frac{\partial F}{\partial y}(p) \neq 0$ と $\frac{\partial F}{\partial y}, f$ の連続性から各 $x \in U$ に対して $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right) \neq 0$ であるように U をとることができる.

例題 8.1

上記の設定のもとで, 関数 $\psi: U \rightarrow \mathbf{R}$ を $\psi(x) = \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right)$ で定めるとき, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\begin{aligned} \psi''(x) = & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\left(\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right) - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\left(\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right) \left(\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\left(\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right) \left(\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right)\right)^{-2} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right)\right)^2 \\ & - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right) \left(\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right)\right)^{-1} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right) + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right) \left(\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right)\right)^{-2} \frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\left(\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right) \\ & - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right) \left(\frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right)\right)^{-3} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right)\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

解答例

関数 $\xi_1, \xi_2: U \rightarrow \mathbf{R}$ を $\xi_1(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix} \right)$, $\xi_2(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix} \right)$ で定義すれば, 合成写像の微分法から

$$\psi'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix} \right) f'(x) = \xi_1(x) + \xi_2(x) f'(x) \cdots (i)$$

$$\xi_1'(x) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix} \right) f'(x) \cdots (ii)$$

$$\xi_2'(x) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix} \right) f'(x) \cdots (iii)$$

が得られる. 幾何学 II 系5.3から $f'(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y} \left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix} \right) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x} \left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix} \right)$ であり, 例題7.2から

$$\begin{aligned} f''(x) = & \left(\frac{\partial F}{\partial y} \left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix} \right) \right)^{-3} \left(2 \frac{\partial F}{\partial x} \left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix} \right) \frac{\partial F}{\partial y} \left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial x} \left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix} \right) \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix} \right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{\partial F}{\partial y} \left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix} \right) \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix} \right) \right) \end{aligned}$$

である. これらの等式と (i), (ii), (iii) より

解答例の続き

$$\begin{aligned}\psi''(x) &= \xi_1'(x) + \xi_2'(x)f'(x) + \xi_2(x)f''(x) \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right) + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right) f'(x) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right) f'(x)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right) f''(x) \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right) - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial y} \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x} \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial y} \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right) \right)^{-2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right) \right)^2 + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial y} \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right) \right)^{-2} \frac{\partial F}{\partial x} \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right) \\ &\quad - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial y} \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right) \right)^{-3} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right) \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial y} \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right) \right)^{-1} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right)\end{aligned}$$

が得られるので、主張が示された。

例題 8.2

X を \mathbf{R}^2 の開集合とし, $F, \varphi: X \rightarrow \mathbf{R}$ は C^2 級関数で, $C = \{x \in X \mid F(x) = 0\}$ とおく.

$p \in C$ に対し $\frac{\partial F}{\partial x}(p) \neq 0$ または $\frac{\partial F}{\partial y}(p) \neq 0$ であり, 実数 λ で

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(p) = \lambda \frac{\partial F}{\partial x}(p) \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(p) = \lambda \frac{\partial F}{\partial y}(p)$$

を満たすものがあると仮定する.

$$\begin{aligned} \delta = & \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(p) - \lambda \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(p) \right) \left(\frac{\partial F}{\partial y}(p) \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(p) - \lambda \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(p) \right) \frac{\partial F}{\partial x}(p) \frac{\partial F}{\partial y}(p) \\ & + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(p) - \lambda \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(p) \right) \left(\frac{\partial F}{\partial x}(p) \right)^2 \end{aligned}$$

とおくとき, $\varphi: X \rightarrow \mathbf{R}$ の定義域を C に制限した関数 $\varphi|_C: C \rightarrow \mathbf{R}$ は, $\delta > 0$ ならば p において極小値をとり, $\delta < 0$ ならば p において極大値をとることを示せ.

解答例

$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とおくと $\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{p}) \neq 0$ の場合, 陰関数定理により p を含む開区間 U と C^2 級関数 $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ で, $f(p) = q$ であり, 各 $x \in U$ に対して $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \in C$ を満たすものがある.

関数 $\psi: U \rightarrow \mathbf{R}$ を $\psi(x) = \varphi\left(\begin{smallmatrix} x \\ f(x) \end{smallmatrix}\right)$ で定めれば, $f(p) = q$ より $\psi(p) = \varphi(\mathbf{p})$ であり,

幾何学 II 系5.3から $f'(p) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{p})\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{p})$ だから, 仮定から

$$\psi'(p) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\mathbf{p}) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\mathbf{p}) f'(p) = \lambda \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{p}) - \lambda \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{p}) \left(\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{p})\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{p}) = 0$$

である. 例題8.1から, 次の等式が得られる.

$$\begin{aligned} \psi''(p) = & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\mathbf{p}) - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(\mathbf{p}) \left(\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{p})\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{p}) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(\mathbf{p}) \left(\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{p})\right)^{-2} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{p})\right)^2 \\ & - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\mathbf{p}) \left(\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{p})\right)^{-1} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathbf{p}) + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\mathbf{p}) \left(\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{p})\right)^{-2} \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{p}) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(\mathbf{p}) \\ & - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\mathbf{p}) \left(\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{p})\right)^{-3} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{p})\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

上式の両辺に $\left(\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{p})\right)^2$ をかけて $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(\mathbf{p})$ に $\lambda \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{p})$ を代入すれば次の等式が得られる.

解答例の続き

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{p})\right)^2 \psi''(p) &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\mathbf{p}) \left(\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{p})\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(\mathbf{p}) \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{p}) \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{p}) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(\mathbf{p}) \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{p})\right)^2 \\ &\quad - \lambda \left(\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{p})\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathbf{p}) + 2\lambda \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{p}) \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{p}) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(\mathbf{p}) - \lambda \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{p})\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\mathbf{p}) \\ &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\mathbf{p}) - \lambda \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathbf{p})\right) \left(\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{p})\right)^2 - 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(\mathbf{p}) - \lambda \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(\mathbf{p})\right) \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{p}) \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{p}) \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(\mathbf{p}) - \lambda \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\mathbf{p})\right) \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{p})\right)^2 = \delta \end{aligned}$$

$\psi'(p)=0$ であり, 上式から $\psi''(p)$ は δ と同符号だから $\delta > 0$ ならば ψ は p で極小値をとり, $\delta < 0$ ならば ψ は p で極大値をとる. f の選び方から $t \in U$ を $\begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$ に対応させる写像は p の近くでの曲線 C のパラメータ表示であり $\psi(p) = \varphi(\mathbf{p})$ だから, φ の定義域を C に制限した関数は, $\delta > 0$ ならば p において極小値をとり, $\delta < 0$ ならば p において極大値をとる. δ の定義式は x と y を入れ替えても変わらない式だから, $\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{p}) \neq 0$ の場合も同様に主張が示される.

例題 8.3

$\varphi\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = xy$ で定義される関数 $\varphi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ の条件 $ax^2 + xy^2 = a^2b^3$ ($a, b \neq 0$) のもとでの極値を求めよ。

解答例

$F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = ax^2 + xy^2 - a^2b^3$ で $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ を定義すると $\frac{\partial F}{\partial x} = 2axy + y^2$, $\frac{\partial F}{\partial y} = ax^2 + 2xy$ だから $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{\partial F}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0$ は $ax^2 + xy^2 = a^2b^3$ かつ $y(2ax + y) = x(ax + y) = 0$ と同値である。 $a, b \neq 0$ より1つ目の方程式から $x \neq 0$ だから $ax + 2y = 0$ である。 故に $y = -\frac{a}{2}x$ だから $y(2ax + y) = 0$ から $x = 0$ が得られて矛盾が生じる。

従って $F(\mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}) = 0$ を満たす $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ は存在しないため、 φ が条件 $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0$ のもとで、点 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ において極値をとるならば、 $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x$ より、 $\lambda \in \mathbf{R}$ が存在して、次の関係式が成り立つ。

解答例の続き

$$\begin{cases} ax^2 + xy^2 = a^2b^3 & \dots (i) \\ y = \lambda(2axy + y^2) & \dots (ii) \\ 2y = \lambda(ax^2 + 2xy) & \dots (iii) \end{cases}$$

(i) より $xy \neq 0$ だから (ii), (iii) より $\lambda(2ax + y) = \lambda(ax + 2y) = 1$ が得られるので $y = ax$ である. これを (i) に代入して $x = b$, $y = ab$ が得られるため, φ が条件 $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0$ のもとで極値をとる可能性があるのは $\begin{pmatrix} b \\ ab \end{pmatrix}$ のみである. $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left(\begin{smallmatrix} b \\ ab \end{smallmatrix}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \left(\begin{smallmatrix} b \\ ab \end{smallmatrix}\right) = 0$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \left(\begin{smallmatrix} b \\ ab \end{smallmatrix}\right) = 1$, $\frac{\partial F}{\partial x} \left(\begin{smallmatrix} b \\ ab \end{smallmatrix}\right) = 3a^2b^2$, $\frac{\partial F}{\partial y} \left(\begin{smallmatrix} b \\ ab \end{smallmatrix}\right) = 3ab^2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(\begin{smallmatrix} b \\ ab \end{smallmatrix}\right) = 2a^2b$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \left(\begin{smallmatrix} b \\ ab \end{smallmatrix}\right) = 2ab$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\begin{smallmatrix} b \\ ab \end{smallmatrix}\right) = 2b$, $\lambda = \frac{1}{2}$ だから $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} b \\ ab \end{pmatrix}$ としたときの, **例題8.2**の δ は $-6a^3b^4$ となるため, φ は条件 $F\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0$ のもとで $\begin{pmatrix} b \\ ab \end{pmatrix}$ において $a > 0$ ならば極大値 $\varphi\left(\begin{smallmatrix} b \\ ab \end{smallmatrix}\right) = a^2b$ をとり, $a < 0$ ならば極小値 $\varphi\left(\begin{smallmatrix} b \\ ab \end{smallmatrix}\right) = a^2b$ をとる.

幾何学演習 II

第9回 正規行列の対角化

例題 9.1

$a \in \mathbb{C}^3$ ($a \neq \mathbf{0}$), $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = \pm 1$ とし, $A = \lambda E_3 + \varepsilon a a^*$ とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) λ, a, ε を用いて, A の固有値とそれらに対する固有空間を表せ.

(2) a の第 j 成分を a_j とする. $|a_1|^2 + |a_2|^2 \neq 0$ の場合に A を対角化するユニタリ行列を一つ求めよ.

解答例

(1) $Aa = (\lambda E_3 + \varepsilon a a^*)a = \lambda a + \varepsilon \|a\|^2 a = (\lambda + \varepsilon \|a\|^2)a$ だから, $\lambda + \varepsilon \|a\|^2$ は A の固有値で, a は $\lambda + \varepsilon \|a\|^2$ に対する固有ベクトルである. $x \in \langle a \rangle^\perp$ ならば $a^*x = (x, a) = 0$ だから $Ax = (\lambda E_3 + \varepsilon a a^*)x = \lambda x + \varepsilon a a^*x = \lambda x$ が得られる. 故に λ は A の固有値で, $\langle a \rangle^\perp$ は λ に対する固有空間に含まれる. $\mathbb{C}^3 = \langle a \rangle \oplus \langle a \rangle^\perp$ だから各 $x \in \mathbb{C}^3$ に対して $x = xa + b$ を満たす $x \in \mathbb{C}$ と $b \in \langle a \rangle^\perp$ がある. $Ax = A(xa + b) = x(\lambda + \varepsilon \|a\|^2)a + \lambda b$ だから, $\mu \in \mathbb{C}$ に対して $Ax = \mu x$ ならば $Ax = x\mu a + \mu b$ より, $x \neq 0$ ならば $\mu = \lambda + \varepsilon \|a\|^2$ かつ $b = \mathbf{0}$ であり, $b \neq \mathbf{0}$ ならば $\mu = \lambda$ かつ $x = 0$ である. 故に A の固有値は $\lambda + \varepsilon \|a\|^2$ と λ のみで, $\langle a \rangle$ は $\lambda + \varepsilon \|a\|^2$, $\langle a \rangle^\perp$ は λ に対する固有空間である.

解答例の続き

(2) $v = -\bar{a}_2 e_1 + \bar{a}_1 e_2$ とおけば仮定から $v \neq 0$ であり $(a, v) = 0$ だから $v \in \langle a \rangle^\perp$ である.

$w = x e_1 + y e_2 + z e_3$ を a と v の両方に垂直なベクトルとすれば $(w, a) = (w, v) = 0$

より $\begin{cases} \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 y + \bar{a}_3 z = 0 \\ -a_2 x + a_1 y = 0 \end{cases}$ が得られ, $w = -a_1 \bar{a}_3 e_1 - a_2 \bar{a}_3 e_2 + (|a_1|^2 + |a_2|^2) e_3$

とおけば w は a と v の両方に垂直で零でないベクトルである.

故に A を対角化するユニタリ行列は以下で与えられる.

$$\left(\frac{1}{\|a\|} a \quad \frac{1}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} v \quad \frac{1}{\|a\| \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} w \right) = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\|a\|} & \frac{-\bar{a}_2}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} & \frac{-a_1 \bar{a}_3}{\|a\| \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} \\ \frac{a_2}{\|a\|} & \frac{\bar{a}_1}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} & \frac{-a_2 \bar{a}_3}{\|a\| \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} \\ \frac{a_3}{\|a\|} & 0 & \frac{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}}{\|a\|} \end{pmatrix}$$

上で求めたユニタリ行列を P とすれば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda + \varepsilon\|\mathbf{a}\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ が成り立つ.

例題 9.2

A を行列式の値が1である3次元実直交行列とする. このとき $0 \leq \theta \leq \pi$ を満たす θ と行列式の値が1である3次元実直交行列 P で,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるものが存在することを示し, θ は $\cos \theta = \frac{1}{2}(\text{tr } A - 1)$ を満たすことを示せ.

従って A は P の第3列 Pe_3 を方向ベクトルとして原点を通る直線を軸として Pe_3 の方向を向いて時計回りに θ だけ回転する1次元変換を表す行列である.

解答例

A の固有多項式 $F_A(x)$ は x^3 の係数が 1 の実数係数の 3 次式だから $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_A(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F_A(x) = \infty$ である. 従って中間値の定理から $F_A(x) = 0$ は実数解をもつ.

A は正規行列だから, もし $F_A(x) = 0$ の解がすべて実数ならば幾何学 II [命題 8.13](#) から A はエルミート行列になるが, A の成分はすべて実数なので A は対称行列である.

また A は直交行列だから A の固有値の絶対値は 1 で, $F_A(x) = 0$ のすべての解の積は A の行列式の値 1 に等しいため, $F_A(x) = 0$ は 1 を三重解にもつか, 1 と重解 -1 を解にもつ. A は実対称行列だから A を対角化する実直交行列 P が存在して, 前者の場合は $P^{-1}AP = E_3$ となるため, $A = E_3$ だから $\theta = 0$ であり, 後者の場合は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるため $\theta = \pi$ である. ここで, 必要ならば P の第 1 列と第 2 列を入れ替えることによって, $|P| = 1$ であるとしてよい.

解答例の続き

$F_A(x)=0$ が虚数解をもつ場合, その解を β とすれば $F_A(x)$ の係数がすべて実数であることから $\bar{\beta}$ も $F_A(x)=0$ の解である. $F_A(x)=0$ の実数解を α とすれば, 仮定と幾何学 II [命題7.20](#) から $\alpha|\beta|^2 = \alpha\beta\bar{\beta} = |A| = 1$ であり, A はユニタリ行列だから幾何学 II [命題8.12](#) から $|\beta|=1$ となるため $\alpha=1$ である.

従って $\beta = \cos \theta + i \sin \theta$, $\bar{\beta} = \cos \theta - i \sin \theta$ を満たす θ がある. 必要なら β を $\bar{\beta}$ で置き換えることによって $0 < \theta < \pi$ と仮定してよい. A の固有値 $\cos \theta - i \sin \theta$ に対する長さ1の固有ベクトルを u とすれば $Au = (\cos \theta - i \sin \theta)u$ だから, 次が成り立つ.

$$A\bar{u} = \bar{A}\bar{u} = \overline{Au} = \overline{(\cos \theta - i \sin \theta)u} = (\cos \theta + i \sin \theta)\bar{u}$$

故に \bar{u} は $\cos \theta + i \sin \theta$ に対する長さ1の固有ベクトルで, u と \bar{u} は正規行列 A の相異なる固有値に対する固有ベクトルだから, 幾何学 II [命題8.6](#) によりこれらは直交する.

解答例の続き

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + \bar{u}), y = \frac{1}{\sqrt{2}i}(u - \bar{u}) \text{ とおけば, } \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u} + \bar{\bar{u}}) = x, \bar{y} = -\frac{1}{\sqrt{2}i}(\bar{u} - \bar{\bar{u}}) = y$$

より $x, y \in R^3$ であり, $(u, u) = (\bar{u}, \bar{u}) = 1, (u, \bar{u}) = 0$ より

$$(x, y) = -\frac{1}{2i}(u + \bar{u}, u - \bar{u}) = -\frac{1}{2i}((u, u) - (\bar{u}, \bar{u})) = 0$$

$$(x, x) = \frac{1}{2}(u + \bar{u}, u + \bar{u}) = \frac{1}{2}((u, u) + (\bar{u}, \bar{u})) = 1$$

$$(y, y) = \frac{1}{2}(u - \bar{u}, u - \bar{u}) = \frac{1}{2}((u, u) + (\bar{u}, \bar{u})) = 1$$

となるため, x, y は正規直交系である.

さらに, $z = x \times y$ とおくと, z は x と y の両方に垂直な単位ベクトルであり, $[x, y, z]$ は R^3 の右手系の正規直交基底だから P を x, y, z をそれぞれ第1列, 第2列, 第3列にもつ行列とすれば P は行列式の値が1である直交行列である.

A の固有値1に対する固有空間は固有値 $\beta, \bar{\beta}$ に対する固有空間と直交するため, x と y の両方に垂直である. 故に z は A の固有値1に対する固有ベクトルである.

解答例の続き

$Au = (\cos \theta - i \sin \theta)u$, $A\bar{u} = (\cos \theta + i \sin \theta)\bar{u}$ から, $Ax = \cos \theta x + \sin \theta y$ と $Ay = -\sin \theta x + \cos \theta y$ が得られ, $Az = z$ だから次の等式が得られる.

$$\begin{aligned} AP &= A(x \ y \ z) = (Ax \ Ay \ Az) = (\cos \theta x + \sin \theta y \quad -\sin \theta x + \cos \theta y \quad z) \\ &= (\cos \theta Pe_1 + \sin \theta Pe_2 \quad -\sin \theta Pe_1 + \cos \theta Pe_2 \quad Pe_3) \\ &= P(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \quad -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2 \quad e_3) \end{aligned}$$

従って $P^{-1}AP = (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \quad -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2 \quad e_3)$ が成り立つため, 前半の結果が得られる. このとき, 幾何学 II [命題7.4](#)の(2)から $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = 2 \cos \theta + 1$ から $\cos \theta = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A - 1)$ が得られる.

例題 9.3

A, θ を例題9.2と同じとする. A が対称行列でないとして, $\frac{1}{2}(A - {}^tA)$ の (3,2)成分, (1,3)成分, (2,1)成分をそれぞれ順に第1成分, 第2成分, 第3成分とする R^3 のベクトルを ν とすれば $A\nu = \nu, \|\nu\| = \sin \theta$ が成り立つことを示せ. また ν を方向ベクトルとして原点を通る直線を ℓ とすれば, A が表す R^3 の1次変換は, ℓ を軸に ν の方向を向いて時計回りに θ だけ回転する1次変換であることを示せ.

解答例

${}^t\left(\frac{1}{2}(A - {}^tA)\right) = -\frac{1}{2}(A - {}^tA)$ が成り立つため $\frac{1}{2}(A - {}^tA) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ とおける.

このとき $\nu = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ だから $\frac{1}{2}(A - {}^tA)\nu = \mathbf{0}$ が成り立ち, A は対称行列ではないので

$\frac{1}{2}(A - {}^tA) \neq \mathbf{0}$ だから $\nu \neq \mathbf{0}$ である. A が直交行列で ${}^tA = A^{-1}$ であることから

$\frac{1}{2}(A - {}^tA)\nu = \mathbf{0}$ より $A\nu = {}^tA\nu = A^{-1}\nu$, 従って $A^2\nu = \nu$ が得られる.

解答例の続き

P を例題9.2の直交行列として $v' = P^{-1}v$ とおけば $v = Pv'$ だから $A^2Pv' = Pv'$ より $(P^{-1}AP)^2v' = P^{-1}A^2Pv' = P^{-1}Pv' = v'$ である. 従って v' は $(P^{-1}AP)^2$ の固有値1に対する固有ベクトルである. 一方

$$(P^{-1}AP)^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり, この行列は z 軸の周りに 2θ の回転を表すため, $(P^{-1}AP)^2$ の固有値1に対する固有空間は e_3 で生成される部分空間である. 故に $v' = ke_3$ を満たす実数 k が存在することと $P^{-1}AP$ の第3列が e_3 だから $APe_3 = Pe_3$ であることから

$$Av = APv' = kAPE_3 = kPe_3 = Pv' = v$$

が成り立ち, v は A の固有値1に対する固有ベクトルである. 例題9.2の解答と同様に x, y, z を定めれば $Ax = \cos\theta x + \sin\theta y$, $Ay = -\sin\theta x + \cos\theta y$ が得られ, z は A の固有値1に対する固有空間の基底で単位ベクトルである.

解答例の続き

従って $v=rz$ となる $r \in \mathbf{R}$ が存在する. $Ax = \cos\theta x + \sin\theta y$, $Ay = -\sin\theta x + \cos\theta y$ より $A^{-1}x = \cos\theta x - \sin\theta y$ が得られ, 任意の $w \in \mathbf{R}^3$ に対して $\frac{1}{2}(A - {}^tA)w = v \times w$ が成り立つことと ${}^tA = A^{-1}$ に注意すれば次の等式が得られる.

$$\begin{aligned} r &= r(z, z) = (z, rz) = (z, v) = (x \times y, v) = \det(x \ y \ v) = \det(v \ x \ v) = (v \times x, y) \\ &= \frac{1}{2}((A - {}^tA)x, y) = \frac{1}{2}(Ax - A^{-1}x, y) = (\sin\theta y, y) = \sin\theta(y, y) = \sin\theta \end{aligned}$$

故に $r = \sin\theta > 0$ で $v = rz$ だから $\|v\| = \|\sin\theta z\| = \sin\theta \|z\| = \sin\theta$ である.

\mathbf{R}^3 の右手系の正規直交基底 $[x, y, z]$ に関する A の表現行列は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

だから A は原点を通り z 方向の直線を軸に z 方向を向いて時計回りに θ だけ回転する \mathbf{R}^3 の1次変換を表す. v は z の正の実数 $\sin\theta$ 倍をしたベクトルだから A は ℓ を軸に v の方向を向いて時計回りに θ だけ回転する1次変換を表す.

幾何学演習 II

第10回 実正規行列の標準化

C^n を R 上の $2n$ 次元ベクトル空間とみなせば, R^n は C^n の n 次元部分空間である.

例題 10.1

R^n のベクトル v_1, v_2, \dots, v_k が R^n において1次独立であるためには, $R^n \subset C^n$ とみなしたとき, v_1, v_2, \dots, v_k が C^n において1次独立であることが必要十分であることを示せ.

解答例

v_1, v_2, \dots, v_k が C^n において1次独立ならば R^n において1次独立であることは明らかである. v_1, v_2, \dots, v_k が R^n において1次独立であるとして, $z_1, z_2, \dots, z_k \in C$ に対し $z_1 v_1 + z_2 v_2 + \dots + z_k v_k = \mathbf{0}$ が成り立つとする. $z_j = x_j + y_j i$ ($x_j, y_j \in R, j = 1, 2, \dots, k$) とおいて上式に代入すれば $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k + i(y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_k v_k) = \mathbf{0}$ が得られる. $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k, y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_k v_k \in R^n$ だから, 上式より $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_k v_k = \mathbf{0}$ が成り立つ. 故に v_1, v_2, \dots, v_k の R^n における1次独立性から $x_1 = x_2 = \dots = x_k = y_1 = y_2 = \dots = y_k = 0$ である. 従って $z_1 = z_2 = \dots = z_k = 0$ となるため v_1, v_2, \dots, v_k は C^n において1次独立である.

例題 10.2

$A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ の階数 $\text{rank}_{\mathbf{R}} A$ は, A を $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ とみなした場合の階数 $\text{rank}_{\mathbf{C}} A$ と等しいことを示せ.

解答例

$\text{rank}_{\mathbf{R}} A$ は A の列ベクトル $Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n \in \mathbf{R}^m$ の中で1次独立なベクトルの最大個数であるが, 例題10.1により, この個数は Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n を \mathbf{C}^m のベクトルとみなした場合の1次独立なベクトルの最大個数に等しい. さらにこの個数は $\text{rank}_{\mathbf{C}} A$ であるため $\text{rank}_{\mathbf{R}} A = \text{rank}_{\mathbf{C}} A$ である.

例題 10.3

$A \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ に対し, $V = \{x \in \mathbf{K}^n \mid Ax = \mathbf{0}\}$ とおけば, $\dim V = n - \text{rank } A$ であることを示せ.

解答例

$\dim V = k$ とおいて v_1, v_2, \dots, v_k を V の基底とする. また, $\text{rank } A = r$ とおいて, $Ae_{j_1}, Ae_{j_2}, \dots, Ae_{j_r}$ ($1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n$) が1次独立であるとする.

解答例の続き

ここで, r は A の列ベクトル Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n の中で1次独立なベクトルの最大個数だから任意の $i=1, 2, \dots, n$ に対して $Ae_{j_1}, Ae_{j_2}, \dots, Ae_{j_r}, Ae_i$ は1次従属になる. 従って Ae_i は $Ae_{j_1}, Ae_{j_2}, \dots, Ae_{j_r}$ の1次結合で表される.

任意の $x \in K^n$ に対し, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$ とおくと

$$Ax = x_1Ae_1 + x_2Ae_2 + \dots + x_nAe_n$$

だから, 上のことから Ax は $Ae_{j_1}, Ae_{j_2}, \dots, Ae_{j_r}$ の1次結合になるため

$$Ax = y_1Ae_{j_1} + y_2Ae_{j_2} + \dots + y_rAe_{j_r}$$

と表すことができる. このとき $A(x - (y_1e_{j_1} + y_2e_{j_2} + \dots + y_re_{j_r})) = \mathbf{0}$ が成り立つため,

$x - (y_1e_{j_1} + y_2e_{j_2} + \dots + y_re_{j_r}) \in V$ である. よって

$$x - (y_1e_{j_1} + y_2e_{j_2} + \dots + y_re_{j_r}) = z_1v_1 + z_2v_2 + \dots + z_kv_k$$

と表されるため, $x = y_1e_{j_1} + y_2e_{j_2} + \dots + y_re_{j_r} + z_1v_1 + z_2v_2 + \dots + z_kv_k$ である. 故に

$e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_r}, v_1, v_2, \dots, v_k$ は K^n を生成する.

解答例の続き

$a_1\mathbf{e}_{j_1} + a_2\mathbf{e}_{j_2} + \cdots + a_r\mathbf{e}_{j_r} + b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ が成り立つとして, この両辺に左から A をかけると, $j=1, 2, \dots, k$ に対して $A\mathbf{v}_j = \mathbf{0}$ より $a_1A\mathbf{e}_{j_1} + a_2A\mathbf{e}_{j_2} + \cdots + a_rA\mathbf{e}_{j_r} = \mathbf{0}$ である. $A\mathbf{e}_{j_1}, A\mathbf{e}_{j_2}, \dots, A\mathbf{e}_{j_r}$ は1次独立だから $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$ であり, これより $b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ を得る. さらに $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ は1次独立だから $b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0$ である. 従って $\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_r}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ は1次独立である. 以上から $\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_r}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ は K^n の基底であるため $r+k=n$ である. 故に $\dim V = k = n - r = n - \text{rank } A$ が成り立つ.

例題 10.4

$A \in M_n(\mathbf{R})$ に対し, $V = \{x \in \mathbf{C}^n \mid Ax = \mathbf{0}\}$, $W = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax = \mathbf{0}\}$ とおく. v_1, v_2, \dots, v_k が W の基底ならば $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{C}^n$ とみなしたとき, v_1, v_2, \dots, v_k は V の基底であることを示せ.

解答例

例題10.2と例題10.3から $\dim V = n - \text{rank}_{\mathbf{C}} A = n - \text{rank}_{\mathbf{R}} A = \dim W = k$ である.

一方, 例題10.1から v_1, v_2, \dots, v_k は V の1次独立な k 個のベクトルだから v_1, v_2, \dots, v_k は V の基底である.

例題 10.5

λ を $A \in M_n(\mathbf{R})$ の実数の固有値とし, V_λ を λ に対する A の固有空間 $\{x \in \mathbf{C}^n \mid Ax = \lambda x\}$ とする. このとき, V_λ の正規直交基底 v_1, v_2, \dots, v_k で, $j = 1, 2, \dots, k$ に対して $v_j \in \mathbf{R}^n$ であるものが存在することを示せ.

解答例

v'_1, v'_2, \dots, v'_k を $W_\lambda = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax = \lambda x\}$ の基底として, これらを正規直交化したものを v_1, v_2, \dots, v_k とすれば, v_1, v_2, \dots, v_k は W_λ の正規直交基底である. さらに例題10.4により v_1, v_2, \dots, v_k は V_λ の基底である.

例題 10.6

μ を $A \in M_n(\mathbf{R})$ の虚数の固有値とし, V_μ を μ に対する A の固有空間とする.

- (1) μ の共役複素数 $\bar{\mu}$ も A の固有値で, $\{x \in \mathbf{C}^n \mid \bar{x} \in V_\mu\}$ は $\bar{\mu}$ に対する A の固有空間であることを示せ.
- (2) v_1, v_2, \dots, v_k が V_μ の基底ならば $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$ は $\bar{\mu}$ に対する A の固有空間 $V_{\bar{\mu}}$ の基底であることを示せ.
- (3) v_1, v_2, \dots, v_k が V_μ の正規直交基底ならば $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$ は $V_{\bar{\mu}}$ の正規直交基底であることを示せ.

解答例

(1) x を μ に対する A の固有ベクトルとして $Ax = \mu x$ の両辺の共役を考えれば幾何学 II

命題 7.3 の (2) により $\overline{Ax} = \bar{\mu} \bar{x}$ である. A の成分は実数だから $\overline{Ax} = A\bar{x}$ である. 故に

$A\bar{x} = \bar{\mu} \bar{x}$ より $\bar{\mu}$ も A の固有値で, \bar{x} は $\bar{\mu}$ に対する A の固有ベクトルである.

$\bar{\mu}$ に対する A の固有空間 $V_{\bar{\mu}}$ とすれば, $\bar{x} \in V_{\bar{\mu}}$ ならば $x = \overline{\bar{x}} \in V_\mu$ である.

逆に $x \in V_\mu$ ならば $Ax = \mu x$ だから, 両辺の共役を考えると $A\bar{x} = \bar{\mu} \bar{x}$ となるため

$\bar{x} \in V_{\bar{\mu}}$ である. 故に $V_{\bar{\mu}} = \{x \in \mathbf{C}^n \mid \bar{x} \in V_\mu\}$ が成り立つ.

解答例の続き

(2) $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ を V_μ の基底とする. $x_1\bar{\nu}_1 + x_2\bar{\nu}_2 + \dots + x_k\bar{\nu}_k = \mathbf{0}$ ならば, 両辺の共役を考えると $\bar{x}_1\nu_1 + \bar{x}_2\nu_2 + \dots + \bar{x}_k\nu_k = \mathbf{0}$ が得られ, $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ の1次独立性により $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \dots = \bar{x}_k = 0$ である. 従って $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$ となるため $\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \dots, \bar{\nu}_k$ は1次独立である. 任意の $x \in V_{\bar{\mu}}$ に対して $\bar{x} \in V_\mu$ だから $\bar{x} = x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + \dots + x_k\nu_k$ と表される. この両辺の共役をとれば $x = x_1\bar{\nu}_1 + x_2\bar{\nu}_2 + \dots + x_k\bar{\nu}_k$ となるため, $\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \dots, \bar{\nu}_k$ は $V_{\bar{\mu}}$ を生成する. 従って $\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \dots, \bar{\nu}_k$ は $V_{\bar{\mu}}$ の基底である.

(3) $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ を V_μ の正規直交基底とする. (2)により $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ は $V_{\bar{\mu}}$ の基底であり, $(\bar{\nu}_i, \bar{\nu}_j) = {}^t\bar{\nu}_i\nu_j = \overline{{}^t\nu_i\bar{\nu}_j} = \overline{(\nu_i, \nu_j)} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ だから $\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \dots, \bar{\nu}_k$ は正規直交系である.

共役複素数の性質から, 実数を係数にもつ方程式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ ($a_n \neq 0$) が α を解にもてば, $\bar{\alpha}$ も解だから代数学の基本定理から次の結果が得られる.

命題 10.7

実数を係数にもつ1変数の多項式は, 実数を係数とする1次式と2次式の積に
因数分解される.

成分が実数である正規行列を実正規行列と呼ぶ.

A を n 次実正規行列とすれば, 命題10.7により, A の固有多項式 $F_A(x)$ は $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$
を相異なる実数, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ を相異なる虚数として

$$F_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r} (x - \mu_1)^{l_1} (x - \bar{\mu}_1)^{l_1} (x - \mu_2)^{l_2} (x - \bar{\mu}_2)^{l_2} \cdots (x - \mu_s)^{l_s} (x - \bar{\mu}_s)^{l_s}$$

($m_1 + m_2 + \cdots + m_r + 2(l_1 + l_2 + \cdots + l_s) = n$) という形に因数分解される. A を複素数を
成分とする行列とみなせば $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2, \bar{\mu}_2, \dots, \mu_s, \bar{\mu}_s$ は相異なる A の固有値
であり, $\lambda_j, \mu_j, \bar{\mu}_j$ に対する A の固有空間をそれぞれ $V_{\lambda_j}, V_{\mu_j}, V_{\bar{\mu}_j}$ とする. このとき
幾何学 II 定理7.26により, $\dim V_{\lambda_j} = m_j, \dim V_{\mu_j} = \dim V_{\bar{\mu}_j} = l_j$ であることに注意する.
 λ_j は実数だから, 例題10.5により V_{λ_j} の正規直交基底 $v_{j1}, v_{j2}, \dots, v_{jm_j}$ で, \mathbb{R}^n に含まれる
ものがとれる. また, $w_{j1}, w_{j2}, \dots, w_{jl_j}$ を V_{μ_j} の正規直交基底とすれば, 例題10.6により
 $\bar{w}_{j1}, \bar{w}_{j2}, \dots, \bar{w}_{jl_j}$ は $V_{\bar{\mu}_j}$ の正規直交基底である.

そこで $j=1,2,\dots,s, k=1,2,\dots,l_j$ に対して $\mathbf{x}_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{w}_{jk} + \bar{\mathbf{w}}_{jk}), \mathbf{y}_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\mathbf{w}_{jk} - \bar{\mathbf{w}}_{jk})$ とおくと $\mathbf{x}_{jk}, \mathbf{y}_{jk} \in \mathbf{R}^n$ であり, $\mathbf{w}_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x}_{jk} + i\mathbf{y}_{jk}), \bar{\mathbf{w}}_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x}_{jk} - i\mathbf{y}_{jk})$ が成り立つため

$$A\mathbf{x}_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A\mathbf{w}_{jk} + A\bar{\mathbf{w}}_{jk}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu_j\mathbf{w}_{jk} + \bar{\mu}_j\bar{\mathbf{w}}_{jk}) = \frac{1}{2}(\mu_j + \bar{\mu}_j)\mathbf{x}_{jk} - \frac{1}{2i}(\mu_j - \bar{\mu}_j)\mathbf{y}_{jk}$$

$$A\mathbf{y}_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2}i}(A\mathbf{w}_{jk} - A\bar{\mathbf{w}}_{jk}) = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\mu_j\mathbf{w}_{jk} - \bar{\mu}_j\bar{\mathbf{w}}_{jk}) = \frac{1}{2i}(\mu_j - \bar{\mu}_j)\mathbf{x}_{jk} + \frac{1}{2}(\mu_j + \bar{\mu}_j)\mathbf{y}_{jk}$$

である. 故に $\mu_j = a_j + b_j i$ ($a_j, b_j \in \mathbf{R}$) とおくと, 次の等式が成り立つ.

$$A\mathbf{x}_{jk} = a_j\mathbf{x}_{jk} - b_j\mathbf{y}_{jk}, \quad A\mathbf{y}_{jk} = b_j\mathbf{x}_{jk} + a_j\mathbf{y}_{jk} \cdots (*)$$

一方, 幾何学 II [命題8.6](#)により次のベクトルは \mathbf{C}^n の正規直交系である.

$$\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{12}, \dots, \mathbf{v}_{1m_1}, \dots, \mathbf{v}_{r1}, \mathbf{v}_{r2}, \dots, \mathbf{v}_{rm_r}, \mathbf{w}_{11}, \bar{\mathbf{w}}_{11}, \dots, \mathbf{w}_{1l_1}, \bar{\mathbf{w}}_{1l_1}, \dots, \mathbf{w}_{s1}, \bar{\mathbf{w}}_{s1}, \dots, \mathbf{w}_{sl_s}, \bar{\mathbf{w}}_{sl_s}$$

従って $\|\mathbf{v}_{jk}\| = \|\mathbf{w}_{jk}\| = \|\bar{\mathbf{w}}_{jk}\| = 1, (\mathbf{v}_{jk}, \mathbf{w}_{lm}) = (\mathbf{v}_{jk}, \bar{\mathbf{w}}_{lm}) = (\mathbf{w}_{jk}, \bar{\mathbf{w}}_{lm}) = 0$ であり,

$(j, k) \neq (l, m)$ ならば $(\mathbf{v}_{jk}, \mathbf{v}_{lm}) = (\mathbf{w}_{jk}, \mathbf{w}_{lm}) = (\bar{\mathbf{w}}_{jk}, \bar{\mathbf{w}}_{lm}) = 0$ だから $\mathbf{x}_{jk}, \mathbf{y}_{jk}$ の定義より

$$\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{12}, \dots, \mathbf{v}_{1m_1}, \dots, \mathbf{v}_{r1}, \mathbf{v}_{r2}, \dots, \mathbf{v}_{rm_r}, \mathbf{x}_{11}, \mathbf{y}_{11}, \dots, \mathbf{x}_{1l_1}, \mathbf{y}_{1l_1}, \dots, \mathbf{x}_{s1}, \mathbf{y}_{s1}, \dots, \mathbf{x}_{sl_s}, \mathbf{y}_{sl_s}$$

は \mathbf{R}^n の正規直交系である. これらのベクトルをこの順に列ベクトルにもつ行列を P とすれば, 幾何学 II [命題8.7](#)により, P は直交行列である. $A\mathbf{v}_{jk} = \lambda_j \mathbf{v}_{jk}$ と関係式 (*) が成り立つことから, $C_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$ とおき, D_j を l_j 個の C_j が対角線上に並んだ

$$D_j = \begin{pmatrix} C_j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_j & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_j \end{pmatrix}$$

という形の $2l_j$ 次正方行列とすれば, $P^{-1}AP$ は以下の形をした n 次正方行列になる.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mu_1 E_{m_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mu_r E_{m_r} & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & D_1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & D_s \end{pmatrix}$$

以上から、次の定理が示された。

定理 10.8

A が実正規行列ならば直交行列 P で $P^{-1}AP$ が対角線上に対角行列と $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の形の行列が並ぶようになるものがある。

実正規行列 A に対して直交行列 P で $P^{-1}AP$ が対角線上に対角行列と $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の形の行列が並ぶようになるものを求め、さらにその P に対して $P^{-1}AP$ を求めることを、「 A を標準化する」という。

幾何学演習 II

第11回 行列の級数

例題11.1と例題11.2は微積分学Iで学んだ実数を係数とする整級数に関する定理の複素数を係数とする整級数に関する定理への拡張である。

例題 11.1

$a_k, x_0 \in \mathbb{C}$ とする。 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ が収束すれば、 $|x| < |x_0|$ を満たす任意の複素数 x に対して $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^k$ は絶対収束し、 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ が発散すれば、 $|x| > |x_0|$ を満たす任意の複素数 x に対して $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^k$ は発散することを示せ。

解答例

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ が収束すれば, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k x_0^k = 0$ であり, 収束する点列は有界だから, 実数 K で 0

以上のすべての整数 k に対して $|a_k x_0^k| \leq K$ を満たすものが存在する. $|x| < |x_0|$ ならば

$|a_k x^k| = |a_k x_0^k| \left| \frac{x}{x_0} \right|^k \leq K \left| \frac{x}{x_0} \right|^k$ が 0 以上のすべての整数 k に対して成り立つ.

$\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ だから等比級数 $\sum_{k=0}^{\infty} K \left| \frac{x}{x_0} \right|^k$ は収束するため, 0 以上の任意の整数 N に対して

$\sum_{k=0}^N |a_k x^k| \leq \sum_{k=0}^N K \left| \frac{x}{x_0} \right|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} K \left| \frac{x}{x_0} \right|^k$ だから $\sum_{k=0}^N |a_k x^k|$ は上に有界である.

従って幾何学 II [命題9.6](#)から $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ は絶対収束する. もし $|x| > |x_0|$ を満たす x で

$\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^k$ が収束するものがあれば, 上の結果から $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ は絶対収束する.

故に $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^k$ が $x = x_0$ で発散すれば, $|x| > |x_0|$ を満たす任意の x に対して $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^k$ は

発散する.

例題11.2

複素数を係数とする整級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^k$ について、以下の三つのうち一つが成り立つことを示せ.

(i) 任意の複素数 x に対して $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^k$ は絶対収束する.

(ii) 次の条件を満たす $\rho > 0$ がある.

「 $|x| < \rho$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^k$ は絶対収束し、 $|x| > \rho$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^k$ は発散する。」

(iii) $x \neq 0$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^k$ は発散する.

解答例

明らかに (i), (ii), (iii) のうちのどの二つも同時に成り立たない。(i) と (iii) が成り立たない場合に (ii) が成り立つことを示す.

解答例の続き

(iii) が成り立たないことから、0 でない複素数 c で $\sum_{k=0}^{\infty} a_k c^k$ が収束するものがあるため、

例題11.1から、 $|x| < |c|$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^k$ は絶対収束する。そこで、

$$S = \left\{ s \in \mathbf{R} \mid |x| < s \text{ ならば } \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^k \text{ は絶対収束する.} \right\}$$

によって正の実数の全体の集合の部分集合 S を定めれば $|c| \in S$ だから S は空集合

ではない。また、(i) が成り立たないことから、 S に属さない正の実数 d がある。もし

$s_0 > d$ である S の要素 s_0 が存在すれば、 $|d| = d < s_0$ だから $\sum_{k=0}^{\infty} a_k d^k$ は絶対収束

するため、例題11.1から、 $|x| < d$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^k$ は絶対収束する。このことは、 d が

S に属さないことに矛盾する。故に、任意の $s \in S$ に対して $s \leq d$ となるため、 S は上に

有界な空でない \mathbf{R} の部分集合である。幾何学 I 定理10.12により S は上限をもつため、

それを ρ とおく。

解答例の続き

$|x| < \rho$ ならば $\frac{|x| + \rho}{2} < \rho$ であり, ρ は S の上限だから $\frac{|x| + \rho}{2} < s \leq \rho$ を満たす $s \in S$ が存在する. さらに $|x| < \frac{|x| + \rho}{2} < s$ だから $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^k$ は絶対収束する.

故に「 $|x| < \rho$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^k$ は絶対収束する。」ことが示せた.

$|x_0| > \rho$ を満たす実数 x_0 で $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ が収束するものが存在すると仮定する.

このとき例題11.1によって, $|x| < |x_0|$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^k$ は絶対収束するため, $|x_0| \in S$

となつて, $|x_0| > \rho$ は ρ が S の上界であることと矛盾する.

従つて, $|x| > \rho$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^k$ は発散する.

整級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^k$ の収束半径を, 例題11.2の (i) の場合は無限大, (ii) の場合は ρ , (iii) の

場合は0であると定義する.

例題11.3

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ をそれぞれ収束半径が α, β である整級数とする.

(1) $f(x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} c_{m,k} x^k$ とするとき, a_0, a_1, a_2, \dots を用いて $c_{m,k}$ を表せ.

(2) $a_0 = 0$ とし, $0 < \gamma \leq \alpha$ は条件「 $|x| < \gamma$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |x|^k < \beta$ 」を満たすとする.

$X \in M_n(\mathbf{C})$ が $\|X\| < \gamma$ を満たすならば $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^k b_m c_{m,k} \right) X^k$ は $g(f(X))$ に絶対収束することを示せ.

解答例

(1) $f(x)^m = \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l \right)^m$ を展開したときの x^k の係数と $\left(\sum_{l=0}^k a_l x^l \right)^m$ を展開したときの

x^k の係数は等しいため、 $x_l = a_l x^l$ とおけば

$$\begin{aligned} \left(\sum_{l=0}^k a_l x^l \right)^m &= (x_0 + x_1 + \cdots + x_k)^m = \sum_{i_0+i_1+\cdots+i_k=m} \frac{m!}{i_0!i_1!\cdots i_k!} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k} \\ &= \sum_{i_0+i_1+\cdots+i_k=m} \frac{m!}{i_0!i_1!\cdots i_k!} a_0^{i_0} a_1^{i_1} \cdots a_k^{i_k} x^{i_1+2i_2+\cdots+ki_k} \\ &= \sum_{l=0}^{km} \left(\sum_{i_0+i_1+\cdots+i_k=m, i_1+2i_2+\cdots+ki_k=l} \frac{m!}{i_0!i_1!\cdots i_k!} a_0^{i_0} a_1^{i_1} \cdots a_k^{i_k} \right) x^l \end{aligned}$$

より $c_{m,k} = \sum_{i_0+i_1+\cdots+i_k=m, i_1+2i_2+\cdots+ki_k=k} \frac{m!}{i_0!i_1!\cdots i_k!} a_0^{i_0} a_1^{i_1} \cdots a_k^{i_k}$ である.

解答例の続き

$$(2) \bar{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| x^k, \tilde{c}_{m,k} = \sum_{i_0+i_1+\dots+i_k=m, i_1+2i_2+\dots+ki_k=k} \frac{m!}{i_0!i_1!\dots i_k!} |a_0|^{i_0} |a_1|^{i_1} \dots |a_k|^{i_k} \text{ と}$$

おけば $|x| < \alpha$ ならば(1)から $\bar{f}(x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_{m,k} x^k$ であり, $|c_{m,k}| \leq \tilde{c}_{m,k}$ が成り立つ

ため, 0以上の整数 l に対して次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^l \left| \sum_{m=0}^k b_m c_{m,k} \right| |x|^k &\leq \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^k |b_m| |c_{m,k}| |x|^k \leq \sum_{k=0}^l \sum_{m=0}^k |b_m| \tilde{c}_{m,k} |x|^k \\ &= \sum_{m=0}^l |b_m| \left(\sum_{k=m}^l \tilde{c}_{m,k} |x|^k \right) \leq \sum_{m=0}^l |b_m| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_{m,k} |x|^k \right) = \sum_{m=0}^l |b_m| \bar{f}(|x|)^m \end{aligned}$$

$|x| < \gamma$ を満たす x に対し, $0 \leq \bar{f}(|x|) < \beta$ だから $g(\bar{f}(|x|)) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \bar{f}(|x|)^m$ は

絶対収束するため $\sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \bar{f}(|x|)^m$ は収束する.

ここで $\tilde{h}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \bar{f}(|x|)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^k |b_m| \tilde{c}_{m,k} \right) x^k$ とおくと上の不等式から

解答例の続き

0以上の任意の整数 l に対して $\sum_{k=0}^l \left| \sum_{m=0}^k b_m c_{m,k} \right| |x|^k \leq \sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \bar{f}(|x|)^m$ が成り

立つため、 $|x| < \gamma$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^k b_m c_{m,k} \right) x^k$ は絶対収束する。

$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^k b_m c_{m,k} \right) x^k$ とおけば、幾何学 II [命題9.10](#)から $\|X\| < \gamma$ を満たす

$X \in M_n(\mathbf{C})$ に対し、 $h(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^k b_m c_{m,k} \right) X^k$ は絶対収束する。0以上の整数 l に

対して $g_l(x) = \sum_{m=0}^l b_m x^m$, $\tilde{h}_l(x) = \sum_{k=0}^l \left(\sum_{m=0}^k |b_m| \tilde{c}_{m,k} \right) x^k$ とおくと $|x| < \alpha$ ならば

$$g_l(f(X)) = \sum_{m=0}^l b_m f(x)^m = \sum_{m=0}^l b_m \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{m,k} x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^l b_m c_{m,k} \right) x^k$$

である。また $a_0 = 0$ より $m > k$ ならば $c_{m,k} = 0$ だから $\|X\| < \gamma$ ならば次の不等式が成り立つ。

解答例の続き

$$\begin{aligned}\|g_l(f(X)) - h(X)\| &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^l b_m c_{m,k} - \sum_{m=0}^k b_m c_{m,k} \right) X^k \right\| \\ &= \left\| - \sum_{k=l+1}^{\infty} \left(\sum_{m=l+1}^k b_m c_{m,k} \right) X^k \right\| \leq \sum_{k=l+1}^{\infty} \left(\sum_{m=l+1}^k |b_m| |c_{m,k}| \right) \|X\|^k \\ &\leq \sum_{k=l+1}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^k |b_m| \tilde{c}_{m,k} \right) \|X\|^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^k |b_m| \tilde{c}_{m,k} \right) \|X\|^k - \sum_{k=0}^l \left(\sum_{m=0}^k |b_m| \tilde{c}_{m,k} \right) \|X\|^k \\ &= \tilde{h}(\|X\|) - \tilde{h}_l(\|X\|)\end{aligned}$$

$l \rightarrow \infty$ のとき $g_l(f(X)) \rightarrow g(f(X))$, $\tilde{h}_l(\|X\|) \rightarrow \tilde{h}(\|X\|)$ だから、上の不等式から $g(f(X)) = h(X)$ が得られる。

幾何学演習 II

第12回 行列の指数写像 (その1)

例題 12.1

複素数 a, b, c に対し, 2次正方行列 A を $A = \begin{pmatrix} a-bc & b^2 \\ -c^2 & a+bc \end{pmatrix}$ で定める.

(1) 2次ユニタリ行列 P で, $P^{-1}AP$ が上半三角行列になるようなものを求めよ.

(2) $\exp(tA)$ を求めよ.

(3) a, b, c が実数のとき, 連立微分方程式 $\begin{cases} x' = (a-bc)x + b^2y \\ y' = -c^2x + (a+bc)y \end{cases}$ の解を求めよ.

解答例

(1) $b=c=0$ の場合は $A = aE_2$ だから $P = E_2$ とすればよい. 以下 b, c の少なくとも

一方は0でないとする. $A = aE_2 + \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c & b \end{pmatrix}$ だから $v = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ とおけば,

$Av = \left(aE_2 + \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c & b \end{pmatrix} \right) v = av$ となるため, a は A の固有値で, v は a に

対する A の固有ベクトルである.

解答例の続き

$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -\bar{c} \\ \bar{b} \end{pmatrix}$ とおき, $P = \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} \quad \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w} \right)$ とおけば, $\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v}, \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w}$ は C^2 の正規直交基底だから P はユニタリ行列で, $\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} = P\mathbf{e}_1$, $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = \sqrt{|b|^2 + |c|^2}$ より

$$\begin{aligned} A\left(\frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w}\right) &= \frac{a}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w} + \sqrt{|b|^2 + |c|^2} \mathbf{v} = (|b|^2 + |c|^2)P\mathbf{e}_1 + aP\mathbf{e}_2 \\ &= P\left((|b|^2 + |c|^2)\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2\right) \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って

$$\begin{aligned} AP &= \left(A\left(\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v}\right) \quad A\left(\frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w}\right) \right) = \left(aP\mathbf{e}_1 \quad P\left((|b|^2 + |c|^2)\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2\right) \right) \\ &= P\left(a\mathbf{e}_1 \quad (|b|^2 + |c|^2)\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2\right) \end{aligned}$$

より $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & |b|^2 + |c|^2 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ となるため, $P = \frac{1}{\sqrt{|b|^2 + |c|^2}} \begin{pmatrix} b & -\bar{c} \\ c & \bar{b} \end{pmatrix}$ が

求めるユニタリ行列である.

解答例の続き

(2) $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおけば, $N^2 = O$ であり, $P^{-1}AP = aE_2 + (|b|^2 + |c|^2)N$ だから

$$P^{-1} \exp(tA) P = \exp(tP^{-1}AP) = \exp(atE_2 + t(|b|^2 + |c|^2)N)$$
$$= \exp(atE_2) \exp(t(|b|^2 + |c|^2)N) = e^{at} (E_2 + t(|b|^2 + |c|^2)N)$$

$$= e^{at} \begin{pmatrix} 1 & t(|b|^2 + |c|^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp(tA) = e^{at} P \begin{pmatrix} 1 & t(|b|^2 + |c|^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \frac{e^{at}}{|b|^2 + |c|^2} \begin{pmatrix} b & -\bar{c} \\ c & \bar{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t(|b|^2 + |c|^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b} & \bar{c} \\ -c & b \end{pmatrix}$$

$$= e^{at} \begin{pmatrix} 1 - bct & b^2t \\ -c^2t & 1 + bct \end{pmatrix}$$

が得られる.

解答例の続き

(3) 与えられた連立微分方程式の解で $t=0$ のときの値が $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^2$ であるものは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \exp(tA)\boldsymbol{v} \text{ で与えられる. } \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \text{ とおけば, (2)より}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \exp(tA)\boldsymbol{v} = e^{at} \begin{pmatrix} 1-bct & b^2t \\ -c^2t & 1+bct \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{at}(p+b(bq-cp)t) \\ e^{at}(q+c(bq-cp)t) \end{pmatrix} \text{ である.}$$

例題 12.2

2次正方行列 A の固有多項式が $(x-\alpha)(x-\beta)$ であるとする.

(1) $\alpha \neq \beta$ ならば $\exp A = \frac{\beta e^\alpha - \alpha e^\beta}{\beta - \alpha} E_2 + \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} A$ が成り立つことを示せ.

(2) $\alpha = \beta$ ならば $\exp A = e^\alpha((1-\alpha)E_2 + A)$ が成り立つことを示せ.

(3) A の成分がすべて実数で $\alpha = \lambda + \mu i$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}, \mu \neq 0$) ならば, 次の等式が成り立つことを示せ. $\exp A = \frac{e^\lambda}{\mu} ((\mu \cos \mu - \lambda \sin \mu)E_2 + \sin \mu A)$

解答例

(1) 仮定から2次正則行列 P で, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ を満たすものが存在するため,

$$Q = A - \alpha E_2 \text{ とおけば } P^{-1}QP = P^{-1}(A - \alpha E_2)P = P^{-1}AP - \alpha E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta - \alpha \end{pmatrix}$$

より, $P^{-1}Q^kP = (P^{-1}QP)^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\beta - \alpha)^k \end{pmatrix} = (\beta - \alpha)^{k-1}P^{-1}QP$ である. 従って

$Q^k = (\beta - \alpha)^{k-1}Q$ が成り立つ. 故に

$$\begin{aligned} \exp Q &= E_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} Q^k = E_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\beta - \alpha)^{k-1}}{k!} Q \\ &= E_2 + \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta - \alpha)^k}{k!} - 1 \right) Q = E_2 + \frac{e^{\beta - \alpha} - 1}{\beta - \alpha} Q \end{aligned}$$

が得られ, αE_2 と Q の積は交換可能だから次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \exp A &= \exp(\alpha E_2 + Q) = \exp(\alpha E_2) \exp Q = e^\alpha E_2 \left(E_2 + \frac{e^{\beta - \alpha} - 1}{\beta - \alpha} Q \right) \\ &= e^\alpha E_2 + \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} (A - \alpha E_2) = \frac{\beta e^\alpha - \alpha e^\beta}{\beta - \alpha} E_2 + \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} A \end{aligned}$$

解答例の続き

(2) $A = \alpha E_2$ ならば $\exp A = e^\alpha E_2 = e^\alpha((1-\alpha)E_2 + A)$ だから $A \neq \alpha E_2$ の場合を考える.

このとき $|\alpha E_2 - A| = 0$ かつ $\alpha E_2 - A$ は零行列ではないため, $\alpha E_2 - A$ の階数は1で

ある. α に対する固有ベクトルで単位ベクトルであるものを $v = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とし,

$w = \begin{pmatrix} -\bar{q} \\ \bar{p} \end{pmatrix}$ とおけば $[v, w]$ は C^2 の正規直交基底である. $Av = \alpha v$ であり,

$Aw = \beta v + \delta w$, $P = (v \ w)$ とおけば, P は C^2 の標準基底から $[v, w]$ への基底の

変換行列である. T_A を $T_A(x) = Ax$ で定義される C^2 の1次変換とすれば,

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ は基底 $[v, w]$ に関する T_A の表現行列だから, この固有多項式と

A の固有多項式は一致するため $\delta = \alpha$ である. 従って $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおけば

$P^{-1}AP = \alpha E_2 + \beta N$ が成り立ち, αE_2 と βN の積が交換可能であることと, $N^2 = 0$

だから, 次の等式が成り立つ.

解答例の続き

$$\begin{aligned} P^{-1}(\exp A)P &= \exp(P^{-1}AP) = \exp(\alpha E_2 + \beta N) = \exp(\alpha E_2)\exp(\beta N) \\ &= e^\alpha E_2(E_2 + \beta N) = e^\alpha(E_2 + \beta N) \end{aligned}$$

一方, $P^{-1}AP = \alpha E_2 + \beta N$ より, $A = P(\alpha E_2 + \beta N)P^{-1} = \alpha E_2 + \beta PNP^{-1}$ だから $\beta PNP^{-1} = A - \alpha E_2$ である. 故に次の等式が得られる.

$$\exp A = e^\alpha P(E_2 + \beta N)P^{-1} = e^\alpha(E_2 + \beta PNP^{-1}) = e^\alpha(E_2 + A - \alpha E_2) = e^\alpha((1 - \alpha)E_2 + A)$$

(3) A の固有多項式の係数は実数だから, $\alpha = \lambda + \mu i$ より $\beta = \lambda - \mu i$ である. 従って

$$\begin{aligned} \frac{\beta e^\alpha - \alpha e^\beta}{\beta - \alpha} &= \frac{(\lambda - \mu i)e^{\lambda + \mu i} - (\lambda + \mu i)e^{\lambda - \mu i}}{-2\mu i} = \frac{e^\lambda(\mu i(e^{\mu i} + e^{-\mu i}) - \lambda(e^{\mu i} - e^{-\mu i}))}{2\mu i} \\ &= \frac{e^\lambda(\mu \operatorname{Re}(e^{\mu i}) - \lambda \operatorname{Im}(e^{\mu i}))}{-2\mu i} = \frac{e^\lambda(\mu \cos \mu - \lambda \sin \mu)}{-2\mu i} \\ \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} &= \frac{e^{\lambda - \mu i} - e^{\lambda + \mu i}}{-2\mu i} = \frac{e^\lambda(e^{-\mu i} - e^{\mu i})}{2\mu i} = \frac{e^\lambda \operatorname{Im}(e^{\mu i})}{\mu} = \frac{e^\lambda \sin \mu}{\mu} \end{aligned}$$

だから, (1)の結果から $\exp A = \frac{e^\lambda}{\mu}((\mu \cos \mu - \lambda \sin \mu)E_2 + \sin \mu A)$ が得られる.

幾何学演習 II

第13回 行列の指数写像 (その2)

K の要素を成分にもつ正規行列全体からなる $M_n(K)$ の部分空間を $N_n(K)$ で表す.
また $m \times n$ 行列の零行列を $O_{m,n}$ で表し, $O_{n,n} = O_n$ とおく. さらに $a, b \in \mathbf{R}$ に対して
$$S_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$
 とおく.

例題 13.1

\exp による $N_n(\mathbf{C})$ の像は $N_n(\mathbf{C}) \cap GL_n(\mathbf{C})$ であることを示せ.

解答例

$A \in N_n(\mathbf{C})$ ならば $A^*A = AA^*$ だから幾何学 II 命題 10.3 の (1) と (3) より

$$\begin{aligned} (\exp A)^*(\exp A) &= (\exp(A^*))(\exp A) = \exp(A^* + A) = \exp(A + A^*) \\ &= (\exp A)(\exp(A^*)) = (\exp A)(\exp A)^* \end{aligned}$$

が成り立つ. 故に $\exp A \in N_n(\mathbf{C})$ となり, \exp による $N_n(\mathbf{C})$ の像は $N_n(\mathbf{C})$ に含まれ,
幾何学 II 命題 10.3 の (2) から \exp はつねに正則行列を値にとるため, \exp による $N_n(\mathbf{C})$
の像は $N_n(\mathbf{C}) \cap GL_n(\mathbf{C})$ に含まれる.

任意の $C \in N_n(\mathbf{C}) \cap GL_n(\mathbf{C})$ に対し, 幾何学 II 定理 8.11 より C を対角化するユニタリー
行列 U がある. $U^{-1}CU$ の (j, j) 成分を $r_j(\cos \theta_j + i \sin \theta_j)$ ($r_j \geq 0, 0 \leq \theta_j < 2\pi$) とする.

解答例の続き

C が正則行列であることから C の固有値は 0 でないため, $r_j > 0$ である.

従って $e^{\log r_j + i\theta_j} = r_j(\cos \theta_j + i \sin \theta_j)$ だから $\log r_j + i\theta_j$ を (j, j) 成分とする n 次対角行列を D とおけば D は正規行列で, $\exp D = U^{-1}CU$ が成り立つため, 幾何学 II 注意9.12 から $\exp(UDU^{-1}) = C$ が得られる. 幾何学 II 命題8.8の(1)と(3)から UDU^{-1} は正規行列だから \exp による $N_n(\mathbf{C})$ の像は $N_n(\mathbf{C}) \cap GL_n(\mathbf{C})$ である.

例題 13.2

$N_n^+(\mathbf{R}) = \{A \in N_n(\mathbf{R}) \cap GL_n(\mathbf{R}) \mid A \text{ の固有方程式の負の解の重複度は偶数である.}\}$
とおくとき, \exp による $N_n(\mathbf{R})$ の像は $N_n^+(\mathbf{R})$ であることを示せ.

解答例

$A \in N_n(\mathbf{R})$ ならば例題13.1から $\exp A$ も正規行列であり, A の成分がすべて実数ならば $\exp A$ の成分もすべて実数だから $\exp A \in N_n(\mathbf{R})$ である.

定理10.8から実直交行列 P で, $P^{-1}AP$ が対角線上に対角行列 D と $S_{a,b}$ の形の行列が並んだ形になるものがある.

解答例の続き

D の (j, j) 成分を λ_j とすれば $\exp D$ は $e^{\lambda_j} > 0$ を (j, j) 成分にもつ対角行列で、幾何学II
例10.4から $\exp S_{a, b} = S_{e^a \cos b, e^b \sin b}$ だから $\exp(P^{-1}AP)$ は正の実数を対角成分にもつ
対角行列 $\exp D$ と $S_{e^a \cos b, e^b \sin b}$ の形の行列が並んだ形になる. $\exp A$ の固有多項式
 $F_{\exp A}(x)$ は $P^{-1}(\exp A)P = \exp(P^{-1}AP)$ の固有多項式に一致して $S_{e^a \cos b, e^b \sin b}$ の
固有多項式は $(x - e^a \cos b)^2 + e^{2a} \sin^2 b$ だから、上のことから $F_{\exp A}(x)$ は1次式 $x - e^{\lambda_j}$
と $(x - e^a \cos b)^2 + e^{2a} \sin^2 b$ という形の2次式の積である. 後者が負の解をもつのは
 b が π の奇数倍のときに限り、この場合 $-e^a$ が重解になるため、 $F_{\exp A}(x) = 0$ の
負の解の重複度は偶数である. 故に $\exp A \in N_n^+(\mathbf{R})$ である.

$S_{a, 0} = aE_2$ に注意すれば、任意の $C \in N_n^+(\mathbf{R})$ に対し、仮定と定理10.8より $(0, 0)$ とは
異なる実数の対 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_l, b_l)$ と正の実数を対角成分とする $n - 2l$ 次
対角行列 D に対して直交行列 P で $P^{-1}CP$ が以下の形になるようなものがある.

解答例の続き

$$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} S_{a_1, b_1} & O_2 & \cdots & O_2 & O_{2, n-2l} \\ O_2 & S_{a_2, b_2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O_2 & O_{2, n-2l} \\ O_2 & \cdots & O_2 & S_{a_l, b_l} & O_{2, n-2l} \\ O_{n-2l, 2} & \cdots & O_{n-2l, 2} & O_{n-2l, 2} & D \end{pmatrix}$$

$r_j = \sqrt{a_j^2 + b_j^2}$ とおき, $\cos \theta_j = \frac{a_j}{r_j}$, $\sin \theta_j = \frac{b_j}{r_j}$ を満たす $0 \leq \theta_j < 2\pi$ をとれば幾何学 II

例10.4により $\exp S_{\log r_j, \theta_j} = S_{a_j, b_j}$ が成り立つ. また, D の (j, j) 成分を d_j として

(j, j) 成分が $\log d_j$ である $n-2l$ 次対角行列を T とおけば $\exp T = D$ だから, 次の

ように n 次正方行列 A を定めれば $\exp A = P^{-1}CP$ が成立つ

解答例の続き

$$A = \begin{pmatrix} S_{\log r_1, \theta_1} & O_2 & \cdots & O_2 & O_{2, n-2l} \\ O_2 & S_{\log r_2, \theta_2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O_2 & O_{2, n-2l} \\ O_2 & \cdots & O_2 & S_{\log r_l, \theta_l} & O_{2, n-2l} \\ O_{n-2l, 2} & \cdots & O_{n-2l, 2} & O_{n-2l, 2} & T \end{pmatrix}$$

故に幾何学 II [注意.12](#) から $\exp(PAP^{-1}) = C$ が得られる. 幾何学 II [命題8.8](#) の(1)と(3)から PAP^{-1} は正規行列で, 実数を成分とするため \exp による $N_n(\mathbf{R})$ の像は $N_n^+(\mathbf{R})$ である.

実数を成分とする n 次正方行列 A が ${}^t A = -A$ を満たすとき n 次交代行列という. n 次交代行列全体からなる $M_n(\mathbf{R})$ の部分空間を $A(n)$ で表し, 行列式の値が 1 である n 次直交行列全体からなる $M_n(\mathbf{R})$ の部分空間を $SO(n)$ で表す.

例題 13.3

\exp による $A(n)$ の像は $SO(n)$ であることを示せ.

解答例

$A \in A(n)$ ならば A の対角成分はすべて0だから $\text{tr } A = 0$ である. 従って $A(n) \subset SH_0(n)$ だから幾何学 II 命題10.11により, $\exp A$ は行列式の値が1のユニタリー行列である. A の各成分は実数だから $\exp A$ の各成分も実数であるため, $\exp A \in SO(n)$ である. 任意の $U \in SO(n)$ に対して, $P^{-1}UP$ が定理10.8の形の行列になるような直交行列 P をとると $P^{-1}UP$ も直交行列であることから対角線上に並ぶ $S_{a,b}$ の形の行列は $a^2 + b^2 = 1$ を満たし, 対角行列になっている部分の成分は1か-1に等しい. さらに U の行列式の値が1であることから, $P^{-1}UP$ の対角成分に並ぶ-1の個数は偶数である. また $S_{-1,0} = -E_2$ だから, U の固有値 ± 1 に対する固有ベクトルからなる P の列ベクトルを適当に入れ換えることで次のような形にできる.

解答例の続き

$$P^{-1}UP = \begin{pmatrix} S_{\cos \theta_1, \sin \theta_1} & O_2 & \cdots & O_2 & O_{2, n-2l} \\ O_2 & S_{\cos \theta_2, \sin \theta_2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O_2 & O_{2, n-2l} \\ O_2 & \cdots & O_2 & S_{\cos \theta_l, \sin \theta_l} & O_{2, n-2l} \\ O_{n-2l, 2} & \cdots & O_{n-2l, 2} & O_{n-2l, 2} & E_{n-2l} \end{pmatrix}$$

そこで $B \in M_n(\mathbf{R})$ を次のように定めれば $B \in A(n)$ である。

$$B = \begin{pmatrix} S_{0, \theta_1} & O_2 & \cdots & O_2 & O_{2, n-2l} \\ O_2 & S_{0, \theta_2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O_2 & O_{2, n-2l} \\ O_2 & \cdots & O_2 & S_{0, \theta_l} & O_{2, n-2l} \\ O_{n-2l, 2} & \cdots & O_{n-2l, 2} & O_{n-2l, 2} & O_{n-2l} \end{pmatrix}$$

解答例の続き

幾何学 II 例10.4から $\exp B = P^{-1}UP$ だから $\exp(PBP^{-1}) = U$ が幾何学 II 注意9.12 から得られる. 一方, $P^{-1} = {}^tP$ と ${}^tB = -B$ より

$${}^t(PBP^{-1}) = {}^t(PB{}^tP) = {}^t(PB{}^tP) = {}^t({}^tP){}^tB{}^tP = P(-B){}^tP = -PBP^{-1}$$

だから $PBP^{-1} \in A(n)$ である. 故に \exp による $A(n)$ の像は $SO(n)$ である.

例題 13.4

$r > 0$ に対し, $D_n(r) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid \|X\| < r\}$ とおき, 整級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ を $L(x)$ とおく. $X \in D_n(1)$ ならば $\exp(L(X)) = E_n + X$, $X \in D_n(\log 2)$ ならば $L(\exp(X) - E_n) = X$ が成り立つことを示せ.

解答例

x の整級数 $L(x)$, $\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ の収束半径はそれぞれ $1, \infty$ である. 任意の複素数 x に対して $\exp x = e^x$ であり, $|x| < 1$ ならば $L(x) = \log(1+x)$ である. $|x| < 1$ ならば $\exp(L(x)) = e^{\log(1+x)} = 1+x$ が成り立つため, x の整級数として $\exp(L(x)) = 1+x$ が成り立つ. 故に例題11.3の(2)から $X \in D_n(1)$ ならば $\exp(L(X)) = E_n + X$ である.

また $|x| < \log 2$ ならば $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} = e^{|x|} - 1 < 1$ であり, このとき $\log(1+(e^x-1)) = x$ だから x の整級数として $L(\exp x - 1) = x$ が成り立つ. 故に $X \in D_n(\log 2)$ ならば例題11.3の(2)から $L(\exp(X) - E_n) = X$ である.

幾何学演習 II

第14回 正則行列の極分解

例題 14.1

0 でない実数 r に対し, 写像 $\rho_r: H^+(n) \rightarrow H^+(n)$ を $\rho_r(A) = \exp(r \log A)$ で定める.

(1) $\rho_r \circ \rho_s = \rho_{rs}$ が成り立つことを示せ.

(2) m を 0 でない整数とするとき, $\rho_{\frac{1}{m}}(A)^m = A$ が成り立つことを示せ.

解答例

(1) すべてのエルミート行列 X に対して $\log(\exp X) = X$ だから, 任意の $A \in H^+(n)$ に対して

$$\begin{aligned}(\rho_r \circ \rho_s)(A) &= \rho_r(\rho_s(A)) = \rho_r(\exp(s \log A)) = \exp(r \log(\exp(s \log A))) \\ &= \exp(rs \log A) = \rho_{rs}(A)\end{aligned}$$

が成り立つ. 故に $\rho_r \circ \rho_s = \rho_{rs}$ である.

(2) 任意の n 次正方行列 A と正の整数 m に対して, $\exp(mA) = (\exp A)^m$ が成り立つことを m による数学的帰納法で示す. $m=1$ の場合は, 主張は明らかに成り立つ.

$\exp(mA) = (\exp A)^m$ が成り立つ仮定すれば, $(mA)A = A(mA)$ だから幾何学 II

命題 10.3 の (1) から次の等式が成り立つ.

解答例の続き

$\exp((m+1)A) = \exp(mA + A) = \exp(mA)\exp A = (\exp A)^m(\exp A) = (\exp A)^{m+1}$
 $\exp(0A) = \exp O = E_n = (\exp A)^0$ だから $m=0$ の場合も $\exp(mA) = (\exp A)^m$ が成り立つ。 m が負の整数の場合, $-m$ は正の整数だから, 上で示したことによつて $\exp((-m)A) = (\exp A)^{-m}$ である。また, 正則行列 X と正の整数 k に対し, X^{-k} は X^k の逆行列だから $(X^k)^{-1} = X^{-k}$ である。従つて

$\exp(mA) = \exp(-(-m)A) = \exp((-m)A)^{-1} = ((\exp A)^{-m})^{-1} = (\exp A)^m$
である。以上から, 任意の整数 m に対して $\exp(mA) = (\exp A)^m$ が成り立つ。故に,
任意の $A \in H^+(n)$ に対して

$\rho_{\frac{1}{m}}(A)^m = \exp\left(\frac{1}{m} \log A\right)^m = \exp\left(m \cdot \frac{1}{m} \log A\right) = \exp(\log A) = A$
が成り立つ。

例題 14.2

正の実数 a, b と $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ を満たす実数 α, β に対し, $\log \begin{pmatrix} a\alpha^2 + b\beta^2 & (a-b)\alpha\beta \\ (a-b)\alpha\beta & b\alpha^2 + a\beta^2 \end{pmatrix}$ を求めよ。

解答例

$A = \begin{pmatrix} a\alpha^2 + b\beta^2 & (a-b)\alpha\beta \\ (a-b)\alpha\beta & b\alpha^2 + a\beta^2 \end{pmatrix}$ とおくと、次の等式から A の固有値は $a(\alpha^2 + \beta^2)$ と $b(\alpha^2 + \beta^2)$ である。

$$\begin{vmatrix} x - (a\alpha^2 + b\beta^2) & -(a-b)\alpha\beta \\ -(a-b)\alpha\beta & x - (b\alpha^2 + a\beta^2) \end{vmatrix} = x^2 - (a+b)(\alpha^2 + \beta^2)x + ab(\alpha^2 + \beta^2)^2 \\ = (x - a(\alpha^2 + \beta^2))(x - b(\alpha^2 + \beta^2))$$

$$a(\alpha^2 + \beta^2)E_2 - A = (a-b) \begin{pmatrix} \beta^2 & -\alpha\beta \\ -\alpha\beta & \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad b(\alpha^2 + \beta^2)E_2 - A = (b-a) \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix}$$

だから $a \neq b$ ならば $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ はそれぞれ $a(\alpha^2 + \beta^2)$, $b(\alpha^2 + \beta^2)$

に対する A の固有空間の正規直交基底で、 $a = b$ ならば $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$

は $a(\alpha^2 + \beta^2)$ に対する A の固有空間の正規直交基底である。

解答例の続き

故に $P = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ とおけば $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a(\alpha^2 + \beta^2) & 0 \\ 0 & b(\alpha^2 + \beta^2) \end{pmatrix}$ である.

P はユニタリ一行列だから、幾何学 II [補題11.5](#)の(2)より

$$\log A = \log(PP^{-1}APP^{-1}) = P \log(P^{-1}AP)P^{-1}$$

が成り立つため、 $\log A$ は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log(a(\alpha^2 + \beta^2)) & 0 \\ 0 & \log(b(\alpha^2 + \beta^2)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha \log(a(\alpha^2 + \beta^2)) & -\beta \log(b(\alpha^2 + \beta^2)) \\ \beta \log(a(\alpha^2 + \beta^2)) & \alpha \log(b(\alpha^2 + \beta^2)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha^2 \log(a(\alpha^2 + \beta^2)) + \beta^2 \log(b(\alpha^2 + \beta^2)) & \alpha\beta(\log a - \log b) \\ \alpha\beta(\log a - \log b) & \alpha^2 \log(b(\alpha^2 + \beta^2)) + \beta^2 \log(a(\alpha^2 + \beta^2)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

に等しい.

例題 14.3

$a, b, \theta, \varphi \in \mathbf{R}$ に対し

$$A = \begin{pmatrix} (a-b)\cos\theta\cos(\theta-\varphi) + b\cos\varphi & (a-b)\cos\theta\sin(\theta-\varphi) - b\sin\varphi \\ (a-b)\cos\theta\sin(\theta-\varphi) + a\sin\varphi & -(a-b)\cos\theta\cos(\theta-\varphi) + a\cos\varphi \end{pmatrix}$$

とおく. $a, b \neq 0$ のとき A の極分解を求めよ.

解答例

$$AA^* = \begin{pmatrix} a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta & (a^2 - b^2)\cos\theta\sin\theta \\ (a^2 - b^2)\cos\theta\sin\theta & b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \text{ だから, } AA^* \text{ は例題14.2の}$$

解答例の行列 A の a, b, α, β をそれぞれ $a^2, b^2, \cos\theta, \cos\theta$ で置き換えた行列である. $\log x^2 = 2\log|x|$ に注意すれば例題14.2の結果から次が得られる.

$$\log(AA^*) = 2 \begin{pmatrix} \cos^2\theta \log|a| + \sin^2\theta \log|b| & \cos\theta\sin\theta(\log|a| - \log|b|) \\ \cos\theta\sin\theta(\log|a| - \log|b|) & \cos^2\theta \log|b| + \sin^2\theta \log|a| \end{pmatrix}$$

解答例の続き

従って $\frac{1}{2} \log(AA^*)$ は例題14.2の解答例の行列 A の a, b, α, β をそれぞれ $\log|a|, \log|b|, \cos\theta, \cos\theta$ で置き換えた行列だから、 $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおけば P は直交行列で、例題14.2の解答例から $P^{-1}(\frac{1}{2} \log(AA^*))P = \begin{pmatrix} \log|a| & 0 \\ 0 & \log|b| \end{pmatrix}$ がわかる。 $H = \exp(\frac{1}{2} \log(AA^*))$, $U = H^{-1}A$ とおけば (H, U) は A の極分解であり、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} H &= \exp\left(PP^{-1}\left(\frac{1}{2} \log(AA^*)\right)PP^{-1}\right) = P \exp\left(P^{-1}\left(\frac{1}{2} \log(AA^*)\right)P\right)P^{-1} \\ &= P \exp\begin{pmatrix} \log|a| & 0 \\ 0 & \log|b| \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |a| & 0 \\ 0 & |b| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |a| \cos^2\theta + |b| \sin^2\theta & (|a| - |b|) \cos\theta \sin\theta \\ (|a| - |b|) \cos\theta \sin\theta & |b| \cos^2\theta + |a| \sin^2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

解答例の続き

さらに a, b の符号で場合分けをすれば H は次で与えられる.

$$H = \begin{cases} \begin{pmatrix} a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta & (a-b) \cos \theta \sin \theta \\ (a-b) \cos \theta \sin \theta & b \cos^2 \theta + a \sin^2 \theta \end{pmatrix} & a > 0, b > 0 \\ \begin{pmatrix} -a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta & -(a+b) \cos \theta \sin \theta \\ -(a+b) \cos \theta \sin \theta & b \cos^2 \theta - a \sin^2 \theta \end{pmatrix} & a < 0, b > 0 \\ \begin{pmatrix} a \cos^2 \theta - b \sin^2 \theta & (a+b) \cos \theta \sin \theta \\ (a+b) \cos \theta \sin \theta & -b \cos^2 \theta + a \sin^2 \theta \end{pmatrix} & a > 0, b < 0 \\ \begin{pmatrix} -a \cos^2 \theta - b \sin^2 \theta & -(a-b) \cos \theta \sin \theta \\ -(a-b) \cos \theta \sin \theta & -b \cos^2 \theta - a \sin^2 \theta \end{pmatrix} & a < 0, b < 0 \end{cases}$$

解答例の続き

故に $|H| = |ab|$, $H^{-1} = \frac{1}{|ab|} \begin{pmatrix} |b| \cos^2 \theta + |a| \sin^2 \theta & -(|a| - |b|) \cos \theta \sin \theta \\ -(|a| - |b|) \cos \theta \sin \theta & |a| \cos^2 \theta + |b| \sin^2 \theta \end{pmatrix}$

だから U は以下で与えられる.

$$U = \frac{1}{|ab|} \begin{pmatrix} a|b| \cos \theta \cos(\theta - \varphi) + |a|b \sin \theta \sin(\theta - \varphi) & a|b| \cos \theta \sin(\theta - \varphi) - |a|b \sin \theta \cos(\theta - \varphi) \\ a|b| \sin \theta \cos(\theta - \varphi) - |a|b \cos \theta \sin(\theta - \varphi) & a|b| \sin \theta \sin(\theta - \varphi) + |a|b \cos \theta \cos(\theta - \varphi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} & a > 0, b > 0 \\ \begin{pmatrix} -\cos(2\theta - \varphi) & -\sin(2\theta - \varphi) \\ -\sin(2\theta - \varphi) & \cos(2\theta - \varphi) \end{pmatrix} & a < 0, b > 0 \\ \begin{pmatrix} \cos(2\theta - \varphi) & \sin(2\theta - \varphi) \\ \sin(2\theta - \varphi) & -\cos(2\theta - \varphi) \end{pmatrix} & a > 0, b < 0 \\ \begin{pmatrix} -\cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} & a < 0, b < 0 \end{cases}$$

幾何学演習 II

第15回 正規直交化法の応用とCayley変換

K の要素を成分とする n 次上半三角行列で、対角成分がすべて正の実数であるものの全体からなる $M_n(K)$ の部分空間を $T_n^+(K)$ で表す。 $T_n^+(K)$ は正の実数全体 $(0, \infty)$ の n 個の直積空間 $(0, \infty)^n$ と $K^{\frac{n(n-1)}{2}}$ の直積空間と同相であり、 $(0, \infty)$ は \mathbf{R} と同相だから $T_n^+(\mathbf{C})$ は \mathbf{R}^{n^2} と同相で、 $T_n^+(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ と同相である。このことからSchmidtの正規直交化法を使って示される次の結果からも幾何学II **定理12.12**が得られる。

例題 15.1

写像 $\mu_{\mathbf{C}}: U(n) \times T_n^+(\mathbf{C}) \rightarrow GL_n(\mathbf{C})$, $\mu_{\mathbf{R}}: O(n) \times T_n^+(\mathbf{R}) \rightarrow GL_n(\mathbf{R})$ をそれぞれ $\mu_{\mathbf{C}}(U, T) = UT$, $\mu_{\mathbf{R}}(U, T) = UT$ で定めるとき、これらは同相写像であることを示せ。

解答例

$A \in GL_n(K)$ に対し、幾何学II **定理7.13**で示した方法で K^n の基底 Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n を直交化して得られる正規直交基底を w_1, w_2, \dots, w_n とする。 w_j を第 j 列にもつユニタリ行列を A_U で表し、 K^n の基底 w_1, w_2, \dots, w_n から Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n への基底の変換行列を A_T で表す。幾何学II **定理7.13**から基底 Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n から w_1, w_2, \dots, w_n への基底の変換行列は $T_n^+(K)$ に属し、その逆行列が A_T である。

解答例の続き

一方, 対角成分がすべて正の実数である上半三角行列の逆行列も上半三角行列であり, その対角成分はもとの行列の対応する対角成分の逆数になるため, すべて正の実数である. 従って $A_T \in T_n^+(K)$ である.

写像 $\nu_C: GL_n(\mathbf{C}) \rightarrow U(n) \times T_n^+(\mathbf{C})$, $\nu_R: GL_n(\mathbf{R}) \rightarrow O(n) \times T_n^+(\mathbf{R})$ を $\nu_C(A) = (A_U, A_T)$, $\nu_R(A) = (A_U, A_T)$ で定める. $A \in GL_n(K)$ に対し, A_T の (i, j) 成分を t_{ij} , A_U の第 j 列を w_j とすれば $Ae_j = t_{1j}w_1 + t_{2j}w_2 + \cdots + t_{nj}w_n$ が $j = 1, 2, \dots, n$ に対して成り立つため $A = A_U A_T$ である. 故に $\mu_K \circ \nu_K$ は $GL_n(K)$ ($K = \mathbf{C}, \mathbf{R}$) の恒等写像である.

$U \in U(n)$, $T \in T_n^+(K)$ に対し, T の (i, j) 成分を t_{ij} , U の第 j 列を z_j として UT の第 j 列を v_j とおくと $j = 1, 2, \dots, n$ に対して $v_j = t_{1j}z_1 + t_{2j}z_2 + \cdots + t_{jj}z_j$ である. T の逆行列も $T_n^+(K)$ に属するため z_j は $z_j = t'_{1j}v_1 + t'_{2j}v_2 + \cdots + t'_{jj}v_j$ の形に表せるので z_j は v_1, v_2, \dots, v_j で生成される K^n の部分空間に属する. v_1, v_2, \dots, v_n を幾何学 II 定理 7.13 で示した方法で直交化して得られる正規直交基底を w_1, w_2, \dots, w_n として, j による数学的帰納法で $w_j = z_j$ であることを示す.

解答例の続き

K^n の基底 v_1, v_2, \dots, v_n から w_1, w_2, \dots, w_n への基底の変換行列は $T_n^+(K)$ に属するため、その逆行列である w_1, w_2, \dots, w_n から v_1, v_2, \dots, v_n への基底の変換行列も $T_n^+(K)$ に属する。従って $j=1, 2, \dots, n$ に対して s_{jj} が正の実数である $s_{ij} \in K$ で

$$v_j = s_{1j}w_1 + s_{2j}w_2 + \dots + s_{jj}w_j$$

を満たすものがある。 $j=1$ のとき $t_{11}z_1 = v_1 = s_{11}w_1$ であり s_{11} と t_{11} は正の実数で $\|w_1\| = \|z_1\| = 1$ だから $t_{11} = |t_{11}|\|z_1\| = \|t_{11}z_1\| = \|s_{11}w_1\| = |s_{11}|\|w_1\| = s_{11}$ が得られ、これより $w_1 = z_1$ が成り立つ。帰納的に $j=1, 2, \dots, k-1$ に対して $s_{ij} = t_{ij}$ ($i=1, 2, \dots, j$) と $w_j = z_j$ が成り立つと仮定する。 v_1, v_2, \dots, v_k で生成される K^n の部分空間を V_k とすれば w_k は z_k と同様に V_k に属し、 z_1, z_2, \dots, z_{k-1} で生成される部分空間は V_{k-1} に一致する。 $z_1, z_2, \dots, z_k, w_1, w_2, \dots, w_k$ は正規直交系だから w_k と z_k は V_{k-1} の直交補空間 V_{k-1}^\perp に属する。 V_k は K^n の k 次元部分空間で V_{k-1} は V_k の $k-1$ 次元部分空間だから $V_k \cap V_{k-1}^\perp$ は1次元である。故に $w_k, z_k \in V_k \cap V_{k-1}^\perp$ から $w_k = cz_k$ を満たす $c \in K$ がある。 $t_{1k}z_1 + t_{2k}z_2 + \dots + t_{kk}z_k = v_k = s_{1k}w_1 + s_{2k}w_2 + \dots + s_{kk}w_k$ より等式

解答例の続き

$$(t_{1k} - s_{1k})z_1 + (t_{2k} - s_{2k})z_2 + \cdots + (t_{k-1k} - s_{k-1k})z_{k-1} + (t_{kk} - cs_{kk})z_k = \mathbf{0}$$

が成り立つため z_1, z_2, \dots, z_k の1次独立性から $i=1, 2, \dots, k-1$ に対して $s_{ik} = t_{ik}$ と $t_{kk} = cs_{kk}$ が成り立つ. s_{kk} と t_{kk} は正の実数だから c も正の実数になるので $c = |c| \|z_k\| = \|cz_k\| = \|w_k\| = 1$ がわかる. 従ってすべての $i, j=1, 2, \dots, n$ に対して $s_{ij} = t_{ij}$ と $w_j = z_j$ が成り立つため $\nu_K(UT) = (U, T)$ である. これは $\nu_K \circ \mu_K$ が $K = \mathbf{C}$ の場合は $U(n) \times T_n^+(\mathbf{C})$ の恒等写像, $K = \mathbf{R}$ の場合は $O(n) \times T_n^+(\mathbf{R})$ の恒等写像であることを意味する.

μ_K は行列の積を対応させる写像だから連続写像である. $A \in GL_n(K)$ に対して A の列ベクトルを直交化して得られる各ベクトルの成分と A_T の成分は A の成分の間の四則演算と平方根をとることによって得られるため, A の成分の連続関数である.

故に ν_K も連続写像である. 以上から μ_K は同相写像である.

$A \in M_n(\mathbf{C})$ に対し $M_n(\mathbf{C})$ の部分空間 $U(A), S(A)$ を

$$U(A) = \{X \in M_n(\mathbf{C}) \mid \det(E_n + X) \neq 0, X^*AX = A\}$$

$$S(A) = \{Y \in M_n(\mathbf{C}) \mid \det(E_n + Y) \neq 0, Y^*A = -AY\}$$

で定義する. とくに A が n 次単位行列 E_n の場合, $U(E_n)$ は -1 を固有値にもたない n 次ユニタリ行列全体からなり, 幾何学 II [命題8.8](#)の(2)から -1 を固有値にもつ歪エルミート行列は存在しないため, $S(E_n)$ は n 次歪エルミート行列全体の集合に一致することに注意する.

例題 15.2

(1) $X \in U(A), Y \in S(A)$ ならば次の関係式を示せ.

$$(E_n - X)(E_n + X)^{-1} \in S(A), (E_n - Y)(E_n + Y)^{-1} \in U(A)$$

(2) $f: U(A) \rightarrow S(A), g: S(A) \rightarrow U(A)$ をそれぞれ

$$f(X) = (E_n - X)(E_n + X)^{-1}, g(Y) = (E_n - Y)(E_n + Y)^{-1}$$

で定めれば, f と g は互いに逆写像であることを示せ.

解答例

(1) $X \in U(A)$, $Y \in S(A)$ に対し $f(X) = (E_n - X)(E_n + X)^{-1}$, $g(Y) = (E_n - Y)(E_n + Y)^{-1}$ とおくと以下の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}(E_n + X^*)f(X)^*A(E_n + X) &= (E_n + X^*)((E_n - X)(E_n + X)^{-1})^*A(E_n + X) \\ &= (E_n + X^*)((E_n + X)^{-1})^*(E_n - X)^*(A + AX) \\ &= (E_n + X^*)(E_n + X^*)^{-1}(E_n - X^*)(A + AX) \\ &= A + AX - X^*A - X^*AX = AX - X^*A \\ &= -A - X^*A + AX + X^*AX \\ &= -(E_n + X^*)(A - AX) = -(E_n + X^*)A(E_n - X) \\ &= (E_n + X^*)(-Af(X))(E_n + X)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(E_n + Y^*)g(Y)^*Ag(Y)(E_n + Y) &= (E_n + Y^*)((E_n - Y)(E_n + Y)^{-1})^*A(E_n - Y) \\ &= (E_n + Y^*)(E_n + Y^*)^{-1}(E_n - Y^*)(A - AY) \\ &= A - AY - Y^*A + Y^*AY = A + Y^*AY \\ &= A + AY + Y^*A + Y^*AY = (E_n + Y^*)(A + AY) \\ &= (E_n + Y^*)A(E_n + Y)\end{aligned}$$

解答例の続き

$E_n + X, E_n + X^* = (E_n + X)^*, E_n + Y, E_n + Y^* = (E_n + Y)^*$ は正則行列だから、上式から $f(X)^*A = -Af(X)$ と $g(Y)^*Ag(Y) = A$ が得られる. $\det(E_n + X) \neq 0$ ならば

$$\begin{aligned}\det(E_n + (E_n - X)(E_n + X)^{-1}) &= \det((E_n(E_n + X) + (E_n - X))(E_n + X)^{-1}) \\ &= \det(2E_n) \det((E_n + X)^{-1}) = \frac{2^n}{\det(E_n + X)} \neq 0\end{aligned}$$

が成り立つ. 以上から $f(X) \in S(A), g(Y) \in U(A)$ である.

(2) $X \in U(A)$ ならば次の等式が成り立つため $g \circ f$ は $U(A)$ の恒等写像である.

$$\begin{aligned}g(f(X)) &= g((E_n - X)(E_n + X)^{-1}) \\ &= (E_n - (E_n - X)(E_n + X)^{-1})(E_n + (E_n - X)(E_n + X)^{-1})^{-1} \\ &= (E_n(E_n + X) - (E_n - X))(E_n + X)^{-1}(E_n + (E_n - X)(E_n + X)^{-1})^{-1} \\ &= 2X((E_n + (E_n - X)(E_n + X)^{-1})(E_n + X))^{-1} \\ &= 2X((E_n + X) + (E_n - X))^{-1} = 2X(2E_n)^{-1} = X\end{aligned}$$

$Y \in S(A)$ ならば上と全く同じ式変形を行えば $f(g(Y)) = Y$ が得られるので $f \circ g$ は $S(A)$ の恒等写像である.

-1 を固有値にもたない n 次正方行列 X に対して $(E_n - X)(E_n + X)^{-1}$ を対応させる写像を **Cayley変換** という。