位相幾何学ってどんな幾何学？

オイラー数

多面体とは, 有限個の点 (頂点という), 頂点を結ぶ互いに交わらない線分 (辺という) と辺で囲まれた, 穴が空いていない平面 (面という) からなる図形で, 各面の内部は他の面や辺と交わらず, 頂点を含まないもののことをいう.

多面体 X の頂点 (*vertex*) の数を v, 辺 (*edge*) の数を e, 面 (*face*) の数を f とする. X のオイラー数 $\chi(X)$ を

$$\chi(X) = v - e + f$$

で定義する.

まず面の数が 0 である多面体（「世間ではそのような図形は多面体とは呼びません.」とツッコマないように）のオイラー数を調べてみる. 例として「一つにつながっている」漢字のオイラー数を調べれば, 次のようになる.

	一	十	人	大	千	万	天	口	曰	女	年	日	白	百	月	目	自	田	面	亀
頂点の数	2	5	4	6	7	8	8	4	6	8	13	6	8	10	9	8	10	9	15	23
辺の数	1	4	3	5	6	7	7	4	6	8	13	7	9	11	10	10	12	12	19	31
オイラー数	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-2	-2	-3	-4	-8

問題 (1) 一つにつながっている漢字は他に, 九, 才, 上, 下, 久, 木, 本, 生, 缶, 干, 止, 正, 夭, 矢, 走, 丘, 古, 舌, 右, 中, 凹, 凸, 虫, 克, 早, 束, 且, 免, 東, 里, 由, 甲, 申, 串, 曳, 用, 角, 亜などがあるが, これらのオイラー数を求めよ.
(2) オイラー数が -5, -6, -7 や -9 以下になる一つにつながっている漢字はあるか？

n 角形の内部に一つ点をとり, その点と各頂点を結んで結んでできる線分と n 角形の辺からなる図形を P_n とすれば, P_n の頂点の数は $n+1$, 辺の数は $2n$, 面の数は 0 だから, P_n のオイラー数は $-n+1$ であることに注意する.

次に, 正多面体のオイラー数を調べると, 次の表のようになる.

	正四面体	正六面体	正八面体	正十二面体	正二十面体
頂点の数	4	8	6	20	12
辺の数	6	12	12	30	30
面の数	4	6	8	12	20
オイラー数	2	2	2	2	2

また, 正多面体以外の多面体のオイラー数を調べてみると次のようになる.

	n 角形の周囲	n 角形	n 角柱の側面	n 角柱の表面	n 角錐の側面	n 角錐の表面
頂点の数	n	n	$2n$	$2n$	$n+1$	$n+1$
辺の数	n	n	$3n$	$3n$	$2n$	$2n$
面の数	0	1	n	$n+2$	n	$n+1$
オイラー数	0	1	0	2	1	2

以上の例では, 2 つの多面体 X, Y のオイラー数が等しいとき, X を「連続的に変形」すれば Y になることがわかる. 実際, 2 つ以上の離れた部分に分かれない「つながっている」多面体は連結であると言うことにすれば, 次の定理が成り立つことが示される.

定理 1 X, Y を連結な多面体とする. X を「連続的に変形」すれば Y になるとき, $\chi(X) = \chi(Y)$ が成り立つ.

曲面の S が与えられたとき, 連続的に変形すれば, 多面体 X になるとすれば, S のオイラー数 $\chi(S)$ を X のオイラー数 $\chi(X)$ であると定義する. 上の定理によって, このように定義した S のオイラー数は S の連続的な変形のさせ方によらずに一通りに定まる.

例えば, 球面を S^2 で表せば, 球面は連続的に変形して正四面体にできるため, $\chi(S^2) = 2$ である. 次にドーナツ面を T^2 で表すことにし, T^2 のオイラー数を求めてみる.
ドーナツ面は下の図 1 の長方形の上下の辺を貼りあわせ, 左右の辺を貼りあわせてできる曲面だから, この長方形を図 2 のように三角形からなる面に分割すれば, 同じ番号がついている頂点どうし, 辺どうしが張りあわされる.

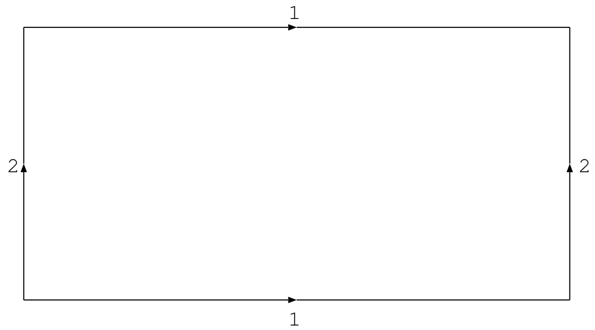

図 1

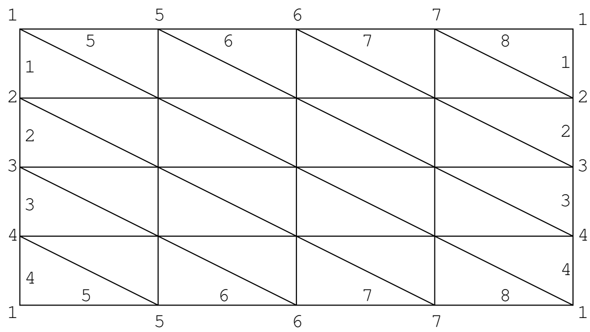

図 2

従って, ドーナツ面を連続的に変形して得られる多面体の頂点の数は 16, 辺の数は 48, 面の数は 32 だから T^2 のオイラー数は, $\chi(T^2) = 16 - 48 + 32 = 0$ である.

長方形の辺の点を対角線の交点に関して対称な点と貼りあわせてできる図形を射影平面と呼んで P^2 で表すことにする. ただし, この曲面は三次元空間の中では作れないことが知られている.

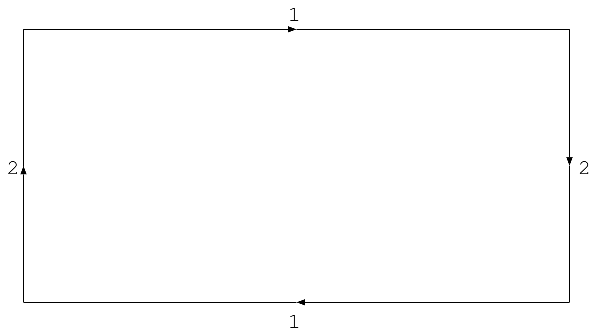

図 3

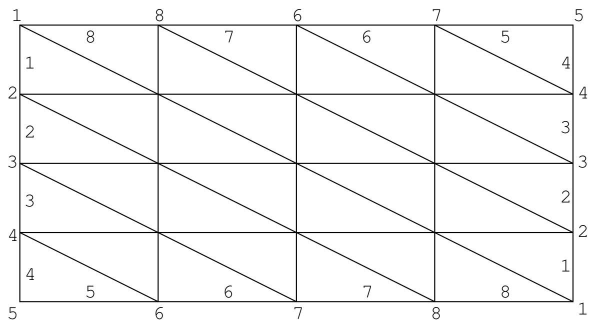

図 4

図 4 から P^2 のオイラー数は, $\chi(P^2) = 17 - 48 + 32 = 1$ である.

また, 図 5 のように長方形の上下の辺はそのまま同じ向きに貼りあわせ, 左右の辺の点は対角線の交点に関して対称な点と貼りあわせてできる図形をクラインの壷と呼んで K で表すことにする. この曲面も三次元空間の中では作れないことが知られている.

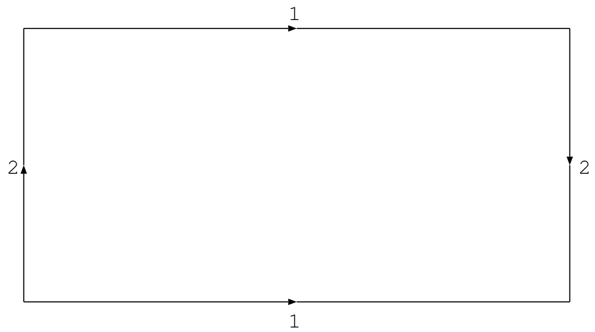

図5

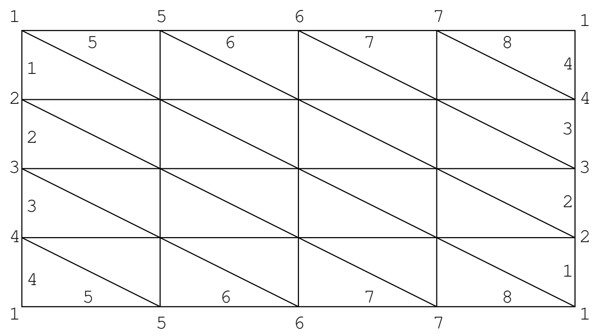

図6

図6から K のオイラー数は $\chi(K) = 16 - 48 + 32 = 0$ である. K はメビウスの帯を 2 つ貼りあわせて得られる曲面でもあることがわかる. 実際, 図7の長方形を 4 の線分の切り離し, B の部分を真下に平行移動して 3 の線分どうしを図8のように張りあわせれば, A の部分と, B と C を合わせた部分が, それぞれメビウスの帯になる.

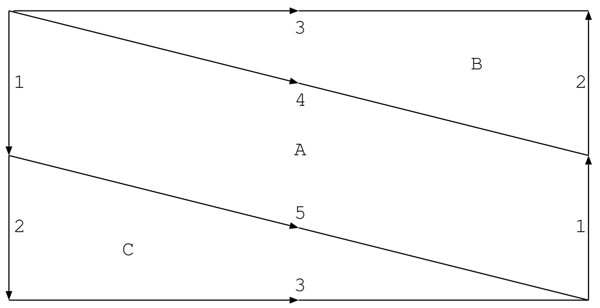

図7

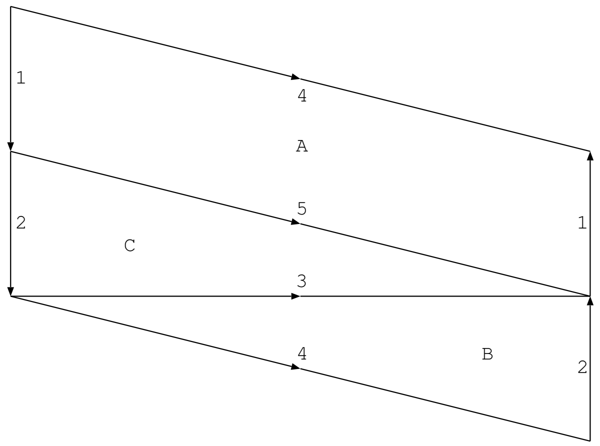

図8

S, T を曲面とするとき, S と T から同じ大きさの円板をくり抜いて穴をあけ, 穴の周囲どうしを貼りあわせて得られる曲面を S と T の連結和といい, $S\#T$ で表す.

S, T を連続的に変形して, すべての面が三角形である多面体 X, Y になったとして, X の頂点の数, 辺の数, 面の数をそれぞれ v_1, e_1, f_1 とし, Y の頂点の数, 辺の数, 面の数をそれぞれ v_2, e_2, f_2 とする. このとき, X と Y の面を一つずつ選んでそれぞれ X, Y から取り除き, 取り除いた三角形の頂点どうしと辺どうし貼りあわせて得られる多面体を Z とすれば, Z は $S\#T$ を連続的に変形させて得られる多面体である.

Z の頂点の数は $v_1 + v_2 - 3$, 辺の数は $e_1 + e_2 - 3$, 面の数は $f_1 + f_2 - 2$ になるため, Z のオイラー数は

$$\chi(Z) = (v_1 + v_2 - 3) - (e_1 + e_2 - 3) + (f_1 + f_2 - 2) = (v_1 - e_1 + f_1) + (v_2 - e_2 + f_2) - 2 = \chi(X) + \chi(Y) - 2$$

である. 曲面のオイラー数の定義から, $\chi(S) = \chi(X)$, $\chi(T) = \chi(Y)$, $\chi(S\#T) = \chi(Z)$ だから, 次の結果が示された.

定理2 S, T を曲面とするとき, $\chi(S\#T) = \chi(S) + \chi(T) - 2$ が成り立つ.

上の結果と, $\chi(T^2) = 0$, $\chi(P^2) = 1$ より, 曲面 S に対して $\chi(S\#T^2) = \chi(S) - 2$, $\chi(S\#P^2) = \chi(S) - 1$ が成り立つ. そこで, n 個のドーナツ面の連結和を X_n で表し, n 個の射影平面の連結和を Y_n で表せば, n による数学的帰納法で $\chi(X_n) = 2 - 2n$, $\chi(Y_n) = 2 - n$ が成り立つことがわかる.

問題 Y_2 を連続的に変形すれば, クラインの壷になることを示せ.