位相幾何学ってどんな幾何学？

1　集合

定義 1.1 思考の対象として「明確な意味」をもつものを要素または元 (*element*) といい, 確定した範囲の要素をひとつにまとめた「集り」を集合 (*set*) と呼ぶ.

例 1.2 (1) すべての実数の集まりは集合であり, $\boldsymbol{R}$ で表す.
(2) 座標平面の点全体の集まりは集合であり, $\boldsymbol{R}^2$ で表す.
(3) 座標平面上で原点までの距離が *1* 以下である点全体からなる集合を D^2 で表し, 単位円板という.
(4) 原点までの距離がちょうど *1* である点全体からなる集合を S^1 で表し, 単位円という.
(5) S^1 の *2* つの点 z と w の対 (z, w) 全体からなる集合を T^2 で表し, *2* 次元トーラスという.

2　空間と空間座標

定義 2.1 空間の各点は *3* つの実数 x, y, z の組 (x, y, z) を用いて表されるため, 空間は *3* つの実数の組 (x, y, z) 全体からなる集合とみなされる. そこで, 空間を $\boldsymbol{R}^3$ で表すことにする. このように, 座標が定められた空間を座標空間と呼び, 空間の点に対応する *3* つの実数の組を, その点の空間座標または単に座標という.

命題 2.2 P, Q を空間の *2* 点とする. P, Q の座標がそれぞれ (x, y, z), (u, v, w) ならば, P と Q の距離は $\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2}$ である.

証明 (u, y, z), (u, v, z) を座標とする点をそれぞれ A, B とすれば, △PAB は PB を斜辺とする直角三角形で, AP と BP の長さはそれぞれ $|x-u|$, $|y-v|$ だから, PB の長さは三平方の定理から $\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$ である. また, △PBQ は PQ を斜辺とする直角三角形で, 上の結果と BQ の長さは $|z-w|$ だから, PQ の長さは三平方の定理から $\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2}$ である. □

3　写像

定義 3.1 (1) X, Y を集合として, X の各要素に対して Y の *1* つの要素を対応させるとき, この対応を X から Y への写像 (*map*) と呼ぶ. このとき, X をこの写像の定義域という.
(2) X から Y への写像 f が与えられたとき, X の各要素 x に対し, f によって対応する Y の要素を $f(x)$ で表し, これを「f による x の像」と呼ぶ.

とくに Y が実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ のとき, X から $\boldsymbol{R}$ への写像を「X で定義された関数」という.

定義 3.2 (1) f を $\boldsymbol{R}$ で定義された関数とする. x が実数全体を動くとき, $\boldsymbol{R}^2$ の点 $(x, f(x))$ 全体からなる集合を f のグラフという.
(2) f を S^1 から S^1 への写像とする. z が S^1 全体を動くとき, T^2 の点 $(z, f(z))$ 全体からなる集合を f のグラフという.

定義 3.3 (1) f を集合 X から集合 Y への写像, g を集合 Y から集合 Z への写像とする. X の各要素 x に対して, Z の要素 $g(f(x))$ を対応させる X から Z への写像を f と g の合成写像と呼んで $g \circ f$ で表す.
(2) 集合 X の各要素 x を x 自身に対応させる, X から X への写像を X の恒等写像と呼び, id_X で表す.
(3) 集合 X から集合 Y への写像 f が, X のすべての要素を Y のある一定の要素 y_0 に写すとき, f を y_0 への定値写像という.

4　複素数

2 乗すれば -1 になる「数」i を考えて, $x+yi$ (x, y は実数) の形に表される「数」を複素数という．そこで, 複素数全体の集合に加法と乗法を

$$(x+yi)+(u+vi)=(x+u)+(y+v)i \qquad (x+yi)(u+vi)=(xu-yv)+(xv+yu)i$$

によって定義する．

複素数 $x+yi$ に座標平面の点 (x,y) を対応させることによって, 複素数全体の集合を座標平面の点全体の集合 $\boldsymbol{R}^2$ とみなすことができる．このとき, 点 (x,y) と原点 $(0,0)$ との距離 $\sqrt{x^2+y^2}$ を, (x,y) に対応する複素数 $z=x+yi$ の絶対値と呼んで $|z|$ で表す．このように, $x+yi$ を (x,y) に対応させることによって, 単位円 S^1 は絶対値が 1 である複素数全体からなる集合とみなされ, 単位円板 D^2 は絶対値が 1 以下である複素数全体からなる集合とみなされる．

命題 4.1　複素数 z, w に対して次の不等式と等式が成り立つ;　(1) $|z+w| \leqq |z|+|w|$　(2) $|zw|=|z||w|$

証明　$z=x+yi$, $w=u+vi$ (x, y, u, v は実数) とする．

(1) $|z+w|$ と $|z|+|w|$ はともに負でないため, $|z+w|^2 \leqq (|z|+|w|)^2$ を示せばよい．$z+w=(x+u)+(y+v)i$ だから

$$\begin{aligned}(|z|+|w|)^2-|z+w|^2 &= |z|^2+2|z||w|+|w|^2-|z+w|^2\\ &= x^2+y^2+2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{u^2+v^2}+u^2+v^2-\left((x+u)^2+(y+v)^2\right)\\ &= 2\left(\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{u^2+v^2}-(xu+yv)\right)\end{aligned}$$

である．従って $\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{u^2+v^2} \geqq xu+yv$ であることが示されれば結果が得られる．ここで,

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{u^2+v^2}\right)^2-(xu+yv)^2=x^2v^2-2xyuv+y^2u^2=(xv-yu)^2 \geqq 0$$

だから $\left(\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{u^2+v^2}\right)^2 \geqq (xu+yv)^2$ である．この両辺の正の平方根をとれば $\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{u^2+v^2} \geqq |xu+yv|$ が得られ, $|xu+yv| \geqq xu+yv$ だから $\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{u^2+v^2} \geqq xu+yv$ が示された．

(2) $zw=(xu-yv)+(xv+yu)i$ だから,

$$(|zw|)^2=(xu-yv)^2+(xv+yu)^2=x^2u^2+y^2v^2+x^2v^2+y^2u^2=\left(x^2+y^2\right)\left(u^2+v^2\right)=|z|^2|w|^2=(|z||w|)^2$$

であり, $|zw|$ と $|z||w|$ はともに負でないため, 上式の両端の辺の正の平方根を考えれば $|zw|=|z||w|$ が得られる.□

次の事実は, 上の命題の (2) から直ちに分かるが, 以下で非常に重要な役割を果たす．

命題 4.2　z, w が S^1 上にある複素数ならば, それらの積 zw も S^1 上にある．

5　連続写像とホモトピー

直線や単位円 S^1, 単位円板 D^2 のように, 座標平面 $\boldsymbol{R}^2$ の点からなる集合を平面図形と呼び, 座標空間 $\boldsymbol{R}^3$ の点からなる集合を空間図形と呼ぶ．また, 平面図形と空間図形を総称して, 図形と呼ぶことにする．

図形 X から図形 Y への写像 f が与えられているとする．$\boldsymbol{R}^2$ または $\boldsymbol{R}^3$ の 2 点 P と A の間の距離を考えることにより,「X の点 P が X の点 A に近づくとき, $f(\mathrm{P})$ が Y の点 B に近づく」ことを数学的に厳密に定義することができる．このことを

$$\lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{A}} f(\mathrm{P})=\mathrm{B}$$

で表す．

定義 5.1 f を図形 X から図形 Y への写像とする．f が次の条件をみたすとき，f を連続写像という．

$$「X \text{ の任意の点 A に対して } \lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{A}} f(\mathrm{P}) = f(\mathrm{A})」$$

すなわち，連続写像とは X の「近く」の二つ点を Y の「近く」の点に写す写像のことである．

定義 5.2 X を平面図形とするとき，条件「(x, y) は X の点であり，$0 \leqq t \leqq 1$」をみたす空間の点 (x, y, t) 全体からなる集合を「X を底面とする単位柱体」と呼んで，$X \times I$ で表す．

定義 5.3 f, g を平面図形 X から図形 Y への連続写像とする．$X \times I$ から Y への連続写像 H で，次の条件をみたすものがあるとき，f と g はホモトピックであるといい，このことを $f \simeq g$ で表す．

$$「X \text{ の任意の点 } (x, y) \text{ に対し，} H(x, y, 0) = f(x, y) \text{ かつ } H(x, y, 1) = g(x, y)」$$

すなわち，f と g がホモトピックであるとは，f を「連続的に動かして」g と同じ写像にできることをいう．

命題 5.4 S^1 から S^1 への連続写像 f に対して，D^2 から S^1 への連続写像 F で，次の条件を満たすものがあれば，f は定値写像にホモトピックである．

$$「S^1 \text{ の任意の点 P に対し，} F(\mathrm{P}) = f(\mathrm{P}) \text{ をである.}」$$

証明 空間の点 (x, y, t) が単位円柱 $S^1 \times I$ の点ならば，$((1-t)x, (1-t)y)$ は D^2 の点であることに注意して，$S^1 \times I$ から S^1 への写像 H を $H(x, y, t) = F((1-t)x, (1-t)y)$ で定める．このとき，H によって点 $(x, y, 0)$ は $f(x, y)$ に写され，点 $(x, y, 1)$ は x, y によらず定点 $F(0, 0)$ に写される．従って，H によって f は $F(0, 0)$ への定値写像にホモトピックである． □

6 写像度

S^1 から S^1 への連続写像 f に対して，f の写像度と呼ばれる整数 $\deg f$ で，次の (1) から (5) の性質を持つものが定義される．以下では f, g をともに S^1 から S^1 への連続写像とする．

(1) f と g がホモトピックであるためには $\deg f = \deg g$ であることが必要十分である．

(2) f と g の合成写像 $g \circ f$ に関し，$\deg(g \circ f) = (\deg f)(\deg g)$ が成り立つ．

(3) 命題 4.2 を用いて，S^1 から S^1 への写像 $f \cdot g$ を $(f \cdot g)(\mathrm{P}) = f(\mathrm{P})g(\mathrm{P})$ で定義できる．このとき $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$ が成り立つ．

(4) c が S^1 から S^1 のある定点への定値写像ならば $\deg c = 0$ である．

(5) S^1 の恒等写像 id_{S^1} の写像度は $\deg id_{S^1} = 1$ である．

これらの性質から，次の結果が示される．

命題 6.1 n を整数とするとき $p_n(z) = z^n$ で定義される写像 $p_n : S^1 \to S^1$ の写像度は n である．

証明 $n = 0$ の場合 p_0 は定値写像だから，上の性質の (4) から $\deg p_0 = 0$.

$n > 0$ の場合 p_n は S^1 の恒等写像 id_{S^1} を n 回かけたものだから，(3) と (5) から $\deg p_n = n \deg id_{S^1} = n$.

$n < 0$ の場合 $p_n \cdot p_{-n} = p_0$ だから，上の (3) から $\deg p_n + \deg p_{-n} = \deg p_0 = 0$. 一方，上で示したことから，$\deg p_{-n} = -n$ だから $\deg p_n = n$. □

7　応用例

次の定理は「一致点定理」と呼ばれている．

定理 7.1 φ を D^2 から D^2 への連続写像とし，S^1 の各点は φ によって S^1 の点に写されるとする．このとき，S^1 から S^1 への写像 f を $f(\mathrm{P}) = \varphi(\mathrm{P})$ によって定義する．もし，$\deg f$ が 0 でないならば，D^2 から D^2 への任意の連続写像 g に対して，$g(\mathrm{P}_0) = \varphi(\mathrm{P}_0)$ を満たす D^2 の点 P_0 が存在する．

証明 D^2 の任意の点 P に対して，$\varphi(\mathrm{P})$ と $g(\mathrm{P})$ は異なると仮定する．D^2 の各点 P に対し，$g(\mathrm{P})$ を始点として $\varphi(\mathrm{P})$ を通る半直線と S^1 との交点を $\mathrm{X_P}$ とする．そこで，P を $\mathrm{X_P}$ に対応させる D^2 から S^1 への写像を F とすれば，F は連続写像である．P が S^1 上の点ならば，仮定により $\varphi(\mathrm{P})$ も S^1 上の点だから，F の定義によって $F(\mathrm{P}) = \varphi(\mathrm{P}) = f(\mathrm{P})$ である．従って，f は命題 5.4 の仮定を満たすため，命題 5.4 によって f は定値写像とホモトピックである．従って $\deg f$ は定値写像の写像度 0 と等しくなるため，仮定に反する．□

特に，上の定理で φ として，D^2 の恒等写像とすれば，f は S^1 の恒等写像 id_{S^1} だから，写像度の性質の (5) により $\deg f = 1 \neq 0$ が成り立ち，上の定理の仮定が満たされる．よって，「ブラウワーの不動点定理」と呼ばれる次の定理が得られる．

定理 7.2 D^2 から D^2 への任意の連続写像 g に対して，$g(\mathrm{P}_0) = \mathrm{P}_0$ を満たす D^2 の点 P_0 が存在する．

一致点定理のもう一つの応用として「代数学の基本定理」と呼ばれる，次の定理が示される．

定理 7.3 複素数を係数とする n 次代数方程式 $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ に対し，1 と $|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|$ の大きい方を r とおくと，この方程式は絶対値が r 以下である複素数の解を少なくとも一つもつ．

証明 $|z| \leqq r$ ならば，

$$|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \leqq |a_{n-1}||z^{n-1}| + \cdots + |a_1||z| + |a_0| \leqq |a_{n-1}|r^{n-1} + \cdots + |a_1|r + |a_0|$$
$$= r^{n-1}\left(|a_{n-1}| + \cdots + \frac{|a_1|}{r^{n-2}} + \frac{|a_0|}{r^{n-1}}\right) \leqq r^{n-1}(|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|) \leqq r^n$$

だから，D^2 から D^2 への連続写像 g を $g(z) = -\dfrac{1}{r^n}(a_{n-1}(rz)^{n-1} + \cdots + a_1(rz) + a_0)$ で定義する．一方，D^2 から D^2 への連続写像 φ を $\varphi(z) = z^n$ で定義すれば，S^1 の各点は φ によって S^1 の点に写される．S^1 から S^1 への写像 f を $f(\mathrm{P}) = \varphi(\mathrm{P})$ によって定義すれば，命題 6.1 によって $\deg f = n \neq 0$ だから 定理 7.1 により $\varphi(z_0) = g(z_0)$ を満たす D^2 の点 z_0 がある．$\varphi(z_0) = g(z_0)$ の両辺に r^n をかければ

$$(rz_0)^n = -(a_{n-1}(rz_0)^{n-1} + \cdots + a_1(rz_0) + a_0)$$

が得られるため，rz_0 は与えられた方程式の解であり，$|z_0| \leqq 1$ だから，rz_0 の絶対値は r 以下である．□