1　層

定義 1.1　M を位相空間とする. M の各開集合 U に対して集合 $\mathscr{F}(U)$ が対応し, 開集合の包含関係 $U \supset V$ に対して写像 $\rho^U_V : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ が対応していて, $U \supset V \supset W$ ならば $\rho^V_W \circ \rho^U_V = \rho^U_W$ であり, $\rho^U_U = id_{\mathscr{F}(U)}$ が成り立つとき対応 $U \mapsto \mathscr{F}(U)$, $(U \supset V) \mapsto \rho^U_V$ を位相空間 M 上の (集合の) 前層 (presheaf) という.
M 上の前層 $\mathscr{F}$ が M の任意の開集合 U と U の開被覆 $(U_i)_{i \in I}$ に対して次の条件 (1), (2) を満たすとき $\mathscr{F}$ を層 (sheaf) という.

(1) $x, y \in \mathscr{F}(U)$ がすべての $i \in I$ に対し, $\rho^U_{U_i}(x) = \rho^U_{U_i}(y)$ を満たせば $x = y$ である.
(2) 各 $i \in I$ に対し, $x_i \in \mathscr{F}(U_i)$ が与えられていて任意の $i, j \in I$ に対して $\rho^{U_i}_{U_i \cap U_j}(x_i) = \rho^{U_j}_{U_i \cap U_j}(x_j)$ が成り立てば $\rho^U_{U_i}(x) = x_i$ がすべての i に対して成り立つような $x \in \mathscr{F}(U)$ が存在する.

定義 1.2　M 上の (前) 層 $\mathscr{F}$ において, M の各開集合 U に対し $\mathscr{F}(U)$ がアーベル群 (resp. 環, 可換環, k-加群, (k-代数 (k は一定の環)*etc.*) の構造をもち, 各 ρ^U_V がアーベル群 (resp. 環, 可換環, k-加群, k-代数, *etc.*) の準同型写像ならば $\mathscr{F}$ をアーベル群 (resp. 環, 可換環, k-加群, k-代数, *etc.*) の (前) 層という.

注意 1.3　$\mathscr{F}$ が M 上の可換環の (前) 層であるとき, $\mathscr{F}(M)$ に k-代数の構造 $\eta : k \to \mathscr{F}(M)$ を与えれば, M の任意の開集合 U に対して $\rho^M_U \circ \eta : k \to \mathscr{F}(U)$ によって $\mathscr{F}(U)$ は k-代数になり, $\mathscr{F}$ は k-代数の (前) 層になる.

例 1.4　(1) 位相空間 M の開集合 U に対して $\mathscr{C}_M(U)$ を U で定義された実数値連続関数の集合とし, $U \supset V$ のとき写像 $\rho^U_V : \mathscr{C}_M(U) \to \mathscr{C}_M(V)$ を $\rho^U_V(f) = f|_V$ (f の V への制限) により定める. 関数の和, 積, 実数倍により $\mathscr{C}_M(U)$ は可換な $\boldsymbol{R}$-代数の構造をもち, ρ^U_V は $\boldsymbol{R}$-代数の準同型写像だから $\mathscr{C}_M$ は M 上の $\boldsymbol{R}$-代数の層になる.

(2) $\mathscr{F}$ を M 上の前層とし, M の開集合 W に対して W 上の前層 $\mathscr{F}|_W$ を次のように定める. W に含まれる開集合 U に対して $\mathscr{F}|_W(U) = \mathscr{F}(U)$ とし, $W \supset U \supset V$ ならば $\rho^U_V : \mathscr{F}|_W(U) \to \mathscr{F}|_W(V)$ は $\rho^U_V : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ と同じ写像とする. $\mathscr{F}|_W$ を $\mathscr{F}$ の W への制限という. $\mathscr{F}$ が M 上の層ならば $\mathscr{F}|_W$ は W 上の層である. $\mathscr{F}$ がアーベル群 (resp. 環, 可換環, k-加群, k-代数, *etc.*) の (前) 層ならば $\mathscr{F}|_W$ がアーベル群 (resp. 環, 可換環, k-加群, k-代数, *etc.*) の (前) 層である.

集合族 $(X_i)_{i \in I}$ に対し, $\coprod_{i \in I} X_i = \left\{ (x, i) \in \bigcup_{i \in I} X_i \times I \,\middle|\, x \in X_i \right\}$ とおく. このとき, 各 $j \in I$ に対して写像 $\iota_j : X_j \to \coprod_{i \in I} X_i$ を $\iota_j(x) = (x, j)$ で定めれば ι_j は単射で, ι_j によって X_j と ι_j の像を同一視し, X_j を $\coprod_{i \in I} X_i$ の部分集合とみなす.

定義 1.5　$\mathscr{F}$ を M 上の前層とし, $p \in M$ に対し, p を含む M の開集合全体の集合を $\mathscr{V}(p)$ で表すことにする. $\coprod_{U \in \mathscr{V}(p)} \mathscr{F}(U)$ における関係 $\sim_p$ を $f \in \mathscr{F}(U)$, $g \in \mathscr{F}(V)$ に対し,

$$\text{“} f \sim_p g \Leftrightarrow \rho^U_W(f) = \rho^V_W(g) \text{ かつ } W \subset U \cap V \text{ を満たす } W \in \mathscr{V}(p) \text{ がある.”}$$

により定めれば, 同値関係である. この同値関係による $\coprod_{U \in \mathscr{V}(p)} \mathscr{F}(U)$ の商集合を $\mathscr{F}_p$ で表し, $\mathscr{F}$ の p における茎 (stalk) という. 包含写像 $\mathscr{F}(U) \hookrightarrow \coprod_{U \in \mathscr{V}(p)} \mathscr{F}(U)$ と商写像 $\pi^{\mathscr{F}}_p = \pi_p : \coprod_{U \in \mathscr{V}(p)} \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_p$ の合成を ρ^U_p で表すことにする.
$\mathscr{F}$ がアーベル群 (resp. 環, 可換環, k-加群, k-代数, *etc.*) の前層ならば $\mathscr{F}_p$ も自然にアーベル群 (resp. 環, 可換環, k-加群, k-代数, *etc.*) の構造をもち, $\rho^U_p : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_p$ はアーベル群 (resp. 環, 可換環, k-加群, k-代数, *etc.*) の準同型写像になる. 実際, $\alpha, \beta \in \mathscr{F}_p$ に対して $\pi_p(f) = \alpha$, $\pi_p(g) = \beta$ となる $f \in \mathscr{F}(U)$, $g \in \mathscr{F}(V)$ を選び, $\alpha + \beta = \pi_p(\rho^U_{U \cap V}(f) + \rho^V_{U \cap V}(g))$ (resp. $\alpha \cdot \beta = \pi_p(\rho^U_{U \cap V}(f) \cdot \rho^V_{U \cap V}(g))$, $r \cdot \alpha = \pi_p(rf)$ $(r \in R)$) により $\mathscr{F}_p$ の和 (resp. 積, スカラー倍) を定めればよい.

注意 1.6 $\mathscr{F}$ を M 上の前層, W を $p \in M$ の開近傍とすると, 包含写像 $\coprod_{U\in\mathscr{V}(p),U\subset W} \mathscr{F}(U) \to \coprod_{U\in\mathscr{V}(p)} \mathscr{F}(U)$ は全単射 $(\mathscr{F}|_W)_p \to \mathscr{F}_p$ を誘導することが上の定義からわかる.

定義 1.7 (1) $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ を M 上の前層とし, M の各開集合 U に対して写像 $\varphi_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ が与えられていて, $U \supset V$ ならば $\varphi_V \circ \rho_V^U = \rho_V^U \circ \varphi_U$ が成り立つとき写像の族 $\varphi = (\varphi_U)_{U\in\mathcal{O}}$ ($\mathcal{O}$ は M の位相) を $\mathscr{F}$ から $\mathscr{G}$ への射 (morphism) といい, $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ で表す.

(2) $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, $\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ を前層の射とするとき, これらの合成 $\psi\circ\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{H}$ を $(\psi\circ\varphi)_U = \psi_U \circ \varphi_U$ により定義する. また, 各 $\mathscr{F}(U)$ の恒等写像から定まる $id_{\mathscr{F}} = (id_{\mathscr{F}(U)})_{U\in\mathcal{O}} : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ は前層の射で, $\mathscr{F}$ の恒等射という.

(3) $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ がともにアーベル群 (resp. 環, 可換環, k-加群, k-代数, etc.) の前層で, 各 φ_U がアーベル群 (resp. 環, 可換環, k-加群, k-代数, etc.) の準同型写像ならば φ をアーベル群 (resp. 環, 可換環, k-加群, k-代数, etc.) の前層の射という.

(4) $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ を M 上の前層とし, M の各開集合 U に対して $\mathscr{G}(U)$ が $\mathscr{F}(U)$ の部分集合であり, 包含写像 $i_U : \mathscr{G}(U) \to \mathscr{F}(U)$ が前層の射 $i : \mathscr{G} \to \mathscr{F}$ を定めるとき $\mathscr{G}$ を $\mathscr{F}$ の部分前層という. また $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ がともに層であれば $\mathscr{G}$ を $\mathscr{F}$ の部分層という.

$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ を前層の射とするとき φ_U から定まる写像 $\coprod_{U\in\mathscr{V}(p)} \mathscr{F}(U) \to \coprod_{U\in\mathscr{V}(p)} \mathscr{G}(U)$ は同値関係 $\sim_p$ を保つため, すべての $U \in \mathscr{V}(p)$ に対して $\varphi_p \circ \rho_p^U = \rho_p^U \circ \varphi_U$ を満たす写像 $\varphi_p : \mathscr{F}_p \to \mathscr{G}_p$ がただ一つ存在する. $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ がともにアーベル群 (resp. 環, 可換環, k-加群, k-代数, *etc.*) の前層で, φ がアーベル群 (resp. 環, 可換環, k-加群, k-代数, *etc.*) の前層の射ならば φ_p はアーベル群 (resp. 環, 可換環, k-加群, k-代数, *etc.*) の準同型写像になる.

次の命題は容易に示される.

命題 1.8 $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, $\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ を M 上の前層の射とするとき, $p \in M$ に対し, $(\psi\circ\varphi)_p = \psi_p \circ \varphi_p$ が成り立つ.

定義 1.9 (1) M, N を位相空間, $f : M \to N$ を連続写像, $\mathscr{F}$ を M 上の前層とする. N 上の前層 $f_*\mathscr{F}$ を $f_*\mathscr{F}(U) = \mathscr{F}(f^{-1}(U))$, $\rho_V^U = \rho_{f^{-1}(V)}^{f^{-1}(U)}$ により定め, $\mathscr{F}$ の f による順像という. このとき $\mathscr{F}$ が層ならば $f_*\mathscr{F}$ も層である. また $\mathscr{F}$ がアーベル群 (resp. 環, 可換環, k-加群, k-代数, *etc.*) の前層ならば $f_*\mathscr{F}$ もアーベル群 (resp. 環, 可換環, k-加群, k-代数, *etc.*) の前層である.

(2) $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ を M 上の前層の射とするとき, $f_*\varphi : f_*\mathscr{F} \to f_*\mathscr{G}$ を $(f_*\varphi)_U = \varphi_{f^{-1}(U)}$ で定められる写像とする.

注意 1.10 $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, $\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ を M 上の前層の射とするとき, $(g\circ f)_*\mathscr{F} = g_*(f_*\mathscr{F})$ である.

M, N を位相空間, $f : M \to N$ を連続写像, $\mathscr{F}$ を M 上の前層とする. $p \in M$ に対し, $\bar{\iota}_p : \coprod_{W\in\mathscr{V}(f(p))} f_*\mathscr{F}(W) \to \coprod_{Z\in\mathscr{V}(p)} \mathscr{F}(Z)$ を包含写像 $f_*\mathscr{F}(W) = \mathscr{F}(f^{-1}(W)) \hookrightarrow \coprod_{Z\in\mathscr{V}(p)} \mathscr{F}(Z)$ から定まる写像とする. $U, V \in \mathscr{V}(f(p))$ に対し, $\alpha \in f_*\mathscr{F}(U)$, $\beta \in f_*\mathscr{F}(V)$ が $\coprod_{W\in\mathscr{V}(f(p))} f_*\mathscr{F}(W)$ において $\alpha \sim_p \beta$ を満たすとき, $\coprod_{Z\in\mathscr{V}(p)} \mathscr{F}(Z)$ において $\bar{\iota}_p(\alpha) \sim_p \bar{\iota}_p(\beta)$ であるため, $\pi_p \circ \bar{\iota}_p = \iota_p \circ \pi_{f(p)}$ を満たす写像 $\iota_p : (f_*\mathscr{F})_{f(p)} \to \mathscr{F}_p$ がただ 1 つ存在する. このとき $U \in \mathscr{V}(f(p))$ に対し, $\iota_p \circ \rho_{f(p)}^U = \rho_p^{f^{-1}(U)}$ が成り立つことに注意する. $\mathscr{F}$ がアーベル群 (resp. 環, 可換環, k-加群, k-代数, *etc.*) の前層ならば ι_p はアーベル群 (resp. 環, 可換環, k-加群, k-代数, *etc.*) の準同型写像である.

定義 1.11 $\mathscr{F}$ が M 上の可換環の層で, 各 $p \in M$ に対して $\mathscr{F}_p$ が局所環であるとき M と $\mathscr{F}$ の対 $(M, \mathscr{F})$ を局所環付空間という. $\mathfrak{m}_p$, k_p でそれぞれ $\mathscr{F}_p$ の極大イデアル, 剰余体 $\mathscr{F}_p/\mathfrak{m}_p$ を表し, $e_p : \mathscr{F}_p \to k_p$ を射影とする.
$(M, \mathscr{F})$, $(N, \mathscr{G})$ を局所環付空間とする. 連続写像 $f : M \to N$ と可換環の層の射 $\varphi : \mathscr{G} \to f_*\mathscr{F}$ で, 各 $p \in M$ に対し, 合成写像 $\iota_p \circ \varphi_{f(p)} : \mathscr{G}_{f(p)} \to \mathscr{F}_p$ が $\mathscr{G}_{f(p)}$ の極大イデアルを $\mathscr{F}_p$ の極大イデアルの中に写すものの対 (f, φ) を

$(M,\mathscr{F})$ から $(N,\mathscr{G})$ への局所環付空間の射と呼ぶ. $(f,\varphi):(M,\mathscr{F})\to(N,\mathscr{G})$, $(g,\psi):(N,\mathscr{G})\to(L,\mathscr{H})$ を局所環付空間の射とするとき, これらの合成を $(g,\psi)\circ(f,\varphi)=(g\circ f, f_*\psi\circ\varphi)$ により定義する.

例 1.12 位相空間 M に対し, 例 1.4 の層 $\mathscr{C}_M$ を考える. $p\in M$ と $U\in\mathscr{V}(p)$ に対し, 写像 $\varepsilon_{U\,p}:\mathscr{C}_M(U)\to\boldsymbol{R}$ を $\varepsilon_{U\,p}(f)=f(p)$ で定めれば, $\varepsilon_{U\,p}$ は $\boldsymbol{R}$-代数の準同型写像である. $U,V\in\mathscr{V}(p)$ であり, $f\in\mathscr{C}_M(U)$, $g\in\mathscr{C}_M(V)$ が $f\sim_p g$ を満たせば $\varepsilon_{U\,p}(f)=\varepsilon_{V\,p}(g)$ となるため, $\varepsilon_p\circ\rho_p^U=\varepsilon_{U\,p}$ を満たす $\boldsymbol{R}$-代数の全射準同型写像 $\varepsilon_p:\mathscr{C}_{M\,p}\to\boldsymbol{R}$ が定まる. 従って $\operatorname{Ker}\varepsilon_p$ は $\mathscr{D}_p$ の極大イデアルである. $f\in\mathscr{C}_M(U)$ が $\rho_p^U(f)\notin\operatorname{Ker}\varepsilon_p$ を満たせば $f(p)\neq 0$ だから, U に含まれる p の近傍 V で, $f(V)\subset\boldsymbol{R}-\{0\}$ を満たすものがある. このとき, $f|_V$ は $\mathscr{C}_M(V)$ の可逆元だから, $\rho_p^U(f)$ は $\mathscr{C}_{M\,p}$ の可逆元である. 故に, $\mathscr{C}_{M\,p}$ は $\operatorname{Ker}\varepsilon_p$ を唯一の極大イデアルとする局所環であり, $(M,\mathscr{C}_M)$ は局所環付空間である. 従って $\alpha_p\circ e_p=\varepsilon_p$ を満たす同型写像 $\alpha_p:k_p\to\boldsymbol{R}$ がある.

連続写像 $f:M\to N$ に対して $\boldsymbol{R}$-代数の層の射 $f^\sharp:\mathscr{C}_N\to f_*\mathscr{C}_M$ を次のように定める. N の開集合 U と $\varphi\in\mathscr{C}_N(U)$ に対して $f_U^\sharp(\varphi)$ は $x\in f^{-1}(U)$ を $\varphi(f(x))$ に写す $f^{-1}(U)$ 上の関数とする. このとき V が U に含まれる開集合ならば $f_V^\sharp\circ\rho_V^U=\rho_V^U\circ f_U^\sharp$ が成り立つことは容易に確かめられるため, 層の射 $f^\sharp$ が定義される.

$p\in M$ に対して $\iota_p\circ f_{f(p)}^\sharp:\mathscr{C}_{N\,f(p)}\to\mathscr{C}_{M\,p}$ は $\varphi\in\mathscr{C}_N(U)$ $(U\in\mathscr{V}(f(p)))$ で代表される同値類を $\varphi\circ f|_{f^{-1}(U)}\in\mathscr{C}_M(f^{-1}(U))$ で代表される同値類に写し, $\varepsilon_{f^{-1}(U)\,p}\left(\varphi\circ f|_{f^{-1}(U)}\right)=\varphi(f(p))=\varepsilon_{U\,f(p)}(\varphi)$ だから $\varepsilon_p\circ\iota_p\circ f_{f(p)}^\sharp=\varepsilon_{f(p)}$ が成り立つ. 従って $(f,f^\sharp)$ は $(M,\mathscr{C}_M)$ から $(N,\mathscr{C}_N)$ への局所環付空間の射である.

定義 1.13 k を体, R を k-代数である局所環とし, k-代数の準同型写像 $\varepsilon:R\to k$ があるとする. k-上線形な写像 $D:R\to k$ が $a,b\in R$ に対して $D(ab)=D(a)\varepsilon(b)+\varepsilon(a)D(b)$ を満たすとき D を R の ε-微分という. R の ε-微分全体から集合を $\operatorname{Der}_\varepsilon(R)$ で表すと, ε-微分の和, スカラー倍も ε-微分になるため $\operatorname{Der}_\varepsilon(R)$ は k 上のベクトル空間である.

注意 1.14 R を上の定義の条件を満たす局所環とし $\mathfrak{m}$ を R の極大イデアルとすれば, $\varepsilon:R\to k$ は全射だから, $\mathfrak{m}=\operatorname{Ker}\varepsilon$ である.

D を R の ε-微分とするとき $a,b\in\mathfrak{m}$ ならば $D(ab)=0$ だから $p:\mathfrak{m}\to\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ を商写像とすると $\bar{D}\circ p=D|_{\mathfrak{m}}$ を満たす k 上の線形写像 $\bar{D}:\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\to k$ がただ 1 つ存在する.

命題 1.15 定義 1.13 の条件のもとで, $\Theta=\Theta_R:\operatorname{Der}_\varepsilon(R)\to\operatorname{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2,k)$ を $\Theta(D)=\bar{D}$ で定めれば Θ は k 上のベクトル空間の同型写像である.

証明 $\Theta(D)=0$ ならば $D(\mathfrak{m})=\{0\}$ である. 任意の $a\in R$ に対し, $a-e(a)1\in\mathfrak{m}$ だから $D(a-e(a)1)=0$ である. 一方, $D(1)=D(1\cdot 1)=D(1)e(1)+e(1)D(1)=2D(1)$ から $D(1)=0$ となるため上式から $D(a)=0$ である. 従って $D=0$ となるため Θ は単射である. 任意の $\varphi\in\operatorname{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2,k)$ に対し, $D_\varphi:R\to k$ を $D_\varphi(a)=\varphi\circ p(a-e(a)1)$ で定めれば D_φ は R の微分であり, $\Theta(D_\varphi)=\varphi$ が成り立つため Θ は全射である. □

$q:k[\epsilon]/(\epsilon^2)\to k$ を $q(\epsilon)=0$ で定められる k-代数の準同型写像とし, $q\circ\psi=\varepsilon$ を満たす k-代数の準同型写像 $\psi:R\to k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ 全体の集合を $L(R)$ で表す.

命題 1.16 写像 $\psi:R\to k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ は写像 $\psi_0,\psi_1:R\to k$ を用いて $\psi=\psi_0+\epsilon\psi_1$ の形に表せるが, $\psi\in L(R)$ であることと $\psi_0=\varepsilon$ かつ $\psi_1\in\operatorname{Der}_\varepsilon(R)$ であることは同値である. 従って, 対応 $\psi\mapsto\psi_1$ は全単射 $\Xi_R:L(R)\to\operatorname{Der}_\varepsilon(R)$ を与える.

証明 $\psi=\psi_0+\epsilon\psi_1$ ならば $q\circ\psi=q\circ\psi_0$ だから ψ が $q\circ\psi=\varepsilon$ を満たすことと $\psi_0=\varepsilon$ であることは同値である. また $a,b\in R$ に対して $\psi(a)\psi(b)=\psi_0(a)\psi_0(b)+(\psi_1(a)\psi_0(b)+\psi_0(a)\psi_1(b))\epsilon$, $\psi(ab)=\psi_0(ab)+\psi_1(ab)\epsilon$ だから ψ が環の準同型写像であることと ψ_0 が環の準同型写像であり, $\psi_1(ab)=\psi_1(a)\psi_0(b)+\psi_0(a)\psi_1(b)$ が任意の $a,b\in R$ に対して成立することと同値である. □

R, S をともに k-代数である局所環とし, k-代数の準同型写像 $\varepsilon_R : R \to k$ と $\varepsilon_S : S \to k$ が与えられているとする. また, $\mathfrak{m}_R$, $\mathfrak{m}_S$ をそれぞれ R, S の極大イデアルとする. k-代数の準同型写像 $f : R \to S$ が $\varepsilon_S \circ f = \varepsilon_R$ を満たすならば, $f(\mathfrak{m}_R) \subset \mathfrak{m}_S$ であるため, f は k-上の線形写像 $\bar{f} : \mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2 \to \mathfrak{m}_S/\mathfrak{m}_S^2$ を誘導する. そこで $\bar{f}^* : \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_S/\mathfrak{m}_S^2, k) \to \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2, k)$ を $\bar{f}^*(\alpha) = \alpha \circ \bar{f}^*$ で定義する. また, $D \in \mathrm{Der}_{\varepsilon_S}(S)$ に対して $D \circ f \in \mathrm{Der}_{\varepsilon_R}(D)$ であり, $\psi \in L(S)$ に対して $\psi \circ f \in L(R)$ だから $\mathrm{Der}(f) : \mathrm{Der}_{\varepsilon_S}(S) \to \mathrm{Der}_{\varepsilon_R}(R)$ を $\mathrm{Der}(f)(D) = D \circ f$ で定義し, $L(f) : L(S) \to L(R)$ を $L(f)(\psi) = \psi \circ f$ で定義する. このとき, 次のことが容易に確かめられる.

命題 1.17 R, S, T を定義 1.13 の条件を満たす局所環とし, $f : R \to S$, $g : S \to T$ は k-代数の準同型写像で, $\varepsilon_S \circ f = \varepsilon_R$, $\varepsilon_T \circ g = \varepsilon_S$ を満たすとする.

(1) $\mathrm{Der}(g \circ f) = \mathrm{Der}(f)\mathrm{Der}(g)$ が成り立つ. また, R の恒等写像 id_R に対し $\mathrm{Der}(id_R)$ は $\mathrm{Der}_{\varepsilon_R}(R)$ の恒等写像である.

(2) f が同型写像ならば $\mathrm{Der}(f)$ も同型写像である.

(3) 次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccccc}
L(S) & \xrightarrow{\Xi_S} & \mathrm{Der}_{\varepsilon_S}(S) & \xrightarrow{\Theta_S} & \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_S/\mathfrak{m}_S^2, k) \\
\downarrow{\scriptstyle L(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Der}(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}^*} \\
L(R) & \xrightarrow{\Xi_R} & \mathrm{Der}_{\varepsilon_R}(R) & \xrightarrow{\Theta_R} & \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2, k)
\end{array}$$

2 多様体の定義

定義 2.1 位相空間 M に対し. M の開集合 U と U から $\boldsymbol{R}^m$ の開集合 V の上への同相写像 $\varphi : U \to V$ の対 (U, φ) を M の座標近傍という.

$\mathrm{pr}_k : \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}$ を第 k 成分への射影とする.

定義 2.2 M を Hausdorff 空間とし, m, r を負でない整数とする. $\mathscr{C}_M$ の部分層 $\mathscr{D}$ が次の条件を満たすとき $(M, \mathscr{D})$ を m 次元 C^r 級微分可能多様体 (C^r-多様体) という.

(1) 任意の $p \in M$ に対し, M の座標近傍 (U, φ) で次の条件を満たすものが存在する.
  - (i) $p \in U$
  - (ii) $k = 1, 2, \ldots, m$ に対して $\mathrm{pr}_k \circ \varphi \in \mathscr{D}(U)$.
  - (iii) V が U に含まれる開集合で, $f \in \mathscr{D}(V)$ ならば, $F(\boldsymbol{x}) = f(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}))$ で定義される関数 $F : \varphi(V) \to \boldsymbol{R}$ は C^r 級関数である.

(2) M の任意の開集合 U と $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathscr{D}(U)$ および $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ により与えられる写像 $U \to \boldsymbol{R}^n$ の像を含む開集合の上で定義された C^r 級実数値関数 F に対して, $x \mapsto F(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ により与えられる関数は $\mathscr{D}(U)$ に属する.

定義 2.3 $(M, \mathscr{D})$ を m 次元 C^r 級微分可能多様体とし, W を M の開集合とする. このとき $(W, \mathscr{D}|_W)$ も m 次元 C^r 級微分可能多様体であり, これを M の開部分多様体という.

定義 2.4 (U, φ), (V, ψ) を M の座標近傍とする. $U \cap V = \emptyset$ であるか, または $U \cap V \neq \emptyset$ であり, $F(\boldsymbol{x}) = \psi(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}))$ で定義される写像 $F : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ と $G(\boldsymbol{x}) = \varphi(\psi^{-1}(\boldsymbol{x}))$ で定義される写像 $G : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ がともに C^r 級写像であるとき, (U, φ) と (V, ψ) は C^r 級に両立するという.

補題 2.5 $(M, \mathscr{D})$ を m 次元 C^r 級微分可能多様体とする. M の座標近傍 (U, φ) と (V, ψ) が定義 2.2 の条件 (1) の (ii) と (iii) を満たすならば (U, φ) と (V, ψ) は C^r 級に両立する.

証明 $U \cap V \neq \emptyset$ と仮定してよい. $k = 1, 2, \dots, m$ に対して $\mathrm{pr}_k \circ \psi|_{U\cap V} \in \mathscr{D}(U \cap V)$ かつ $\mathrm{pr}_k \circ \varphi|_{U\cap V} \in \mathscr{D}(U \cap V)$ だから $F_k(\boldsymbol{x}) = \mathrm{pr}_k(\psi(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x})))$, $G_k(\boldsymbol{x}) = \mathrm{pr}_k(\varphi(\psi^{-1}(\boldsymbol{x})))$ で定義される関数 $F_k : \varphi(U \cap V) \to \boldsymbol{R}$, $G_k : \psi(U \cap V) \to \boldsymbol{R}$ はともに C^r 級関数である. 一方, $\boldsymbol{x} \in \varphi(U \cap V)$ ならば $\psi(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x})) = (F_1(\boldsymbol{x}), F_2(\boldsymbol{x}), \dots, F_m(\boldsymbol{x}))$, $\boldsymbol{x} \in \psi(U \cap V)$ ならば $\varphi(\psi^{-1}(\boldsymbol{x})) = (G_1(\boldsymbol{x}), G_2(\boldsymbol{x}), \dots, G_m(\boldsymbol{x}))$ だから, $F(\boldsymbol{x}) = \psi(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}))$ で定義される写像 $F : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ と $G(\boldsymbol{x}) = \varphi(\psi^{-1}(\boldsymbol{x}))$ で定義される写像 $G : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ はともに C^r 級写像である. $\square$

定義 2.6 Hausdorff 空間 M の座標近傍系 $((U_i, \varphi_i))_{i\in I}$ で次の条件 (1), (2) を満たすものを, M の C^r 級座標近傍系と呼ぶことにする.

(1) $M = \bigcup_{i\in I} U_i$

(2) 任意の $i, j \in I$ に対して (U_i, φ_i) と (U_j, φ_j) は C^r 級に両立する.

命題 2.7 $(M, \mathscr{D})$ を m 次元 C^r 級微分可能多様体とし, 定義 2.2 の条件 (1) の (ii) と (iii) を満たす M の座標近傍全体からなる集合を $C(\mathscr{D})$ とする.

(1) $((U, \varphi))_{(U,\varphi)\in C(\mathscr{D})}$ は M の C^r 級座標近傍系である.

(2) $C(\mathscr{D})$ の部分集合 I が $M = \bigcup_{(U,\varphi)\in I} U$ を満たせば $((U, \varphi))_{(U,\varphi)\in I}$ は M の C^r 級座標近傍系である.

(3) $C(\mathscr{D})$ の部分集合 I は (2) の条件を満たすとする. M の座標近傍 (U, φ) が, 任意の $(W, \psi) \in I$ と両立すれば $(U, \varphi) \in C(\mathscr{D})$ である.

証明 (1) $((U, \varphi))_{(U,\varphi)\in C(\mathscr{D})}$ が定義 2.6 の (1) の条件を満たすことは定義 2.2 の条件 (1) からわかり, 定義 2.6 の (2) の条件を満たすことは補題 2.5 から明らかである.

(2) $((U, \varphi))_{(U,\varphi)\in C(\mathscr{D})}$ が定義 2.6 の (2) の条件を満たすことは補題 2.5 から明らかである.

(3) $f_k = \mathrm{pr}_k \circ \varphi : U \to \boldsymbol{R}$ とおく. 仮定から任意の $(W, \psi) \in I$ に対して $F_k(\boldsymbol{x}) = f_k(\psi^{-1}(\boldsymbol{x}))$ で定義される $\psi(U \cap W)$ 上の関数 F_k は C^r 級関数である. $g_k = \mathrm{pr}_k \circ \psi : W \to \boldsymbol{R}$ とおけば $g_k|_{U\cap W} \in \mathscr{D}(U \cap W)$ だから定義 2.2 の条件 (2) によって $x \mapsto F_k(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)) = f_k(\psi^{-1}(\psi(x))) = f_k(x)$ で与えられる $U \cap W$ 上の関数は $\mathscr{D}(U \cap W)$ に属し, この関数は $f_k|_{U\cap W}$ に他ならない. 故に $\mathscr{D}$ が $\mathscr{C}_M$ の部分層であることと, $M = \bigcup_{(W,\psi)\in I} W$ から $f_k = \mathrm{pr}_k \circ \varphi \in \mathscr{D}(U)$ であることが導かれる.

V を U に含まれる開集合とし, $f \in \mathscr{D}(V)$ に対して $F(\boldsymbol{x}) = f(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}))$ によって関数 $F : \varphi(V) \to \boldsymbol{R}$ を定義する. 任意の $(W, \psi) \in I$ に対して, $\tau : \varphi(V \cap W) \to \psi(V \cap W)$ を $\tau(\boldsymbol{x}) = \psi(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}))$ で定めれば, 仮定によって τ は C^r 級写像である. また, $\psi(V \cap W)$ 上の関数 G を $G(\boldsymbol{x}) = f(\psi^{-1}(\boldsymbol{x}))$ で定めれば $f \in \mathscr{D}(V)$ であり, (W, ψ) が定義 2.2 の条件 (1) の (ii) と (iii) を満たすことから G は C^r 級関数である. $\boldsymbol{x} \in \varphi(V \cap W)$ ならば $F(\boldsymbol{x}) = f(\psi^{-1}(\psi(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x})))) = G(\tau(\boldsymbol{x}))$ であるため, $F|_{\varphi(V\cap W)}$ は C^r 級関数である. $(\varphi(V \cap W))_{(W,\psi)\in I}$ は $\varphi(V)$ の開被覆だから F は $\varphi(V)$ 上の C^r 級関数である. $\square$

このように, M に C^r 級微分可能多様体の構造 $\mathscr{D}$ が与えられれば, 上の命題の (3) の意味で M の極大な C^r 級座標近傍系 $\Phi_{\mathscr{D}} = ((W, \psi))_{(W,\psi)\in C(\mathscr{D})}$ が定義されるが, 逆に M の C^r 級座標近傍系が与えられれば, 次の命題のようにして C^r 級微分可能多様体が得られる.

命題 2.8 M の C^r 級座標近傍系 $\Phi = ((U_i, \varphi_i))_{i\in I}$ が与えられているとき, M の開集合 U に対し $\mathscr{C}_M(U)$ の部分集合 $\mathscr{D}_\Phi(U)$ を次のように定める.

$$\mathscr{D}_\Phi(U) = \left\{ f \in \mathscr{C}_M(U) \,\middle|\, \text{任意の } i \in I \text{ に対し, } \boldsymbol{x} \mapsto f(\varphi_i^{-1}(\boldsymbol{x})) \text{ で定められる } \varphi_i(U \cap U_i) \text{ 上の関数は } C^r \text{級関数} \right\}$$

このとき, 対応 $U \mapsto \mathscr{D}_\Phi(U)$ は $\mathscr{C}_M$ の部分層 $\mathscr{D}_\Phi$ を定め, $(M, \mathscr{D}_\Phi)$ は m 次元 C^r 級微分可能多様体である.

証明 M の開集合 U, V が $U \supset V$ を満たし, $f \in \mathscr{D}_\Phi(U)$ ならば任意の $i \in I$ と $\boldsymbol{x} \in \varphi_i(V \cap U_i)$ に対して, $f|_V(\varphi_i^{-1}(\boldsymbol{x})) = f(\varphi_i^{-1}(\boldsymbol{x}))$ だから $f|_V \in \mathscr{D}_\Phi(V)$ となるため, $\mathscr{D}_\Phi$ は $\mathscr{C}_M$ の部分前層である.

また, $(V_j)_{j\in J}$ を U の開被覆とし, 各 $j \in J$ に対して $f_j \in \mathscr{D}_\Phi(V_j)$ が与えられていて $j,k \in J$ に対して $f_j|_{V_j\cap V_k} = f_k|_{V_j\cap V_k}$ が成り立つとき, $f \in \mathscr{C}_M(U)$ で, すべての $j \in J$ に対して $f|_{V_j} = f_j$ を満たすものがただ 1 つ存在する. このとき, 任意の $i \in I$ に対して $F_i(\boldsymbol{x}) = f(\varphi_i^{-1}(\boldsymbol{x}))$ で定められる $\varphi_i(U \cap U_i)$ 上の関数 F_i を考えると, 任意の $j \in J$ に対して, $\boldsymbol{x} \in \varphi_i(V_j \cap U_i)$ ならば $F_i(\boldsymbol{x}) = f_j(\varphi_i^{-1}(\boldsymbol{x}))$ であり, $f_j \in \mathscr{D}_\Phi(V_j)$ だから, $F_i|_{\varphi_i(V_j\cap U_i)}$ は $\varphi_i(V_j \cap U_i)$ 上の C^r 級関数である. 故に F_i は $\varphi_i(U \cap U_i)$ 上の C^r 級関数となるため, $f \in \mathscr{D}_\Phi(U)$ である. 従って $\mathscr{D}_\Phi$ は $\mathscr{C}_M$ の部分層である.

任意の $p \in M$ に対して $p \in U_i$ を満たす $i \in I$ をとる. $f_k = \mathrm{pr}_k \circ \varphi_i$ によって U_i 上の関数 $f_1, f_2, \ldots, f_m$ を定める. 任意の $j \in I$ に対して $\boldsymbol{x} \mapsto \varphi_i(\varphi_j^{-1}(\boldsymbol{x}))$ によって定義される $\varphi_j(U_j \cap U_i)$ から $\varphi_i(U_j \cap U_i)$ への写像は C^r 級写像であり, $\boldsymbol{x} \in \varphi_j(U_j \cap U_i)$ に対して $f_k(\varphi_j^{-1}(\boldsymbol{x})) = \mathrm{pr}_k(\varphi_i(\varphi_j^{-1}(\boldsymbol{x})))$ だから, $x \mapsto f_k(\varphi_j^{-1}(\boldsymbol{x}))$ で定められる $\varphi_i(U_j \cap U_i)$ 上の関数は C^r 級関数である. 従って $k = 1, 2, \ldots, m$ に対して $f_k \in \mathscr{D}_\Phi(U_i)$ となるため, (U_i, φ_i) は定義 2.2 の (1) の条件 (ii) を満たす. U_i に含まれる開集合 V に対し, $f \in \mathscr{D}_\Phi(V)$ ならば, $\boldsymbol{x} \mapsto f(\varphi_i^{-1}(\boldsymbol{x}))$ で定義される $\varphi_i(V)$ 上の関数は $\mathscr{D}_\Phi(V)$ の定義によって C^r 級関数である. 従って (U_i, φ_i) は定義 2.2 の (1) の条件 (iii) も満たす.

M の任意の開集合 U と $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathscr{D}_\Phi(U)$ および $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ により与えられる写像 $U \to \boldsymbol{R}^n$ の像を含む開集合の上で定義された C^r 級実数値関数 F に対して, $x \mapsto F(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ により与えられる関数を g とする. 任意の $i \in I$ と $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $g_k(\boldsymbol{x}) = f_k(\varphi_i^{-1}(\boldsymbol{x}))$ で定義される $\varphi_i(U \cap U_i)$ 上の関数は C^r 級であり, $\boldsymbol{x} \in \varphi_i(U \cap U_i)$ に対し, $g(\varphi_i^{-1}(\boldsymbol{x})) = F(g_1(\boldsymbol{x}), g_2(\boldsymbol{x}), \ldots, g_n(\boldsymbol{x}))$ だから $\boldsymbol{x} \mapsto g(\varphi_i^{-1}(\boldsymbol{x}))$ で定義される $\varphi_i(U \cap U_i)$ 上の関数も C^r 級である. 故に g は $\mathscr{D}_\Phi(U)$ に属するため, $\mathscr{D}_\Phi$ は定義 2.2 の (2) の条件を満たす. □

命題 2.9 $\Phi = ((U_i, \varphi_i))_{i\in I}$ を M の C^r 級座標近傍系とし, M の開集合 U に対して I 部分集合 J は $U \subset \bigcup_{j\in J} U_j$ を満たすとする. このとき, 次の等式が成り立つ.

$$\mathscr{D}_\Phi(U) = \left\{ f \in \mathscr{C}_M(U) \,\middle|\, \text{任意の } j \in J \text{ に対し, } \boldsymbol{x} \mapsto f(\varphi_j^{-1}(\boldsymbol{x})) \text{ で定められる } \varphi_j(U \cap U_j) \text{ 上の関数は } C^r \text{級関数} \right\}$$

証明 証明すべき等式の右辺を $\mathscr{D}'_\Phi(U)$ とおけば, $\mathscr{D}_\Phi(U) \subset \mathscr{D}'_\Phi(U)$ が成り立つことは明らかである. $f \in \mathscr{D}'_\Phi(U)$ とし, 任意の $i \in I$ に対し, $\boldsymbol{x} \mapsto f(\varphi_i^{-1}(\boldsymbol{x}))$ で定義される $\varphi_i(U \cap U_i)$ 上の関数を F_i とする. $f \in \mathscr{D}'_\Phi(U)$ より $j \in J$ ならば F_j は C^r 級関数であり, (U_i, φ_i) と (U_j, φ_j) が C^r 級に両立するため, $\boldsymbol{x} \mapsto \varphi_j(\varphi_i^{-1}(\boldsymbol{x}))$ で与えられる写像は C^r 級写像である. $j \in J$ に対して $\boldsymbol{x} \in \varphi_i(U \cap U_i \cap U_j)$ ならば $F_i(\boldsymbol{x}) = F_j(\varphi_j(\varphi_i^{-1}(\boldsymbol{x})))$ だから $F_i|_{\varphi_i(U\cap U_i\cap U_j)}$ は C^r 級関数である. さらに $\varphi_i(U \cap U_i) = \bigcup_{j\in J} \varphi_i(U \cap U_i \cap U_j)$ より F_i が C^r 級関数であることがわかる. 従って $f \in \mathscr{D}_\Phi(U)$ となるため $\mathscr{D}'_\Phi(U) \subset \mathscr{D}_\Phi(U)$ が成り立つ. □

例 2.10 U を $\boldsymbol{R}^m$ の開集合とすれば, $\Phi_U = ((U, id_U))$ は U の C^r 級座標近傍系である. そこで, $\mathscr{D}_{\Phi_U} = \mathscr{D}^r_U$ とおけば $(U, \mathscr{D}^r_U)$ は m 次元 C^r 級微分可能多様体であり, V が U に含まれる開集合ならば $\mathscr{D}^r_U(V)$ は V 上の C^r 級関数全体からなる $\boldsymbol{R}$-代数である. とくに $(\boldsymbol{R}^m, \mathscr{D}^r_{\boldsymbol{R}^m})$ は m 次元 C^r 級微分可能多様体であり, $\mathscr{D}^r_{\boldsymbol{R}^m}|_U$ は $\mathscr{D}^r_U$ に一致するため, $(U, \mathscr{D}^r_U)$ は $(\boldsymbol{R}^m, \mathscr{D}^r_{\boldsymbol{R}^m})$ の開部分多様体である.

定義 2.11 $((U_i, \varphi_i))_{i\in I}$, $((V_j, \psi_j))_{j\in J}$ を M の C^r 級座標近傍系とする. 任意の $i \in I$, $j \in J$ に対し, (U_i, φ_i) と (V_j, ψ_j) が C^r 級に両立するとき, $((U_i, \varphi_i))_{i\in I}$ と $((V_j, \psi_j))_{j\in J}$ は両立するという.

命題 2.12 (1) M の C^r 級座標近傍系 $\Phi = ((U_i, \varphi_i))_{i\in I}$ と $\Psi = ((V_j, \psi_j))_{j\in J}$ が両立するならば $\mathscr{D}_\Phi = \mathscr{D}_\Psi$ である.

(2) $\Phi = ((U_i, \varphi_i))_{i\in I}$ を M の C^r 級座標近傍系として, C^r 級微分可能多様体 $(M, \mathscr{D}_\Phi)$ を考える. このとき, 命題 2.7 で定義した M の C^r 級座標近傍系 $\Phi_{\mathscr{D}_\Phi}$ は Φ に含まれる M の座標近傍をすべて含む.

(3) $(M,\mathscr{D})$ を C^r 級微分可能多様体とすれば, $\mathscr{D}_{\Phi_{\mathscr{D}}}=\mathscr{D}$ が成り立つ.

証明 (1) $U_i\cap V_j\neq\emptyset$ を満たす任意の $i\in I$, $j\in J$ に対し, 写像 $\tau_{ij}:\varphi_i(U_i\cap V_j)\to\psi_j(U_i\cap V_j)$ を $\tau_{ij}(\boldsymbol{x})=\psi_j(\varphi_i^{-1}(\boldsymbol{x}))$ で定めれば, τ_{ij} は C^r 級写像であるとき, M の任意の開集合 U に対して $\mathscr{D}_\Phi(U)\supset\mathscr{D}_\Psi(U)$ であることを示せばよい. 任意の $f\in\mathscr{D}_\Psi(U)$ と $j\in J$ に対し, $\psi_j(U\cap V_j)$ 上の関数 F を $\boldsymbol{x}\mapsto f(\psi_j^{-1}(\boldsymbol{x}))$ で定めれば, F は C^r 級関数である. 任意の $i\in I$ に対し $\boldsymbol{x}\mapsto f(\varphi_i^{-1}(\boldsymbol{x}))$ で定められる $\varphi_i(U\cap U_i\cap V_j)$ 上の関数を G とすれば, 任意の $\boldsymbol{x}\in\varphi_i(U\cap U_i\cap V_j)$ に対して $G(\boldsymbol{x})=f(\psi_j^{-1}(\psi_j(\varphi_i^{-1}(\boldsymbol{x}))))=F(\tau_{ij}(\boldsymbol{x}))$ だから G は C^r 級関数である. 従って $f|_{U\cap V_j}\in\mathscr{D}_\Phi(U\cap V_j)$ である. 任意の $k\in J$ に対して $(f|_{U\cap V_j})|_{U\cap V_j\cap V_k}=f|_{U\cap V_j\cap V_k}=(f|_{U\cap V_k})|_{U\cap V_j\cap V_k}$ であり, $\mathscr{D}_\Phi$ が層であることから $g\in\mathscr{D}_\Phi(U)$ で, 任意の $j\in J$ に対して, $g|_{U\cap V_j}=f|_{U\cap V_j}$ を満たすものが存在する. よって, $f=g\in\mathscr{D}_\Phi(U)$ となるため, $\mathscr{D}_\Psi(U)\subset\mathscr{D}_\Phi(U)$ である.

(2) 命題 2.8 の証明でみたように, 任意の $i\in I$ に対して (U_i,φ_i) は定義 2.2 の (1) の条件 (ii) と (iii) を満たすため, (U_i,φ_i) は $\Phi_{\mathscr{D}_\Phi}$ に含まれる.

(3) U を M の任意の開集合とする. $f\in\mathscr{D}_{\Phi_{\mathscr{D}}}(U)$ ならば, 任意の $(V,\varphi)\in C(\mathscr{D})$ に対して $\boldsymbol{x}\mapsto f(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}))$ で定義される $\varphi(U\cap V)$ 上の関数 F は C^r 級関数である. $k=1,2,\dots,m$ に対して $f_k=\mathrm{pr}_k\circ\varphi$ とおけば $f_k\in\mathscr{D}(V)$ であり, $x\in U\cap V$ ならば $F(f_1(x),f_2(x),\dots,f_m(x))=F(\varphi(x))=(f|_{U\cap V})(x)$ だから, 定義 2.2 の条件 (2) により $f|_{U\cap V}\in\mathscr{D}(U\cap V)$ である. 従って, $\mathscr{D}$ が層であることから $f\in\mathscr{D}(U)$ であり, $\mathscr{D}_{\Phi_{\mathscr{D}}}(U)\subset\mathscr{D}(U)$ が得られる.

$f\in\mathscr{D}(U)$ とする. 任意の $(V,\varphi)\in C(\mathscr{D})$ に対して $\boldsymbol{x}\mapsto f(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}))=(f|_{U\cap V})(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}))$ で定義される $\varphi(U\cap V)$ 上の関数を F とすれば, $f|_{U\cap V}\in\mathscr{D}(U\cap V)$ だから定義 2.2 の条件 (1) の (iii) により, F は C^r 級関数である. よって $f\in\mathscr{D}_{\Phi_{\mathscr{D}}}(U)$ となるため, $\mathscr{D}(U)\subset\mathscr{D}_{\Phi_{\mathscr{D}}}(U)$ が得られる. □

命題 2.13 $(M,\mathscr{D})$ を m 次元 C^r 級微分可能多様体, $c\in\boldsymbol{R}$ とする. 常に一定の値 $c\in\boldsymbol{R}$ をとる M 上の定値関数 κ_c は $\mathscr{D}(M)$ に属する.

証明 命題 2.7 の M の C^r 級座標近傍系 $((U_p,\varphi_p))_{p\in M}$ を考える. F_p を $\varphi_p(U_p)$ で定義されて, 常に一定の値 c をとる定値関数とすると, これは C^r 級関数であり, 定義 2.2 の条件 (2) から U_p において常に c の値をとる定値関数 $x\mapsto F_p(\varphi_p(x))=c$ は $\mathscr{D}(U_p)$ の要素である. この関数を f_p で表せば, 任意の $p,q\in M$ に対して $f_p|_{U_p\cap U_q}=f_q|_{U_p\cap U_q}$ であり, $\mathscr{D}$ は層だから, $f\in\mathscr{D}(M)$ で, 任意の $p\in M$ に対して $f|_{U_p}=f_p$ を満たすものがただ 1 つ存在する. このとき $f(p)=f|_{U_p}(p)=f_p(p)=c$ が意の $p\in M$ に対して成り立つため, $\kappa_c=f\in\mathscr{D}(M)$ である. □

上の命題から $\eta(c)=\kappa_c$ によって写像 $\eta:\boldsymbol{R}\to\mathscr{D}(M)$ が定義される.

命題 2.14 $(M,\mathscr{D})$ を m 次元 C^r 級微分可能多様体とすれば $(M,\mathscr{D})$ は局所環付空間であり, 各 $p\in M$ に対して $\mathscr{D}_p$ は $\mathscr{C}_{M\,p}$ の部分 $\boldsymbol{R}$-代数である. 例 1.12 の ε_p の制限も $\varepsilon_p:\mathscr{D}_p\to\boldsymbol{R}$ で表せば, $\boldsymbol{R}$-代数の全射準同型写像で, $\operatorname{Ker}\varepsilon_p=\mathfrak{m}_p$ である. 従って同型写像 $\alpha_p:k_p\to\boldsymbol{R}$ で, $\alpha_p\circ e_p=\varepsilon_p$ を満たすものが存在する.

証明 $A,P:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を $A(x,y)=x+y$, $P(x,y)=xy$ で定めれば, これらは C^r 級関数だから, M の任意の開集合 U と $f,g\in\mathscr{D}(U)$ に対して, 定義 2.2 の条件 (2) から, $x\mapsto A(f(x),g(x))=f(x)+g(x)$, $x\mapsto P(f(x),g(x))=f(x)g(x)$ で与えられる関数は $\mathscr{D}(U)$ に属する. 従って $\mathscr{D}(U)$ は $\mathscr{C}_M(U)$ の部分環であり, $\mathscr{D}$ は可換環の層である. さらに, 合成写像 $\boldsymbol{R}\xrightarrow{\eta}\mathscr{D}(M)\xrightarrow{\rho_U^M}\mathscr{D}(U)$ は環の準同型写像になるため, $\mathscr{D}(U)$ は $\mathscr{C}_M(U)$ の部分 $\boldsymbol{R}$-代数であり, $\mathscr{D}$ は $\boldsymbol{R}$-代数の層である. $I:\coprod_{U\in\mathscr{V}(p)}\mathscr{D}(U)\to\coprod_{U\in\mathscr{V}(p)}\mathscr{C}_M(U)$ を包含写像とすれば, $\pi_p\circ I=\iota_p\circ\pi_{\mathscr{D}_p}$ を満たす $\boldsymbol{R}$-代数の準同型写像 $\iota_p:\mathscr{D}_p\to\mathscr{C}_{M\,p}$ が存在し, $f,g\in\coprod_{U\in\mathscr{V}(p)}\mathscr{D}(U)$ が $\coprod_{U\in\mathscr{V}(p)}\mathscr{C}_M(U)$ において $f\sim_p g$ を満たせば $\coprod_{U\in\mathscr{V}(p)}\mathscr{D}(U)$ においても $f\sim_p g$ だから, ι_p は単射である. 合成写像 $\boldsymbol{R}\xrightarrow{\eta}\mathscr{D}(M)\xrightarrow{\rho_p^M}\mathscr{D}_p\xrightarrow{\varepsilon_p}\boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{R}$ の恒等写像だから, $\varepsilon_p:\mathscr{D}_p\to\boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{R}$-代数の全射準同型写像で, $\operatorname{Ker}\varepsilon_p$ は $\mathscr{D}_p$ の極大イデアルである. $f\in\mathscr{D}(U)$ が

$\rho_p^U(f) \notin \mathrm{Ker}\,\varepsilon_p$ を満たせば $f(p) \neq 0$ だから, U に含まれる p の近傍 V で, $f(V) \subset \boldsymbol{R} - \{0\}$ を満たすものがある. $Q : \boldsymbol{R} - \{0\} \to \boldsymbol{R}$ を $Q(x) = \frac{1}{x}$ で定めれば, Q は C^r 級関数で, $f|_V \in \mathscr{D}(V)$ だから 定義 2.2 の条件 (2) から, $x \mapsto Q(f|_V(x))$ で与えられる関数は $\mathscr{D}(V)$ に属する. この関数を g とすれば, $g(f|_V)$ は $\mathscr{D}(V)$ の単位元だから, $\rho_p^U(f)$ は $\mathscr{D}_p$ の可逆元であることがわかる. 故に, $\mathscr{D}_p$ は局所環である. □

定義 2.15 $(M, \mathscr{D})$, $(N, \mathscr{E})$ を C^r 級微分可能多様体, $f : M \to N$ を連続写像とする. 例 1.12 で定めた層の射 $f^\sharp : \mathscr{C}_N \to f_*\mathscr{C}_M$ が N の任意の開集合 U に対して $f_U^\sharp(\mathscr{E}(U)) \subset f_*\mathscr{D}(U)$ を満たすとき f を C^r 級微分可能写像という. このとき $f^\sharp$ を $\mathscr{C}_N$ の部分層 $\mathscr{E}$ に制限して得られる層の射も $f^\sharp : \mathscr{C}_N \to f_*\mathscr{C}_M$ で表せば $(f, f^\sharp)$ は $(M, \mathscr{D})$ から $(N, \mathscr{E})$ への局所環付空間の射である. $p \in M$ に対して, 合成写像 $\iota_p \circ f_{f(p)}^\sharp : \mathscr{E}_{f(p)} \to \mathscr{D}_p$ を f_p で表すことにする. $f : M \to N$ が C^r 級写像で全単射であるとする. f の逆写像も C^r 級写像であるとき, f を C^r 級同型写像という.

命題 2.16 $(M, \mathscr{D})$, $(N, \mathscr{E})$ を C^r 級微分可能多様体, $f : M \to N$ を C^r 級微分可能写像, $p \in M$ とする.

(1) 次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E}_{f(p)} & \xrightarrow{f_{f(p)}^\sharp} & (f_*\mathscr{D})_{f(p)} \\ \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_{f(p)}} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_p} \\ \boldsymbol{R} & \xleftarrow{\varepsilon_p} & \mathscr{D}_p \end{array}$$

(2) $(K, \mathscr{F})$ を C^r 級微分可能多様体, $g : N \to K$ を C^r 級微分可能写像とすれば $(g \circ f)_p = f_p \circ g_{f(p)}$ である.

(3) f が C^r 級同型写像ならば $f_p : \mathscr{E}_{f(p)} \to \mathscr{D}_p$ は局所環の同型写像である.

証明 (1) 任意の $\alpha \in \mathscr{E}_{f(p)}$ に対して, $\rho_{f(p)}^U(u) = \alpha$ を満たす $f(p)$ の開近傍 U と $u \in \mathscr{E}(U)$ をとれば, $\varepsilon_p \circ \iota_p \circ f_{f(p)}^\sharp(\alpha) = \varepsilon_p \circ \rho_p^{f^{-1}(U)}\left(u \circ f|_{f^{-1}(U)}\right) = u(f(p)) = \varepsilon_{f(p)} \circ \rho_{f(p)}^U(u) = \varepsilon_{f(p)}(\alpha)$.

(2) 任意の $\beta \in \mathscr{F}_{g(f(p))}$ に対して, $\rho_{g(f(p))}^V(v) = \beta$ を満たす $g(f(p))$ の開近傍 V と $v \in \mathscr{F}(V)$ をとれば, $(g \circ f)_p(\beta) = \iota_p \circ (g \circ f)_{(g \circ f)(p)}^\sharp\left(\rho_{(g \circ f)(p)}^V(v)\right) = \rho_p^{(g \circ f)^{-1}(V)}\left(v \circ (g \circ f)|_{(g \circ f)^{-1}(V)}\right)$ であり, 一方 $f_p \circ g_{f(p)}(\beta) = f_p\left(\iota_{f(p)} \circ g_{g(f(p))}^\sharp\left(\rho_{g(f(p))}^V(v)\right)\right) = \iota_p \circ f_{f(p)}^\sharp\left(\rho_{f(p)}^{g^{-1}(V)}\left(v \circ g|_{g^{-1}(V)}\right)\right) = \rho_p^{f^{-1}(g^{-1}(U))}\left(v \circ g|_{g^{-1}(V)} \circ f|_{f^{-1}(g^{-1}(V))}\right)$ となるため, $(g \circ f)|_{(g \circ f)^{-1}(V)} = g|_{g^{-1}(V)} \circ f|_{f^{-1}(g^{-1}(V))}$ より $(g \circ f)_p(\beta) = f_p \circ g_{f(p)}(\beta)$ が得られる.

(3) まず, M の恒等写像 id_M に対して $id_{M\,p}$ は $\mathscr{D}_p$ の恒等写像 $id_{\mathscr{D}_p}$ であることに注意する. $g : N \to M$ を f の逆写像とすれば, g は C^r 級微分可能写像で, $g \circ f = id_M$ だから, (2) の結果から $f_p \circ g_{f(p)} = (g \circ f)_p = id_{M\,p} = id_{\mathscr{D}_p}$ である. 同様に $f \circ g = id_N$ より $g_{f(p)} \circ f_p = g_{f(p)} \circ f_{g(f(p))} = (f \circ g)_{f(p)} = id_{N\,f(p)} = id_{\mathscr{E}_{f(p)}}$ となるため, $g_{f(p)}$ は f_p の逆写像である. □

命題 2.17 M, N を Hausdorff 空間とし, $\Phi = ((U_i, \varphi_i))_{i \in I}$, $\Psi = ((V_j, \psi_j))_{j \in J}$ をそれぞれ M, N の C^r 級座標近傍系とする. 連続写像 $f : M \to N$ と $U_i \cap f^{-1}(V_j) \neq \emptyset$ を満たす $i \in I$, $j \in J$ に対して, 写像 $f_{ij} : \varphi_i(U_i \cap f^{-1}(V_j)) \to \psi_i(V_j)$ を $f_{ij}(\boldsymbol{x}) = \psi_j(f(\varphi_i^{-1}(\boldsymbol{x})))$ で定義する. このとき, 以下の条件は同値である.

(1) f は C^r 級微分可能多様体 $(M, \mathscr{D}_\Phi)$ から $(N, \mathscr{D}_\Psi)$ への C^r 級微分可能写像である.

(2) $U_i \cap f^{-1}(V_j) \neq \emptyset$ を満たす任意の $i \in I$ と $j \in J$ に対して f_{ij} は C^r 級写像である.

(3) 任意の $p \in M$ に対し, $i_p \in I$, $j_p \in J$ で, $p \in U_{i_p} \cap f^{-1}(V_{j_p})$ かつ $f_{i_p j_p}$ は C^r 級写像であるものが存在する.

証明 m, n をそれぞれ M, N の次元とする.

(1) $\Rightarrow$ (2); 命題 2.8 の証明より $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\mathrm{pr}_k \circ \psi_j \in \mathscr{D}_\Psi(V_j)$ だから $\mathrm{pr}_k \circ \psi_j \circ f|_{f^{-1}(V_j)} = f_{V_j}^\sharp(\mathrm{pr}_k \circ \psi) \in f_*\mathscr{D}_\Phi(V_j) = \mathscr{D}_\Phi(f^{-1}(V_j))$ である. これは, $U_i \cap f^{-1}(V_j) \neq \emptyset$ を満たす任意の $i \in I$ に対して $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{pr}_k(\psi_j(f(\varphi_i^{-1}(\boldsymbol{x}))))$ で定義される $\varphi_i(U_i \cap f^{-1}(V_j))$ 上の関数が C^r 級関数であることを意味する. この関数は f_{ij} の第 k 成分だから f_{ij} は C^r 級写像である.

(2) $\Rightarrow$ (3); 明らか.

(3) $\Rightarrow$ (1); V を N の任意の開集合, $g \in \mathscr{D}_\Psi(V)$ とし, $h = f_V^\sharp(g) = g\circ f|_{f^{-1}(V)} \in \mathscr{C}_M(f^{-1}(V)) = f_*\mathscr{C}_M(V)$ とおく. $f^{-1}(V) = \bigcup_{p\in f^{-1}(V)} (U_{i_p} \cap f^{-1}(V_{j_p}) \cap f^{-1}(V))$ より, 任意の $p \in f^{-1}(V)$ に対して $h|_{U_{i_p}\cap f^{-1}(V_{j_p})\cap f^{-1}(V)} \in \mathscr{D}_\Phi(U_{i_p} \cap f^{-1}(V_{j_p}) \cap f^{-1}(V))$ であることを示せば, $\mathscr{D}_\Phi$ が $\mathscr{C}_M$ の部分層であることから $h \in \mathscr{D}_\Phi(f^{-1}(V)) = f_*\mathscr{D}_\Phi(V)$ が得られて主張が示される. 任意の $p \in f^{-1}(V)$ に対して $\boldsymbol{x} \mapsto h(\varphi_{i_p}^{-1}(\boldsymbol{x}))$ によって定義される $\varphi_{i_p}(U_{i_p} \cap f^{-1}(V_{j_p}) \cap f^{-1}(V))$ 上の関数を h_p とし, $\boldsymbol{y} \mapsto g(\psi_{j_p}^{-1}(\boldsymbol{y}))$ で定義される $\psi_{j_p}(U \cap V_j)$ 上の関数を g_p とすれば, $\boldsymbol{x} \in \varphi_{i_p}(U_{i_p} \cap f^{-1}(V_{j_p}) \cap f^{-1}(V))$ に対して $h_p(\boldsymbol{x}) = g(f(\varphi_{i_p}^{-1}(\boldsymbol{x}))) = g_p(f_{i_pj_p}(\boldsymbol{x}))$ が成り立つ. g_p は C^r 級関数であり, 仮定から $f_{i_pj_p}$ は C^r 級写像だから h_p は C^r 級関数である. 従って命題 2.9 によって $h|_{U_{i_p}\cap f^{-1}(V_{j_p})\cap f^{-1}(V)} \in \mathscr{D}_\Phi(U_{i_p} \cap f^{-1}(V_{j_p}) \cap f^{-1}(V))$ である. □

命題 2.18 $(M,\mathscr{D})$ を m 次元 C^r 級微分可能多様体, (U,φ) を M の座標近傍で, 定義 2.2 の条件 (1) の (ii) と (iii) を満たすものとし, φ の像を V とおく.

(1) $\varphi : U \to V$ は M の開部分多様体 $(U,\mathscr{D}|_U)$ から $\boldsymbol{R}^m$ の開部分多様体 $(V,\mathscr{D}_V^r)$ への C^r 級同型写像である.

(2) $p \in U$ ならば $\varphi_p : \mathscr{D}^r_{V\,\varphi(p)} \to \mathscr{D}_p$ は局所環の同型写像である.

証明 (1) 補題 2.7 の (2) により $((U,\varphi))$, $((V,id_V))$ はそれぞれ $(U,\mathscr{D}|_U)$, $(V,\mathscr{D}_V^r)$ の C^r 級座標近傍系であり, $\boldsymbol{x} \mapsto id_V(\varphi(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x})))$, $\boldsymbol{x} \mapsto \varphi(\varphi^{-1}(id_V^{-1}(\boldsymbol{x})))$ で定義される写像はともに V の恒等写像だから C^r 級写像である. 従って, 命題 2.17 により φ と φ^{-1} は C^r 級微分可能写像である.

(2) (1) と命題 2.16 の (3) から明らかである. □

3 接ベクトル空間

$(M,\mathscr{D})$ を C^r 級微分可能多様体とする. $p \in M$ に対し, 集合 $\mathrm{C}(M,p)$ を

$$\mathrm{C}(M,p) = \{\omega : (-a,a) \to M \,|\, a > 0,\ \omega(0) = p, \omega \text{ は } C^r \text{ 級微分可能写像 }\}$$

によって定義する. $\omega \in \mathrm{C}(M,p)$ と p の開近傍 U に対して $D_{U\,\omega} : \mathscr{D}(U) \to \boldsymbol{R}$ を

$$D_{U\,\omega}(f) = \left(f\circ\omega|_{\omega^{-1}(U)}\right)'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\omega(t)) - f(\omega(0))}{t}$$

で定義する. このとき, $D_{U\,\omega}$ は $\boldsymbol{R}$-上線形である.

補題 3.1 U, V を p の開近傍とする. $f \in \mathscr{D}(U)$, $g \in \mathscr{D}(V)$ が $f \sim_p g$ を満たせば, 任意の $\omega \in \mathrm{C}(M,p)$ に対して $D_{U\,\omega}(f) = D_{V\,\omega}(g)$ が成り立つ.

証明 p の開近傍 W が $W \subset U \cap V$ かつ $f|_W = g|_W$ を満たすならば, $\left(f\circ\omega|_{\omega^{-1}(U)}\right)|_{\omega^{-1}(W)}\left(g\circ\omega|_{\omega^{-1}(V)}\right)|_{\omega^{-1}(W)}$ であり, $0 \in \omega^{-1}(W)$ だから, $D_{U\,\omega}(f) = D_{V\,\omega}(g)$ である. □

上の補題から, $D_\omega : \mathscr{D}_p \to \boldsymbol{R}$ で, p の任意の開近傍 U に対して $D_\omega \circ \rho_p^U = D_{U\,\omega}$ を満たす $\boldsymbol{R}$ 上線形な写像がただ 1 つ存在する.

補題 3.2 D_ω は ε_p-微分である.

証明 $\alpha, \beta \in \mathscr{D}_p$ とし p の開近傍 U と $\rho_p^U(f) = \alpha$, $\rho_p^U(g) = \beta$ を満たす $f, g \in \mathscr{D}(U)$ をとる. このとき

$$\begin{aligned}
D_\omega(\alpha\beta) &= D_{U\,\omega}(fg) = \left((fg)\circ\omega|_{\omega^{-1}(U)}\right)'(0) = \left(\left(f\circ\omega|_{\omega^{-1}(U)}\right)\left(g\circ\omega|_{\omega^{-1}(U)}\right)\right)'(0) \\
&= \left(\left(f\circ\omega|_{\omega^{-1}(U)}\right)'(0)\left(g\circ\omega|_{\omega^{-1}(U)}\right)\right)(0) + \left(\left(f\circ\omega|_{\omega^{-1}(U)}\right)(0)\left(g\circ\omega|_{\omega^{-1}(U)}\right)\right)(0) \\
&= D_{U\,\omega}(f)g(p) + f(p)D_{U\,\omega}(g) = D_\omega(\alpha)\varepsilon_p(\beta) + \varepsilon_p(\alpha)D_\omega(\beta)
\end{aligned}$$

だから D_ω は ε_p-微分である. $\square$

上の結果から $\Delta_{M\,p}:\mathrm{C}(M,p)\to \mathrm{Der}_{\varepsilon_p}(\mathscr{D}_p)$ を $\Delta_{M\,p}(\omega)=D_\omega$ で定義することができる.

命題 3.3 $(M,\mathscr{D})$ を m 次元 C^r 級微分可能多様体とする. $p\in M$, $\omega,\chi\in \mathrm{C}(M,p)$ に対して, 次の条件は同値である.

(1) $\Delta_{M\,p}(\omega)=\Delta_{M\,p}(\chi)$

(2) M の座標近傍 (U,φ) が定義 2.2 の条件 (1) の (i) と (ii) を満たせば $\left(\varphi\circ\omega|_{\omega^{-1}(U)}\right)'(0)=\left(\varphi\circ\chi|_{\chi^{-1}(U)}\right)'(0)$ である.

(3) 定義 2.2 の条件 (1) を満たす M の座標近傍 (U,φ) で, $\left(\varphi\circ\omega|_{\omega^{-1}(U)}\right)'(0)=\left(\varphi\circ\chi|_{\chi^{-1}(U)}\right)'(0)$ を満たすものが存在する.

証明 $(1)\Rightarrow(2)$; (U,φ) を定義 2.2 の条件 (1) の (i), (ii) を満たす M の座標近傍とし, $\alpha_k=\rho_p^U(\mathrm{pr}_k\circ\varphi)$ とおく. $\left(\left(\varphi\circ\omega|_{\omega^{-1}(U)}\right)'(0)\text{ の第}\,k\,\text{成分}\right)=\left(\mathrm{pr}_k\circ\varphi\circ\omega|_{\omega^{-1}(U)}\right)'(0)=D_\omega(\alpha_k)=D_\chi(\alpha_k)=\left(\mathrm{pr}_k\circ\varphi\circ\chi|_{\omega^{-1}(U)}\right)'(0)=\left(\left(\varphi\circ\chi|_{\omega^{-1}(U)}\right)'(0)\text{ の第}\,k\,\text{成分}\right)$ が $k=1,2,\dots,m$ に対して成り立つため, (2) の等式が成り立つ.

$(2)\Rightarrow(3)$ は明らかである.

$(3)\Rightarrow(1)$; 任意の $\alpha\in\mathscr{D}_p$ に対して $\rho_p^V(f)=\alpha$ を満たす p の開近傍 V と $f\in\mathscr{D}(V)$ を選ぶ. $f\sim_p f|_{U\cap V}$ だから $V\subset U$ と仮定してよい. このとき, $F(\boldsymbol{x})=f(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}))$ で定義される $\varphi(V)$ 上の関数 F は C^r 級関数である. $t\in\omega^{-1}(V)\cap\chi^{-1}(V)$ ならば $f(\omega(t))=(F\circ(\varphi\circ\omega))(t)$, $f(\chi(t))=(F\circ(\varphi\circ\chi))(t)$ だから, 合成写像の微分法と仮定によって $D_\omega(\alpha)=D_{V\,\omega}(f)=F'(\varphi(p))\left(\varphi\circ\omega|_{\omega^{-1}(U)}\right)'(0)=F'(\varphi(p))\left(\varphi\circ\chi|_{\chi^{-1}(U)}\right)'(0)=D_{V\,\chi}(f)=D_\chi(\alpha)$ となるため, $\Delta_{M\,p}(\omega)=D_\omega=D_\chi=\Delta_{M\,p}(\chi)$ である. $\square$

$(M,\mathscr{D})$, $(N,\mathscr{E})$ を C^r 級微分可能多様体, $f:M\to N$ を C^r 級微分可能写像, $p\in M$ とするとき, $\mathrm{C}(f,p):\mathrm{C}(M,p)\to\mathrm{C}(N,f(p))$ を $\mathrm{C}(f,p)(\omega)=f\circ\omega$ によって定義する.

命題 3.4 $\omega\in\mathrm{C}(M,p)$ に対して $D_{f\circ\omega}=D_\omega\circ f_p$ が成り立つ. 従って, 次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{C}(M,p) & \xrightarrow{\mathrm{C}(f,p)} & \mathrm{C}(N,f(p)) \\
\big\downarrow{\scriptstyle \Delta_{M\,p}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \Delta_{N\,f(p)}} \\
\mathrm{Der}_{\varepsilon_p}(\mathscr{D}_p) & \xrightarrow{\mathrm{Der}(f_p)} & \mathrm{Der}_{\varepsilon_{f(p)}}\left(\mathscr{E}_{f(p)}\right)
\end{array}$$

証明 $\alpha\in\mathscr{E}_{f(p)}$ に対し, $\rho_{f(p)}^U(g)=\alpha$ を満たす $f(p)$ の開近傍 U と $g\in\mathscr{E}(U)$ を選ぶと $f_p(\alpha)=\rho_p^{f^{-1}(U)}\left(g\circ f|_{f^{-1}(U)}\right)$ だから $D_\omega f_p(\alpha)=D_{f^{-1}(U),\omega}\left(g\circ f|_{f^{-1}(U)}\right)=\left(g\circ\left(f|_{f^{-1}(U)}\right)\circ\left(\omega|_{\omega^{-1}(f^{-1}(U))}\right)\right)'(0)=\left(g\circ\left((f\circ\omega)|_{(f\circ\omega)^{-1}(U)}\right)\right)'(0)$ $=D_{f\circ\omega}(\alpha)$ が得られる. $\square$

$\boldsymbol{e}_j$ を第 j 成分が 1 で, 第 j 成分以外の成分がすべて 0 である $\boldsymbol{R}^m$ のベクトルとする.

定理 3.5 $(M,\mathscr{D})$ を m 次元 C^r 級微分可能多様体, $p\in M$ とし, (U,φ) を定義 2.2 の条件 (1) を満たす M の座標近傍とする. a を十分小さくとって $\omega_j:(-a,a)\to M$ $(j=1,2,\dots,m)$ を $\omega_j(t)=\varphi^{-1}(\varphi(p)+t\boldsymbol{e}_j)$ で定める. $\Delta_{M\,p}:\mathrm{C}(M,p)\to\mathrm{Der}_{\varepsilon_p}(\mathscr{D}_p)$ の像は $\Delta_{M\,p}(\omega_1),\Delta_{M\,p}(\omega_2),\dots,\Delta_{M\,p}(\omega_m)$ を基底とする $\mathrm{Der}_{\varepsilon_p}(\mathscr{D}_p)$ の m 次元部分空間である.

証明 $i:U\to M$ を包含写像とすれば, 注意 1.6 によって $i_p:\mathscr{D}_p\to(\mathscr{D}|_U)_p$ は局所環の同型写像である. φ の像を V とすると, 命題 2.18 により $\varphi:U\to V$ は $(U,\mathscr{D}|_U)$ から $(V,\mathscr{D}_V^r)$ への C^r 級同型写像であり, $\varphi(p)=\boldsymbol{p}$ とおくと, 命題 2.18 によって $\varphi_p:\mathscr{D}_{V\,\boldsymbol{p}}^r\to(\mathscr{D}|_U)_p$ は局所環の同型写像である. 従って, 命題 1.17 の (2) によって, $\mathrm{Der}(\varphi_p)$, $\mathrm{Der}(i_p)$ は同型写像である. $\varphi:U\to V$ は C^r 級同型写像だから $C(\varphi,p):\mathrm{C}(U,p)\to\mathrm{C}(V,\boldsymbol{p})$ は全単射であり, 任意の $\omega\in\mathrm{C}(M,p)$ に対して $\Delta_{M\,p}(\omega)=\Delta_{M\,p}\left(i\circ\omega|_{\omega^{-1}(U)}\right)$ だから $\Delta_{M\,p}$ の像は $\Delta_{M\,p}\circ\mathrm{C}(i,p)$ の像と一致する. 命

題 3.4 から下の図は可換であるため, $\mathrm{Der}(i_p)$ は $\Delta_{U\,p}$ の像を $\Delta_{U\,p}$ の像の上に同型に写し, $\mathrm{Der}(\varphi_p)$ は $\Delta_{U\,p}$ の像を $\Delta_{V\,\boldsymbol{p}}$ の像の上に同型に写す.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}(V,\boldsymbol{p}) \arrow[d, "\Delta_{V\,\boldsymbol{p}}"] & \mathrm{C}(U,p) \arrow[l, "C(\varphi,p)"'] \arrow[r, "C(i,p)"] \arrow[d, "\Delta_{U\,p}"] & \mathrm{C}(M,p) \arrow[d, "\Delta_{M\,p}"] \\
\mathrm{Der}_{\varepsilon_{\boldsymbol{p}}}(\mathscr{D}^r_{V\,\boldsymbol{p}}) & \mathrm{Der}_{\varepsilon_p}((\mathscr{D}|_U)_p) \arrow[l, "\mathrm{Der}(\varphi_p)"'] \arrow[r, "\mathrm{Der}(i_p)"] & \mathrm{Der}_{\varepsilon_p}(\mathscr{D}_p)
\end{tikzcd}$$

また, V は $\boldsymbol{p}$ を中心とする半径 a の球を含むとして, $\bar{\omega}_j : (-a,a) \to V$ を $\bar{\omega}_j(t) = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{e}_j$ で定めれば, $\omega_j = i\circ\varphi^{-1}\circ\bar{\omega}_j = \mathrm{C}(i,p)(\varphi^{-1}\circ\bar{\omega}_j)$, $\bar{\omega}_j = \varphi\circ\varphi^{-1}\circ\bar{\omega}_j = \mathrm{C}(\varphi,p)(\varphi^{-1}\circ\bar{\omega}_j)$ が成り立つため, 上の図式の可換性から $\Delta_{M\,p}(\omega_j) = \mathrm{Der}(i_p)\left(\Delta_{U\,p}(\varphi^{-1}\circ\bar{\omega}_j)\right)$, $\Delta_{V\,p}(\bar{\omega}_j) = \mathrm{Der}(\varphi_p)\left(\Delta_{U\,p}(\varphi^{-1}\circ\bar{\omega}_j)\right)$ である. 故に $\Delta_{V\,\boldsymbol{p}}$ の像が $\Delta_{V\,p}(\bar{\omega}_1), \Delta_{V\,p}(\bar{\omega}_2), \dots, \Delta_{V\,p}(\bar{\omega}_m)$ を基底とする $\mathrm{Der}_{\varepsilon_{\boldsymbol{p}}}(\mathscr{D}^r_{V\,\boldsymbol{p}})$ の m 次元部分空間であることを示せばよい.

$\mathrm{pr}_k : V \to \boldsymbol{R}$ を第 k 成分への射影とすれば pr_k は C^r 級関数だから $\mathrm{pr}_k \in \mathscr{D}^r_V(V)$ であり, $\alpha_k = \rho^V_{\boldsymbol{p}}(\mathrm{pr}_k)$ とおくと, $j \neq k$ ならば $D_{\bar{\omega}_j}(\alpha_k) = (\mathrm{pr}_k\circ\bar{\omega}_j)'(0) = 0$, $D_{\bar{\omega}_j}(\alpha_j) = (\mathrm{pr}_j\circ\bar{\omega}_j)'(0) = 1$ である. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \boldsymbol{R}$ で $\lambda_1 D_{\bar{\omega}_1} + \lambda_2 D_{\bar{\omega}_2} + \cdots + \lambda_m D_{\bar{\omega}_m} = 0$ を満たすものが存在すれば, $k = 1, 2, \dots, m$ に対して $\lambda_k = (\lambda_1 D_{\bar{\omega}_1} + \lambda_2 D_{\bar{\omega}_2} + \cdots + \lambda_m D_{\bar{\omega}_m})(\alpha_k) = 0$ となるため $D_{\bar{\omega}_1}, D_{\bar{\omega}_2}, \dots, D_{\bar{\omega}_m}$ は 1 次独立である. 任意の $\omega \in \mathrm{C}(V,\boldsymbol{p})$ に対して, $D_\omega(\alpha_k) = c_k$ とおき, $\chi : (-b,b) \to V$ $\left(b = \frac{a}{\sqrt{c_1^2+c_2^2+\cdots+c_m^2}}\right)$ を $\chi(t) = \boldsymbol{p} + t\sum\limits_{j=1}^m c_j\boldsymbol{e}_j$ で定義すると $\omega'(0) = \sum\limits_{j=1}^m c_j\boldsymbol{e}_j = \chi'(0)$ だから命題 3.3 によって $\Delta_{V\,\boldsymbol{p}}(\omega) = \Delta_{V\,\boldsymbol{p}}(\chi)$ である. また, 任意の $\alpha \in \mathscr{D}^r_{V\,\boldsymbol{p}}$ に対し $\rho^W_{\boldsymbol{p}}(g) = \alpha$ を満たす $\boldsymbol{p}$ の開近傍 W と $g \in \mathscr{D}(W)$ を選ぶと, 合成写像の微分法によって $D_\chi(\alpha) = D_{W\,\chi}(g) = \left(g\circ\chi|_{\chi^{-1}(W)}\right)'(0) = g'(\boldsymbol{p})\chi'(0) = g'(\boldsymbol{p})\left(\sum\limits_{j=1}^m c_j\boldsymbol{e}_j\right) = \sum\limits_{j=1}^m c_j g'(\boldsymbol{p})\boldsymbol{e}_j = \sum\limits_{j=1}^m c_j g'(\boldsymbol{p})\bar{\omega}_j'(0) = \sum\limits_{j=1}^m c_j\left(g\circ\bar{\omega}_j|_{\bar{\omega}_j^{-1}(W)}\right)'(0) = \sum\limits_{j=1}^m c_j D_{W\,\bar{\omega}_j}(g) = \sum\limits_{j=1}^m c_j D_{\bar{\omega}_j}(\alpha)$ だから $\Delta_{V\,\boldsymbol{p}}(\omega) = \Delta_{V\,\boldsymbol{p}}(\chi) = D_\chi = \sum\limits_{j=1}^m c_j D_{\bar{\omega}_j}$ である. 故に $D_{\bar{\omega}_1}, D_{\bar{\omega}_2}, \dots, D_{\bar{\omega}_m}$ は $\Delta_{M\,p}$ の像を生成する. □

注意 3.6 上の定理の条件の下で $x_i : U \to \boldsymbol{R}$ を $x_i = \mathrm{pr}_i\circ\varphi$ で定めれば $x_i \in \mathscr{D}(U)$ であり, $dx_i = \rho^U_p(x_i)$, $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = \Delta_{M\,p}(\omega_j)$ とおけば $x_i(\omega_j(t)) = \mathrm{pr}_i(\varphi(p) + t\boldsymbol{e}_j) = p_i + \delta_{ij}t$ (ただし $\delta_{ii} = 1$, $i \neq j$ ならば $\delta_{ij} = 0$) だから $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p(dx_i) = \delta_{ij}$ が成り立つ.

定義 3.7 $(M,\mathscr{D})$, $(N,\mathscr{E})$ を C^r 級微分可能多様体, $f : M \to N$ を C^r 級微分可能写像, $p \in M$ とする.

(1) $\Delta_{M\,p} : \mathrm{C}(M,p) \to \mathrm{Der}_{\varepsilon_p}(\mathscr{D}_p)$ の像を M の p における接ベクトル空間 (接空間) といい, T_pM で表す.

(2) 命題 3.4 から $\mathrm{Der}(f_p) : \mathrm{Der}_{\varepsilon_p}(\mathscr{D}_p) \to \mathrm{Der}_{\varepsilon_{f(p)}}\left(\mathscr{E}_{f(p)}\right)$ は T_pM を $T_{f(p)}N$ の中に写すため, $v \mapsto \mathrm{Der}(f_p)(v)$ で与えられる T_pM から $T_{f(p)}N$ への写像を f の p における微分といい, $T_p(f) : T_pM \to T_{f(p)}N$ で表す.

命題 1.17 の (1) と命題 2.16 の (2) から次のことがわかる.

命題 3.8 $(M,\mathscr{D})$, $(N,\mathscr{E})$, $(L,\mathscr{F})$ を C^r 級微分可能多様体, $f : M \to N$, $g : N \to L$ を C^r 級微分可能写像, $p \in M$ とすれば $T_p(g\circ f) = T_{f(p)}(g)\circ T_p(f)$ が成り立つ.

m 個の有限開区間の直積である $\boldsymbol{R}^m$ の開集合を開直方体と呼ぶことにする.

補題 3.9 U を $\boldsymbol{R}^m$ の開直方体, f を U 上の C^∞ 級関数とする. $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} \in U$ に対し, U 上の C^∞ 級関数 $f_1, f_2, \dots, f_m$ で, 任意の $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in U$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p}) + \sum\limits_{j=1}^m (x_j - p_j)f_j(\boldsymbol{x})$ を満たすものがある.

証明 $j = 0, 1, \dots, m$ に対して $\boldsymbol{x}_j = \sum\limits_{i=1}^j x_i\boldsymbol{e}_i + \sum\limits_{i=j+1}^m p_i\boldsymbol{e}_i$ とおくと, U が開直方体であることから $\boldsymbol{x}_j \in U$ である. 関数 $g_j : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を $g_j(t) = f(\boldsymbol{x}_{j-1} + t(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_{j-1}))$ で定める. $j = 1, \dots, m$ ならば $\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_{j-1} = (x_j - p_j)\boldsymbol{e}_j$

だから, 合成写像の微分法により $g_j'(t)=(x_j-p_j)\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_{j-1}+t(x_j-p_j)\boldsymbol{e}_j)$ である. 従って, 微分積分学の基本定理から

$$f(\boldsymbol{x}_j)-f(\boldsymbol{x}_{j-1})=g_j(1)-g_j(0)=\int_0^1 g_j'(t)dt=(x_j-p_j)\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_{j-1}+t(x_j-p_j)\boldsymbol{e}_j)dt$$

が得られる. そこで, U 上の関数 f_j を $f_j(\boldsymbol{x})=\displaystyle\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_{j-1}+t(x_j-p_j)\boldsymbol{e}_j)dt$ で定めれば f_j は C^∞ 級関数であり $f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{p})+\sum\limits_{j=1}^m(f(\boldsymbol{x}_j)-f(\boldsymbol{x}_{j-1}))=f(\boldsymbol{p})+\sum\limits_{j=1}^m(x_j-p_j)f_j(\boldsymbol{x})$ が成り立つ. □

注意 3.10 上の補題で f が U 上の C^r 級関数ならば, f_j は C^{r-1} 級関数である.

定理 3.11 $(M,\mathscr{D})$ を m 次元 C^∞ 級微分可能多様体, $p\in M$ とする. $\mathscr{D}_p$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}_p$ とすれば $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ は $\boldsymbol{R}$ 上の m 次元ベクトル空間である.

証明 (U,φ) を定義 2.2 の条件 (1) を満たす M の座標近傍として $\varphi(p)=\boldsymbol{p}$, $\varphi(U)=V$ とおく. 注意 1.6 によって $\mathscr{D}_p$ と $(\mathscr{D}|_U)_p$ は同型な局所環であり, 命題 2.18 の (2) によって $\varphi_p:\mathscr{D}^\infty_{V\boldsymbol{p}}\to\mathscr{D}_p$ は局所環の同型写像である. よって $\mathscr{D}^\infty_{V\boldsymbol{p}}$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}_{\boldsymbol{p}}$ として $\mathfrak{m}_{\boldsymbol{p}}/\mathfrak{m}_{\boldsymbol{p}}^2$ が $\boldsymbol{R}$ 上の m 次元ベクトル空間であることを示せばよい.

$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\\vdots\\p_m\end{pmatrix}$ として $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}\in V$ を x_k-p_k に対応させる V 上の関数を u_k とすれば, $u_k\in\mathscr{D}^\infty_V(V)$ である. そこで $\beta_k=\rho^V_{\boldsymbol{p}}(u_k)$ とおけば $\varepsilon_{\boldsymbol{p}}(\beta_k)=\varepsilon_{V\boldsymbol{p}}(u_k)=u_k(\boldsymbol{p})=0$ だから $\beta_k\in\operatorname{Ker}\varepsilon_{\boldsymbol{p}}=\mathfrak{m}_{\boldsymbol{p}}$ である. そこで, β_k で代表される $\mathfrak{m}_{\boldsymbol{p}}/\mathfrak{m}_{\boldsymbol{p}}^2$ の要素を $\bar\beta_k$ とし, $\bar\beta_1,\bar\beta_2,\dots,\bar\beta_m$ が $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ の基底になることを示す. a を十分小さくとり, $\omega_j:(-a,a)\to V$ を $\omega_j(t)=\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{e}_j$ で定めると,

$$D_{\omega_j}(\beta_k)=D_{V\,\omega_j}(u_k)=(u_k\circ\omega_j)'(0)=u_k'(\boldsymbol{p})\omega_j'(0)={}^t\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_j=\begin{cases}1 & j=k\\0 & j\neq k\end{cases}$$

が成り立つ. $c_1,c_2,\dots,c_m\in\boldsymbol{R}$ に対して $c_1\bar\beta_1+c_2\bar\beta_2+\cdots+c_m\bar\beta_m=0$ が成り立つならば $c_1\beta_1+c_2\beta_2+\cdots+c_m\beta_m\in\mathfrak{m}_{\boldsymbol{p}}^2$ である. D_{ω_j} は $\varepsilon_{\boldsymbol{p}}$-微分だから D_{ω_j} は $\mathfrak{m}_{\boldsymbol{p}}^2$ のすべての要素を 0 に写すため, $D_{\omega_j}(c_1\beta_1+c_2\beta_2+\cdots+c_m\beta_m)=0$ である. 一方, 上の等式から $D_{\omega_j}(c_1\beta_1+c_2\beta_2+\cdots+c_m\beta_m)=c_j$ となるため, $\bar\beta_1,\bar\beta_2,\dots,\bar\beta_m$ は 1 次独立である. 任意の $\bar\gamma\in\mathfrak{m}_{\boldsymbol{p}}/\mathfrak{m}_{\boldsymbol{p}}^2$ に対し, $\bar\gamma$ の代表元を $\gamma\in\mathfrak{m}_{\boldsymbol{p}}$ とする. さらに $\gamma=\rho^W_{\boldsymbol{p}}(f)$ を満たす $\boldsymbol{p}$ を含み, V に含まれる開直方体 W と $f\in\mathscr{D}^\infty_V(W)$ をとれば, $\gamma\in\mathfrak{m}_{\boldsymbol{p}}$ だから $f(\boldsymbol{p})=\varepsilon_{W\boldsymbol{p}}(f)=\varepsilon_{\boldsymbol{p}}(\gamma)=0$ であり, 補題 3.9 により, W 上の C^∞ 級関数 $f_1,f_2,\dots,f_m$ で, 任意の $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}\in W$ に対して $f(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{j=1}^m(x_j-p_j)f_j(\boldsymbol{x})$ を満たすものがある. $g_j(\boldsymbol{x})=f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{p})$ によって W 上の C^∞ 級関数 g_j を定めて, $\gamma_j=\rho^W_{\boldsymbol{p}}(g_j)$ とおけば, $\varepsilon_{\boldsymbol{p}}(\gamma_j)=\varepsilon_{W\boldsymbol{p}}(g_j)=g_j(\boldsymbol{p})=0$ より $\gamma_j\in\mathfrak{m}_{\boldsymbol{p}}$ であり,

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^m f_j(\boldsymbol{p})(x_j-p_j)+\sum_{j=1}^m(x_j-p_j)g_j(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^m f_j(\boldsymbol{p})(u_j|_W)(\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^m(u_j|_W)(\boldsymbol{x})g_j(\boldsymbol{x})$$

が成り立つため, $a_j=f_j(\boldsymbol{p})$ とおけば, $\mathscr{D}^\infty_V(W)$ において, 等式 $f=\sum\limits_{j=1}^m a_j\rho^V_W(u_j)+\sum\limits_{j=1}^m\rho^V_W(u_j)g_j$ が成り立つ. この両辺を $\rho^W_{\boldsymbol{p}}:\mathscr{D}^\infty_V(W)\to\mathscr{D}^\infty_{V\boldsymbol{p}}$ で写せば $\gamma=\sum\limits_{j=1}^m a_j\beta_j+\sum\limits_{j=1}^m\beta_j\gamma_j$ であり, $\beta_j\gamma_j\in\mathfrak{m}_{\boldsymbol{p}}^2$ だから, さらにこの等式の両辺を商写像 $\mathfrak{m}_{\boldsymbol{p}}\to\mathfrak{m}_{\boldsymbol{p}}/\mathfrak{m}_{\boldsymbol{p}}^2$ で写せば $\bar\gamma=\sum\limits_{j=1}^m a_j\bar\beta_j$ が得られる. 故に $\bar\beta_1,\bar\beta_2,\dots,\bar\beta_m$ は $\mathfrak{m}_{\boldsymbol{p}}/\mathfrak{m}_{\boldsymbol{p}}^2$ を生成する. □

$(M,\mathscr{D})$, $(N,\mathscr{E})$ をそれぞれ m 次元, n 次元 C^r 級微分可能多様体, $f:M\to N$ を C^r 級微分可能写像, $p\in M$ とする. U, V はそれぞれ p, $f(p)$ の開近傍で, (U,φ), (V,ψ) は定義 2.2 の条件 (1) の (ii) と (iii) を満たす M,

N の座標近傍とする. $\omega_j \in \mathrm{C}(M,p)$, $\chi_j \in \mathrm{C}(N,f(p))$ を $\omega_j(t)=\varphi^{-1}(\varphi(p)+t\boldsymbol{e}_j)$, $\chi_j(t)=\psi^{-1}(\psi(f(p))+t\boldsymbol{e}_j)$ で定め, $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = \Delta_{M\,p}(\omega_j)$, $\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{f(p)} = \Delta_{N\,f(p)}(\chi_j)$ とおく. さらに, 写像 $f_{\varphi\,\psi}:\varphi(U\cap f^{-1}(V))\to \boldsymbol{R}^n$ を $f_{\varphi\,\psi}(\boldsymbol{x})=\psi(f(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x})))$ で定義する.

命題 3.12 T_pM, $T_{f(p)}N$ の基底 $\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p\right]$, $\left[\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{f(p)}, \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{f(p)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_{f(p)}\right]$ に関する f の p における微分 $T_p(f):T_pM\to T_{f(p)}N$ の表現行列は $f_{\varphi\,\psi}$ の $\varphi(p)$ におけるヤコビ行列に一致する.

証明 $f_{\varphi\,\psi}$ の $\varphi(p)$ におけるヤコビ行列の (i,j) 成分を a_{ij} とすれば, これは $f_{\varphi\,\psi}$ の第 i 成分の関数の j 番目の変数に関する $\varphi(p)$ における偏微分係数だから $t\mapsto \mathrm{pr}_i\circ f_{\varphi\,\psi}(\varphi(p)+t\boldsymbol{e}_j)$ で与えられる関数の 0 における微分係数である. 一方, 与えられた基底に関する $T_p(f)$ の表現行列を (b_{ij}) とすれば, $T_p(f)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) = \sum_{k=1}^n b_{kj}\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)_{f(p)}$ である. $x_i = \mathrm{pr}_i\circ\varphi$, $y_i=\mathrm{pr}_i\circ\psi$ とおき, $dx_i=\rho_p^U(x_i)$, $dy_i=\rho_{f(p)}^V(y_i)$ とおけば, 注意 3.6 と $f_p(dy_i)=\rho_p^{f^{-1}(V)}\left(\mathrm{pr}_i\circ\psi\circ f|_{f^{-1}(V)}\right)$ から $b_{ij}=\left(\sum_{k=1}^n b_{kj}\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)_{f(p)}\right)(dy_i) = \left(T_p(f)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)\right)(dy_i) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\circ f_p\right)(dy_i) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p(f_p(dy_i)) = \left(\mathrm{pr}_i\circ\psi\circ f|_{f^{-1}(V)}\circ\omega_j|_{\omega_j^{-1}(f^{-1}(V))}\right)'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{pr}_i\circ f_{\varphi\,\psi}(\varphi(p)+t\boldsymbol{e}_j)-\mathrm{pr}_i\circ f_{\varphi\,\psi}(\varphi(p))}{t} = a_{ij}$. □

上の命題で, $M=N$, $\mathscr{D}=\mathscr{E}$, $f=id_M$ の場合を考え, $\tau_{\varphi\,\psi}=(id_M)_{\varphi\,\psi}:\varphi(U\cap V)\to\boldsymbol{R}^m$ とおくと, 次の結果が得られる.

系 3.12.1 T_pM の基底 $\left[\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_p\right]$ から $\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p\right]$ への基底の変換行列は $\tau_{\varphi\,\psi}$ の p におけるヤコビ行列に一致する.

4 ファイバー束

定義 4.1 位相空間 G と連続写像 $\mu:G\times G\to G$, $\iota:G\to G$ の組 (G,μ,ι) で次の条件を満たすものを, 位相群という. さらに, G が微分可能多様体で, μ, ι がともに微分可能写像であるとき, (G,μ,ι) を Lie 群という.

(1) $g_1,g_2,g_3\in G$ ならば $\mu(\mu(g_1,g_2),g_3)=\mu(g_1,\mu(g_2,g_3))$.

(2) $e\in G$ で, すべての $g\in G$ に対して $\mu(e,g)=\mu(g,e)=g$ を満たすものがある.

(3) $g\in G$ ならば $\mu(\iota(g),g)=\mu(g,\iota(g))=e$.

定義 4.2 (G,μ,ι) を位相群, X を位相空間とする. 連続写像 $\alpha:G\times X\to X$ で, 次の条件を満たすものを G の X への左作用という.

(1) $g_1,g_2\in G$, $x\in X$ ならば $\alpha(\mu(g_1,g_2),x)=\alpha(g_1,\alpha(g_2,x))$.

(2) $x\in X$ ならば $\alpha(e,x)=x$.

定義 4.3 (G,μ,ι) を位相群, F を位相空間, $\alpha:G\times F\to F$ を G の F への左作用とする. 連続写像 $p:E\to B$ に対し, B の開被覆 $(U_i)_{i\in I}$ で次の条件を満たすものが存在するとき, $(E,B,F;p,\alpha)$ を ファイバー束という.

(1) 任意の $i\in I$ に対し, 同相写像 $\varphi_i:p^{-1}(U_i)\to U_i\times F$ で, $pr_1\circ\varphi_i=p\circ\iota_i$ を満たすものがある. ここで, $pr_1:U_i\times F\to U_i$ は第 1 成分への射影, $\iota_i:p^{-1}(U_i)\to E$ は包含写像を表す.

(2) $U_i\cap U_j\neq\emptyset$ を満たす $i,j\in I$ に対し, 連続写像 $\chi_{ij}:U_i\cap U_j\to G$ で, 任意の $(x,y)\in(U_i\cap U_j)\times F$ に対して $\varphi_j(\varphi_i^{-1}(x,y))=(x,\alpha(\chi_{ij}(x),y))$ を満たすものがある.

命題 4.4 $(U_i)_{i\in I}$ を集合 X の部分集合族とし, 各 $i\in I$ に対し U_i に位相 $\mathcal{O}_i$ が与えられているとする. ここで, $i,j\in I$ に対して $(U_i,\mathcal{O}_i)$ の部分空間としての $U_i\cap U_j$ の位相を $\mathcal{O}_{ij}$ とし, $\bigcup_{i\in I}\mathcal{O}_i$ で生成される X の位相を $\mathcal{O}$ と

する．このとき, 任意の $i, j \in I$ に対して $U_i \cap U_j \in \mathcal{O}_i$ かつ $\mathcal{O}_{ij} = \mathcal{O}_{ji}$ が成り立つならば, 任意の $i \in I$ に対して $(X, \mathcal{O})$ の部分空間としての U_i の位相は $\mathcal{O}_i$ に一致する．

証明 $V \in \mathcal{O}_j$ ならば $V \subset U_j$ であることと $U_i \cap U_j \in \mathcal{O}_j$ であることに注意すれば, $V \cap U_i = V \cap U_i \cap U_j \in \mathcal{O}_{ji} = \mathcal{O}_{ij}$ だから $V' \in \mathcal{O}_i$ で $V \cap U_i = V' \cap U_i \cap U_j$ を満たすものが存在するため, $V \cap U_i \in \mathcal{O}_i$ が成り立つ．従って $s = 1, 2, \cdots, n$ に対し $V_s \in \mathcal{O}_{j_s}$ $(j_s \in I)$ ならば $V_s \cap U_i \in \mathcal{O}_i$ が成り立つため, $\left(\bigcap_{s=1}^{n} V_s\right) \cap U_i = \bigcap_{s=1}^{n} (V_s \cap U_i) \in \mathcal{O}_i$ である．任意の $O \in \mathcal{O}$ は $\bigcap_{s=1}^{n} V_s$ の形の集合の合併で表されるため, 上で示したことから $O \cap U_i \in \mathcal{O}_i$ が得られる．故に $\mathcal{O}_i$ は $(X, \mathcal{O})$ の部分空間としての U_i の位相より強い．一方, $\mathcal{O}_i \subset \mathcal{O}$ だから $(X, \mathcal{O})$ の部分空間としての U_i の位相は $\mathcal{O}_i$ より強いため, $(X, \mathcal{O})$ の部分空間としての U_i の位相は $\mathcal{O}_i$ に一致する． $\square$

(G, μ, ι) を位相群, F を位相空間, $\alpha : G \times F \to F$ を G の F への左作用とする．位相空間 B の開被覆 $(U_i)_{i \in I}$ に対し, $X = \coprod_{i \in I} U_i$ とおき, $f : X \to B$ を, 各 $i \in I$ に対し, 包含写像 $U_i \to B$ で誘導される写像とする．