もう一つの幾何学

― 非ユークリッド幾何学入門 ―

平成 29 年度教員免許更新講習資料

大阪府立大学　山口　睦

1　距離関数と距離空間

集合 X が与えられたとき, X の二つの要素の間の距離を指定するために, 距離関数という概念を定義する

定義 1.1 集合 X の 2 つの要素 x と y の対 (x, y) に対して実数を対応させる関数 d が次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすとき, d を X の距離関数という. 距離関数 d が定義された集合 X を距離空間と呼んで, (X, d) で表す.

(i) 任意の $x, y \in X$ に対し, $d(x, y) \geqq 0$ であり, $d(x, y) = 0$ は $x = y$ と同値である.

(ii) 任意の $x, y \in X$ に対し, $d(x, y) = d(y, x)$ が成り立つ.

(iii) 任意の $x, y, z \in X$ に対し, $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式) が成り立つ.

例 1.2 (1) 実数全体の集合を $\boldsymbol{R}$ で表す. 実数 x, y に対して関数 d_1 を $d_1(x, y) = |x - y|$ によって定めれば, d_1 は $\boldsymbol{R}$ の距離関数である.

(2) 正の実数全体の集合を $\boldsymbol{R}^+$ で表し, a を 1 より大きい実数の定数とする. 正の実数 x, y に対して関数 d_ℓ を $d_\ell(x, y) = |\log_a x - \log_a y|$ によって定めれば, d_ℓ は $\boldsymbol{R}^+$ の距離関数である.

(3) 座標平面を $\boldsymbol{R}^2$ で表す. 座標平面上の点 A の座標が (a, b), B の座標が (c, d) であるとき, 関数 d_2 を $d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ によって定めれば, d_2 は $\boldsymbol{R}^2$ の距離関数である.

以下で (X, d) を距離空間とする. このとき, X の要素を「X の点」という. X の距離関数 d を用いれば,

「X の点列 $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ が X の点 p に限りなく近づく」

という点列の収束の概念が次のように定義される.

定義 1.3 $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ を X の点列, p を X の点とする. 任意の正の実数 ε に対し, 自然数 N で, 条件

「$n \geqq N$ ならば $d(x_n, p) < \varepsilon$」

を満たすものが存在するとき, 点列 $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ は p に収束するといい, このことを $\displaystyle\lim_{n \to \infty} x_n = p$ で表す.

距離空間 (X, d_X) から距離空間 (Y, d_Y) への写像 f と X の点 p, Y の点 q が与えられたとき,

「X の点 x を p に近づけたとき, $f(x)$ は q に限りなく近づく」

という写像の極限の概念が X と Y の距離関数を用いて次のように定義される.

定義 1.4 (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, f を X の部分集合 Z から Y の部分集合 W への写像, p を X の点, q を Y の点とする. 任意の正の実数 ε に対し, 正の実数 δ で, 条件

「$x \in Z$ かつ $0 < d_X(x, p) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), q) < \varepsilon$」

を満たすものが存在するとき, 写像 f の p における極限は q であるといい, これを $\displaystyle\lim_{x \to p} f(x) = q$ で表す.

極限の概念が定義されれば, 距離空間 (X, d_X) から距離空間 (Y, d_Y) への写像 f が

「X の近くの二点を Y の近くの二点に写す」

という連続写像の概念が次のように定義される.

定義 1.5 (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, f を X から Y への写像とする. X の点 p に対し, $\displaystyle\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ が成り立つとき, f は p で連続であるという. f が X のすべての点で連続であるとき, f を連続写像という.

実数 $a < b$ に対し, $\boldsymbol{R}$ の部分集合 (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, ∞), $(-\infty, b)$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ を以下で定める.

(a, b) ： $a < x < b$ を満たす実数 x 全体からなる集合
$[a, b]$ ： $a \leqq x \leqq b$ を満たす実数 x 全体からなる集合
$[a, b)$ ： $a \leqq x < b$ を満たす実数 x 全体からなる集合
$(a, b]$ ： $a < x \leqq b$ を満たす実数 x 全体からなる集合
(a, ∞) ： $x > a$ を満たす実数 x 全体からなる集合
$[a, \infty)$ ： $x \geqq a$ を満たす実数 x 全体からなる集合
$(-\infty, b)$ ： $x < b$ を満たす実数 x 全体からなる集合
$(-\infty, b]$ ： $x \leqq b$ を満たす実数 x 全体からなる集合

上のいずれかのかたちの $\boldsymbol{R}$ の部分集合を $\boldsymbol{R}$ の区間という.

2　距離空間の曲線と直線

集合 X から集合 Y への写像 f が与えられたとき, X の要素 x に対して, Y の要素 $f(x)$ を f による x の像という. x が X の部分集合 A の要素全体を動いたとき, $f(x)$ 全体からなる Y の部分集合を f による A の像といい, $f(A)$ で表す. とくに $A = X$ の場合, $f(X)$ を f の値域ともいう.

曲線を単なる集合としてではなく, 集合とそのパラメータ表示の対として, 次のように定義する.

定義 2.1 (X, d) を距離空間とする. X の部分集合 C に対して, ある区間 I から X への連続写像 $\boldsymbol{\omega}$ で $C = \boldsymbol{\omega}(I)$ を満たすものが存在するとき, C と $\boldsymbol{\omega}$ の対 $(C, \boldsymbol{\omega})$ を X の曲線という. このとき $\boldsymbol{\omega}$ を C のパラメータ表示という. とくに $I = [a, b]$ の場合, $p = \boldsymbol{\omega}(a)$, $q = \boldsymbol{\omega}(b)$ とおくとき, 点 p, q をそれぞれ $(C, \boldsymbol{\omega})$ の始点, 終点といい, $(C, \boldsymbol{\omega})$ を, p と q を結ぶ曲線という.

区間 $[a, b]$ に対し, $a = t_0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq \cdots \leqq t_n = b$ を満たす数列 $\Delta = \{t_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ を区間 $[a, b]$ の分割という.

定義 2.2 距離空間 (X, d) の曲線 $(C, \boldsymbol{\omega})$ のパラメータ表示 $\boldsymbol{\omega}$ の定義域が区間 $[a, b]$ であるとき, $[a, b]$ の分割 $\Delta = \{t_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ に対して, 実数 $s(\boldsymbol{\omega}, \Delta)$ を次のように定める.

$$s(\boldsymbol{\omega}, \Delta) = \sum_{j=1}^{n} d(\boldsymbol{\omega}(t_j), \boldsymbol{\omega}(t_{j-1}))$$

実数 M で, $[a, b]$ の任意の分割 Δ に対して $s(\boldsymbol{\omega}, \Delta) \leqq M$ を満たすものがあるとき, 曲線 $(C, \boldsymbol{\omega})$ は長さを持つという. このとき, $[a, b]$ の任意の分割 Δ に対して $s(\boldsymbol{\omega}, \Delta) \leqq M$ を満たす実数 M の中で最小のものを曲線 $(C, \boldsymbol{\omega})$ の長さという.

命題 2.3 距離空間 (X, d) の曲線 $(C, \boldsymbol{\omega})$ のパラメータ表示 $\boldsymbol{\omega}$ の定義域が区間 $[a, b]$ であるとする.

(1) 区間 $[c, d]$ から $[a, b]$ への連続関数 ψ は単調増加または単調減少であり, ψ の値域は $[a, b]$ であるとする. このとき曲線 $(C, \boldsymbol{\omega} \circ \psi)$ が長さを持つことと $(C, \boldsymbol{\omega})$ が長さを持つことは同値であり, $(C, \boldsymbol{\omega} \circ \psi)$ の長さと $(C, \boldsymbol{\omega})$ の長さは等しい.

(2) 正の実数 K で, 条件「$s, t \in [a, b]$ ならば $d(\boldsymbol{\omega}(s), \boldsymbol{\omega}(t)) \leqq K|s - t|$」を満たすものが存在すれば, $(C, \boldsymbol{\omega})$ は長さをもつ.

距離関数を用いることによって, 距離空間における線分や直線を次のように定義することができる.

定義 2.4 距離空間 (X, d) の曲線 $(L, \boldsymbol{\sigma})$ パラメータ表示 $\boldsymbol{\sigma}$ の定義域が区間 I であるとする.

(1) $r < s < t$ である任意の $r, s, t \in I$ に対して次の等式が成り立つとき, $(L, \boldsymbol{\sigma})$ を線分という.

$$d(\boldsymbol{\sigma}(r), \boldsymbol{\sigma}(t)) = d(\boldsymbol{\sigma}(r), \boldsymbol{\sigma}(s)) + d(\boldsymbol{\sigma}(s), \boldsymbol{\sigma}(t))$$

(2) 線分 $(L, \boldsymbol{\sigma})$ が次の条件を満たすとき, $(L, \boldsymbol{\sigma})$ を直線という.

「線分 $(M, \boldsymbol{\tau})$ が $L \subset M$ を満たせば, $L = M$ である.」

命題 2.5 距離空間 (X, d) の曲線 $(L, \boldsymbol{\sigma})$ のパラメータ表示 $\boldsymbol{\sigma}$ の定義域は区間 $[a, b]$ であり, $\boldsymbol{\sigma}(a) = p$, $\boldsymbol{\sigma}(b) = q$ とおく.

(1) $(L, \boldsymbol{\sigma})$ が線分ならば, $(L, \boldsymbol{\sigma})$ の長さは $d(p, q)$ であり, p と q を結ぶ曲線のうち, 長さが最小のものである.

(2) $(L, \boldsymbol{\sigma})$ が線分ではないならば, $(L, \boldsymbol{\sigma})$ の長さは $d(p, q)$ より大きい.

定義 2.6 (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, f を X から Y への写像とする. X の任意の二点 x, y に対して

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$$

が成り立つとき, f は距離を保つという.

命題 2.7 (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, f を X から Y への距離を保つ写像とする.

(1) $(L, \boldsymbol{\sigma})$ が X の線分ならば, $(f(L), f \circ \boldsymbol{\sigma})$ は Y の線分である.

(2) さらに, f の値域が Y であり, $(L, \boldsymbol{\sigma})$ が X の直線ならば, $(f(L), f \circ \boldsymbol{\sigma})$ は Y の直線である.

3 非ユークリッド幾何学

ギリシャ時代の数学者ユーリッド (Euclid, B.C.330〜B.C.275 頃) は『原論』において幾何学を体系的に構築するために, 証明無しに議論の前提とする「公理」と呼ばれる次の 5 つの命題を与えた.

公理 3.1 1. 与えられた二点 A, B に対して A と B を結ぶ線分を唯一つ引くことができる.

2. 与えられた線分はどちら側にも限りなく伸ばすことができる.
3. 平面上に二点 A, B が与えられたとき, A を中心とし B を通る円を唯一つ描くことができる.
4. 直角はすべて相等しい.
5. 二直線と交わる一つの直線が同じ側につくる内角の和が二直角より小さいならば, 二直線をその側に伸ばせばどこかで交わる.

公理 3.1 の 4 の「直角」とは「一直線上にもう一つの直線が立ってできる隣り合わせの二角が互いに等しいとき, いずれの角をも直角と呼ぶ.」と定義される. 公理 3.1 の 5 が「平行線の公理」と呼ばれるもので, 19 世紀に多くの数学者達が, 公理 3.1 の 1 から 4 を用いて証明できるのではないかと考え, その証明のために多大な努力を重ねた.

ところが, 座標平面において y 座標が正である点全体からなる「上半平面」に通常とは異なる距離を与えることによって, 公理 3.1 の 1 から 4 の公理までは成り立つが, 公理 3.1 の 5 が成り立たない「非ユークリッド幾何学」と呼ばれる幾何学が展開される. このことは, 5 番目の公理が 1 番目の公理から 4 番目の公理からは証明できないことを意味する.

複素数全体からなる集合を $\boldsymbol{C}$ で表し, 虚部が正の数である複素数全体からなる $\boldsymbol{C}$ の部分集合を $\boldsymbol{H}$ で表す. 座標平面 $\boldsymbol{R}^2$ の点 (x,y) と複素数 $x+yi$ を対応させることによって, $\boldsymbol{R}^2$ と $\boldsymbol{C}$ の間に 1 対 1 の対応があることに注意する.

命題 3.2 a を 1 より大きい実数とする. $\boldsymbol{H}$ の要素 z, w に対して

$$d_{\boldsymbol{H}}(z,w)=\log_a\frac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|}$$

とおいて, $\boldsymbol{H}$ の 2 つの要素の対 (z,w) に対して実数 $d_{\boldsymbol{H}}(z,w)$ を対応させる関数 $d_{\boldsymbol{H}}$ を定めれば, $d_{\boldsymbol{H}}$ は $\boldsymbol{H}$ の距離関数である.

z を $\boldsymbol{H}$ の任意の点とする. z の実部を x, 虚部を y とすれば, 正の実数 r に対し, rz の虚部は ry, また任意の実数 c に対し, $z+c$ の虚部は y だから rz と $z+c$ は $\boldsymbol{H}$ の点である. さらに $-\dfrac{1}{z}$ と $-\bar{z}$ の虚部はそれぞれ $\dfrac{y}{x^2+y^2}$ と y で, どちらも正の実数だから, $-\dfrac{1}{z}$ と $-\bar{z}$ は $\boldsymbol{H}$ の点である. 従って $\boldsymbol{H}$ から $\boldsymbol{H}$ への写像 S_r, T_c, V, R を

$$S_r(z)=rz,\qquad T_c(z)=z+c,\qquad V(z)=-\frac{1}{z},\qquad R(z)=-\bar{z}$$

で定めることができる. これらの写像の値域は $\boldsymbol{H}$ 全体であり, $S_{\frac{1}{r}}$, T_{-c}, V, R はそれぞれ S_r, T_c, V, R の逆写像である. また, L_0 を虚部が正である虚軸上の点全体からなる集合とし, $\boldsymbol{\sigma}_0(t)=it$ によって $(0,\infty)$ から $\boldsymbol{H}$ への写像 $\boldsymbol{\sigma}_0$ を定めれば, $\boldsymbol{\sigma}_0$ は L_0 のパラメータ表示である.

命題 3.3 命題 3.2 で定めた $\boldsymbol{H}$ の距離関数 $d_{\boldsymbol{H}}$ は次の性質をもつ.

(*i*) $(L_0,\boldsymbol{\sigma}_0)$ は距離空間 $(\boldsymbol{H},d_{\boldsymbol{H}})$ の直線である.

(*ii*) 任意の正の実数 r と $\boldsymbol{H}$ の任意の二点 z, w に対して $d_{\boldsymbol{H}}(S_r(z),S_r(w))=d_{\boldsymbol{H}}(z,w)$ が成り立つ.

(*iii*) 任意の実数 c と $\boldsymbol{H}$ の任意の二点 z, w に対して $d_{\boldsymbol{H}}(T_c(z),T_c(w))=d_{\boldsymbol{H}}(z,w)$ が成り立つ.

(*iv*) $\boldsymbol{H}$ の任意の二点 z, w に対して $d_{\boldsymbol{H}}(V(z),V(w))=d_{\boldsymbol{H}}(z,w)$ が成り立つ.

(*v*) $\boldsymbol{H}$ の任意の二点 z, w に対して $d_{\boldsymbol{H}}(R(z),R(w))=d_{\boldsymbol{H}}(z,w)$ が成り立つ.

証明 (i) $0<s<t$ ならば $d_{\boldsymbol{H}}(is,it)=\log_a\dfrac{|is+it|+|is-it|}{|is+it|-|is-it|}=\log_a\dfrac{s+t+t-s}{s+t-(t-s)}=\log_a t-\log_a s$ だから, $0<r<s<t$ ならば $d_{\boldsymbol{H}}(ir,is)+d_{\boldsymbol{H}}(is,it)=\log_a s-\log_a r+\log_a t-\log_a s=\log_a t-\log_a r=d_{\boldsymbol{H}}(ir,it)$ が成り立つため, $(L_0,\boldsymbol{\sigma}_0)$ は距離空間 $(\boldsymbol{H},d_{\boldsymbol{H}})$ の線分である. ($L_0\subset L$ を満たす線分 $(L,\boldsymbol{\sigma})$ が存在すれば $L=L_0$ であることの証明は長いので割愛.)

(ii) $d_{\boldsymbol{H}}(S_r(z),S_r(w))=\log_a\dfrac{|rz-\overline{rw}|+|rz-rw|}{|rz-\overline{rw}|-|rz-rw|}=\log_a\dfrac{r|z-\bar{w}|+r|z-w|}{r|z-\bar{w}|-r|z-w|}=d_{\boldsymbol{H}}(z,w)$

(iii) $d_{\boldsymbol{H}}(T_c(z),T_c(w))=\log_a\dfrac{|z+c-\overline{w+c}|+|z+c-(w+c)|}{|z+c-\overline{w+c}|-|z+c-(w+c)|}=\log_a\dfrac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|}=d_{\boldsymbol{H}}(z,w)$

(iv) $d_{\boldsymbol{H}}(V(z),V(w))=\log_a\dfrac{\left|-\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{w}}\right|+\left|-\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right|}{\left|-\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{w}}\right|-\left|-\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right|}=\log_a\dfrac{\frac{1}{|z\bar{w}|}|z-\bar{w}|+\frac{1}{|zw|}\big||z-w|}{\frac{1}{|z\bar{w}|}|z-\bar{w}|-\frac{1}{|zw|}\big||z-w|}=d_{\boldsymbol{H}}(z,w)$

(v) $d_{\boldsymbol{H}}(R(z),R(w))=\log_a\dfrac{|-\bar{z}-\overline{-\bar{w}}|+|-\bar{z}-(-\bar{w})|}{|-\bar{z}-\overline{-\bar{w}}|-|-\bar{z}-(-\bar{w})|}=\log_a\dfrac{|w-\bar{z}|+|\overline{w-z}|}{|w-\bar{z}|-|\overline{w-z}|}=d_{\boldsymbol{H}}(w,z)=d_{\boldsymbol{H}}(z,w)$ □

命題 3.4 $\boldsymbol{H}$ の距離関数 d が以下の (i) から (iv) の条件をすべて満たせば, 1 より大きい実数 a が存在して, $\boldsymbol{H}$ の任意の二点 z, w に対して次の等式が成り立つ.

$$d(z,w)=\log_a\frac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|}$$

(i) $(L_0,\boldsymbol{\sigma}_0)$ は距離空間 $(\boldsymbol{H},d)$ の線分である.

(ii) 任意の正の実数 r と $\boldsymbol{H}$ の任意の二点 z, w に対して $d(S_r(z),S_r(w))=d(z,w)$ が成り立つ.

(iii) 任意の実数 c と $\boldsymbol{H}$ の任意の二点 z, w に対して $d(T_c(z),T_c(w))=d(z,w)$ が成り立つ.

(iv) $\boldsymbol{H}$ の任意の二点 z, w に対して $d(V(z),V(w))=d(z,w)$ が成り立つ.

t が実数全体を動くとき, $\boldsymbol{R}^2$ の点 $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ の軌跡は, 原点を中心とする単位円から $(-1,0)$ を除いた部分であることを示せという問題は, 数学 II の「図形と方程式」の単元の練習問題であるが, この点 $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ に対応する複素数平面上の点 $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\dfrac{2it}{1+t^2}$ は t が正の実数全体を動くとき, 原点を中心とする単位円の上半分である, $\boldsymbol{H}$ に含まれる部分全体を動く. このとき, 写像 S_r, T_c, V と写像 $\boldsymbol{\sigma}_0$ の定義から次の等式が成り立つ.

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2it}{1+t^2}=\frac{1+it}{1-it}=\frac{-2}{it-1}-1=2V(it-1)-1=S_2(V(T_{-1}(it)))-1=T_{-1}(S_2(V(T_{-1}(\boldsymbol{\sigma}_0(t)))))$$

原点を中心とする単位円の $\boldsymbol{H}$ に含まれる部分を C_1 とすれば,

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2it}{1+t^2}=T_{-1}(S_2(V(T_{-1}(\boldsymbol{\sigma}_0(t)))))$$

は, 合成写像 $T_{-1}\circ S_2\circ V\circ T_{-1}\circ\boldsymbol{\sigma}_0$ が C_1 のパラメータ表示であることを示しており, これは C_1 が合成写像 $T_{-1}\circ S_2\circ V\circ T_{-1}$ による直線 $(L_0,\boldsymbol{\sigma}_0)$ の像であることを意味している. 命題 3.3 から T_{-1}, S_2, V はすべて距離を保つ写像だから, これらの合成写像 $T_{-1}\circ S_2\circ V\circ T_{-1}$ も距離を保つ. 従って命題 2.7 から, この合成写像による直線 $(L_0,\boldsymbol{\sigma}_0)$ の像である, $(C_1,T_{-1}\circ S_2\circ V\circ T_{-1}\circ\boldsymbol{\sigma}_0)$ も距離空間 $(\boldsymbol{H},d_{\boldsymbol{H}})$ の直線である.

原点を中心とする半径 r の円周で $\boldsymbol{H}$ に含まれる部分の半円を C_r とすれば, C_r は C_1 を r 倍に相似拡大したものだから, C_r は S_r による C_1 の像である. よって, C_r も $(\boldsymbol{H},d_{\boldsymbol{H}})$ の直線である. さらに実軸上の点 c を中心とする半径 r の円周で $\boldsymbol{H}$ に含まれる部分の半円は, C_r を実軸方向に c だけ平行移動したもので, T_c による C_r の像だから, これも $(\boldsymbol{H},d_{\boldsymbol{H}})$ の直線である.

実軸上の点 c を始点にもち, 虚軸に平行な半直線で $\boldsymbol{H}$ に含まれるものを L_c とすれば, L_c は L_0 を実軸方向に c だけ平行移動したものだから, L_0 の T_c による像である. 故に L_c も $(\boldsymbol{H},d_{\boldsymbol{H}})$ の直線である.

次の定理は, $(\boldsymbol{H},d_{\boldsymbol{H}})$ の直線は, 上記のもの以外にないことを示している.

定理 3.5 距離空間 $(\boldsymbol{H}, d_{\boldsymbol{H}})$ における直線は以下の形の曲線のうちのいずれかである.

(i) 実軸上の点を始点とする, 虚軸に平行な半直線.

(ii) 実軸上に中心をもち, 虚部が正である点全体からなる半円.

上の結果から, $\boldsymbol{H}$ の相異なる二点を通る直線はただ 1 つ存在することがわかる. 従って, $\boldsymbol{H}$ の異なる二本の直線が共有点をもてば, その個数は 1 である. また, 線分は直線の一部だから, $\boldsymbol{H}$ において公理 3.1 の 1 と 2 が成り立つこともわかる.

次に $\boldsymbol{H}$ における円について考える.

$p \in \boldsymbol{C}$ と $r > 0$ に対して, $|z-p| = r$ を満たす複素数 z 全体からなる集合を $C_{\boldsymbol{C}}(p\,;r)$ とおく. また, $\boldsymbol{H}$ の点 p と $r > 0$ に対して, $d_{\boldsymbol{H}}(z,p) = r$ を満たす $\boldsymbol{H}$ の点 z 全体からなる集合を $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ とおき, これを中心が p, 半径 r の円という. 実数 x に対して $\cosh_a x = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$, $\sinh_a x = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$ とおく.

命題 3.6 $\boldsymbol{H}$ の点 p と $r > 0$ に対し, p の実部を α, 虚部を β とすれば, 次の等式が成り立つ.

$$C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r) = C_{\boldsymbol{C}}(\alpha + i\beta\cosh_a r\,;\beta\sinh_a r)$$

証明 $z = x + yi \in \boldsymbol{H}$ $(x, y \in \boldsymbol{R})$ に対し, 次の等式から $d_{\boldsymbol{H}}(z,p) - r$ と $|z - (\alpha + i\beta\cosh_a r)| - \beta\sinh_a r$ は同符号である.

$$\begin{aligned}
a^{d_{\boldsymbol{H}}(z,p)-r} - 1 &= \frac{(a^r+1)^2|z-p|^2 - (a^r-1)^2|z-\bar{p}|^2}{a^r(|z-\bar{p}| - |z-p|)((a^r+1)|z-p| + (a^r-1)|z-\bar{p}|)} \\
&= \frac{(a^{2r}+2a^r+1)(z\bar{z} - \bar{p}z - p\bar{z} + p\bar{p}) - (a^{2r}-2a^r+1)(z\bar{z} - pz - \bar{p}\bar{z} + p\bar{p})}{a^r(|z-\bar{p}| - |z-p|)((a^r+1)|z-p| + (a^r-1)|z-\bar{p}|)} \\
&= \frac{4(z\bar{z} + p\bar{p}) + 2\cosh_a r(z-\bar{z})(p-\bar{p}) - 2(z+\bar{z})(p+\bar{p})}{(|z-\bar{p}| - |z-p|)((a^r+1)|z-p| + (a^r-1)|z-\bar{p}|)} \\
&= \frac{4((x-\alpha)^2 + (y-\beta\cosh_a r)^2 - \beta^2(\sinh_a r)^2)}{(|z-\bar{p}| - |z-p|)((a^r+1)|z-p| + (a^r-1)|z-\bar{p}|)} \\
&= \frac{4(|z-(\alpha+i\beta\cosh_a r)|^2 - (\beta\sinh_a r)^2)}{(|z-\bar{p}| - |z-p|)((a^r+1)|z-p| + (a^r-1)|z-\bar{p}|)}
\end{aligned}$$

また $z = x + yi \in \boldsymbol{C}$ $(x, y \in \boldsymbol{R})$ が $|z - (\alpha + i\beta\cosh_a r)| \leqq \beta\sinh_a r$ を満たせば, $|z - (\alpha + i\beta\cosh_a r)|$ が $z - (\alpha + i\beta\cosh_a r)$ の虚部である $y - \beta\cosh_a r$ の絶対値以上であることに注意すれば,

$$y = \beta\cosh_a r + (y - \beta\cosh_a r) \geqq \beta\cosh_a r - |z - (\alpha + i\beta\cosh_a r)| \geqq \beta\cosh_a r - \beta\sinh_a r = a^{-r}\beta > 0$$

が成り立つため, $z \in \boldsymbol{H}$ である. 故に $C_{\boldsymbol{C}}(\alpha + i\beta\cosh_a r\,;\beta\sinh_a r) \subset \boldsymbol{H}$ である. □

正の実数 r, s に対して $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ と $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;s)$ が共有点 z をもてば $d_{\boldsymbol{H}}(z,p) = r$ かつ $d_{\boldsymbol{H}}(z,p) = s$ だから $r = s$ である. 従って相異なる正の実数 r, s に対して $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ と $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;s)$ は共有点をもたない. $\boldsymbol{H}$ の相異なる点 p と q が与えられたとき, $r = d_{\boldsymbol{H}}(p,q)$ とおけば $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ は p を中心として q を通る円であり, 上の事実から, p を中心として q を通る円は唯一つしかない. すなわち, $\boldsymbol{H}$ において公理 3.1 の 3 が成り立つ.

$\boldsymbol{H}$ における直線のなす角を次のように定義する.

定義 3.7 $(L, \boldsymbol{\sigma})$, $(M, \boldsymbol{\tau})$ は $\boldsymbol{H}$ の直線で, 点 p で交わるとする. p における L の接線と M の接線のなす角を $(L, \boldsymbol{\sigma})$ と $(M, \boldsymbol{\tau})$ のなす角という.

直線のなす角に関して, 以下の結果が示される.

命題 3.8 $(L, \boldsymbol{\sigma})$, $(M, \boldsymbol{\tau})$ は $\boldsymbol{H}$ の点で交わる直線とし, f を $\boldsymbol{H}$ から $\boldsymbol{H}$ への距離を保つ写像とする. 直線 $(f(L), f \circ \boldsymbol{\sigma})$ と $(f(M), f \circ \boldsymbol{\tau})$ のなす角は $(L, \boldsymbol{\sigma})$ と $(M, \boldsymbol{\tau})$ のなす角に等しい.

定理 3.9 $(L,\boldsymbol{\sigma})$, $(L',\boldsymbol{\sigma}')$, $(M,\boldsymbol{\tau})$, $(M',\boldsymbol{\tau}')$ は $\boldsymbol{H}$ の直線で, $(L,\boldsymbol{\sigma})$ と $(L',\boldsymbol{\sigma}')$ は交わり, $(M,\boldsymbol{\tau})$ と $(M',\boldsymbol{\tau}')$ は交わっているとする. $(L,\boldsymbol{\sigma})$ と $(L',\boldsymbol{\sigma}')$ のなす角と, $(M,\boldsymbol{\tau})$ と $(M',\boldsymbol{\tau}')$ のなす角が等しいとき, 距離を保つ $\boldsymbol{H}$ から $\boldsymbol{H}$ への写像 f で, L を K に写し, L' を K' に写すものが存在する.

上の定理から, $\boldsymbol{H}$ において公理 3.1 の 4 も成り立つことがわかる.

相異なる実数 a, b に対して, 実軸上の点 a, b を直径の両端とする半円で $\boldsymbol{H}$ に含まれるものを $L(a,b)$ で表す.

命題 3.10 $0<\varphi,\psi<\dfrac{\pi}{2}$, $\lambda>1$ とする.

(1) $L\Big(-\tan\varphi, \dfrac{1}{\tan\varphi}\Big)$ と $L\Big(-\lambda\tan\psi, \dfrac{\lambda}{\tan\psi}\Big)$ が交わるためには, $\Big(\lambda-\dfrac{\tan\varphi}{\tan\psi}\Big)\Big(\lambda-\dfrac{\tan\psi}{\tan\varphi}\Big)<0$ が成り立つことが必要十分である.

(2) $L\Big(-\tan\varphi, \dfrac{1}{\tan\varphi}\Big)$ は i を始点として $\dfrac{1}{\tan\varphi}$ に向かう半直線を含み, この半直線と i を始点として λi を通る半直線のなす角は 2φ である.

(3) $L\Big(-\lambda\tan\psi, \dfrac{\lambda}{\tan\psi}\Big)$ は λi を始点として $\dfrac{\lambda}{\tan\psi}$ に向かう半直線を含み, この半直線と λi を始点として i を通る半直線のなす角は $\pi-2\psi$ である.

$0<\varphi<\psi<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\lambda \geqq \dfrac{\tan\psi}{\tan\varphi}$ ならば命題 3.10 の (2) と (3) により, 二直線

$$L\Big(-\tan\varphi, \frac{1}{\tan\varphi}\Big), \qquad L\Big(-\lambda\tan\psi, \frac{\lambda}{\tan\psi}\Big)$$

と交わる直線 L_0 が, 実部が正である側につくる内角の和は, $\pi-2(\psi-\varphi)$ で二直角より小さいが, 命題 3.10 の (1) により, 直線 $L\Big(-\tan\varphi, \dfrac{1}{\tan\varphi}\Big)$ と $L\Big(-\lambda\tan\psi, \dfrac{\lambda}{\tan\psi}\Big)$ は交わらないため, $\boldsymbol{H}$ において公理 3.1 の 5 は成り立たない.

距離空間 $(\boldsymbol{H}, d_{\boldsymbol{H}})$ における曲線の長さに関して, 次の結果がある.

定理 3.11 f, g は区間 (p,q) で定義された, 各点で微分可能な関数であり, g はつねに正の実数を値にとり, 導関数 f', g' はともに連続関数であるとする. $p<a<b<q$ を満たす a, b に対し, 区間 $[a,b]$ から $\boldsymbol{H}$ への写像 $\boldsymbol{\omega}$ を $\boldsymbol{\omega}(t)=f(t)+ig(t)$ で定義して, $\boldsymbol{\omega}$ でパラメータ表示される曲線を C とする. このとき, $(C,\boldsymbol{\omega})$ は距離空間 $(\boldsymbol{H}, d_{\boldsymbol{H}})$ において長さを持つ曲線であり, その長さは次の積分で与えられる.

$$\int_a^b \frac{\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}}{g(t)}dt$$

参考文献と URL

http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yamaguti/jugyo/geom/vom.pdf の第 5 節以降

http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yamaguti/ （ホームページ）

http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yamaguti/jugyo/jugyo.html （各種資料のダウンロード用ページ）

平成 29 年度教員免許更新講習試験問題　(担当 山口睦)　　　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

以下の各命題が成り立つ場合は○を, 成り立たない場合は×を解答欄に記入して下さい．

(1) $\boldsymbol{R}^2$ の点 $\mathrm{A}(x,y)$, $\mathrm{B}(z,w)$ に対して関数 d を $d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = |x-z|$ によって定めれば, d は定義 1.1 の条件 (ii) と (iii) を満たすが, (i) は満たさないので, d は $\boldsymbol{R}^2$ の距離関数ではない.

(2) $\boldsymbol{R}^2$ の点 $\mathrm{A}(x,y)$, $\mathrm{B}(z,w)$ に対して関数 d を $d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = |x-z| + |y-w|$ によって定めれば, d は $\boldsymbol{R}^2$ の距離関数である.

(3) 例 1.2 の (1) で与えた $\boldsymbol{R}$ の距離関数 d_1 は, 任意の実数 x, y, c に対し, $d_1(x+c, y+c) = d_1(x,y)$ を満たす.

(4) 例 1.2 の (2) で与えた $\boldsymbol{R}^+$ の距離関数 d_ℓ は, 任意の正の実数 x, y, r に対し, $d_\ell(rx, ry) = d_\ell(x,y)$ を満たす.

(5) a を 1 より大きい実数とする. $\ell(x) = \log_a x$ で定義される $\boldsymbol{R}^+$ から $\boldsymbol{R}$ への関数 ℓ は, 例 1.2 の (2) で与えた距離空間 $(\boldsymbol{R}^+, d_\ell)$ から 例 1.2 の (1) で与えた距離空間 $(\boldsymbol{R}, d_1)$ への距離を保つ写像である.

(6) f, g は区間 (p,q) で定義された, 各点で微分可能な関数であり, 導関数 f', g' はともに連続関数であるとする. $p < a < b < q$ を満たす a, b に対し, 区間 $[a,b]$ から $\boldsymbol{R}^2$ への写像 $\boldsymbol{\omega}$ を $\boldsymbol{\omega}(t) = (f(t), g(t))$ で定義して, $\boldsymbol{\omega}$ でパラメータ表示される曲線を C とする. このとき, $(C, \boldsymbol{\omega})$ は例 1.2 の (3) で与えた距離空間 $(\boldsymbol{R}^2, d_2)$ において長さを持つ曲線であり, その長さは $\displaystyle\int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\,dt$ で与えられる.

(7) 区間 $[0,1]$ から $\boldsymbol{R}^2$ への写像 $\boldsymbol{\omega}$ を $\boldsymbol{\omega}(0) = (0,0)$, $t \neq 0$ ならば $\boldsymbol{\omega}(t) = \left(t,\, t\sin\dfrac{\pi}{2t}\right)$ によって定義する. このとき $\boldsymbol{\omega}$ は連続写像であるが, $\boldsymbol{\omega}$ でパラメータ表示される曲線は例 1.2 の (3) で与えた距離空間 $(\boldsymbol{R}^2, d_2)$ において長さを持たない.

(8) α, β, γ, δ を実数の定数とし, $\boldsymbol{R}$ から $\boldsymbol{R}^2$ への写像 $\boldsymbol{\sigma}$ を $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\alpha t + \gamma, \beta t + \delta)$ で定める. d を上の (2) で定めた関数とするとき, 実数 $r < s < t$ に対し, $d(\boldsymbol{\sigma}(r), \boldsymbol{\sigma}(t)) = d(\boldsymbol{\sigma}(r), \boldsymbol{\sigma}(s)) + d(\boldsymbol{\sigma}(s), \boldsymbol{\sigma}(t))$ が成り立つ.

(9) 座標空間において, 原点 O を中心とする半径 1 の球面を S^2 で表す. S^2 上の二点 A と B に対して関数 d を $d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \angle\mathrm{AOB}$ で定めれば, d は S^2 の距離関数であり, S^2 の任意の二点を結ぶ大円 (中心が原点である円周) の短い方の弧は距離空間 (S^2, d) の線分である.

(10) $\boldsymbol{H}$ における直角三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$ に対し, $\angle\mathrm{A}$ が直角であるとき, $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 < \mathrm{BC}^2$ が成り立つので, 距離空間 $(\boldsymbol{H}, d_{\boldsymbol{H}})$ においてピタゴラスの定理はすべての直角三角形に対して成り立たない.

解答欄

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)