目次

§1. 論理

定義 1.1　真 (正しい) か, 偽 (間違い) のいずれかであることが, はっきりしている主張を命題という. 与えられた命題に対し, 真ならば T (True), 偽ならば F (False) を対応させ, これを命題の真理値という.

定義 1.2　P, Q を命題とする. $\vee$ (または), $\wedge$ (かつ), $\neg$ (否定), $\Rightarrow$ (ならば), $\Leftrightarrow$ (同値) の 5 種類の論理記号 (命題連結記号) を「真理表」と呼ばれる次の表により定義する.

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T	T	F	T	T
T	F	T	F	F	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T	T

定義 1.3　命題 $P, Q, R, \ldots$ を用いて組み合わせて得られる命題で, $P, Q, R, \ldots$ がどのような真理値をもった命題でもつねに真であるようなものをトートロジーという. また, つねに偽である命題を矛盾という.
命題 $Q \Rightarrow P$, $(\neg P) \Rightarrow (\neg Q)$, $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ を, それぞれ命題 $P \Rightarrow Q$ の逆, 裏, 対偶という.

命題 1.4　P, Q, R を命題とする. 論理記号 $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ に関し, 以下の命題はすべてトートロジーである.

(1) 交換法則　$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$,　$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$.

(2) 結合法則　$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$,　$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$.

(3) 二重否定　$\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$.

(4) 分配法則　$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$,　$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

(5) ド・モルガンの法則　$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$,　$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$.

(6) 吸収法則　$(P \wedge Q) \Rightarrow P$,　$P \Rightarrow (P \vee Q)$.

(7) 三段論法　$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$,　$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$.

(8) 二律排反　$P \vee (\neg P)$,　$\neg(P \wedge (\neg P))$.

(9) 対偶　$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$.

(10) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg P) \vee Q)$,　$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$.

証明　(1), (6) 下の真理表より, $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$, $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$, $(P \wedge Q) \Rightarrow P$, $P \Rightarrow (P \vee Q)$ の真理値は P, Q の真理値によらず, 常に T である.

P	Q	$P \vee Q$	$Q \vee P$	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	$P \wedge Q$	$Q \wedge P$	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	$(P \wedge Q) \Rightarrow P$	$P \Rightarrow (P \vee Q)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	F	F	T	T	T
F	F	F	F	T	F	F	T	T	T

(5) 下の真理表より, $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$, $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$ の真理値は P, Q の真理値によらず, 常に T である.

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$
T	T	T	F	F	F	F	T
T	F	T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	F	T	T	T	T	T

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$
T	T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

(2) 下の真理表より, $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$, $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$ の真理値は P, Q, R の真理値によらず, 常に T である.

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \vee R$	$Q \vee R$	$P \vee (Q \vee R)$	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F	T

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \wedge R$	$Q \wedge R$	$P \wedge (Q \wedge R)$	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	F	F	F	T
T	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	F	F	T	F	T
F	T	F	F	F	F	F	T
F	F	T	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	T

(3), (8) 下の真理表より, $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$, $P \vee (\neg P)$, $\neg(P \wedge (\neg P))$ の真理値は P の真理値によらず, 常に T である.

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$	$\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$	$P \vee (\neg P)$	$P \wedge (\neg P)$	$\neg(P \wedge (\neg P))$
T	F	T	T	T	F	T
F	T	F	T	T	F	T

(4) 下の真理表より, $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$, $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ の真理値は P, Q, R の真理値によらず, 常に T である.

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F	T
F	F	T	F	F	F	T	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F	F	F	T
F	T	F	T	F	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T

(7) 下の真理表より, $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$, $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ の真理値は P, Q の真理値によらず, 常に T である.

P	Q	$P\Rightarrow Q$	$P\wedge(P\Rightarrow Q)$	$(P\wedge(P\Rightarrow Q))\Rightarrow Q$	$Q\Rightarrow R$	$(P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow R)$	$P\Rightarrow R$	$((P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow R))\Rightarrow(P\Rightarrow R)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	F	F	T	T

(9), (10) 下の真理表より, $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$, $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg P) \vee Q)$,
$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$ の真理値は P, Q の真理値によらず, 常に T である.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$	$(\neg P) \vee Q$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg P) \vee Q)$
T	T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T	T

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T

□

定義 1.5　変数を含み, その変数の値 (内容) を指定するごとに命題を表す陳述を命題関数といい, x を変数とすると $P(x)$, $Q(x)$ 等で表す.

定義 1.6 (1) 全称記号：命題関数 $P(x)$ に対し, “${}^\forall x\, P(x)$” とは「すべての x に対して $P(x)$ が成り立つ.」 という命題を表す.

(2) 存在記号：命題関数 $P(x)$ に対し, “${}^\exists x\, P(x)$” とは「$P(x)$ が成り立つような x が存在する.」という命題を表す.

注意 1.7 通常 “${}^\forall x\, P(x)$” や “${}^\exists x\, P(x)$” において, 考える対象になる x の範囲は必然的に限定される. すなわち,「$\cdots$ であるようなすべての x に対して $P(x)$ が成り立つ.」, 「$P(x)$ が成り立つような $\cdots$ である x が存在する.」というぐあいに x に対してなんらかの条件をつけることが普通である.

命題 1.8 $\left(\neg\left({}^\forall x\, P(x)\right)\right) \Leftrightarrow \left({}^\exists x\,(\neg P(x))\right)$, $\left(\neg\left({}^\exists x\, P(x)\right)\right) \Leftrightarrow \left({}^\forall x\,(\neg P(x))\right)$ はともにトートロジーである.

証明 「すべての x に対して $P(x)$ が成り立つ.」という命題を A とする. A の否定は「ある x に対して $P(x)$ が成り立たない.」であり,「$P(x)$ が成り立たない.」という命題関数は「$\neg P(x)$ が成り立つ.」となるため, A の否定は「ある x に対して $\neg P(x)$ が成り立つ.」すなわち ${}^\exists x\,(\neg P(x))$ である. 従って $\neg\left({}^\forall x\, P(x)\right)$ と ${}^\exists x\,(\neg P(x))$ の真理値は一致するため, $\left(\neg\left({}^\forall x\, P(x)\right)\right) \Leftrightarrow \left({}^\exists x\,(\neg P(x))\right)$ はトートロジーである.

「$P(x)$ が成り立つような x が存在する.」という命題を B とする. B の否定は「いかなる x に対しても $P(x)$ は成り立たない.」であり, 「$P(x)$ は成り立たない.」という命題関数は「$\neg P(x)$ が成り立つ.」となるため, B の否定は「すべての x に対して $\neg P(x)$ が成り立つ.」すなわち ${}^\forall x\,(\neg P(x))$ である. 従って $\neg\left({}^\exists x\, P(x)\right)$ と ${}^\forall x\,(\neg P(x))$ の真理値は一致するため, $\left(\neg\left({}^\exists x\, P(x)\right)\right) \Leftrightarrow \left({}^\forall x\,(\neg P(x))\right)$ はトートロジーである. □

定義 1.9 命題 P, Q に対して $P \Rightarrow Q$ が真であるとき P は Q であるための十分条件, Q は P であるための必要条件という.

演習問題

問題 1.1 以下の命題の否定をつくれ. ただし, f, f_n は区間 I で定義された実数値関数, $\{a_n\}$ は数列とする.

(1) ${}^\forall a \in I, {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists \delta > 0\,(x \in I, |x-a| < \delta \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$

(2) ${}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists \delta > 0, {}^\forall a \in I\,(x \in I, |x-a| < \delta \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$

(3) ${}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists N \in \boldsymbol{N}\,(n \geqq N \Rightarrow\ |a_n - \alpha| < \varepsilon)$

(4) ${}^\forall x \in I, {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists N \in \boldsymbol{N}\,(n \geqq N \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$

(5) ${}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists N \in \boldsymbol{N}, {}^\forall x \in I\,(n \geqq N \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$

問題 1.2 「先生がしからないと学生は勉強しない. 」という命題の対偶をつくれ. また,「先生がしかっても学生は勉強しない. 」という命題の対偶はどうなるか？

問題 1.3 次の各論理式を証明せよ.

(1) $P \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$ (2) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q \Leftrightarrow P)$ (3) $(\neg(P \Rightarrow Q)) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$

問題 1.4 $F(x, y)$ を 2 変数の命題関数とする. 次の各命題を簡潔な日本語の文章で述べよ.

(1) ${}^\forall x\left({}^\forall y\, F(x,y)\right)$ (2) ${}^\exists x\left({}^\exists y\, F(x,y)\right)$ (3) ${}^\forall x\left({}^\exists y\, F(x,y)\right)$ (4) ${}^\exists x\left({}^\forall y\, F(x,y)\right)$

問題 1.5 次の各命題の逆, 裏, 対偶をつくり, その真偽を調べよ.

(1) 2 つの整数の少なくとも一方が偶数ならばそれらの積は偶数である.

(2) $y = \cos x$ ならば $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -y$ である.

(3) 2 つの図形が相似ならば, それらは合同である.

問題 1.6 a, b を与えられた実数とする. 命題 “$\left({}^\forall x \in \boldsymbol{R}\,(a < x \Rightarrow b < x)\right) \Leftrightarrow b \leqq a$” を簡潔な日本語で表し, 証明せよ.

問題 1.7　命題 “$(P \wedge \neg Q) \Rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$” はトートロジーであることを示せ.

問題 1.8　トートロジー “$P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$” を命題 1.4 の法則を用いて証明せよ.

問題 1.9　命題 A がトートロジーであるとき $A \wedge P \Leftrightarrow P$ となることを示せ. また, 命題 B が矛盾であるとき $B \vee P \Leftrightarrow P$ を示せ.

問題 1.10　命題 A は命題 P, Q, R から論理記号 $\vee$, $\wedge$, $\neg$ を用いて定義される命題とし, 下のような真理表で与えられる真理値をとるとする. このとき命題 A を P, Q, R と論理記号を用いて表せ.

P	T	T	T	T	F	F	F	F
Q	T	T	F	F	T	T	F	F
R	T	F	T	F	T	F	T	F
A	F	F	F	F	T	F	T	T

一般に n 個の命題 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ からつくられる真理表は 2^{2^n} 通りあるが, それらの各真理表に対して同じ真理値をとるような命題は $P_1, P_2, \ldots P_n$ と論理記号 $\vee$, $\wedge$, $\neg$ を用いて表せることを示せ.
(試しに $n = 2$ の場合, 16 通りある各真理表についてやってみよ.)

§2.　集合

定義 2.1　思考の対象として「明確な意味」をもつものを要素または元 (element) といい, 確定した範囲の要素をひとつにまとめた「集り」を集合 (set) と呼ぶ.

記法 2.2　(1) 要素 a が集合 A の要素であるとき, $a \in A$ または $A \ni a$ で表し, a は A に属するという. また要素 a が A の要素でないとき, $a \notin A$ または $A \not\ni a$ と表す.

(2) 要素 $a, b, c, \ldots$ からなる集合を $\{a, b, c, \ldots\}$ で表し (外延的記法), 変数 x を含む命題関数 $P(x)$ に対し, $P(x)$ が真である x 全体の集合を $\{x |\, P(x)\}$ で表す (内包的記法).

注意 2.3　上のような素朴な集合の定義では矛盾が生じることがある. 例えば, $\{x |\, x$ は $x \not\ni x$ を満たす集合 $\}$ は集合とは考えられない. 実際, もしこれが集合であるとして A とおけば「$A \ni A$ ならば $A \not\ni A$」 と「$A \not\ni A$ ならば $A \ni A$」の両方が成り立ってしまい, 矛盾がおきる. このような矛盾が生じないように集合の定義をきちんと数学的に厳密に行なうことは可能である.

定義 2.4　(1) 二つの集合 A, B はそれらの構成要素が全く同じであるとき「等しい」といい, $A = B$ で表す. すなわち $A = B$ は $(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)$ と同値である.

(2) 集合 A の要素がすべて集合 B の要素であるとき, B は A の部分集合であるといい, $A \subset B$ または $B \supset A$ で表す. すなわち $A \subset B$ は $(x \in A \Rightarrow x \in B)$ と同値である. また, $A \subset B$ で $A = B$ でないとき $A \subsetneqq B$ で表し, A は B の真部分集合であるという.

(3) 要素をもたない集合を空集合と呼び, $\emptyset$ で表す.

(4) 集合 A の部分集合全体よりなる集合を A のべき集合といい, $P(A)$ で表す.

命題 2.5　A, B, C を集合とするとき次のことが成り立つ.

(1) $A = B \Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A))$　　(2) $((A \subset B) \wedge (B \subset C)) \Rightarrow (A \subset B)$　　(3) $\emptyset \subset A$

定義 2.6　(1) 集合 A, B の合併集合 (union, cup) $A \cup B$, 共通部分 (intersection, cap) $A \cap B$ を

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \text{ または } x \in B\}, \qquad A \cap B = \{x \,|\, x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

で定める．さらに一般に, 集合を要素とする集合 Γ に対し, Γ の要素全体の合併集合 $\bigcup\Gamma$ および共通部分 $\bigcap\Gamma$ を

$$\bigcup\Gamma = \{x \mid x \in A \text{ となる } A \in \Gamma \text{ が存在する.}\}, \qquad \bigcap\Gamma = \{x \mid \text{すべての } A \in \Gamma \text{ に対して } x \in A \text{ である.}\}$$

で定義する．従って, とくに $A \cup B = \bigcup\{A, B\}$, $A \cap B = \bigcap\{A, B\}$ である．

(2) 集合 A, B の差集合 $A - B$ ($A \setminus B$ とも表す) を $A - B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$ で定める．

注意 2.7 通常, 演算 $\cup$, $\cap$, $-$ を考える場合, ある固定された集合 M (全体集合) の部分集合の間で行なわれることが多い．このとき, $M - A$ を A^c (A の M における補集合) で表すことがある．

命題 2.8 A, B, C を集合とすると次が成り立つ．

(1) 交換法則 $\quad A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$

(2) 結合法則 $\quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$

(3) $A \supset B$ のとき, $A - (A - B) = B$.

(4) 分配法則 $\quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

(5) ド・モルガンの法則 $\quad A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C), \qquad A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C).$

(6) $(A \cap B) \subset A, \qquad A \subset (A \cup B), \qquad (A \cup B = B) \Leftrightarrow (A \subset B), \qquad (A \cap B = A) \Leftrightarrow (A \subset B).$

命題 2.9 A を集合, Γ を集合を要素にもつ集合とすると次が成り立つ．

(1) $X \in \Gamma$ ならば $\bigcap\Gamma \subset X \subset \bigcup\Gamma$ である．すべての $X \in \Gamma$ に対して $A \supset X$ ならば $A \supset \bigcup\Gamma$ であり, すべての $X \in \Gamma$ に対して $A \subset X$ ならば $A \subset \bigcap\Gamma$ である．

(2) 分配法則 $\quad A \cup (\bigcap\Gamma) = \bigcap\left\{X \,\middle|\, {}^\exists B \in \Gamma\,(X = A \cup B)\right\}, \quad A \cap (\bigcup\Gamma) = \bigcup\left\{X \,\middle|\, {}^\exists B \in \Gamma\,(X = A \cap B)\right\}$

(3) ド・モルガンの法則 $\quad A - (\bigcup\Gamma) = \bigcap\left\{X \,\middle|\, {}^\exists B \in \Gamma\,(X = A - B)\right\}, A - (\bigcap\Gamma) = \bigcup\left\{X \,\middle|\, {}^\exists B \in \Gamma\,(X = A - B)\right\}$

演習問題

問題 2.1 (1) 命題 2.8 を証明せよ．

(2) 命題 2.9 を証明せよ．

問題 2.2 A, B を集合とするとき, 次のことを証明せよ．

(1) $A \cup B = A \cup (B - A)$ $\qquad$ (2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow C \subset A$

(3) $(A - B = A) \Leftrightarrow (A \cap B = \emptyset)$ $\qquad$ (4) $(A - B = \emptyset) \Leftrightarrow (A \subset B)$

問題 2.3 A, B を集合 M の部分集合とするとき $A \cap B = \emptyset$, $A^c \supset B$, $A \subset B^c$ はすべて同値であることを示せ．

問題 2.4 A, B, C を集合とするとき, 次のことを示せ．

(1) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$ $\qquad$ (2) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

(3) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ $\qquad$ (4) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

(5) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

問題 2.5 Γ を集合を要素とする集合とするとき次の命題を示せ．

(1) ${}^\forall A \in \Gamma\,(\bigcap\Gamma \subset A \subset \bigcup\Gamma)$ $\qquad$ (2) ${}^\forall A \in \Gamma\,(A \subset C) \Rightarrow \bigcup\Gamma \subset C$ $\qquad$ (3) ${}^\forall A \in \Gamma\,(A \supset C) \Rightarrow \bigcap\Gamma \supset C$

問題 2.6 集合 A, B の対称差 $A \triangle B$ を $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ で定めるとき, 次を示せ．

(1) $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$ $\qquad$ (2) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ $\qquad$ (3) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

§3. 関係・写像

命題 3.1 X, Y を集合とする. $x,z \in X$, $y,w \in Y$ に対し, $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{z\},\{z,w\}\}$ が成り立つことと, $x = z$ かつ $y = w$ が成り立つことは同値である.

証明 「$x = z$ かつ $y = w$」ならば $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{z\},\{z,w\}\}$ であることは明らかである.

$\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{z\},\{z,w\}\}$ と仮定する. $\{x\} \in \{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{z\},\{z,w\}\}$ だから $\{x\} \in \{\{z\},\{z,w\}\}$ である. 従って $\{x\} = \{z\}$ または $\{x\} = \{z,w\}$ が成り立つ. $\{x\} = \{z\}$ の場合は $x = z$ であり, $\{x\} = \{z,w\}$ の場合は $z = w = x$ だから, いずれにしても $x = z$ が成り立つ. 故に $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{x\},\{x,w\}\}$ であり, $\{x,y\} \in \{\{x\},\{x,y\}\}$ だから $\{x,y\} \in \{\{x\},\{x,w\}\}$ となって $\{x,y\} = \{x\}$ または $\{x,y\} = \{x,w\}$ が成り立つ.

$\{x,y\} = \{x\}$ の場合は $x = y$ だから $\{\{x\}\} = \{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{x\},\{x,w\}\}$ より $\{x\} = \{x,w\}$ が得られるため, $x = w$ でもある. 従って $y = x = w$ である.

$\{x,y\} = \{x,w\}$ の場合は $y \in \{x,y\}$ だから $y \in \{x,w\}$ となるため, $y = x$ または $y = w$ である. $y = x$ ならば $\{x\} = \{x,y\} = \{x,w\}$ だから $x = w$ が得られるため, この場合も $y = w$ である. $\square$

定義 3.2 X, Y を集合とする. $x \in X$, $y \in Y$ に対し, $(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$ とおいて, これを x と y の順序対と呼ぶ. X の要素と Y の要素の順序対全体の集合を X と Y の直積といい, $X \times Y$ で表す.

注意 3.3 $A \subset X$, $B \subset Y$ のとき $A \times B$ を $X \times Y$ の部分集合 $\{(x,y) \in X \times Y \,|\, x \in A, y \in B\}$ とみなす.

命題 3.4 Γ, Δ をそれぞれ集合 X, Y の部分集合を要素とする集合 (すなわち $\Gamma \subset P(X)$, $\Delta \subset P(Y)$) とすると次の等式が成り立つ.

$$(\bigcup \Gamma) \times (\bigcup \Delta) = \bigcup \{A \times B \,|\, A \in \Gamma, B \in \Delta\}, \qquad (\bigcap \Gamma) \times (\bigcap \Delta) = \bigcap \{A \times B \,|\, A \in \Gamma, B \in \Delta\}$$

定義 3.5 (1) 集合 X, Y の直積 $X \times Y$ の部分集合を X と Y の関係という. R が X と Y の関係であるとき $(x,y) \in R$ を xRy と表すことがある. とくに $X = Y$ の場合 R を X における (二項) 関係という.

(2) F が X と Y の関係で, すべての $x \in X$ に対して $F \cap (\{x\} \times Y)$ がただひとつの要素からなる集合になるとき F を X から Y への写像と呼び, $F : X \to Y$ で表す. このとき各 $x \in X$ に対し $F \cap (\{x\} \times Y) = \{(x, F(x))\}$ $(F(x) \in Y)$ とおくことができ, この $F(x)$ を x の F による像と呼び, X を F の定義域という.

定義 3.6 X, Y, Z を集合, R, S をそれぞれ X と Y の関係, Y と Z の関係とする.

(1) X と Z の関係 $\left\{(x,z) \in X \times Z \,\middle|\, {}^{\exists}y \in Y\,(((x,y) \in R) \wedge ((y,z) \in S))\right\}$ を R と S の合成と呼んで $S \circ R$ で表す.

(2) Y と X の関係 $\{(y,x) \in Y \times X \,|\, xRy\}$ を R の逆の関係と呼び, R^{-1} で表す.

(3) $A \subset X$ のとき $R(A) = \left\{y \in Y \,\middle|\, {}^{\exists}x \in A\,((x,y) \in R)\right\}$ とおく. とくに F が X から Y への写像であるとき, $F(A)$ を F による A の像と呼び, $F(X)$ を F の値域という. さらに, Y の部分集合 B に対し $F^{-1}(B)$ を F による B の逆像という.

注意 3.7 X を集合とするとき, 合併 $\bigcup$, 共通部分 $\bigcap$ はともに $P(P(X))$ から $P(X)$ への写像と考えられる. また, 補集合 ^{c} は $P(X)$ から $P(X)$ への写像と考えられる.

命題 3.8 R, S, T をそれぞれ X と Y, Y と Z, Z と W の関係とするとき次が成り立つ.

(1) $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R, \qquad (S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}, \qquad (R^{-1})^{-1} = R$

(2) $P \subset Q \subset X$ ならば $R(P) \subset R(Q)$.

(3) $A \subset X$ ならば $(S \circ R)(A) = S(R(A))$.

(4) R, S がともに写像ならば $S \circ R$ も写像である.

(5) R が写像ならば $A \subset X$, $B \subset Y$ に対し, $R(A) = \left\{y \in Y \,\middle|\, {}^{\exists}x \in A\,(y = R(x))\right\} = \{R(x) \in Y \,|\, x \in A\}$

$R^{-1}(B) = \{x \in X | R(x) \in B\}$.

(6) $\Gamma \subset P(X)$ に対し $R(\Gamma) = \{R(A) | A \in \Gamma\}$ とおけば $R(\bigcup \Gamma) = \bigcup R(\Gamma)$, $R(\bigcap \Gamma) \subset \bigcap R(\Gamma)$ が成り立つ. さらに R が写像で, $\Delta \subset P(Y)$ ならば $R^{-1}(\bigcap \Delta) = \bigcap R^{-1}(\Delta)$ が成り立つ.

命題 3.9 $f : X \to Y$ を写像, A, B をそれぞれ X, Y の部分集合とすると次が成り立つ.

(1) $f^{-1}(f(A)) \supset A$ (2) $f(X - A) \supset f(X) - f(A)$ (3) $f(X - f^{-1}(B)) = f(X) - B$

(4) $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$ (5) $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$

定義 3.10 $f : X \to Y$ を写像とする.

(1) f が条件「$f(x) = f(y)$ ならば $x = y$」を満たすとき単射 (1 対 1 写像) といい, 条件 $f(X) = Y$ を満たすとき全射 (上への写像) という. さらに全射かつ単射である写像を全単射 (1 対 1 上への写像) という.

(2) A を X の部分集合とする. 写像 $i : A \to X$, $i(x) = x$ を A の X への包含写像という. とくに $A = X$ の場合, i を X の恒等写像と呼び, id_X, 1_X, I_X 等で表す.

(3) A を X の部分集合とする. 包含写像 $i : A \to X$ と f との合成 $f \circ i$ を f の A への制限といい, $f|_A$ で表す.

(4) $g \circ f = id_X$, $f \circ g = id_Y$ を満たす写像 $g : Y \to X$ を f の逆写像といい, $g = f^{-1}$ で表す.

(5) 集合 X, Y の間に逆写像をもつような写像が存在するとき, X と Y は対等であるといい, $X \sim Y$ で表す.

注意 3.11 X の恒等写像は $X \times X$ の対角集合 $\{(x, x) | x \in X\}$ に対応する写像である.

命題 3.12 (1) $f : X \to Y$ が単射ならば, $\Gamma \subset P(X)$ に対し, $f(\bigcap \Gamma) = \bigcap f(\Gamma)$ が成り立ち, 命題 3.9 の (1), (2) で等号が成立する.

(2) 写像 $f : X \to Y$ の逆写像が存在するためには, f が全単射であることが必要かつ十分であり f の逆写像はただ一つに限る.

定義 3.13 Γ を集合を要素にもつ集合とし, $\iota : I \to \Gamma$ を写像とする. $i \in I$ に対し $\iota(i) = A_i$ とおく. このとき $(A_i)_{i \in I}$ を集合 I によって添数づけられた集合族といい, I をこの集合族の添数集合という.

定義 3.14 集合族 $(A_i)_{i\in I}$ の共通部分 $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$, 合併集合 $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$, 直積 $\prod\limits_{i \in I} A_i$, 直和 $\coprod\limits_{i \in I} A_i$ を次で定義する.

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \,|\, \text{すべての } i \in I \text{ に対して } x \in A_i \text{である.}\} \qquad \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \,|\, x \in A_i \text{ を満たす } i \in I \text{ が存在する.}\},$$

$$\prod_{i \in I} A_i = \Big\{x : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \,\Big|\, \text{各 } i \in I \text{ に対し } x(i) \in A_i \text{ である.}\Big\}, \qquad \coprod_{i \in I} A_i = \Big\{(x, i) \in \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \times I \,\Big|\, x \in A_i\Big\}$$

$x \in \prod\limits_{i \in I} A_i$ と $j \in I$ に対し, $x(j)$ を x の j 成分という. 各 $i \in I$ に対して A_i の要素 x_i が与えられたとき, $i \in I$ を x_i に対応させる $\prod\limits_{i \in I} A_I$ の要素を $(x_i)_{i \in I}$ で表す. $x \in \prod\limits_{i \in I} A_i$ に対して $x(j) \in A_j$ を対応させる写像を j 成分への射影といい, $\mathrm{pr}_j : \prod\limits_{i \in I} A_i \to A_j$ で表す. また, $j \in I$ に対し, 写像 $\mathrm{inc}_j : A_j \to \coprod\limits_{i \in I} A_i$ を $\mathrm{inc}_j(x) = (x, j)$ で定義する.

命題 3.15 集合 X, Y に対し, X から Y への写像全体よりなる集合を $\mathrm{Map}(X, Y)$ で表す.

(1) 写像 $\Phi : \mathrm{Map}\Big(X, \prod\limits_{i \in I} A_i\Big) \to \prod\limits_{i \in I} \mathrm{Map}(X, A_i)$ を $\Phi(h)(i) = pr_i \circ h$ で定めれば Φ は全単射である.

(2) 写像 $\Psi : \mathrm{Map}\Big(\coprod\limits_{i \in I} A_i, Y\Big) \to \prod\limits_{i \in I} \mathrm{Map}(A_i, Y)$ を $\Psi(g)(i) = g \circ \mathrm{inc}_i$ で定めれば Φ は全単射である.

定理 3.16 (Bernstein の定理) 単射 $f : X \to Y$ と単射 $g : Y \to X$ が存在すれば, 全単射 $h : X \to Y$ が存在する.

演習問題

問題 3.1 命題 3.4 を証明せよ.

問題 3.2 A, B を集合 X の部分集合, C, D を集合 Y の部分集合とするとき, 次の等式を示せ.

(1) $(A\times C)\cap(B\times D)=(A\cap B)\times(C\cap D)$

(2) $(A\times C)\cup(B\times D)=((A\cup B)\times(C\cap D))\cup((A\cap B)\times(C\cup D))\cup((A-B)\times(C-D))\cup((B-A)\times(D-C))$

問題 3.3　集合 X と集合 Y の直積 $X\times Y$ において, $X\times Y$ の部分集合 G が適当な X, Y の部分集合 A, B に対して, $G=A\times B$ と表されるための必要十分条件は「$(x,y),(z,w)\in G$ ならば $(x,w)\in G$」であることを証明せよ.

問題 3.4　Δ を集合 X の直積 $X\times X$ の対角集合 $\{(x,y)\in X\times X|\,x=y\}$ とする．このとき X の部分集合 A, B に対し, $A\cap B=\emptyset$ であることと $(A\times B)\cap\Delta=\emptyset$ であることは同値であることを示せ.

問題 3.5　(1) 命題 3.8 を証明せよ.　　(2) 命題 3.9 を証明せよ.

問題 3.6　集合 X における関係 R が条件「$(x,y)\in R$ ならば $(y,x)\in R$」と「$(x,y),(y,z)\in R$ ならば $(x,z)\in R$」を満たすとき, X の任意の要素 x に対して $(x,x)\in R$ または $(\{x\}\times X)\cap R=\emptyset$ が成り立つことを示せ.

問題 3.7　$f:X\to Y$ を写像, S を Y における関係とするとき X における関係 f^*S を

$$f^*S=\{(x,y)\in X\times X|\,(f(x),f(y))\in S\}$$

で定める．X における関係 R が条件「$(x,y)\in R$ ならば $(f(x),f(y))\in S$」を満たせば, $R\subset f^*S$ であることを示せ.

問題 3.8　集合 X の直積 $X\times X$ から X への写像 f が与えられているとする．X の部分集合 A が条件 $f(A\times A)\subset A$ を満たすときに A は f に関して閉じているという．X の部分集合 A, B が f に関して閉じているとき, 集合 $A\cap B$, $A\cup B$, $X-A$ はそれぞれ f に関して閉じているか調べよ.

問題 3.9　X を有限集合, $f:X\to X$ を写像とする．このとき $f^n(x)=x$ となる正の整数 n と $x\in X$ が存在することを示せ．ただし, $f^n=f\circ f\circ\cdots\circ f$ (f の n 回の合成).

問題 3.10　命題 3.12 を証明せよ.

問題 3.11　X を m 個, Y を n 個の要素からなる有限集合とするとき, 次の各集合の要素の個数を求めよ.

(1) $\mathrm{Map}(X,Y)$

(2) $m\leqq n$ のとき, X から Y への単射の集合.　　(3) X と Y の間の関係全体の集合.

問題 3.12　X を m 個の要素からなる有限集合とし, X の n 個の要素からなる部分集合の個数を $\binom{m}{n}$ で表す.

(1) $0\leqq n\leqq m$ のとき $\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}$ となることを示せ.

(2) 等式 $\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}=2^m$ と $\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\binom{m}{n}=0$ を「二項定理」を用いずに示せ.

(3) $m\geqq n$, Y を n 個の要素からなる有限集合とするとき, X から Y への全射の個数を $S(m,n)$ で表せば $n^m=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}S(m,k)$ が成り立つことを示せ.

問題 3.13　$f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ を写像とするとき, $g\circ f$ が単射ならば f も単射であることを示せ．また, $g\circ f$ が全射ならば g も全射であることを示せ.

問題 3.14　写像 $f:X\to Y$ と集合 Z に対し, 写像 $f_*:\mathrm{Map}(Z,X)\to\mathrm{Map}(Z,Y)$ と $f^*:\mathrm{Map}(Y,Z)\to\mathrm{Map}(X,Z)$ をそれぞれ $f_*(\varphi)=f\circ\varphi$, $f^*(\psi)=\psi\circ f$ により定義する．このとき, 次のことを示せ.

(1) 任意の集合 Z に対して, f_* が単射であることと, f が単射であることは同値である.

(2) 任意の集合 Z に対して, f^* が単射であることと, f が全射であることは同値である.

問題 3.15　M を集合, $A_{m,n}$ $(m,n\in\boldsymbol{N})$ を M の部分集合とするとき $\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}\left(\bigcap_{m\in\boldsymbol{N}}A_{m,n}\right)\subset\bigcap_{m\in\boldsymbol{N}}\left(\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}A_{m,n}\right)$ であることを示せ．さらに $\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}\left(\bigcap_{m\in\boldsymbol{N}}A_{m,n}\right)\neq\bigcap_{m\in\boldsymbol{N}}\left(\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}A_{m,n}\right)$ となるような例をあげよ.

問題 3.16 $\boldsymbol{R}$ を実数全体の集合とし, $a,b \in \boldsymbol{R}$ に対し, $(a,b)=\{x\in\boldsymbol{R}|\, a<x<b\}$, $[a,b]=\{x\in\boldsymbol{R}|\, a\leqq x\leqq b\}$, $(a,b]=\{x\in\boldsymbol{R}|\, a<x\leqq b\}$, $[a,b)=\{x\in\boldsymbol{R}|\, a\leqq x<b\}$, $(-\infty,b)=\{x\in\boldsymbol{R}|\, x<b\}$, $(-\infty,b]=\{x\in\boldsymbol{R}|\, x\leqq b\}$, $(a,+\infty)=\{x\in\boldsymbol{R}|\, x>a\}$, $[a,+\infty)=\{x\in\boldsymbol{R}|\, x\geqq a\}$, とおく. このとき, 次の $\boldsymbol{R}$ の部分集合はどのようなものになるのか答えよ.

(1) $\displaystyle\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}[-n,n]$ (2) $\displaystyle\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(-n,n)$ (3) $\displaystyle\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}\left[-\tfrac{1}{n+1},\tfrac{1}{n+1}\right]$ (4) $\displaystyle\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}\left(-\tfrac{1}{n+1},\tfrac{1}{n+1}\right)$

(5) $\displaystyle\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}\left[0,\tfrac{1}{n+1}\right)$ (6) $\displaystyle\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}\left(0,\tfrac{1}{n+1}\right]$ (7) $\displaystyle\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}\left[-1-\tfrac{1}{n+1},1+\tfrac{1}{n+1}\right]$ (8) $\displaystyle\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}\left(-1-\tfrac{1}{n+1},1+\tfrac{1}{n+1}\right)$

(9) $\displaystyle\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}[n,+\infty)$ (10) $\displaystyle\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}[n,n+1)$ (11) $\displaystyle\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}\left[-1-\tfrac{1}{n+1},1+\tfrac{1}{n+1}\right]$ (12) $\displaystyle\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}\left(-1-\tfrac{1}{n+1},1+\tfrac{1}{n+1}\right)$

問題 3.17 添数集合 I が $\{1,2\}$ であるとき全単射 $X_1\times X_2\to\displaystyle\prod_{i\in I}X_i$ をつくれ.

問題 3.18 X を集合とする. X の部分集合 A に対して X から $\{0,1\}$ への写像 χ_A を $\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\in X-A\end{cases}$ により定める. A, B を X の部分集合として, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $x\in X$ に対し $\chi_A(x)\leqq\chi_B(x)$ が成り立つことと, $A\subset B$ であることは同値である.

(2) 任意の $x\in X$ に対し $\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\chi_B(x)$

(3) 任意の $x\in X$ に対し $\chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)$

(4) 任意の $x\in X$ に対し $\chi_{X-A}(x)=1-\chi_A(x)$

(5) 任意の $x\in X$ に対し $\chi_{A-B}(x)=\chi_A(x)(1-\chi_B(x))$

(6) 任意の $x\in X$ に対し $\chi_{A\triangle B}(x)=|\chi_A(x)-\chi_B(x)|$

問題 3.19 集合 X に対し, 写像 $\varphi:P(X)\to\mathrm{Map}(X,\{0,1\})$ を $\varphi(A)=\chi_A$ で定めれば, φ は全単射であることを示せ.

問題 3.20 命題 3.15 を証明せよ.

問題 3.21 X, Y, Z を集合とするとき, 写像 $\Theta:\mathrm{Map}(X\times Y,Z)\to\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))$ を $(\Theta(f)(x))(y)=f(x,y)$ $(x\in X,\ y\in Y)$ で定義すれば Θ は 全単射になることを示せ.

問題 3.22 集合 X, Y に対し, 写像 $e:\mathrm{Map}(X,Y)\times X\to Y$ を $e(f,x)=f(x)$ で定めれば, e は条件
「任意の集合 Z と写像 $f:X\times Y\to Z$ に対し, $f=e\circ(g\times id_Y)$ を満たす $g:X\to\mathrm{Map}(Y,Z)$ がただ 1 つ存在する.」
を満たす唯一の写像であることを示せ.

問題 3.23 定理 3.16 を次の順序で証明せよ.

(1) X, Y の部分集合族 $(X_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$, $(Y_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ を $X_{2i}=(g\circ f)^i(X)$, $X_{2i+1}=g\circ(f\circ g)^i(Y)$, $Y_{2i}=(f\circ g)^i(Y)$, $Y_{2i+1}=f\circ(g\circ f)^i(X)$ により定義すると, $X=X_0\supset X_1\supset X_2\supset\cdots\supset X_n\supset X_{n+1}\supset\cdots$, $Y=Y_0\supset Y_1\supset Y_2\supset\cdots\supset Y_n\supset Y_{n+1}\supset\cdots$ であることを示せ.

(2) $X_\infty=\displaystyle\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}X_n$, $Y_\infty=\displaystyle\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}X_n$ とおくと $X=X_\infty\cup\left(\displaystyle\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(X_{n+1}-X_n)\right)$, $Y=Y_\infty\cup\left(\displaystyle\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(Y_{n+1}-Y_n)\right)$ であり, $m\neq n$ ならば $(X_{m+1}-X_m)\cap(X_{n+1}-X_n)=\emptyset$, $(Y_{m+1}-Y_m)\cap(Y_{n+1}-Y_n)=\emptyset$, 任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対し, $X_\infty\cap(X_{n+1}-X_n)=\emptyset$, $Y_\infty\cap(Y_{n+1}-Y_n)=\emptyset$ であることを示せ.

(3) 任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対し, $f(X_{n+1}-X_n)=Y_{n+1}-Y_n$, $g(Y_{n+1}-Y_n)=X_{n+1}-X_n$ 及び $f(X_\infty)=Y_\infty$, $g(Y_\infty)=X_\infty$ を示せ.

(4) $h:X\to Y$ を $h(x)=\begin{cases}f(x) & x\in X_\infty\cup\left(\displaystyle\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(X_{2n}-X_{2n+1})\right)\\ g^{-1}(x) & x\in\displaystyle\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}(X_{2n+1}-X_{2n+2})\end{cases}$ で定めれば, h は全単射であることを示せ.

§4. 同値関係

定義 4.1 集合 X における関係 R が次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすとき, R を同値関係という.

(i) $^\forall x \in X$ に対し, $(x,x) \in R$ (反射律) (ii) $(x,y) \in R$ ならば $(y,x) \in R$ (対称律) (iii) $(x,y) \in R$ かつ $(y,z) \in R$ ならば $(x,z) \in R$ (推移律)

例 4.2 以下の (1) ~ (6) における関係は同値関係である.

(1) m を整数とし, 整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ における関係 $\equiv$ を「$x \equiv y \Leftrightarrow x-y$ は m の倍数である.」で定める.

(2) $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{C}$ とする. V を $\boldsymbol{F}$ 上のベクトル空間, W をその部分空間とする. V における関係 $\equiv$ を "$x \equiv y \Leftrightarrow x-y \in W$"で定める.

(3) $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ ($\boldsymbol{N}=\{0,1,2,\dots\}$ =(自然数全体の集合)) における関係 $\sim$ を "$(m,n)\sim(k,l) \Leftrightarrow m+l=k+n$"で定める.

(4) $\boldsymbol{Z}\times(\boldsymbol{Z}-\{0\})$ における関係 $\sim$ を "$(m,n)\sim(k,l) \Leftrightarrow ml=kn$"で定める.

(5) 写像 $f: X\to Y$ に対し, X における関係 $\underset{f}{\sim}$ を "$x \underset{f}{\sim} y \Leftrightarrow f(x)=f(y)$"で定める. これを f に付随する同値関係という.

(6) 集合 A が, その部分集合族 $(A_\lambda)_{\lambda\in I}$ により $A=\bigcup\limits_{\lambda\in I} A_\lambda$, $\mu\neq\lambda$ ならば $A_\mu\cap A_\lambda=\emptyset$ と互いに交わらない部分集合族の合併になっているとき, 関係 $\sim$ を "$x\sim y \Leftrightarrow {}^\exists\lambda\in I\,(x,y\in A_\lambda)$"で定める. このとき, さらに各 $\lambda\in I$ に対して $A_\lambda\neq\emptyset$ ならば $(A_\lambda)_{\lambda\in I}$ は集合 A の類別を与えるという.

定義 4.3 集合 X に同値関係 R が与えられているとき, 各 $x\in X$ に対し X の部分集合 C_x を $C_x=\{y\in X|\, yRx\}$ で定め, 集合 X/R をこのような X の部分集合 C_x の全体の集合 $\{C_x|\, x\in X\}$ とする. 写像 $p: X\to X/R$ を $p(x)=C_x$ により定義する. このとき X/R を X の R による商集合, p を商写像と呼ぶ. また $x\in X$ に対し $x\in C$ となる X/R の要素 C を x の属する同値類と呼び, x を C の代表元という. さらに X の部分集合 S で各 $C\in X/R$ に対し $C\cap S$ がただひとつの要素からなるようなものを代表系と呼ぶ.

命題 4.4 R を集合 X の同値関係, $p: X\to X/R$ を商写像とする.

(1) $x\in X$ に対し $x\in C_x$. 従って $C_x\neq\emptyset$ であり, $X=\bigcup\limits_{x\in X} C_x$, $p: X\to X/R$ は全射である.

(2) $x,y\in X$ に対し, 次の 4 つは同値である. $C_x\cap C_y\neq\emptyset$, $C_x=C_y$, $p(x)=p(y)$, xRy.

(3) 各 $C\in X/R$ に対し $x_C\in C$ を選んでおく. $S=\{x_C|\, C\in X/R\}$ は代表系で $(C_x)_{x\in S}$ は X の類別を与える.

(4) 商写像 $p: X\to X/R$ に付随する同値関係は R に一致する.

(5) 写像 $f: X\to Y$ が条件「xRy ならば $f(x)=f(y)$」を満たすとき, 写像 $\bar{f}: X/R\to Y$ で $f=\bar{f}\circ p$ を満たすものがただ一つ存在する.

例 4.5 (1) 例 4.2 の (1) において, $\boldsymbol{Z}/\equiv$ は通常 $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ で表され, $m>0$ ならば $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}=\{C_0,C_1,\dots,C_{m-1}\}$ となる. また, 商写像 $p: \boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ が, $\boldsymbol{Z}$ の加法と乗法を保つ (すなわち $x,y\in\boldsymbol{Z}$ に対し $p(x+y)=p(x)+p(y)$, $p(xy)=p(x)p(y)$ が成立する) ような $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ の加法と乗法が一意的に定まる.

(2) 例 4.2 の (2) において, $V/\equiv$ を V/W で表す. このとき商写像 $p: V\to V/W$ が線型写像になるような V/W のベクトル空間の構造が一意的に存在し, V/W を V の W による商ベクトル空間と呼ぶ.

(3) 例 4.2 の (3) において, $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}/\sim$ を $\boldsymbol{Z}$ で表し, $\boldsymbol{Z}$ の要素を整数と呼ぶ. このとき $(0,n)\in\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ が属する類 $C_{(0,n)}$ を $-n$ で表す. また, 写像 $i: \boldsymbol{N}\to\boldsymbol{Z}$, $i(n)=C_{(n,0)}$ は単射で, i により $\boldsymbol{N}\subset\boldsymbol{Z}$ とみなす.

(4) 例 4.2 の (4) において, $(\boldsymbol{Z}\times(\boldsymbol{Z}-\{0\}))/\sim$ を $\boldsymbol{Q}$ で表し, $\boldsymbol{Q}$ の要素を有理数と呼ぶ. $(m,n)\in\boldsymbol{Z}\times(\boldsymbol{Z}-\{0\})$ が属する類 $C_{(m,n)}$ を $\frac{m}{n}$ で表す. 写像 $j: \boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Q}$, $j(m)=\frac{m}{1}$ は単射で j により $\boldsymbol{Z}\subset\boldsymbol{Q}$ とみなす.

(5) 例 4.2 の (5) において, $f: X\to Y$ は全単射 $\bar{f}: X/\underset{f}{\sim}\to f(X)$, $\bar{f}(C_x)=f(x)$ $(x\in X)$ を定める.

(6) 例 4.2 の (6) において, $(A_\lambda)_{\lambda\in I}$ が集合 A の類別を与えるとき, 写像 $g : A \to I$, $g(x) = \lambda$ $(x \in A_\lambda)$ は全単射 $\bar{g} : A/\!\sim\, \to I$, $\bar{g}(C_x) = g(x)$ を定める.

定義 4.6　R, S をそれぞれ集合 X, Y における関係とする. 写像 $f : X \to Y$ が条件「xRy ならば $f(x)Sf(y)$」を満たすとき, f は関係を保つ写像であるという.

命題 4.7　R, S をそれぞれ集合 X, Y における同値関係とし, $p : X \to X/R$, $q : Y \to Y/S$ を商写像とする. $f : X \to Y$ が関係を保つ写像ならば $q \circ f = \bar{f} \circ p$ を満たす写像 $\bar{f} : X/R \to Y/S$ がただ一つ存在する.

命題 4.8　集合 X における同値関係全体の集合 $\{R \in P(X \times X) |\, R$ は同値関係 $\}$ を $E(X)$ とおくとき, 次が成り立つ.

(1) $\Delta_X = \{(x, x) |\, x \in X\}$ とおく. 任意の $R \in E(X)$ に対し $\Delta_X \subset R \subset X \times X$ であり, $\Delta_X, X \times X \in E(X)$. 商写像 $X \to X/\Delta_X$ は全単射, $X/X \times X$ はただ一つの要素からなる.

(2) $\Gamma \subset E(X)$ ならば $\bigcap \Gamma \in E(X)$ である.

(3) $E(X)$ の部分集合 Γ が条件「$R, S \in \Gamma$ ならば ${}^\exists T \in \Gamma(R \cup S \subset T)$」を満たせば $\bigcup \Gamma \in E(X)$ である.

(4) R を X における関係とするとき, $\bar{R} \in E(X)$ で条件「$\bar{R} \supset R$ であり, $S \supset R$ かつ $S \in E(X)$ ならば $S \supset \bar{R}$」を満たすものが一意的に存在する. 実際 $\bar{R}$ は $\bigcap\{S \in E(X) |\, S \supset R\}$ で与えられる.

(5) $R_1, R_2 \in E(X)$, $R_1 \subset R_2$ ならば全射 $f : X/R_1 \to X/R_2$ で $p_2 = f \circ p_1$ $(p_i : X \to X/R_i$ は商写像$)$ を満たすものがただ一つ存在する.

定義 4.9　上の (4) における $\bar{R}$ を R により生成される同値関係という.

演習問題

問題 4.1　例 4.2 において与えた関係がすべて同値関係になっていることを確かめよ.

問題 4.2　命題 4.4 を証明せよ.

問題 4.3　(1) $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ における加法と乗法を次のように定義する.

「$x, y \in \boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ に対し, $p(\bar{x}) = x$, $p(\bar{y}) = y$ となる $\bar{x}, \bar{y} \in \boldsymbol{Z}$ を選び, $x + y = p(\bar{x} + \bar{y})$, $xy = p(\bar{x}\bar{y})$ とする.」

このとき, $x + y$, xy は $p(\bar{x}) = x$, $p(\bar{y}) = y$ を満たす $\bar{x}, \bar{y}$ の選び方によらないことを示し, 任意の $a, b \in \boldsymbol{Z}$ に対し $p(a + b) = p(a) + p(b)$, $p(ab) = p(a)p(b)$ が成立することを示せ.

(2) 上で定義した加法と乗法は結合法則 $((x + y) + z = x + (y + z)$, $(xy)z = x(yz))$ と交換法則 $(x + y = y + x$, $xy = yx)$ を満たし, さらに分配法則 $(x(y + z) = xy + xz)$ が成り立つことを示せ.

(3) $p(0) = 0$, $p(1) = 1$ とおくと, 0 は加法の単位元 $(x + 0 = 0 + x = x)$, 1 は乗法の単位元 $(x1 = 1x = x)$ になることを確かめよ. さらに, $x \in \boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ に対し, $p(\bar{x}) = x$ となる $\bar{x} \in \boldsymbol{Z}$ を選び, $-x = p(-\bar{x})$ とおくと, $-x$ は加法に関する x の逆元 $(x + (-x) = (-x) + x = 0)$ であることを確かめよ. また, x の乗法に関する逆元 $(xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ を満たす $x^{-1})$ が存在するためには $\bar{x}$ と m の最大公約数が 1 であることが必要十分であることを示せ.

(4) $x \in \boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ に対し, $p^{-1}(x)$ は $\boldsymbol{Z}$ のどのような部分集合になるか調べよ.

問題 4.4　(1) V/W における加法とスカラー倍を次のように定義する.

「$x, y \in V/W$, $r \in \boldsymbol{F}$ に対し, $p(\bar{x}) = x$, $p(\bar{y}) = y$ となる $\bar{x}, \bar{y} \in \boldsymbol{Z}$ を選び, $x + y = p(\bar{x} + \bar{y})$, $rx = p(r\bar{x})$ とする.」

このとき, $x + y$, rx は $p(\bar{x}) = x$, $p(\bar{y}) = y$ を満たす $\bar{x}, \bar{y}$ の選び方によらないことを示し, 任意の $u, v \in \boldsymbol{Z}$ と $r \in \boldsymbol{F}$ に対し $p(u + v) = p(u) + p(v)$, $p(ru) = rp(u))$ が成立することを示せ.

(2) 上で定義した加法とスカラー倍は結合法則 $((x+y)+z = x+(y+z)$, $(rs)x = r(sz))$ と交換法則 $(x+y = y+x$, $xy = yx)$ を満たし, さらに分配法則 $(r(x + y) = rx + ry$, $(r + s)x = rx + sx)$ が成り立つことを示せ.

(3) $p(0) = 0$ とおくと, 0 は加法の単位元 $(x + 0 = 0 + x = x)$ になり, $1 \in \boldsymbol{F}$ はスカラー倍の単位元 $(1x = x)$ にな

ることを確かめよ．さらに, $x \in V/W$ に対し, $p(\bar{x}) = x$ となる $\bar{x} \in \boldsymbol{Z}$ を選び, $-x = p(-\bar{x})$ とおくと, $-x$ は加法に関する x の逆元 $(x + (-x) = (-x) + x = 0)$ であることを確かめよ．

(4) $x \in V/W$ に対し, $p^{-1}(x)$ は V のどのような部分集合になるか調べよ．

問題 4.5　(1) $p : \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}/\!\sim\, = \boldsymbol{Z}$ を商写像とし, $\boldsymbol{Z}$ における加法と乗法を次のように定義する．
「$x, y \in \boldsymbol{Z}$ に対し, $p(k,l) = x$, $p(m,n) = y$ となる $(k,l),(m,n) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ を選び, $x + y = p(k+m, l+n)$, $xy = p(km+ln, kn+lm)$ とする.」
このとき, $x+y$, xy は $p(k,l) = x$, $p(m,n) = y$ を満たす $(k,l),(m,n)$ の選び方によらないことを示せ．

(2) 上で定義した加法と乗法は結合法則 $((x+y)+z = x+(y+z)$, $(xy)z = x(yz))$ と交換法則 $(x+y = y+x$, $xy = yx)$ を満たし, さらに分配法則 $(x(y+z) = xy+xz)$ が成り立つことを示せ．

(3) $p(0,0) = 0$, $p(1,0) = 1$ とおくと, 0 は加法の単位元 $(x+0 = 0+x = x)$, 1 は乗法の単位元 $(x1 = 1x = x)$ になることを確かめよ．さらに, $x \in \boldsymbol{Z}$ に対し, $p(k,l) = x$ となる $(k,l) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ を選び, $-x = p(l,k)$ とおくと, $-x$ は加法に関する x の逆元 $(x+(-x) = (-x)+x = 0)$ であることを確かめよ．

(4) $x \in \boldsymbol{Z}$ に対し, $p^{-1}(x)$ は $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ のどのような部分集合になるか調べよ．

問題 4.6　(1) $p : \boldsymbol{Z} \times (\boldsymbol{Z} - \{0\}) \to \boldsymbol{Z} \times (\boldsymbol{Z} - \{0\})/\!\sim\, = \boldsymbol{Q}$ を商写像とし, $\boldsymbol{Q}$ における加法と乗法を次のように定義する．
「$x, y \in \boldsymbol{Q}$ に対し, $p(k,l) = x$, $p(m,n) = y$ となる $(k,l),(m,n) \in \boldsymbol{Z} \times (\boldsymbol{Z} - \{0\})$ を選び, $x+y = p(kn+lm, ln)$, $xy = p(km, ln)$ とする.」
このとき, $x+y$, xy は $p(k,l) = x$, $p(m,n) = y$ を満たす $(k,l),(m,n)$ の選び方によらないことを示せ．

(2) 上で定義した加法と乗法は結合法則 $((x+y)+z = x+(y+z)$, $(xy)z = x(yz))$ と交換法則 $(x+y = y+x$, $xy = yx)$ を満たし, さらに分配法則 $(x(y+z) = xy+xz)$ が成り立つことを示せ．

(3) $p(0,1) = 0$, $p(1,1) = 1$ とおくと, 0 は加法の単位元 $(x+0 = 0+x = x)$, 1 は乗法の単位元 $(x1 = 1x = x)$ になることを確かめよ．さらに, $x \in \boldsymbol{Q}$ に対し, $p(k,l) = x$ となる $(k,l) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ を選び, $-x = p(l,k)$ とおくと, $-x$ は加法に関する x の逆元 $(x+(-x) = (-x)+x = 0)$ であることを確かめよ．また, $x \neq 0$ の場合, $p(k,l) = x$ ならば $k \neq 0$ であることを示し, $x^{-1} = p(l,k)$ とおけば, $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ が成り立つことを示せ．

(4) $x \in \boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ に対し, $p^{-1}(x)$ は $\boldsymbol{Z}$ のどのような部分集合になるか調べよ．

問題 4.7　命題 4.7 を証明せよ．

問題 4.8　命題 4.8 を証明せよ．

§5.　順序構造

定義 5.1　(1) 集合 X における関係 $\leqq$ が次の条件 (i), (ii) を満たすとき $\leqq$ を半順序 (関係) という．

(i) ${}^{\forall}x \in X$ に対し, $x \leqq x$ (反射律)　(ii) $x \leqq y$ かつ $y \leqq z$ ならば $x \leqq z$ (推移律)

さらに次の (iii) を満たすとき順序 (関係) という．　(iii) $x \leqq y$ かつ $y \leqq x$ ならば $x = y$ (反対称律)

(2) $\leqq$ の逆の関係 $\leqq^{-1}$ を $\geqq$ で表し, $x \leqq y$ $(y \geqq x)$ かつ $x \neq y$ であるとき $x < y$ $(y > x)$ と表す．(半) 順序 $\leqq$ が定義された集合 X を (半) 順序集合と呼び, $(X, \leqq)$ で表す．このとき $\leqq$ を X の (半) 順序構造ともいう．

(3) $(X, \leqq_X)$, $(Y, \leqq_Y)$ を半順序集合とする．写像 $f : X \to Y$ が条件「$x \leqq_X y$ ならば $f(x) \leqq_Y f(y)$」を満たすとき, f を順序写像と呼び, $f : (X, \leqq_X) \to (Y, \leqq_Y)$ で表す．

命題 5.2　$f : (X, \leqq_X) \to (Y, \leqq_Y)$, $g : (Y, \leqq_Y) \to (Z, \leqq_Z)$ が順序写像ならば, 合成写像 $g \circ f$ も順序写像である．また X の恒等写像 id_X は順序写像 $(X, \leqq_X) \to (X, \leqq_X)$ である．

定義 5.3 (1) 順序写像 $f:(X,\leqq_X)\to(Y,\leqq_Y)$ に対し, 順序写像 $g:(Y,\leqq_Y)\to(X,\leqq_X)$ で $g\circ f=id_X$, $f\circ g=id_Y$ を満たすものが存在するとき, f を順序同型写像という. 二つの半順序集合 $(X,\leqq_X)$, $(Y,\leqq_Y)$ の間に順序同型写像 $f:(X,\leqq_X)\to(Y,\leqq_Y)$ が存在するとき, これらは順序同型であるといい, $(X,\leqq_X)\simeq(Y,\leqq_Y)$ で表す.

(2) 順序写像 $f:(X,\leqq_X)\to(Y,\leqq_Y)$ が X から Y への単射であるとき f を順序単射という.

注意 5.4 順序写像 $f:(X,\leqq_X)\to(Y,\leqq_Y)$ が X から Y への写像として全単射であっても f の逆写像 f^{-1} は順序写像とは限らない. 反例は $X=Y=\boldsymbol{R}$ として $\leqq_X=$ (等号 $=$), $\leqq_Y=$ (通常の不等号 $\leqq$), $f=id_{\boldsymbol{R}}$ で与えられる.

命題 5.5 $(X,\leqq_X)$, $(Y,\leqq_Y)$, $(Z,\leqq_Z)$ を半順序集合とする.

(1) X の恒等写像 id_X は順序同型写像 $(X,\leqq_X)\to(X,\leqq_X)$ である. 従って $(X,\leqq_X)\simeq(X,\leqq_X)$.

(2) $(X,\leqq_X)$ と $(Y,\leqq_Y)$ が順序同型写像 $f:(X,\leqq_X)\to(Y,\leqq_Y)$ により順序同型ならば, f の逆写像も順序同型写像である. 従って, $(X,\leqq_X)\simeq(Y,\leqq_Y)$ ならば $(Y,\leqq_Y)\simeq(X,\leqq_X)$ である.

(3) 二つの順序同型写像の合成も順序同型写像である. 従って, $(X,\leqq_X)\simeq(Y,\leqq_Y)$ かつ $(Y,\leqq_Y)\simeq(Z,\leqq_Z)$ ならば $(X,\leqq_X)\simeq(Y,\leqq_Y)$ である.

定義 5.6 $(X,\leqq)$ を半順序集合とする.

(1) $\leqq$ が順序関係で, 任意の $x,y\in X$ に対し $x\leqq y$ または $y\leqq x$ が成り立つとき, 順序関係 $\leqq$ を X における全順序または線型順序といい, $(X,\leqq)$ を全順序集合または線型順序集合という.

(2) 任意の $x,y\in X$ に対し $x\leqq z$ かつ $y\leqq z$ を満たす $z\in X$ が存在するとき $(X,\leqq)$ を (上向きの) 有向集合という.

(3) Y を X の部分集合とする. このとき Y の X への包含写像が順序写像になるような Y の半順序関係 $\leqq_Y$ が一意的に存在し (すなわち $x\leqq_Y y$ であるためには $x\leqq y$ であることが必要十分), $(Y,\leqq_Y)$ を $(X,\leqq)$ の部分半順序集合と呼ぶ. この場合 $\leqq_Y$ は通常 $\leqq$ で表される.

例 5.7 (1) X を実数 $\boldsymbol{R}$ の部分集合 (例えば $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$) とするとき, 通常の大小関係 $\leqq$ により, $(X,\leqq)$ は全順序集合である.

(2) 集合 X の部分集合全体の集合 $P(X)$ における包含関係 $\subset$, $\supset$ は順序関係であり, 順序集合 $(X,\subset)$, $(X,\supset)$ は有向集合である.

(3) 正の整数の集合 $\boldsymbol{Z}^+$ に関係 $|$ を「$m|n \Leftrightarrow n$ は m の倍数」で定めると, $(\boldsymbol{Z}^+,|)$ は有向集合である.

定義 5.8 $(X,\leqq)$ を半順序集合, Y を X の部分集合とする.

(1) すべての $x\in X$ に対して $x\leqq x_0$ ($x\geqq x_0$) となるような X の要素 X_0 を X の最大元 (最小元) といい, $\max X$ ($\min X$) で表す. $(X,\leqq)$ が順序集合ならば, X の最大元 (最小元) が存在すればただ 1 つである.

(2) $x_0\in X$ が条件「$x\geqq x_0$ ならば $x=x_0$」(「$x\geqq x_0$ ならば $x=x_0$」) を満たすとき, x_0 を X の極大元 (極小元) と呼ぶ.

(3) $x_0\in X$ が条件「$x\in Y$ ならば $x\leqq x_0$」(「$x\in Y$ ならば　$x\geqq x_0$」) を満たすとき, x_0 を Y の上界 (下界) と呼ぶ. Y の上界 (下界) が存在するとき Y は上に有界 (下に有界) であるという. Y が上にも下にも有界であるとき, たんに Y は有界であるという.

(4) Y の X における上界 (下界) 全体の集合を Y^* (Y_*) とする. X の部分半順序集合としての Y^*, Y_* における $\min Y^*$ ($\max Y_*$) が存在すれば, これを Y の X における上限 (下限) と呼び, $\sup Y$ ($\inf Y$) で表す.

(5) 上界をもつような X の空でない部分集合がつねに上限をもつとき, $(X,\leqq)$ は順序完備であるという.

注意 5.9 (1) 順序集合 $(X,\leqq)$ の部分集合 Y の最大元 (最小元, 極大元, 極小元) とは, Y を $(X,\leqq)$ の部分順序集合とみなしたときの最大元 (最小元, 極大元, 極小元) である.

(2) 順序集合において最大元 (最小元) がもし存在するとすれば, ただひとつである.

(3) $\boldsymbol{Q}$ の部分集合 $M = \{x \in \boldsymbol{Q} | \, x > 0, \, x^2 < 2\}$ は $\boldsymbol{Q}$ において有界であるが, 上限をもたない. M を $\boldsymbol{R}$ の部分順序集合と考えれば上限 $\sqrt{2} \in \boldsymbol{R}$ をもつ. 従って $\boldsymbol{Q}$ 順序完備ではない.

(4) 上向きの有向集合において極大元があれば, それは最大元である.

命題 5.10 順序集合 $(X, \leqq)$ が順序完備であることと, X の空でない下に有界な部分集合がつねに下限をもつことは同値である.

証明 順序集合 $(X, \leqq)$ は順序完備であるとする. A を空でない下に有界な X の部分集合とし, B を A の下界全体からなる集合とする. このとき A の要素は B の上界だから, B は空でない上に有界な X の部分集合である. 従って仮定から B の上限が存在するため, それを u とする. u が A の下界でなければ $a_0 \in A$ で $a_0 \leqq u$ かつ $a_0 \neq u$ を満たすものが存在する. ここで u が B の上限であることから $b \in B$ で $a_0 \leqq b$ かつ $b \neq a_0$ を満たすものがものが存在するが, b は A の下界であることと矛盾が生じる. 故に u は A の下界である. $u \leqq v$ かつ $v \neq u$ を満たす A の下界 v が存在すれば $v \in B$ であるが, これは u が B の上限であることと矛盾する. 故に u は A の下限である.

X の空でない下に有界な部分集合がつねに下限をもてば, 逆の半順序構造を持つ半順序集合 $(X, \geqq)$ は順序完備である. 従って上の結果から $(X, \geqq)$ において X の空でない下に有界な部分集合はつねに下限をもつため, $(X, \leqq)$ において X の空でない上に有界な部分集合はつねに上限をもつ. □

定理 5.11 $\boldsymbol{R}$ は順序完備である.

証明 A を $\boldsymbol{R}$ の空でない上に有界な部分集合とする. A の上界全体からなる集合を B として, 数列 $(a_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$, $(b_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ を次のように帰納的に定める. まず $a_1 \in A$, $b_1 \in B$ を一つずつ選ぶ. $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ が, 条件 $a_i \in A$, $b_i \in B$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$, $b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n$, $b_i - a_i \leqq 2^{-i+1}(b_1 - a_1)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を満たすように選べたと仮定する.

$\dfrac{a_n + b_n}{2} \in B$ の場合は $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ と定めれば, $a_{n+1} \in A$, $b_{n+1} \in B$ であり, $b_n \in B$ だから $a_n \leqq b_n$ となっているため, $b_n \geqq b_{n+1}$ である. さらに, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2} \leqq 2^{-n}(b_1 - a_1)$ も成り立つ.

$\dfrac{a_n + b_n}{2} \notin B$ の場合は A の要素で, $\dfrac{a_n + b_n}{2}$ より大きなものがある. その一つを a_{n+1} として $b_{n+1} = b_n$ と定めれば, $a_{n+1} \in A$, $b_{n+1} \in B$ であり, $b_n \in B$ だから $a_n \leqq b_n$ となっているため, $a_n \leqq \dfrac{a_n + b_n}{2} < a_{n+1}$ である. さらに, $b_{n+1} - a_{n+1} < b_n - \dfrac{a_n + b_n}{2} = \dfrac{b_n - a_n}{2} \leqq 2^{-n}(b_1 - a_1)$ も成り立つ.

以上から, すべての項が A に属する単調増加数列 $(a_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ と すべての項が B に属する単調減少数列 $(b_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ で, 任意の n に対して $b_n - a_n \leqq 2^{-n+1}(b_1 - a_1)$ を満たすものがある. すべての n に対して $a_1 \leqq a_n \leqq b_n \leqq b_1$ が成り立つため, $(a_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ は上に有界であり, $(b_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ は下に有界である. 上に有界な単調増加数列と下に有界な単調減少数列は収束するため $(a_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ と $(b_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ はともに収束する. そこで $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$, $\beta = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$ とおけば, 不等式 $a_n \leqq b_n$, $b_n - a_n \leqq 2^{-n+1}(b_1 - a_1)$ より, それぞれ $\alpha \leqq \beta$, $\beta - \alpha \leqq 0$ を得るため, $\alpha = \beta$ であることがわかる.

任意の $x \in A$ と自然数 n に対し, $b_n \in B$ だから $x \leqq b_n$ が成り立つ. この不等式で $n \to \infty$ とすれば, $x \leqq \beta = \alpha$ が得られるため, $\alpha \in B$ であることがわかる. もし α より小さな B の要素 γ が存在すれば, $a_n \leqq \gamma$ が任意の自然数 n に対して成り立つため, $n \to \infty$ とすれば, $\alpha \leqq \gamma$ が得られて, γ が α より小さいことと矛盾する. 従って, α より小さい B の要素は存在しないため, α は B の最小元, すなわち, α は A の上限である. □

定義 5.12 (1) 順序集合において, その任意の空でない部分集合が最小元をもつとき, 整列集合という.

(2) $(W, \leqq)$ を整列集合とする. $x, y \in W$, $x < y$ であり, $x < z < y$ となる $z \in W$ が存在しないとき x を y の直前の元, y を x の直後の元と呼ぶ. また, $a \in W$ に対し $W\langle a \rangle = \{x \in W | \, x < a\}$ とおき, W の a 切片という.

命題 5.13 (1) 自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ は整列集合である.

(2) 整列集合 W は全順序集合であり, $x, y \in W$ に対し, $x \leqq y$ であることと, $W\langle x \rangle \subset W\langle y \rangle$ であることは同値で

ある.

(3) 整列集合の部分順序集合は整列集合である.

(4) 整列集合 W の要素 a より大きな W の要素があれば, $\min\{x \in W \,|\, x > a\}$ が a の直後の元であるが, a より小さな元があっても a の直前の元が存在するとは限らない. 実際, a_* が $a \in W$ の直前の元であるためには $a_* = \max W\langle a\rangle$ であることが必要十分であり, $\min W$ と異なる $a \in W$ が直前の元をもたないならば $a = \sup W\langle a\rangle$ である.

(5) W の部分集合 W' で条件「$W\langle a\rangle \subset W'$ ならば $a \in W'$」を満たすものは W に一致する.

定理 5.14 整列集合 W の要素を変数とする命題関数 $P(x)$ に関し, 次の命題関数 $I(a)$ がすべての $a \in W$ について真であれば, すべての $x \in W$ について $P(x)$ は真である.

$$I(a) : {}^\forall x < a\,(P(x) \text{ が真}) \text{ ならば } P(a) \text{ も真である.}$$

注意 5.15 上において, $a = \min W$ の場合 $I(\min W)$ は「$P(\min W)$ は真である」という命題を表す. 上の定理による命題「${}^\forall x \in W\,(P(x)$ は真$)$」の証明法を超限帰納法という.

定理 5.16 (整列集合の比較定理) W, W' を整列集合とするとき, 次の (i), (ii), (iii) のうちいずれかひとつだけが成り立つ.

(i) $W \simeq W'$.

(ii) $W \simeq W'\langle a'\rangle$ となる $a' \in W'$ がただ一つ存在する.

(iii) $W' \simeq W\langle a\rangle$ となる $a \in W$ がただ一つ存在する.

演習問題

問題 5.1 命題 5.2 を証明せよ.

問題 5.2 命題 5.5 を証明せよ.

問題 5.3 $(X, \triangleleft)$ を半順序集合とする.

(1) X における関係 $\sim$ を「$x \sim y \Leftrightarrow x \triangleleft y$ かつ $y \triangleleft x$」で定めると, $\sim$ は同値関係であることを示せ.

(2) $X/\!\sim$ を X の同値関係 $\sim$ による商集合, $p : X \to X/\!\sim$ を商写像とする. $\alpha, \beta \in X/\!\sim$ に対し, $p(x) = p(x') = \alpha$, $p(y) = p(y') = \beta$ とすれば, $x \triangleleft y$ が成り立つことと, $x' \triangleleft y'$ が成り立つことは同値であることを示せ. そこで, $X/\!\sim$ における関係 $\leqq$ を "$\alpha \leqq \beta \Leftrightarrow x \triangleleft y$" により定義すると, $\leqq$ は $X/\!\sim$ における順序関係であることを示せ.

(3) $(Y, \leqq_Y)$ を順序集合, $f : X \to Y$ を「$x \triangleleft y$ ならば $f(x) \leqq_Y f(y)$」を満たす写像とすれば, 順序写像 $\tilde{f} : (X/\!\sim, \leqq) \to (Y, \leqq_Y)$ で, $f = \tilde{f} \circ p$ を満たすものがただ 1 つ存在することを示せ.

問題 5.4 $f : (X, \leqq_X) \to (Y, \leqq_Y)$ を順序写像とする. $(X, \leqq_X)$ が全順序集合であり, f が全単射ならば逆写像 f^{-1} も順序写像になることを示せ.

問題 5.5 n 個の要素からなる有限全順序集合は通常の順序による順序集合 $(\{1, 2, \ldots, n\}, \leqq)$ と順序同型になることを示せ.

問題 5.6 (1) 例 5.7 の (3) の主張を証明せよ.

(2) 順序集合 $(\boldsymbol{Z}^+, |\,)$ における最小元とは何か? また, 部分順序集合 $(\boldsymbol{Z}^+ - \{1\}, |\,)$ における極小元とは何か?

(3) $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ を $\boldsymbol{Z}^+$ の有限部分集合とする. このとき $\sup M$, $\inf M$ とは何であるか?

(4) 一般に, M を $\boldsymbol{Z}^+$ の空でない部分集合とするとき, $\sup M$, $\inf M$ が存在するのはそれぞれどのような場合であるか? さらに $\sup M$, $\inf M$ がもし存在すれば, それらは何であるか?

問題 5.7 $\boldsymbol{R}[x]$ を変数 x に関する実数係数の多項式全体の集合 $\{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \,|\, n \in \boldsymbol{N}, a_i \in \boldsymbol{R}\}$ とする.

(1) $\boldsymbol{R}[x]$ における関係 $\lhd$ を「$f \lhd g \Leftrightarrow g$ は f で割り切れる.」で定めると, $\lhd$ は P の半順序であることを示せ.

(2) $\sim$ を演習問題 5.3 の方法で定義される P における同値関係とする. $f, g \in \boldsymbol{R}[x] - \{0\}$ に対し, $f \sim g$ であることと $f = rg$ となる $r \in \boldsymbol{R}$ $(r \neq 0)$ が存在することは同値であることを示せ.

(3) 商集合 $\boldsymbol{R}[x]/\!\sim$ における順序 $\leqq$ を演習問題 5.3 と同様に定める. 順序集合 $(\boldsymbol{R}[x]/\!\sim, \leqq)$ において, 最大元, 最小元は存在するか? もし存在するならば, それらの商写像 $p : P \to P/\!\sim$ による逆像 $p^{-1}(\max \boldsymbol{R}[x]/\!\sim)$, $p^{-1}(\min P/\!\sim)$ はどのような多項式の集合になるか?

(4) $\boldsymbol{R}[x]/\!\sim$ から $\min P$ で代表される元を除いた集合の極小元は存在するか? もし存在するとすれば, それらの商写像による逆像はどのような形の多項式からなる集合か?

問題 5.8 通常の大小関係において, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ はどの 2 つも順序同型ではないことを示せ.

問題 5.9 $(X, \leqq_X)$ を順序集合, $(W, \leqq_W)$ を整列集合とする. 全射である順序写像 $f : (W, \leqq_W) \to (X, \leqq_X)$ が存在すれば $(X, \leqq_X)$ も整列集合であることを示せ.

問題 5.10 順序集合 $(X, \leqq)$ における要素の列 $(x_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ で, $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n > x_{n+1} > \cdots$ となるものを $(X, \leqq)$ の降鎖という. $(X, \leqq)$ が全順序集合であるとき, 整列集合であるためには $(X, \leqq)$ において降鎖が存在しないことが必要十分条件であることを証明せよ.

§6. 基数・順序数

命題 6.1 定義 3.10 の (4) で定義した集合の対等について, 次のことが成り立つ.

(1) $X \sim Y$ (2) $X \sim Y$ ならば $Y \sim X$ (3) $X \sim Y$ かつ $Y \sim Z$ ならば $X \sim Z$

注意 6.2 $\boldsymbol{Set}$ を集合全体の集まり, $\boldsymbol{Ord}$ を順序集合全体の集まり, $\boldsymbol{W\text{-}ord}$ を整列集合全体の集まりとする. このとき, 命題 6.1 により, 集合の対等 $\sim$ は $\boldsymbol{Set}$ における「同値関係」であり, 命題 5.5 により, 順序同型 $\simeq$ は $\boldsymbol{Ord}$, $\boldsymbol{W\text{-}ord}$ における「同値関係」である. また, $\boldsymbol{W\text{-}ord}$ は $\boldsymbol{Ord}$ の「部分集合」とみなされ, 順序構造を忘れる対応 $\Phi : \boldsymbol{Ord} \to \boldsymbol{Set}$, $\Phi(X, \leqq_X) = X$ があり, これは「同値関係」を保つ写像である.

定義 6.3 (1) $\boldsymbol{Set}$, $\boldsymbol{Ord}$, $\boldsymbol{W\text{-}ord}$ をそれぞれ同値関係 $\sim, \simeq, \simeq$ により類別した「商集合」$\boldsymbol{Set}/\!\sim$, $\boldsymbol{Ord}/\!\simeq$, $\boldsymbol{W\text{-}ord}/\!\simeq$ の要素をそれぞれ, 基数, 順序型, 順序数と呼ぶ. $\mathrm{card} : \boldsymbol{Set} \to \boldsymbol{Set}/\!\sim$, $T : \boldsymbol{Ord} \to \boldsymbol{Ord}/\!\simeq$, $t : \boldsymbol{W\text{-}ord} \to \boldsymbol{W\text{-}ord}/\!\simeq$ をそれぞれ「商写像」とする. 集合 X に対し, $\mathrm{card}\, X$ を X の基数または濃度, 順序集合 $(X, \leqq)$ に対し, $T(X, \leqq)$ を $(X, \leqq)$ の順序型, さらに $(X, \leqq)$ が整列集合ならば $t(X, \leqq)$ を $(X, \leqq)$ の順序数という.

(2) $\boldsymbol{Set}/\!\sim$ における関係 $\leqq$ を次で定義する. 基数 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ に対し, $\mathrm{card}\, X = \mathfrak{a}$, $\mathrm{card}\, Y = \mathfrak{b}$ となる集合 X, Y をとり, 「$\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} \Leftrightarrow X$ から Y への単射が存在する.」このとき, $\leqq$ は, $\mathrm{card}\, X = \mathfrak{a}$, $\mathrm{card}\, Y = \mathfrak{b}$ となる集合 X, Y の選び方によらない.

(3) $\boldsymbol{W\text{-}ord}/\!\simeq$ における関係 $\leqq$ を次で定義する. 順序数 μ, ν に対し, $t(W, \leqq_W) = \mu$, $t(Z, \leqq_Z) = \nu$ となる整列集合 $(W, \leqq_W)$, $(Z, \leqq_Z)$ をとり, 「$\mu \leqq \nu \Leftrightarrow (W, \leqq_W)$ から $(Z, \leqq_Z)$ への順序単射が存在する.」このとき, $\leqq$ は, $(W, \leqq_W) = \mu$, $(Z, \leqq_Z) = \nu$ となる整列集合 $(W, \leqq_W)$, $(Z, \leqq_Z)$ の選び方によらない.

注意 6.4 (1) $\Phi : \boldsymbol{Ord} \to \boldsymbol{Set}$ は「同値関係」を保つため $\varphi \circ T = \mathrm{card} \circ \Phi$ を満たす写像 $\varphi : \boldsymbol{Ord}/\!\simeq \to \boldsymbol{Set}/\!\sim$ がただ一つ存在する.

(2) $\boldsymbol{W\text{-}ord} \subset \boldsymbol{Ord}$ であり $\boldsymbol{W\text{-}ord}/\!\simeq \subset \boldsymbol{Ord}/\!\simeq$ とみなされる. φ を $\boldsymbol{W\text{-}ord}/\!\simeq$ に制限したものも φ で表すと, φ は関係 $\leqq$ を保つ. 順序数 μ に対し, $\varphi(\mu)$ を μ に対応する基数という.

定理 6.5 $(\boldsymbol{Set}, \leqq)$ および $(\boldsymbol{W\text{-}ord}, \leqq)$ は全順序集合である.

定理 6.6　集合 X に対し, $\operatorname{card} P(X) > \operatorname{card} X$ である. 従って, いくらでも大きな基数が存在する.

証明　$x \in X$ を $\{x\} \in P(X)$ に対応させる単射 $X \to P(X)$ があるため, $\operatorname{card} P(X) \geqq \operatorname{card} X$ である. 全射 $f : X \to P(X)$ が存在すると仮定する. X の部分集合 X_f を $X_f = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ で定義する. f は全射だから $x_f \in X$ で $f(x_f) = X_f$ を満たすものが存在する. もし $x_f \in X_f$ ならば $x_f \in f(x_f)$ だから X_f の定義より $x_f \notin X_f$ となって矛盾が生じるため $x_f \notin X_f$ であるが, このときは $x_f \notin f(x_f)$ だから X_f の定義より $x_f \in X_f$ となって矛盾が生じる. 故に X から $P(X)$ への全射は存在しないため, $\operatorname{card} P(X) \neq \operatorname{card} X$ である. □

命題 6.7　無限集合 X に対し, $X \times X$ は X と対等である. また, $P_f(X)$ を X の有限部分集合全体からなる集合とすれば, $P_f(X)$ は X と対等である.

定義 6.8　$\operatorname{card} \boldsymbol{N} = \aleph_0$, $\operatorname{card} \boldsymbol{R} = \aleph$ とおき, それぞれ可算基数, 連続の基数という. また, $\operatorname{card} X = \aleph_0$ である集合を可算集合, $\operatorname{card} X \leqq \aleph_0$ である集合をたかだか可算な集合という. すなわち 自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ から集合 X への全単射が存在するとき, X を可算集合といい, 有限集合または可算集合である集合をたかだか可算な集合という. また, $\operatorname{card} X > \aleph_0$ である集合を非可算集合という.

命題 6.9　自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ の部分集合はたかだか可算な集合である.

証明　X を $\boldsymbol{N}$ の有限集合でない部分集合とし, 写像 $f : \boldsymbol{N} \to X$ を次のように帰納的に定義する. 自然数全体の集合の空でない部分集合は最小値をもつため, $f(1) = \min X$ と定めれば $f(1) < \min(X - \{f(1)\})$ が成り立つ. X は有限集合ではないため, X の有限部分集合の補集合は空集合ではない. そこで 2 以上の自然数 n に対し, $f(n)$ を $f(n) = \min(X - \{f(1), f(2), \ldots, f(n-1)\})$ で定義する. $X_1 = X$ とおき, 2 以上の自然数 n に対して $X_n = X - \{f(1), f(2), \ldots, f(n-1)\}$ とおけば $X_{n+1} = X_n - \{\min X_n\}$ だから $f(n+1) = \min X_{n+1} > \min X_n = f(n)$ であり, $f(n) < m < f(n+1)$ を満たす $m \in X$ は存在しないため f は単射で $\{i \in X \mid i \leqq f(n)\} = \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}$ が成り立つ. すなわち $\{i \in X \mid i \leqq f(n)\}$ は X の要素を小さいものから順に n 個選んで得られる集合である.

$k \in X$ に対して $\{i \in X \mid i \leqq k\}$ の要素の個数を ν_k とすれば, $\{i \in X \mid i \leqq k\}$ は X の要素を小さいものから順に ν_k 個選んで得られる集合だから $\{i \in X \mid i \leqq f(\nu_k)\} = \{f(1), f(2), \ldots, f(\nu_k)\}$ と一致する. さらに $k, f(\nu_k) \in X$ だから k は $\{i \in X \mid i \leqq k\}$ の最大値, $f(\nu_k)$ は $\{i \in X \mid i \leqq f(\nu_k)\}$ の最大値だから $k = f(\nu_k)$ が成り立つ. 故に f は全射でもあるため, X は可算集合である. 従って $\boldsymbol{N}$ の部分集合はたかだか可算な集合である. □

命題 6.10　X が可算集合で, $f : X \to Y$ が全射ならば, Y はたかだか可算な集合である.

証明　f に全単射 $\boldsymbol{N} \to X$ 合成することによって $X = \boldsymbol{N}$ としてよい. f は全射だから各 $y \in Y$ に対して $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ であり, $y, z \in Y$ かつ $y \neq z$ ならば $f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{z\}) = \emptyset$ である. 故に $f^{-1}(\{y\})$ の最小値を m_y とおけば, 「$y, z \in Y$ かつ $y \neq z$ ならば $m_y \neq m_z$」が成り立つため $g : Y \to \boldsymbol{N}$ を $g(y) = m_y$ で定めれば g は単射であり, g は Y から $\boldsymbol{N}$ の部分集合 $g(Y)$ への全単射を与える. 従って命題 6.9 より Y はたかだか可算な集合である. □

命題 6.11　自然数全体の集合の直積集合 $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ も可算な集合である.

証明　$k = 1, 2, \ldots$ に対し, $\dfrac{k(k-1)}{2} < n \leqq \dfrac{k(k+1)}{2}$ を満たす自然数 n を $\boldsymbol{R}^2$ の点

$$\left(n - \frac{k(k-1)}{2}, \frac{k(k+1)}{2} - n + 1\right)$$

に対応させることによって写像 $\varphi : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ を定義すれば, φ は全単射である. □

X, Y が可算集合ならば全単射 $f : \boldsymbol{N} \to X$, $g : \boldsymbol{N} \to Y$ が存在する. 写像 $h : \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \to X \times Y$ を $h(m, n) = (f(m), g(n))$ で定義すれば, h の逆写像は $h^{-1}(x, y) = (f^{-1}(x), g^{-1}(y))$ で与えられるため, h は全単射である. 命題 6.11 から全単射 $\varphi : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ が存在し, 全単射の合成写像は全単射だから, 次の命題が成り立つ.

命題 6.12　X, Y が可算集合ならば, 直積集合 $X \times Y$ も可算集合である.

命題 6.13　各 X_n $(n \in \boldsymbol{N})$ がたかだか可算な集合ならば, 合併集合 $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ もたかだか可算な集合である.

証明　X_n が可算な集合ならば, 全単射 $f_n : \boldsymbol{N} \to X_n$ があり, X_n が有限集合ならば, 全射 $f_n : \boldsymbol{N} \to X_n$ がある. そこで写像 $F : \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \to \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ を $F(m,n) = f_n(m)$ で定めれば F は全射だから命題 6.10 と命題 6.11 から $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ はたかだか可算な集合である. □

注意 6.14　(1) Y が有限集合ならば, 全射 $\boldsymbol{N} \to Y$ が存在するので, 命題 6.10 より Y がたかだか可算な集合であるためには全射 $\boldsymbol{N} \to Y$ が存在することが必要十分である.

(2) 整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ は可算集合である. 実際, 写像 $f : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{Z}$ を $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $f(2k-1) = 1-k$, $f(2k) = k$ で定めれば f は全単射である.

命題 6.15　有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ は可算集合である.

証明　注意 6.14 の (2) と命題 6.12 によって $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{N}$ は可算集合である. さらに $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{Q}$ への写像 $g : \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{Q}$ を $g(m,n) = \dfrac{m}{n}$ で定めれば, g は全射だから命題 6.10 から $\boldsymbol{Q}$ はたかだか可算な集合であるが, $\boldsymbol{Q}$ は有限集合ではないので $\boldsymbol{Q}$ は可算集合である. □

公理 6.16　(選択公理) $(X_\lambda)_{\lambda \in I}$ が, すべての $\lambda \in I$ に対し, $X_\lambda \neq \emptyset$ であるような集合族ならば, $\prod_{\lambda \in I} X_\lambda \neq \emptyset$ である.

定理 6.17　選択公理を仮定するとき, すべての無限集合は可算集合であるような部分集合を含む. 従って $\mathfrak{a}$ を無限集合に対応する基数とすれば, $\mathfrak{a} \geqq \aleph_0$ である.

系 6.18　X が無限集合ならば $X \sim Y$ となる X の部分集合 Y がある.

定理 6.19　$\operatorname{card} P(\boldsymbol{N}) = \aleph$. 従って, $\aleph > \aleph_0$ である.

補題 6.20　μ を順序数とする. このとき $\boldsymbol{W\text{-}ord}/\simeq$ の部分順序集合 $\{\nu \in \boldsymbol{W\text{-}ord}/\simeq | \, \nu < \mu\}$ は整列集合である.

定理 6.21　順序数からなる任意の集合は整列集合である.

演習問題

問題 6.1　全射 $f : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Q}$ で, 任意の $x, y \in \boldsymbol{Z}$ に対して $f(x+y) = f(x) + f(y)$ を満たすものは存在しないことを示せ. また, 写像 $g : \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{Z}$ が任意の $x, y \in \boldsymbol{Q}$ に対して $g(x+y) = g(x) + g(y)$ を満たせば, すべての $x \in \boldsymbol{Q}$ に対して $g(x) = 0$ であることを示せ.

問題 6.2　各 $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $D_n = \{0, 1\}$ とおくとき, 全射 $f : \prod_{n \in \boldsymbol{N}} D_n \to [0, 1]$ を構成せよ.

問題 6.3　次の集合の基数を求めよ.

(1) $\{p \in \boldsymbol{N} | \, p$ は素数 $\}$　(2) $\mathrm{Map}(\{1, 2, \ldots, n\}, \boldsymbol{N})$　(3) $\mathrm{Map}(\boldsymbol{N}, \{1, 2, \ldots, n\})$　(4) $\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \,\middle|\, a_n = 0 \text{ または } 2 \right\}$
(5) 変数 x に関する有理数係数の多項式全体の集合 $\boldsymbol{Q}[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n | \, n \in \boldsymbol{N}, a_i \in \boldsymbol{Q}\}$
(6) $\left\{\alpha \in \boldsymbol{C} \,\middle|\, {}^{\exists} f \in \boldsymbol{Q}[x], f \neq 0, f(\alpha) = 0 \right\}$　(7) $\left\{ f \in \mathrm{Map}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}) \,\middle|\, {}^{\forall} x, y \in \boldsymbol{Q} \text{ に対し } f(x+y) = f(x) + f(y) \right\}$
(8) $\{f \in \mathrm{Map}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}) | \, f$ は連続 $\}$

§7. Zorn の補題・整列可能定理

定義 7.1 順序集合 $(X, \leqq)$ が次の性質 $(*)$ をもつとき, 帰納的であるという.

$(*)$ X の任意の空でない全順序部分集合は上に有界である.

定理 7.2 (Zorn の補題) 帰納的な順序集合は極大元をもつ.

定理 7.3 (整列可能定理) 任意の集合 X に適当な順序 $\leqq$ を定義して, $(X, \leqq)$ を整列集合にできる.

定理 7.4 選択公理, Zorn の補題, 整列可能定理はすべて同値である.

系 7.5 $\Phi : \boldsymbol{W\text{-}ord} \to \boldsymbol{Set}$, $\varphi : \boldsymbol{W\text{-}ord}/\simeq \to \boldsymbol{Set}/\sim$ は全射である.

注意 7.6 定理 6.5, 定理 6.17, 系 6.18 の証明には選択公理が必要である.

定義 7.7 基数 $\mathfrak{a}$ に対し, 系 7.5 と定理 6.21 により $\varphi^{-1}(\mathfrak{a})$ は空でない整列集合だから $\min \varphi^{-1}(\mathfrak{a})$ が存在する. この順序数を基数 $\mathfrak{a}$ の始数という.

命題 7.8 $\alpha : \boldsymbol{Set}/\sim \to \boldsymbol{W\text{-}ord}/\simeq$ を $\alpha(\mathfrak{a}) = \min \varphi^{-1}(\mathfrak{a})$ で定めると α は次の性質をもつ.
(1) $\varphi \circ \alpha = id_{\boldsymbol{Set}/\sim}$ (2) $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ ならば $\alpha(\mathfrak{a}) < \alpha(\mathfrak{b})$ (3) $\mathfrak{a} \geqq \aleph_0 \Leftrightarrow \alpha(\mathfrak{a})$ は直前の元をもたない.

定理 7.9 基数からなる任意の集合は, 順序 $\leqq$ に関して整列集合になる.

定義 7.10 集合 X の部分集合に関する条件 C が次の性質 $(**)$ を持つとき, C を有限的な条件という.

$(**)$ X の部分集合 Y が C を満たす.$\Leftrightarrow$ Y のすべての有限部分集合が C を満たす.

命題 7.11 Zorn の補題は次の (1)∼(4) のいずれとも同値である.

(1) C を集合 X の部分集合に関する有限的な条件とし, $M = \{Y \subset X \mid Y$ は C を満たす.$\}$ が空でなければ $(M, \subset)$ は極大元をもつ.

(2) 任意の順序集合は, 包含関係に関して極大な全順序部分集合をもつ.

(3) 順序集合 $(X, \leqq)$ において, その空でないすべての全順序部分集合が X の中に上限をもてば, X は極大元をもつ.

(4) M を集合を要素にもつ集合とする. その包含関係に関する任意の全順序部分集合 N に対し, $\bigcup N \subset Y$ となる $Y \in M$ があるとき, $(M, \subset)$ は極大元をもつ.

演習問題

問題 7.1 K を体とし, V を K 上のベクトル空間とする. V の部分集合 S に属する任意の有限個のベクトルが 1 次独立であるとき, S を 1 次独立な部分集合と呼ぶ. V の 1 次独立な部分集合全体の集合を M とするとき $(M, \subset)$ の極大元は V を生成することを示せ. 従って, Zorn の補題により V の基底が存在する.

問題 7.2 (1) 関数 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ が任意の $x, y \in \boldsymbol{R}$ に対し $f(x+y) = f(x) + f(y)$ を満たすならば, 任意の $r \in \boldsymbol{Q}$, $x \in \boldsymbol{R}$ に対し, $f(rx) = rf(x)$ が成り立つことを示せ.

(2) 集合 $\{f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} \mid {}^\forall x, y \in \boldsymbol{R}$ に対し, $f(x+y) = f(x) + f(y)\}$ の基数を求めよ.

§8.　距離空間

定義 8.1　集合 X に対し, X の直積集合 $X \times X$ で定義された実数値関数 $d: X \times X \to \boldsymbol{R}$ で, 任意の $x, y, z \in X$ に対して次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすものを X の距離関数という. 距離関数 d が与えられた集合 X を距離空間といい, (X, d) で表す. なお, 距離関数 d を明示する必要がない場合は, (X, d) を X で表すことが多い.

(i) $d(x, y) \geqq 0$ であり, $d(x, y) = 0$ となるのは, $x = y$ の場合に限る.
(ii) $d(y, x) = d(x, y)$.
(iii) $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式).

記号 8.2　距離空間 (X, d) において, $a \in X$ と $r > 0$ に対し, X の部分集合 $B(a\,; r)$ を $B(a\,; r) = \{x \in X \,|\, d(x, a) < r\}$ で定め, 中心 a, 半径 ε の開球 (球体) という. 距離関数 d を明示する必要がある場合には, $B(a\,; r)$ を $B_d(a\,; r)$ で表し, 集合 X を明示する必要がある場合には, $B_X(a\,; r)$ で表す.

以下の例 8.3, 例 8.4 では p を 1 以上の実数または $p = \infty$ とする.

例 8.3　$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, 実数 $\|\boldsymbol{x}\|_p$ を p が 1 以上の実数の場合は $\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p = \infty$ の場合は $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$ で定めて $d_p : \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ を $d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_p$ で定義する. このとき d_p が $\boldsymbol{R}^n$ の距離関数になることを示す. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqq 0$ であり, $d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ となるのは, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ の場合に限ることと, $d_p(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成り立つことは d_p の定義から明らかである. $1 < p < \infty$ の場合に $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leqq d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_p(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が成り立つことを以下で示す.

(i) $\alpha, \beta \geqq 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ならば $\alpha\beta \leqq \dfrac{\alpha^p}{p} + \dfrac{\beta^q}{q}$ が成り立つことを示す.

関数 $f : [0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{\beta^q}{q} - \beta x$ で定めれば $f'(x) = x^{p-1} - \beta$ で, $p > 1$ より f は区間 $\left[0, \beta^{\frac{1}{p-1}}\right]$ で単調に減少し, 区間 $\left[\beta^{\frac{1}{p-1}}, \infty\right)$ で単調に増加する. 従って $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ に注意すれば, f は $\beta^{\frac{1}{p-1}}$ において最小値

$$f\left(\beta^{\frac{1}{p-1}}\right) = \frac{\beta^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{\beta^q}{q} - \beta\beta^{\frac{1}{p-1}} = \frac{\beta^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \beta^{\frac{p}{p-1}}\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \beta^{\frac{p}{p-1}} = 0$$

をとる. 従って $\alpha \geqq 0$ に対して $\dfrac{\alpha^p}{p} + \dfrac{\beta^q}{q} - \alpha\beta = f(\alpha) \geqq f\left(\beta^{\frac{1}{p-1}}\right) = 0$ が成り立つ.

(ii) $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ならば $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqq \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q$ が成り立つことを示す.

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ または $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ ならば上の不等式は両辺が 0 になって成立する. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ のとき $\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \neq 0$, $\|\boldsymbol{y}\|_q = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \neq 0$ だから, $\alpha = \dfrac{|x_i|}{\|\boldsymbol{x}\|_p}$, $\beta = \dfrac{|y_i|}{\|\boldsymbol{y}\|_q}$ を (i) の不等式に代入すれば

$$\frac{|x_i y_i|}{\|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q} \leqq \frac{|x_i|^p}{p\|\boldsymbol{x}\|_p^p} + \frac{|y_i|^q}{q\|\boldsymbol{y}\|_q^q} = \frac{|x_i|^p}{p\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p} + \frac{|y_i|^q}{q\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q}$$

が得られる. この不等式の両辺を $i = 1, 2, \ldots, n$ について加えれば

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i y_i|}{\|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q} \leqq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p}{p\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q}{q\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

が得られるため, 両辺に $\|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q$ をかければ $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqq \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q$ が得られる.

(iii) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p \leqq \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p$ が成り立つことを示す.

$|x_i+y_i| \leqq |x_i|+|y_i|$ の両辺に $|x_i+y_i|^{p-1}$ をかけて得られる $|x_i+y_i|^p \leqq |x_i||x_i+y_i|^{p-1}+|y_i||x_i+y_i|^{p-1}$ の両辺を $i=1,2,\dots,n$ について加えれば $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^p = \sum\limits_{i=1}^n |x_i+y_i|^p \leqq \sum\limits_{i=1}^n |x_i||x_i+y_i|^{p-1} + \sum\limits_{i=1}^n |y_i||x_i+y_i|^{p-1} \cdots (*)$ が得られる. $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ を満たす q をとれば $q=\dfrac{p}{p-1}$ だから, (ii) の不等式の y_i に $|x_i+y_i|^{p-1}$ を代入すると次の不等式が得られる.

$$\sum_{i=1}^n |x_i||x_i+y_i|^{p-1} \leqq \|\boldsymbol{x}\|_p \Big(\sum_{i=1}^n (|x_i+y_i|^{p-1})^q\Big)^{\frac{1}{q}} = \|\boldsymbol{x}\|_p \Big(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p\Big)^{\frac{p-1}{p}} = \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p-1}$$

同様に (ii) の不等式の x_i に $|x_i+y_i|^{p-1}$ を代入すれば $\sum\limits_{i=1}^n |y_i||x_i+y_i|^{p-1} \leqq \|\boldsymbol{y}\|_p\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p-1}$ が得られるため, これらの不等式と $(*)$ から $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^p \leqq \|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p-1} + \|\boldsymbol{y}\|_p\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p-1}$ が成り立つ. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ ならば (iii) の不等式は成り立つため, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$ と仮定すれば $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p \neq 0$ だから, 上の不等式の両辺を $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p^{p-1}$ で割って $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p \leqq \|\boldsymbol{x}\|_p+\|\boldsymbol{y}\|_p$ を得る.

$d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_p$ であることに注意すれば (iii) の不等式から, 次が成り立つ.

$$d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\|_p = \|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})\|_p \leqq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_p + \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|_p = d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + d_p(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$

例 8.4 $a,b\in\boldsymbol{R}$ $(a<b)$ に対し, 区間 $[a,b]$ の実数値連続関数全体の集合を $C[a,b]$ で表す. $f\in C[a,b]$ に対して p が 1 以上の実数の場合は $\|f\|_p = \left(\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ とおき, $p=\infty$ の場合は $x\in[a,b]$ を $|f(x)|$ に対応させる $[a,b]$ 上の関数の最大値を $\|f\|_\infty$ とおく. $d_p: C[a,b]\times C[a,b]\to\boldsymbol{R}$ を $d_p(f,g)=\|f-g\|_p$ により定義すると, d_p は $C[a,b]$ の距離関数になることを示す. 実際, $f,g\in C[a,b]$ に対して $d_p(f,g)\geqq 0$, $d_p(f,f)=0$ と $d_p(g,f)=d_p(f,g)$ が成り立つことは d_p の定義から明らかである. また「$d_\infty(f,g)=0$ ならば $f=g$」であることも d_∞ の定義から明らかである. $1\leqq p<\infty$ の場合に「$d_p(f,g)=0$ ならば $f=g$」が成り立つことと, $1<p<\infty$ の場合に $f,g,h\in C[a,b]$ に対して $d_p(f,h)\leqq d_p(f,g)+d_p(g,h)$ が成り立つことを以下で示す. $[a,b]$ において常に値が 0 である定数値関数も 0 で表す.

(i) $1\leqq p<\infty$ の場合に「$d_p(f,g)=0$ ならば $f=g$」が成り立つことを示す.

命題「$\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$ かつ "$x\in[a,b]$ ならば $\varphi(x)\geqq 0$" を満たす $\varphi\in C[a,b]$ は $\varphi=0$ に限る.」をまず示す.

$\varphi(c)\neq 0$ となる $c\in[a,b]$ が存在すれば, 仮定から $\varphi(c)>0$ である. $\varepsilon=\dfrac{\varphi(c)}{2}$ とおけば $\varepsilon>0$ で, φ の c における連続性から $\delta>0$ で条件「$x\in(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$ ならば $\varphi(x)\in(\varphi(c)-\varepsilon,\varphi(c)+\varepsilon)$」を満たすものがある. $\varphi(c)=2\varepsilon$ より $x\in(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$ ならば $\varphi(x)\in(\varepsilon,3\varepsilon)$ だから, $\varphi(x)>\varepsilon$ である. $c>a$ の場合, $\max\{c-\delta,a\}<d<c$ を満たす d を選べば $[d,c]\subset(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$ だから $x\in[d,c]$ ならば $\varphi(x)>\varepsilon$ である. 従って $x\in[a,b]$ ならば $\varphi(x)\geqq 0$ であることから $\displaystyle\int_a^d \varphi(x)\,dx\geqq 0$, $\displaystyle\int_c^b \varphi(x)\,dx\geqq 0$ であることに注意すれば $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^d \varphi(x)\,dx + \int_d^c \varphi(x)\,dx + \int_c^b \varphi(x)\,dx \geqq \int_d^c \varphi(x)\,dx \geqq \int_d^c \varepsilon\,dx = \varepsilon(c-d)>0$ が得られて仮定と矛盾する. $c<b$ の場合は $c<d<\min\{c+\delta,b\}$ を満たす d を選べば $[c,d]\subset(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$ だから $x\in[c,d]$ ならば $\varphi(x)>\varepsilon$ である. 従って $x\in[a,b]$ ならば $\varphi(x)\geqq 0$ であることから $\displaystyle\int_a^c \varphi(x)\,dx\geqq 0$, $\displaystyle\int_d^b \varphi(x)\,dx\geqq 0$ であることに注意すれば $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^c \varphi(x)\,dx + \int_c^d \varphi(x)\,dx + \int_d^b \varphi(x)\,dx \geqq \int_c^d \varphi(x)\,dx \geqq \int_c^d \varepsilon\,dx = \varepsilon(d-c)>0$ が得られて仮定と矛盾する. 以上から主張は示された.

$f,g\in C[a,b]$ が $d_p(f,g)=0$ を満たすとき, $\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|^p\,dx = 0$ だから $\varphi(x)=|f(x)-g(x)|^p$ によって $\varphi\in C[a,b]$ を定めれば φ は上で示した命題の条件を満たすため, $\varphi=0$ である. 従って, $f=g$ である.

(ii) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ ならば $f,g\in C[a,b]$ に対し, $\displaystyle\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqq \|f\|_p\|g\|_q$ が成り立つことを示す.

$f=0$ または $g=0$ ならば上の不等式は両辺が 0 になって成立する. $f,g\neq 0$ のとき (i) の結果から $\|f\|_p\neq 0$,

$\|g\|_q \neq 0$ だから, $x \in [a,b]$ に対し $\alpha = \dfrac{|f(x)|}{\|f\|_p}$, $\beta = \dfrac{|g(x)|}{\|g\|_q}$ を例 8.3 の (i) の不等式に代入すれば

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leqq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q} = \frac{|f(x)|^p}{p\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{|g(x)|^q}{q\displaystyle\int_a^b |g(x)|^q dx}$$

が得られる．この不等式の両辺を x について a から b まで積分すれば

$$\frac{\displaystyle\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx}{\|f\|_p\|g\|_q} \leqq \frac{\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p\,dx}{p\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{\displaystyle\int_a^b |g(x)|^q\,dx}{q\displaystyle\int_a^b |g(x)|^q dx} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

が得られるため, 両辺に $\|f\|_p\|g\|_q$ をかければ $\displaystyle\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqq \|f\|_p\|g\|_q$ が得られる．

(iii) $\|f+g\|_p \leqq \|f\|_p + \|g\|_p$ が成り立つことを示す．
$|f(x)+g(x)| \leqq |f(x)| + |g(x)|$ の両辺に $|f(x)+g(x)|^{p-1}$ をかけて得られる

$$|f(x)+g(x)|^p \leqq |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} + |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}$$

の両辺を x について a から b まで積分すれば

$$\|f+g\|_p^p = \int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx \leqq \int_a^b |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} dx + \int_a^b |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} dx \cdots (**)$$

が得られる．$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たす q をとれば $q = \dfrac{p}{p-1}$ だから, (ii) の不等式の $g(x)$ に $|f(x)+g(x)|^{p-1}$ を代入すると, 次の不等式が得られる．

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} dx &\leqq \|f\|_p \left(\int_a^b (|f(x)+g(x)|^{p-1})^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \|f\|_p \|f+g\|_p^{p-1}\end{aligned}$$

同様に (ii) の不等式の $f(x)$ に $|f(x)+g(x)|^{p-1}$ を代入すれば $\displaystyle\int_a^b |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} dx \leqq \|g\|_p\|f+g\|_p^{p-1}$ が得られるため, これらの不等式と $(**)$ から $\|f+g\|_p^p \leqq \|f\|_p\|f+g\|_p^{p-1} + \|g\|_p\|f+g\|_p^{p-1}$ が成り立つ．$f+g=0$ ならば (iii) の不等式は成り立つため, $f+g \neq 0$ と仮定すれば $\|f+g\|_p \neq 0$ だから, 上の不等式の両辺を $\|f+g\|_p^{p-1}$ で割って $\|f+g\|_p \leqq \|f\|_p + \|g\|_p$ を得る．

$d_p(f,g) = \|f-g\|_p$ であることに注意すれば (iii) の不等式から, 次が成り立つ．

$$d_p(f,h) = \|f-h\|_p = \|(f-g)+(g-h)\|_p \leqq \|f-g\|_p + \|g-h\|_p = d_p(f,g) + d_p(g,h)$$

例 8.5　1 以上の実数 p に対して $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ が収束するような実数列 $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\geqq 0}$ 全体からなる集合を H_p とする．このとき $\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ とおき, 関数 $d_p : H_p \times H_p \to \boldsymbol{R}$ を $d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_p$ で定めれば d_p は H_p の距離関数になることを以下で示す．

$(x_n)_{n\geqq 0}, (y_n)_{n\geqq 0} \in H_p$ ならば任意の自然数 k に対して $\displaystyle\sum_{n=0}^{k} |x_n|^p \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{k} |y_n|^p \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^p$ が成り立つため, $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{k} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\boldsymbol{x}\|_p$, $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{k} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\boldsymbol{y}\|_p$ が任意の自然数 k に対して成り立つ．従って例 8.3 の (iii) で示した不等式から, 任意の自然数 k に対して次の不等式が成り立つ．

$$\left(\sum_{n=0}^{k} |x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{n=0}^{k} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=0}^{k} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p \ \cdots (*)$$

故に $\sum_{n=0}^{k}|x_n+y_n|^p \leqq (\|\boldsymbol{x}\|_p+\|\boldsymbol{y}\|_p)^p$ が任意の自然数 k に対して成り立つため, 正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty}|x_n+y_n|^p$ は上に有界だから収束する. $\sum_{n=0}^{\infty}|rx_n|^p=\sum_{n=0}^{\infty}(|r||x_n|)^p=\sum_{n=0}^{\infty}|r|^p|x_n|^p=|r|^p\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^p$ であり, $\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^p$ は収束するため, $\sum_{n=0}^{\infty}|rx_n|^p$ も収束する. 以上から $(x_n+y_n)_{n\geqq 0},(rx_n)_{n\geqq 0}\in H_p$ である. そこで $\boldsymbol{x}=(x_n)_{n\geqq 0},\boldsymbol{y}=(y_n)_{n\geqq 0}\in H_p$ と $r\in\boldsymbol{R}$ に対して $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_n+y_n)_{n\geqq 0}$, $r\boldsymbol{x}=(rx_n)_{n\geqq 0}$ によって H_p の加法と実数倍を定めることによって H_p は $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間になる.

上で得た不等式 $(*)$ において $k\to\infty$ とすれば $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p=\Bigl(\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^p\Bigr)^{\frac{1}{p}}\leqq\|\boldsymbol{x}\|_p+\|\boldsymbol{y}\|_p$ が得られる. また, 上で示した等式 $\sum_{n=0}^{\infty}|rx_n|^p=|r|^p\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^p$ の両辺の p 乗根を考えれば $\|r\boldsymbol{x}\|_p=\Bigl(\sum_{n=0}^{\infty}|rx_n|^p\Bigr)^{\frac{1}{p}}=|r|\Bigl(\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^p\Bigr)^{\frac{1}{p}}=|r|\|\boldsymbol{x}\|$ が得られる. 以上から $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in H_p$, $r\in\boldsymbol{R}$ に対して $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p\leqq\|\boldsymbol{x}\|_p+\|\boldsymbol{y}\|_p$, $\|r\boldsymbol{x}\|_p=|r|\|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つ.

すべての項が 0 である数列を $\boldsymbol{0}$ で表すと $\boldsymbol{0}\in H_p$ である. $\boldsymbol{x}\in H_p$ に対し $\|\boldsymbol{x}\|_p\geqq 0$ であり, $\|\boldsymbol{x}\|_p=0$ は $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ と同値である. 従って $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in H_p$ に対して $d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_p\geqq 0$ であり $d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_p=0$ は $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ と同値である. 上で示した等式から $d_p(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|_p=\|(-1)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\|_p=|-1|\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_p=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_p=d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が得られる. さらに $\boldsymbol{z}\in H_p$ に対して $d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\|_p=\|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})\|_p\leqq\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_p+\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|_p=d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+d_p(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ が (2) で示した不等式から得られるため, d_p は H_p の距離関数である.

例 8.6 p を与えられた素数とし, a を $0<a<1$ を満たす実数の定数とする. $x\in\boldsymbol{Q}-\{0\}$ に対して $x=\dfrac{m}{n}p^{l_x}$ (ただし, m, n は p で割れない整数で, l_x は整数) を満たす整数 l_x は一通りに定まるため, 関数 $\nu_p:\boldsymbol{Q}-\{0\}\to\boldsymbol{R}$ を $\nu_p(x)=a^{l_x}$ で定義することができる. そこで, 関数 $d_p:\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}\to\boldsymbol{R}$ を $d_p(x,y)=\begin{cases}\nu_p(x-y) & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$ で定めると d_p は $\boldsymbol{Q}$ の距離関数であること以下で示す.

$x=\dfrac{m}{n}p^{l_x}$, $y=\dfrac{k}{q}p^{l_y}$ (ただし m, n, k, q は p で割れない整数, l_x, l_y は整数) とすれば $\nu_p(x)=a^{l_x}$, $\nu_p(y)=a^{l_y}$ である. $xy=\dfrac{km}{nq}p^{l_x+l_y}$ であり, km と nq はともに p で割れないため, $\nu_p(xy)=a^{l_x+l_y}=a^{l_x}a^{l_y}=\nu_p(x)\nu_p(y)$ が得られる. $x+y\neq 0$ の場合, 示すべき不等式 $\nu_p(x+y)\leqq\max\{\nu_p(x),\nu_p(y)\}$ の x と y を入れ替えても同じ不等式になるため, $l_x\leqq l_y$ と仮定してよい. このとき $x+y=\dfrac{mqp^{l_x}+knp^{l_y}}{nq}=\dfrac{\bigl(mq+knp^{l_y-l_x}\bigr)p^{l_x}}{nq}$ であり, $mq+knp^{l_y-l_x}$ は 0 でない整数だから $mq+knp^{l_y-l_x}=sp^r$ を満たす p で割れない整数 s と 0 以上の整数 r がただ 1 つ存在するため, $x+y=\dfrac{sp^{l_x+r}}{nq}$ である. $0<a<1$ だから a^x が x の単調減少関数であることに注意すれば $\nu_p(x+y)=a^{l_x+r}\leqq a^{l_x}=a^{\min\{l_x,l_y\}}=\max\{a^{l_x},a^{l_y}\}=\max\{\nu_p(x),\nu_p(y)\}$ が成り立つ.

x, y, z のうち 2 つが等しい場合は $d_p(x,z)\leqq\max\{d_p(x,y),d_p(y,z)\}$ は成り立つので x, y, z が相異なる場合を考える. d_p の定義と上の結果から次の不等式が成り立つ.

$$d_p(x,z)=\nu_p(x-z)=\nu_p((x-y)+(y-z))\leqq\max\{\nu_p(x-y),\nu_p(y-z)\}=\max\{d_p(x,y),d_p(y,z)\}\leqq d_p(x,y)+d_p(y,z)$$

また $d_p(x,y)\geqq 0$ であり, $d_p(x,y)=0$ が $x=y$ と同値であることは d_p の定義から明らかである. ν_p の定義から $x\in\boldsymbol{Q}-\{0\}$ に対し, $\nu_p(-x)=\nu_p(x)$ が成り立つため, $d_p(y,x)=d_p(x,y)$ が成り立つ. 以上から d_p は $\boldsymbol{Q}$ の距離関数である.

例 8.7 虚部が正の実数である複素数全体からなる集合を $\boldsymbol{H}$ で表す. $d_{\boldsymbol{H}}(z,w)=\log\dfrac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|}$ によって関数 $d_{\boldsymbol{H}}:\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{R}$ を定義すれば, $d_{\boldsymbol{H}}$ は $\boldsymbol{H}$ の距離関数である.

定義 8.8 $p\in X$, $r>0$ に対して, p からの距離が r より小さい点全体からなる集合を $B_d(p;r)$ (すなわち $B_d(p;r)=\{x\in X|\,d(x,p)<r$ で表し, これを半径 r 中心 p の開球または p の r 近傍という.

開球を用いて, 距離空間の部分集合から定まる集合が定義できる.

定義 8.9　(X,d) を距離空間, A を X の部分集合, $p \in X$ とする.

(1) 正の実数 r で, $B_d(p;r) \subset A$ を満たすものがあるとき, p を A の内点という. A の内点全体からなる集合を A の内部といい, A^i で表す.

(2) 正の実数 r で, $B_d(p;r) \cap A = \emptyset$ を満たすものがあるとき, p を A の外点という. A の外点全体からなる集合を A の外部といい, A^e で表す.

(3) 任意の正の実数 r に対して $B_d(p;r) \cap A \neq \emptyset$ であるとき, p を A の触点という. A の触点全体からなる集合を A の閉包といい, $\overline{A}$ で表す.

(4) 任意の正の実数 r に対して $B_d(p;r) \cap A \neq \emptyset$ かつ $B_d(p;r) \not\subset A$ であるとき, p を A の境界点という. A の境界点全体からなる集合を A の境界といい, ∂A で表す.

注意 8.10　(1) $B_d(p;r) \cap A = \emptyset$ は $B_d(p;r) \subset X - A$ と同値だから, p が A の外点であることと p が $X - A$ の内点であることは同値である. 従って $A^e = (X - A)^i$ である.

(2) $B_d(p;r) \not\subset A$ は $B_d(p;r) \cap (X - A) \neq \emptyset$ と同値だから, p が A の境界点であることと p が A と $X - A$ の両方の触点であることは同値である. 従って $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$ であり, この等式から $\partial(X - A) = \partial A$ が得られる.

(3) $p \in B_d(p;r)$ だから $B_d(p;r) \subset A$ ならば $p \in A$ であり, $p \in A$ ならば任意の $r > 0$ に対して $p \in B_d(p;r) \cap A$ だから $p \in \overline{A}$ である. また, $B_d(p;r) \cap A = \emptyset$ ならば $p \notin A$ である. 従って $A^i \subset A \subset \overline{A}$, $A^e \cap A = \emptyset$ である.

(4) p が A の内点でも外点ないことと, p が定義 8.9 の (4) の条件を満たすことと同値だから, $\partial A = X - (A^i \cup A^e)$ である. 従って $X = A^i \cup A^e \cup \partial A$ と $A^i \cap \partial A = A^e \cap \partial A = \emptyset$ が成り立つ. ((3) から $A^i \cap A^e = \emptyset$ も成り立つ.)

命題 8.11　(X,d) を距離空間, A を X の部分集合とすれば, $\overline{A} = A^i \cup \partial A$, $\overline{X - A} = X - A^i$ が成り立つ.

証明　定義 8.9 の (3) と (4) から, 境界点は触点だから $\partial A \subset \overline{A}$ であり, 注意 8.10 の (3) から $A^i \subset \overline{A}$ だから $A^i \cup \partial A \subset \overline{A}$ である. $p \in \overline{A}$ かつ $p \notin A^i$ ならば任意の $r > 0$ に対して $B_d(p;r) \cap A \neq \emptyset$ かつ $B_d(p;r) \not\subset A$ が成り立つため $p \in \partial A$ である. 故に $\overline{A} \subset A^i \cup \partial A$ も成り立つため, $\overline{A} = A^i \cup \partial A$ である.

$B_d(p;r) \cap (X - A) \neq \emptyset$ は $B_d(p;r) \not\subset A$ と同値だから $p \in \overline{X - A}$ は条件「任意の $r > 0$ に対して $B_d(p;r) \not\subset A$」と同値である. この条件は $p \in A^i$ であるための定義 8.9 の (1) の条件の否定だから, $p \in \overline{X - A}$ は $p \in X - A^i$ と同値である. 従って $\overline{X - A} = X - A^i$ が成り立つ. □

距離空間における点列の収束と写像の極限と深く関わっている開集合, 閉集合と呼ばれる概念を定義する.

定義 8.12　(X,d) を距離空間, A を X の部分集合とする. A の点がすべて内点であるとき, A を X の開集合といい, A の触点がすべて A に属するとき, A を X の閉集合という.

注意 8.13　(1) 注意 8.10 の (3) の 1 つめの式から, A が開集合であるためには, $A^i = A$ であることが必要十分であり, A が閉集合であるためには, $\overline{A} = A$ であることが必要十分である.

(2) A が空集合の場合も, 命題「$p \in A$ ならば p は A の内点である.」は真だから空集合も開集合である. またこのとき, A の触点は存在しないので, 命題「A の触点がすべて A に属する.」も真であるため, 空集合も閉集合である.

命題 8.14　(X,d) を距離空間, A を X の部分集合とすれば次の 3 つは同値である.

(i) A は閉集合である.　(ii) $X - A$ は開集合である.　(iii) $\partial A \subset A$

証明　$A = X - (X - A)$ だから命題 8.11 の 2 つ目の等式から $\overline{A} = \overline{X - (X - A)} = X - (X - A)^i$ である. 従って $\overline{A} = A$ は $X - (X - A)^i = A = X - (X - A)$ と同値である. $X - (X - A)^i = X - (X - A)$ の両辺の補集合を考えれば $(X - A)^i = X - A$ が得られるため, $\overline{A} = A$ は $(X - A)^i = X - A$ と同値である. 故に注意 8.13 の (1) から (i) と (ii) は同値である. A が閉集合ならば注意 8.13 の (1) と命題 8.11 の最初の等式から $A = \overline{A} = A^i \cup \partial A \supset \partial A$ である. 逆に $\partial A \subset A$ ならば命題 8.11 の最初の等式と注意 8.10 の (3) から $\overline{A} = A^i \cup \partial A \subset A \subset \overline{A}$ だから $\overline{A} = A$ が成り

立つため, A は閉集合である. $\square$

命題 8.15　距離空間 (X,d) に関する条件「$p,q\in X$ と $r,s>0$ に対し, $r+s>d(p,q)$ ならば $B_d(p\,;r)\cap B_d(q\,;s)\neq\emptyset$」を C とする. (ユークリッド空間 $(\boldsymbol{R}^n,d_n)$ はこの条件 C を満たす.)

(1) $B_d(p\,;r)$ は X の開集合, 従って $B_d(p\,;r)^i=B_d(p\,;r)$ である.

(2) $B_d(p\,;r)^e\supset\{x\in X|\,d(x,p)>r\}$ であり, (X,d) が C を満たせば, $B_d(p\,;r)^e=\{x\in X|\,d(x,p)>r\}$ である.

(3) $\partial B_d(p\,;r)\subset\{x\in X|\,d(x,p)=r\}$ であり, (X,d) が C を満たせば, $\partial B_d(p\,;r)=\{x\in X|\,d(x,p)=r\}$ である.

証明 (1) $q\in B_d(p\,;r)$ ならば $d(p,q)<r$ であり, 任意の $x\in B_d(q\,;r-d(p,q))$ は $d(q,x)<r-d(p,q)$ と定義 8.1 の (iii) より $d(p,x)\leqq d(p,q)+d(q,x)<r$ を満たし, $x\in B_d(p\,;r)$ となるため, $B_d(q\,;r-d(p,q))\subset B_d(p\,;r)$ である. よって $B_d(p\,;r)$ のすべての点は内点だから $B_d(p\,;r)$ は X の開集合である.

(2) $q\in X$ が $d(p,q)>r$ かつ $B_d(q\,;d(p,q)-r)\cap B_d(p\,;r)\neq\emptyset$ を満たすならば $x\in B_d(q\,;d(p,q)-r)\cap B_d(p\,;r)$ が存在するので, $d(q,x)<d(p,q)-r$ かつ $d(p,x)<r$ が成り立つ. 定義 8.1 の (ii), (iii) より $d(p,q)\leqq d(p,x)+d(x,q)=d(p,x)+d(q,x)$ だから上の二つの不等式を用いると $d(q,x)\geqq d(p,q)-d(p,x)>d(q,x)+r-d(p,x)>d(q,x)$ となって矛盾が生じる. 故に $B_d(q\,;d(p,q)-r)\cap B_d(p\,;r)=\emptyset$ で, この等式は $B_d(q\,;d(p,q)-r)\subset X-B_d(p\,;r)$ と同値だから q は $X-B_d(p\,;r)$ の内点になり $q\in B_d(p\,;r)^e$ を得る. 従って $\{x\in X|\,d(x,p)>r\}\subset B_d(p\,;r)^e$ である.

条件 C を仮定して, $q\in B_d(p\,;r)^e$ とすれば, $s>0$ で $B_d(p\,;r)\cap B_d(q\,;s)=\emptyset$ を満たすものが存在するため, 条件 C の対偶から $r+s\leqq d(p,q)$ が成り立つ. 故に $r\leqq d(p,q)-s<d(p,q)$ だから $q\in\{x\in X|\,d(x,p)>r\}$ となるため, $B_d(p\,;r)^e=\{x\in X|\,d(x,p)>r\}$ である.

(3) 注意 8.10 の (4) から $\partial B_d(p\,;r)=X-(B_d(p\,;r)^i\cup B_d(p\,;r)^e)$ だから (1) と (2) の結果から $q\in\partial B_d(p\,;r)$ ならば $d(x,p)=r$ である. 故に $\partial B_d(p\,;r)\subset\{x\in X|\,d(x,p)=r\}$ である.

条件 C を仮定すれば (2) より $B_d(p\,;r)^e=\{x\in X|\,d(x,p)>r\}$ で, (1) より $B_d(p\,;r)^i=\{x\in X|\,d(x,p)<r\}$ だから $\partial B_d(p\,;r)=X-(B_d(p\,;r)^i\cup B_d(p\,;r)^e)$ から $\partial B_d(p\,;r)=\{x\in X|\,d(x,p)=r\}$ である. $\square$

定義 8.16　$(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を X の点列とする. 任意の正の実数 ε に対し, 自然数 N で, 条件「$k\geqq N$ ならば $x_k\in B_d(p\,;\varepsilon)$」を満たすものが存在するとき, $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は $p\in X$ に収束するといい, このことを $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=p$ で表す.

注意 8.17　(1) 上の定義をさらに言い換えると, $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が $p\in X$ に収束するということは, 任意の正の実数 ε に対して, $x_k\notin B_d(p\,;\varepsilon)$ であるような自然数 k は有限個しかないということである. 従って, X の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が $p\in X$ に収束しないということは, 正の実数 ε_0 で, 条件「$x_k\notin B_d(p\,;\varepsilon_0)$ である自然数 k が無限に存在する.」を満たすものがあることである.

(2) X の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ に対し, 実数列 $(d(x_k,p))_{k\in\boldsymbol{N}}$ を考えると, この数列は常に 0 以上の値をとり, 上の定義から, $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が p に収束するためには $(d(x_k,p))_{k\in\boldsymbol{N}}$ が 0 に収束することが必要十分である.

定義 8.18　(X,d), (Y,d') を距離空間とし, X の部分集合 Z, Y の部分集合 W と写像 $f:Z\to W$ が与えられているとする. $p\in X$, $q\in Y$ とし, 任意の正の実数 ε に対し, 正の実数 δ で, 条件「“$x\in B_d(p\,;\delta)\cap Z$ かつ $x\neq p$” ならば $f(x)\in B_{d'}(q\,;\varepsilon)$」を満たすものが存在するとき, 写像 $f:Z\to W$ の p における極限は q であるといい, このことを $\lim\limits_{x\to p}f(x)=q$ で表す.

注意 8.19　上の定義の状況の下で, $x\in Z$ を $d(f(x),q)$ に対応させる Z 上の実数値関数を考えると $\lim\limits_{x\to p}f(x)=q$ であることと, $\lim\limits_{x\to p}d(f(x),q)=0$ であることは同値である.

極限の概念が定義できれば, 写像の連続性の概念が次のように定義できる.

定義 8.20　(X,d), (Y,d') を距離空間とする. 写像 $f:X\to Y$ が $p\in X$ に対し $\lim\limits_{x\to p}f(x)=f(p)$ を満たすとき f は点 p で連続であるという. さらに f が X の任意の点で連続であるとき, f を連続写像という.

注意 8.21　$B_d(p\,;\delta) \subset X$ かつ $f(p) \in B_{d'}(f(p)\,;\varepsilon)$ だから, f が p で連続であるとは, 任意の正の実数 ε に対して正の実数 δ で, 条件「$x \in B_d(p\,;\delta)$ ならば $f(x) \in B_{d'}(f(p)\,;\varepsilon)$」を満たすものが存在することである.

次の命題は, 連続写像が持つ重要な性質の一つである.

命題 8.22　(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z) を距離空間, $V \subset X$, $W \subset Y$ とし, 写像 $f : V \to W$ は $p \in X$, $q \in Y$ に対して $\lim_{x\to p} f(x) = q$ を満たし, 写像 $g : Y \to Z$ は q で連続であるとする. このとき $\lim_{x\to p} g(f(x)) = g(q)$ が成り立つ.

証明　g の q における連続性から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta_1 > 0$ で「$y \in B_{d_Y}(q\,;\delta_1) \cap Y$ ならば $g(y) \in B_{d_Z}(g(q)\,;\varepsilon)$」を満たすものがある. また, f についての仮定から, $\delta > 0$ で,「$x \in B_{d_X}(p\,;\delta) \cap X$ かつ $x \neq p$ ならば $f(x) \in B_{d_Y}(q\,;\delta_1)$」を満たすものがある. 従って $x \in B_{d_X}z(p\,;\delta) \cap X$ かつ $x \neq p$ ならば $g(f(x)) \in B_{d_Z}(g(q)\,;\varepsilon)$ となるため, $\lim_{x\to p} g(f(x)) = g(q)$ が成り立つ. □

注意 8.23　命題 8.22 の結果は $\lim_{x\to p} g(f(x)) = g\Bigl(\lim_{x\to p} f(x)\Bigr)$ とも表せる. これは, 連続関数が「極限をとる」という操作と交換可能であることを示している.

命題 8.24　点 $p \in X$ が X の部分集合 A の触点であるためであるためには, すべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_k \in A$ である点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ で p に収束するものが存在することが必要十分である. 従って次の等式が成り立つ.

$$\overline{A} = \{p \in X \mid \text{すべての}\, k \in \boldsymbol{N}\, \text{に対して}\, x_k \in A\, \text{かつ}\, p\, \text{に収束する点列}\, (x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}\, \text{が存在する.}\}$$

証明　$p \in X$ が A の触点ならば任意の $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $B_d\bigl(p\,;\frac{1}{k}\bigr) \cap A \neq \emptyset$ だから $x_k \in B_d\bigl(p\,;\frac{1}{k}\bigr) \cap A$ が選べる. このとき, すべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_k \in A$ かつ $d(x_k, p) < \frac{1}{k}$ だから $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は p に収束する. 逆にすべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_k \in A$ である点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ で p に収束するものが存在するならば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N で条件「$k \geqq N$ ならば $x_k \in B_d(p\,;\varepsilon)$」を満たすものが存在する. 従って $x_N \in B_d(p\,;\varepsilon) \cap A$ だから $B_d(p\,;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ となるため p は A の触点である. □

X の部分集合 A が閉集合であるためには, $\overline{A} \subset A$ であることが必要十分だから, 命題 8.24 より次の結果が得られる.

系 8.25　X の部分集合 A が閉集合であるためには, 条件「すべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_k \in A$ である点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が $p \in X$ に収束すれば $p \in A$ である.」が満たされることが必要十分である.

注意 8.26　距離空間 (X, d) において収束する点列全体の集合を $\mathrm{Seq}(X, d)$ で表し, 収束する点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ に対してその極限を対応させる写像 $\lim : \mathrm{Seq}(X, d) \to X$ を考える. すなわち $\lim_{k\to\infty} x_k = p$ のとき $\lim((x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}) = p$ とする. 系 8.25 は, X の部分集合 A が閉集合であるための必要十分条件が,「各項が A に属する点列の $\lim : \mathrm{Seq}(X, d) \to X$ による像が A に含まれる.」である, つまり “A が $\lim$ で閉じている” ことを主張している.

距離関数から定義される開球を用いて点列の収束や写像の極限の定義を行った (定義 8.16, 定義 8.18) が, 以下の命題 8.27 と命題 8.28 は, 開集合だけを用いて点列の収束と写像の極限が定義できることを示している.

命題 8.27　X の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が $p \in X$ に収束するためには, p を含む任意の開集合 U に対し, 自然数 N で, 条件「$k \geqq N$ ならば $x_k \in U$」を満たすものが存在することが必要十分である.

証明　$(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が $p \in X$ に収束するとし, U は p を含む開集合であるとする. 開集合の定義から, 正の実数 r で, $B_d(p\,;r) \subset U$ を満たすものがあり, $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が p に収束することから, 自然数 N で, 条件「$k \geqq N$ ならば $x_k \in B_d(p\,;r)$」を満たすものが存在する. $B_d(p\,;r) \subset U$ だから, 自然数 N は, 条件「$k \geqq N$ ならば $x_k \in U$」を満たす. 逆は, 命題 8.15 の (1) により開球が開集合であることから明らかである. □

命題 8.28　(X, d), (Y, d') を距離空間とし, $Z \subset X$, $W \subset Y$ と写像 $f : Z \to W$ が与えられているとする. 写像 f の

$p \in X$ における極限が $q \in Y$ であるためには, q を含む Y の任意の開集合 V に対し, p を含む X の開集合 U で, 条件「"$x \in U \cap Z$ かつ $x \neq p$" ならば $f(x) \in V$」を満たすものが存在することが必要十分である.

証明 f の p における極限が q であるとし, V は q を含む開集合であるとする. 開集合の定義から, 正の実数 r で, $B_{d'}(q\,;r) \subset V$ を満たすものがあり, f の p における極限が q であることから, 正の実数 δ で, 条件「"$x \in B_d(p\,;\delta) \cap Z$ かつ $x \neq p$" ならば $f(x) \in B_{d'}(q\,;r)$」を満たすものが存在する. 開球 $B_d(p\,;\delta)$ は p を含む開集合だから, $U = B_d(p\,;\delta)$ とすればよい.

逆に, q を含む任意の開集合 V に対し, p を含む開集合 U で, 条件「"$x \in U \cap Z$ かつ $x \neq p$" ならば $f(x) \in V$」を満たすものが存在すると仮定する. 任意の正の実数 ε に対して $B_{d'}(q\,;\varepsilon)$ は q を含む開集合だから, 仮定から p を含む開集合 U で, 条件「"$x \in U \cap Z$ かつ $x \neq p$" ならば $f(x) \in B_{d'}(q\,;\varepsilon)$」を満たすものが存在する. 開集合の定義から, 正の実数 δ で, $B_d(p\,;\delta) \subset U$ を満たすものがあるため, 条件「"$x \in B_d(p\,;\delta) \cap Z$ かつ $x \neq p$" ならば $f(x) \in B_{d'}(q\,;\varepsilon)$」が満たされる. 故に f の p における極限は q である. □

注意 8.29 距離空間 (X,d) の開集合全体からなる集合を $\mathcal{O}_d$ で表すと, X の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が収束するかどうか, また収束する場合はどの点に収束するかは, 距離関数 d そのものより, d から定まる X の部分集合を要素とする集合 $\mathcal{O}_d$ のみに依存することが命題 8.27 から分かる. 故に, 集合 X に与えられた 2 種類の距離関数 d, d' が異なっていても, $\mathcal{O}_d = \mathcal{O}_{d'}$ ならば, X の任意の点 p に対して, 距離空間 (X,d) において p に収束する点列全体の集合と距離空間 (X,d) において p に収束する点列全体の集合は一致する. 命題 8.28 から写像の極限についても同様のことが言える.

点列の極限を用いれば, 写像の極限は次のように言い換えられる.

命題 8.30 (X,d), (Y,d') を距離空間, f を X の部分集合 Z から Y の部分集合 W への写像とし, $p \in X$, $q \in Y$ とする. f の p における極限が q であることは, 条件「すべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_k \in Z$, $x_k \neq p$ かつ $\lim_{k\to\infty} x_k = p$」を満たす X の任意の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ に対して $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = q$ が成り立つことと同値である.

証明 f の p における極限が q であることを仮定し, X の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は, 条件

$$\text{「すべての } k \in \boldsymbol{N} \text{ に対して } x_k \in Z,\ x_k \neq p \text{ かつ } \lim_{k\to\infty} x_k = p\text{」} \cdots (i)$$

を満たすとする. f についての仮定から, 任意の正の実数 ε に対して, 正の実数 δ で, 条件

$$\text{「}x \in Z \text{ かつ } 0 < d(x,p) < \delta \text{ ならば } d'(f(x),q) < \varepsilon\text{」} \cdots (ii)$$

を満たすものが存在する. また $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ についての仮定 (i) から, 上の δ に対し, 自然数 N で, 条件

$$\text{「}k \geqq N \text{ ならば } x_k \in Z,\ x_k \neq p \text{ かつ } d(x_k,p) < \delta\text{」}$$

を満たすものが存在する. 従って $k \geqq N$ ならば, $x = x_k$ としたときに条件 (ii) の仮定が満たされて

$$\text{「}k \geqq N \text{ ならば } d'(f(x_k),q) < \varepsilon\text{」}$$

が成り立つため, $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = q$ である.

上で示した主張の逆の主張を示すために, 逆の主張の対偶である『f の p における極限が q でないならば, 条件「すべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_k \in Z$, $x_k \neq p$ かつ $\lim_{k\to\infty} x_k = p$」を満たす X の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ で $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = q$ が成り立たないものが存在する.』を示す.

f の p における極限が q でないとき, ある正の実数 ε_0 で, 次の条件を満たすものがある.

「任意の正の実数 δ に対して $f(x) \notin B_{d'}(q\,;\varepsilon_0)$ を満たす p と異なる $x \in B_d(p\,;\delta) \cap Z$ が存在する.」

従って, 任意の自然数 k に対して $f(x_k) \notin B_{d'}(q\,;\varepsilon_0)$ である p と異なる $x_k \in B_d\big(p\,;\frac{1}{k}\big) \cap Z$ が存在する. そこで, X の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を考えると, すべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_k \in Z$, $x_k \neq p$ であり, $0 < d(x_k,p) < \dfrac{1}{k}$ だから例 3.13 と命題 3.14 の (2) から, $\lim_{k\to\infty} d(x_k,p) = 0$ である. 従って, 注意 8.17 の (2) により $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は p に収束する. ところが, 任意の自然数 k に対して $f(x_k) \notin B_{d'}(q\,;\varepsilon_0)$ だから, 注意 8.17 の (1) によって $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = q$ は成り立たないため, 上の主張が示された. □

系 8.31　(X,d), (Y,d') を距離空間, f を X から Y への写像とし, $p\in X$ とする. このとき, f が p で連続であることは, p に収束する X の任意の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ に対して $\displaystyle\lim_{k\to\infty} f(x_k)=f(p)$ が成り立つことと同値である.

証明　f が p で連続であると仮定し, $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を p に収束する X の点列とする. 注意 8.21 から, 任意の正の実数 ε に対して, 正の実数 δ で次の条件を満たすものが存在する.

「$d(x,p)<\delta$ ならば $d'(f(x),f(p))<\varepsilon$」 $\cdots$ (i)

また $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は p に収束するため, 上の δ に対し, 自然数 N で, 条件「$k\geqq N$ ならば $d(x_k,p)<\delta$」を満たすものが存在する. 故に $k\geqq N$ ならば, $x=x_k$ としたときに条件 (i) の仮定が満たされて「$k\geqq N$ ならば $d'(f(x_k),f(p))<\varepsilon$」が成り立つため, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} f(x_k)=f(p)$ である.

逆に p に収束する X の任意の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ に対して $\displaystyle\lim_{k\to\infty} f(x_k)=f(p)$ が成り立つならば, 命題 8.30 により f は p で連続である. □

命題 8.32　(X,d), (Y,d') を距離空間とし, 写像 $f:X\to Y$ が与えられているとする.

(1) f が $p\in X$ で連続であるためには, $f(p)$ を含む Y の任意の開集合 V に対し, p が $f^{-1}(V)$ の内点であることが必要十分である.

(2) f が連続写像であるためには, Y の任意の開集合 V に対し, $f^{-1}(V)$ が X の開集合であることが必要十分である.

証明　(1) f が $p\in X$ で連続であるとし, V は Y の開集合で $f(p)$ を含むものとする. 命題 8.28 から, p を含む X の開集合 U で, 条件「"$x\in U$ かつ $x\neq p$" ならば $f(x)\in V$」を満たすものが存在する. ここで $f(x)\in V$ は $x\in f^{-1}(V)$ と同値であ, $f(p)\in V$ だから $p\in f^{-1}(V)$ となるため, U は条件「$x\in U$ ならば $f(x)\in V$」を満たす. 従って $U\subset f^{-1}(V)$ である. U は p を含む開集合だから p は U の内点である. 故に p は U を含む集合 $f^{-1}(V)$ の内点でもある. 逆に, $f(p)$ を含む Y の任意の開集合 V に対し, p が $f^{-1}(V)$ の内点であると仮定する. p は $f^{-1}(V)$ の内点だから, $r>0$ で $B_d(p;r)\subset f^{-1}(V)$ を満たすものが存在する. そこで $U=B_d(p;r)$ とおけば, 例 8.15 の (1) から, U は p を含む X の開集合であり, $x\in U$ ならば $x\in f^{-1}(V)$, すなわち $f(x)\in V$ だから命題 8.28 によって f の p における極限は $f(p)$ である. 従って f は p で連続である.

(2) Y の任意の開集合 V に対し, $f^{-1}(V)$ が X の開集合であることと, $f^{-1}(V)$ の任意の点が $f^{-1}(V)$ の内点であることは同値だから, (1) より主張が成り立つ. □

注意 8.29 でも述べたように, 命題 8.27, 命題 8.28, 命題 8.32 により, 点列の収束や写像の極限, 連続性は距離関数そのものよりも, 距離関数から定まる開集合からなる集合に依存する概念であるといえる. そこで, 次の定義を行う.

定義 8.33　距離空間 (X,d) の開集合全体からなる集合を距離関数 d から定まる X の位相といい, $\mathcal{O}_d$ で表す.

距離関数を明示する必要がある場合は, 距離空間 (X,d) から距離空間 (Y,d') への写像を $f:(X,d)\to(Y,d')$ のように表す. X に 2 種類の距離関数が与えられた場合, 次のことが成り立つ.

定理 8.34　集合 X に 2 種類の距離関数 d と d' が与えられているとき, 次の 4 つの命題は同値である.

(i) $\mathcal{O}_{d'}\subset\mathcal{O}_d$

(ii) X の恒等写像 $id_X:(X,d)\to(X,d')$ は連続である.

(iii) 任意の $p\in X$ と $\varepsilon>0$ に対し, $\delta>0$ で, 条件「$d(x,p)<\delta$ ならば $d'(x,p)<\varepsilon$」を満たすものがある.

(iv) 任意の $p\in X$ に対し, X の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が距離空間 (X,d) で p に収束すれば, $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は距離空間 (X,d') でも p に収束する.

証明　(i) が成り立つならば, 任意の $V\in\mathcal{O}_{d'}$ に対して $id_X^{-1}(V)=V\in\mathcal{O}_d$ だから, 命題 8.32 の (2) によって $id_X:(X,d)\to(X,d')$ は連続である. (ii) が成り立つならば, 任意の $V\in\mathcal{O}_{d'}$ に対し, 命題 8.32 から $V=id_X^{-1}(V)$ は (X,d) の開集合であるため, $V\in\mathcal{O}_d$ である. 従って $\mathcal{O}_{d'}\subset\mathcal{O}_d$ が成り立つ.

$d'(id_X(x), id_X(p)) = d'(x,p)$ に注意すれば, 連続性の定義から, (ii) と (iii) は同値である.

(ii) が成り立つと仮定し, X の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が距離空間 (X,d) で p に収束するならば, 系 8.31 を $X=Y$, $f=id_X$ に対して用いると, id_X の連続性から $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は距離空間 (X,d') でも p に収束するため, (iv) が成り立つ. 逆に (iv) が成り立てば, 再び系 8.31 を $X=Y$, $f=id_X$ に対して用いると, id_X は X の任意の点 p で連続になるため, (ii) が成り立つ. □

定義 8.35 上の条件の一つが成り立つとき, 位相 $\mathcal{O}_d$ は $\mathcal{O}_{d'}$ より強い (細かい) といい, $\mathcal{O}_{d'}$ は $\mathcal{O}_d$ より弱い (粗い) という. さらに $\mathcal{O}_d=\mathcal{O}_{d'}$ であるとき, d と d' は同値な距離であるという.

距離空間 (X,d) と $p\in X$ に対し, p に収束する X の点列全体からなる集合を $\mathrm{Seq}_p(X,d)$ で表せば, 定理 8.34 の (iv) は「任意の $p\in X$ に対して $\mathrm{Seq}_p(X,d)\subset\mathrm{Seq}_p(X,d')$ である.」と言い換えられるので次の結果が得られる.

系 8.36 集合 X に 2 つの距離関数 d, d' が与えられているとき, すべての $p\in X$ に対して $\mathrm{Seq}_p(X,d)=\mathrm{Seq}_p(X,d')$ であるためには, $\mathcal{O}_d=\mathcal{O}_{d'}$ であることが必要十分である.

系 8.37 集合 X に 2 種類の距離関数 d と d' が与えられているとする. 正の実数の定数 K で条件「すべての $x,y\in X$ に対して $d'(x,y)\leqq Kd(x,y)$ が成り立つ.」を満たすものがあれば $\mathcal{O}_{d'}\subset\mathcal{O}_d$ である.

証明 任意の $p\in X$ と $\varepsilon>0$ に対し, $\delta=\dfrac{\varepsilon}{K}$ とおく. このとき $d(x,p)<\delta$ ならば $d'(x,p)\leqq Kd(x,p)<K\delta=\varepsilon$ が成り立ち, 定理 8.34 の (iii) が満たされるため, $\mathcal{O}_{d'}\subset\mathcal{O}_d$ である. □

注意 8.38 正の実数の定数 K, L で条件「すべての $x,y\in X$ に対して $Ld(x,y)\leqq d'(x,y)\leqq Kd(x,y)$ が成り立つ.」を満たすものがあれば $\mathcal{O}_{d'}=\mathcal{O}_d$ であることが上の結果から分かる.

命題 8.39 例 8.3 における $\boldsymbol{R}^n$ の距離 d_p $(1\leqq p\leqq\infty)$ はすべて同値である.

証明 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n), \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\boldsymbol{R}^n$ に対し, $d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ の定義からすべての $i=1,2,\dots,n$ に対して $|x_i-y_i|\leqq d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成り立つため, 次の不等式が得られる.

$$d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\left(\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqq\left(\sum_{i=1}^n d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^p\right)^{\frac{1}{p}}=n^{\frac{1}{p}}d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

また, すべての $j=1,2,\dots,n$ に対して $|x_j-y_j|\leqq\left(\sum\limits_{i=1}^n|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成り立つため,

$$d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|,\dots,|x_n-y_n|\}\leqq d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

が得られる. 故に注意 8.38 から, $\mathcal{O}_{d_p}=\mathcal{O}_{d_\infty}$ であり, 任意の $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して $\boldsymbol{R}^n$ の点列 $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が距離空間 $(\boldsymbol{R}^n,d_p)$ で $\boldsymbol{p}$ に収束するためには, $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が距離空間 $(\boldsymbol{R}^n,d_\infty)$ で $\boldsymbol{p}$ に収束することが必要十分である. □

次の例は距離関数が異なっていて, 位相が一致しない例である. このような場合の 2 つの距離関数は「本質的に異なる」と考えられる.

例 8.40 p を 1 以上の実数とし, d_p, d_∞ を例 4.3 で定めた $C[a,b]$ の距離関数とする. $f,g\in C[a,b]$ に対し, $d_\infty(f,g)$ の定義からすべての $x\in[a,b]$ に対して $|f(x)-g(x)|\leqq d_\infty(f,g)$ が成り立つため, 次の不等式が得られる.

$$d_p(f,g)=\left(\int_a^b|f(x)-g(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\leqq\left(\int_a^b d_\infty(f,g)^pdx\right)^{\frac{1}{p}}=(b-a)^{\frac{1}{p}}d_\infty(f,g)$$

従って, 系 8.37 から $\mathcal{O}_{d_p}\subset\mathcal{O}_{d_\infty}$ が成り立つ. $C[a,b]$ の点列 (関数列) $(f_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が距離空間 $(C[a,b],d_\infty)$ で関数 g に収束すれば, $\lim\limits_{k\to\infty}d_\infty(f_k,g)=0$ だから, 上の不等式で $f=f_k$ とすれば, 命題 3.14 により $\lim\limits_{k\to\infty}d_p(f_k,g)=0$ が得られる. 故に距離空間 $(C[a,b],d_p)$ でも $(f_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は g に収束する.

以後, 式を見やすくするために, $a=-1$, $b=1$ の場合を考える. 各自然数 k に対して $f_k\in C[-1,1]$ を以下のよう

に定めれば, f_k は常に 0 以上の値をとり, 0 で最大値 1 をとる.

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 - k|x| & |x| \leqq \frac{1}{k} \\ 0 & \frac{1}{k} \leqq |x| \leqq 1 \end{cases}$$

$[-1,1]$ で値が常に 0 である定数値関数も 0 で表せば, すべての自然数 k に対して $d_\infty(f_k, 0) = 1$ だから, $(f_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は距離空間 $(C[-1,1], d_\infty)$ で 0 に収束しない. 一方

$$d_p(f_k, 0) = \left(\int_{-1}^{1} |f_k(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} (1 - k|x|)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(2\int_{0}^{\frac{1}{k}} (1 - kx)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{2}{k(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

だから $\displaystyle\lim_{k\to\infty} d_p(f_k, 0) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{2}{k(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} = 0$ となるため, 距離空間 $(C[-1,1], d_p)$ では $(f_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は 0 に収束することが分かる. 故に系 8.36 の対偶から, $\mathcal{O}_{d_p} \neq \mathcal{O}_{d_\infty}$ である.

演習問題

問題 8.1　$\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{C}$ とする. V を $\boldsymbol{F}$ 上のベクトル空間とし, $\rho: V \to \boldsymbol{R}$ を次の条件を満たす実数値関数とする.

(*i*) すべての $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\rho(x) \geqq 0$ であり, $\rho(\boldsymbol{x}) = 0$ となるのは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の場合に限る.

(*ii*) $r \in \boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{x} \in V$ に対し, $\rho(r\boldsymbol{x}) = |r|\rho(\boldsymbol{x})$ が成り立つ.

(*iii*) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対し, $\rho(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \leqq \rho(\boldsymbol{x}) + \rho(\boldsymbol{y})$ が成り立つ.

このとき $d: V \times V \to \boldsymbol{R}$ を $d_\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \rho(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$ により定義すれば, d は V の距離関数になることを示せ.
(上の 3 つの条件を満たす関数 ρ を V のノルムという.)

問題 8.2　ρ_p を例 8.4 の (2) で与えた $C[a,b]$ のノルム $\rho_p(f) = \|f\|_p$ とする. $1 \leqq q \leqq p < \infty$ のとき任意の $f \in C[a,b]$ に対し, $(b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\rho_q(f) \leqq \rho_p(f) \leqq (b-a)^{\frac{1}{p}}\rho_\infty(f)$ が成り立つことを示せ. また, $\displaystyle\lim_{p\to\infty}\rho_p(f) = \rho_\infty(f)$ が成り立つことを示せ. さらに, $1 \leqq p < \infty$ のとき不等式 $c\rho_\infty(f) \leqq \rho_p(f)$ が任意の $f \in C[a,b]$ に対して成り立つような $c > 0$ は存在しないことを示せ.

問題 8.3　ρ をベクトル空間 V のノルムとするとき, V の距離関数 d_ρ に関して, $\rho: V \to \boldsymbol{R}$ は連続であることを示せ.

問題 8.4　(1) $\alpha \in [a,b]$ に対し, 関数 $e_\alpha: C[a,b] \to \boldsymbol{R}$ を $e_\alpha(f) = f(\alpha)$ で定めれば, e_α は $C[a,b]$ の距離関数 d_1 に関して連続であることを示せ.

(2) $F: C[a,b] \to C[a,b]$ を $\displaystyle F(f)(t) = \int_a^t f(s)ds$ で定めると, F は距離空間 $(C[a,b], d_1)$ から距離空間 $(C[a,b], d_\infty)$ への連続写像であることを示せ.

(3) $C^1[a,b] = \{f \in C[a,b] |\, \varepsilon > 0$ と連続な導関数をもつ関数 $g: (a-\varepsilon, b+\varepsilon) \to \boldsymbol{R}$ で $t \in [a,b]$ ならば $f(t) = g(t)$ となるようなものが存在する.$\}$ により $C[a,b]$ の部分集合 $C^1[a,b]$ 定め, $D: C^1[a,b] \to C[a,b]$ を $D(f) = \frac{df}{dt}$ で定める. このとき D は距離空間 $(C[a,b], d_\infty)$ の部分距離空間としての距離空間 $C^1[a,b]$ から距離空間 $(C[a,b], d_1)$ への写像として連続ではないことを示せ.

問題 8.5　有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ に例 8.6 で定義した距離関数 d_p を与えた距離空間 $(\boldsymbol{Q}, d_p)$ において $\boldsymbol{Z}_{(p)} = \left\{\frac{n}{m} \in \boldsymbol{Q}\,\middle|\, m \text{ は } p \text{ の倍数ではない}\right\}$ は閉集合であり, 同時に開集合であることを示せ.

問題 8.6　例 8.6 の距離空間 $(\boldsymbol{Q}, d_p)$ で次の数列は収束するかどうか答えよ.

(1) $1, p^{-1}, p^{-2}, \dots, p^{-n}, \dots$　(2) $1, p, p^2, \dots, p^n, \dots$　(3) $1, 1+p, 1+p+p^2, \dots, \sum_{i=0}^{n} p^k, \dots$

問題 8.7　d を集合 X 上の距離関数とする. $d^*(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$, $d'(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ により関数 d^*, d' :

$X \times X \to \boldsymbol{R}$ を定めるとき, これらはともに X の距離関数になることを示せ. さらに, d^*, d' はいずれも d と同値な距離関数であることを示せ.

問題 8.8　$p < q$ のとき, 例 8.4 における 距離関数 d_q から定まる $C[a,b]$ の位相は, 距離関数 d_p から定まる $C[a,b]$ の位相より強くなることを示せ. また, これらの位相が一致することがあるか?

§9.　位相空間

位相空間の概念を定義する際, 距離空間における開集合全体の集合が満たす次の命題の条件を考え, 集合 X の位相とは, 同じ条件を満たす X の部分集合を要素とする集合として定義する.

命題 9.1　距離空間 (X,d) に対し, X の開集合全体からなる集合 $\mathcal{O}_d$ は以下の条件を満たす.
(1) $X, \emptyset \in \mathcal{O}_d$. (2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O}_d$ ならば $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_d$. (3) すべての $i \in I$ に対して $O_i \in \mathcal{O}_d$ ならば $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}_d$.

証明 (1) 任意の $p \in X$ に対して $B_d(p;1) \subset X$ だから p は X の内点である. 従って X のすべての点は内点だから X は開集合になるため $X \in \mathcal{O}_d$ である. また, 注意 5.7 から空集合は開集合だから $\emptyset \in \mathcal{O}_d$ である.

(2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ として, 任意の $p \in O_1 \cap O_2$ を取ると, O_1 と O_2 は開集合だから, p は O_1 の内点で, O_2 の内点でもあるので $r_1, r_2 > 0$ で $B_d(p;r_1) \subset O_1$, $B_d(p;r_2) \subset O_2$ を満たすものがある. 故に $B_d(p;r_1) \cap B_d(p;r_2) \subset O_1 \cap O_2$ が成り立つ. $r = \min\{r_1, r_2\}$ とおけば $0 < r \leqq r_1, r_2$ だから $B_d(p;r) \subset B_d(p;r_1)$ かつ $B_d(p;r) \subset B_d(p;r_2)$ が成り立つので $B_d(p;r) \subset B_d(p;r_1) \cap B_d(p;r_2) \subset O_1 \cap O_2$ となり, p は $O_1 \cap O_2$ の内点である. 従って $O_1 \cap O_2$ は開集合だから $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_d$ である.

(3) $p \in \bigcup_{i\in I} O_i$ ならば $p \in O_j$ を満たす $j \in I$ がある. O_j は開集合だから p は O_j の内点で, $r > 0$ で $B_d(p;r) \subset O_j$ を満たすものがある. このとき $B_d(p;r) \subset O_j \subset \bigcup_{i\in I} O_i$ だから p は $\bigcup_{i\in I} O_i$ の内点である. 従って $\bigcup_{i\in I} O_i$ は開集合だから $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}_d$ である. □

定義 9.2　X を集合, $\mathcal{O}$ を $P(X)$ の部分集合とする. $\mathcal{O}$ が次の 3 つの条件を満たすとき, $\mathcal{O}$ を X の位相構造 (あるいは, たんに位相) と呼び, 対 $(X,\mathcal{O})$ を位相空間という. また, $\mathcal{O}$ の要素を X の開集合という.

(O1) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$　　(O2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.　　(O3) $\Gamma \subset \mathcal{O}$ ならば $\bigcup_{O\in\Gamma} O \in \mathcal{O}$.

X の位相を一つ固定して考える場合は 「位相空間 $(X,\mathcal{O})$」 というかわりに, 「位相空間 X」 ということが多い.

注意 9.3　上の (O2) は「$\Gamma \subset \mathcal{O}$ かつ Γ は有限集合ならば $\bigcap_{O\in\Gamma} O \in \mathcal{O}$」と同値である. また, (O3) をいいかえると, 「$(O_i)_{i\in I}$ が $\mathcal{O}$ の要素からなる X の部分集合族ならば $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}$.」 となる.

定義 9.4　$(X,\mathcal{O})$ を位相空間, A を X の部分集合, $p \in X$ とする.

(1) X の開集合 O で, $p \in O$ かつ $O \subset A$ を満たすものが存在するとき, p を A の内点という. A の内点全体からなる集合を A の内部といい, A^i で表す.

(2) X の開集合 O で, $p \in O$ かつ $O \cap A = \emptyset$ を満たすものが存在するとき, p を A の外点という. A の外点全体からなる集合を A の外部といい, A^e で表す.

(3) p を含む X の任意の開集合 O に対して $O \cap A \neq \emptyset$ であるとき, p を A の触点という. A の触点全体からなる集合を A の閉包といい, $\overline{A}$ で表す.

(4) p を含む X の任意の開集合 O に対して $O \cap A \neq \emptyset$ かつ $O \not\subset A$ であるとき, p を A の境界点という. A の境界点全体からなる集合を A の境界といい, ∂A で表す.

注意 9.5　以下で O は X の開集合とする.

(1) $O\cap A=\emptyset$ は $O\subset X-A$ と同値だから, p が A の外点であることと p が $X-A$ の内点であることは同値である. 従って $A^e=(X-A)^i$ である.

(2) $O\not\subset A$ は $O\cap(X-A)\neq\emptyset$ と同値だから, p が A の境界点であることと p が A と $X-A$ の両方の触点であることは同値である. 従って $\partial A=\overline{A}\cap\overline{X-A}$ であり, この等式から $\partial(X-A)=\partial A$ が得られる.

(3) $p\in O$ かつ $O\subset A$ ならば $p\in A$ であり, $p\in A$ ならば p を含む X の任意の開集合 O に対して $p\in O\cap A$ だから $p\in\overline{A}$ である. また, $p\in O$ かつ $O\cap A=\emptyset$ ならば $p\notin A$ である. 従って $A^i\subset A\subset\overline{A}$, $A^e\cap A=\emptyset$ である.

(4) p が A の内点でも外点ないことと, p が定義 9.4 の (4) の条件を満たすことと同値だから, $\partial A=X-(A^i\cup A^e)$ である. 従って $X=A^i\cup A^e\cup\partial A$ と $A^i\cap\partial A=A^e\cap\partial A=\emptyset$ が成り立つ. ((3) から $A^i\cap A^e=\emptyset$ も成り立つ.)

命題 9.6 $(X,\mathcal{O})$ を位相空間, A を X の部分集合とすれば, $\overline{A}=A^i\cup\partial A$, $\overline{X-A}=X-A^i$ が成り立つ.

証明 定義 9.4 の (3) と (4) から, 境界点は触点だから $\partial A\subset\overline{A}$ であり, 注意 9.5 の (3) から $A^i\subset\overline{A}$ だから $A^i\cup\partial A\subset\overline{A}$ である. $p\in\overline{A}$ かつ $p\notin A^i$ ならば p を含む X の任意の開集合 O に対して $O\cap A\neq\emptyset$ かつ $O\not\subset A$ が成り立つため $p\in\partial A$ である. 故に $\overline{A}\subset A^i\cup\partial A$ も成り立つため, $\overline{A}=A^i\cup\partial A$ である.

$O\cap(X-A)\neq\emptyset$ は $O\not\subset A$ と同値だから $p\in\overline{X-A}$ は条件「p を含む X の任意の開集合 O に対して $O\not\subset A$」と同値である. この条件は $p\in A^i$ であるための定義 9.4 の (1) の条件の否定だから, $p\in\overline{X-A}$ は $p\in X-A^i$ と同値である. 従って $\overline{X-A}=X-A^i$ が成り立つ. □

位相空間 $(X,\mathcal{O})$ において, 開集合とは $\mathcal{O}$ の要素のことなので改めて定義する必要はない. そこで「近傍」と「閉集合」の概念だけ定義する.

定義 9.7 $(X,\mathcal{O})$ を位相空間, A を X の部分集合 とする.

(1) $p\in X$ に対し, A が $p\in A^i$ を満たすとき, A を p の近傍といい, 開集合である p の近傍を p の開近傍という. p の近傍全体からなる集合を $\mathcal{V}(p)$ で表す. また, $\mathcal{V}(p)$ の部分集合 $\mathcal{V}^*(p)$ で条件 「$V\in\mathcal{V}(p)$ ならば $W\subset V$ を満たす $W\in\mathcal{V}^*(p)$ がある.」 を満たすものを p の基本近傍系という.

(2) A の触点がすべて A に属するとき, A を X の閉集合という.

注意 9.8 (1) 注意 9.5 の (3) から, $A\subset\overline{A}$ は常に成り立つため, A が閉集合であるためには, $\overline{A}=A$ であることが必要十分である.

(2) A が空集合の場合は A の触点は存在しないので, 命題「A の触点がすべて A に属する.」は真であるため, 空集合は閉集合である.

命題 9.9 $(X,\mathcal{O})$ を位相空間とし, X の部分集合 A に対して, A に含まれる開集合全体からなる集合を Γ とおく. このとき $A^i=\displaystyle\bigcup_{O\in\Gamma}O$ が成り立ち, A^i は開集合である. O が A に含まれる開集合ならば $O\subset A^i$ が成り立つ. 従って, A が開集合であること $A^i=A$ であることは同値である.

証明 $p\in A^i$ であることは $p\in O$ かつ $O\subset A$ を満たす X の開集合 O が存在することと同値で, このことは Γ の定義により, $p\in\displaystyle\bigcup_{O\in\Gamma}O$ であることと同値だから $A^i=\displaystyle\bigcup_{O\in\Gamma}O$ が成り立つ. 従って, (O3) によって A^i は開集合であり, Γ は A に含まれる開集合をすべて含むため, O が A に含まれる開集合ならば $O\subset A^i$ である. □

注意 9.10 注意 9.5 の (2), (3) と命題 9.6 より $A\cap\partial A=A\cap\overline{A}\cap\overline{X-A}=A\cap(X-A^i)=A-A^i$ が得られるため, 命題 9.9 より A が X の開集合であること $A\cap\partial A=\emptyset$ であることは同値である.

命題 9.9 は後述の命題 9.15 と対をなす命題である.

命題 9.11 $(X,\mathcal{O})$ を位相空間, A を X の部分集合とすれば次の 3 つは同値である.

(i) A は閉集合である.　(ii) $X-A$ は開集合である.　(iii) $\partial A\subset A$

証明 $A = X - (X - A)$ だから命題 9.6 の 2 つ目の等式から $\overline{A} = \overline{X - (X - A)} = X - (X - A)^i$ である．従って $\overline{A} = A$ は $X - (X - A)^i = A = X - (X - A)$ と同値である．$X - (X - A)^i = X - (X - A)$ の両辺の補集合を考えれば $(X - A)^i = X - A$ が得られるため, $\overline{A} = A$ は $(X - A)^i = X - A$ と同値である．故に注意 9.8 の (1) と命題 9.9 から (i) と (ii) は同値である．

A が閉集合ならば注意 9.8 の (1) と命題 9.6 の最初の等式から $A = \overline{A} = A^i \cup \partial A \supset \partial A$ である．逆に $\partial A \subset A$ ならば命題 9.6 の最初の等式と注意 9.5 の (3) から $\overline{A} = A^i \cup \partial A \subset A \subset \overline{A}$ だから $\overline{A} = A$ が成り立つため, A は閉集合である． □

注意 9.12 X の部分集合 A が閉集合ならば, 上の命題から $X - A$ は開集合で, $A = X - (X - A)$ だから, A は開集合 $X - A$ の補集合である．逆に A が X の開集合 O の補集合ならば $A = X - O$ だから $X - A = O$ であり, O は開集合だから上の命題より, A は閉集合である．従って X の部分集合 A が閉集合であるためには, A が開集合の補集合であることが必要十分である．

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の開集合全体の集合 $\mathcal{O}$ は定義 9.2 の 3 つの条件を満たすものであった．一方, 定義 9.7 の (2) で定義した X の閉集合は上で示したように, 開集合の補集合に他ならないという事実を用いて, 次に X の閉集合全体からなる集合の性質を定義 9.2 の 3 つの条件から導く．次の補題は命題 2.9 の (3) を集合族を用いて言い換えた結果である．

補題 9.13 集合 X の部分集合からなる集合族 $(S_i)_{i\in I}$ に対し, 次の等式が成り立つ．

$$\bigcap_{i\in I}(X - S_i) = X - \bigcup_{i\in I} S_i, \qquad \bigcup_{i\in I}(X - S_i) = X - \bigcap_{i\in I} S_i$$

とくに $I = \{1, 2\}$ の場合, $(X - S_1) \cap (X - S_2) = X - (S_1 \cup S_2)$, $(X - S_1) \cup (X - S_2) = X - (S_1 \cap S_2)$ が成り立つ．

命題 9.14 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, X の部分集合を要素とする集合 $\mathcal{F}$ について次の条件 (C1), (C2), (C3) を考える．

(C1) $X, \emptyset \in \mathcal{F}$. (C2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ならば $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$. (C3) すべての $i \in I$ に対して $F_i \in \mathcal{F}$ ならば $\bigcap_{i\in I} F_i \in \mathcal{F}$.

(1) X の閉集合全体からなる集合を $\mathcal{F}$ とすれば, $\mathcal{F}$ は上の 3 つの条件を満たす．

(2) X の部分集合を要素とする集合 $\mathcal{F}$ が上の 3 つの条件を満たすとき, $\mathcal{O} = \{O \subset X | X - O \in \mathcal{F}\}$ により X の部分集合を要素とする集合 $\mathcal{O}$ を定めれば $\mathcal{O}$ は X の位相である．

証明 (1) 注意 9.8 の (2) から $\emptyset \in \mathcal{F}$ であり, X の触点は X の点だから $X \in \mathcal{F}$ も成り立つ．$F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ならば命題 9.11 から $X - F_1, X - F_2 \in \mathcal{O}$ だから 補題 9.13 と (O2) より $X - (F_1 \cup F_2) = (X - F_1) \cap (X - F_2) \in \mathcal{O}$ である．従って命題 9.11 から $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$ が得られる．すべての $i \in I$ に対して $F_i \in \mathcal{F}$ ならば 命題 9.11 から $X - F_i \in \mathcal{O}$ だから 補題 9.13 と (O3) より $X - \bigcap_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I}(X - F_i) \in \mathcal{O}$ である．従って命題 9.11 から $\bigcap_{i\in I} F_i \in \mathcal{F}$ が得られる．

(2) (C1) から $X, \emptyset \in \mathcal{F}$ だから $\emptyset = X - X \in \mathcal{O}$, $X = X - \emptyset \in \mathcal{O}$ である．$O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ ならば $X - O_1, X - O_2 \in \mathcal{F}$ だから (C2) から $X - (O_1 \cap O_2) = (X - O_1) \cup (X - O_2) \in \mathcal{F}$ である．従って $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$ である．
すべての $i \in I$ に対して $O_i \in \mathcal{O}$ ならば, すべての $i \in I$ に対して $X - O_i \in \mathcal{F}$ だから (C3) により $X - \bigcup_{i\in I} O_i = \bigcap_{i\in I}(X - O_i) \in \mathcal{F}$ である．故に $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}$ である． □

命題 9.15 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, X の部分集合 A に対して, A を含む閉集合全体からなる集合を Δ とおく．このとき $\overline{A} = \bigcap_{F\in\Delta} F$ が成り立ち, $\overline{A}$ は閉集合である．F が A を含む閉集合ならば $F \supset \overline{A}$ が成り立つ．

証明 $p \in \overline{A}$ とする．$F \in \Delta$ で $p \notin F$ となるものが存在すれば, $p \in X - F$ で, $X - F$ は開集合かつ $p \in \overline{A}$ だから $(X - F) \cap A \neq \emptyset$ である．このとき A の要素で F に属さないものが存在することになるので $A \subset F$ と矛盾する．従って, すべての $F \in \Delta$ に対して $p \in F$ だから $p \in \bigcap_{F\in\Delta} F$ である．

$p \in \bigcap_{F\in\Delta} F$ とする．p を含む X の開集合 O で $O \cap A = \emptyset$ を満たすものが存在すれば $A \subset X - O$ で, $X - O$ は閉

集合だから, $X-O\in\Delta$ である. $p\notin X-O$ だから, p がすべての $F\in\Delta$ に含まれていることと矛盾する. 故に p を含む X の任意の開集合 O に対して $O\cap A\neq\emptyset$ だから $p\in\overline{A}$ である. 以上から $\overline{A}=\bigcap_{F\in\Delta}F$ である.

命題 9.14 から, 閉集合の共通部分は閉集合だから $\overline{A}$ は閉集合である. また, Δ は A を含む閉集合をすべて含むため, F が A を含む閉集合ならば $F\supset\bigcap_{F\in\Delta}F=\overline{A}$ である. □

定義 9.16 $(X,\mathcal{O})$ を位相空間とする.

(1) X の各点 x がたかだか可算な要素からなる基本近傍系をもつとき, $(X,\mathcal{O})$ は第 1 可算公理を満たすという.

(2) X の部分集合 M について $\overline{M}=X$ が成り立つとき, M は X において稠密 (dense) であるという.

(3) X の稠密な部分集合で, たかだか可算なものが存在するとき $(X,\mathcal{O})$ は可分 (separable) であるという.

例 9.17 距離空間 (X,d) に対し, 距離関数 d から定まる X の位相を $\mathcal{O}_d$ とする. $p\in X$ に対し, $\left\{B_d\left(p;\frac{1}{n}\right)\,\middle|\,n\in\boldsymbol{N}\right\}$ は p の基本近傍系だから $(X,\mathcal{O}_d)$ は第 1 可算公理を満たす.

命題 9.18 集合 X の各要素 x に対し, $P(X)$ の部分集合 $\mathcal{V}(x)$ が与えられたとき, $\mathcal{O}=\{O\subset X|\,x\in O\text{ならば}O\in\mathcal{V}(x)\}$ により $\mathcal{O}$ を定める. $\mathcal{O}$ が X の位相になるための必要十分条件は, 任意の $x\in X$ に対し $\mathcal{V}(x)$ が次の (N1)~(N4) を満たすことである.

(N1) $X\in\mathcal{V}(x)$　　(N2) $V\in\mathcal{V}(x)$ ならば $x\in V$

(N3) $V\in\mathcal{V}(x)$, $W\supset V$ ならば $W\in\mathcal{V}(x)$　　(N4) $V_1,V_2\in\mathcal{V}(x)$ ならば $V_1\cap V_2\in\mathcal{V}(x)$

(N5) $V\in\mathcal{V}(x)$ に対し, $W\in\mathcal{V}(x)$ で $W\subset V$ かつ条件「$y\in W$ ならば $V\in\mathcal{V}(y)$」を満たすものが存在する.

命題 9.19 集合 X に対し, 写像 $a:P(X)\to P(X)$ が与えられているとする. $\mathcal{F}=\{F\subset X|\,a(F)=F\}$ により $\mathcal{F}$ を定めたとき, $\mathcal{F}$ が命題 9.15 の条件を満たすための必要十分条件は a が次の (A1)~(A4) を満たすことである.

(A1) $a(\emptyset)=\emptyset$　　(A2) $a\circ a=a$

(A3) $M\subset X$ ならば $a(M)\supset M$　　(A4) $M,N\subset X$ ならば $a(M\cup N)=a(M)\cup a(N)$

命題 9.20 集合 X に対し, 写像 $i:P(X)\to P(X)$ が与えられているとする. $\mathcal{O}=\{O\subset X|\,i(O)=O\}$ により $\mathcal{O}$ を定めたとき, $\mathcal{O}$ が X の位相になるための必要十分条件は i が次の (I1)~(I4) を満たすことである.

(I1) $i(X)=X$　　(I2) $i\circ i=i$

(I3) $M\subset X$ ならば $i(M)\subset M$　　(I4) $M,N\subset X$ ならば $i(M\cap N)=i(M)\cap i(N)$

命題 9.21 集合 X に対し, 集合 $\mathcal{T}(X)$, $\mathcal{C}(X)$, $\mathcal{N}(X)$, $\mathcal{A}(X)$, $\mathcal{I}(X)$ を以下のように定める.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(X)&=\{\mathcal{O}\subset P(X)|\,\mathcal{O}\text{は定義 9.2 の (O1)~(O3) を満たす.}\}\\
\mathcal{C}(X)&=\{\mathcal{F}\subset P(X)|\,\mathcal{F}\text{は命題 9.14 の (C1)~(C3) を満たす.}\}\\
\mathcal{N}(X)&=\{(\mathcal{V}(x))_{x\in X}|\,\text{任意の }x\in X\text{ に対し, }\mathcal{V}(x)\subset P(X)\text{であり, }\mathcal{F}\text{は命題 9.18 の (N1)~(N5) を満たす.}\}\\
\mathcal{A}(X)&=\{a:P(X)\to P(X)|\,a\text{は命題 9.19 の (A1)~(A4) を満たす.}\}\\
\mathcal{I}(X)&=\{i:P(X)\to P(X)|\,i\text{は命題 9.20 の (I1)~(I4) を満たす.}\}
\end{aligned}$$

により定め, $\varphi_1:\mathcal{T}(X)\to\mathcal{C}(X)$, $\varphi_2:\mathcal{T}(X)\to\mathcal{N}(X)$, $\varphi_3:\mathcal{C}(X)\to\mathcal{A}(X)$, $\varphi_4:\mathcal{T}(X)\to\mathcal{I}(X)$ をそれぞれ,

$$\varphi_1(\mathcal{O})=\{F\subset X|\,X-F\in\mathcal{O}\}\qquad\varphi_2(\mathcal{O})=\left(\left\{V\subset X\,\middle|\,{}^{\exists}O\in\mathcal{O}\,(x\in O\subset V)\right\}\right)_{x\in X}$$
$$\varphi_3(\mathcal{F})(M)=\bigcap\{F\in\mathcal{F}|\,F\supset M\}\qquad\varphi_4(\mathcal{O})(M)=\bigcup\{O\in\mathcal{O}|\,O\subset M\}$$

により定めれば, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 はすべて全単射であり, これらの逆写像は以下で与えられる.

$$\varphi_1^{-1}(\mathcal{F})=\{O\subset X|\,X-O\in\mathcal{F}\}\qquad\varphi_2^{-1}((\mathcal{V}(x))_{x\in X})=\{O\subset X|\,x\in O\text{ならば}O\in\mathcal{V}(x)\}$$
$$\varphi_3^{-1}(a)=\{F\subset X|\,a(F)=F\}\qquad\varphi_4^{-1}(i)=\{O\subset X|\,i(O)=O\}$$

定義 9.22 $(X,\mathcal{O})$ を位相空間, A を X の部分集合とする. $x\in X$ が $x\in\overline{A-\{x\}}$ を満たすとき, x を A の集積点と

いい, A の集積点全体からなる集合を A^d で表す．また, A の点であるが A の集積点ではない点を A の孤立点といい, A の孤立点全体からなる集合を A^s で表す．

命題 9.23　$(X, \mathcal{O})$ を位相空間, A を X の部分集合とする．

(1) $x \in A^s$ であるためには $O \in \mathcal{O}$ で $O \cap A = \{x\}$ を満たすものが存在することが必要十分である．

(2) $\overline{A} = A^d \cup A^s$ である．

証明 (1) $x \in A^s$ とすると, $x \in A$ かつ $x \notin \overline{A - \{x\}}$ である．従って x を含む開集合 O で $O \cap (A - \{x\}) = \emptyset$ を満たすものが存在する．$x \in O$ であり, $A = \{x\} \cup (A - \{x\})$ だから

$$O \cap A = O \cap (\{x\} \cup (A - \{x\})) = (O \cap \{x\}) \cup (O \cap (A - \{x\})) = \{x\} \cup \emptyset = \{x\}.$$

逆に, $O \in \mathcal{O}$ で $O \cap A = \{x\}$ を満たすものが存在すると仮定すると, $x \in O$, $x \in A$ かつ $O \cap (A - \{x\}) \subset O \cap A = \{x\}$ であり, $O \cap (A - \{x\})$ は x を含まないため $O \cap (A - \{x\}) = \emptyset$ である．このことと O は x を含む開集合だから, $x \notin \overline{A - \{x\}}$ である．従って $x \in A^s$ である．

(2) $x \in A^d$ ならば $x \in \overline{A - \{x\}} \subset \overline{A}$ だから $A^d \subset \overline{A}$ である．$x \in A^s$ ならば $x \in A \subset \overline{A}$ だから $A^s \subset \overline{A}$ である．故に $A^d \cup A^s \subset \overline{A}$ である．$x \in \overline{A} - A^d$ ならば $x \notin \overline{A - \{x\}}$ だから x を含む開集合 O で $O \cap (A - \{x\}) = \emptyset$ を満たすものが存在する．一方 $x \in \overline{A}$ より $O \cap A \neq \emptyset$ が成り立つ．もし $x \notin A$ ならば $A - \{x\} = A$ だから $O \cap A = O \cap (A - \{x\}) = \emptyset$ となり, 矛盾が生じるため $x \in A$ である．従って $x \in A^s$ だから $\overline{A} - A^d \subset A^s$ は成り立つため $\overline{A} \subset A^d \cup A^s$ が得られる．以上から $\overline{A} = A^d \cup A^s$ である．□

演習問題

問題 9.1　(1) X を n 個の要素からなる有限集合とするとき X の位相構造全体よりなる集合 $\mathcal{T}(X)$ の要素の個数は 2^{2^n} 個以下であることを証明せよ．

(2) 3 つの要素からなる集合 $X = \{x, y, z\}$ の位相構造をすべて書き上げよ．さらに, 根性のある人は, 4 つの要素からなる集合の位相構造全体の集合の要素の個数を求めよ．

問題 9.2　$(P, \triangleleft)$ を半順序集合とする．$x \in P$ に対し, $[x] = \{y \in P \,|\, x \triangleleft y\}$ とおき, P の部分集合の集合 $\mathcal{O}_\triangleleft$ を $\mathcal{O}_\triangleleft = \{O \subset P | \, x \in O \text{ならば} \, [x] \subset O\}$ で定義する．

(1) $\mathcal{O}_\triangleleft$ は P の位相になることを示せ．

(2) 任意の $x \in P$ に対し, $[x] \in \mathcal{O}_\triangleleft$ であることを示せ．このことから $x \in P$ の任意の近傍は $[x]$ を含んでいることを示せ．

(3) $M \subset P$ のとき, $M^i = \{x \in P | \, [x] \subset M\}$, $\overline{M} = \{x \in P | \, [x] \cap M \neq \emptyset\}$ が成り立つことを示せ．従って, とくに $\overline{\{y\}} = \{x \in P | \, x \triangleleft y\}$ である．さらに, $(\overline{M})^i = \{x \in X | \, x \triangleleft y \text{ならば} \, [y] \cap M \neq \emptyset\}$ を示し, これを用いて $O \in \mathcal{O}_\triangleleft$ に対し, $(\overline{O})^i = O$ であることと, 任意の $x \in X - O$ に対して $[y] \cap O = \emptyset$ かつ $x \triangleleft y$ を満たす $y \in X$ が存在することは同値であることを示せ．

(4) P の部分集合 F が閉集合であるためには「$(x \triangleleft y$ かつ $y \in F)$ ならば $x \in F$」が成り立つことが必要十分であることを示せ．$(P, \triangleleft)$ が順序完備な全順序集合のとき, P の空でない閉集合 F は $F = P$ であるか, F に最大元 m が存在して $F = \{x \in X | \, x \triangleleft m\}$ の形になることを示せ．

(5) P の部分集合 M について次の 2 つの条件 (i), (ii) は同値であることを示せ．

(i) $U, V \in \mathcal{O}_\triangleleft$, $U \cap M \neq \emptyset$, $V \cap M \neq \emptyset$ ならば $U \cap V \cap M \neq \emptyset$

(ii) $x, y \in M$ ならば $z \in M$ で $x \triangleleft z$ かつ $y \triangleleft z$ を満たすものが存在する．

問題 9.3　$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, X における関係 $\triangleleft$ を $x, y \in X$ に対し,「$x \triangleleft y \Leftrightarrow x \in \overline{\{y\}}$」で定める．

(1) $\triangleleft$ は X の半順序であることを示せ．

(2) X の関係 $\triangleleft$ を用いて問題 9.2 の方法で定義される X の新しい位相 $\mathcal{O}_\triangleleft$ は, もとの位相 $\mathcal{O}$ より強いことを示せ.

(3) $(P, \triangleleft)$ を半順序集合とし, P に問題 9.2 で定義した位相 $\mathcal{O}_\triangleleft$ を与える. このとき, $x, y \in P$ に対して, $x \in \overline{\{y\}}$ であるためには $x \triangleleft y$ であることが必要十分であることを示せ.

問題 9.4 X を位相空間, $x \in X$, $V \subset X$ とする. このとき, V が x の近傍でないことと, $x \in \overline{X - V}$ であることは同値であることを示せ. 従って, $\mathcal{V}(x) = \left\{ V \subset X \,\middle|\, x \notin \overline{X - V} \right\}$ である.

問題 9.5 命題 9.18, 命題 9.19, 命題 9.20, 命題 9.21 を証明せよ.

問題 9.6 (1) 集合 X に対し, $\mathcal{O} = \{O \subset X \,|\, X - O \text{は有限集合}\} \cup \{\emptyset\}$ とおくと, $\mathcal{O}$ は X の位相になることを証明せよ. さらに, X が無限集合ならば, X の任意の無限部分集合は X で稠密であることを示せ.

(2) $X = \boldsymbol{R}$ の場合に上の位相は, 第 1 可算公理を満たさないことを示せ.

問題 9.7 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, A を X の部分集合とするとき, 以下のことを証明せよ.

(1) O が X の開集合ならば, $O \cap \overline{A} \subset \overline{O \cap A}$. (2) $(\overline{(\overline{A})^i})^i = (\overline{A})^i$, $\overline{(\overline{A^i})^i} = \overline{A^i}$. (3) $\partial\left(\overline{A}\right) \subset \partial A$, $\partial(A^i) \subset \partial A$.

問題 9.8 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分集合 A, B に対し, $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$ が成り立つことを示せ. また, $\partial(A \cup B) \neq \partial A \cup \partial B$ となる例をあげよ.

§10. 連続写像

位相空間の間の写像の極限の概念は次のように定義される.

定義 10.1 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし, $Z \subset X$, $W \subset Y$ と写像 $f : Z \to W$ および $p \in \overline{Z}$ が与えられているとする. $q \in Y$ の任意の開近傍 V に対し, p を含む X の開集合 U で, 条件「“$x \in U \cap Z$ かつ $x \neq p$” ならば $f(x) \in V$」を満たすものが存在するとき, f の p における極限は q であるという.

写像 $f : X \to Y$ が $p \in X$ で連続であるとは, f の p における極限が $f(p)$ であることと定義されるが, 定義 10.1 において $Z = X$, $f(p) \in V$ であることから, 写像 f が $p \in X$ で連続であることの定義は次のように言い直される.

定義 10.2 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし, $f : X \to Y$ を写像, $p \in X$ とする. $f(p)$ の任意の開近傍 V に対し, p の開近傍 U で, 条件「$x \in U$ ならば $f(x) \in V$」を満たすものが存在するとき, f は p において連続であるという. f が X のすべての点において連続であるとき, f を連続写像という. なお X と Y の位相を明示する必要がある場合は, 写像 $f : X \to Y$ を $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ と表す.

注意 10.3 (1) 定義 10.2 の条件「$x \in U$ ならば $f(x) \in V$」は 1 つの式 $f(U) \subset V$ で表され, さらにこれは $U \subset f^{-1}(V)$ と同値である.

(2) $f(p)$ の Y における基本近傍系 $\mathcal{V}^*(f(p))$ が与えられたとき, 任意の $W \in \mathcal{V}^*(f(p))$ に対して $f(U) \subset W$ となる $U \in \mathcal{V}(p)$ が存在すれば f は p において連続である. 実際 $f(p)$ の任意の開近傍 V に対し, $W \subset V$ を満たす $W \in \mathcal{V}^*(f(p))$ があるため $f(U) \subset W$ となる $U \in \mathcal{V}(p)$ が存在し, U^i は p の開近傍で $f(U^i) \subset f(U) \subset W \subset V$ が成り立つ. 逆に f が p において連続ならば, 任意の $W \in \mathcal{V}^*(f(p))$ に対して W^i は $f(p)$ の開近傍だから $f(U) \subset W^i$ を満たす p の開近傍があるため $f(U) \subset W$ である.

命題 10.4 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし, $f : X \to Y$ を写像とする.

(1) f が $p \in X$ において連続であるためには, $f(p)$ を含む任意の開集合 V に対し, $f^{-1}(V)$ が p の近傍であることが必要十分である.

(2) f が連続写像であるためには, Y の任意の開集合 V に対し, $f^{-1}(V)$ が X の開集合であることが必要十分である.

証明 (1) f が $p \in X$ において連続ならば $f(p)$ を含む任意の開集合 V に対し, 注意 10.3 から p を含む X の開集合 U で $U \subset f^{-1}(V)$ を満たすものが存在する. 従って内点の定義 9.4 から p は $f^{-1}(V)$ の内点である.

$f(p)$ を含む Y の任意の開集合 V に対し,$f^{-1}(V)$ が p の近傍ならば p を含む X の開集合 U で, $U \subset f^{-1}(V)$ を満たすものが存在する. 故に定義 10.2 と注意 10.3 から f は p において連続である.

(2) Y の任意の開集合 V に対し, $f^{-1}(V)$ が X の開集合であることと, $f^{-1}(V)$ の任意の点が $f^{-1}(V)$ の内点であることは命題 9.9 により同値だから, (1) より主張が成り立つ. □

閉集合を用いて写像が連続であるための条件が以下のように与えられる.

命題 10.5 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とする. 写像 $f : X \to Y$ が連続写像であるためには, Y の任意の閉集合 F に対して $f^{-1}(F)$ が X の閉集合であることが必要十分である.

証明 f を連続写像とし, F を Y の閉集合とすれば, $Y - F$ は Y の開集合だから, 命題 10.4 の (2) から $f^{-1}(Y - F)$ は X の開集合である. 補題 3.9 の (3) から $f^{-1}(Y - F) = X - f^{-1}(F)$ だから, $f^{-1}(F)$ は X の閉集合である.

逆に Y の任意の閉集合 F に対して $f^{-1}(F)$ が X の閉集合であると仮定して, O を Y の開集合とすれば $Y - O$ は Y の閉集合だから $f^{-1}(Y - O)$ は X の閉集合である. 補題 3.9 の (3) から $f^{-1}(Y - O) = X - f^{-1}(O)$ だから, $f^{-1}(O)$ は X の開集合である. 故に命題 10.4 の (2) から f は連続写像である. □

命題 10.6 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$, $(Z, \mathcal{O}_Z)$ を位相空間とし, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像とする. f が $p \in X$ において連続, g が $f(p) \in Y$ において連続ならば, 合成写像 $g \circ f : X \to Z$ は p において連続である. 従って連続写像の合成写像は連続写像である.

証明 g が $f(p)$ で連続であることから $(g \circ f)(p) = g(f(p))$ を含む任意の開集合 W に対し, $f(p)$ を含む開集合 V で $g(V) \subset W$ を満たすものがある. また, f が p で連続であることから p を含む開集合 U で $f(U) \subset V$ を満たすものがある. 従って $(g \circ f)(U) = g(f(U)) \subset g(V) \subset W$ が成り立つため, $g \circ f$ は p で連続である. □

定義 10.7 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする.

(1) 連続写像 $f : X \to Y$ に対し, 連続写像 $g : Y \to X$ で, $g \circ f = id_X$ かつ $f \circ g = id_Y$ を満たすものが存在するとき, f を同相写像 (または位相同型写像) という. $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の間に同相写像が存在するとき, $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は同相 (または位相同型) であるという.

(2) 写像 $f : X \to Y$ が条件「O が X の開集合ならば $f(O)$ は Y の開集合」を満たすとき, f を開写像と呼び, 条件「F が X の閉集合ならば $f(F)$ は Y の閉集合」を満たすとき, f を閉写像と呼ぶ.

注意 10.8 連続な全単射は同相写像であるとは限らないが, 連続な全単射が開写像または閉写像であれば, 同相写像である. 逆に同相写像は開写像であり, 閉写像でもある.

命題 10.9 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を写像とする.

(1) f が $p \in X$ で連続であるためには $p \in \overline{A}$ を満たす X の任意の部分集合 A に対して $f(p) \in \overline{f(A)}$ が成り立つことが必要十分である.

(2) f が連続写像であるためには X の任意の部分集合 A に対して $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ が成り立つことが必要十分である.

証明 (1) f が p で連続で, $A \subset X$ は $p \in \overline{A}$ を満たすとする. 仮定から $f(p)$ の任意の開近傍 V に対し, p の開近傍 U で $f(U) \subset V$ を満たすものがある. $p \in \overline{A}$ より $U \cap A \neq \emptyset$ だから $q \in U \cap A$ が存在するため $f(q) \in f(U) \subset V$ であり $f(q) \in f(A)$ だから $f(q) \in V \cap f(A)$ が成り立つ. 故に $V \cap f(A) \neq \emptyset$ だから $f(p) \in \overline{f(A)}$ である.

f が p で連続でないならば $f(p)$ の開近傍 V で条件「p の任意の開近傍 U に対して $f(U) \not\subset V$ である.」を満たすものが存在する. $f(U) \not\subset V$ は $U \not\subset f^{-1}(V)$ と同値で, これは $U \cap (X - f^{-1}(V)) \neq \emptyset$ と同値だから, $A = X - f^{-1}(V)$ とおけば V は $p \in \overline{A}$ を満たす. 第 7 節の問題から $f(A) = f(X - f^{-1}(V)) = f(X) - V$ だから $V \cap f(A) = \emptyset$ とな

るため $p \notin \overline{f(A)}$ が成り立つ．故に $p \in \overline{A}$ を満たす任意の $A \subset X$ に対して $f(p) \in \overline{f(A)}$ ならば f は p で連続である．

(2) $\overline{f(A)}$ は Y の閉集合だから，命題 10.5 より f が連続写像ならば $f^{-1}(\overline{f(A)})$ は X の閉集合である．$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ だから命題 9.15 より $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ が成り立つため $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ である．

任意の $A \subset X$ に対して $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ が成り立つとする．任意の $p \in X$ と $p \in \overline{A}$ を満たす X の任意の部分集合 A に対して $f(p) \in f(\overline{A})$ であり，仮定から $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ だから $f(p) \in \overline{f(A)}$ が成り立つため (1) の結果から f は p で連続である．故に f は連続写像である．□

命題 10.10 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_X)$ を位相空間，$f : X \to Y$ を全射とする．このとき f が開写像であるためには次の条件が満たされることが必要十分である．

「任意の $x \in X$, $U \in \mathcal{V}(x)$ に対し，$V \in \mathcal{V}(f(x))$ で $f(U) \supset V$ となるものがある.」

証明 f を開写像，$x \in X$, U を x の近傍とする．$x \in U^i$ で，$V = f(U^i)$ とおけば V は $f(x)$ を含む開集合だから V は $f(x)$ の開近傍であり，$f(U) \supset f(U^i) = V$ が成り立つ．逆に任意の $x \in X$ と x の近傍 U に対し，$f(x)$ の近傍 V で $f(U) \supset V$ となるものが存在すると仮定して，O を X の開集合とする．任意の $y \in f(O)$ に対して $y = f(x)$ となる $x \in O$ が存在し，仮定から $f(x)$ の近傍 V_y で $f(O) \supset V_y$ となるものがある．このとき $\{y\} \subset V_y^i \subset V_y \subset f(O)$ だから $f(O) = \bigcup_{y \in f(O)} \{y\} \subset \bigcup_{y \in f(O)} V_y^i \subset f(O)$ が成り立つ．故に $f(O) = \bigcup_{y \in f(O)} V_y^i$ であり，V_y^i は Y の開集合だから $f(O)$ も Y の開集合である．従って f は開写像である．□

演習問題

問題 10.1 $(P, \lhd_1)$, $(Q, \lhd_2)$ を半順序集合とする．P, Q に演習問題 9.3 で定義した位相 $\mathcal{O}_{\lhd_1}$, $\mathcal{O}_{\lhd_2}$ を与える．写像 $f : P \to Q$ が順序写像ならば f は連続であることを示せ．

問題 10.2 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし，演習問題 9.2 の方法で X, Y における半順序 $\lhd_X$, $\lhd_Y$ をそれぞれ定義する．

(1) $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続写像とすれば，$f : (X, \lhd_X) \to (Y, \lhd_Y)$ は順序写像であることを示せ．

(2) $(P, \lhd)$ を半順序集合，$g : P \to X$ を写像とするとき，$g : (P, \lhd) \to (X, \lhd_X)$ が順序写像であることと，$g : (P, \mathcal{O}_\lhd) \to (X, \mathcal{O}_X)$ が連続写像であることは同値であることを示せ．ただし，$\mathcal{O}_\lhd$ は演習問題 9.3 で定義した P の位相である．

§11. 位相の生成

定義 11.1 集合 X の位相 $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ が $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ を満たすとき位相 $\mathcal{O}_2$ は $\mathcal{O}_1$ より強い (細かい) といい，$\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より弱い (粗い) という．X の位相構造全体の集合を $\mathcal{T}(X)$ で表せば，$\mathcal{T}(X)$ は位相の強弱に関して順序集合になり，X の部分集合全体からなる集合 $P(X)$ は $\mathcal{T}(X)$ の最大元，$\{\emptyset, X\}$ は $\mathcal{T}(X)$ の最小元である．$P(X)$ を X の離散位相，$\{\emptyset, X\}$ を X の密着位相という．

注意 11.2 X に 2 つの位相 $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ が与えられているとき，恒等写像 $id_X : (X, \mathcal{O}_1) \to (X, \mathcal{O}_2)$ が連続になるための必要十分条件は，$\mathcal{O}_1$ が $\mathcal{O}_2$ より強いことである．とくに，$\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ の場合，id_X は連続である．

命題 11.3 $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}(X)$ ならば $\bigcap_{\mathcal{O} \in \mathcal{S}} \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X)$ である．このとき $\bigcap_{\mathcal{O} \in \mathcal{S}} \mathcal{O}$ は $\mathcal{S}$ の $\mathcal{T}(X)$ における下限である．従って順序集合 $(\mathcal{T}(X), \subset)$ は順序完備である．

証明 すべての $\mathcal{O} \in \mathcal{S}$ に対して $X, \emptyset \in \mathcal{O}$ だから $X, \emptyset \in \bigcap_{\mathcal{O} \in \mathcal{S}} \mathcal{O}$ である．$O_1, O_2 \in \bigcap_{\mathcal{O} \in \mathcal{S}} \mathcal{O}$ ならば，すべての $\mathcal{O} \in \mathcal{S}$

に対して $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ だから $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$ がすべての $\mathcal{O} \in \mathcal{S}$ に対して成り立つため $O_1 \cap O_2 \in \bigcap_{\mathcal{O}\in\mathcal{S}} \mathcal{O}$ である. $\Gamma \subset \bigcap_{\mathcal{O}\in\mathcal{S}} \mathcal{O}$ ならば, すべての $\mathcal{O} \in \mathcal{S}$ に対して $\Gamma \subset \mathcal{O}$ だから $\bigcup_{O\in\Gamma} O \in \mathcal{O}$ がすべての $\mathcal{O} \in \mathcal{S}$ に対して成り立つため $\bigcup_{O\in\Gamma} O \in \bigcap_{\mathcal{O}\in\mathcal{S}} \mathcal{O}$ である. 故に $\bigcap_{\mathcal{O}\in\mathcal{S}} \mathcal{O} \in \mathcal{T}(X)$ である. 任意の $\mathcal{O}' \in \mathcal{S}$ に対して $\bigcap_{\mathcal{O}\in\mathcal{S}} \mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ かつ $\mathcal{O}' \in \mathcal{T}(X)$ がすべての $\mathcal{O} \in \mathcal{S}$ に対して $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ を満たせば $\mathcal{O}' \subset \bigcap_{\mathcal{O}\in\mathcal{S}} \mathcal{O}$ が成り立つため, $\bigcap_{\mathcal{O}\in\mathcal{S}} \mathcal{O}$ は $\mathcal{S}$ の $\mathcal{T}(X)$ における下限である.□

命題 11.4 集合 X と X の部分集合からなる集合 $\mathcal{B}$ が与えられたとき, X の部分集合を要素とする集合 $\widetilde{\mathcal{B}}$, $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ を以下のように定義する.

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \{U \subset X \mid U = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \text{ を満たす } V_1, V_2, \dots, V_n \in \mathcal{B} \text{ がある.}\} \cup \{X\}$$
$$\mathcal{O}(\mathcal{B}) = \left\{O \subset X \,\middle|\, \Gamma \subset \widetilde{\mathcal{B}} \text{ で } O = \bigcup_{U\in\Gamma} U \text{ を満たすものがある.}\right\} \cup \{\emptyset\}$$

$\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は X の位相で, $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}(\mathcal{B})$ かつ条件「$\mathcal{O}$ が $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ を満たす X の位相ならば $\mathcal{O}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{O}$ である.」を満たす. 従って $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は $\mathcal{B}$ の要素がすべて開集合である X の位相のうちで最も弱い位相である.

証明 $\widetilde{\mathcal{B}}$ と $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の定義から $\mathcal{B} \subset \widetilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{O}(\mathcal{B})$ であり, $X \in \widetilde{\mathcal{B}}$, $\emptyset \in \mathcal{O}(\mathcal{B})$ だから $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は位相の定義 9.2 の条件 (O1) を満たす. $O_1, O_2 \in \mathcal{O}(\mathcal{B})$ ならば $O_1 = \bigcup_{O\in\Gamma_1} O$, $O_2 = \bigcup_{O\in\Gamma_2} O$ を満たす $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \widetilde{\mathcal{B}}$ がある.

$$\Gamma_3 = \{U \subset X \mid U = V_1 \cap V_2 \text{ を満たす } V_1 \in \Gamma_1,\ V_2 \in \Gamma_2 \text{ がある.}\}$$

とおけば, $\widetilde{\mathcal{B}}$ の定義から「$V_1, V_2 \in \widetilde{\mathcal{B}}$ ならば $V_1 \cap V_2 \in \widetilde{\mathcal{B}}$」が成り立つため $\Gamma_3 \subset \widetilde{\mathcal{B}}$ であり, $O_1 \cap O_2 = \bigcup_{O\in\Gamma_3} O$ が成り立つ. 実際, $x \in O_1 \cap O_2$ は $x \in V_1$ を満たす $V_1 \in \Gamma_1$ と $x \in V_2$ を満たす $V_2 \in \Gamma_2$ が存在することが必要十分であり, このことは Γ_3 の定義から $x \in U$ を満たす $U \in \Gamma_3$ が存在することと同値である. 従って, $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}(\mathcal{B})$ が成り立つため, $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は位相の定義 9.2 の条件 (O2) を満たす. $\Gamma \subset \mathcal{O}(\mathcal{B})$ ならば, 各 $O \in \Gamma$ に対して $O = \bigcup_{U\in\Delta_O} U$ を満たす $\Delta_O \subset \widetilde{\mathcal{B}}$ が存在する. $\bar{\Gamma} = \bigcup_{O\in\Gamma} \Delta_O$ とおけば, $\bar{\Gamma} \subset \widetilde{\mathcal{B}}$ だから $\bigcup_{U\in\bar{\Gamma}} U \in \mathcal{O}(\mathcal{B})$ であり, $\bigcup_{O\in\Gamma} O = \bigcup_{U\in\bar{\Gamma}} U$ が成り立つ. 実際, $O \in \Gamma$ ならば $\Delta_O \subset \bar{\Gamma}$ より $O = \bigcup_{U\in\Delta_O} U \subset \bigcup_{U\in\bar{\Gamma}} U$ であるため, $\bigcup_{O\in\Gamma} O \subset \bigcup_{U\in\bar{\Gamma}} U$ が成り立ち, $U \in \bar{\Gamma}$ ならば $U \in \Delta_O$ を満たす $O \in \Gamma$ が存在し, $U \subset \bigcup_{V\in\Delta_O} V = O \subset \bigcup_{O\in\Gamma} O$ だから $\bigcup_{U\in\bar{\Gamma}} U \subset \bigcup_{O\in\Gamma} O$ が成り立つ. 故に $\bigcup_{O\in\Gamma} O = \bigcup_{U\in\bar{\Gamma}} U \in \mathcal{O}(\mathcal{B})$ だから $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は位相の定義 9.2 の条件 (O3) を満たす. 従って $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は X の位相である.

$\mathcal{O}$ を $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ を満たす X の位相とする. $U \in \widetilde{\mathcal{B}}$ ならば $U = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$ を満たす $V_1, V_2, \dots, V_n \in \mathcal{B}$ があるが, $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ より $V_i \in \mathcal{O}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ で, $\mathcal{O}$ が位相の定義 9.2 における条件 (O2) を満たすことから $U = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \in \mathcal{O}$ である. 従って $\widetilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{O}$ が成り立つ. $O \in \mathcal{O}(\mathcal{B})$ ならば $O = \bigcup_{U\in\Gamma} U$ を満たす $\Gamma \subset \widetilde{\mathcal{B}}$ があるが, $\widetilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{O}$ より $\Gamma \subset \mathcal{O}$ であり, $\mathcal{O}$ が位相の定義 9.2 の条件 (O3) を満たすことから $O = \bigcup_{U\in\Gamma} U \in \mathcal{O}$ である. 故に $\mathcal{O}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{O}$ である. □

定義 11.5 (1) 集合 X の部分集合を要素とする集合 $\mathcal{B}$ に対し, $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ を $\mathcal{B}$ で生成される X の位相という.

(2) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対し, X の部分集合を要素とする集合 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathcal{B})$ を満たすとき, $\mathcal{B}$ を $\mathcal{O}$ の準基底という.

(3) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対し, $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ かつ任意の $O \in \mathcal{O}$ に対して $O = \bigcup_{U\in\Gamma} U$ を満たす $\Gamma \subset \mathcal{B}$ が存在するとき, $\mathcal{B}$ を $\mathcal{O}$ の基底という.

注意 11.6 $\mathcal{B}$ が X の位相 $\mathcal{O}$ の基底ならば $\mathcal{O}$ は $\mathcal{B}$ で生成される位相である. 言い換えれば $\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}$ の準基底である. 実際, $\widetilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{O}$ だから $\mathcal{O}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{O}$ が成り立ち, 任意の $O \in \mathcal{O}$ は $\mathcal{B}$ の要素の合併集合だから $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}(\mathcal{B})$ も成り立つため $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathcal{B})$ である.

命題 11.7 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対し, $\mathcal{O}$ の部分集合 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}$ の基底であるためには $\mathcal{B}$ が次の条件を満たすことが必要十分である.

$(*)$ 任意の $O \in \mathcal{O}$ と $x \in O$ に対して $x \in U$ かつ $U \subset O$ を満たす $U \in \mathcal{B}$ がある.

証明 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}$ の基底ならば任意の $O \in \mathcal{O}$ に対して $O = \bigcup_{V \in \Gamma} V$ を満たす $\Gamma \subset \mathcal{B}$ があるため, 任意の $x \in O$ に対して $x \in U$ を満たす $U \in \Gamma$ が存在する. このとき $U \subset \bigcup_{V \in \Gamma} V = O$ だから $\mathcal{B}$ は条件 $(*)$ を満たす.

逆に $\mathcal{B}$ が条件 $(*)$ を満たすと仮定すれば, 任意の $O \in \mathcal{O}$ と $x \in O$ に対して, $x \in U_x$ かつ $U_x \subset O$ を満たす $U_x \in \mathcal{B}$ がある. このとき $\Gamma = \{U_x \,|\, x \in O\}$ とおけば $\Gamma \subset \mathcal{B}$ であり, すべての $x \in O$ に対して $U_x \subset O$ だから $\bigcup_{U \in \Gamma} U = \bigcup_{x \in O} U_x \subset O$ である. 一方 $x \in U_x$ だから $O = \bigcup_{x \in O} \{x\} \subset \bigcup_{x \in O} U_x = \bigcup_{U \in \Gamma} U$ が成り立つため $O = \bigcup_{U \in \Gamma} U$ を満たす $\Gamma \subset \mathcal{B}$ が存在する. □

例 11.8 (1) 集合 X の部分集合を要素とする集合 $\mathcal{B}$ に対して $\widetilde{\mathcal{B}}$ は $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の基底である.

(2) (X, d) を距離空間, $\mathcal{O}_d$ を距離関数 d から定まる X の位相とする. 命題 11.7 と $\mathcal{O}_d$ の定義から開球全体の集合 $\{B_d(p\,;r) \,|\, p \in X,\ r > 0\}$ は $\mathcal{O}_d$ の基底である. 同様に, 半径が $\frac{1}{n}$ (n は自然数) の形の有理数である開球全体の集合 $\left\{B_d(p\,;\frac{1}{n}) \,\middle|\, p \in X,\, n \in \boldsymbol{N}\right\}$ も $\mathcal{O}_d$ の基底である.

命題 11.9 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $\mathcal{B}$ を $\mathcal{O}_Y$ の準基底とする. 写像 $f : X \to Y$ が条件「任意の $V \in \mathcal{B}$ に対して $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ である.」を満たせば f は連続写像である.

証明 O を Y の任意の開集合とすれば, $\mathcal{B}$ の要素の有限個の共通部分で表される集合の族 $(U_i)_{i \in I}$ が存在して $O = \bigcup_{i \in I} U_i$ となり, さらに各 $i \in I$ に対して $U_i = V_{1,k} \cap V_{2,k} \cap \cdots \cap V_{i,n_i}$ を満たす $V_{i,k} \in \mathcal{B}$ $(k = 1, 2, \ldots, n_i)$ が存在する. このとき, $f^{-1}(U_i) = f^{-1}(V_{1,k} \cap V_{2,k} \cap \cdots \cap V_{i,n_i}) = f^{-1}(V_{1,k}) \cap f^{-1}(V_{2,k}) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_{i,n_i})$ であり, 仮定から $f^{-1}(V_{i,k})$ は X の開集合だから $f^{-1}(U_i)$ も X の開集合である. さらに $f^{-1}(O) = f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} U_i\Big) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$ が成り立つため, $f^{-1}(O)$ は X の開集合である. 従って命題 10.4 の (2) から f は連続写像である. □

例 11.10 距離空間 (X, d) において球体全体よりなる集合 $\{B(a\,;\varepsilon) | \, a \in X, \varepsilon > 0\}$ は d から定まる X の位相の基底となる.

命題 11.11 $\mathcal{B}$ が X の位相 $\mathcal{O}$ の基底ならば, 任意の $x \in X$ に対し, $\mathcal{V}(x) \cap \mathcal{B}$ は x の一つの基本近傍系である.

証明 任意の $U \in \mathcal{V}(x)$ に対し, $U^i = \bigcup_{O \in \Gamma} O$ を満たす $\Gamma \subset \mathcal{B}$ がある. $x \in U^i$ だから $x \in V$ を満たす $V \in \Gamma$ が存在し, $V \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O \subset U^i \subset U$ と $V \in \mathcal{V}(x) \cap \mathcal{B}$ が成り立つため $\mathcal{V}(x) \cap \mathcal{B}$ は x の基本近傍系である. □

定義 11.12 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする. たかだか可算個の開集合からなる $\mathcal{O}$ の基底が存在するとき, $(X, \mathcal{O})$ は第 2 可算公理を満たすという.

命題 11.13 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ がたかだか可算な準基底をもてば, $(X, \mathcal{O})$ は第 2 可算公理を満たす.

証明 $\mathcal{O}$ のたかだか可算な準基底を $\mathcal{B}$ とする. $\mathcal{B}$ の有限部分集合全体からなる集合を $P_f(\mathcal{B})$ とすれば, 命題 6.7 から $P_f(\mathcal{B})$ もたかだか可算な集合である. $\widetilde{\mathcal{B}}$ を命題 11.4 で定めたものとし, $\lambda : P_f(\mathcal{B}) \to \widetilde{\mathcal{B}}$ を $\lambda(\Gamma) = \bigcap_{U \in \Gamma} U$ で定めれば λ は全射である. 従って $\widetilde{\mathcal{B}}$ はたかだか可算な集合であり, $\mathcal{O}$ の基底だから $(X, \mathcal{O})$ は第 2 可算公理を満たす. □

命題 11.14 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が第 2 可算公理を満たせば可分であり, 第 1 可算公理も満たす.

証明 $\mathcal{B}$ をたかだか可算個の開集合からなる $\mathcal{O}$ の基底とする. 空集合でない各 $U \in \mathcal{B}$ から点 p_U を選び, $A = \{p_U \,|\, U \in \mathcal{B}, U \neq \emptyset\}$ とおくと $\mathcal{B}$ はたかだか可算な集合だから A もたかだか可算な集合である. X の空でない任意の開集合 O は $\mathcal{B}$ の要素の合併集合だから $U \subset O$ を満たす空集合でない $U \in \mathcal{B}$ が存在する. $p_U \in U$ だから $p_U \in O$ となるため $p_U \in A \cap O$ が成り立つ. 従って X の空でない任意の開集合 O に対して $A \cap O \neq \emptyset$ だから $X = \overline{A}$ となるため $(X, \mathcal{O})$

は可分である．命題 11.11 から, たかだか可算な集合 $\mathcal{B}$ の部分集合 $\mathcal{V}(x)\cap\mathcal{B}$ が 各 $x\in X$ のを基本近傍系になるため, $(X,\mathcal{O})$ は第 1 可算公理を満たす． □

命題 11.15 (X,d) を距離空間とする．

(1) X の部分集合 A が $\overline{A}=X$ を満たすとき, (X,d) の開球からなる集合 $\mathcal{B}=\left\{B_d\left(p;\frac{1}{n}\right)\,|\,p\in A, n\in\boldsymbol{N}\right\}$ は $\mathcal{O}_d$ の基底である．

(2) 位相空間 $(X,\mathcal{O}_d)$ が可分ならば $\mathcal{O}_d$ は可算基をもつ．

証明 (1) 任意の $O\in\mathcal{O}_d$ と $p\in O$ に対し, $\mathcal{O}_d$ の定義から $r>0$ で $B_d(p;r)\subset O$ を満たすものがある．$\frac{1}{n}<\frac{r}{2}$ を満たす $n\in\boldsymbol{N}$ を選べば $p\in X=\overline{A}$ より $B_d\left(p;\frac{1}{n}\right)\cap A\neq\emptyset$ だから $c\in B_d\left(p;\frac{1}{n}\right)\cap A$ が選べて $B_d\left(c;\frac{1}{n}\right)\in\mathcal{B}$ かつ $p\in B_d\left(c;\frac{1}{n}\right)$ が成り立つ．$x\in B_d\left(c;\frac{1}{n}\right)$ ならば $d(x,c)<\frac{1}{n}<\frac{r}{2}$ だから $d(x,p)\leqq d(x,c)+d(c,p)<\frac{2}{n}<r$ が得られる．従って $x\in B_d(p;r)$ だから $B_d\left(c;\frac{1}{n}\right)\subset B_d(p;r)$ が成り立つ．ここで, $p\in B_d\left(c;\frac{1}{n}\right)$, $B_d(p;r)\subset O$ かつ $B_d\left(c;\frac{1}{n}\right)\in\mathcal{B}$ が成り立つため, 命題 11.7 により $\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}_d$ の基底である．

(2) X のたかだか可算な部分集合 A で $\overline{A}=X$ を満たすものがある．全射 $f:\boldsymbol{N}\to A$ があるので (1) の基底 $\mathcal{B}=\left\{B_d\left(p;\frac{1}{n}\right)\,|\,p\in A, n\in\boldsymbol{N}\right\}$ を考えて写像 $g:\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}\to\mathcal{B}$ を $g(m,n)=B_d\left(f(m);\frac{1}{n}\right)$ で定義すれば, g は全射である．従って命題 6.10 と命題 6.11 から $\mathcal{B}$ はたかだか可算な $\mathcal{O}_d$ の基底である． □

命題 11.16 $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 $\boldsymbol{Q}^n$ は稠密であり, $\boldsymbol{R}^n$ は第 2 可算公理を満たす．

証明 命題 6.12 から数学的帰納法で可算集合の有限個の直積は可算集合であることが示されるため, $\boldsymbol{Q}^n$ は可算集合である．任意の $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\dots,p_n)\in\boldsymbol{R}^n$ と $r>0$ に対し, 開区間 $\left(p_i-\frac{r}{\sqrt{n}},p_i+\frac{r}{\sqrt{n}}\right)$ に含まれる有理数 q_i を各 $i=1,2,\dots,n$ に対して 1 つずつ選んで $\boldsymbol{q}=(q_1,q_2,\dots,q_n)$ とおけば $\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{Q}^n$ であり, $i=1,2,\dots,n$ に対して $|q_i-p_i|<\frac{r}{\sqrt{n}}$ が成り立つため, $\|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}\|<r$ である．故に中心が $\boldsymbol{p}$ で半径 r の開球は $\boldsymbol{Q}^n$ の要素を含むため $\overline{\boldsymbol{Q}^n}=\boldsymbol{R}^n$ である．従って命題 11.15 から $\boldsymbol{R}^n$ は第 2 可算公理を満たす． □

例 11.17 $\mathcal{B}=\{[a,b)\in\boldsymbol{R}\,|\,a,b\in\boldsymbol{R}\}$ のとき, $p\in\boldsymbol{R}$ に対して $\left\{\left[p,p+\frac{1}{n}\right)\,|\,n\in\boldsymbol{N}\right\}$ は可算集合で, 位相空間 $(\boldsymbol{R},\mathcal{O}(\mathcal{B}))$ における p の基本近傍系だから $(\boldsymbol{R},\mathcal{O}(\mathcal{B}))$ は第 1 可算公理を満たす．ここで $[a,b)\cap[c,d)=[\max\{a,c\},\min\{b,d\})$ だから $U,V\in\mathcal{B}$ ならば $U\cap V\in\mathcal{B}$ または $U\cap V=\emptyset$ だから $\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の基底である．また $\boldsymbol{Q}\cap[a,b)\neq\emptyset$ が任意の $a<b$ に対して成り立つため $\overline{\boldsymbol{Q}}=\boldsymbol{R}$ となり, $(\boldsymbol{R},\mathcal{O}(\mathcal{B}))$ は可分である．$\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の任意の基底 $\mathcal{B}'$ に対して $f:\mathcal{B}'\to\boldsymbol{R}\cup\{-\infty\}$ を $f(U)=\inf U$ で定義する．任意の $a\in\boldsymbol{R}$ に対し, $[a,a+1)=\bigcup_{U\in\Gamma_a}U$ を満たす $\Gamma_a\subset\mathcal{B}'$ が存在する．このとき $a\in U_a$ となる $U_a\in\Gamma_a$ が存在し, $U_a\subset[a,a+1)$ だから $a=\min U_a$ である．従って $f(U_a)=a$ だから $f(\mathcal{B}')\supset\boldsymbol{R}$ となり, $\mathcal{B}'$ の部分集合 $\{U\in\mathcal{B}'\,|\,\inf U\neq-\infty\}$ から非加算集合 $\boldsymbol{R}$ への全射があるため, $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は可算基をもたない．

演習問題

問題 11.1 X を集合, $\mathcal{B}$ を $P(X)$ の部分集合とすれば, 次の条件を満たす X の位相 $\mathcal{O}$ がただ 1 つ存在することを示せ．

「$\mathcal{B}\subset\mathcal{O}$ であり, 任意の位相空間 $(Y,\mathcal{O}_Y)$ と写像 $f:Y\to X$ に対し, f が X の位相 $\mathcal{O}$ に関して連続であることと, 任意の $O\in\mathcal{B}$ に対して, $f^{-1}(O)$ が Y の開集合になることは同値である．」

問題 11.2 $\boldsymbol{R}$ の部分集合族 $\mathcal{B}_1\sim\mathcal{B}_5$ を次のように定義する．このとき, 以下の問に答えよ．

$\mathcal{B}_1=\{(a,b)\,|\,a<b,\ a,b\in\boldsymbol{R}\}$ $\quad\mathcal{B}_2=\{[a,b)\,|\,a<b,\ a,b\in\boldsymbol{R}\}$ $\quad\mathcal{B}_3=\{(a,b]\,|\,a<b,\ a,b\in\boldsymbol{R}\}$

$\mathcal{B}_4=\{(a,+\infty)\,|\,a\in\boldsymbol{R}\}$ $\quad\mathcal{B}_5=\{(-\infty,a)\,|\,a\in\boldsymbol{R}\}$

(1) 各 $\mathcal{B}_i$ は位相の基底になることを示せ．

(2) 各 $\mathcal{B}_i$ により生成される $\boldsymbol{R}$ のそれぞれの位相における開集合, 閉集合はどのようなものになるか?

(3) 各 $\mathcal{B}_i$ により生成される $\boldsymbol{R}$ のそれぞれの位相の間の強弱を調べよ.

問題 11.3　X を集合, $\mathcal{B} \subset P(X)$ とする. 位相空間 $(X, \mathcal{O}(\mathcal{B}))$ において, $\mathcal{B}$ が基底になるためには $\mathcal{B}$ が条件「任意の $V, W \in \mathcal{B}$ と任意の $x \in V \cap W$ に対し, $x \in U \subset V \cap W$ となる $U \in \mathcal{B}$ が存在する.」を満たすことが必要十分であることを示せ.

§12.　部分空間・商空間・直積空間

命題 12.1　$(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $f : Y \to X$ を写像とする. Y の部分集合を要素とする集合 $\mathcal{O}^f$ を次で定める.

$$\mathcal{O}^f = \{U \subset Y | \, U = f^{-1}(O) \text{ を満たす } O \in \mathcal{O} \text{ が存在する.}\}$$

(1) $\mathcal{O}^f$ は Y の位相である.

(2) $\mathcal{O}^f$ は Y の位相 $\mathcal{O}'$ について次の 2 つの条件を満たす唯一の位相である.

(i) $f : (Y, \mathcal{O}') \to (X, \mathcal{O})$ は連続写像である.

(ii) 位相空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ と写像 $g : Z \to Y$ に対し, $f \circ g : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O})$ が連続ならば $g : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (Y, \mathcal{O}')$ は連続である.

証明 (1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$ であり, $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$, $Y = f^{-1}(X)$ より $\emptyset, Y \in \mathcal{O}^f$ である. $U_1, U_2 \in \mathcal{O}^f$ とすれば $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ で $U_1 = f^{-1}(O_1)$, $U_2 = f^{-1}(O_2)$ を満たすものがあるので, $U_1 \cap U_2 = f^{-1}(O_1) \cap f^{-1}(O_1) = f^{-1}(O_1 \cap O_2)$ と $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$ から $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}^f$ である. $U_i \in \mathcal{O}^f$ $(i \in I)$ とすれば, 各 $i \in I$ に対して $O_i \in \mathcal{O}$ で $U_i = f^{-1}(O_i)$ を満たすものがあるので, $\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i) = f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} O_i\Big)$ と $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$ から $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}^f$ である.

(2) 任意の $O \in \mathcal{O}$ に対して $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}^f$ だから $f : (Y, \mathcal{O}^f) \to (X, \mathcal{O})$ は連続写像である. 位相空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ と写像 $g : Z \to Y$ に対し, $f \circ g : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O})$ が連続であるとする. 任意の $U \in \mathcal{O}^f$ に対して $U = f^{-1}(O)$ となる $O \in \mathcal{O}$ があるので, $f \circ g$ の連続性から $g^{-1}(U) = g^{-1}(f^{-1}(O)) = (f \circ g)^{-1}(O) \in \mathcal{O}_Z$ が成り立ち, g は連続である. 故に $\mathcal{O}^f$ は条件 (i), (ii) を満たす. Y の位相 $\mathcal{O}'$ が条件 (i), (ii) を満たすとする. 任意の $U \in \mathcal{O}^f$ に対して $U = f^{-1}(O)$ となる $O \in \mathcal{O}$ が存在し, $\mathcal{O}'$ が条件 (i) を満たすことから, $U = f^{-1}(O) \in \mathcal{O}'$ が成り立つため $\mathcal{O}^f \subset \mathcal{O}'$ である. 位相空間 $(Y, \mathcal{O}^f)$ と Y の恒等写像 $id_Y : Y \to Y$ に対して, $f \circ id_Y = f : (Y, \mathcal{O}^f) \to (X, \mathcal{O})$ は連続写像だから, (ii) により $id_Y : (Y, \mathcal{O}^f) \to (Y, \mathcal{O}')$ は連続である. 従って $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}^f$ も成り立つため. $\mathcal{O}' = \mathcal{O}^f$ である. □

命題 12.2　$(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $f : X \to Y$ を写像とする. Y の部分集合を要素とする集合 $\mathcal{O}_f$ を次で定める.

$$\mathcal{O}^f = \{U \subset Y | \, f^{-1}(U) \in \mathcal{O}\}$$

(1) $\mathcal{O}_f$ は Y の位相である.

(2) $\mathcal{O}_f$ は Y の位相 $\mathcal{O}'$ について次の 2 つの条件を満たす唯一の位相である.

(i) $f : (X, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}')$ は連続写像である.

(ii) 位相空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ と写像 $g : Y \to Z$ に対し, $g \circ f : (X, \mathcal{O}) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ が連続ならば $g : (Y, \mathcal{O}') \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ は連続である.

証明 (1) $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{O}$, $p^{-1}(Y) = X \in \mathcal{O}$ だから $\emptyset, Y \in \mathcal{O}_f$ である. $U, V \in \mathcal{O}_f$ ならば $p^{-1}(U), p^{-1}(V) \in \mathcal{O}$ だから, $\mathcal{O}$ が X の位相であることから $p^{-1}(U \cap V) = p^{-1}(U) \cap p^{-1}(V) \in \mathcal{O}$ である. 従って $\mathcal{O}_f$ の定義から $U \cap V \in \mathcal{O}_f$ である. $(O_i)_{i \in I}$ が 各 $i \in I$ に対して $O_i \in \mathcal{O}_f$ を満たす集合族ならば, 各 $i \in I$ に対して $p^{-1}(O_i) \in \mathcal{O}$ だから, $\mathcal{O}$ が X の位相であることから $p^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} O_i\Big) = \bigcup_{i \in I} p^{-1}(O_i) \in \mathcal{O}$ である. 従って $\mathcal{O}_f$ の定義から $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}_f$ である. 以上から $\mathcal{O}_f$ は Y の位相である.

(2) 任意の $U \in \mathcal{O}_f$ に対して $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}$ だから $f : (X, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}_f)$ は連続写像である. 位相空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ と

写像 $g: Y \to Z$ に対し, $g \circ f : (X, \mathcal{O}) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ が連続であるとする．任意の $V \in \mathcal{O}_Z$ に対して $g \circ f$ の連続性から $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{O}$ だから, $\mathcal{O}_f$ の定義から $g^{-1}(V) \in \mathcal{O}_f$ となるため $g : (Y, \mathcal{O}') \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ は連続である．故に $\mathcal{O}_f$ は条件 (i), (ii) を満たす．Y の位相 $\mathcal{O}'$ が条件 (i), (ii) を満たすとする．$\mathcal{O}'$ が条件 (i) を満たすことから, 任意の $U \in \mathcal{O}'$ に対して $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}$ だから $U \in \mathcal{O}_f$ である．従って $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}_f$ である．位相空間 $(Y, \mathcal{O}_f)$ と Y の恒等写像 $id_Y : Y \to Y$ に対して, $id_Y \circ f = f : (X, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}_f)$ は連続写像だから, (ii) により $id_Y : (Y, \mathcal{O}') \to (Y, \mathcal{O}_f)$ は連続である．従って $\mathcal{O}_f \subset \mathcal{O}'$ も成り立つため．$\mathcal{O}' = \mathcal{O}_f$ である． □

定義 12.3 (1) $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, Y を X の部分集合, $i : Y \to X$ を包含写像とする．このとき, $\mathcal{O}^i$ を Y の相対位相といい, 位相空間 $(Y, \mathcal{O}^i)$ を $(X, \mathcal{O})$ の部分空間という．

(2) $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, R を X の同値関係, $p : X \to X/R$ を商写像とする．このとき, $\mathcal{O}_p$ を X/R の商位相といい, 位相空間 $(X/R, \mathcal{O}_p)$ を $(X, \mathcal{O})$ の商空間という．

(3) $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を連続な全射とする．$\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_f$ が成り立つときも f を商写像という．

系 12.4 $f : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O})$ を連続写像, Y を X の部分集合, $i : Y \to X$ を包含写像とする．$f(Z) \subset Y$ ならば $\bar{f}(z) = f(z)$ により $i \circ \bar{f} = f$ を満たす写像 $\bar{f} : Z \to Y$ が定まるが, $\bar{f}$ は $(Z, \mathcal{O}_Z)$ から (Y, co^i) への連続写像である．

証明 f の連続性と $i \circ \bar{f} = f$ から命題 12.1 の (2) により $\bar{f} : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (Y, \mathcal{O}^i)$ は連続写像である． □

系 12.5 R を X の同値関係, $p : X \to X/R$ を商写像とする．$f : (X, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を条件「$(x, y) \in R$ ならば $f(x) = f(y)$」を満たす連続写像とすれば, 命題 4.4 の (5) により $f = \bar{f} \circ p$ を満たす写像 $\bar{f} : X/R \to Y$ が存在するが, $\bar{f} : (X/R, \mathcal{O}_p) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ は連続写像である．

証明 f の連続性と $f = \bar{f} \circ p$ から命題 12.2 の (2) により $\bar{f} : (X/R, \mathcal{O}_p) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ は連続写像である． □

命題 12.6 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を定義 12.3 の (3) の意味での商写像とし, R を f に付随する同値関係 (例 4.2 の (5)) とし $p : X \to X/R$ を商写像とする．このとき $f = \bar{f} \circ p$ を満たす写像 $\bar{f} : X/R \to Y$ は $(X/R, \mathcal{O}_p)$ から $(Y, \mathcal{O}_Y)$ への同相写像である．

証明 系 12.5 により $\bar{f} : (X/R, \mathcal{O}_p) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ は連続写像である．$x, y \in X$ に対し $f(x) = f(y)$ ならば $(x, y) \in R$ だから $p(x) = p(y)$ となるため, 写像 $\tilde{f} : Y \to X/R$ で $\tilde{f} \circ f = p$ を満たすものが存在する．従って p の連続性と f が商写像であることから, 命題 12.2 の (2) により $\tilde{f} : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X/R, \mathcal{O}_p)$ は連続写像である．$\tilde{f} \circ \bar{f} \circ p = \tilde{f} \circ f = p = id_{X/R} \circ p$ であり, p は全射だから $\tilde{f} \circ \bar{f} = id_{X/R}$ が得られる．$\bar{f} \circ \tilde{f} \circ f = \bar{f} \circ p = f = id_Y \circ f$ であり, f は全射だから $\bar{f} \circ \tilde{f} = id_Y$ が得られる．故に $\bar{f}$ の連続な逆写像 $\tilde{f}$ があるため $\bar{f}$ は同相写像である． □

命題 12.7 $((X_i, \mathcal{O}_i))_{i \in I}$ を位相空間の族, Y を集合, $(f_i : Y \to X_i)_{i \in I}$ を写像の族とする．Y の部分集合族 $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i^{f_i}$ で生成される Y の位相 $\mathcal{O}\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i^{f_i}\right)$ は Y の位相 $\mathcal{O}'$ について次の 2 つの条件を満たす唯一の位相である．

(i) すべての $i \in I$ に対して $f_i : (Y, \mathcal{O}') \to (X_i, \mathcal{O}_i)$ は連続写像である．

(ii) 位相空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ と写像 $g : Z \to Y$ に対し, $f_i \circ g : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X_i, \mathcal{O}_i)$ がすべての $i \in I$ に対して連続ならば $g : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (Y, \mathcal{O}')$ は連続である．

証明 $i \in I$ と $O \in \mathcal{O}_i$ に対し, $f_i^{-1}(O) \in \mathcal{O}_i^{f_i} \subset \mathcal{O}\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i^{f_i}\right)$ だから $f_i : \left(Y, \mathcal{O}\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i^{f_i}\right)\right) \to (X_i, \mathcal{O}_i)$ は連続写像である．位相空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ と写像 $g : Z \to Y$ に対し, $f_i \circ g : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X_i, \mathcal{O}_i)$ がすべての $i \in I$ に対して連続であるとする．任意の $O \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i^{f_i}$ に対して $O \in \mathcal{O}_i^{f_i}$ を満たす $i \in I$ が存在し, $O = f_i^{-1}(U)$ を満たす $U \in \mathcal{O}_i$ が存在するため $f_i \circ g$ の連続性より $g^{-1}(O) = g^{-1}(f_i^{-1}(U)) = (f_i \circ g)^{-1}(U) \in \mathcal{O}_Z$ が成り立つ．従って g は連続で, $\mathcal{O}\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i^{f_i}\right)$ は条件 (i), (ii) を満たす．

Y の位相 $\mathcal{O}'$ が条件 (i), (ii) を満たすとする. (i) により, 任意の $i\in I$ と $O\in\mathcal{O}_i$ に対して $f_i^{-1}(O)\in\mathcal{O}'$ であり $\mathcal{O}\Big(\bigcup\limits_{i\in I}\mathcal{O}_i^{f_i}\Big)$ は $f_i^{-1}(O)\in\mathcal{O}'$ $(i\in I,\,O\in\mathcal{O}_i)$ という形の集合で生成されるため $\mathcal{O}\Big(\bigcup\limits_{i\in I}\mathcal{O}_i^{f_i}\Big)\subset\mathcal{O}'$ が成り立つ. 位相空間 $\Big(Y,\mathcal{O}\Big(\bigcup\limits_{i\in I}\mathcal{O}_i^{f_i}\Big)\Big)$ と Y の恒等写像 $id_Y:Y\to Y$ に対して, $f_i\circ id_Y=f_i:\Big(Y,\mathcal{O}\Big(\bigcup\limits_{i\in I}\mathcal{O}_i^{f_i}\Big)\Big)\to(X_i,\mathcal{O}_i)$ はすべての $i\in I$ に対して連続写像だから, (ii) により $id_Y:\Big(Y,\mathcal{O}\Big(\bigcup\limits_{i\in I}\mathcal{O}_i^{f_i}\Big)\Big)\to(Y,\mathcal{O}')$ は連続である. 従って $\mathcal{O}'\subset\mathcal{O}\Big(\bigcup\limits_{i\in I}\mathcal{O}_i^{f_i}\Big)$ も成り立つため, $\mathcal{O}'=\mathcal{O}\Big(\bigcup\limits_{i\in I}\mathcal{O}_i^{f_i}\Big)$ である. □

注意 12.8 $j\in I$ に対し $Y=f_j^{-1}(X_j)$ であり, $A,B\subset X_j$ ならば $f_j^{-1}(A)\cap f_j^{-1}(B)=f_j^{-1}(A\cap B)$ が成り立つため, $\bigcup\limits_{i\in I}\mathcal{O}_i^{f_i}$ に属する有限個の集合の共通部分として表される集合の全体は

$$\Big\{O\subset Y\,\Big|\,O=\bigcap_{j\in J}f_j^{-1}(O_j)\text{ となる }I\text{ の有限部分集合 }J\text{ と }O_j\in\mathcal{O}_j\ (j\in J)\text{ がある.}\Big\}$$

で与えられ, 例 11.8 の (1) より, この集合が $\mathcal{O}\Big(\bigcup\limits_{i\in I}\mathcal{O}_i^{f_i}\Big)$ の基底になる. とくに, $I=\{1,2,\dots,n\}$ の場合は

$$\{O\subset Y\,|\,O=f_1^{-1}(O_1)\cap f_j^{-1}(O_j)\cap\cdots\cap f_n^{-1}(O_n)\text{ となる }O_1\in\mathcal{O}_1,\,O_2\in\mathcal{O}_2,\,\dots,O_n\in\mathcal{O}_n\text{ がある.}\}$$

が $\mathcal{O}\big(\mathcal{O}_1^{f_1}\cup\mathcal{O}_2^{f_2}\cup\cdots\cup\mathcal{O}_n^{f_n}\big)$ の基底になる.

命題 12.9 $((X_i,\mathcal{O}_i))_{i\in I}$ を位相空間の族, Y を集合, $(f_i:X_i\to Y)_{i\in I}$ を写像の族とする. Y の位相 $\bigcap\limits_{i\in I}(\mathcal{O}_i)_{f_i}$ は Y の位相 $\mathcal{O}'$ について次の 2 つの条件を満たす唯一の位相である.

(i) すべての $i\in I$ に対して $f_i:(X_i,\mathcal{O}_i)\to(Y,\mathcal{O}')$ は連続写像である.

(ii) 位相空間 $(Z,\mathcal{O}_Z)$ と写像 $g:Y\to Z$ に対し, $g\circ f_i:(X_i,\mathcal{O}_i)\to(Z,\mathcal{O}_Z)$ が連続ならば $g:(Y,\mathcal{O}')\to(Z,\mathcal{O}_Z)$ は連続である.

証明 $i\in I$ と $O\in\bigcap\limits_{j\in I}(\mathcal{O}_j)_{f_j}$ に対し, $O\in(\mathcal{O}_i)_{f_i}$ だから $f_i^{-1}(O)\in\mathcal{O}_i$ である. 従って $f_i:(X_i,\mathcal{O}_i)\to\Big(Y,\bigcap\limits_{j\in I}(\mathcal{O}_j)_{f_j}\Big)$ は連続写像である. 位相空間 $(Z,\mathcal{O}_Z)$ と写像 $g:Y\to Z$ に対し, $g\circ f_i:(X_i,\mathcal{O}_i)\to(Z,\mathcal{O}_Z)$ がすべての $i\in I$ に対して連続であるとする. 任意の $O\in\mathcal{O}_Z$ に対して $g\circ f_i$ の連続性より $f_i^{-1}(g^{-1}(O))=(g\circ f_i)^{-1}(O)\in\mathcal{O}_i$ が成り立つため $g^{-1}(O)\in(\mathcal{O}_i)_{f_i}$ がすべての $i\in I$ に対して成り立つ. 故に $g^{-1}(O)\in\bigcap\limits_{i\in I}(\mathcal{O}_i)_{f_i}$ だから g は連続である. 以上から $\bigcap\limits_{i\in I}(\mathcal{O}_i)_{f_i}$ は条件 (i), (ii) を満たす.

Y の位相 $\mathcal{O}'$ が条件 (i), (ii) を満たすとする. (i) により, 任意の $i\in I$ と $O\in\mathcal{O}'$ に対して $f_i^{-1}(O)\in\mathcal{O}_i$ だから $O\in(\mathcal{O}_i)_{f_i}$ である. 従って $O\in\bigcap\limits_{i\in I}(\mathcal{O}_i)_{f_i}$ となるため $\mathcal{O}'\subset\bigcap\limits_{i\in I}(\mathcal{O}_i)_{f_i}$ である. 位相空間 $\Big(Y,\bigcap\limits_{i\in I}(\mathcal{O}_i)_{f_i}\Big)$ と Y の恒等写像 $id_Y:Y\to Y$ に対して, $id_Y\circ f_i=f_i:(X_i,\mathcal{O}_i)\to\Big(Y,\bigcap\limits_{i\in I}(\mathcal{O}_i)_{f_i}\Big)$ はすべての $i\in I$ に対して連続写像だから, (ii) により $id_Y:(Y,\mathcal{O}')\to\Big(Y,\bigcap\limits_{i\in I}(\mathcal{O}_i)_{f_i}\Big)$ は連続である. 故に $\bigcap\limits_{i\in I}(\mathcal{O}_i)_{f_i}\subset\mathcal{O}'$ も成り立つため, $\mathcal{O}'=\bigcap\limits_{i\in I}(\mathcal{O}_i)_{f_i}$ である.□

定義 12.10 $((X_i,\mathcal{O}_i))_{i\in I}$ を位相空間族とする.

(1) 位相空間の族 $((X_i,\mathcal{O}_i))_{i\in I}$ と写像の族 $\Big(\mathrm{pr}_j:\prod\limits_{i\in I}X_i\to X_j\Big)_{j\in I}$ から定まる位相空間 $\Big(\prod\limits_{i\in I}X_i,\mathcal{O}\Big(\bigcup\limits_{i\in I}\mathcal{O}_i^{\mathrm{pr}_i}\Big)\Big)$ を $((X_i,\mathcal{O}_i))_{i\in I}$ の直積空間といい, $\mathcal{O}\Big(\bigcup\limits_{i\in I}\mathcal{O}_i^{\mathrm{pr}_i}\Big)$ を $\prod\limits_{i\in I}X_i$ の直積位相という.

(2) 位相空間の族 $((X_i,\mathcal{O}_i))_{i\in I}$ と写像の族 $\Big(\mathrm{inc}_j:X_j\to\coprod\limits_{i\in I}X_i\Big)_{j\in I}$ から定まる位相空間 $\Big(\coprod\limits_{i\in I}X_i,\bigcap\limits_{i\in I}(\mathcal{O}_i)_{\mathrm{inc}_i}\Big)$ を $((X_i,\mathcal{O}_i))_{i\in I}$ の直和という.

注意 12.11 $I=\{1,2,\dots,n\}$ の場合は $O_i\subset X_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ に対し, $\mathrm{pr}_1^{-1}(O_1)\cap\mathrm{pr}_j^{-1}(O_j)\cap\cdots\cap\mathrm{pr}_n^{-1}(O_n)$ は $O_1\times O_2\times\cdots\times O_n$ に等しいため, 注意 12.8 から

$$\{O\subset X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\,|\,O=O_1\times O_2\times\cdots\times O_n\text{ となる }O_1\in\mathcal{O}_1,\,O_2\in\mathcal{O}_2,\,\dots,O_n\in\mathcal{O}_n\text{ がある.}\}$$

が $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の直積位相の基底になる.

命題 12.12 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とするとき, $\mathrm{Map}((X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y))$ によって $(X, \mathcal{O}_X)$ から $(Y, \mathcal{O}_Y)$ への連続写像全体の集合を表す.

(1) 写像 $\Phi : \mathrm{Map}\Big((Y, \mathcal{O}_Y), \Big(\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{O}\Big(\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i^{\mathrm{pr}_i}\Big)\Big)\Big) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Map}((Y, \mathcal{O}_Y), (X_i, \mathcal{O}_i))$ を $\Phi(f)(i) = \mathrm{pr}_i \circ f$ で定めると, Φ は全単射である.

(2) 写像 $\Psi : \mathrm{Map}\Big(\Big(\coprod_{i\in I} X_i, \bigcap_{i\in I} (\mathcal{O}_i)_{\mathrm{inc}_i}\Big), (Y, \mathcal{O}_Y)\Big) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Map}((X_i, \mathcal{O}_i), (Y, \mathcal{O}_Y))$ を $\Psi(f)(i) = f \circ \mathrm{inc}_i$ で定めると, Ψ は全単射である.

命題 12.13 $(P, \mathcal{O}_P)$, $(S, \mathcal{O}_S)$, $(X_i, \mathcal{O}_i)$ を位相空間, $\pi_i : P \to X_i$, $\iota_i : X_i \to S$ $(i \in I)$ を連続写像とする.

(1) 任意の位相空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ に対し, $\Phi'(f)(i) = \pi_i \circ f$ で定義される写像

$$\Phi' : \mathrm{Map}((Y, \mathcal{O}_Y), (P, \mathcal{O}_P)) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Map}((Y, \mathcal{O}_Y), (X_i, \mathcal{O}_i))$$

が全単射ならば, 同相写像 $\varphi : (P, \mathcal{O}_P) \to \Big(\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{O}\Big(\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i^{\mathrm{pr}_i}\Big)\Big)$ で, 任意の $i \in I$ に対して, $\pi_i = \mathrm{pr}_i \circ \varphi$ を満たすものがただ 1 つ存在する.

(2) 任意の位相空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ に対し, $\Psi'(f)(i) = f \circ \iota_i$ で定義される写像

$$\Psi' : \mathrm{Map}((S, \mathcal{O}_S), (Y, \mathcal{O}_Y)) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Map}((X_i, \mathcal{O}_i), (Y, \mathcal{O}_Y))$$

が全単射ならば, 同相写像 $\psi : \Big(\coprod_{i\in I} X_i, \bigcap_{i\in I} (\mathcal{O}_i)_{\mathrm{inc}_i}\Big) \to (S, \mathcal{O}_S)$ で, 任意の $i \in I$ に対して, $\iota_i = \psi \circ \mathrm{inc}_i$ を満たすものがただ 1 つ存在する.

注意 12.14 上において, 集合として $P = \prod_{i\in I} X_i$, $S = \coprod_{i\in I} X_i$ で, $\pi_i = \mathrm{pr}_i$, $\iota_i = \mathrm{inc}_i$ の場合, Φ' および Ψ' が全単射ならば, φ, ψ の一意性からこれらはそれぞれ, $\prod_{i\in I} X_i$, $\coprod_{i\in I} X_i$ の恒等写像に一致する. 従って, この場合 $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}\Big(\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i^{\mathrm{pr}_i}\Big)$, $\mathcal{O}_S = \bigcap_{i\in I} (\mathcal{O}_i)_{\mathrm{inc}_i}$ である.

命題 12.15 連続な全射が開写像または閉写像ならば商写像である.

証明 $p : X \to Y$ を連続な全射とし, $O \subset Y$ は $p^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$ を満たすとする. p は全射だから命題 3.9 の (4) により $p(p^{-1}(O)) = p(X \cap p^{-1}(O)) = p(X) \cap O = O$ が成り立つため, p が開写像ならば $O = p(p^{-1}(O))$ は Y の開集合である. $X - p^{-1}(O)$ は X の閉集合で, 命題 3.9 の (3) より $p(X - p^{-1}(O)) = p(X) - O = Y - O$ が成り立つため p が閉写像ならば $Y - O = p(X - p^{-1}(O))$ は Y の閉集合である. 従って O は Y の開集合である. 故に p は商写像である.□

命題 12.16 $\mathrm{pr}_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ $(j \in I)$ は開写像である.

命題 12.17 $\mathrm{inc}_j : X_j \to \coprod_{i\in I} X_i$ $(j \in I)$ は開写像であり, かつ閉写像でもある. また, $\mathcal{O}_i = \Big(\bigcap_{i\in I} (\mathcal{O}_i)_{\mathrm{inc}_i}\Big)^{\mathrm{inc}_i}$ である.

補題 12.18 $J \subset I$, $w \in \prod_{i\in I-J} X_i$ に対し, 写像 $j_{J,w} : \prod_{i\in J} X_i \to \prod_{i\in I} X_i$ を $j_{J,w}(x)(i) = \begin{cases} x(i) & i \in J \\ w(i) & i \in I - J \end{cases}$ で定めれば, $j_{J,w}$ は $\prod_{i\in I} X_i$ の部分空間 $\bigcap_{i\in I-J} \mathrm{pr}_i^{-1}(w(i))$ の上への同相写像である.

証明 $\mu \in J$ ならば $\mathrm{pr}_\mu \circ j_{J,w}$ は $\prod_{i\in J} X_i$ から X_μ への射影だから連続写像であり, $\mu \in I - J$ ならば $\mathrm{pr}_\mu \circ j_{J,w}$ はつねに値が $w(\mu)$ である定値写像だから連続写像である. 従って $j_{J,w}$ は 連続写像であり, その像は $\bigcap_{i\in I-J} \mathrm{pr}_i^{-1}(w(i))$ に

含まれる．$j_{J,w}$ から定まる連続写像を $j' : \prod_{i\in J} X_i \to \bigcap_{i\in I-J} \mathrm{pr}_i^{-1}(w(i))$ で表し，包含写像 $\bigcap_{i\in I-J} \mathrm{pr}_i^{-1}(w(i)) \to \prod_{i\in I} X_i$ を ι で表せば，$\iota \circ j' = j_{J,w}$ である．写像 $k : \bigcap_{i\in I-J} \mathrm{pr}_i^{-1}(w(i)) \to \prod_{i\in J} X_i$ を，各 $\mu \in J$ に対し，$\mathrm{pr}_\mu \circ k = \mathrm{pr}_\mu \circ \iota : \bigcap_{i\in I-J} \mathrm{pr}_i^{-1}(w(i)) \to X_\mu$ を満たす唯一の写像とする．このとき k は連続で，$\mu \in J$ ならば $\mathrm{pr}_\mu \circ k \circ j' = \mathrm{pr}_\mu \circ \iota \circ j' = \mathrm{pr}_\mu \circ j_{J,w} = \mathrm{pr}_\mu = \mathrm{pr}_\mu \circ id_{\prod_{i\in J} X_i}$ が成り立つため，$k \circ j' = id_{\prod_{i\in J} X_i}$ である．また，$\mu \in J$ ならば $\mathrm{pr}_\mu \circ \iota \circ j' \circ k = \mathrm{pr}_\mu \circ j_{J,w} \circ k = \mathrm{pr}_\mu \circ k = \mathrm{pr}_\mu \circ \iota$ であり，$\mu \in I - J$ に対し，値が $w(\mu)$ である X_μ から X_μ への定値写像を w_μ で表せば $\mathrm{pr}_\mu \circ \iota \circ j' \circ k = \mathrm{pr}_\mu \circ j_{J,w} \circ k = w_\mu \circ \mathrm{pr}_\mu \circ k = w_\mu \circ \mathrm{pr}_\mu \circ \iota = \mathrm{pr}_\mu \circ \iota = \mathrm{pr}_\mu \circ \iota \circ id_{\bigcap_{i\in I-J} \mathrm{pr}_i^{-1}(w(i))}$ が成り立つため，$\iota \circ j' \circ k = \iota \circ id_{\bigcap_{i\in I-J} \mathrm{pr}_i^{-1}(w(i))}$ が得られる．ι は単射だから $j' \circ k = id_{\bigcap_{i\in I-J} \mathrm{pr}_i^{-1}(w(i))}$ となり，k は j' の逆写像であることがわかる． □

補題 12.19 $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \ldots, (X_n, d_n)$ を距離空間とし，関数 $d_\infty : (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n) \times (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n) \to \boldsymbol{R}$ を $d_\infty((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \ldots, d_n(x_n, y_n)\}$ で定める．このとき d_∞ は直積 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の距離関数である．

証明 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ に対し，$d_\infty(x, y) \geqq d_1(x_1, y_1) \geqq 0$ であり，$d_\infty(x, y) = 0$ ならば，すべての $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $d_i(x_i, y_i) = 0$ だから $x_i = y_i$，すなわち $x = y$ である．また $d_i(y_i, x_i) = d_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ より次の等式が成り立つ．

$$d_\infty(y, x) = \max\{d_1(y_1, x_1), d_2(y_2, x_2), \ldots, d_n(y_n, x_n)\} = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \ldots, d_n(x_n, y_n)\} = d_\infty(x, y)$$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n), z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ ならば，三角不等式より $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して次の不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} d_i(x_i, z_i) &\leqq d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i) \\ &\leqq \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \ldots, d_n(x_n, y_n)\} + \max\{d_1(y_1, z_1), d_2(y_2, z_2), \ldots, d_n(y_n, z_n)\} \\ &= d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z) \end{aligned}$$

故に $d_\infty(x, z) \leqq d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z)$ だから d_∞ に関して三角不等式が成り立つ．以上から d_∞ は $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の距離関数である． □

命題 12.20 $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \ldots, (X_n, d_n)$ を距離空間とし，距離関数 d_i から定まる X_i の位相を $\mathcal{O}_{d_i}$ とする．$(X_1, \mathcal{O}_{d_1}), (X_2, \mathcal{O}_{d_2}), \ldots, (X_n, \mathcal{O}_{d_n})$ の直積位相と補題 12.19 の距離関数 d_∞ から定まる $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の位相は一致する．

証明 $(X_1, \mathcal{O}_{d_1}), (X_2, \mathcal{O}_{d_2}), \ldots, (X_n, \mathcal{O}_{d_n})$ の直積位相を $\mathcal{O}$，距離関数 d_∞ から定まる $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の位相を $\mathcal{O}_{d_\infty}$ とする．$O_i \in \mathcal{O}_{d_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ とし，$O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$ の任意の点 $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ に対し，$p_i \in O_i$ で，O_i は X_i の開集合だから，$r_i > 0$ で，$B_{d_i}(p_i\,; r_i) \subset O_i$ を満たすものがある．$r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ とおき，$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B_{d_\infty}(p\,; r)$ ならば $d_j(x_j, p_j) \leqq d_\infty(x, p) < r \leqq r_j$ が各 $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して成り立つため，$x_j \in B_{d_j}(p_j\,; r_j) \subset O_j$ である．従って $x \in O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$ だから $B_{d_\infty}(p\,; r) \subset O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$ が成り立つ．故に p は $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の位相 $\mathcal{O}_{d_\infty}$ に関して $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$ の内点だから $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \in \mathcal{O}_{d_\infty}$ である．例 11.8 の (1) と注意 12.11 から，$\mathcal{O}$ の各要素は $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$ $(O_i \in \mathcal{O}_{d_i})$ という形の集合の合併集合として表されるため，$\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_{d_\infty}$ が成り立つ．

$O \in \mathcal{O}_{d_\infty}$ ならば $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in O$ に対し，$r_p > 0$ で $B_{d_\infty}(p\,; r_p) \subset O$ を満たすものがある．$O_{p,i} = B_{d_i}(p_i\,; r_p)$ とおくと $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in O_{p,1} \times O_{p,2} \times \cdots \times O_{p,n}$ ならば各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $x_i \in O_{p,i}$ より $d_i(x_i, p_i) < r_p$ だから $d(x, p) = \max\{d_1(x_1, p_1), d_2(x_2, p_2), \ldots, d_n(x_n, p_n)\} < r_p$ が成り立つ．従って $x \in B_{d_\infty}(p\,; r_p)$ であり，$B_{d_\infty}(p\,; r_p) \subset O$ から $x \in O$ である．故に $O_{p,1} \times O_{p,2} \times \cdots \times O_{p,n} \subset O$ が任意の $p \in O$ に対して成り立つため $\bigcup_{p\in O} (O_{p,1} \times O_{p,2} \times \cdots \times O_{p,n}) \subset O$ である．また各 $p \in O$ に対して $p \in O_{p,1} \times O_{p,2} \times \cdots \times O_{p,n}$ だから

$O = \bigcup_{p \in O} \{p\} \subset \bigcup_{p \in O} (O_{p,1} \times O_{p,2} \times \cdots \times O_{p,n})$ も成り立つ．従って $O = \bigcup_{p \in O} (O_{p,1} \times O_{p,2} \times \cdots \times O_{p,n})$ であり，注意 12.11 から $O_{p,1} \times O_{p,2} \times \cdots \times O_{p,n} \in \mathcal{O}$ だから $O_{p,1} \times O_{p,2} \times \cdots \times O_{p,n}$ の合併である O も $\mathcal{O}$ に属するため $\mathcal{O}_{d_\infty} \subset \mathcal{O}$ も成り立ち，$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{d_\infty}$ が得られる． $\square$

d_1 を $d_1(x, y) = |x - y|$ で与えられる $\boldsymbol{R}$ の通常の距離関数とすれば上の結果から，位相空間 $(\boldsymbol{R}, \mathcal{O}_{d_1})$ の n 個の直積位相は例 8.3 で定めた $\boldsymbol{R}^n$ の距離関数 d_∞ から定まる $\boldsymbol{R}^n$ の位相 $\mathcal{O}_{d_\infty}$ と一致するため，例 6.21 から次が得られる．

系 12.21 p を 1 以上の実数とする．例 8.3 で定めた $\boldsymbol{R}^n$ の距離関数 d_p から定まる $\boldsymbol{R}^n$ の位相を $\mathcal{O}_{d_p}$ とすれば，$\mathcal{O}_{d_p}$ は位相空間 $(\boldsymbol{R}, \mathcal{O}_{d_1})$ の n 個の直積位相と一致する．

演習問題

問題 12.1 X を位相空間，Y を X の部分空間とする．Y に含まれる X の部分集合 Z の Y の中における閉包は $\overline{Z} \cap Y$ で与えられることを示せ．ただし $\overline{Z}$ は X の中における Z の閉包である．

問題 12.2 位相空間 X は，その開集合の族 $(U_i)_{i \in I}$ の合併集合 $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ とする．X から位相空間 Y への写像 $f : X \to Y$ について，f の各 U_i への制限 $f|_{U_i} : U_i \to Y$ は連続ならば f が連続写像であることを示せ．

問題 12.3 位相空間 X は，その閉集合の族 $(F_i)_{i \in I}$ の合併集合 $X = \bigcup_{i \in I} F_i$ となっており，X から位相空間 Y への写像 $f : X \to Y$ について，f の各 F_i への制限 $f|_{F_i} : F_i \to Y$ は連続であるとする．このとき，f が連続写像となるかどうかについて，次の問に答えよ．

(1) I が有限集合なら，f は連続になることを示せ．

(2) I が有限集合でない場合，f は必ずしも連続になるとはいえない．I が可算集合で f が連続とならないような例を挙げよ．

(3) $(F_i)_{i \in I}$ が局所有限であるとは，各 $x \in X$ に対して，x の近傍 U_x で $U_x \cap F_i \neq \emptyset$ を満たす $i \in I$ が有限個しかないものが存在することを言う．$(F_i)_{i \in I}$ が局所有限ならば f は連続であることを示せ．

問題 12.4 $(X, \leqq)$ を全順序集合とし，$a, b \in X$ に対し，$(a, b) = \{x \in X | a < x < b\}$, $[a, b] = \{x \in X | a \leqq x \leqq b\}$, $(a, b] = \{x \in X | a < x \leqq b\}$, $[a, b) = \{x \in X | a \leqq x < b\}$, $(-\infty, b) = \{x \in X | x < b\}$, $(-\infty, b] = \{x \in X | x \leqq b\}$, $(a, +\infty) = \{x \in X | x > a\}$, $[a, +\infty) = \{x \in X | x \geqq a\}$ とおく．

(1) X の部分集合族 $\mathcal{B} = \{(-\infty, b) | b \in X\} \cup \{(a, +\infty) | a \in X\}$ で生成される位相 $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ において，$\mathcal{B} \cup \{(a, b) | a, b \in X\}$ は $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の基底になることを示せ．この X の位相 $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ を順序位相と呼ぶ．

(2) $(X, \leqq)$ が条件「$x, y \in X$, $x < y$ ならば $(x, y) \neq \emptyset$」を満たすならば $a, b \in X$ $(a < b)$ に対し，(a, b), $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$ の X の位相 $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ に関する閉包はそれぞれ $[a, b]$, $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$ になることを示せ．

(3) X の部分集合 Y が X の中に上限をもつことと，Y の閉包が最大元をもつことは同値であり，このときこれらは一致することを示せ．Y の下限に関しても同様のことが成り立つ．

(4) $\mathcal{O}'$ を次の性質をもつ X の位相とすると，$\mathcal{O}'$ は $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ より強いことを示せ．

「$a, b \in X$, $a < b$ ならば $\mathcal{O}'$ に関する a の近傍 U, b の近傍 V で，「$x \in U$, $y \in V$ ならば $x < y$」を満たすものがとれる.」

(5) $(Y, \leqq)$ を $(X, \leqq)$ の部分順序集合とするとき，Y の順序位相は一般に X の順序位相の部分空間としての位相よりも強く，これらの位相が一致するためには Y が下の 2 つの条件を満たすことが必要十分であることを示せ．

「$x < a$ $(x \in Y, a \in X)$ ならば $b \in Y$ で，$x < b$ かつ $(-\infty, b) \cap Y \subset (-\infty, a)$ を満たすものが存在する.」

「$x > a$ $(x \in Y, a \in X)$ ならば $b \in Y$ で，$x > b$ かつ $(b, +\infty) \cap Y \subset (a, +\infty)$ を満たすものが存在する.」

問題 12.5 命題 12.12 を証明せよ．

問題 12.6　命題 12.13 を証明せよ.

問題 12.7　例 8.3 で定義した $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ の距離関数 d_2 に関する位相を考えるとき $\boldsymbol{R}^n$ と $\boldsymbol{R}^m$ の直積空間 $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$ は写像 $\boldsymbol{R}^{n+m} \to \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$ $(x_1, \dots, x_{n+m}) \mapsto ((x_1, \dots, x_n), (x_{n+1}, \dots, x_{n+m}))$ により $\boldsymbol{R}^{m+n}$ と同相であることを証明せよ.

問題 12.8　(1) (V, ρ) をノルム空間とするとき, 加法 $+ : V \times V \to V$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ とスカラー倍 $\cdot : \boldsymbol{R} \times V \to V$, $(r, \boldsymbol{x}) \mapsto r\boldsymbol{x}$ はそれぞれ $V \times V$, $\boldsymbol{R} \times V$ の直積位相に関して連続であることを示せ.

(2) (V, ρ), (W, ν) をノルム空間とする. V が有限次元ならば, 線型写像 $f : V \to W$ は連続であることを示せ.

問題 12.9　$(X_i)_{i \in I}$ を第 2 可算公理を満たす位相空間族とする. 添数集合 I が, たかだか可算な集合ならば直積空間 $\prod\limits_{i \in I} X_i$ も第 2 可算公理を満たすことを示せ.

問題 12.10　$((X_n, d_n))_{n \in \boldsymbol{N}}$ を距離空間族とする.

(1) $d'_n(x, y) = \dfrac{d_n(x, y)}{1 + d_n(x, y)}$ とおき, $d : \prod\limits_{n \in \boldsymbol{N}} X_n \times \prod\limits_{n \in \boldsymbol{N}} X_n \to \boldsymbol{R}$ を $d((x_n)_{n \in \boldsymbol{N}}, (y_n)_{n \in \boldsymbol{N}}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n} d'_n(x_n, y_n)$ で定めるとき d は $\prod\limits_{n \in \boldsymbol{N}} X_n$ の距離関数であることを示せ.

(2) 各 X_n には距離関数 d_n から定まる位相を与えるとき $\prod\limits_{n \in \boldsymbol{N}} X_n$ の直積位相は距離関数 d から定まる位相と一致することを示せ.

§13.　連結性

定義 13.1　(1) X を位相空間, Y, Z を X の部分集合とする. $Y \cap \overline{Z} = \overline{Y} \cap Z = \emptyset$ であるとき, Y と Z は離れているという.

(2) 位相空間 X が離れている 2 つの空でない部分集合の和集合になっていないとき, X は連結であるという.

(3) 位相空間 X の任意の 2 点 $p, q \in X$ に対し, 連続写像 $\omega : [0, 1] \to X$ で, $\omega(0) = p$, $\omega(1) = q$ となるものがあるとき X は弧状連結であるという.

命題 13.2　位相空間 X が連結であるためには次の 3 つのうちのいずれかが成り立つことが必要十分である.

(i) X の閉かつ開集合は $\emptyset$ と X だけである.

(ii) $X = Y \cup Z$, $Y \cap Z = \emptyset$ で, Y, Z が開集合ならば $Y = \emptyset$ または $Z = \emptyset$ である.

(iii) $X = Y \cup Z$, $Y \cap Z = \emptyset$ で, Y, Z が閉集合ならば $Y = \emptyset$ または $Z = \emptyset$ である.

証明　$(i) \Rightarrow (ii)$: $X = Y \cup Z$, $Y \cap Z = \emptyset$ で, Y, Z が開集合ならば, $Y = X - Z$ だから Y は開集合 Z の補集合になるため, Y は閉集合でもある. 従って Y は $\emptyset$ または X であり, 後者の場合は $Z = X - Y = \emptyset$ である.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: $X = Y \cup Z$, $Y \cap Z = \emptyset$ で, Y, Z が閉集合ならば, $Y = X - Z$, $Z = X - Y$ だから Y, Z はそれぞれ閉集合 Z, Y の補集合になるため, Y, Z は開集合でもある. 従って仮定から $Y = \emptyset$ または $Z = \emptyset$ である.

$(iii) \Rightarrow X$ は連結: $X = Y \cup Z$ で, Y と Z は離れているとすれば, $Y \cap \overline{Z} = \emptyset$ だから $Y \subset X - \overline{Z}$ より $X = Y \cup Z \subset (X - \overline{Z}) \cup Z \subset X$ となるため $X = (X - \overline{Z}) \cup Z$ である. $Z \subset \overline{Z}$ だから $X - \overline{Z} \subset X - Z$ であることに注意すれば $(X - \overline{Z}) \cap Z \subset (X - Z) \cap Z = \emptyset$ となるため, $(X - \overline{Z}) \cap Z = \emptyset$ である. 従って $X = (X - \overline{Z}) \cup Z$ より $Z = X - (X - \overline{Z}) = \overline{Z}$ が得られるため, Z は閉集合である. 同様に $\overline{Y} \cap Z = \emptyset$ から Y も閉集合であることが示される. $Y \cap Z = Y \cap \overline{Z} = \emptyset$ だから, 仮定より $Y = \emptyset$ または $Z = \emptyset$ である. 故に X が離れている 2 つの空でない部分集合の和集合にならないため X は連結である.

X は連結 $\Rightarrow (i)$: Y を X の閉かつ開集合とし, $Z = X - Y$ とおけば, Z は X の閉かつ開集合 Y の補集合だから Z も閉かつ開集合である. 従って $Y = \overline{Y}$, $Z = \overline{Z}$ だから $Y \cap \overline{Z} = \overline{Y} \cap Z = Y \cap Z = \emptyset$ となるため, Y と Z

は離れているさらに $X = Y \cup (X - Y) = Y \cup Z$ だから, 仮定より $Y = \emptyset$ または $Z = \emptyset$ である. 後者の場合は $Y = X - (X - Y) = X - Z = X$ となるため, X の閉かつ開集合は $\emptyset$ と X だけである. $\square$

命題 13.3 (1) 位相空間 X の部分空間 Y が連結であることは, 次の条件 $(*)$ と同値である.

$(*)$ X の開集合 U, V が $Y \subset U \cup V$, $Y \cap U \cap V = \emptyset$ を満たせば $Y \cap U = \emptyset$ または $Y \cap V = \emptyset$ である.

(2) $f : X \to Y$ を連続写像とする. X が連結ならば Y の部分空間 $f(X)$ も連結であり, X が弧状連結ならば $f(X)$ も弧状連結である.

(3) X の部分空間 Y が連結で, $Y \subset Z \subset \overline{Y}$ ならば Z も連結である.

(4) X の部分空間 Y, Z が連結で, $Y \cap \overline{Z} \neq \emptyset$ ならば $Y \cup Z$ も連結である.

証明 (1) X の部分空間 Y に対し, X の開集合 U, V が $Y \subset U \cup V$, $Y \cap U \cap V = \emptyset$ を満たすとする. $Z = Y \cap U$, $W = Y \cap V$ とおけば Z, W は Y の開集合であり, $Y \subset U \cup V$ より $Z \cup W = (Y \cap U) \cup (Y \cap V) = Y \cap (U \cup V) = Y$ が成り立つ. また, $Z \cap W = (Y \cap U) \cap (Y \cap V) = Y \cap U \cap V = \emptyset$ だから Y が連結ならば, 命題 13.2 の (i) により $Y \cap U = Z = \emptyset$ または $Y \cap V = W = \emptyset$ である.

逆に $(*)$ が満たされると仮定し, $Y = Z \cup W$, $Z \cap W = \emptyset$ で, Z, W が Y の開集合であるとする. $Z = Y \cap U$, $W = Y \cap V$ を満たす X の開集合 U, V が存在し, $Y = Z \cup W = (Y \cap U) \cup (Y \cap V) = Y \cap (U \cup V) \subset U \cup V$, $Y \cap U \cap V = (Y \cap U) \cap (Y \cap V) = Z \cap W = \emptyset$ だから, 仮定から $Z = Y \cap U = \emptyset$ または $W = Y \cap V = \emptyset$ である. 故に命題 13.2 の (i) により Y は連結である.

(2) X は連結であるとし, Y の開集合 U, V が $f(X) \subset U \cup V$, $f(X) \cap U \cap V = \emptyset$ を満たすとする. $f(X) \subset U \cup V$ より $X = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ であり, $f(X) \cap U \cap V = \emptyset$ より $U \cap V \subset Y - f(X)$ だから $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) \subset f^{-1}(Y - f(X)) = \emptyset$ である. 実際 $x \in f^{-1}(Y - f(X))$ ならば $f(x) \in Y - f(X)$ となって $f(x) \in f(X)$ と矛盾する. 故に $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ である. さらに f の連続性により $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ は X の開集合だから, X の連結性により $f^{-1}(U) = \emptyset$ または $f^{-1}(V) = \emptyset$ である. 前者の場合は $f(X) \cap U = \emptyset$ であり, 後者の場合は $f(X) \cap V = \emptyset$ となるため, (1) の結果により $f(X)$ は連結である.

X は弧状連結であるとし, $p, q \in f(X)$ とする. $f(a) = p$, $f(b) = q$ を満たす $a, b \in X$ をとれば, 仮定から連続写像 $\omega : [0,1] \to X$ で $\omega(0) = a$, $\omega(1) = b$ を満たすものが存在する. このとき, 合成写像 $f \circ \omega : [0,1] \to Y$ は連続で, $(f \circ \omega)([0,1]) = f(\omega([0,1])) \subset f(X)$ だから, 写像 $\zeta : [0,1] \to f(X)$ を $\zeta(t) = (f \circ \omega)(t)$ で定めることができる. このとき ζ は連続であり, $\zeta(0) = (f \circ \omega)(0) = f(\omega(0)) = f(a) = p$, $\zeta(1) = (f \circ \omega)(1) = f(\omega(1)) = f(b) = q$ を満たす. 従って $f(X)$ も弧状連結である.

(3) X の開集合 U, V が $Z \subset U \cup V$, $Z \cap U \cap V = \emptyset$ を満たすとすれば, $Y \subset Z$ より $Y \subset U \cup V$, $Y \cap U \cap V = \emptyset$ である. Y の連結性から (1) の結果より $Y \cap U = \emptyset$ または $Y \cap V = \emptyset$ である. 前者の場合は $Y \subset X - U$ であり $X - U$ は X の閉集合だから $\overline{Y} \subset X - U$ が得られる. このとき, 仮定 $Z \subset \overline{Y}$ より $Z \subset X - U$ だから $Z \cap U = \emptyset$ である. 後者の場合は同様にして $Z \cap V = \emptyset$ が得られるため, (1) の結果により Z は連結である.

(4) X の開集合 U, V が $Y \cup Z \subset U \cup V$, $(Y \cup Z) \cap U \cap V = \emptyset$ を満たすとすれば, $Y, Z \subset Y \cup Z$ より $Y \subset U \cup V$, $Y \cap U \cap V = \emptyset$, $Z \subset U \cup V$, $Z \cap U \cap V = \emptyset$ である. Y, Z の連結性から (1) の結果より「$Y \cap U = \emptyset$ または $Y \cap V = \emptyset$」かつ「$Z \cap U = \emptyset$ または $Z \cap V = \emptyset$」が成り立つ. $Y \cap U = \emptyset$ かつ $Z \cap V = \emptyset$ であると仮定すれば, $Y \subset U \cup V$ より, $Y \subset V$ であり, Z は閉集合 $X - V$ に含まれるため, $\overline{Z} \subset X - V$ が成り立つ. 従って $Y \cap \overline{Z} \subset V \cap (X - V) = \emptyset$ となって, 仮定 $Y \cap \overline{Z} \neq \emptyset$ と矛盾する. 同様に $Y \cap V = \emptyset$ かつ $Z \cap U = \emptyset$ であると仮定しても矛盾が生じるため, $Y \cap U = Z \cap U = \emptyset$ または $Y \cap V = Z \cap V = \emptyset$ が成り立つ. 従って $(Y \cup Z) \cap U = \emptyset$ または $(Y \cup Z) \cap V = \emptyset$ となるため, (1) の結果より $Y \cup Z$ は連結である. $\square$

補題 13.4 X を $\boldsymbol{R}$ の連結な部分空間とするとき, $p, q \in X$ かつ $p < q$ ならば $(p, q) \subset X$ である.

証明 もし, $c \in (p, q)$ で $c \notin X$ であるものが存在すれば, $p \in X \cap (-\infty, c)$, $q \in X \cap (c, \infty)$ だから $X \cap (-\infty, c)$,

$X \cap (c, \infty)$ はともに空集合ではない. $(-\infty, c)$, (c, ∞) は $\boldsymbol{R}$ の開集合で, $c \notin X$ より $X \subset \boldsymbol{R} - \{c\} = (-\infty, c) \cup (c, \infty)$ および $(-\infty, c) \cap (c, \infty) = \emptyset$ を満たすため, これは X が連結であることと矛盾する. 故に $[p, q] \subset X$ である. □

定理 13.5 （中間値の定理）X を連結な位相空間, $f : X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする. $p, q \in X$ に対し, $f(p) < f(q)$ ならば $f(p) < m < f(q)$ である任意の $m \in \boldsymbol{R}$ に対して $f(c) = m$ となる $c \in X$ が存在する.

証明 命題 13.3 の (2) より $f(X)$ は $\boldsymbol{R}$ の連結な部分集合で, $f(p)$ と $f(q)$ を含むため, 補題 13.4 から $f(X)$ は $(f(p), f(q))$ を含む. 従って $m \in (f(p), f(q))$ ならば $m \in f(X)$ だから $f(c) = m$ となる $c \in X$ が存在する. □

定理 13.6 $\boldsymbol{R}$ は連結である.

証明 $\boldsymbol{R}$ の空でない開集合 U, V で $\boldsymbol{R} = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在すると仮定する. U, V は空でないため $a \in U$, $b \in V$ が選べて, $a < b$ と仮定してよい. U は a を含む開集合だから, $(a - r, a + r) \subset U$ を満たす $r > 0$ があるため, $A = \{x \in \boldsymbol{R} | (a, x) \subset U\}$ とおけば, $a + r \in A$ である. また $x \in A$ ならば $x \leqq b$ である. 実際, もし $x > b$ ならば $b \in (a, x) \subset U$ となるが, $b \in V$ であるため $b \in U \cap V$ となって $U \cap V = \emptyset$ と矛盾する. 従って A は空でない上に有界な $\boldsymbol{R}$ の部分集合だから, 上限が存在し, $m = \sup A$ とおけば, $m \geqq a + r > a$ である.

$m \in U$ の場合, U は開集合だから $(m - s, m + s) \subset U$ となる $0 < s < m - a$ が存在し, m が A の上限であることから $m - s < c$ を満たす $c \in A$ がある. このとき $(a, c) \subset U$ となるため, $(a, m + s) \subset (a, c) \cup (m - s, m + s) \subset U$ だから $m + s \in A$ となり, m が A の上界であることと矛盾する.

$m \in V$ の場合, V は開集合だから $(m - t, m + t) \subset V$ となる $0 < t < m - a$ が存在し, m が A の上限であることから $m - t < d \leqq m$ を満たす $d \in A$ がある. $m - t < e < d$ を満たす e をとれば, $e \in (a, d) \subset U$ かつ $e \in (m - t, m + t) \subset V$ だから $e \in U \cap V$ となって $U \cap V = \emptyset$ であることと矛盾する.

従って m は U にも V にも属さないことになるが, このことは $\boldsymbol{R} = U \cup V$ と矛盾する. 故に, U または V は空集合になるため, $\boldsymbol{R}$ は連結である. □

系 13.7 (1) 任意の $a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a < b)$ に対し, 区間 (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ は連結である.

(2) 弧状連結な位相空間は連結である.

証明 (1) 関数 $f : \boldsymbol{R} \to (-1, 1)$ を $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ で定めれば, $g(x) = \dfrac{x}{1 - |x|}$ で定義される関数 $g : (-1, 1) \to \boldsymbol{R}$ は f の逆関数だから f は全単射である. f は連続関数で, $\boldsymbol{R}$ は連結だから命題 13.3 の (2) により, $(-1, 1)$ は連結である. $a < b$ ならば, 関数 $h : (-1, 1) \to (a, b)$ を $h(x) = \dfrac{b - a}{2}x + \dfrac{b + a}{2}$ で定めれば, h は連続な全単射だから命題 13.3 の (2) により, (a, b) は連結である. $\overline{(a, b)} = [a, b]$ であり, I が $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ のいずれかならば $(a, b) \subset I \subset \overline{(a, b)}$ だから, 命題 13.3 の (3) により, I は連結である.

関数 $p : \boldsymbol{R} \to (0, \infty)$ を $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & x \leqq 0 \\ 1 + x & x \geqq 0 \end{cases}$ で定めれば, $q(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & 0 < x \leqq 1 \\ x - 1 & x \geqq 1 \end{cases}$ で定義される関数 $q : (0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ は p の逆関数だから p は全単射である. p は連続関数で, $\boldsymbol{R}$ は連結だから命題 13.3 の (2) により, $(0, \infty)$ は連結である. 関数 $r : (0, \infty) \to (a, \infty)$ を $r(x) = x + a$ で定めれば, r は連続な全単射だから命題 13.3 の (2) により, (a, ∞) は連結である. $\overline{(a, \infty)} = [a, \infty)$ だから, 命題 13.3 の (3) により, $[a, \infty)$ も連結である. さらに関数 $u : (-b, \infty) \to (-\infty, b)$, $v : [-b, \infty) \to (-\infty, b]$ を $u(x) = -x$, $v(x) = -x$ で定めれば, これらは連続な全単射だから, 命題 13.3 の (2) により, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ も連結である.

(2) 位相空間 X が連結でないならば, 空でない開集合 U, V で $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在する. U, V は空でないため $p \in U$, $q \in V$ を選ぶことができる. このとき, 連続写像 $\omega : [0, 1] \to X$ で $\omega(0) = p$, $\omega(1) = q$ を満たすものが存在すれば $0 \in \omega^{-1}(U)$, $1 \in \omega^{-1}(V)$ だから $\omega^{-1}(U)$, $\omega^{-1}(V)$ はともに $[0, 1]$ の空でない開集合である. さらに $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ だから $\omega^{-1}(U) \cup \omega^{-1}(V) = \omega^{-1}(U \cup V) = \omega^{-1}(X) = [0, 1]$,

$\omega^{-1}(U)\cap\omega^{-1}(V)=\omega^{-1}(U\cap V)=\emptyset$ となって, $[0,1]$ が連結であることと矛盾する. 故に連続写像 $\omega:[0,1]\to X$ で $\omega(0)=p$, $\omega(1)=q$ を満たすものは存在しないため, X は弧状連結ではない. 従って X が弧状連結ならば連結である. □

定理 13.8 $\boldsymbol{R}$ の連結な部分空間は, $\boldsymbol{R}$ 全体か, 系 13.7 の (1) の区間のいずれかである.

証明 X が下に有界である場合は $a=\inf X$ とおけば, $X\subset[a,\infty)$ であり, 下に有界でない場合は $a=-\infty$ とおく. また, X が上に有界である場合は $b=\sup X$ とおけば, $X\subset(-\infty,b]$ であり, 上に有界でない場合は $b=\infty$ とおく. 従って X が有界ならば $X\subset[a,b]$ である.

$x\in(a,b)$ に対し, $a\neq-\infty$ の場合は a が X の下限であることから $a<p<x$ を満たす $p\in X$ が存在し, $a=-\infty$ の場合は X が下に有界ではないため, $p<x$ を満たす $p\in X$ が存在する. 同様に, $b\neq\infty$ の場合は b が X の上限であることから $x<q<b$ を満たす $q\in X$ が存在し, $b=\infty$ の場合は X が上に有界ではないため, $q>x$ を満たす $q\in X$ が存在する. 従って, 補題 13.4 から $(p,q)\subset X$ であり, $x\in(p,q)$ だから $x\in X$ である. 故に $(a,b)\subset X$ である.

以上から, X が有界ならば $(a,b)\subset X\subset[a,b]$ となるため, X は (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$ のいずれかで, X が下に有界であるが上に有界でない場合は $(a,\infty)\subset X\subset[a,\infty)$ となるため, X は (a,∞), $[a,\infty)$ のいずれかであり, X が上に有界であるが下に有界でない場合は $(-\infty,b)\subset X\subset(\infty,b]$ となるため, X は $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$ のいずれかである. X が上にも下にも有界でない場合は $(-\infty,\infty)\subset X$ だから $X=(-\infty,\infty)=\boldsymbol{R}$ である. □

命題 13.9 $(Y_i)_{i\in I}$ は位相空間 X の空でない部分空間の族で, 次の条件 $(*)$ を満たすとする.

$(*)$ 任意の $i,j\in I$ に対して $i_2,i_3,\dots,i_{n-1}\in I$ で, $s=2,3,\dots,n$ に対し $Y_{i_{s-1}}\cap Y_{i_s}\neq\emptyset$ (ただし $i_1=i$, $i_n=j$) を満たすものが存在する.

(1) すべての $i\in I$ に対して Y_i が連結ならば $\displaystyle\bigcup_{i\in I}Y_i$ は連結である.

(2) すべての $i\in I$ に対して Y_i が弧状連結ならば $\displaystyle\bigcup_{i\in I}Y_i$ は弧状連結である.

証明 (1) まず, 任意の $i,j\in I$ に対して $Y_i\cap Y_j\neq\emptyset$ ならば $\displaystyle\bigcup_{i\in I}Y_i$ は連結であることを示す.

X の開集合 U,V が $\displaystyle\bigcup_{i\in I}Y_i\subset U\cup V$, $\displaystyle\left(\bigcup_{i\in I}Y_i\right)\cap U\cap V=\emptyset$ を満たすとする. 二つ目の等式の左辺は $\displaystyle\bigcup_{i\in I}(Y_i\cap U\cap V)$ に等しいため, すべての $i\in I$ に対して $Y_i\cap U\cap V=\emptyset$ であり, $\displaystyle Y_i\subset\bigcup_{i\in I}Y_i$ だから, 一つ目の関係式から $Y_i\subset U\cup V$ である. 各 Y_i は連結だから $Y_i\cap U=\emptyset$ または $Y_i\cap V=\emptyset$ である. もし, すべての $i\in I$ に対して $Y_i\cap U=\emptyset$ ならば $\displaystyle\left(\bigcup_{i\in I}Y_i\right)\cap U=\bigcup_{i\in I}(Y_i\cap U)=\emptyset$ が成り立つ. $Y_j\cap U\neq\emptyset$ を満たす $j\in I$ が存在する場合は, $Y_j\cap V=\emptyset$ だから $Y_j\subset X-V$ である. 仮定から任意の $i\in I$ に対して $p\in Y_i\cap Y_j$ となる p があるため, $p\in Y_i\cap(X-V)$ であり, 一方 $Y_i\subset U\cup V$ だから $p\in Y_i\cap U$ である. 従って任意の $i\in I$ に対して $Y_i\cap U\neq\emptyset$ が成り立つため, $Y_i\cap V=\emptyset$ である. このとき, $\displaystyle\left(\bigcup_{i\in I}Y_i\right)\cap V=\emptyset$ が成り立つ. 故に命題 13.3 の (1) により $\displaystyle\bigcup_{i\in I}Y_i$ は連結である.

$(*)$ が満たされるとき, $i_1\in I$ を一つ選んでおき, 各 $j\in I$ に対して $i_2,\dots,i_{n-1}\in I$ で, $s=2,3,\dots,n$ に対し $Y_{i_{s-1}}\cap Y_{i_s}\neq\emptyset$ (ただし $i_n=j$) を満たすものを選び, $\displaystyle Z_j=\bigcup_{s=1}^{n}Y_{i_s}$ とおく. 命題 13.3 の (4) と n による帰納法で, Z_j が連結であることがわかる. $\displaystyle Y_{i_1}\subset\bigcap_{i\in I}Z_i$ だから $\displaystyle\bigcap_{i\in I}Z_i$ は空でないため, 上で示したことから $\displaystyle\bigcup_{i\in I}Z_i$ は連結である. 各 $j\in I$ に対し $\displaystyle Y_j\subset Z_j\subset\bigcup_{i\in I}Z_i$, $\displaystyle Z_j\subset\bigcup_{i\in I}Y_i$ だから $\displaystyle\bigcup_{i\in I}Y_i\subset\bigcup_{i\in I}Z_i$ と $\displaystyle\bigcup_{i\in I}Z_i\subset\bigcup_{i\in I}Y_i$ が成り立つため $\displaystyle\bigcup_{i\in I}Z_i=\bigcup_{i\in I}Y_i$ である.

(2) $\displaystyle p,q\in\bigcup_{i\in I}Y_i$ に対し, $p\in Y_i$, $q\in Y_j$ となる $i,j\in I$ をとる. 仮定より $i_2,\dots,i_{n-1}\in I$ で, $s=2,3,\dots,n$ に対し $Y_{i_{s-1}}\cap Y_{i_s}\neq\emptyset$ (ただし $i_1=i$, $i_n=j$) を満たすものが存在するため, $a_s\in Y_{i_{s-1}}\cap Y_{i_s}$ をとる. $s=1,2,\dots,n$ に対し $a_s,a_{s+1}\in Y_{i_s}$ (ただし $a_1=p$, $a_{n+1}=q$) であり, Y_{i_s} の弧状連結性により, 連続写像 $\omega_s:[0,1]\to Y_{i_s}$ で $\omega_s(0)=a_s$, $\omega_s(1)=a_{s+1}$ となるものがある. $\displaystyle\omega:[0,1]\to\bigcup_{i\in I}Y_i$ を $\omega(t)=\omega_s(nt-s+1)$ $\left(t\in\left[\frac{s-1}{n},\frac{s}{n}\right],\ s=1,2,\dots,n\right)$ で定め

れば, ω は $\omega(0)=\omega_1(0)=a_1=p$, $\omega(1)=\omega_n(1)=a_{n+1}=q$ を満たす連続写像である．故に $\bigcup_{i\in I} Y_i$ は弧状連結である． □

定義 13.10　位相空間 X における関係 $\sim$, $\underset{p}{\sim}$ を「$x\sim y \Leftrightarrow x$ と y を含む X の連結な部分空間が存在する.」,「$x\underset{p}{\sim} y \Leftrightarrow$ 連続写像 $\omega:[0,1]\to X$ で, $\omega(0)=x$, $\omega(1)=y$ となるものが存在する.」により定めると, これらは同値関係で, $\sim$, $\underset{p}{\sim}$ によって X を類別した各同値類をそれぞれ X の連結成分, 弧状連結成分という．

命題 13.11　位相空間 X の点 x を含む連結成分を C_x, 弧状連結成分を P_x で表せば, $P_x\subset C_x$ であり, C_x, P_x はそれぞれ x を含む最大の連結な部分空間, 最大の弧状連結な部分空間である．また, C_x は X の閉集合である．

証明　$y\in P_x$ ならば, 連続写像 $\omega:[0,1]\to X$ で, $\omega(0)=x$, $\omega(1)=y$ となるものが存在する．定理 13.6 と命題 13.3 の (2) により $\omega([0,1])$ は連結な部分空間で, x と y を含むため, $x\sim y$ である．従って $y\in C_x$ となるため $P_x\subset C_x$ である．

Y が x を含む連結な部分空間ならば, 任意の $y\in Y$ に対して $x\in Y$ であることと Y の連結性から $x\sim y$ である．従って $y\in C_x$ となるため $Y\subset C_x$ である．任意の $y\in C_x$ に対して $x,y\in X_y$ を満たす連結な部分空間 X_y が存在し, $x\in \bigcap_{y\in C_x} X_y$ だから $\bigcap_{y\in C_x} X_y$ は空集合ではないため, 命題 13.9 の (1) により $\bigcup_{y\in C_x} X_y$ は連結である．$\bigcup_{y\in C_x} X_y$ は x を含むため, 上で示したことから $\bigcup_{y\in C_x} X_y\subset C_x$ であり, $y\in C_x$ ならば $y\in X_y$ だから $C_x=\bigcup_{y\in C_x}\{y\}\subset\bigcup_{y\in C_x} X_y$ である．従って $C_x=\bigcup_{y\in C_x} X_y$ となるため, C_x は連結であり, C_x は x を含むすべての連結な部分空間を含むため, x を含む最大の連結部分空間である．命題 13.3 の (3) により $\overline{C_x}$ も連結で x を含むため C_x に含まれるが, 一般に $C_x\subset\overline{C_x}$ だから $\overline{C_x}=C_x$ である．故に C_x は X の閉集合である．

Y が x を含む弧状連結な部分空間ならば, 任意の $y\in Y$ に対して連続写像 $\omega_y:[0,1]\to X$ で, $\omega_y(0)=x$, $\omega_y(1)=y$ となるものが存在するため, $x\underset{p}{\sim} y$ である．従って $y\in P_x$ だから $Y\subset P_x$ である．任意の $y\in P_x$ に対して, 上記の連続写像を考えれば $\omega_y([0,1])$ は x と y を含む弧状連結な部分空間であり, $x\in\bigcap_{y\in P_x}\omega_y([0,1])$ だから $\bigcap_{y\in P_x}\omega_y([0,1])$ は空集合ではないため, 命題 13.9 の (2) により $\bigcup_{y\in P_x}\omega_y([0,1])$ は弧状連結である．$\bigcup_{y\in P_x}\omega_y([0,1])$ は x を含むため, 上で示したことから $\bigcup_{y\in P_x}\omega_y([0,1])\subset P_x$ であり, $y\in P_x$ ならば $y\in\omega_y([0,1])$ だから $P_x=\bigcup_{y\in P_x}\{y\}\subset\bigcup_{y\in P_x}\omega_y([0,1])$ である．従って $P_x=\bigcup_{y\in P_x}\omega_y([0,1])$ となるため, P_x は弧状連結であり, P_x は x を含むすべての弧状連結な部分空間を含むため, x を含む最大の弧状連結部分空間である． □

$\boldsymbol{R}^2$ の部分空間 Y を $Y=([0,1]\times\{0\})\cup(\{0\}\times[0,1])\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\times[0,1]\right)$ によって定める．

補題 13.12　連続写像 $\omega:[0,1]\to Y$ が $\omega(0)\notin\{0\}\times[0,1]$ かつ $\omega(1)=(0,1)$ を満たすならば, $a\in(0,1)$ で $\omega(a)=(0,0)$ を満たすものが存在する．

証明　$\{0\}\times[0,1]$ は $(0,1)$ を含む Y の閉集合だから, $\omega^{-1}(\{0\}\times[0,1])$ は 1 を含む $[0,1]$ の閉集合である．従って $\omega^{-1}(\{0\}\times[0,1])$ の最小値が存在して, それを a とする．ここで, $\omega(0)\notin\{0\}\times[0,1]$ だから, $0<a\leqq 1$ であることに注意する．$\omega(a)=(0,b)$ とおくとき, $b\neq 0$ であると仮定すれば, ω の連続性より, $0<\delta\leqq a$ で, 条件「$|t-a|<\delta$ ならば $\|\omega(t)-\omega(a)\|<\dfrac{b}{2}$」を満たすものが存在する．$\omega(t)=(\omega_1(t),\omega_2(t))$ によって関数 $\omega_1,\omega_2:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ を定めれば, ω_1, ω_2 はともに連続関数であり, $|\omega_i(t)-\omega_i(a)|\leqq\|\omega(t)-\omega(a)\|$ $(i=1,2)$ だから, $a-\delta<t<a$ ならば $|\omega_1(t)|<\dfrac{b}{2}$ かつ $|\omega_2(t)-b|<\dfrac{b}{2}$ が成り立つ．後者の不等式から $a-\delta<t<a$ ならば $\omega_2(t)>\dfrac{b}{2}>0$ が成り立ち, a の最小性から $a-\delta<t<a$ ならば $(\omega_1(t),\omega_2(t))=\omega(t)\in Y-(\{0\}\times[0,1])$ だから $a-\delta<t<a$ ならば $\omega_1(t)\in\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\,n=1,2,\dots\right\}$ である．従って ω_1 の連続性から, 自然数 k で, 条件「$a-\delta<t<a$ ならば $\omega_1(t)=\dfrac{1}{k}$」を満たすものがある．一方, ω_1 の連続性から, $\lim_{t\to a-0}\omega_1(t)=\omega_1(a)=0$ だから, これは上のことと矛盾する．故に $\omega(a)=(0,0)$ である． □

命題 13.13　$Y-\{(0,0)\}$ は連結であるが弧状連結ではない.

証明　$Z=Y-(\{0\}\times[0,1])$ とおけば $Z=((0,1]\times\{0\})\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\times[0,1]\right)$ である. $(0,1]\times\{0\}$ と各自然数 n に対して $\left\{\frac{1}{n}\right\}\times[0,1]$ は連結であり, $((0,1]\times\{0\})\cup\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\times[0,1]\right)=\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}\neq\emptyset$ だから, 命題 13.9 によって Z は連結である. 任意の $(0,t)\in\{0\}\times[0,1]$ は $a_n=\left(\frac{1}{n},t\right)$ で与えられる Z の点列 $(a_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ の極限だから $\{0\}\times[0,1]\subset\overline{Z}$ であり, $(\{0\}\times[0,1])\cup Z=Y$ だから $Y\subset\overline{Z}$ である. また, Y は $\boldsymbol{R}^2$ の開集合 $((\boldsymbol{R}-[0,1])\times\boldsymbol{R})\cup(\boldsymbol{R}\times(\boldsymbol{R}-[0,1]))\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)\times(0,\infty)\right)$ の補集合だから, Y は閉集合であり, $Y=\overline{Z}$ である. 従って $Z\subset Y-(\{0\}\times[0,1])\subset Y=\overline{Z}$ だから命題 13.3 の (3) により $Y-\{(0,0)\}$ は連結である.

$Y-\{(0,0)\}$ が弧状連結ならば, 連続写像 $\omega:[0,1]\to Y-\{(0,0)\}$ で, $\omega(0)=(1,1)$ かつ $\omega(1)=(0,1)$ を満たすものが存在するが, これは補題 13.12 の結果と矛盾する. □

命題 13.14　連続写像 $F:Y\times[0,1]\to Y$ で, 任意の $y\in Y$ と $t\in[0,1]$ に対して $F(y,0)=y$, $F(y,1)=(0,1)$, $F((0,1),t)=(0,1)$ を満たすものは存在しない. すなわち, $\{(0,1)\}$ は Y の強変位レトラクトではない.

証明　連続写像 $F:Y\times[0,1]\to Y$ で, 任意の $y\in Y$ と $t\in[0,1]$ に対して　$F(y,0)=y$, $F(y,1)=(0,1)$, $F((0,1),t)=(0,1)$ を満たすものが存在すると仮定する. 自然数 n に対して, 写像 $\omega_n:[0,1]\to Y$ を $\omega_n(t)=F\left(\left(\frac{1}{n},1\right),t\right)$ によって定めれば, ω_n は連続であり, $\omega_n(0)=F\left(\left(\frac{1}{n},1\right),0\right)=\left(\frac{1}{n},1\right)\notin\{0\}\times[0,1]$ かつ $\omega_n(1)=(0,1)$ を満たすため, 補題 13.12 より, $a_n\in(0,1)$ で $\omega_n(a_n)=(0,0)$ を満たすものが存在する. $\{a_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ はコンパクト空間 $[0,1]$ の点列だから, 収束する部分列 $(a_{n_k})_{k\in\boldsymbol{N}}$ が存在する. $\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=p$ とおけば, F の連続性と仮定から $\lim_{k\to\infty}F\left(\left(\frac{1}{n_k},1\right),a_{n_k}\right)=F((0,1),p)=(0,1)$ である. 一方 ω_n の定義と a_n の選び方から $\lim_{k\to\infty}F\left(\left(\frac{1}{n_k},1\right),a_{n_k}\right)=\lim_{k\to\infty}\omega_{n_k}(a_{n_k})=(0,0)$ が得られるため, 上式と矛盾する. □

命題 13.15　連続写像 $r:[0,1]\times[0,1]\to Y$ で, すべての自然数 n に対して $r\left(\frac{1}{n},1\right)=\left(\frac{1}{n},1\right)$ を満たすものは存在しない. とくに, Y は $[0,1]\times[0,1]$ のレトラクトではない.

証明　連続写像 $r:[0,1]\times[0,1]\to Y$ で, すべての自然数 n に対して $r\left(\frac{1}{n},1\right)=\left(\frac{1}{n},1\right)$ 満たすものが存在すると仮定し, 写像 $\omega:[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$ を $\omega(t)=(t,1)$ で定める. 自然数 n に対して $p_n=\frac{2n+1}{2n(n+1)}$ とおけば $(p_n,0)$ は Y の点で, $\left(\frac{1}{n+1},0\right)$ と $\left(\frac{1}{n},0\right)$ の中点である. さらに $Y-\{(p_n,0)\}\subset((-\infty,p_n)\times\boldsymbol{R})\cup((p_n,\infty)\times\boldsymbol{R})$, $((-\infty,p_n)\times\boldsymbol{R})\cap((p_n,\infty)\times\boldsymbol{R})=\emptyset$ であり, $(-\infty,p_n)\times\boldsymbol{R}$ と $(p_n,\infty)\times\boldsymbol{R}$ はともに $\boldsymbol{R}^2$ の開集合だから, $Y-\{(p_n,0)\}$ は連結ではなく, $\left(\frac{1}{n+1},1\right)\in(Y-\{(p_n,0)\})\cap((-\infty,p_n)\times\boldsymbol{R})$, $\left(\frac{1}{n},1\right)\in(Y-\{(p_n,0)\})\cap((p_n,\infty)\times\boldsymbol{R})$ だから, $\left(\frac{1}{n+1},1\right)$ と $\left(\frac{1}{n},1\right)$ は $Y-\{(p_n,0)\}$ の異なる連結成分に属する. $\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$ は連結だから, もし $r\circ\omega:[0,1]\to Y$ による $\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$ の像が $(p_n,0)$ を含まなければ, $r\circ\omega$ の連続性と, r に関する仮定から $r\left(\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)=\left(\frac{1}{n+1},1\right)$ と $r\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\left(\frac{1}{n},1\right)$ は $Y-\{p_n\}$ の同じ連結成分に属することになって, 上のことと矛盾する. 従って $a_n\in\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$ で, $r(\omega(a_n))=(p_n,0)$ を満たすものが存在する. $a_n\in\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$ だから $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ である. 従って r と ω の連続性から $\lim_{n\to\infty}(p_n,0)=\lim_{n\to\infty}r(\omega(a_n))=r(\omega(0))=r(0,1)=\lim_{n\to\infty}r\left(\frac{1}{n},1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n},1\right)=(0,1)$ であるが, $p_n=\frac{2n+1}{2n(n+1)}$ だから $\lim_{n\to\infty}(p_n,0)=(0,0)$ となって矛盾が生じる. □

定義 13.16　位相空間 X の各点が連結な近傍をもつとき, X は局所連結であるといい, 各点が弧状連結な近傍をもつとき, X は局所弧状連結であるという.

命題 13.17　X が局所連結ならば, X の各連結成分は開集合であり, 局所弧状連結ならば, 任意の $x\in X$ に対し, x を含む連結成分と弧状連結成分は一致する. とくに, X が連結で, 局所弧状連結ならば弧状連結である.

証明　X は局所 (弧状) 連結であるとして, C を X の任意の (弧状) 連結成分とする. $x\in C$ に対し, x の近傍で (弧状)

連結なものを U とすれば, 命題 13.11 により, C は x を含む最大の (弧状) 連結な部分空間だから $U \subset C$ である. 故に, C の各点は内点だから, C は開集合である.

X は局所弧状連結であるとし, Π を X の弧状連結成分全体からなる集合とすれば, 上で示したことから, Π の各要素は X の開集合である. $X = \bigcup \Pi$ であり, $P, Q \in \Pi$ かつ $P \neq Q$ ならば $P \cap Q = \emptyset$ だから, 任意の $P \in \Pi$ に対し, $P = X - \bigcup(\Pi - \{P\})$ が成り立つ. ここで, $\bigcup(\Pi - \{P\})$ は X の開集合の合併集合だから, 開集合である. 故に, その補集合 P は閉集合でもある. C, P をそれぞれ $x \in X$ を含む連結成分, 弧状連結成分とすれば, 命題 13.11 により, $P \subset C$ である. もし $P \neq C$ ならば, P が閉集合であることから, $C - P$ は空でない開集合であり, $C = P \cup (C - P)$ より, C は交わらない 2 つの空でない開集合の合併になるため, C が連結であることと矛盾する. 従って $P = C$ である. □

例 13.18 $\boldsymbol{R}^n$ の任意の開集合は局所弧状連結である.

命題 13.19 (1) $(X_i)_{i \in I}$ を連結な位相空間族とすれば, 直積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ は連結である.

(2) $(X_i)_{i \in I}$ が弧状連結な位相空間族ならば直積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ は弧状連結である.

証明 (1) $(X_i)_{i \in I}$ を連結な位相空間族とする. まず I が有限集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ $(n \geqq 2)$ の場合に $\prod_{i \in I} X_i$ が連結であることを n による帰納法で示す. $n-1$ 個の連結な連結な位相空間の直積空間は連結であると仮定し, $\prod_{i \in I} X_i$ の開集合 U, V で $\prod_{i \in I} X_i = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在して, $U \neq \emptyset$ であると仮定する. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$ ならば $\mathrm{pr}_j^{-1}(x_j) \cap U$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ は x を含むため, 空集合ではなく, 帰納法の仮定から $\mathrm{pr}_j^{-1}(x_j)$ は連結な位相空間 $\prod_{i \in I - \{j\}} X_i$ に同相だから, 連結な $\prod_{i \in I} X_i$ の部分空間である. さらに $\mathrm{pr}_j^{-1}(x_j) \subset \prod_{i \in I} X_i = U \cup V$, $\mathrm{pr}_j^{-1}(x_j) \cap U \cap V = \emptyset$ だから $\mathrm{pr}_j^{-1}(x_j)$ の連結性から $\mathrm{pr}_j^{-1}(x_j) \cap V = \emptyset$ すなわち $\mathrm{pr}_j^{-1}(x_j) \subset \prod_{i \in I} X_i - V = U$ であることがわかる.

U は空集合でないため $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in U$ を一つ選べば, 上で示したことから $\mathrm{pr}_n^{-1}(p_n) \subset U$ であり, 任意の $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{i \in I} X_i$ に対し, $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, p_n) \in \mathrm{pr}_n^{-1}(p_n)$ だから $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, p_n) \in U$ である. 従って, 上の結果を再度用いれば $\mathrm{pr}_1^{-1}(x_1) \subset U$ であり, $x \in \mathrm{pr}_1^{-1}(x_1)$ だから $x \in U$ である. 故に $U = \prod_{i \in I} X_i$ となるため, U の補集合 V は空集合になり, $\prod_{i \in I} X_i$ は連結であることが示された.

I が無限集合の場合, I の有限部分集合全体からなる集合を $P_f(I)$ で表す. $a = (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ を選び, $J \in P_f(I)$ に対し, $\prod_{i \in I} X_i$ の部分空間 X_J を $X_J = \bigcap_{i \in I - J} \mathrm{pr}_i^{-1}(a_i)$ で定め, 写像 $\iota_J : \prod_{j \in J} X_j \to \prod_{i \in I} X_i$ は, 各 $(x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j$ と $i \in I$ に対し $\mathrm{pr}_i(\iota_J((x_j)_{j \in J})) = \begin{cases} x_i & i \in J \\ a_i & i \in I - J \end{cases}$ を満たすものとする. このとき, 補題 12.18 により, ι_J は X_J の上への同相写像であり, 上で示したことから $\prod_{j \in J} X_j$ は連結だから, X_J は連結である. また, すべての $J \in P_f(I)$ に対して $a \in X_J$ だから $\bigcap_{J \in P_f(I)} X_J \neq \emptyset$ である. 従って命題 13.9 の (1) により $\bigcup_{J \in P_f(I)} X_J$ は $\prod_{i \in I} X_i$ の連結な部分空間である. $\mathcal{O}_i$ を X_i の位相とし, $J \in P_f(I)$, $O_j \in \mathcal{O}_j - \{\emptyset\}$ $(j \in J)$ ならば

$$X_J \cap \bigcap_{j \in J} \mathrm{pr}_j^{-1}(O_j) = \left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \,\middle|\, x_j \in O_j \text{ for } j \in J,\ x_i = a_i \text{ for } j \in I - J \right\} \neq \emptyset$$

である. O を空でない $\prod_{i \in I} X_i$ の開集合とすれば O は $\bigcap_{j \in J} \mathrm{pr}_j^{-1}(O_j)$ $(J \in P_f(I), O_j \in \mathcal{O}_j - \{\emptyset\})$ の形の開集合の合併集合だから, 上式から $\left(\bigcup_{J \in P_f(I)} X_J \right) \cap O$ は空集合ではない. 故に $\bigcup_{J \in P_f(I)} X_J$ は $\prod_{i \in I} X_i$ の稠密な部分空間であるため, その閉包 $\prod_{i \in I} X_i$ は命題 13.3 の (3) により, 連結である.

(2) $(X_i)_{i \in I}$ を弧状連結な位相空間族とする. $p = (p_i)_{i \in I}, q = (q_i)_{i \in I}, \in \prod_{i \in I} X_i$ とすれば, 仮定から, 各 $i \in I$ に

対して連続写像 $\omega_i : [0,1] \to X_i$ で $\omega_i(0) = p_i$, $\omega_i(1) = q_i$ を満たすものが存在する．写像 $\omega : [0,1] \to \prod_{i\in I} X_i$ を $\omega(t) = (\omega_i(t))_{i\in I}$ で定めれば，各 $i \in I$ に対して $\mathrm{pr}_i \circ \omega = \omega_i$ は連続だから ω は連続写像であり，$\omega(0) = (\omega_i(0))_{i\in I} = (p_i)_{i\in I} = p$, $\omega(t) = (\omega_i(1))_{i\in I} = (q_i)_{i\in I} = q$ が成り立つ．故に $\prod_{i\in I} X_i$ は弧状連結である． □

演習問題

問題 13.1　A, B を位相空間 X の閉集合とする．$A \cup B$ と $A \cap B$ がともに連結ならば，A と B はともに連結であることを示せ．

問題 13.2　$\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqq 2)$ と $\boldsymbol{R}$ は同相でないことを示せ．また，$S^1 = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 | \, x^2 + y^2 = 1\}$, $[0,1]$, $(0,1)$, $[0,1)$ のうちの，どの 2 組も同相ではないことを示せ．

問題 13.3　位相空間 X が以下の性質をもつとき，X は既約であるという．

「X の閉集合 F_1, F_2 に対して，$X = F_1 \cup F_2$ が成り立つのは，$X = F_1$ または $X = F_2$ の場合に限る.」

(1) 既約な位相空間は連結であることを示せ．

(2) 位相空間 X において，$X = \overline{\{x\}}$ となる点 $x \in X$ が存在すれば，X は既約であることを示せ．

(3) $(P, \triangleleft)$ を半順序集合とし，P に演習問題 9.2 で定義した位相 $\mathcal{O}_\triangleleft$ を与える．このとき，位相空間 $(P, \mathcal{O}_\triangleleft)$ が既約であるためには，$(P, \triangleleft)$ が上向きの有向集合であることが必要十分であることを示せ．

(4) K を体とすると，K の要素を係数とする n 変数の多項式 f に対し，K^n の Zariski 位相 (演習問題 13.4) に関する部分空間 $Z(f)$ が既約であるためには，f が既約な多項式であることが必要十分であることを示せ．

問題 13.4　$(X, \leqq)$ を全順序集合とし，演習問題 12.4 で定義した X の位相 $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathcal{B})$ を考える．

(1) $(X, \mathcal{O})$ が連結であることと，$(X, \leqq)$ は順序完備かつ演習問題 12.4 の (2) の条件を満たすことは同値であることを示せ．

(2) $(X, \leqq)$ が順序完備であるとき，$(X, \mathcal{O})$ の部分空間 C が連結ならば C は X に一致するか，(a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$ のうちのいずれかであることを示せ．

問題 13.5　位相空間 X の点 x を含む連結成分 C_x は x を含むすべての閉かつ開集合の共通部分であることを示せ．従って，$x, y \in X$ に対し，$C_x \neq C_y$ ならば x を含む閉かつ開集合で y を含まないものがある．

問題 13.6　$\sim$, $\underset{p}{\sim}$ を定義 13.10 で定めた位相空間 X の同値関係とする．このとき商空間 $X/\sim$ の各連結成分は，ただ 1 つの点からなることを示せ．また，同値関係 $\underset{p}{\sim}$ に関する商空間 $X/\underset{p}{\sim}$ の弧状連結成分はどのようになっているか?

§14.　コンパクト性

定義 14.1　位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次の条件を満たすとき，$(X, \mathcal{O})$ はコンパクトであるという．

「$\Gamma \subset \mathcal{O}$ に対し，$X = \bigcup \Gamma$ ならば Γ の有限部分集合 Γ' で $X = \bigcup \Gamma'$ となるものがある.」

一般に集合を要素とする集合 Ω が条件「Ω の任意の有限部分集合 Ω' に対し $\bigcap \Omega' \neq \emptyset$」を満たすとき，$\Omega$ は「有限交叉性をもつ」という．

命題 14.2　次の 4 つの条件は互いに同値である．

(i) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ はコンパクトである．

(ii) X の基底 $\mathcal{B}$ で条件「$\Gamma \subset \mathcal{B}$ かつ $X = \bigcup \Gamma$ ならば Γ の有限部分集合 Γ' で $X = \bigcup \Gamma'$ となるものがある．」を満たすものがある．

(iii) X の閉集合よりなる集合 Ω が有限交叉性をもてば $\bigcap \Omega \neq \emptyset$ である.

(iv) X の部分集合よりなる集合 Ω が有限交叉性をもてば $\bigcap \left\{ \overline{A} \,\middle|\, A \in \Omega \right\} \neq \emptyset$ である.

証明 $(i) \Rightarrow (ii)$: $\mathcal{B} = \mathcal{O}$ とすればよい.

$(ii) \Rightarrow (i)$: $\Gamma \subset \mathcal{O}$ は $X = \bigcup \Gamma$ を満たすとする. 任意の $x \in X$ に対し, x を含む $O_x \in \Gamma$ が存在し, さらに $\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}$ の基底であることから $U_x \in \mathcal{B}$ で $x \in U_x \subset O_x$ を満たすものがある. そこで $\Delta = \{U_x | x \in X\}$ とおくと, $\Delta \subset \mathcal{B}$ かつ $X = \bigcup \Delta$ である. 従って, 仮定から Δ の有限部分集合 $\Delta' = \{U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_n}\}$ で $X = \bigcup \Delta'$ を満たすものがある. $\Gamma' = \{O_{x_1}, O_{x_2}, \ldots, O_{x_n}\}$ とおけば, $U_{x_i} \subset O_{x_i}$ が $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して成り立つため, $\bigcup \Delta' \subset \bigcup \Gamma'$ だから $X = \bigcup \Gamma'$ である. 故に X はコンパクトである.

$(i) \Rightarrow (iii)$: X の閉集合よりなる集合 Ω が有限交叉性をもつとする. $\Gamma = \{O \subset X | X - O \in \Omega\}$ とおけば Γ は X の開集合からなる集合である. $\bigcap \Omega = \emptyset$ と仮定すれば, 任意の $x \in X$ に対して $x \notin A$ となる $A \in \Omega$ が存在するため, $O = X - A$ とおけば $x \in O$ であり, $X - O = X - (X - A) = A \in \Omega$ だから $O \in \Gamma$ である. 故に $X = \bigcup \Gamma$ となるため, 仮定から Γ の有限部分集合 Γ' で $X = \bigcup \Gamma'$ となるものがある. そこで $\Omega' = \{A \subset X | X - A \in \Gamma'\}$ とおくと, $A \in \Omega'$ ならば $X - A \in \Gamma' \subset \Gamma$ だから $A = X - (X - A)\Omega$ となるため, Ω' は Ω の有限部分集合である. 従って, 仮定より $\bigcap \Omega' \neq \emptyset$ だから $x \in \bigcap \Omega'$ が存在する. 一方, $X = \bigcup \Gamma'$ より, $x \in O$ を満たす $O \in \Gamma'$ が存在するが, $A = X - O$ とおけば, $X - A = O \in \Gamma'$ だから $A \in \Omega'$ であるが $x \notin A$ となって, $x \in \bigcap \Omega'$ であることと矛盾する. 故に $\bigcap \Omega \neq \emptyset$ である.

$(iii) \Rightarrow (i)$: X はコンパクトでないと仮定すれば, $X = \bigcup \Gamma$ を満たす $\Gamma \subset \mathcal{O}$ で, Γ の任意の有限部分集合 Γ' が $X \neq \bigcup \Gamma'$ を満たすようなものがある. $\Omega = \{A \subset X | X - A \in \Gamma\}$ とおけば Ω は X の閉集合からなる集合である. Ω' を Ω の任意の有限部分集合として $\Gamma' = \{O \subset X | X - O \in \Omega'\}$ とおく. $O \in \Gamma'$ ならば $X - O \in \Omega$ だから $A = X - O$ とおけば $X - A = O \in \Gamma$ となるため, Γ' は Γ の有限部分集合である. 従って仮定から $X \neq \bigcup \Gamma'$ となるため, $x \in X$ で, 任意の $O \in \Gamma'$ に対して $x \notin O$ となるものがある. このとき, 任意の $A \in \Omega'$ に対して $X - (X - A) = A \in \Omega'$ より $X - A \in \Gamma'$ だから $x \notin X - A$ となるため, $x \in A$ である. 従って $x \in \bigcup \Omega'$ だから, 仮定によって $\bigcap \Omega \neq \emptyset$ である. そこで $y \in \bigcap \Omega$ をとると, $X = \bigcup \Gamma$ だから $y \in O$ を満たす $O \in \Gamma$ がある. ところが, $X - (X - O) = O \in \Gamma$ より $X - O \in \Omega$ だから $y \in \bigcap \Omega \subset X - O$ となって, $y \in O$ と矛盾する. 故に X はコンパクトである.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Ω は有限交叉性をもつため, $\left\{ \overline{A} \,\middle|\, A \in \Omega \right\}$ は有限交叉性をもつ X の閉集合よりなる集合だから (iii) を仮定すれば $\bigcap \left\{ \overline{A} \,\middle|\, A \in \Omega \right\} \neq \emptyset$ である.

$(iv) \Rightarrow (iii)$ は明らかである. □

命題 14.3 (1) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分空間 Y がコンパクトであるためには, 次の条件 $(*)$ が満たされることが必要十分である

$(*)$ $\mathcal{O}$ の部分集合 Γ が $Y \subset \bigcup \Gamma$ を満たせば Γ の有限部分集合 Γ' で $Y \subset \bigcup \Gamma'$ となるものがある.

(2) X がコンパクトで, X の部分空間 Y が X の閉集合ならば Y もコンパクトである.

(3) X がコンパクトで, $f : X \to Y$ を連続写像とすると, Y の部分空間 $f(X)$ はコンパクトである.

証明 (1) $(*)$ が満たされると仮定し, Y の開集合からなる集合 Δ は $Y = \bigcup \Delta$ を満たすとする. 各 $U \in \Delta$ に対し, $U = Y \cap O_U$ となる $O_U \in \mathcal{O}$ を選び, $\Gamma = \{O_U | U \in \Delta\}$ とおけば $\Gamma \subset \mathcal{O}$ であり, 各 $U \in \Delta$ は O_U に含まれるため, $Y = \bigcup \Delta \subset \bigcup \Gamma$ である. 従って仮定から Γ の有限部分集合 $\Gamma' = \{O_{U_1}, O_{U_2}, \ldots, O_{U_n}\}$ で $Y \subset \bigcup \Gamma' = \bigcup_{i=1}^{n} O_{U_i}$ となるものがある. そこで $\Delta' = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ とおけば, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $Y \cap O_{U_i} = U_i$ だから $Y = Y \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} O_{U_i} \right) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i = \bigcup \Delta'$ となるため, Y はコンパクトである.

Y はコンパクトであると仮定し, $\mathcal{O}$ の部分集合 Γ は $Y \subset \bigcup \Gamma$ を満たすとする. $\Delta = \{Y \cap O | O \in \Gamma\}$ とおけば, Δ は Y の開集合からなる集合であり, $Y = Y \cap (\bigcup \Gamma) = Y \cap \left(\bigcup_{O \in \Gamma} O \right) = \bigcup_{O \in \Gamma} (Y \cap O) = \bigcup \Delta$ だから, Δ の有限部分集合 Δ' で $Y = \bigcup \Delta'$ となるものがある. $\Delta' = \{Y \cap O_1, Y \cap O_2, \ldots, Y \cap O_n\}$ $(O_1, O_2, \ldots, O_n \in \Gamma)$ として,

$\Gamma' = \{O_1, O_2, \ldots, O_n\}$ とおけば, Γ' は Γ の有限部分集合であり, $Y = \bigcup \Delta' = \bigcup_{i=1}^{n} (Y \cap O_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_i = \bigcup \Gamma'$ となるため, $(*)$ が満たされる.

(2) X の開集合からなる集合 Γ が $Y \subset \bigcup \Gamma$ を満たすとする. $X = Y \cup (X - Y)$ であり, $X - Y$ は X の開集合だから $\Gamma \cup \{X - Y\}$ は X の開集合からなる集合で, $X = (\bigcup \Gamma) \cup (X - Y)$ を満たす. 故に X のコンパクト性から Γ の有限部分集合 Γ' で $X = (\bigcup \Gamma') \cup (X - Y)$ を満たすものがある. このとき

$$Y = Y \cap X = Y \cap \left(\left(\bigcup \Gamma' \right) \cup (X - Y) \right) = \left(Y \cap \left(\bigcup \Gamma' \right) \right) \cup (Y \cap (X - Y)) = \left(Y \cap \left(\bigcup \Gamma' \right) \right) \cup \emptyset \subset \bigcup \Gamma'$$

が成り立つため, (1) の結果から Y はコンパクトである.

(3) X の開集合からなる集合 Γ が $f(X) \subset \bigcup \Gamma$ を満たすとして $\Delta = \{f^{-1}(O) | O \in \Gamma\}$ とおく. 任意の $x \in X$ に対して $f(x) \in f(X)$ だから $f(x) \in O$ となる $O \in \Gamma$ が存在する. このとき, $x \in f^{-1}(O)$ だから $X = \bigcup \Delta$ である. X のコンパクト性により, Δ の有限部分集合 $\Delta' = \{f^{-1}(O_1), f^{-1}(O_2), \ldots, f^{-1}(O_n)\}$ $(O_1, O_2, \ldots, O_n \in \Gamma)$ で $X = \bigcup \Delta'$ を満たすものがある. 任意の $y \in f(X)$ に対して $y = f(x)$ となる $x \in X$ をとれば, $X = \bigcup \Delta'$ より $x \in f^{-1}(O_k)$ となる k がある. このとき $y = f(x) \in O_k$ だから, $\Gamma' = \{O_1, O_2, \ldots, O_n\}$ とおけば, $f(X) \subset \bigcup \Gamma'$ が成り立つことがわかる. 故に (1) の結果から $f(X)$ はコンパクトである. □

定理 14.4 $\boldsymbol{R}$ の有限閉区間 $[a, b]$ はコンパクトである.

証明 Γ を $\boldsymbol{R}$ の開集合の集合とし, $[a, b] \subset \bigcup \Gamma$ が成り立つとして

$$A = \{x \in (a, b] \,|\, [a, x] \subset O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n \text{を満たす} O_1, O_2, \ldots, O_n \in \Gamma \text{が存在する.}\}$$

とおく. $a \in [a, b] \subset \bigcup \Gamma$ だから $a \in O$ を満たす $O \in \Gamma$ がある. a は O の内点だから $(a - r, a + r) \subset O$ を満たす $r > 0$ が存在する. このとき $c = \min\{a + \frac{r}{2}, b\}$ とおけば, $[a, c] \subset O$ となるため, $c \in A$ であり, A は空集合ではない. A の定義から b は A の上界だから, A は上に有界である. 従って A の上限が存在して, u を A の上限とする. $c \in A$ だから $u \geqq c > a$ であり, b は A の上界だから $u \leqq b$ であることに注意する. $u < b$ と仮定すれば, $u \in [a, b] \subset \bigcup \Gamma$ だから $u \in U$ を満たす $U \in \Gamma$ がある. u は U の内点だから $(u - s, u + s) \subset U$ を満たす $s > 0$ が存在するため, $d = \min\{u + \frac{s}{2}, b\}$ とおけば, $u < d \leqq b$ かつ $(u - s, d] \subset U$ である. また, u は A の上限だから $u - s < v < u$ を満たす $v \in A$ が存在し, さらに $[a, v] \subset O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n$ を満たす $O_1, O_2, \ldots, O_n \in \Gamma$ が存在する. このとき, $[a, d] \subset [a, v] \cup (u - s, d] \subset O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n \cup U$ が成り立つため, $d \in A$ となり, u が A の上限であることと矛盾する. 故に $u = b$ である. $b \in [a, b] \subset \bigcup \Gamma$ だから $b \in V$ を満たす $V \in \Gamma$ がある. b は V の内点だから $(b - t, b + t) \subset V$ を満たす $t > 0$ が存在する. また, b は A の上限だから $b - t < w < b$ を満たす $w \in A$ が存在し, さらに $[a, w] \subset W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_n$ を満たす $W_1, W_2, \ldots, W_n \in \Gamma$ が存在する. このとき, $[a, b] \subset [a, w] \cup (b - t, d] \subset W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_n \cup V$ が成り立つため, $b \in A$ であることがわかる. 従って Γ の有限部分集合 $\Gamma' = \{W_1, W_2, \ldots, W_n, V\}$ は $[a, b] \subset \bigcup \Gamma'$ を満たすため $[a, b]$ はコンパクトである. □

定義 14.5 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次の条件 (T_2) を満たすとき, Hausdorff 空間または T_2 空間という.

(T_2) x, y を X の異なる 2 点とすると, x を含む開集合 U と y を含む開集合 V で $U \cap V = \emptyset$ となるものがある.

注意 14.6 Hausdorff 空間において, 一点からなる部分集合は閉集合である. 実際, X を Hausdorff 空間とし, $x \in X$ とすれば, 任意の $y \in X - \{x\}$ に対し, x を含む開集合 U と y を含む開集合 V で $U \cap V = \emptyset$ となるものが存在し, $V \subset X - U \subset X - \{x\}$ だから, y は $X - \{x\}$ の内点である. 従って, $X - \{x\}$ は開集合だから, $\{x\}$ は閉集合である.

例 14.7 (X, d) を距離空間とし, $\mathcal{O}_d$ を距離関数 d から定まる X の位相とする. x, y を X の異なる 2 点として $U = B\left(x; \frac{d(x,y)}{2}\right)$, $V = B\left(y; \frac{d(x,y)}{2}\right)$ とおけば, U, V はそれぞれ x, y の近傍であり, $U \cap V = \emptyset$ である. 実際, もし $z \in U \cap V$ が存在すれば $d(x, z) < \frac{d(x,y)}{2}$ かつ $d(z, y) = d(y, z) < \frac{d(x,y)}{2}$ だから, 距離関数の三角不等式から $d(x, y) \leqq d(x, z) + d(z, y) < d(x, y)$ が得られるため, 矛盾が生じる. 故に位相空間 $(X, \mathcal{O}_d)$ は Hausdorff 空間である.

命題 14.8 (1) Hausdorff 空間の任意の部分空間は Hausdorff 空間である.

(2) Hausdorff 空間よりなる位相空間族の直積空間は Hausdorff 空間である.

証明 (1) X を Hausdorff 空間, Y を X の部分空間とする. x, y を Y の異なる 2 点とすれば, 仮定から X の開集合 U, V で $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在する. このとき $U \cap Y$, $V \cap Y$ はともに Y の開集合で, それぞれ x, y を含み, $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = (U \cap V) \cap Y = \emptyset \cap Y = \emptyset$ である. 故に Y は Hausdorff 空間である.

(2) $(X_i)_{i \in I}$ を Hausdorff 空間よりなる位相空間族とする. $(x_i)_{i \in I}$, $(y_i)_{i \in I}$ を $\prod_{i \in I} X_i$ の異なる 2 点とすれば $x_j \neq y_j$ となる $j \in I$ が存在する. X_j は Hausdorff 空間だから X_j の開集合 U, V で $x_j \in U$, $y_j \in V$, $U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在する. このとき, $\mathrm{pr}_j^{-1}(U)$, $\mathrm{pr}_j^{-1}(V)$ はともに $\prod_{i \in I} X_i$ の開集合で, それぞれ $(x_i)_{i \in I}$, $(y_i)_{i \in I}$ を含み, $\mathrm{pr}_j^{-1}(U) \cap \mathrm{pr}_j^{-1}(V) = \mathrm{pr}_j^{-1}(U \cap V) = \mathrm{pr}_j^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ を満たす. 故に $\prod_{i \in I} X_i$ は Hausdorff 空間である. $\square$

命題 14.9 (1) X が Hausdorff 空間であるためには, 直積空間 $X \times X$ の対角線集合 $\Delta_X = \{(x, x) \in X \times X \,|\, x \in X\}$ が閉集合であることが必要十分である.

(2) f, g を位相空間 X から Hausdorff 空間 Y への連続写像とすると, $\{x \in X \,|\, f(x) = g(x)\}$ は X の閉集合である. 従って, X の稠密な部分集合 D で, f, g の D への制限が一致するものが存在すれば $f = g$ である.

証明 (1) X を Hausdorff 空間とする. $(x, y) \in X \times X - \Delta_X$ ならば $x \neq y$ だから X の開集合 U, V で $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在する. このとき $U \times V$ は (x, y) を含む $X \times X$ の開集合である. もし $(p, q) \in (U \times V) \cap \Delta_X$ が存在すれば $(p, q) \in \Delta_X$ より $p = q$ であり, $p \in U$ かつ $q \in V$ だから $p \in U \cap V$ となり, $U \cap V = \emptyset$ であることと矛盾する. 従って $(U \times V) \cap \Delta_X = \emptyset$ だから $U \times V \subset X \times X - \Delta_X$ が成り立つ. 故に (x, y) は $X \times X - \Delta_X$ の内点であるため, Δ_X は閉集合である.

Δ_X は $X \times X$ の閉集合であるとする. x, y を X の異なる 2 点とすれば, $(x, y) \in X \times X - \Delta_X$ であり, $X \times X - \Delta_X$ は $X \times X$ の開集合だから X の開集合 U, V で $(x, y) \in U \times V \subset X \times X - \Delta_X$ を満たすものが存在する. このとき $x \in U$, $y \in V$ であり, もし $z \in U \cap V$ が存在すれば $(z, z) \in (U \times V) \cap \Delta_X$ だから $(U \times V) \cap \Delta_X \neq \emptyset$ となり, $U \times V \subset X \times X - \Delta_X$ であることに矛盾する. 従って $U \cap V = \emptyset$ が成り立つため, X は Hausdorff 空間である.

(2) $h : X \to Y \times Y$ を $h(x) = (f(x), g(x))$ で定める. $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : Y \times Y \to Y$ をそれぞれ第 1 成分, 第 2 成分への射影とすれば, $\mathrm{pr}_1 \circ h = f$, $\mathrm{pr}_2 \circ h = g$ だから $\mathrm{pr}_1 \circ h$ と $\mathrm{pr}_2 \circ h$ はともに連続写像である. 従って, 命題 12.9 により h は連続である. Y は Hausdorff 空間だから, (1) によって $Y \times Y$ の対角線集合 Δ_Y は $Y \times Y$ の閉集合であり, $\{x \in X \,|\, f(x) = g(x)\} = h^{-1}(\Delta_Y)$ だから $\{x \in X \,|\, f(x) = g(x)\}$ は X の閉集合である. $\square$

命題 14.10 (1) X を Hausdorff 空間, A, B を X のコンパクトな部分空間とする. $A \cap B = \emptyset$ ならば X の開集合 U, V で $U \cap V = \emptyset$, $A \subset U$, $B \subset V$ となるものがある. とくに Hausdorff 空間のコンパクトな部分空間は閉集合である.

(2) コンパクトな位相空間から Hausdorff 空間への連続写像は閉写像である.

証明 (1) $A \cap B = \emptyset$ だから $x \in A$, $y \in B$ ならば $x \neq y$ であるため, X の開集合 $U_{x,y}$, $V_{x,y}$ で $x \in U_{x,y}$, $y \in V_{x,y}$, $U_{x,y} \cap V_{x,y} = \emptyset$ を満たすものが存在する. 各 $x \in A$ に対し, $B = \bigcup_{y \in B} \{y\} \subset \bigcup_{y \in B} V_{x,y}$ だから, B のコンパクト性により $y_1, y_2, \ldots, y_n \in B$ で $B \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_{x,y_j}$ を満たすものが存在する. $U_x = \bigcap_{j=1}^{n} U_{x,y_j}$ とおけば, 各 U_{x,y_j} は x を含むため, $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} U_x$ である. 従って A のコンパクト性により $x_1, x_2, \ldots, x_m \in A$ で $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}$ を満たすものが存在する. そこで $U = \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}$, $V = \bigcap_{i=1}^{m} \left(\bigcup_{j=1}^{n} V_{x_i,y_j} \right)$ とおけば, $A \subset U$ であり, 各 $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して

$B \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_{x_i,y_j}$ $B \subset V$ である. $V \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_{x_i,y_j}$, $U_{x_i} \subset U_{x_i,y_j}$ であることに注意すれば

$$U \cap V = \left(\bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}\right) \cap V = \bigcup_{i=1}^{m} (U_{x_i} \cap V) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \left(U_{x_i} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} V_{x_i,y_j}\right)\right) = \bigcup_{i=1}^{m} \left(\bigcup_{j=1}^{n} (U_{x_i} \cap V_{x_i,y_j})\right)$$
$$\subset \bigcup_{i=1}^{m} \left(\bigcup_{j=1}^{n} (U_{x_i,y_j} \cap V_{x_i,y_j})\right) = \bigcup_{i=1}^{m} \left(\bigcup_{j=1}^{n} \emptyset\right) = \emptyset$$

が得られる.

とくに任意の $y \in X - A$ に対して $B = \{y\}$ として上の結果を用いれば, y を含む開集合 V で A と交わらないものが存在するため, y は $X - A$ の内点であることがわかる. 従って A は閉集合である.

(2) X をコンパクトな位相空間, Y を Hausdorff 空間とし, $f : X \to Y$ を連続写像とする. A を X の閉集合とすれば, 命題 14.3 の (2) により, A は X のコンパクトな部分空間だから, 命題 14.3 の (3) により, $f(A)$ も Y のコンパクトな部分空間である. Y は Hausdorff 空間だから, (1) の結果により $f(A)$ は閉集合である. □

定理 14.11 $((X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda))_{\lambda \in I}$ をコンパクトな位相空間族とすると, 直積空間 $\left(\prod_{\lambda \in I} X_\lambda, \mathcal{O}\left(\bigcup_{\lambda \in I} \mathcal{O}_\lambda^{\mathrm{pr}_\lambda}\right)\right)$ もコンパクトである.

証明 I が有限集合の場合: $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ とすれば, $\prod_{\lambda \in I} X_\lambda$ は $\left(\prod_{\lambda \in I - \{n\}} X_\lambda\right) \times X_n$ と同相だから, $n = 2$ の場合に主張を示せば, n による帰納法で一般の場合も主張が示される.

$\mathcal{B} = \{O_1 \times O_2 | \, O_1 \in \mathcal{O}_1,\, O_2 \in \mathcal{O}_2\}$ とおけば, $\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}\big(\mathcal{O}_1^{\mathrm{pr}_1} \cup \mathcal{O}_2^{\mathrm{pr}_2}\big)$ の基底である. $\Gamma \subset \mathcal{B}$ が $X_1 \times X_2 = \bigcup \Gamma$ を満たすとする. 各 $y \in X_2$ に対し, 補題 12.18 により, 第 1 成分への射影 $\mathrm{pr}_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ を $\mathrm{pr}_2^{-1}(y)$ に制限した写像は同相写像だから, $\mathrm{pr}_2^{-1}(y)$ はコンパクトである. 従って Γ の有限部分集合 Γ_y で, $\mathrm{pr}_2^{-1}(y) \subset \bigcup \Gamma_y$ を満たすものが存在する. $\Gamma_y = \{U_{y,1} \times V_{y,1}, U_{y,2} \times V_{y,2}, \ldots, U_{y,m_y} \times V_{y,m_y}\}$ とおくとき, $y \notin V_{y,i}$ ならば $\mathrm{pr}_2^{-1}(y) \cap (U_{y,i} \times V_{y,i}) = \emptyset$ だから, $y \notin V_{y,i}$ であるすべての i について $U_{y,i} \times V_{y,i}$ を Γ_y から除外したものを Γ'_y とすれば $\mathrm{pr}_2^{-1}(y) \subset \bigcup \Gamma'_y$ が成り立つ. $\Gamma'_y = \{U'_{y,1} \times V'_{y,1}, U'_{y,2} \times V'_{y,2}, \ldots, U'_{y,n_y} \times V'_{y,n_y}\}$ として $V_y = \bigcap_{i=1}^{n_y} V'_{y,i}$ とおけば V_y は y の開近傍である. 故に $X_2 = \bigcup_{y \in X_2} \{y\} \subset \bigcup_{y \in X_2} V_y \subset X_2$ より $X_2 = \bigcup_{y \in X_2} V_y$ だから X_2 のコンパクト性から, $y_1, y_2, \ldots, y_k \in X_2$ で $X_2 = \bigcup_{j=1}^{k} V_{y_j}$ を満たすものが存在する. このとき, $X_1 \times X_2 = \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{k} \Gamma'_{y_j}\right)$ が成り立つ. 実際, 任意の $(x, y) \in X_1 \times X_2$ に対し, $y \in V_{y_j}$ となる j が存在し, さらに $(x, y_j) \in \mathrm{pr}_2^{-1}(y_j) \subset \bigcup \Gamma'_{y_j} = \bigcup_{i=1}^{n_{y_j}} (U'_{y_j,i} \times V'_{y_j,i})$ だから $(x, y_j) \in U'_{y_j,l} \times V'_{y_j,l}$ となる l が存在して $y \in V_{y_j} = \bigcap_{i=1}^{n_{y_j}} V'_{y_j,i} \subset V'_{y_j,l}$ であるため, $(x, y) \in U'_{y_j,l} \times V'_{y_j,l} \in \Gamma'_{y_j}$ が得られる. $\bigcup_{j=1}^{k} \Gamma'_{y_j}$ は Γ の有限部分集合だから, 命題 14.2 の (ii) によって $X_1 \times X_2$ はコンパクトである.

I が無限集合の場合: X の部分集合よりなる集合 Ω が有限交叉性をもつとする. X の部分集合よりなる集合 Ξ で, Ω を含み, かつ有限交叉性をもつもの全体からなる集合を $\mathcal{F}$ とする. このとき $\mathcal{F}$ の要素の間の包含関係によって, $\mathcal{F}$ は帰納的な順序集合になるため, 命題 7.11 の (1) によって $\mathcal{F}$ は極大元をもつ. Ω^* を $\mathcal{F}$ の極大元とする. Ω^* は有限交叉性をもつことから命題 3.10 の (6) から, 各 $\lambda \in I$ に対し, $\{\mathrm{pr}_\lambda(A) | \, A \in \Omega^*\}$ は有限交叉性をもつ. 従って, 仮定と命題 14.2 から $\bigcap\left\{\overline{\mathrm{pr}_\lambda(A)} \,\middle|\, A \in \Omega^*\right\}$ は空でないため, $x = (x_\lambda)_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} \bigcap\left\{\overline{\mathrm{pr}_\lambda(A)} \,\middle|\, A \in \Omega^*\right\}$ が存在する. 各 $\lambda \in I$ に対し, $x_\lambda \in \bigcap\left\{\overline{\mathrm{pr}_\lambda(A)} \,\middle|\, A \in \Omega^*\right\}$ だから, x_λ の任意の近傍 U_λ と任意の $A \in \Omega^*$ に対して $U_\lambda \cap \mathrm{pr}_\lambda(A) \neq \emptyset$ である. 故に $\mathrm{pr}^{-1}(U_\lambda) \cap A \neq \emptyset$ となるため, $\Omega^* \cup \{\mathrm{pr}^{-1}(U_\lambda)\}$ も有限交叉性をもち, Ω^* の極大性から $\mathrm{pr}^{-1}(U_\lambda) \in \Omega^*$ である. さらに Ω^* が有限交叉性をもつことから, 任意の $A \in \Omega^*$ と $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in I$ および x_λ の近傍 U_λ に対して

$$\mathrm{pr}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \mathrm{pr}^{-1}(U_{\lambda_2}) \cap \cdots \cap \mathrm{pr}^{-1}(U_{\lambda_n}) \cap A \neq \emptyset \ \cdots (*)$$

が成り立つ．$\mathrm{pr}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \mathrm{pr}^{-1}(U_{\lambda_2}) \cap \cdots \mathrm{pr}^{-1}(U_{\lambda_n})$ の形の集合の全体は $x = (x_\lambda)_{\lambda \in I}$ の基本近傍系になるため，$(*)$ から $x \in \overline{A}$ である．従って $x \in \left\{ \overline{A} \middle| \, A \in \Omega^* \right\}$ となり，$\left\{ \overline{A} \middle| \, A \in \Omega^* \right\}$ は空集合ではないため，命題 14.2 の (iv) によって $\prod_{\lambda \in I} X_\lambda$ はコンパクトである． □

定義 14.12　(X, d) を距離空間とする．X の部分集合 A に対して $p \in X$ と $R > 0$ で，$A \subset B_d(p\,; R)$ を満たすものがあるとき，A は有界であるという．

注意 14.13　$p, q \in X$ と $R > 0$ に対して三角不等式から $B_d(p\,; R) \subset B_d(q\,; R + d(p, q))$ が示されるため，p_0 を X の定点とするとき，A が有界ならば $R' > 0$ で，$A \subset B_d(p_0\,; R')$ を満たすものがある．

定理 14.14　$\boldsymbol{R}^n$ の部分空間 X がコンパクトであることと，X が $\boldsymbol{R}^n$ の有界な閉集合であることは同値である．

証明　$\boldsymbol{R}^n$ の部分空間 X がコンパクトであるとする．$\boldsymbol{R}^n$ は距離空間だから Hausdorff 空間であるため，命題 14.10 の (1) より，X は閉集合である．各自然数 k に対して，原点を中心として半径が k である開球 $B(\mathbf{0}; k)$ を考えれば $X \subset \boldsymbol{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(\mathbf{0}; k)$ だから，X のコンパクト性により，$X \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(\mathbf{0}; k_i)$ を満たす自然数 $k_1, k_2, \ldots, k_N$ がある．これらのうちで最大のものを K とすれば，$i = 1, 2, \ldots, N$ に対して $B(\mathbf{0}; k_i) \subset B(\mathbf{0}; K)$ だから $X \subset B(\mathbf{0}; K)$ となるため，X は有界である．

X は $\boldsymbol{R}^n$ の有界な閉集合であるとする．$[a, b]^n$ によって閉区間 $[a, b]$ の n 個の直積空間を表せば定理 14.4 と定理 14.11 により $[a, b]^n$ はコンパクトである．X は有界だから $X \subset [-K, K]^n$ を満たす正の実数 K が存在し，X は $[-K, K]^n$ の閉集合だから，命題 14.3 の (2) によりコンパクトである． □

補題 14.15　$\boldsymbol{R}$ の有界な閉集合は最大値と最小値をもつ．

証明　X を $\boldsymbol{R}$ の有界な閉集合とすれば X の上限と下限が存在する．$M = \sup X$，$m = \inf X$ とおく．もし $M \notin X$ ならば $M \in \boldsymbol{R} - X$ であり，$\boldsymbol{R} - X$ は開集合だから $r > 0$ で $(M - r, M + r) \subset \boldsymbol{R} - X$ を満たすものが存在する．一方 M は X の上限だから $M - r < a \leqq M$ を満たす $a \in X$ が存在する．このとき $a \in (M - r, M + r) \subset \boldsymbol{R} - X$ だから，$a \notin X$ となり，矛盾が生じる．故に $M \in X$ である．$m \in X$ であることも同様に示され，M が X の最大値，m が X の最小値である． □

定理 14.16　（最大値・最小値の定理）コンパクトな位相空間で定義された実数値連続関数は最大値と最小値をもつ．

証明　X をコンパクトな位相空間，$f : X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする．命題 14.3 の (3) により $f(X)$ は $\boldsymbol{R}$ のコンパクトな部分空間だから，定理 14.14 によって $f(X)$ は $\boldsymbol{R}$ の有界な閉集合である．従って，補題 14.15 により $f(X)$ は最大値と最小値をもつ． □

定義 14.17　位相空間 X の各点がコンパクトな近傍をもつとき X は局所コンパクトであるという．

命題 14.18　X を局所コンパクト Hausdorff 空間とする．任意の $x \in X$ と x の任意の近傍 U に対し，U に含まれる x の近傍でコンパクトなものが存在する．特に，局所コンパクト Hausdorff 空間の開部分空間も局所コンパクトである．

証明　x のコンパクトな近傍を C とする．$U \cap C$ は X の近傍だから，$x \in V \subset U \cap C$ を満たす開集合 V が存在する．$C - V$ はコンパクトな部分空間 C の閉集合だから，命題 14.3 の (2) によりコンパクトであり，$\{x\} \cap (C - V) = \emptyset$ だから，命題 14.10 の (1) から，C の開集合 P, Q で，$P \cap Q = \emptyset$, $x \in P$, $C - V \subset Q$ を満たすものが存在する．

X の開集合 S, T で $P = C \cap S$, $Q = C \cap T$ を満たすものをとり，$Z = S \cap V$ とおくと，$x \in P \subset S$ だから Z は x の開近傍である．$Z \not\subset C - T$ と仮定すれば，$y \in Z$ かつ $y \notin C - T$ を満たす y が存在する．$Z \subset V \subset C$ より $y \in C$ だから，$y \notin C - T$ より $y \in T$ となるため，$y \in C \cap T = Q$ であるが，$Z \subset S$ より $y \in S$ だから $y \in C \cap S = P$ となって，$P \cap Q = \emptyset$ であることに矛盾する．故に $Z \subset C - T$ が成り立つため，$C - T$ は x の近傍である．また，T は開

集合だから, $C-T$ は閉集合であり, コンパクトな部分空間 C に含まれるため, 命題 14.3 の (2) によりコンパクトである. さらに $C-V\subset Q$ より $C-Q\subset V$ だから $C-T=C-(C\cap T)=C-Q\subset V\subset U$ が成り立つため, $C-T$ は U に含まれる x の近傍でコンパクトなものである. □

命題 14.19 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ に対し, X に属さない点 ∞_X をとり, $X^*=X\cup\{\infty_X\}$ とおく.

(1) X^* の部分集合からなる集合 $\mathcal{O}^*$ を

$$\mathcal{O}^*=\{O\subset X^*|\, O\in\mathcal{O} \text{ または } X-O \text{ は } X \text{ のコンパクトな閉部分集合}\}$$

によって定めれば, $\mathcal{O}^*$ は X^* の位相であり, $(X^*,\mathcal{O}^*)$ はコンパクトである.

(2) 位相空間 Y に対し, 写像 $f:X^*\to Y$ が連続であるためには, f の X への制限 $f|_X:X\to Y$ が連続であり, かつ $f(\infty_X)$ を含まない Y の任意の閉集合 C に対して, $f^{-1}(C)$ が X のコンパクトな閉部分集合になることが必要十分である.

(3) 写像 $f:X\to Y$ に対し, $f^*:X^*\to Y^*$ を $f^*(x)=\begin{cases} f(x) & x\in X \\ \infty_Y & x=\infty_X\end{cases}$ によって定義する. f^* が連続であるためには f が連続であり, Y の任意のコンパクトな閉部分集合 C に対して, $f^{-1}(C)$ が X のコンパクトな閉部分集合になることが必要十分である.

証明 (1) $\emptyset\in\mathcal{O}$ であり, $X-X^*=\emptyset$ は X のコンパクトな閉部分集合だから $\emptyset, X^*\in\mathcal{O}^*$ である.

$O_1,O_2\in\mathcal{O}^*$ に対し, $O_1,O_2\in\mathcal{O}$ ならば $O_1\cap O_2\in\mathcal{O}$ だから $O_1\cap O_2\in\mathcal{O}^*$ であり, $X-O_1$ と $X-O_2$ がともに X のコンパクトな閉部分集合ならば, $X-(O_1\cap O_2)=(X-O_1)\cup(X-O_2)$ も X のコンパクトな閉部分集合だから $O_1\cap O_2\in\mathcal{O}^*$ である. $O_1\in\mathcal{O}$ かつ $X-O_2$ が X のコンパクトな閉部分集合である場合を考える. $O_1\in\mathcal{O}$ より $O_1\cap O_2\subset O_1\subset X$ だから, $O_1\cap O_2=(O_1\cap O_2)\cap X=O_1\cap(O_2\cap X)$ である. 一方, $X-O_2$ が X の閉集合であることから $X-(X-O_2)=O_2\cap X$ は X の開集合だから $O_1\cap O_2=O_1\cap(O_2\cap X)$ も X の開集合である. 従って $O_1\cap O_2\in\mathcal{O}^*$ である.

$\Gamma\subset\mathcal{O}^*$ に対し, $\Gamma\subset\mathcal{O}$ ならば $\bigcup\Gamma\in\mathcal{O}$ だから $\bigcup\Gamma\in\mathcal{O}^*$ である. $\Gamma\not\subset\mathcal{O}$ ならば $U\in\Gamma$ で $X-U$ が X のコンパクトな閉部分集合になるものがある. $U\subset\bigcup\Gamma$ だから $X-U\supset X-\bigcup\Gamma=\bigcap\{X-O|\,O\in\Gamma\}$ であり, $\mathcal{O}^*$ の定義から, 任意の $O\in\mathcal{O}^*$ に対して $X-O$ は X の閉集合だから, $\bigcap\{X-O|\,O\in\Gamma\}$ は X の閉集合である. 従って, $X-\bigcup\Gamma=\bigcap\{X-O|\,O\in\Gamma\}$ は X のコンパクトな閉部分集合 $X-U$ の閉部分集合の閉部分集合だから, 命題 14.3 の (2) により, $X-\bigcup\Gamma$ も X のコンパクトな閉部分集合である. 故に $\Gamma\not\subset\mathcal{O}$ の場合も $\bigcup\Gamma\in\mathcal{O}^*$ である.

$\Gamma\subset\mathcal{O}^*$ が $X^*=\bigcup\Gamma$ を満たすとき, $U\in\Gamma$ で $\infty_X\in U$ となるものが存在する. このとき $U\notin\mathcal{O}$ だから, $\mathcal{O}^*$ の定義から, $X-U$ は X のコンパクトな閉部分集合である. このとき $X-U\subset\bigcup\Gamma$ より, Γ の有限部分集合 Γ_1 で $X-U\subset\bigcup\Gamma_1$ を満たすものが存在する. 故に $X\subset U\cup(\bigcup\Gamma_1)$ であり, $\infty_X\in U$ より $X^*=X\cup\{\infty_X\}=U\cup(\bigcup\Gamma_1)$ となるため, X はコンパクトである.

(2) $f:X^*\to Y$ が連続ならば, f の X への制限 $f|_X:X\to Y$ は連続である. C を Y の閉集合で $f(\infty_X)$ を含まないものとすれば, $Y-C$ は $f(\infty_X)$ を含む Y の開集合だから, f の連続性から, $f^{-1}(Y-C)$ は ∞_X を含む X^* の開集合である. このとき $\mathcal{O}^*$ の定義から $X-f^{-1}(Y-C)=f^{-1}(C)$ は X のコンパクトな閉部分集合である.

逆に f の X への制限 $f|_X:X\to Y$ が連続であり, かつ $f(\infty_X)$ を含まない Y の任意の閉集合 C に対して, $f^{-1}(C)$ が X のコンパクトな閉部分集合になると仮定する. O を Y の任意の開集合とする. $f(\infty_X)\notin O$ の場合, $\infty_X\notin f^{-1}(O)$ だから $f^{-1}(O)$ は X に含まれるため, $f^{-1}(O)=(f|_X)^{-1}(O)$ である. 従って $f|_X$ の連続性により $f^{-1}(O)$ は X の開集合であり, X は X^* の開部分空間だから $f^{-1}(O)$ は X^* の開集合である. $f(\infty_X)\in O$ の場合, $Y-O$ は $f(\infty_X)$ を含まない Y の閉集合だから $f^{-1}(Y-O)=X-f^{-1}(O)$ は X のコンパクトな閉部分集合であるため, $\mathcal{O}^*$ の定義から, $f^{-1}(O)$ は X^* の開集合である. 故に f は連続である.

(3) f^* の定義から $f^*|_X:X\to Y^*$ が連続であることと $f:X\to Y$ が連続であることは同値である. また C が $f^*(\infty_X)=\infty_Y$ を含まない Y^* の閉集合であることと $Y-C$ が ∞_Y を含む Y^* の開集合であることは同値であり, さ

らにこのことは Y^* の位相の定義から C が Y のコンパクトな閉部分集合であることと同値である．従って (2) の結果より，主張が成り立つ． □

定義 14.20　位相空間 $(X,\mathcal{O})$ に対し，命題 14.19 の (1) で定義したコンパクトな位相空間 $(X^*,\mathcal{O}^*)$ を $(X,\mathcal{O})$ の 1 点コンパクト化という．

定理 14.21　位相空間 $(X,\mathcal{O})$ に対し，次の性質 $(*)$ をもつコンパクト Hausdorff 空間 $(X^*,\mathcal{O}^*)$ が存在するためには $(X,\mathcal{O})$ が局所コンパクト Hausdorff 空間であることが必要十分である．

$(*)$ $X\subset X^*$ かつ X^*-X は 1 つの要素からなる集合であり，$(X,\mathcal{O})$ は $(X^*,\mathcal{O}^*)$ の部分空間である．

証明　性質 $(*)$ をもつコンパクト Hausdorff 空間 $(X^*,\mathcal{O}^*)$ が存在すると仮定し，$X^*-X=\{\infty\}$ とおけば，注意 14.6 から $\{\infty\}$ は X^* の閉集合である．従って，$X=X^*-\{\infty\}$ は X^* の開集合だから，命題 14.18 により，$(X,\mathcal{O})$ は局所コンパクトである．また，命題 14.8 の (1) により，$(X,\mathcal{O})$ は Hausdorff 空間である．

$(X,\mathcal{O})$ が局所コンパクト Hausdorff 空間であると仮定する．$(X^*,\mathcal{O}^*)$ を $(X,\mathcal{O})$ の 1 点コンパクト化とするとき，$(X^*,\mathcal{O}^*)$ が Hausdorff 空間であることを示せばよい．X^* の異なる 2 点 x, y に対し，$x,y\in X$ の場合は X が Hausdorff 空間であることから，X の開集合 U, V で $x\in U$, $y\in V$, $U\cap V=\emptyset$ を満たすものが存在し，U と V は X^* の開集合でもある．$x=\infty_X$ の場合，y の X におけるコンパクトな近傍 C をとれば，X は Hausdorff 空間だから，命題 14.10 の (1) より，C は X の閉集合である．このとき $x=\infty_X\in X^*-C$ であり，$X-(X^*-C)=C$ は X のコンパクトな閉部分集合だから X^*-C は x の開近傍である．C が y の近傍であることから，$y\in U\subset C$ を満たす X の開集合 U が存在して，U は X^* の開集合でもあり，$U\cap(X^*-C)=C\cap(X^*-C)=\emptyset$ である．故に $(X^*,\mathcal{O}^*)$ は Hausdorff 空間である． □

演習問題

問題 14.1　半順序集合 $(P,\triangleleft)$ に演習問題 9.2 で定義した位相 $\mathcal{O}_\triangleleft$ を与える．位相空間 $(P,\mathcal{O}_\triangleleft)$ がコンパクトであることと，P の有限部分集合 S で条件「$x\in P$ ならば $a\triangleleft x$ である $a\in S$ が存在する」 を満たすものが存在することは同値であることを示せ．

問題 14.2　K を可換環 (例えば，$K=\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R},\boldsymbol{C}$) とし，$K$ の要素を係数とする n 変数の多項式全体の集合を P とする．$S\subset P$ に対し，$K^n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)|\,x_i\in K\}$ の部分集合 $Z(S)$ を $Z(S)=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in K|{}^\forall f\in S(f(x_1,x_2,\dots,x_n)=0)\}$ で定義し，K^n の部分集合族 $\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}=\{Z(S)|\,S\subset P\}$ で定める．

(1) $f\in P$ のとき $Z(\{f\})$ を $Z(f)$ で表せば，$Z(S)=\bigcap_{f\in S}Z(f)$ であることを示せ．また，$Z(S)\cup Z(T)=Z(\{fg|\,f\in S,g\in T\})$ が成り立つことを示せ．

(2) $\mathcal{F}$ は命題 8.4 の条件 (C1), (C2), (C3) を満たすことを示せ．$\mathcal{F}$ を閉集合族とする K^n の位相を Zariski 位相と呼ぶ．

(3) K が体 (例えば，$K=\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R},\boldsymbol{C}$) で，$n=1$ の場合，K^1 の Zariski 位相に関する閉集合とはどの様な集合か?

(4) K^{m+n} の Zariski 位相は，Zariski 位相に関する K^m と K^n の直積位相より強く，これらの位相は一致しないことを示せ．

(5) K^n は Zariski 位相に関してコンパクトであることを示せ．

問題 14.3　(1) X, Y を位相空間，C をコンパクトな X の部分空間，$y\in Y$ とする．$C\times\{y\}$ を含む $X\times Y$ の開集合 O に対して，C を含む X の開集合 U と y の近傍 V で $U\times V\subset O$ となるものがあることを示せ．

(2) さらに，D をコンパクトな Y の部分空間とする．$C\times D$ を含む $X\times Y$ の開集合 O に対して，C を含む X の開集合 U と D を含む Y の開集合 V で $U\times V\subset O$ となるものがあることを示せ．

問題 14.4　X を位相空間, Y をコンパクトな位相空間とするとき, 第 1 成分への射影 $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$ は閉写像であることを示せ.

問題 14.5　$(X, \leqq)$ を全順序集合とし, 演習問題 12.4 で定義した X の位相 $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathcal{B})$ を考える.

(1) $(X, \mathcal{O})$ は Hausdorff 空間であることを示せ.

(2) $(X, \mathcal{O})$ の部分空間 C がコンパクトならば C は最大元と最小元をもち, X の部分順序集合として C は順序完備であることを示せ.

(3) $(X, \leqq)$ が順序完備ならば $[a, b]$ はコンパクトであることを示せ. これより, X の有界な閉集合はコンパクトであることを示せ.

問題 14.6　X を局所コンパクトな Hausdorff 空間とする. O を X の開集合, F を X の閉集合とするとき, X の部分空間 $O \cap F$ も局所コンパクトであることを示せ.

問題 14.7　X を Hausdorff 空間とする. X の部分空間 Y が局所コンパクトならば, Y は X のある開集合と閉集合の共通部分であることを示せ.

§15.　距離空間の一様位相的性質

定義 15.1　(1) (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, $f : X \to Y$ を写像とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ で条件「$d_X(x, y) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$」を満たすものが存在するとき, f は一様連続であるという.

(2) $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ が一様連続な全単射で, f の逆写像 f^{-1} も一様連続であるとき, f を一様同相写像といい, このような f が存在するとき, 距離空間 (X, d_X) と (Y, d_Y) は一様同相であるという.

(3) X の距離関数 d_1, d_2 に対し, X の恒等写像 $id_X : (X, d_1) \to (X, d_2)$ が一様同相写像であるとき, d_1 と d_2 は一様同値であるという.

命題 15.2　(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z) を距離空間, $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$, $g : (Y, d_Y) \to (Z, d_Z)$ を一様連続写像とすれば, 合成写像 $g \circ f : (X, d_X) \to (Z, d_Z)$ も一様連続である. また, (X, d_X) の恒等写像は一様同相写像である.

証明　g は一様連続だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta' > 0$ で条件「$d_Y(z, w) < \delta'$ ならば $d_Z(g(z), g(w)) < \varepsilon$」を満たすものが存在する. f は一様連続だから, δ' に対し $\delta > 0$ で条件「$d_X(x, y) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(y)) < \delta'$」を満たすものが存在する. 従って $d_X(x, y) < \delta$ ならば $d_Z((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) = d_Z(g(f(x)), g(f(y))) < \varepsilon$ だから $g \circ f$ は一様連続である. (X, d_X) の恒等写像 $id_X : (X, d_X) \to (X, d_X)$ が一様連続であることは明らかで, id_X が id_X の逆写像だから (X, d_X) の恒等写像は一様同相写像である. □

命題 15.3　距離空間 (X, d), (Y, d') に対し, $d_1 : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \boldsymbol{R}$ を $d_1((x, y), (z, w)) = d(x, z) + d'(y, w)$ で定めれば d_1 は $X \times Y$ の距離関数であり, d_1 から定まる $X \times Y$ の位相は d から定まる X の位相と d' から定まる Y の位相の直積位相と一致する.

証明　d_1 が $X \times Y$ の距離関数であることは容易に確かめられる. $d_\infty : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \boldsymbol{R}$ を $d_\infty((x, y), (z, w)) = \max\{d(x, z), d'(y, w)\}$ で定めれば補題 12.19 から d_∞ は $X \times Y$ の距離関数であり, 命題 12.20 により d_∞ から定まる $X \times Y$ の位相は d から定まる X の位相と d' から定まる Y の位相の直積位相と一致する. 任意の $(x, y), (z, w) \in X \times Y$ に対し, $d_\infty((x, y), (z, w)) = \max\{d(x, z), d'(y, w)\} \leqq d(x, z) + d'(y, w) = d_1((x, y), (z, w))$ であり, $d_1((x, y), (z, w)) = d(x, z) + d'(y, w) \leqq 2\max\{d(x, z), d'(y, w)\} = d_\infty((x, y), (z, w))$ だから

$$d_\infty((x, y), (z, w)) \leqq d_1((x, y), (z, w)) \leqq 2d_\infty((x, y), (z, w))$$

が成り立つ. 従って注意 8.38 より $X \times Y$ の d_1 から定まる位相と d_∞ から定まる位相は一致するため, 主張が示され

た． □

命題 15.4 (X,d) を距離空間とし，d_1 を命題 15.3 で $Y=X$, $d'=d$ として定義した $X\times X$ の距離関数とする．

(1) $(x,y),(p,q)\in X\times X$ に対し，$|d(x,y)-d(p,q)|\leqq d(x,p)+d(y,q)$ が成り立つ．

(2) 距離関数 $d:X\times X\to \boldsymbol{R}$ は距離空間 $(X\times X,d_1)$ 上の実数値連続関数である．

証明 (1) 三角不等式より $d(x,y)\leqq d(x,p)+d(p,y)\leqq d(x,p)+d(p,q)+d(y,p)$ が得られるため $d(x,y)-d(p,q)\leqq d(x,p)+d(y,p)$ であり，この不等式の x と p, y と q を入れ替えれば $d(p,q)-d(x,y)\leqq d(p,x)+d(q,y)=d(x,p)+d(y,q)$ が得られるので $|d(x,y)-d(p,q)|\leqq d(x,p)+d(y,p)$ が成り立つ．

(2) (1) の結果から $(x,y),(p,q)\in X\times X$ に対し，$|d(x,y)-d(p,q)|\leqq d_1((x,y),(p,q))$ だから，任意の $\varepsilon>0$ に対し，$d_1((x,y),(p,q))<\varepsilon$ ならば $|d(x,y)-d(p,q)|<\varepsilon$ が成り立つ．故に d は任意の $(p,q)\in X\times X$ で連続である． □

距離空間 (X,d) が与えられたとき，X の部分集合 A と $p\in X$ に対し，$d(A,p)=\inf\{d(x,p)\,|\,x\in A\}$ とおく．

命題 15.5 (X,d) を距離空間, A を X の部分集合とするとき，$|d(A,x)-d(A,y)|\leqq d(x,y)$ が成り立つ．従って，関数 $d_A:X\to\boldsymbol{R}$ を $d_A(x)=d(A,x)$ で定めれば d_A は連続である．

証明 $a\in A$, $x,y\in X$ に対して三角不等式から $d(A,x)\leqq d(a,x)\leqq d(a,y)+d(y,x)=d(a,y)+d(x,y)$ が成り立つため，任意の a に対して $d(A,x)-d(x,y)\leqq d(a,y)$ が成り立つ．この不等式の左辺は a に無関係だから，$d(A,y)$ の定義から $d(A,x)-d(x,y)\leqq d(A,y)$ である．故に $d(A,x)-d(A,y)\leqq d(x,y)$ が得られ，x と y を入れ替えれば，$d(A,y)-d(A,x)\leqq d(y,x)=d(x,y)$ が得られるため，$|d(A,x)-d(A,y)|\leqq d(x,y)$ が成り立つ． □

命題 15.6 (X,d) を距離空間, A を X の部分集合とすれば $\overline{A}=d_A^{-1}(\{0\})$ が成り立つ．従って A が X の閉集合であることと，$A=d_A^{-1}(\{0\})$ は同値である．

証明 $\{0\}$ は $\boldsymbol{R}$ の閉集合で，命題 15.5 から d_A は連続関数だから，命題 10.5 により $d_A^{-1}(\{0\})$ は閉集合である．$x\in A$ ならば $d_A(x)=d(A,x)=0$ だから $x\in d_A^{-1}(\{0\})$ となるので，$A\subset d_A^{-1}(\{0\})$ である．従って命題 9.14 から $\overline{A}\subset d_A^{-1}(\{0\})$ である．$x\in d_A^{-1}(\{0\})$ ならば $d(A,x)=0$ だから任意の自然数 n に対して $d(a_n,x)<\frac{1}{n}$ を満たす $a_n\in A$ が存在する．このとき点列 $(a_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は x に収束するため，命題 8.24 から $x\in\overline{A}$ である．故に $d_A^{-1}(\{0\})\subset\overline{A}$ も成り立つので $\overline{A}=d_A^{-1}(\{0\})$ である． □

$r>0$ に対し，X の部分集合 $U(A\,;r)$ を $U(A\,;r)=\{x\in X\,|\,d(A,x)<r\}=d_A^{-1}((-\infty,r))$ で定める．

命題 15.7 (X,d) を距離空間, C を X のコンパクトな部分空間, O を X の開集合で，C を含むものとする．このとき $r>0$ で，$U(C\,;r)\subset O$ を満たすものが存在する．

証明 関数 $d_{X-O}:X\to\boldsymbol{R}$ の定義域を C に制限すれば，最大値・最小値の定理から d_{X-O} は C における最小値をとり，その値を r とする．もし $r=0$ ならば $d_{X-O}(p)=0$ となる $p\in C$ をとれば，O は開集合だから $X-O$ は閉集合であることと命題 15.6 から $p\in d_{X-O}^{-1}(\{0\})=\overline{X-O}=X-O$ である．従って $p\in C\cap(X-O)$ となるが，$C\subset O$ だから $C\cap(X-O)=\emptyset$ であることと矛盾が生じる．故に $r>0$ であり，$x\in X-O$ ならば任意の $c\in C$ に対して $d(c,x)=d(x,c)\geqq d(X-O,c)\geqq r$ が成り立つため，$d(C,x)\geqq r$ である．$x\in U(C\,;r)$ ならば $d(C,x)<r$ だから，上の不等式から $x\notin X-O$ すなわち $x\in O$ である．よって $U(C\,;r)\subset O$ である． □

定義 15.8 $(X,d_X),(Y,d_Y)$ を距離空間, $f:X\to Y$ を写像とする．任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ で条件「$d_X(x,y)<\delta$ ならば $d_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$」を満たすものが存在するとき，$f$ は一様連続であるという．

注意 15.9 距離空間 (X,d_X) が与えられたとき，$r>0$ に対して $X\times X$ の部分集合 $D_X(r)$ を次で定める．

$$D_X(r)=\{(x,y)\in X\times X\,|\,d_X(x,y)<r\}$$

さらに距離空間 (Y,d_Y) と写像 $f:X\to Y$ が与えられたとき, $f\times f:X\times X\to Y\times Y$ を $(f\times f)(x,y)=(f(x),f(y))$ で定める．このとき, f が一様連続であるためには, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $(f\times f)(D_X(\delta))\subset D_Y(\varepsilon)$ が成り立つような $\delta>0$ が存在することが必要十分である．

$r>0$ に対して $D_X(r)=d^{-1}((-\infty,r))$ だから, 命題 10.4 の (2) と命題 15.4 から次の結果が得られる．

補題 15.10 $r>0$ に対して $D_X(r)$ は距離空間 $(X\times X,d_1)$ における開集合である．

$X\times X$ の部分集合 Δ_X を $\Delta_X=\{(x,y)\in X\times X|\, x=y\}$ で定める．

補題 15.11 距離空間 $(X\times X,d_1)$ において, $r>0$ に対して $U(\Delta_X\,;r)=D_X(r)$ が成り立つ．

証明 $(x,y)\in U(\Delta_X\,;r)$ が $d(x,y)\geqq r$ を満たすと仮定すれば, 任意の $(z,z)\in\Delta_X$ に対して

$$r\leqq d(x,y)\leqq d(x,z)+d(z,y)=d(z,x)+d(z,y)=d_1((z,z),(x,y))$$

が成り立つため, $d(\Delta_X,(x,y))=\inf\{d((z,z),(x,y))|\,(z,z)\in\Delta_X\}\geqq r$ となって $(x,y)\in U(\Delta_X\,;r)$ と矛盾する．従って $d(x,y)<r$ だから $(x,y)\in D_X(r)$ である．$(x,y)\in D_X(r)$ が $d(\Delta_X,(x,y))\geqq r$ を満たすと仮定すれば, $(x,x)\in\Delta_X$ に対して $d(x,y)=d(x,x)+d(x,y)=d_1((x,x),(x,y))\geqq d(\Delta_X,(x,y))\geqq r$ となって $(x,y)\in D_X(r)$ と矛盾する．従って $d(\Delta_X,(x,y))<r$ だから $(x,y)\in U(\Delta_X\,;r)$ である． □

定理 15.12 (X,d_X), (Y,d_Y) を距離空間とし, d_X から定まる X の位相に関して, X はコンパクトであるとする．このとき, $f:X\to Y$ が連続写像ならば一様連続である．

証明 写像 $\mathrm{pr}_{X1},\mathrm{pr}_{X2}:X\times X\to X$, $\mathrm{pr}_{Y1},\mathrm{pr}_{Y2}:Y\times Y\to Y$ をそれぞれ $\mathrm{pr}_{X1}(x,y)=x$, $\mathrm{pr}_{X2}(x,y)=y$, $\mathrm{pr}_{Y1}(z,w)=z$, $\mathrm{pr}_{Y2}(z,w)=w$ で定めれば

$$(\mathrm{pr}_{Y1}\circ(f\times f))(x,y)=\mathrm{pr}_{Y1}(f(x),f(y))=f(x)=(f\circ\mathrm{pr}_{X1})(x,y),$$
$$(\mathrm{pr}_{Y2}\circ(f\times f))(x,y)=\mathrm{pr}_{Y2}(f(x),f(y))=f(y)=(f\circ\mathrm{pr}_{X2})(x,y)$$

だから $\mathrm{pr}_{Y1}\circ(f\times f)=f\circ\mathrm{pr}_{X1}$, $\mathrm{pr}_{Y2}\circ(f\times f)=f\circ\mathrm{pr}_{X2}$ が成り立つ．これらの右辺はともに連続写像だから, 命題 12.7 により $f\times f$ は連続写像である．任意の $\varepsilon>0$ に対し, 補題 15.10 から $D_Y(\varepsilon)$ は $Y\times Y$ の開集合だから, 命題 10.4 の (2) から $(f\times f)^{-1}(D_Y(\varepsilon))$ は $X\times X$ の開集合である．$(x,x)\in\Delta_X$ ならば $(f\times f)(x,x)=(f(x),f(x))\in D_Y(\varepsilon)$ だから $\Delta_X\subset(f\times f)^{-1}(D_Y(\varepsilon))$ である．Δ_X は $x\mapsto(x,x)$ で与えられる X から $X\times X$ への写像の像であり, この写像は命題 12.7 を用いれば連続であることがわかる．従って X がコンパクトならば命題 13.9 から Δ_X もコンパクトである．命題 15.7 から $\delta>0$ で, $U(\Delta_X\,;\delta)\subset(f\times f)^{-1}(D_Y(\varepsilon))$ を満たすものが存在する．故に補題 15.11 から $D_X(\delta)\subset(f\times f)^{-1}(D_Y(\varepsilon))$ だから $(f\times f)(D_X(\delta))\subset D_Y(\varepsilon)$ が得られるため, $f:X\to Y$ は一様連続である． □

系 15.13 コンパクト距離空間の間の同相写像は一様同相写像である．

定義 15.14 (X,d) を距離空間とし, $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を X の点列とする．すべての項が自然数である狭義単調増加数列 $k_1<k_2<\cdots<k_i<k_{i+1}<\cdots$ に対し, $(x_{k_i})_{i\in\boldsymbol{N}}$ という形の点列を $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ の部分列という．

補題 15.15 (X,d) を距離空間とし, $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を X の点列とする．X の点 p が条件「任意の正の実数 ε に対して $\{k\in\boldsymbol{N}\,|\,d(x_k,p)<\varepsilon\}$ は有限集合ではない.」を満たすとき, $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ の部分列で p に収束するものが存在する．

証明 すべての項が自然数からなる狭義単調増加数列 $k_1<k_2<\cdots<k_i<k_{i+1}<\cdots$ を以下のように帰納的に定める．仮定から $\{k\in\boldsymbol{N}\,|\,d(x_k,p)<1\}$ は有限集合ではないため, この集合から自然数 k_1 を一つ選べば $d(x_{k_1},p)<1$ が成り立つ．帰納的に, すべての項が自然数からなる狭義単調増加数列 $k_1<k_2<\cdots<k_i$ が定まり, $j=1,2,\dots,i$ に対して $d(x_{k_j},p)<\dfrac{1}{j}$ が成り立つと仮定する．仮定から $\left\{k\in\boldsymbol{N}\,\middle|\,d(x_k,p)<\dfrac{1}{i+1}\right\}$ は有限集合ではないため, この

集合は k_i より大きな自然数を含む．その一つを k_{i+1} とおけば $d(x_{k_{i+1}}, p) < \dfrac{1}{i+1}$ が成り立つ．このとき X の点列 $(x_{k_i})_{i\in\boldsymbol{N}}$ は任意の自然数 i に対して $d(x_{k_i}, p) < \dfrac{1}{i}$ を満たすため, p に収束する． □

補題 15.16　(X,d) を距離空間とし, $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を X の点列とする． X の任意の点 p に対して正の実数 ε_p で $\{k \in \boldsymbol{N} \,|\, d(x_k, p) < \varepsilon_p\}$ が有限集合になるものが存在すれば, 距離関数 d から定まる X の位相に関して, X はコンパクトではない．

証明　$p \in X$ に対して $B_d(p\,;\varepsilon_p)$ は p を含む x の開集合だから $X = \bigcup_{p\in X} B_d(p\,;\varepsilon_p)$ である．もし X がコンパクトならば $p_1, p_2, \dots, p_N \in X$ で $X = B_d(p_1\,;\varepsilon_{p_1}) \cup B_d(p_2\,;\varepsilon_{p_2}) \cup \cdots \cup B_d(p_N\,;\varepsilon_{p_N})$ を満たすものが存在する．仮定から, 各 $i = 1, 2, \dots, N$ に対して $x_k \in B_d(p_i\,;\varepsilon_{p_i})$ となる自然数 k は有限個しかないため, すべての $i = 1, 2, \dots, N$ に対して $x_n \notin B_d(p_i\,;\varepsilon_{p_i})$ となる自然数 n が存在するが, このことは $X = B_d(p_1\,;\varepsilon_{p_1}) \cup B_d(p_2\,;\varepsilon_{p_2}) \cup \cdots \cup B_d(p_N\,;\varepsilon_{p_N})$ であることと矛盾する． □

定理 15.17　(X,d) を距離空間とするとき, 距離関数 d から定まる X の位相に関して X がコンパクトならば X の任意の点列は収束する部分列をもつ．

証明　収束する部分列をもたない X の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が存在すると仮定すれば, 補題 15.15 の対偶から X の任意の点 p に対して正の実数 ε_p で, $\{k \in \boldsymbol{N} \,|\, d(x_k, p) < \varepsilon_p\}$ が有限集合になるものが存在する．このとき補題 15.16 から X はコンパクトではない．従って X がコンパクトならば X の任意の点列は収束する部分列をもつ． □

n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の距離関数 d_n を $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ で定義し, 距離空間 $(\boldsymbol{R}^n, d_n)$ を考える．$\boldsymbol{R}^n$ に距離関数 d_n から定まる位相を与えれば $\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合はコンパクトだから, 定理 15.17 から次の結果が得られる．

系 15.18　X が $\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合ならば, X の任意の点列は収束する部分列をもつ．

定義 15.19　(1) 距離空間 (X,d) の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が次の条件を満たすとき $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を (X,d) の Cauchy 列という．

任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 自然数 N で条件「$m, n \geqq N$ ならば $d(x_m, x_n) < \varepsilon$」を満たすものが存在する．

(2) 距離空間 (X,d) の任意の Cauchy 列が収束するとき, (X,d) は完備であるという．

(3) 距離空間 (X,d) の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ に対し, $\{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$ が (X,d) の有界な部分集合であるとき, $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は有界であるという．

命題 15.20　収束する点列は Cauchy 列である．

証明　$(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を p に収束する距離空間 (X,d) の点列とすれば, 任意の正の実数 ε に対して自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $d(x_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}$」を満たすものがある．$m, n \geqq N$ ならば, 三角不等式から $d(x_m, x_n) \leqq d(x_m, p) + d(p, x_n) = d(x_m, p) + d(x_n, p) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ より $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は Cauchy 列である． □

補題 15.21　Cauchy 列は有界である．

証明　$(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を距離空間 (X,d) の Cauchy 列とする．Cauchy 列の定義により, 自然数 N で,「$m, n \geqq N$ ならば $d(x_m, x_n) < 1$」を満たすものがある．そこで, $d(x_2, x_1), d(x_3, x_1), \dots, d(x_N, x_1)$ のうちで最大のものを R とすれば, すべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_k \in B_d(x_1\,; R+1)$ が成り立つ．実際 $k \leqq N$ ならば $d(x_k, x_1) \leqq R < R+1$ であり, $k > N$ ならば, 三角不等式より $d(x_k, x_1) \leqq d(x_k, x_N) + d(x_N, x_1) < 1 + R$ である．故に $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は有界である． □

補題 15.22　Cauchy 列が収束する部分列を含めば, その Cauchy 列は収束する．

証明　$(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を距離空間 (X,d) の Cauchy 列とし, $(x_{k_i})_{i\in\boldsymbol{N}}$ を $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ の収束する部分列とする．$\lim_{i\to\infty} x_{k_i} = p$ とおくと, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N_1 で,「$i \geqq N_1$ ならば $d(x_{k_i}, p) < \frac{\varepsilon}{2}$」を満たすものがある．ま

た, $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が Cauchy 列であることから, 自然数 N_2 で条件「$m,n \geqq N_2$ ならば $d(x_m,x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$」を満たすものがある. k_{N_1} と N_2 の大きい方を N とする. $k \geqq N$ ならば $k_N \geqq N \geqq N_2$ だから, 三角不等式により $d(x_k,p) \leqq d(x_k,x_{k_N}) + d(x_{k_N},p) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ が得られる. 従って $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は収束する. □

系 15.18 の応用として, 次の定理を示す. この定理の主張は $\boldsymbol{R}^n$ の完備性と呼ばれる.

定理 15.23 $(\boldsymbol{R}^n, d_n)$ は完備距離空間である. すなわち, $\boldsymbol{R}^n$ の任意の Cauchy 列は収束する.

証明 $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を $\boldsymbol{R}^n$ の Cauchy 列とする. 補題 15.21 により, $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は有界であるため, 正の実数 r で, すべての $k\in\boldsymbol{N}$ に対して $\boldsymbol{x}_k \in B_n(\boldsymbol{0};r)$ となるものがある. $\overline{B}_n(\boldsymbol{0};r) = \{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqq r\}$ とおけば $B_n(\boldsymbol{0};r) \subset \overline{B}_n(\boldsymbol{0};r)$ であり, $\overline{B}_n(\boldsymbol{0};r)$ は有界閉集合だから, 系 15.18 により $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は収束する部分列を含む. 故に補題 15.22 により, $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は収束する. □

定義 15.24 X を集合, (Y,d) を距離空間, $f: X\to Y$ を写像とする. 各 $n\in\boldsymbol{N}$ に対して写像 $f_n: X\to Y$ が与えられていて, 任意の $\varepsilon>0$ に対して自然数 N で, 条件「$n\geqq N$ ならば, すべての $x\in X$ に対して $d(f_n(x),f(x)) < \varepsilon$」を満たすものがあるとき, 写像の列 $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は f に一様収束するという.

命題 15.25 $(X,\mathcal{O})$ を位相空間, (Y,d) を距離空間とする. X から Y への連続写像の列 $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ が X から Y への写像 f に一様収束すれば, f は連続写像である.

証明 任意の $p\in X$ と $\varepsilon>0$ に対し, 仮定から自然数 N で, 条件「$n\geqq N$ ならば, すべての $x\in X$ に対して $d(f_n(x),f(x)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$」を満たすものがある. また, f_N の p における連続性から, p を含む開集合 U で条件「$x\in U$ ならば $d(f_N(x),f_N(p)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$」を満たすものがある. 従って三角不等式から, $x\in U$ ならば

$$d(f(x),f(p)) \leqq d(f(x),f_N(x)) + d(f_N(x),f_N(p)) + d(f_N(p),f(p)) < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

が成り立つため, f は p において連続である. □

定理 15.26 X を集合, (Y,d) を完備距離空間とする. 各 $n\in\boldsymbol{N}$ に対して写像 $f_n: X\to Y$ が与えられていて, 任意の $\varepsilon>0$ に対して自然数 N で, 条件「$m,n\geqq N$ ならば, すべての $x\in X$ に対して $d(f_m(x),f_n(x)) < \varepsilon$」を満たすものがあるとき, 写像の列 $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ はある写像に一様収束する.

証明 仮定から各 $x\in X$ に対して点列 $(f_n(x))_{n=1,2,\ldots}$ は (Y,d) の Cauchy 列だから収束する. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ とおいて写像 $f: X\to Y$ を定義する. 任意の $\varepsilon>0$ に対して, 自然数 N で「$m,n\geqq N$ ならば, すべての $x\in X$ に対して $d(f_m(x),f_n(x)) < \dfrac{\varepsilon}{2}$」を満たすものがあるため, 不等式 $d(f_m(x),f_n(x)) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ において $m\to\infty$ とすれば, $d(f(x),f_n(x)) \leqq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ が任意の $n\geqq N$ と $x\in X$ に対して成り立つため, $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は f に一様収束する. □

命題 15.27 (X,d) を距離空間とする. X の部分集合 A が有界であるためには $\{d(x,y)\mid x,y\in A\}$ が上に有界な $\boldsymbol{R}$ の部分集合であることが必要十分である.

証明 A が有界ならば $p\in X$ と $R>0$ で, $A\subset B_d(p;R)$ となるものがあるので, $x,y\in A$ ならば $d(x,p),d(y,p) < R$ だから三角不等式から $d(x,y) \leqq d(x,p)+d(p,y) = d(x,p)+d(y,p) < R+R = 2R$ が得られるため, $\{d(x,y)|x,y\in A\}$ は $2R$ を上界にもち, 上に有界である. 逆に $\{d(x,y)|x,y\in A\}$ が上に有界で, M をその上界とする. $p\in A$ を選べば, 任意の $x\in A$ に対して $d(x,p)\leqq M < M+1$ だから $A\subset B_d(p;M+1)$ が成り立つため A は有界である. □

定義 15.28 (X,d) を距離空間とする. X の有界な部分集合 A に対して $\delta(A) = \sup\{d(x,y)|x,y\in A\}$ とおき, $\delta(A)$ を A の直径という.

命題 15.29 (X,d) を距離空間とし, d から定まる X の位相に関して, X はコンパクトであるとする. X の開集合から

なる集合族 $(O_i)_{i\in I}$ が $X=\bigcup_{i\in I} O_i$ を満たすとき, 次の条件を満たす正の実数 ε が存在する.

「$\delta(A)<\varepsilon$ を満たす X の任意の部分集合 A に対して $A\subset O_i$ となる $\in I$ が存在する.」

証明 各 $x\in X$ に対して $x\in O_{i(x)}$ となる $i(x)\in I$ が存在し, さらに $O_{i(x)}$ は開集合だから $r(x)>0$ で $B_d(x;r(x))\subset O_{i(x)}$ を満たすものが存在する．このとき $X=\bigcup_{x\in X} B_d\left(x;\frac{r(x)}{2}\right)$ であり X がコンパクトであることから $x_1,x_2,\dots,x_n\in X$ で $X=B_d\left(x_1;\frac{r(x_1)}{2}\right)\cup B_d\left(x_2;\frac{r(x_2)}{2}\right)\cup\cdots\cup B_d\left(x_n;\frac{r(x_n)}{2}\right)$ を満たすものがある．そこで $\varepsilon=\min\left\{\frac{r(x_1)}{2},\frac{r(x_2)}{2},\dots,\frac{r(x_n)}{2}\right\}$ とおき, X の部分集合 A が $\delta(A)<\varepsilon$ を満たすとする. $p\in A$ と $p\in B_d\left(x_k;\frac{r(x_k)}{2}\right)$ となる $k=1,2,\dots,n$ を選べば, $A\subset B_d(x_k;r(x_k))$ である．実際, $x\in A$ ならば $d(x,p)\leqq\delta(A)<\varepsilon\leqq\dfrac{r(x_k)}{2}$ だから三角不等式から不等式 $d(x,x_k)\leqq d(x,p)+d(p,x_k)<\dfrac{r(x_k)}{2}+\dfrac{r(x_k)}{2}=r(x_k)$ が成り立つ．従って $x\in B_d(x_k;r(x_k))$ だから $A\subset B_d(x_k;r(x_k))\subset O_{i(x_k)}$ となり, 主張が成り立つ. □

定義 15.30 (X,d) を距離空間とする．X の部分集合 A と B に対し, $d(A,B)=\inf\{d(x,y)\,|\,x\in A,y\in B\}$ とおく．従って $p\in X$ に対して $d(A,p)=d(A,\{p\})$ である.

命題 15.31 (X,d) を距離空間とする．X の部分集合 A と B に対し, $d(A,B)=\inf\{d(A,y)\,|\,y\in B\}$ が成り立つ.

証明 任意の $x\in A$, $y\in B$ に対して $d(A,B)\leqq d(x,y)$ だから $d(A,B)\leqq\inf\{d(x,y)\,|\,x\in A\}=d(A,y)$ が得られる．この不等式がすべての $y\in A$ に対して成り立つため, $d(A,B)\leqq\inf\{d(A,y)|y\in B\}=d(A,y)$ である. $\inf\{d(A,y)\,|\,y\in B\}\leqq d(A,y)\leqq d(x,y)$ が任意の $x\in A$, $y\in B$ に対して成り立つため, $\inf\{d(A,y)\,|\,y\in B\}\leqq d(A,B)$ である. 以上から $d(A,B)=\inf\{d(A,y)\,|\,y\in B\}$ が成り立つ. □

命題 15.32 (X,d) を距離空間, A を X の閉集合, B を X のコンパクトな部分空間とする．$A\cap B=\emptyset$ ならば $d(A,B)>0$ である.

証明 関数 $d_A:X\to\boldsymbol{R}$ を $d_A(x)=d(A,x)$ で定めれば命題 15.5 から d_A は連続である．d_A の定義域を B に制限すれば, B はコンパクトだから, 最大値・最小値の定理により d_A は B における最小値をとる．この最小値がもし 0 ならば $d_A(b)=0$ となる $b\in B$ が存在するが,A が閉集合であることと命題 15.6 から $b\in d_A^{-1}(\{0\})=A$ である．これは $A\cap B=\emptyset$ と矛盾するため, d_A の B における最小値は正である．一方命題 15.31 から d_A の B における最小値は $d(A,B)$ だから $d(A,B)>0$ である. □

注意 15.33 $A,B\subset\boldsymbol{R}^2$ を $A=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,y=0\}$, $B=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,xy=1\}$ で定めれば A, B は $A\cap B=\emptyset$ を満たす閉集合である．$x>0$ に対し $(x,0)\in A$, $\left(x,\frac{1}{x}\right)\in B$ かつ $\lim_{x\to\infty} d\left((x,0),\left(x,\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ だから $d(A,B)=0$ となる.

定義 15.34 (X,d) を距離空間とする.

(1) ε を正の実数とする．X の部分集合族 $(U_i)_{i\in I}$ が $X=\bigcup_{i\in I} U_i$ かつすべての $i\in I$ に対して $\delta(U_i)<\varepsilon$ を満たすとき, $(U_i)_{i\in I}$ を (X,d) の ε-被覆という.

(2) 任意の $\varepsilon>0$ に対して有限個の部分集合からなる (X,d) の ε-被覆が存在するとき (X,d) は全有界であるという.

(3) ε を正の実数とする. 条件「任意の $k,l\in\boldsymbol{N}$ に対して $d(x_k,x_l)<\varepsilon$.」を満たす X の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を (X,d) の ε-列という.

命題 15.35 (X,d) を距離空間とする.

(1) A, B が有界な X の部分集合ならば $A\cup B$ も有界で, 不等式 $\delta(A\cup B)\leqq\delta(A)+\delta(B)+d(A,B)$ が成り立つ.

(2) $U_1,U_2,\dots,U_n$ が有界な X の部分集合ならば次の不等式が成り立つ.

$$\delta(U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_n)\leqq\sum_{i=1}^{n}\delta(U_i)+\sum_{i=1}^{n-1}d(U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_i,U_{i+1})$$

(3) (X,d) が全有界ならば X は有界, すなわち $\delta(X)=\sup\{d(x,y)\,|\,x,y\in X\}$ は有限である.

証明 (1) $x,y \in A$ ならば $d(x,y) \leqq \delta(A)$ であり, $x,y \in B$ ならば $d(x,y) \leqq \delta(B)$ である. また任意の $\varepsilon > 0$ に対して $p \in A$, $q \in B$ で $d(p,q) < d(A,B) + \varepsilon$ を満たすものがあるため, $x \in A$, $y \in B$ の場合, 三角不等式と上の不等式から $d(x,y) \leqq d(x,p) + d(p,q) + d(q,y) < \delta(A) + d(A,B) + \varepsilon + \delta(B)$ が成り立つ. 従って $x,y \in A \cup B$ ならば任意の $\varepsilon > 0$ に対して $d(x,y) < \delta(A) + \delta(B) + d(A,B) + \varepsilon$ が成り立つ. もし $d(x,y) > \delta(A) + \delta(B) + d(A,B)$ ならば $\varepsilon = \dfrac{1}{2}(d(x,y) - \delta(A) - \delta(B) - d(A,B))$ とおくと $\varepsilon > 0$ であり, 上の不等式から $2\varepsilon \leqq \varepsilon$ が得られ, $\varepsilon \leqq 0$ となって矛盾が生じるため $d(x,y) \leqq \delta(A) + \delta(B) + d(A,B)$ である. 故に $\{d(x,y) \,|\, x,y \in A \cup B\}$ は上に有界な $\boldsymbol{R}$ の部分集合だから命題 15.27 から $A \cup B$ は有界であり, 上の不等式と $\delta(A \cup B)$ の定義から $\delta(A \cup B) \leqq \delta(A) + \delta(B) + d(A,B)$ が得られる.

(2) $n = 2$ の場合は (1) から $\delta(U_1 \cup U_2) \leqq \delta(U_1) + \delta(U_2) + d(U_1, U_2)$ が成り立つ. $n = k$ のとき, 主張が成り立つと仮定して $U_1, U_2, \ldots, U_{k+1}$ が有界な X の部分集合ならば (1) と帰納法の仮定から次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\delta(U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_{k+1}) &\leqq \delta(U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k) + \delta(U_{k+1}) + d(U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k, U_{k+1}) \\
&\leqq \sum_{i=1}^{k} \delta(U_i) + \sum_{i=1}^{k-1} d(U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_i, U_{i+1}) + \delta(U_{k+1}) + d(U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k, U_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} \delta(U_i) + \sum_{i=1}^{k} d(U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_i, U_{i+1})
\end{aligned}$$

従って $n = k+1$ のときも主張が成り立つ.

(3) 仮定から有限個の部分集合からなる (X,d) の 1-被覆 $(U_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ が存在する. $X = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n$ より (2) の不等式から $\delta(X) = \delta(U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n) \leqq \sum_{i=1}^{n} \delta(U_i) + \sum_{i=1}^{n-1} d(U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_i, U_{i+1})$ だから X は有界である.□

命題 15.36 (X,d) を全有界な距離空間, ε を正の実数とする. X の任意の点列は ε-列である部分列をもつ.

証明 仮定から有限個の部分集合からなる (X,d) の ε-被覆 $(U_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ が存在する. $X = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n$ だから, X の点列 $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ に対して $S_i = \{k \in \boldsymbol{N} \,|\, x_k \in U_i\}$ とおけば $\boldsymbol{N} = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ が成り立つ. 従って $S_1, S_2, \ldots, S_n$ の中に無限集合であるものが存在する. S_m が無限集合であるとして $S_m = \{k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots\}$ $(k_1 < k_2 < \cdots < k_i < k_{i+1} < \cdots)$ とすれば, 任意の $i,j \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_{k_i}, x_{k_j} \in U_m$ だから $d(x_{k_i}, x_{k_j}) \leqq \delta(U_m) < \varepsilon$ が成り立つため $(x_{k_i})_{i \in \boldsymbol{N}}$ は (X,d) の ε-列である. □

命題 15.37 距離空間 (X,d) が全有界ならば X の任意の点列は Cauchy 列を部分列に含む.

証明 $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ を X の任意の点列として $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ の部分列 $(x_i^{(n)})_{i \in \boldsymbol{N}}$ を次のように帰納的に定める. 命題 15.36 から, $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ の部分列で 1-列であるものが存在するため, $(x_i^{(1)})_{i \in \boldsymbol{N}}$ を 1-列である $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ の部分列とする. $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ の部分列で $\frac{1}{n}$-列である $(x_i^{(n)})_{i \in \boldsymbol{N}}$ が定まったとすれば, 命題 15.36 から, $(x_i^{(n)})_{i \in \boldsymbol{N}}$ の部分列で $\frac{1}{n+1}$-列であるものが存在するため, $(x_i^{(n+1)})_{i \in \boldsymbol{N}}$ を $\frac{1}{n+1}$-列である $(x_i^{(n)})_{i \in \boldsymbol{N}}$ の部分列とする. このとき各 $n, i \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_{k(n)_i} = x_i^{(n)}$ を満たす自然数 $k(n)_i$ が定まり, $k(n)_1 < k(n)_2 < \cdots < k(n)_i < k(n)_{i+1} < \cdots$ かつ $\{k(n+1)_1, k(n+1)_2, \ldots, k(n+1)_i, \ldots\}$ は $\{k(n)_1, k(n)_2, \ldots, k(n)_i, \ldots\}$ に含まれる. 従って $k(n)_i \leqq k(n+1)_i < k(n+1)_{i+1}$ だから, とくに $k(n)_n < k(n+1)_{n+1}$ となるため, $(x_{k(n)_n})_{n \in \boldsymbol{N}}$ は $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ の部分列である. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N > \frac{1}{\varepsilon}$ を満たす自然数 N を選べば $\frac{1}{N} < \varepsilon$ より $(x_{k(N)_i})_{i \in \boldsymbol{N}} = (x_i^{(N)})_{i \in \boldsymbol{N}}$ は ε-列である. $n \geqq N$ ならば $(x_{k(n)_i})_{i \in \boldsymbol{N}}$ は $(x_{k(N)_i})_{i \in \boldsymbol{N}}$ の部分列だから $(x_{k(n)_n})_{n \geqq N}$ は $(x_{k(N)_i})_{i \in \boldsymbol{N}}$ の部分列である. 故に $m, n \geqq N$ ならば $d(x_{k(m)_m}, x_{k(n)_n}) < \varepsilon$ だから $(x_{k(n)_n})_{n \in \boldsymbol{N}}$ は Cauchy 列である $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ の部分列である. □

命題 15.38 距離空間 (X,d) における任意の点列が Cauchy 列を部分列に含めば (X,d) は全有界である.

証明 (X,d) が全有界でないと仮定して Cauchy 列を部分列に含まない点列が存在することを示す. 仮定から $\varepsilon > 0$ が存在して, 有限個の部分集合からなる (X,d) の ε-被覆は存在しない. 正の実数 r と任意の $p \in X$ に対し, $x, y \in B_d(p; r)$

ならば $d(x,y) \leqq d(x,p)+d(p,y) \leqq 2r$ だから $\delta(B_d(p\,;r)) \leqq 2r$ であることに注意すれば, $r < \frac{\varepsilon}{2}$ ならば X の任意の有限部分集合 S に対して $X \neq \bigcup_{p\in S} B_d(p\,;r)$ が成り立つ.

$x_1 \in X$ を一つ選び, $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ が $x_i \in X - \bigcup_{j=1}^{i-1} B_d(x_j\,;r)$ $(i=2,3,\dots,k)$ を満たすように選べたとすれば, $X \neq \bigcup_{j=1}^{k} B_d(x_j\,;r)$ だから $x_{k+1} \in X - \bigcup_{j=1}^{k} B_d(x_j\,;r)$ が選べる. ここで $k < l$ ならば $x_l \in X - \bigcup_{j=1}^{l-1} B_d(x_j\,;r)$ より $x_l \notin B_d(x_k\,;r)$ となるため $d(x_k, x_l) \geqq r$ が成り立つ. 従って点列 $(x_k)_{k\in \boldsymbol{N}}$ は Cauchy 列を部分列に含まない. □

命題 15.37, 15.38 から直ちに次の定理が得られる.

定理 15.39 距離空間が全有界であるためには, その任意の点列が Cauchy 列を部分列に含むことが必要十分である.

命題 15.40 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ が可算基をもつとき, $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ を満たす X の開集合族 $(U_i)_{i\in I}$ に対して, I のたかだか可算な部分集合 J で $X = \bigcup_{i\in J} U_i$ を満たすものが存在する.

証明 $\mathcal{B}$ をたかだか可算な $\mathcal{O}$ の基底とする. 各 $O \in \mathcal{B}$ に対し $J_O = \{i \in I \,|\, O \subset U_i\}$ とおき, $\mathcal{B}' = \{O \in \mathcal{B} \,|\, J_O \neq \emptyset\}$ とおけば, $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ だから $\mathcal{B}'$ もたかだか可算な集合である. 各 $O \in \mathcal{B}'$ に対して $j_O \in J_O$ を一つずつ選んで $J = \{j_O \,|\, O \in \mathcal{B}'\}$ とおけば J は I のたかだか可算な部分集合である. $x \in X$ ならば $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ より $x \in U_i$ となる $i \in I$ が存在する. U_i は $\mathcal{B}$ の要素の合併集合だから $x \in O \subset U_i$ を満たす $O \in \mathcal{B}$ がある. このとき $i \in J_O$ だから $J_O \neq \emptyset$ となるため $O \in \mathcal{B}'$ である. 一方 $j_O \in J_O$ だから $O \subset U_{j_O}$ が成り立つため, $x \in U_{j_O} \subset \bigcup_{i\in J} U_i$ が得られる. 従って $X = \bigcup_{i\in J} U_i$ である. □

命題 15.41 距離空間 (X,d) が全有界ならば d から定まる X の位相は可算基をもつ.

証明 命題 11.15 により d から定まる X の位相に関して X は可分であることを示せばよい. 仮定から任意の自然数 n に対して有限個の X の部分集合からなる (X,d) の $\frac{1}{n}$-被覆 $(U_{n,i})_{i=1,2,\dots,l_n}$ が存在する. 各自然数 n と $i=1,2,\dots,l_n$ に対して $a_{n,i} \in U_{n,i}$ を一つずつ選んで $A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,l_n}\}$ とおき, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおくと, 命題 6.12 より A はたかだか可算な集合である. 任意の $x \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対して $n \geqq \frac{1}{\varepsilon}$ である自然数 n をとれば $\frac{1}{n} \leqq \varepsilon$ であり, $x \in U_{n,i}$ となる $i = 1,2,\dots,l_n$ が存在するため, 不等式 $d(x, a_{n,i}) \leqq \delta(U_{n,i}) < \frac{1}{n} \leqq \varepsilon$ が成り立つ. 従って $a_{n,i} \in B_d(x\,;\varepsilon)$ だから $x \in \overline{A}$ が成り立つため, $X = \overline{A}$ である. 故に d から定まる X の位相に関して X は可分である. □

定義 15.42 距離空間 (X,d) の任意の点列が収束する部分列をもつとき, (X,d) は点列コンパクトであるという.

命題 15.43 距離空間 (X,d) が点列コンパクトならば (X,d) は完備かつ全有界である.

証明 (X,d) が点列コンパクトならば, X の任意の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ に対してその部分列 $(x_{k_i})_{k_i\in\boldsymbol{N}}$ で収束するものがある. $(x_{k_i})_{k_i\in\boldsymbol{N}}$ は収束するため幾何学 II 命題 1.7 によって Cauchy 列だから命題 15.38 によって (X,d) は全有界である. また, $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が (X,d) の Cauchy 列ならば仮定から $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は収束する部分列をもつため, 補題 15.22 から $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は収束する. 故に (X,d) は完備である. □

命題 15.44 距離空間 (X,d) が完備かつ全有界なら (X,d) が点列コンパクトである.

証明 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を X の任意の点列とする. 命題 15.37 から $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は Cauchy 列を部分列に含み, (X,d) の Cauchy 列は収束するため, $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は収束する部分列をもつ. 故に (X,d) は点列コンパクトである. □

命題 15.45 距離空間 (X,d) が点列コンパクトならば距離関数 d から定まる X の位相に関して X はコンパクトで

ある．

証明 仮定と命題 15.43 から (X,d) は全有界だから命題 15.41 によって d から定まる X の位相は可算基をもつ．従って命題 15.40 から $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ を満たす X の開集合族 $(U_i)_{i\in I}$ に対して，I のたかだか可算な部分集合 J で $X = \bigcup_{i\in J} U_i$ を満たすものが存在する．J が有限集合でない場合を考えればいいので $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots\}$ とする．$A_n = X - (U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_n})$ とおき，すべての自然数 n に対して $A_n \neq \emptyset$ と仮定する．このとき各 $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $a_n \in A_n$ を一つずつ選んで X の点列 $(a_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ が得られる．(X,d) は点列コンパクトだから $(a_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ の収束する部分列 $(a_{n_k})_{k\in\boldsymbol{N}}$ が存在する．$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = p$ とおけば $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{i_n}$ より $p \in U_{i_m}$ を満たす自然数 m が存在する．U_{i_m} は開集合だから自然数 N で条件「$k \geqq N$ ならば $a_{n_k} \in U_{i_m}$」を満たすものがある．ここで $(n_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ を満たす自然数の列だから $n_k \geqq k$ が任意の $k \in \boldsymbol{N}$ に対して成り立つため，m と N の大きい方を l とすれば $a_{n_l} \in U_{i_m} \cap A_{n_l}$ かつ $n_l \geqq l \geqq m$ が成り立つ．後者の不等式から $A_{n_l} \subset A_m$ だから

$$U_{i_m} \cap A_{n_l} \subset U_{i_m} \cap A_m = U_{i_m} \cap (X - (U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_m})) = \emptyset$$

より $U_{i_m} \cap A_{n_l} = \emptyset$ が得られて $a_{n_l} \in U_{i_m} \cap A_{n_l}$ と矛盾が生じる．故に $A_n = \emptyset$ を満たす自然数 n が存在するため，$X = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ となり，X はコンパクトであることがわかる． □

これまでの結果をまとめれば次の定理が得られる．

定理 15.46 距離空間 (X,d) について次の 3 つの条件は同値である．
(i) 距離関数 d から定まる X の位相に関して X はコンパクトである．
(ii) (X,d) は点列コンパクトである．
(iii) (X,d) は完備かつ全有界である．

$(i) \Rightarrow (ii)$ は定理 15.17, $(ii) \Rightarrow (iii)$ は命題 15.43, $(iii) \Rightarrow (ii)$ は命題 15.44, $(ii) \Rightarrow (i)$ は命題 15.45 で示された．

命題 15.47 (X,d_X), (Y,d_Y) を距離空間とし，$f : (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ を一様連続写像する．$(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ が (X,d_X) の Cauchy 列ならば $(f(x_n))_{n\in\boldsymbol{N}}$ は (Y,d_Y) の Cauchy 列である．従って，完備距離空間と一様同相な距離空間は完備である．

証明 f は一様連続だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ で条件「$d_X(x,y) < \delta$ ならば $d_Y(f(x),f(y)) < \varepsilon$」を満たすものが存在する．さらに $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ が Cauchy 列であることから，上の $\delta > 0$ に対して，自然数 N で条件「$m,n \geqq N$ ならば $d(x_m,x_n) < \delta$」を満たすものが存在する．従って $m,n \geqq N$ ならば $d(f(x_m),f(x_n)) < \varepsilon$ が成り立つため，$(f(x_n))_{n\in\boldsymbol{N}}$ は Y の Cauchy 列である． □

命題 15.48 (X,d_X) を完備距離空間，(Y,d_Y) を (X,d_X) の部分距離空間とする．このとき，(Y,d_Y) が完備であることと，Y が X の閉集合であることは同値である．

証明 (Y,d_Y) が完備であると仮定し，すべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_k \in Y$ である点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が $p \in X$ に収束するならば，命題 15.20 により $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は (Y,d_Y) の Cauchy 列である．従って (Y,d_Y) の完備性から $p \in Y$ だから系 8.25 により Y は X の閉集合である．

Y を X の閉集合とし，$(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ を (Y,d_Y) の Cauchy 列とする．(Y,d_Y) は (X,d_X) の部分距離空間だから $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は (X,d_X) の Cauchy 列である．従って (X,d_X) の完備性から $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は収束し，その極限を p とすれば，Y が X の閉集合であることから 系 8.25 により $p \in Y$ である．故に $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は (Y,d_Y) において収束するため (Y,d_Y) は完備である． □

注意 15.49 (1) $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ を $f(x) = \frac{1}{x}$ で定めると，f は連続であるが，一様連続ではない．

(2) $\boldsymbol{R}$ と区間 $(0,1)$ は同相であるが, 通常の距離関数に関し, $\boldsymbol{R}$ は完備であるが, $(0,1)$ はそうではないため, これらは一様同相ではない.

命題 15.50　(X,d), (Y,d') を距離空間, $f:X\to Y$ を一様連続写像とする. f が全射で (X,d) が全有界ならば (Y,d') も全有界である.

証明　$(y_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ を Y の点列とする. f は全射だから各 $n\in\boldsymbol{N}$ に対して $f(x_n)=y_n$ を満たす $x_n\in X$ が存在し, (X,d) が全有界であることから命題 15.37 から X の点列 $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は Cauchy 列を部分列に含む. $(x_{n_i})_{i\in\boldsymbol{N}}$ を Cauchy 列である $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ の部分列とすれば, 命題 15.47 から $(y_{n_i})_{i\in\boldsymbol{N}}$ は (Y,d') の Cauchy 列である. 従って Y の任意の点列は Cauchy 列を部分列に含むため命題 15.38 から (X,d) は全有界である. □

定理 15.51　距離空間 (X,d) に対し, 次の性質をもつ完備距離空間 (X^*,d^*) と写像 $\varphi:X\to X^*$ が存在する.

(i) 任意の $x,y\in X$ に対して $d(x,y)=d^*(\varphi(x),\varphi(y))$

(ii) X の φ による像は X^* で稠密である.

(iii) (Y,d') を完備距離空間, $f:(X,d)\to(Y,d')$ を一様連続写像とすると, 一様連続写像 $\bar{f}:(X^*,d^*)\to(Y,d')$ で, $f=\bar{f}\circ\varphi$ を満たすものがただ 1 つ存在する.

注意 15.52　上の (1) により φ は一様連続な単射で, (X,d) は φ により, X^* の部分空間 $\varphi(X)$ と一様同相である.

(X^*,d^*) **の構成**：$\mathcal{C}(X)$ を X の Cauchy 列全体よりなる集合とし, $\mathcal{C}(X)$ の関係 $\sim$ を

$$(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}\sim(y_n)_{n\in\boldsymbol{N}}\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0$$

で定めると, $\sim$ は同値関係である. 商集合 $\mathcal{C}(X)/\!\sim$ を X^* とおき, $p:\mathcal{C}(X)\to X^*$ を商写像とする. 写像 $d^*:X^*\times X^*\to\boldsymbol{R}$ を以下の様にして定義する. $\alpha,\beta\in X^*$ に対し, $p((x_n)_{n\in\boldsymbol{N}})=\alpha$, $p((y_n)_{n\in\boldsymbol{N}})=\beta$ となる $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}},(y_n)_{n\in\boldsymbol{N}}\in\mathcal{C}(X)$ を選び, $d^*(\alpha,\beta)=\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)$ とする. さらに, $\varphi:X\to X^*$ は $x\in X$ に対し, $(c_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ をすべての $n\in\boldsymbol{N}$ に対して $c_n=x$ であるような点列とすると, $\varphi(x)=p((c_n)_{n\in\boldsymbol{N}})$ で定める.

命題 15.53　距離空間 (X,d) に対し, 完備距離空間 (X_1,d_1), (X_2,d_2) と写像 $\varphi_1:X\to X_1$, $\varphi_2:X\to X_2$ で次の性質をもつものが存在すれば, 一様同相写像 $h:(X_1,d_1)\to(X_2,d_2)$ で, $\varphi_2=h\circ\varphi_1$ を満たすものがただ 1 つ存在する.

(1) φ_i $(i=1,2)$ は $\varphi_i(X)$ の上への一様同相写像である.

(2) X の φ_i $(i=1,2)$ による像は X_i で稠密である.

(3) (Y,d') を完備距離空間, $f:(X,d)\to(Y,d')$ を一様連続写像とすると, 一様連続写像 $\bar{f}_i:(X_i,d_i)\to(Y,d')$ $(i=1,2)$ で, $f=\bar{f}_i\circ\varphi_i$ を満たすものがただ 1 つ存在する.

また, φ_1, φ_2, が上の (1) のかわりに, 次の $(1')$ を満たせば, 任意の $x,y\in X_1$ に対して $d_1(x,y)=d_2(h(x),h(y))$ を満たす写像 $h:X_1\to X_2,d_2)$ で, $\varphi_2=h\circ\varphi_1$ を満たすものがただ 1 つ存在する.

$(1')$ 任意の $x,y\in X$ に対して $d(x,y)=d^*(\varphi(x),\varphi(y))$ である.

定義 15.54　上で構成した距離空間 (X^*,d^*) を (X,d) の完備化と呼び, φ により $X\subset X^*$ とみなす.

実数 $\boldsymbol{R}$ の構成：$d:\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}\to\boldsymbol{Q}$ を $d(x,y)=|x-y|$ で定めれば, d は定義 8.1 の条件 (1), (2), (3) を満たす. この d に関する Cauchy 列全体よりなる集合を $\mathcal{C}(\boldsymbol{Q})$ を考え, 上で X^* を構成したのと同様に $\mathcal{C}(\boldsymbol{Q})$ の商集合 $\boldsymbol{Q}^*$ を考える.

$p:\mathcal{C}(\boldsymbol{Q})\to\boldsymbol{Q}^*$ を商写像として, $\boldsymbol{Q}^*$ における加法と乗法を $\alpha,\beta\in\boldsymbol{Q}^*$ に対し, $p((x_n)_{n\in\boldsymbol{N}})=\alpha$, $p((y_n)_{n\in\boldsymbol{N}})=\beta$ となる $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}},(y_n)_{n\in\boldsymbol{N}}\in\mathcal{C}(X)$ を選び, $\alpha+\beta=p((x_n+y_n)_{n\in\boldsymbol{N}})$, $\alpha\beta=p((x_ny_n)_{n\in\boldsymbol{N}})$ で定め, $-\alpha$ を $-\alpha=p((-x_n)_{n\in\boldsymbol{N}})$ で定義する.

$\varphi:\boldsymbol{Q}\to\boldsymbol{Q}^*$ を X^* を構成したときと同様に定義して, $\varphi(0)=0^*$, $\varphi(1)=1^*$ とおく. $\alpha\neq0^*$ ならば「$n\geqq N$ ならば $|x_n|>\varepsilon>0$」を満たす $N\in\boldsymbol{N}$ と $\varepsilon\in\boldsymbol{Q}$ があるため, $n<N$ のとき $x'_n=1$, $n\geqq N$ のとき $x'_n=\frac{1}{x_n}$ で, 点列

$(x'_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ を定めれば, $(x'_n)_{n\in\boldsymbol{N}} \in \mathcal{C}(\boldsymbol{Q})$ である. そこで, $\alpha^{-1} = p((x'_n)_{n\in\boldsymbol{N}})$ とおく.

このとき, $\alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{Q}^*$ に対し, 結合法則 $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, 交換法則 $\alpha+\beta = \beta+\alpha$, $\alpha\beta = \beta\alpha$, 単位元の存在 $\alpha + 0^* = 0^* + \alpha = \alpha$, $\alpha 1^* = 1^*\alpha = \alpha$, 逆元の存在 $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0^*$, $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1^*$ $(\alpha \neq 0^*)$, 分配法則 $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ が成り立ち, 任意の $x, y \in \boldsymbol{Q}$ に対して $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ が成り立つ.

$\alpha = p((x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}), \beta = p((y_n)_{n\in\boldsymbol{N}}) \in \boldsymbol{Q}^*$, $\alpha \neq \beta$ ならば「$n \geqq N$ ならば $x_n - y_n > \varepsilon$」または「$n \geqq N$ ならば $y_n - x_n > \varepsilon$」を満たす $N \in \boldsymbol{N}$ と $0 < \varepsilon \in \boldsymbol{Q}$ が存在する. 前者の場合 $\beta < \alpha$, 後者の場合 $\alpha < \beta$ によって $\boldsymbol{Q}^*$ の関係 $<$ を定義すると, $(\boldsymbol{Q}^*, \leqq)$ は全順序集合になり, φ は順序単射である. また, $\alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{Q}^*$ に対し, $\alpha \leqq \beta$ ならば $\alpha + \gamma \leqq \beta + \gamma$, $-\beta \leqq \alpha$ であり, $\alpha, \beta > 0$ ならば $\alpha\beta > 0$ である.

$d^* : \boldsymbol{Q}^* \times \boldsymbol{Q}^* \to \boldsymbol{Q}^*$ を $d^*(\alpha, \beta) = \max\{\alpha - \beta, \beta - \alpha\}$ で定めれば, $d^*(\alpha, \beta) \geqq 0^*$ であり, $d^*(\alpha, \beta) = 0^*$ は $\alpha = \beta$ と同値である. さらに, $d^*(\alpha, \beta) = d^*(\beta, \alpha)$ 及び三角不等式 $d^*(\alpha, \gamma) \leqq d^*(\alpha, \beta) + d^*(\beta, \gamma)$ が成り立ち, $\varphi : \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{Q}^*$ は定理 15.51 の (i), (ii) を満たす. そこで, $\alpha, \varepsilon \in \boldsymbol{Q}^*$ に対し, $B(\alpha\,;\varepsilon) = \{\beta \in \boldsymbol{Q}^* | \, d^*(\alpha, \beta) < \varepsilon\}$ とおき, $\boldsymbol{Q}^*$ の部分集合族 $\mathcal{B} = \{B(\alpha\,;\varepsilon) | \, \alpha, \varepsilon \in \boldsymbol{Q}^*\}$ から生成される $\boldsymbol{Q}^*$ の位相を $\mathcal{O}$ とする. このとき $\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}$ の基底になり, 加法 $+ : \boldsymbol{Q}^* \times \boldsymbol{Q}^* \to \boldsymbol{Q}^*$, 乗法 $\cdot : \boldsymbol{Q}^* \times \boldsymbol{Q}^* \to \boldsymbol{Q}^*$, 加法の逆元 $- : \boldsymbol{Q}^* \to \boldsymbol{Q}^*$, 乗法の逆元 ${}^{-1} : \boldsymbol{Q}^* - \{0^*\} \to \boldsymbol{Q}^* - \{0^*\}$ は連続である.

$\boldsymbol{Q}^*$ の点列 $(\alpha_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ が条件「任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 「$m, n \geqq N$ ならば $d(\alpha_m, \alpha_n) < \varepsilon$」を満たす $N \in \boldsymbol{N}$ が存在する.」を満たすとき $(\alpha_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ を $\boldsymbol{Q}^*$ の Cauchy 列と呼ぶことにすれば, 位相 $\mathcal{O}$ に関して $\boldsymbol{Q}^*$ の任意の Cauchy 列は収束する. すなわち $(\alpha_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ を $\boldsymbol{Q}^*$ の Cauchy 列とすれば, $\alpha \in \boldsymbol{Q}^*$ で「任意の α の近傍 V に対して『$n \geqq N$ ならば $\alpha_n \in V$』が成り立つ $N \in \boldsymbol{N}$ がある.」を満たすものが存在する.

このように構成した位相空間 $(\boldsymbol{Q}^*, \mathcal{O})$ を実数と呼んで, $\boldsymbol{Q}^*$ を $\boldsymbol{R}$ で表す.

演習問題

問題 15.1 (X, d) を有界な距離空間とし, $\mathcal{F}(X)$ を X の閉集合全体よりなる集合とする. $A, B \in \mathcal{F}(X)$ に対して, $d_A(B) = \sup\{d(A, x) | \, x \in B\}$, $\rho(A, B) = \max\{d_A(B), d_B(A)\}$ とおくとき, ρ は $\mathcal{F}(X)$ の距離関数になることを示せ.

問題 15.2 線形写像 $T : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ は一様連続であることを示せ.

問題 15.3 d_1, d_2 を X の距離関数, d_3, d_4 を Y の距離関数とし, d_1 と d_2, d_3 と d_4 はそれぞれ一様同値であるとする. 写像 $f : X \to Y$ に対し, $f : (X, d_1) \to (Y, d_3)$ が一様連続であることと, $f : (X, d_2) \to (Y, d_4)$ が一様連続であることは同値であることを示せ.

問題 15.4 例 8.6 で定義した $\boldsymbol{Q}$ の距離関数 d_p は a $(0 < a < 1)$ の選び方をかえても一様同値な距離関数が得られることを示せ.

問題 15.5 (X_i, d_i) $(i = 1, 2, \dots, n)$ を距離空間とし, $p \geqq 1$ に対し $d_p : \prod_{i=1}^n X_i \times \prod_{i=1}^n X_i \to \boldsymbol{R}$ を次で定める.

$$d_p((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = \left(\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(1) d_p は $\prod_{i=1}^n X_i$ の距離関数であることを示せ.

(2) 距離関数 d_p は補題 12.19 の距離関数 d_∞ と一様同値であることを示せ. 一般に d を d_∞ と一様同値な $\prod_{i=1}^n X_i$ の距離関数とすれば, 距離空間 $\left(\prod_{i=1}^n X_i, d\right)$ を (X_i, d_i) $(i = 1, 2, \dots, n)$ の直積距離空間と呼ぶ.

問題 15.6 注意 15.49 の (1) で述べたことを確かめよ.

問題 15.7　距離空間 (X, d) が全有界であるためには, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, X の有限部分集合 M で, $d(M, x) < \varepsilon$ を満たすものが存在することが必要十分であることを証明せよ.

問題 15.8　$\left(\prod_{i=1}^{n} X_i, d\right)$ を距離空間 (X_i, d_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ の直積距離空間 (演習問題 15.5) とする.

(1) 第 j 成分への射影 $\mathrm{pr}_j : \prod_{i=1}^{n} X_i \to X_j$ は一様連続であることを示せ.

(2) $\left(\prod_{i=1}^{n} X_i, d\right)$ が完備であることと, 各 (X_i, d_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ が完備であることは同値であることを示せ.

(3) $\left(\prod_{i=1}^{n} X_i, d\right)$ が全有界であることと, 各 (X_i, d_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ が全有界であることは同値であることを示せ.

問題 15.9　(X^*, d^*) の構成に関して, 以下のことを示せ.

(1) $\mathcal{C}(X)$ で定義した関係 $\sim$ は同値関係である.

(2) 写像 d^* の定め方は $p((x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}) = \alpha$, $p((y_n)_{n\in\boldsymbol{N}}) = \beta$ となる $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}, (y_n)_{n\in\boldsymbol{N}} \in \mathcal{C}(X)$ の選び方に依存しない.

(3) d^* は X^* の距離関数である.

(4) (X^*, d^*) は完備距離空間である.

(5) (X^*, d^*) と写像 $\varphi : X \to X^*$ は定理 15.51 で述べた性質をもつ.

問題 15.10　命題 15.53 を証明せよ.

問題 15.11　実数 $\boldsymbol{R}$ の構成を行った際, そこにおけるすべての主張の証明を与えよ.

問題 15.12　$(\boldsymbol{Q}_p, d^*)$ を例 8.6 で定義した距離空間 $(\boldsymbol{Q}, d_p)$ の完備化とする.

(1) $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{Q}_p$ とみなしたとき, $\boldsymbol{Z}_p$ を $\boldsymbol{Q}_p$ における $\boldsymbol{Z}$ の閉包とすると, $\boldsymbol{Z}_p$ はコンパクトで, $\overline{\boldsymbol{Z}_{(p)}} = \boldsymbol{Z}_p$ が成り立つことを示せ.

(2) 実数値関数 $\nu^* : \boldsymbol{Q}_p \to \boldsymbol{R}$ で, 任意の $x \in \boldsymbol{Q}$ に対し, $\nu^*(x) = \nu(x)$ を満たすものがただ 1 つ存在することを示せ. さらに, このとき任意の $x, y \in \boldsymbol{Q}_p$ に対し, $d_p^*(x, y) = \nu^*(x-y)$, $\nu^*(xy) = \nu^*(x)\nu^*(y)$, $\nu^*(x+y) = \max\{\nu^*(x), \nu^*(y)\}$ が成り立つことを示せ.

(3) $\boldsymbol{Q}_p$ は距離関数 d_p から定まる位相に関して局所コンパクトで, 各 $x \in \boldsymbol{Q}_p$ に対して x を含む $\boldsymbol{Q}_p$ の連結成分は $\{x\}$ のみからなる集合であることを示せ.

§16.　分離公理

位相空間の点の近傍で閉集合であるものを閉近傍という.

公理 16.1　位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対し, 次の分離公理が考えられる.

(T_0) x, y を X の異なる 2 点とすると, x の近傍で y を含まないものか, y の近傍で x を含まないものが存在する.

(T_1) x, y を X の異なる 2 点とすると, x の近傍で y を含まないものと, y の近傍で x を含まないものが存在する.

(WT_2) X の任意のコンパクトな部分空間 C は Hausdorff 空間である.

(T_2) x, y を X の異なる 2 点とすると, x の近傍 U と y の近傍 V で $U \cap V = \emptyset$ となるものが存在する.

$(T_{2\frac{1}{2}})$ x, y を X の異なる 2 点とすると, x の閉近傍 U と y の閉近傍 V で $U \cap V = \emptyset$ となるものが存在する.

(CT_2) x, y を X の異なる 2 点とすると, 連続関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ で, $f(x) \neq f(y)$ となるものが存在する.

(T_3) X の任意の閉集合 F と $x \in X - F$ に対し, x の近傍 U と F を含む開集合 O で, $U \cap O = \emptyset$ となるものが存在する.

(CT_3) X の任意の閉集合 F と $x \in X - F$ に対し, 連続関数 $f : X \to [0, 1]$ で, $f(x) = 1$, $f(F) = \{0\}$ となるもの

が存在する.

(T_4) X の 2 つの閉集合 F_1, F_2 が交わらなければ X の開集合 O_1, O_2 で, $F_1 \subset O_1$, $F_2 \subset O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ を満たすものが存在する.

(T_5) X の任意の部分空間が T_4 を満たす.

(T_6) X は T_4 を満たし, X の任意の閉集合は, たかだか可算個の開集合の共通部分になっている.

定義 16.2 (1) T_0, T_1, WT_2, T_2, $T_{2\frac{1}{2}}$, CT_2, T_1 かつ T_3, T_1 かつ CT_3, T_1 かつ T_4, T_1 かつ T_5, T_1 かつ T_6 を満たす位相空間をそれぞれ T_0-空間, T_1-空間, 弱 Hausdorff 空間, Hausdorff 空間 (または T_2-空間), Urysohn 空間, 完全 Hausdorff 空間, 正則空間, 完全正則空間 (または Tychonoff 空間), 正規空間, 全部分正規空間 (または継承的正規空間), 完全正規空間という.

(2) 位相空間 X の部分集合 A で, $f^{-1}(0) = A$ となる連続関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ が存在するようなものをゼロ集合と呼び, 部分集合 B で, $g^{-1}(\boldsymbol{R} - \{0\}) = B$ となる連続関数 $g : X \to \boldsymbol{R}$ が存在するようなものをコゼロ集合と呼ぶ.

注意 16.3 上の定義から「完全 Hausdorff 空間 $\Rightarrow$ Urysohn 空間 $\Rightarrow$ Hausdorff 空間 $\Rightarrow$ T_1-空間 $\Rightarrow$ T_0-空間」および「$T_5 \Rightarrow T_4$」が成り立つことがわかる.

命題 16.4 (1) $T_0 \Leftrightarrow x, y \in X$ が $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ を満たすのは $x = y$ の場合に限る.

(2) $T_1 \Leftrightarrow$ 任意の $x \in X$ に対し, $\{x\}$ は X の閉集合である.

(3) $T_2 \Leftrightarrow X$ の相異なる 2 点 x, y に対して, x の開近傍 O で $y \in X - \overline{O}$ を満たすものが存在する

(4) $T_3 \Leftrightarrow$ 任意の $x \in X$ と x の任意の近傍 U に対し, x の近傍 V で, $\overline{V} \subset U$ となるものが存在する.

(5) $CT_3 \Leftrightarrow$ コゼロ集合からなる X の基底が存在する.

(6) $T_4 \Leftrightarrow X$ の任意の閉集合 F と, F を含む任意の開集合 U に対して, $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$ となる開集合 V が存在する.

(7) $T_5 \Leftrightarrow X$ の 2 つの部分集合 Y と Z が離れていれば, X の開集合 U, V で, $Y \subset U$, $Z \subset V$, $U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在する.

証明 (1) ($\Rightarrow$) X を T_0 空間として $x, y \in X$ が $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ を満たすとする. もし $x \neq y$ ならば x の近傍 U で y を含まないものか, y の近傍 V で x を含まないものが存在するが, 前者の場合は $x \notin \overline{\{y\}}$ であり, 後者の場合は $y \notin \overline{\{x\}}$ となるため $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ である.

($\Leftarrow$) $x, y \in X$, $x \neq y$ とすれば仮定から $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ だから $\overline{\{x\}} - \overline{\{y\}} \neq \emptyset$ または $\overline{\{y\}} - \overline{\{x\}} \neq \emptyset$ である. $U = X - \overline{\{y\}}$, $V = X - \overline{\{x\}}$ とおけば, 前者の場合は U は y を含まない x の近傍で, 後者の場合は V は x を含まない y の近傍である.

(2) ($\Rightarrow$) $x \in X$ に対し, $y \notin \{x\}$ ならば x を含まない y の近傍があるため, $\{x\}$ は X の閉集合である.

($\Leftarrow$) $x, y \in X$, $x \neq y$ ならば $y \notin \{x\}$ で, $\{x\}$ は閉集合だから y の近傍で $\{x\}$ と交わらないものが存在する. すなわち y の近傍で x を含まないものが存在する

(3) ($\Rightarrow$) X の相異なる 2 点 x, y に対して, x の開近傍 O と y の開近傍 V で $O \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在する. このとき $O \subset X - V$ であり, $X - V$ は閉集合だから $\overline{O} \subset X - V$ が成り立つため $y \in V \subset X - \overline{O}$ が成り立つ.

($\Leftarrow$) X の相異なる 2 点 x, y に対して, x の開近傍 O で $y \in X - \overline{O}$ を満たすものが存在するとき, $V = X - \overline{O}$ とおけば V は y の開近傍で $O \cap V = \emptyset$ を満たすため $(X, \mathcal{O})$ は Hausdorff 空間である.

(4) ($\Rightarrow$) $x \in X$ と x の任意の近傍 U に対し, x の開近傍 W で U に含まれるものをとると, $X - W$ は x を含まない閉集合だから x の開近傍 V と, $X - W$ を含む開集合 O で V と交わらないものがある. このとき $X - O$ は V を含む閉集合で, $X - W \subset O$ より $\overline{V} \subset X - O \subset W \subset U$ である.

($\Leftarrow$) X の任意の閉集合 F と $x \in X - F$ に対し, x の近傍 U で $\overline{U} \subset X - F$ となるものが存在する. このとき, $V = X - \overline{U}$ とおくと V は F を含む開集合で U と交わらない.

(5) $(\Rightarrow)$ X の任意の開集合 O と $x \in O$ に対して, 連続関数 $f : X \to [0,1]$ で $f(x) = 1$, $f(X - O) = 0$ を満たすものがある. このとき, $x \in f^{-1}((0,1]) \subset O$ だからコゼロ集合全体からなる集合は X の基底になることがわかる.

$(\Leftarrow)$ X の任意の閉集合 F と $x \in X - F$ に対し, x を含むコゼロ集合で $X - F$ に含まれるものがあるため, 連続関数 $g : X \to \boldsymbol{R}$ で $x \in g^{-1}(\boldsymbol{R} - \{0\}) \subset X - F$ を満たすものがある. そこで, $c = g(x)$ とおき, $f : X \to [0,1]$ を $f(p) = \min\left\{1, \frac{(|c|+1)|g(p)|}{|c|(|g(p)|+1)}\right\}$ で定めれば, f は連続で, $f(x) = 1$, $f(F) = \{0\}$ を満たす.

(6) $(\Rightarrow)$ X の閉集合 F と, F を含む任意の開集合 U に対して, F と $X - U$ は交わらない閉集合だから, X の開集合 V, W で, $F \subset V$, $X - U \subset W$, $V \cap W = \emptyset$ を満たすものが存在する. このとき, $X - W$ は V を含み, U に含まれる閉集合だから, $F \subset V \subset \overline{V} \subset X - W \subset U$ である.

$(\Leftarrow)$ X の 2 つの閉集合 F_1, F_2 が交わらないとすれば, $X - F_2$ は F_1 を含む開集合である. このとき $F_1 \subset V \subset \overline{V} \subset X - F_2$ となる開集合 V が存在するため $O_1 = V$, $O_1 = X - \overline{V}$ とおけば O_1, O_2 は X の開集合で, $F_1 \subset O_1$, $F_2 \subset O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ を満たす.

(7) $(\Rightarrow)$ X の 2 つの部分集合 Y と Z が離れているとする. $A = X - (\overline{Y} \cap \overline{Z})$ とおくと A は開集合で, $\overline{Y} \cap Z = Y \cap \overline{Z} = \emptyset$ より $Z \subset X - \overline{Y} \subset A$, $Y \subset X - \overline{Z} \subset A$ である. $Y' = A \cap \overline{Y}$, $Z' = A \cap \overline{Z}$ とおけば, これらは A における閉集合で, $Y \subset Y'$, $Z \subset Z'$ かつ $Y' \cap Z' = A \cap (\overline{Y} \cap \overline{Z}) = \emptyset$ が成り立つ. 仮定から A における交わらない開集合 U, V で $Y' \subset U$, $Z' \subset V$ となるものが存在する. A は X の開集合だから U, V も X の開集合である.

$(\Leftarrow)$ A を X の部分集合, Y, Z を A における交わらない閉集合とすれば $Y = A \cap \overline{Y}$, $Z = A \cap \overline{Z}$ である. $\overline{Y} \cap Z = \overline{Y} \cap A \cap Z = Y \cap Z = \emptyset$, $Y \cap \overline{Z} = Y \cap A \cap \overline{Z} = Y \cap Z = \emptyset$ だから, 仮定により X の開集合 U, V で, $Y \subset U$, $Z \subset V$, $U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在する. このとき, $A \cap U$, $A \cap V$ は交わらない A の開集合で, それぞれ Y, Z を含む. □

命題 16.5　弱 Hausdorff 空間のコンパクトな部分空間は閉集合である. とくに弱 Hausdorff 空間は T_1-空間である. また, 弱 Hausdorff 空間の部分空間も弱 Hausdorff 空間である.

証明　X を弱 Hausdorff 空間とし, C を X の任意のコンパクト部分集合とする. $p \in X - C$ に対し, $C \cup \{p\}$ はコンパクトだから Hausdorff 空間である. よって任意の $x \in C$ に対し, x の開近傍 U_x と p の開近傍 V_x が存在して $U_x \cap V_x \cap (C \cup \{p\}) = \emptyset$ となる. 従って, $U_x \cap V_x \cap C = \emptyset$ である. $C \subset \bigcup_{x \in C} U_x$ であり, C のコンパクト性より $x_1, x_2, \dots, x_n \in C$ で $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ となるものがある. そこで $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ とおくと $i = 1, 2, \dots, n$ に対して $V \subset V_{x_i}$ だから $C \cap V = \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}\right) \cap C \cap V = \bigcup_{i=1}^{n} (U_{x_i} \cap V \cap C) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (U_{x_i} \cap V_{x_i} \cap C) = \emptyset$ である. 故に $C \cap V = \emptyset$ だから C は閉集合である

Y を X の部分空間, C を Y のコンパクトな部分空間とすれば, C は X の部分空間としてもコンパクトだから, C は X の部分空間として Hausdorff 空間である. 従って C は Y の部分空間としても Hausdorff 空間だから Y も弱 Hausdorff 空間である. □

命題 14.3 の (2) と命題 14.10 の (1) からただちに次の結果が得られる.

系 16.6　コンパクト Hausdorff 空間は正規空間である.

定義 16.7　X を位相空間とする. 任意の $x \in X$ と x の任意の近傍 U に対し, U に含まれる x の近傍でコンパクトなものが存在するとき X は強い意味で局所コンパクトであるという.

命題 14.18 で局所コンパクト Hausdorff 空間は強い意味で局所コンパクトであることを示したが, Hausdorff 空間という仮定を弱 Hausdorff 空間という仮定に弱めることができる.

命題 16.8　局所コンパクトな弱 Hausdorff 空間は Hausdorff 空間で, 強い意味で局所コンパクトである. 特に, 局所コンパクトな Hausdorff 空間の開部分空間も局所コンパクトである.

証明 X を局所コンパクトな弱 Hausdorff 空間, U を $x \in X$ の開近傍とする. V を x のコンパクトな近傍とすれば, 命題 16.5 により V は閉集合であり, $V \cap U$ は $\{x\}$ を含む V の開集合である. 系 16.6 により V は正規空間だから, 命題 16.4 の (6) から x を含む V の開集合 W で $\overline{W} \cap V \subset U$ を満たすものがある. このとき, $\overline{W} \cap V$ は x の近傍であり, V の閉部分集合だから, コンパクトである. 従って X は強い意味で局所コンパクトである.

x, y を X の相異なる 2 つの点とすれば, 命題 16.5 により, $X - \{y\}$ は x の近傍である. 従って, 上で示したことから, X のコンパクトな近傍 Z で $X - \{y\}$ に含まれるものがある. 命題 16.5 により, Z は閉集合で y を含まないため, $X - Z$ は y の開近傍で, Z と交わらないため X は Hausdorff 空間である. □

演習問題

問題 16.1 X を位相空間とし, X における半順序 $\triangleleft$ を演習問題 9.3 のように定義する.

(1) X に同値関係 $\sim$ を演習問題 5.3 の (1) のように定義して X の $\sim$ による商空間 $X/\!\sim$ を考える. $p : X \to X/\!\sim$ を商写像, O を X の開集合とするとき, $p^{-1}(p(O)) = O$ を示せ. 従って p は開写像である.

(2) 商空間 $X/\!\sim$ に演習問題 5.3 の (2) のようにして順序関係 $\leqq$ を定めるとき, $\alpha, \beta \in X/\!\sim$ に対して $\alpha \leqq \beta$ であることと, $\alpha \in \overline{\{\beta\}}$ であることは同値であることを示せ.

(3) $\triangleleft$ が順序関係であることと, $(X, \mathcal{O}_{\triangleleft})$ が T_0- 空間であることと同値であることを示せ.

(4) Y を T_0-空間, $f : X \to Y$ を連続写像とするとき, 連続写像 $\bar{f} : X/\!\sim \to Y$ で $f = \bar{f} \circ p$ を満たすものがただ 1 つ存在することを示せ.

問題 16.2 集合 X に対し, 集合 $\mathcal{O}(X)$ を $\mathcal{O}(X) = \{O \subset X \,|\, O = \emptyset$ または $X - O$ は有限集合.$\}$ で定める.

(1) $\mathcal{O}(X)$ は X の位相であることを示せ.

(2) X が無限集合の場合, A が X の無限部分集合ならば, 位相空間 $(X, \mathcal{O}(X))$ において $\overline{A} = X$ であることを示せ.

(3) X の位相 $\mathcal{O}$ が $\mathcal{O}(X)$ より強いためには $(X, \mathcal{O})$ が T_1 空間であることが必要十分であることを示せ.

(4) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して $\mathcal{O} \cup \mathcal{O}(X)$ で生成される位相を $\widehat{\mathcal{O}}$ として, X の恒等写像から定まる連続写像を $\iota_X : (X, \widehat{\mathcal{O}}) \to (X, \mathcal{O})$ で表す. 位相空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が T_1 空間ならば, 連続写像 $f : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O})$ で, 任意の $p \in X$ に対して $f^{-1}(\{p\})$ が有限集合であるものに対して, 連続写像 $\hat{f} : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \widehat{\mathcal{O}})$ で $f = \iota_X \circ \hat{f}$ を満たすものがただ 1 つ存在することを示せ.

問題 16.3 K を可換環とするとき, K^n の Zariski 位相 (演習問題 13.4) は T_1 分離公理を満たすが, Hausdorff 空間ではないことを示せ.

問題 16.4 X を位相空間, A をその部分空間とし, X に同値関係 $\sim$ を「$x \sim y \Leftrightarrow x = y$ または $x, y \in A$」により定義する. このとき, 商空間 $X/\!\sim$ を X/A で表す.

(1) X が T_1-空間で, A が X の閉集合ならば X/A も T_1-空間であることを示せ.

(2) 逆に, X/A が T_1-空間ならば, A は X の閉集合であることを示せ.

(3) X が Hausdorff 空間で, A が次の条件を満たす X の部分空間ならば, X/A も Hausdorff 空間であることを示せ.
「任意の $x \in X - A$ に対し, x の近傍 U と A を含む開集合 O で, $U \cap O = \emptyset$ となるものが存在する」

(4) X/A が Hausdorff 空間ならば, A は上の条件を満たすことを示せ.

問題 16.5 X を位相空間, D を X の部分空間とし, $i : D \to X$ を包含写像とするとき, 次の命題を考える.

「任意の Hausdorff 空間 Y に対し, 2 つの連続写像 $f, g : X \to Y$ が $f \circ i = g \circ i$ を満たせば $f = g$ である.」

X が正則空間で, 上の命題が成り立てば D は X で稠密であることを示せ.

問題 16.6 (1) 位相空間 X のたかだか可算個のゼロ集合の共通部分はゼロ集合であることを示せ. また, 有限個のゼロ集合の合併集合はゼロ集合であることを示せ.

(2) 位相空間 X のたかだか可算個のコゼロ集合の合併集合はコゼロ集合であることを示せ．また, 有限個のコゼロ集合の共通部分はコゼロ集合であることを示せ．

(3) ゼロ集合は可算個のコゼロ集合の共通部分であることを示せ．

(4) F を位相空間 X のゼロ集合, H を X の部分空間 F のゼロ集合とすれば, H は X のゼロ集合であることを示せ．

§17.　正規空間

位相空間 X 上で定義された実数値関数 $f, g : X \to \boldsymbol{R}$ に対し, 集合 $\{|f(x) - g(x)|\,|\,x \in X\}$ が上に有界な場合, この集合の上限を $d(f, g)$ で表し, 有界でない場合は, $d(f, g) = \infty$ とおく．

定理 17.1　位相空間 X が T_4 を満たすことは, 次の 3 つの条件のいずれとも同値である．

(1) F_1, F_2 が交わらない X の閉集合ならば, 連続関数 $f : X \to [0, 1]$ で, $f(F_1) = \{0\}$, $f(F_2) = \{1\}$ を満たすものがある．

(2) X の任意の閉集合 F と, 有界な連続関数 $f : F \to \boldsymbol{R}$ に対し, 有界な連続関数 $g : X \to \boldsymbol{R}$ で F への制限が f に一致するようなものがある．

(3) X の任意の閉集合 F と, 連続関数 $f : F \to \boldsymbol{R}$ に対し, 連続関数 $g : X \to \boldsymbol{R}$ で F への制限が f に一致するようなものがある．

証明　$T_4 \Rightarrow (1)$; F_1, F_2 を交わらない X の閉集合とする．正の整数 j と $i = 1, 2, \dots, 2^j - 1$ に対して開集合 $O\bigl(\frac{i}{2^j}\bigr)$ を次のように選ぶ．まず, 命題 16.4 の (6) から $F_1 \subset O\bigl(\frac{1}{2}\bigr) \subset \overline{O\bigl(\frac{1}{2}\bigr)} \subset X - F_2$ を満たす開集合 $O\bigl(\frac{1}{2}\bigr)$ がとれる．$j \geqq 2$ に対し, F_1 を含む開集合 $O\bigl(\frac{1}{2^j}\bigr), O\bigl(\frac{2}{2^j}\bigr), \dots, O\bigl(\frac{2^j-1}{2^j}\bigr)$ で, $i = 1, 2, \dots, 2^j - 1$ に対して $\overline{O\bigl(\frac{i}{2^j}\bigr)} \subset O\bigl(\frac{i+1}{2^j}\bigr)$ (ただし $O(1) = X - F_2$) を満たすものを選んだとする．$i = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ に対し, $O\bigl(\frac{2i+1}{2^{j+1}}\bigr)$ は

$$F_1 \subset O\bigl(\tfrac{1}{2^{j+1}}\bigr) \subset \overline{O\bigl(\tfrac{1}{2^{j+1}}\bigr)} \subset O\bigl(\tfrac{1}{2^j}\bigr), \qquad \overline{O\bigl(\tfrac{i}{2^j}\bigr)} \subset O\bigl(\tfrac{2i+1}{2^{j+1}}\bigr) \subset \overline{O\bigl(\tfrac{2i+1}{2^{j+1}}\bigr)} \subset O\bigl(\tfrac{i+1}{2^j}\bigr)$$

を満たす開集合であるとする．$I = \bigl\{\frac{i}{2^j}\bigm| j = 1, 2, \dots,\ i = 1, 2, \dots, 2^j - 1\bigr\}$ とおくと, 上のように選んだ開集合族 $(O(\lambda))_{\lambda \in I}$ は $\lambda, \mu \in I$, $\lambda < \mu$ ならば $\overline{O(\lambda)} \subset O(\mu)$ を満たすことに注意する．

$O = \bigcup_{\lambda \in I} O(\lambda)$ とおき, $f : X \to [0, 1]$ を $f(x) = \begin{cases} \inf\{\lambda \in I\,|\,x \in O(\lambda)\} & x \in O \\ 1 & x \in X - O \end{cases}$ によって定義する．$x \in F_1$ ならば, すべての $\lambda \in I$ に対して $x \in O(\lambda)$ だから $f(x) = 0$ であり, $O \subset X - F_2$ より $F_2 \subset X - O$ となるため $x \in F_2$ ならば, $f(x) = 1$ である．また, $\lambda \in I$ に対し, $x \in O(\lambda)$ ならば $f(x) \leqq \lambda$ であり, $x \in X - O(\lambda)$ ならば $(0, \lambda] \cap \{\mu \in I\,|\,x \in O(\mu)\} = \emptyset$ である．実際, $\nu \in I$ かつ $\nu \leqq \lambda$ ならば $O(\nu) \subset O(\lambda)$ より $x \in X - O(\lambda) \subset X - O(\nu)$ だから $\nu \notin \{\mu \in I\,|\,x \in O(\mu)\}$ である．よって $x \in X - O(\lambda)$ ならば $f(x) \geqq \lambda$ となるため $f(x) < \lambda$ ならば $x \in O(\lambda)$ である．従って $f(x) = 0$ ならば $x \in \bigcap_{\lambda \in I} O(\lambda)$ である．

$p \in X$, $\varepsilon > 0$ を任意にとる．$f(p) = 0$ の場合, $\lambda < \varepsilon$ を満たす $\lambda \in I$ を選ぶと, 上で述べたことから $p \in O(\lambda)$ であり, $x \in O(\lambda)$ ならば $|f(x) - f(p)| = f(x) \leqq \lambda < \varepsilon$ となるため, f は p において連続である．$0 < f(p) < 1$ の場合, $f(p) - \varepsilon < \lambda < \lambda' < f(p) < \mu < f(p) + \varepsilon$, を満たすように $\lambda, \lambda', \mu \in I$ を選ぶと, $f(p) < \mu$ より $p \in O(\mu)$, $f(p) > \lambda' > \lambda$ より $p \in X - O(\lambda') \subset X - \overline{O(\lambda)}$ だから $p \in O(\mu) - \overline{O(\lambda)}$ である．$x \in O(\mu) - \overline{O(\lambda)}$ ならば $f(p) - \varepsilon < \lambda \leqq f(x) \leqq \mu < f(p) + \varepsilon$ となるため $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ である．故にこの場合も f は p において連続である．$f(p) = 1$ の場合, $\lambda' > \lambda > 1 - \varepsilon$ を満たす $\lambda', \lambda \in I$ を選ぶと, $p \in X - O(\lambda') \subset X - \overline{O(\lambda)}$ である．$x \in X - \overline{O(\lambda)}$ ならば $1 \geqq f(x) \geqq \lambda > 1 - \varepsilon$ だから $|f(x) - f(p)| = 1 - f(x) < \varepsilon$ となって, このときも f は p において連続である．

$(1) \Rightarrow (2)$; $f(F) \subset [-a, a]$ となる $a > 0$ をとり, $H_1 = f^{-1}\bigl(\bigl[-a, -\frac{a}{3}\bigr]\bigr)$, $K_1 = f^{-1}\bigl(\bigl[\frac{a}{3}, a\bigr]\bigr)$ とおけば, H_1, K_1 は交わらない X の閉集合である．仮定から連続関数 $g_1 : X \to \bigl[-\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\bigr]$ で, $g_1(H_1) = \bigl\{-\frac{a}{3}\bigr\}$, $g_1(K_1) = \bigl\{\frac{a}{3}\bigr\}$ を満たすものがある．このとき, すべての $x \in F$ に対して $|f(x) - g_1(x)| \leqq \frac{2}{3}a$ が成り立つ．

$f_0 = f$ とおき, 帰納的に $i=1,2,\dots,k$ に対して連続関数

$$f_{i-1}: F \to \bigl[-\bigl(\tfrac{2}{3}\bigr)^{i-1}a, \bigl(\tfrac{2}{3}\bigr)^{i-1}a\bigr], \qquad g_i : X \to \bigl[-\tfrac{2^{i-1}}{3^i}a, \tfrac{2^{i-1}}{3^i}a\bigr]$$

が定義され, すべての $x \in F$ に対して $|f_{i-1}(x) - g_i(x)| \leqq \bigl(\frac{2}{3}\bigr)^i a$ が成り立つとして関数 $f_k : F \to \bigl[-\bigl(\frac{2}{3}\bigr)^k a, \bigl(\frac{2}{3}\bigr)^k a\bigr]$ を $f_k(x) = f_{k-1}(x) - g_k(x)$ で定める. $H_k = f_k^{-1}\bigl(\bigl[-\bigl(\frac{2}{3}\bigr)^k a, -\frac{2^k}{3^{k+1}}a\bigr]\bigr)$, $K_k = f_k^{-1}\bigl(\bigl[\frac{2^k}{3^{k+1}}a, \bigl(\frac{2}{3}\bigr)^k a\bigr]\bigr)$ とおけば, H_k, K_k は交わらない X の閉集合である. 仮定から連続関数 $g_{k+1} : X \to \bigl[-\frac{2^k}{3^{k+1}}a, \frac{2^k}{3^{k+1}}a\bigr]$ で, $g_{k+1}(H_k) = \bigl\{-\frac{2^k}{3^{k+1}}a\bigr\}$, $g_{k+1}(K_k) = \bigl\{\frac{2^k}{3^{k+1}}a\bigr\}$ を満たすものがある. このとき, すべての $x \in F$ に対して $|f_{k+1}(x) - g_k(x)| \leqq \bigl(\frac{2}{3}\bigr)^{k+1} a$ が成り立つ.

従って, 連続関数列 $\bigl(f_i : F \to \bigl[-\bigl(\frac{2}{3}\bigr)^i a, \bigl(\frac{2}{3}\bigr)^i a\bigr]\bigr)_{i \in \boldsymbol{N}\cup\{0\}}$, $\bigl(g_i : X \to \bigl[-\frac{2^{i-1}}{3^i}a, \frac{2^{i-1}}{3^i}a\bigr]\bigr)_{i\in\boldsymbol{N}}$ で, 任意の $x \in F$ と $i = 1,2,\dots$ に対して $f_i(x) = f_{i-1}(x) - g_i(x)$ を満たすものがとれる. $F_k : F \to [-3a, 3a]$, $G_k : X \to [-a, a]$ を $F_k(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} f_i(x)$, $G_k(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} g_i(x)$ で定めれば, これらは連続関数であり, $k \leqq l$ のとき,

$$|F_l(x) - F_k(x)| \leqq \sum_{i=k+1}^{l} |f_i(x)| \leqq \sum_{i=k+1}^{l} \bigl(\tfrac{2}{3}\bigr)^i a < \tfrac{2^{k+1}}{3^k}a, \quad |G_l(x) - G_k(x)| \leqq \sum_{i=k+1}^{l} |g_i(x)| \leqq \sum_{i=k+1}^{l} \tfrac{2^{i-1}}{3^i}a < \tfrac{2^k}{3^k}a$$

が成り立つため, 関数列 $(F_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$, $(G_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は定理 15.26 の仮定を満たす. 故に定理 15.25, 定理 15.26 により, $(F_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$, $(G_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ はともに連続関数に一様収束する. $\lim\limits_{k\to\infty} F_k = \bar{f}$, $\lim\limits_{k\to\infty} G_k = g$ とおけば, $F_k - f = F_{k-1} - G_k|_F$ が任意の $k = 1,2,\dots$ に対して成り立つことから, $\bar{f} - f = \bar{f} - g|_F$, すなわち $f = g|_F$ が得られる. ここで, 各 G_k が $[-a, a]$ に値をとるため, g も $[-a, a]$ に値をとることにがわかる.

(2) $\Rightarrow$ (3); $\varphi : \boldsymbol{R} \to (-1, 1)$ を $\varphi(t) = \frac{2}{\pi}\arctan t$ で定めると, φ は単調増加関数である同相写像である. $\varphi\circ f$ は F で定義された有界な連続関数だから, 仮定により, X で定義された有界な連続関数 h で $h|_F = \varphi\circ f$ を満たすものがある. $H = \{x \in X \,|\, |h(x)| \geqq 1\}$ とおくと H は F と交わらない X の閉集合だから, 関数 $\xi : F \cup H \to \boldsymbol{R}$ を $\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \in H \\ 1 & x \in F \end{cases}$ によって定めれば, ξ は有界な連続関数である. 従って仮定により X で定義された有界な連続関数 ζ で, $\zeta(F) = \{1\}$, $\zeta(H) = \{0\}$ を満たすものがある. さらに関数 $\kappa : \boldsymbol{R} \to [0, 1]$ を $\kappa(t) = \begin{cases} 0 & t \leqq 0 \\ t & 0 \leqq t \leqq 1 \\ 1 & t \geqq 1 \end{cases}$ によって定めて, $\chi : X \to [0,1]$ を $\chi = \kappa\circ\zeta$ で定めれば, χ は連続関数で, $\chi(F) = \{1\}$, $\chi(H) = \{0\}$ を満たす. このとき, $x \in H$ ならば $h(x)\chi(x) = 0$ だから, 任意の $x \in X$ に対して $h(x)\chi(x) \in (-1, 1)$ であることに注意する. そこで, $g : X \to \boldsymbol{R}$ を $g(x) = \varphi^{-1}(h(x)\chi(x))$ によって定めれば, g は連続で, $x \in F$ ならば $g(x) = \varphi^{-1}(h(x)\chi(x)) = \varphi^{-1}(\varphi\circ f(x)) = f(x)$ である.

(3) $\Rightarrow T_4$; F_1, F_2 を交わらない X の閉集合とする. 関数 $\xi : F_1 \cup F_2 \to \boldsymbol{R}$ を $\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \in F_1 \\ 1 & x \in F_2 \end{cases}$ によって定めれば, ξ は連続関数である. 仮定により X で定義された連続関数 ζ で, $\zeta(F_1) = \{0\}$, $\zeta(F_2) = \{1\}$ を満たすものがある. $O_1 = \zeta^{-1}\bigl((-\infty, \frac{1}{2})\bigr)$, $O_2 = \zeta^{-1}\bigl((\frac{1}{2}, +\infty)\bigr)$ とおけば O_1, O_2 は交わらない開集合で, それぞれ F_1, F_2 を含む. □

上の証明からわかるように, T_4 を満たす位相空間 X の閉集合 F で定義された実数値関数 f が $[-a, a]$ に値をとれば, f の拡張 $g : X \to \boldsymbol{R}$ で $[-a, a]$ に値をとるものが存在する.

系 17.2 局所コンパクト Hausdorff 空間は完全正則である.

証明 X を局所コンパクト Hausdorff 空間として, F を X の閉集合, $p \in X - F$ とする. $X - F$ は x の開近傍だから命題 14.18 により, コンパクトな p の近傍 V で, $X - F$ に含まれるものが存在する. U を p の開近傍で V に含まれるものとすれば, X の部分空間として V は系 16.6 により正規空間である. よって定理 17.1 の (1) から, 連続関数 $f : V \to [0, 1]$ で, $f(p) = 1$, $f(V - U) = \{0\}$ を満たすものがある. ここで V, $X - U$ はともに X の閉集合で,

$X = V \cup (X-U)$, $V \cap (X-U) = V - U$ だから $g : X \to [0,1]$ を $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in V \\ 0 & x \in X - U \end{cases}$ で定めれば, g は連続関数である. $g(p) = f(p) = 1$ であり, $U \subset V \subset X - F$ だから $F \subset X - U$ となるため g は F の各点で 1 を値にとる. □

§18. 完全正規空間・完全正則空間

定義 18.1　位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次の条件を満たすとき, $(X, \mathcal{O})$ を Lindelöf 空間という.

「$\Gamma \subset \mathcal{O}$ に対し, $X = \bigcup \Gamma$ ならば Γ のたかだか可算な部分集合 Γ' で $X = \bigcup \Gamma'$ となるものがある.」

命題 18.2　(1) 第 2 可算公理を満たす位相空間は Lindelöf 空間である.

(2) T_3 分離公理を満たす Lindelöf 空間は T_4 分離公理を満たす.

証明　(1) 位相空間 X は第 2 可算公理を満たすとし, $\{O_i | i = 1, 2, \dots\}$ を可算個の開集合からなる X の基底とする. Γ を X の開被覆とすれば, 任意の $x \in X$ に対し, $x \in U$ を満たす $U \in \Gamma$ があるため, $x \in O_{i_x} \subset U$ を満たす正の整数 i_x が存在する. $S = \{i_x | x \in X\}$ とおけば, S はたかだか可算な集合で, 各 $i \in S$ に対して $O_i \subset U_i$ が存在して, $X = \bigcup\limits_{i \in S} O_i$ だから $X = \bigcup\limits_{i \in S} U_i$ である. 従って は Lindelöf 空間である.

(2) T_3 分離公理を満たす Lindelöf 空間 X の交わらない閉集合 F, H が与えられたとする. $x \in F$ に対し, $X - H$ は x の開近傍だから命題 16.4 の (4) から x の開近傍 U_x で, $\overline{U}_x \subset X - H$ となるものがある. $X - F$ は開集合で $F \subset \bigcup\limits_{x \in F} U_x$ より $X = (X - F) \cup \Bigl(\bigcup\limits_{x \in F} U_x\Bigr)$ である. X は Lindelöf 空間だから $X = (X - F) \cup \Bigl(\bigcup\limits_{i \geqq 1} U_{x_i}\Bigr)$ となる $x_1, x_2, \dots \in F$ がある. このとき $F \subset \bigcup\limits_{i \geqq 1} U_{x_i}$ である. 同様に $H \subset \bigcup\limits_{i \geqq 1} V_{y_i}$ となる $y_1, y_2, \dots \in H$ がある.

$$U = U_{x_1} \cup \Bigl(\bigcup_{i \geqq 2} \Bigl(U_{x_i} - \bigcup_{j=1}^{i-1} \overline{V}_{y_j}\Bigr)\Bigr), \qquad V = \bigcup_{i \geqq 1} \Bigl(V_{y_i} - \bigcup_{j=1}^{i} \overline{U}_{x_j}\Bigr)$$

とおくと, これらは開集合で $F \cap \overline{V}_y = H \cap \overline{U}_x = \emptyset$ だから $F \subset U$, $H \subset V$ である. $x \in U \cap V$ ならば $x \in V$ より $x \in V_{y_i} - \bigcup\limits_{j=1}^{i} \overline{U}_{x_j}$ となる i がある. $x \in U$ でもあるから $x \in U_{x_k} - \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} \overline{V}_{y_j}$ を満たす $k > i$ があるが, このとき $x \notin \overline{V}_{y_i}$ となるため矛盾が生じる. 従って $U \cap V = \emptyset$ である. □

命題 18.3　X を位相空間とする.

(1) X の交わらないゼロ集合 F, H に対し, 連続関数 $f : X \to [0,1]$ で, $F = f^{-1}(0)$, $H = f^{-1}(1)$ を満たすものがある.

(2) X のゼロ集合は, たかだか可算個の開集合の共通部分である. また X が T_4 分離公理を満たせば, X の可算個の開集合の共通部分になっている閉集合はゼロ集合である.

(3) X が T_6 分離公理を満たすためには X の閉集合がすべてゼロ集合であることが必要十分である.

(4) T_6 分離公理を満たす位相空間 X の任意の部分空間は T_6 分離公理を満たす.

証明　(1) 連続関数 $g, h : X \to \boldsymbol{R}$ で $g^{-1}(0) = F$, $h^{-1}(0) = H$ を満たすものがある. $\bar{g}, \bar{h} : X \to [0,1)$ を $\bar{g}(x) = \frac{|g(x)|}{|g(x)|+1}$, $\bar{h}(x) = \frac{|h(x)|}{|h(x)|+1}$ で定めれば, これらは連続関数であり, $F = \bar{g}^{-1}(0)$, $H = \bar{h}^{-1}(0)$ が成り立つ. F と H は交わらないので, $\bar{g}(x) = \bar{h}(x) = 0$ を満たす $x \in X$ は存在しないことに注意して, $f : X \to [0,1]$ を $f(x) = \frac{\bar{g}(x)}{\bar{g}(x)+\bar{h}(x)}$ によって定義すれば, f は連続で, $F = f^{-1}(0)$, $H = f^{-1}(1)$ が成り立つ.

(2) F を X のゼロ集合とすれば, 連続関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ で $F = f^{-1}(0)$ を満たすものがある. 正の整数 n に対し, $O_n = f^{-1}\bigl(\bigl(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\bigr)\bigr)$ とおくと O_n は F を含む X の開集合で, $\bigcap\limits_{n \geqq 1} O_n = f^{-1}\Bigl(\bigcap\limits_{n \geqq 1} \bigl(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\bigr)\Bigr) = f^{-1}(0) = F$ である.

(3) X が T_6 分離公理を満たすとして, F を X の任意の閉集合とする. 仮定から $F = \bigcap_{n\geqq 1} U_n$ を満たす開集合 $U_1, U_2, \ldots$ がある. $X - U_n$ と F は交わらない閉集合だから定理 17.1 の (1) により, 連続関数 $f_n : X \to [0,1]$ で $f_n(F) = \{0\}$, $f_n(X - U_n) = \{1\}$ を満たすものがある. 正の整数 k に対して $F_k : X \to [0,1]$ を $F_k(x) = \sum_{n=1}^{k} 2^{-n} f_n(x)$ により定義すれば, 関数列 $(F_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は定理 15.26 の仮定を満たすため, 定理 15.25, 定理 15.26 により連続関数に一様収束する. $f = \lim_{k\to\infty} F_k$ とおくと, 各 $x \in X$ に対し $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_n(x)$ だから $f^{-1}(0) = \bigcap_{n\geqq 1} f_n^{-1}(0) \supset F$ である. $x \in X - F = \bigcup_{n\geqq 1} (X - U_n)$ だから $x \in X - U_n$ を満たす n がある. このとき, $f_n(x) = 1$ だから $f(x) \geqq 2^{-n} > 0$ である. 故に $x \in f^{-1}(0)$ ならば $x \in F$ となり, $f^{-1}(0) = F$ である.

X の閉集合がすべてゼロ集合ならば (1) と定理 17.1 により, X は T_4 分離公理を満たす. さらに (2) によって, X の閉集合は, たかだか可算個の開集合の共通部分である.

(4) Y を X の部分空間として, A を Y の任意の閉集合とする. このとき, X の閉集合 F で $A = F \cap Y$ を満たすものがある. (3) により F はゼロ集合だから, 連続関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ で $F = f^{-1}(0)$ を満たすものがある. f の Y への制限 $f|_Y : Y \to \boldsymbol{R}$ を考えると $(f|_Y)^{-1}(0) = f^{-1}(0) \cap Y = A$ だから A は Y のゼロ集合である. 従って (3) により Y も T_6 分離公理を満たす. □

命題 18.4　距離空間は完全正規空間である.

証明　A を距離空間 (X, d) の閉集合とすれば, 命題 15.6 から $A = f_A^{-1}(0)$ となるため, A はゼロ集合である. よって命題 18.3 の (3) により, X は T_6 分離公理を満たす. □

命題 18.5　(1) $T_6 \Rightarrow T_5$, $CT_3 \Rightarrow T_3$, 正規空間 $\Rightarrow$ 完全正則空間 $\Rightarrow$ 正則空間 $\Rightarrow$ Hausdorff 空間.

(2) $T_0, T_1, WT_2, T_2, T_3, CT_3$ を満たす位相空間の任意の部分空間も, それぞれ $T_0, T_1, WT_2, T_2, T_3, CT_3$ を満たす.

(3) $T_0, T_1, WT_2, T_2, T_3, CT_3$ を満たす位相空間族の直積空間も, それぞれ $T_0, T_1, WT_2, T_2, T_3, CT_3$ を満たす.

証明　(1) $T_6 \Rightarrow T_5$; 位相空間 X は T_6 分離公理を満たすとする. 命題 18.3 の (3) により, X の閉集合はすべてゼロ集合だから, 命題 18.3 の (1) と定理 17.1 により X は T_4 分離公理を満たす. 命題 18.3 の (4) により X の任意の部分空間 Y は T_6 分離公理を満たすため, Y も T_4 分離公理を満たす. 従って X は T_6 分離公理を満たす.

$CT_3 \Rightarrow T_3$; X の任意の閉集合 F と $x \in X - F$ に対し, 連続関数 $f : X \to [0,1]$ で, $f(x) = 1$, $f(F) = \{0\}$ となるものが存在する. $U = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$, $O = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$ とおけば, これらは交わらない開集合であり, U は x の開近傍であり, O は F を含む.

正規空間 $\Rightarrow$ 完全正則空間; X の任意の閉集合 F と $x \in X - F$ に対し, 命題 16.4 の (2) により $\{x\}$ と F は交わらない閉集合だから定理 17.1 により, 連続関数 $f : X \to [0,1]$ で, $f(x) = 1$, $f(F) = \{0\}$ となるものが存在する.

完全正則空間 $\Rightarrow$ 正則空間; 上で $CT_3 \Rightarrow T_3$ を示したため, 定義から明らかである.

正則空間 $\Rightarrow$ Hausdorff 空間; 正則空間の 1 点からなる部分集合は命題 16.4 の (2) によって閉集合だから, 正則空間は Hausdorff 空間である.

(2) X を位相空間, Y を X の部分空間とする.

Y の異なる 2 点 x, y に対し, x の X における近傍で U で y を含まないものがあるとき, $U \cap Y$ は Y における x の近傍で y を含まないため, X が T_0 を満たせば Y も T_0 を満たし, X が T_1 を満たせば Y も T_1 を満たす. x の X における近傍 U と y の X における近傍 V で $U \cap V = \emptyset$ となるものが存在すれば, $U \cap Y$ は Y における x の近傍, $V \cap Y$ は Y における y の近傍で, これらは交わらないため, X が T_2 を満たせば Y も T_2 を満たす.

Y の閉集合 F で x 含まないものが与えられたとき, X の閉集合 H で, $F = H \cap Y$ を満たすものをとると, H は x を含まない. X が T_3 を満たせば, x の X における近傍 U と H を含む X の開集合 O で, $U \cap O = \emptyset$ となるものが存在する. このとき, $U \cap H$ は Y における x の近傍, $O \cup Y$ は F を含む Y の開集合で, これらは交わらないため, Y も T_3 を満たす. X が CT_3 を満たせば, 連続関数 $f : X \to [0,1]$ で, $f(x) = 1$, $f(H) = \{0\}$ となるものが存在する. こ

のとき, f の Y への制限 $f|_Y : Y \to [0,1]$ は $f|_Y(x) = 1$, $f|_Y(H) = \{0\}$ を満たすため, Y も CT_3 を満たす.

X が WT_2 を満たすとして C を Y の任意のコンパクト集合とすれば C は X のコンパクト集合でもあるから C は Hausdorff 空間である. 従って Y も WT_2 を満たす.

(3) $(X_i)_{i\in I}$ を位相空間族, $p_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ を射影とする.

$\prod_{i\in I} X_i$ の異なる 2 点 x, y に対し, $p_j(x) \neq p_j(y)$ を満たす $j \in I$ がある. X_j における $p_j(x)$ の近傍で U で $p_j(y)$ を含まないものがあるとき, $p_j^{-1}(U)$ は $\prod_{i\in I} X_i$ における x の近傍で y を含まないため, 各 X_i が T_0 を満たせば $\prod_{i\in I} X_i$ も T_0 を満たし, 各 X_i が T_1 を満たせば $\prod_{i\in I} X_i$ も T_1 を満たす. X_j における $p_j(x)$ の近傍 U と X における $p_j(y)$ の近傍 V で $U \cap V = \emptyset$ となるものが存在すれば, $p_j^{-1}(U)$ は $\prod_{i\in I} X_i$ における x の近傍, $p_j^{-1}(U)$ は $\prod_{i\in I} X_i$ における y の近傍で, これらは交わらないため, 各 X_i が T_2 を満たせば $\prod_{i\in I} X_i$ も T_2 を満たす.

$\prod_{i\in I} X_i$ の閉集合 F で x 含まないものが与えられたとき, $i_1, i_2, \ldots, i_k \in I$ と X_{i_s} の開集合 O_s $(s = 1, 2, \ldots, k)$ で, $\bigcap_{s=1}^{k} p_{i_s}^{-1}(O_s)$ が F と交わらない x の近傍になるものがある.

各 X_i が T_3 を満たせば, O_s は $p_{i_s}(x)$ の近傍だから, $p_{i_s}(x)$ の近傍 V_s で, $\overline{V_s} \subset O_s$ となるものが存在する. このとき, $\bigcap_{s=1}^{k} p_{i_s}^{-1}(\overline{V_s}) \subset \bigcap_{s=1}^{k} p_{i_s}^{-1}(O_s)$ だから $\prod_{i\in I} X_i - \bigcap_{s=1}^{k} p_{i_s}^{-1}(\overline{V_s})$ は F を含む開集合で x の近傍 $\bigcap_{s=1}^{k} p_{i_s}^{-1}(V_s)$ と交わらない. 従って, $\prod_{i\in I} X_i$ も T_3 を満たす.

$s = 1, 2, \ldots, k$ に対し, $X_{i_s} - O_s$ は $p_{i_s}(x)$ を含まない X_{i_s} の閉集合だから, 各 X_i が CT_3 を満たせば, 連続関数 $f_s : X_{i_s} \to [0,1]$ で, $f_s(p_{i_s}(x)) = 1$, $f_s(X_{i_s} - O_s) = \{0\}$ となるものが存在する. $f : \prod_{i\in I} X_i \to [0,1]$ を $f(x) = f_1(p_{i_1}(x)) f_2(p_{i_2}(x)) \cdots f_k(p_{i_k}(x))$ で定めれば f は連続で $f(x) = 1$ を満たす. また, $x \in F$ ならば $F \subset \prod_{i\in I} X_i - \bigcap_{s=1}^{k} p_{i_s}^{-1}(O_s) = \bigcup_{s=1}^{k} \Bigl(\prod_{i\in I} X_i - p_{i_s}^{-1}(O_s)\Bigr)$ だから $p_{i_s}(x) \in X_{i_s} - O_s$ を満たす s がある. よって $f(x) = 0$ となり, $f(F) = \{0\}$ である. 従って, $\prod_{i\in I} X_i$ も CT_3 を満たす.

各 X_i が WT_2 を満たすとして C を $\prod_{i\in I} X_i$ の任意のコンパクト集合とすれば, 任意の $i \in I$ に対し $p_i(C)$ は X_i のコンパクト集合だから, Hausdorff 空間である. 従って上で示したことにより $\prod_{i\in I} p_i(C) = \bigcap_{i\in I} p_i^{-1}(p_i(C))$ は C を含む Hausdorff 空間である. よって, (2) により C も Hausdorff 空間である. 故に $\prod_{i\in I} X_i$ も WT_2 を満たす. □

補題 18.6 X を位相空間, M を X を定義域にもつ連続写像 $f : X \to Y_f$ の集合とし, $g \in M$ に対し $p_g : \prod_{f\in M} Y_f \to Y_g$ を射影とする. $e : X \to \prod_{f\in M} Y_f$ を $p_g(e(x)) = g(x)$ で定める.

(1) e は連続写像で, e が単射であることと, M が条件「x, y が X の相異なる点ならば $f(x) \neq f(y)$ を満たす $f \in M$ が存在する.」が成り立つことは同値である.

(2) X の任意の閉集合 F と任意の $x \in X - F$ に対し, $f(x) \notin \overline{f(F)}$ となる $f \in M$ が存在すれば, e は $\prod_{f\in M} Y_f$ の部分空間 $e(X)$ の上への開写像である.

証明 (1) まず $g \in M$ に対し $p_g \circ e = g$ が成り立つことに注意する. $f_1, f_2, \ldots, f_n \in M$ とし, $s = 1, 2, \ldots, n$ に対して O_s を Y_{f_s} の開集合とする.

$$e^{-1}\Bigl(\bigcap_{s=1}^{n} p_{f_s}^{-1}(O_s)\Bigr) = \bigcap_{s=1}^{n} e^{-1}(p_{f_s}^{-1}(O_s)) = \bigcap_{s=1}^{n} (p_{f_s} \circ e)^{-1}(O_s) = \bigcap_{s=1}^{n} f_s^{-1}(O_s)$$

より $e^{-1}\Bigl(\bigcap_{s=1}^{n} p_{f_s}^{-1}(O_s)\Bigr)$ は X の開集合になるため, e は連続である. $x, y \in X$ に対し, $e(x) = e(y)$ であるためには, すべての $f \in M$ に対して $f(x) = p_f(e(x)) = p_f(e(y)) = f(y)$ が成り立つことが必要十分である. 従って e が単射で, $x \neq y$ ならば $e(x) \neq e(y)$ だから $f(x) \neq f(y)$ を満たす $f \in M$ がある. 逆に $x \neq y$ ならば $f(x) \neq f(y)$ を満たす $f \in M$ があるとき, e の定義から $x \neq y$ ならば $e(x) \neq e(y)$ となるため e は単射である.

(2) O を X の開集合とする．任意の $a \in e(O)$ に対し $a = e(x)$ を満たす $x \in O$ が存在し，仮定から $f(x) \notin \overline{f(X-O)}$ となる $f \in M$ がある．$p_f(a) = p_f(e(x)) = f(x) \in Y_f - \overline{f(X-O)}$ だから $U = p_f^{-1}\big(Y_f - \overline{f(X-O)}\big)$ とおけば U は a の開近傍である．任意の $y \in e^{-1}(U)$ に対し，$f(y) = p_f(e(y)) \in Y_f - \overline{f(X-O)}$ だから次の関係式が成り立つ．

$$y \in f^{-1}\big(Y_f - \overline{f(X-O)}\big) = X - f^{-1}\big(\overline{f(X-O)}\big) \subset X - f^{-1}(f(X-O))) \subset X - (X-O) = O \subset e^{-1}(e(O))$$

故に $e^{-1}(U) \subset e^{-1}(e(O))$ だから $e(X) \cap U = e(X \cap e^{-1}(U)) = e(e^{-1}(U)) \subset e(e^{-1}(e(O))) \subset e(O)$ が得られる．$e(X) \cap U$ は $\prod_{f \in M} Y_f$ の部分空間 $e(X)$ における a の開近傍で，$e(O)$ に含まれるため，a は $e(X)$ において $e(O)$ の内点である．従って $e(O)$ は $e(X)$ の開集合である． □

定理 18.7　X を完全正則空間，$M_X = \{f : X \to [0,1] | f \text{ は連続関数}\}$ とし，各 $f \in M_X$ に対し，$I_f = [0,1]$ とおく．補題 18.6 と同様に写像 $e_X : X \to \prod_{f \in M_X} I_f$ を定義すれば，e_X は $e_X(X)$ の上への同相写像である．従って，完全正則空間は区間 $[0,1]$ の直積空間のある部分空間と同相である．

証明　X の任意の閉集合 F と任意の $x \in X - F$ に対し，$f(x) = 1$, $f(F) = \{0\}$ を満たす連続関数 $f : X \to [0,1]$ が存在するため補題 18.6 の (2) より e_X は部分空間 $e_X(X)$ の上への開写像であり，F が一点からなる集合の場合を考えれば，補題 18.6 の (1) より e は単射である．故に e_X は $e_X(X)$ の上への同相写像である． □

命題 18.8　X を完全正則空間，$e_X : X \to \prod_{f \in M} I_f$ を定理 18.7 と同じ写像とする．コンパクト Hausdorff 空間 Y と連続写像 $\varphi : X \to Y$ が与えられたとき，連続写像 $\psi : \overline{e_X(X)} \to Y$ で $\varphi = \psi \circ e_X$ を満たすものがただ 1 つ存在して $\overline{\varphi(X)} = \psi(\overline{e_X(X)})$ が成り立つ．

証明　Y に対しても定理 18.7 と同様の写像 $e_Y : Y \to \prod_{g \in M_Y} I_g$ を考えると，系 16.6，命題 18.5 によりコンパクト Hausdorff 空間は完全正則空間であるため，$\tilde{e}_Y : Y \to e_Y(Y)$ を $\tilde{e}_Y(y) = e_Y(y)$ で与えられる写像とすれば，定理 18.7 によって $\tilde{e}_Y$ は同相写像である．Y はコンパクトだから $e_Y(Y)$ もコンパクトで，Hausdorff 空間 $\prod_{g \in M_Y} I_g$ の部分集合だから命題 14.10 の (1) により閉集合である．故に，e_Y は閉集合の上への同相写像だから Y の任意の部分集合 Z に対して $e_Y(\overline{Z}) = \overline{e_Y(Z)}$ が成り立つことに注意する．

$\varphi^{**} : \prod_{f \in M_X} I_f \to \prod_{g \in M_Y} I_g$ を $p_g(\varphi^{**}(\alpha)) = p_{g \circ \varphi}(\alpha)$ で定めれば，φ^{**} は連続で，任意の $x \in X$ と $g \in M_Y$ に対して，$p_g((\varphi^{**} \circ e_X)(x)) = p_{g \circ \varphi}(e_X(x)) = g \circ \varphi(x) = g(\varphi(x)) = p_g(e_Y(\varphi(x))) = p_g(e_Y \circ \varphi(x))$ だから $\varphi^{**} \circ e_X = e_Y \circ \varphi$ が成り立つ．従って $\varphi^{**}(\overline{e_X(X)}) \subset \overline{\varphi^{**}(e_X(X))} = \overline{e_Y(\varphi(X))} \subset \overline{e_Y(Y)} = e_Y(Y)$ となるため，$\psi : \overline{e_X(X)} \to Y$ を $\psi(\alpha) = \tilde{e}_Y^{-1}(\varphi^{**}(\alpha))$ によって定めることができる．このとき $x \in X$ に対し $\psi \circ e_X(x) = \tilde{e}_Y^{-1}(\varphi^{**}(e_X(x))) = \tilde{e}_Y^{-1}(e_Y(\varphi(x))) = \varphi(x)$ だから $\varphi = \psi \circ e_X$ である．$\psi' : \overline{e_X(X)} \to Y$ も $\varphi = \psi' \circ e_X$ を満たす連続写像とすれば，任意の $x \in X$ に対して $\psi'(e_X(x)) = \varphi(x) = \psi(e(x))$ だから ψ' と ψ を $e_X(X)$ に制限した写像は一致する．$e_X(X)$ は $\overline{e_X(X)}$ で稠密だから命題 14.9 の (2) により $\psi' = \psi$ である．

$\varphi = \psi \circ e_X$ より $\overline{\varphi(X)} = \overline{\psi(e_X(X))} \supset \psi(\overline{e_X(X)})$ である．一方 $\overline{e_X(X)}$ はコンパクト空間 $\prod_{f \in M} I_f$ の閉集合だからコンパクトであり，$\psi(\overline{e_X(X)})$ は Hausdorff 空間 Y のコンパクト集合だから，閉集合である．従って $\psi(e_X(X)) \subset \psi(\overline{e_X(X)})$ より $\overline{\varphi(X)} = \overline{\psi(e_X(X))} \subset \psi(\overline{e_X(X)})$ が得られる．故に $\overline{\varphi(X)} = \psi(\overline{e_X(X)})$ が成り立つ． □

注意 18.9　(1) コンパクト Hausdorff 空間の任意の部分空間は完全正則空間だから，定理 18.7 の後半の主張の逆も成り立つ．

(2) $\overline{e(X)}$ はコンパクトで，これを X の Stone-Čech コンパクト化といい，命題 18.8 の意味で，X の「極大な」コンパクト化である．

§19. 距離化可能定理

定義 19.1　位相空間 $(X,\mathcal{O})$ に対し, 距離関数 $d: X\times X\to \boldsymbol{R}$ で, $\mathcal{O}$ が d から定まる位相に一致するようなものが存在するとき, $(X,\mathcal{O})$ は距離化可能であるという.

距離空間 (X,d) が与えられたとき, $p\in X$, $r>0$ に対し, $B_d(p;r)=\{x\in X|\, d(x,p)<r\}$ とおく.

補題 19.2　(X,d) を距離空間とする. 関数 $\tilde{d}: X\times X\to \boldsymbol{R}$ を $\tilde{d}(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ で定めれば, $\tilde{d}$ は X の距離関数で, $\tilde{d}$ から定まる X の位相は d から定まる X の位相に一致する.

証明　$\tilde{d}(x,y)=\tilde{d}(y,x)$, $\tilde{d}(x,y)\geqq 0$ および「$\tilde{d}(x,y)=0$ ならば $x=y$」は明らかである. 負でない実数 a, b, c が $c\leqq a+b$ を満たすとき $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}=\frac{2+a+b}{(1+a)(1+b)}\leqq\frac{2+a+b}{1+a+b}=1+\frac{1}{1+a+b}\leqq 1+\frac{1}{1+c}$ だから $\frac{c}{1+c}=1-\frac{1}{1+c}\leqq 1-\frac{1}{1+a}+1-\frac{1}{1+b}=\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$ が成り立つ. $a=d(x,y)$, $b=d(y,z)$, $c=d(x,z)$ とおけば, $\tilde{d}$ に関する三角不等式が得られるため $\tilde{d}$ は X の距離関数である.

任意の $x,y\in X$ に対して $\tilde{d}(x,y)\leqq d(x,y)$ だから, $p\in X$, $r>0$ に対して $B_d(p;r)\subset B_{\tilde{d}}(p;r)$ が成り立つ. よって d から定まる X の位相は $\tilde{d}$ から定まる X の位相より強い. また $x\in B_{\tilde{d}}\left(p;\frac{r}{1+r}\right)$ ならば $\frac{d(x,p)}{1+d(x,p)}=\tilde{d}(x,p)<\frac{r}{1+r}$ より $d(x,p)<r$ が得られるため $B_{\tilde{d}}\left(p;\frac{r}{1+r}\right)\subset B_d(p;r)$ が成り立つ. 故に $\tilde{d}$ から定まる X の位相は d から定まる X の位相よりも強い. □

補題 19.3　X を無限集合とするとき, X の有限部分集合全体からなる集合は, X と同じ濃度をもつ.

証明　X の有限部分集合全体からなる集合を S とし, n 個以下の要素をもつ X の部分集合全体からなる集合を S_n とおく. X の n 個の直積集合を X^n として, $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ によって写像 $f: X^n\to S_n$ を定めれば f は全射であるため, S_n の濃度は X^n の濃度以下である. X は無限集合だから, X^n の濃度は X の濃度と等しいため, S_n の濃度は X の濃度以下であるが, $n\geqq 1$ ならば S_n の濃度は X の濃度以上であるため, S_n の濃度は X の濃度と一致する. そこで, $n=1,2,\dots$ に対し $f_n: X\to S_n$ を全単射として $F: X\times\{0,1,2,\dots\}\to S$ を $F(x,0)=\emptyset$, $F(x,n)=f_n(x)$ $(n\geqq 1)$ で定めれば $S=\bigcup_{n\geq 0} S_n$ だから F は全射である. 従って S の濃度は $X\times\{0,1,2,\dots\}$ の濃度以下である. X は無限集合だから, $X\times\{0,1,2,\dots\}$ の濃度は X の濃度と等しいため, S の濃度は X の濃度以下である. 明らかに S の濃度は X の濃度以上であるため S の濃度は X の濃度と一致する. □

命題 19.4　(1) 距離化可能なたかだか可算個の位相空間族の直積空間は距離化可能である.

(2) 第 2 可算公理を満たすたかだか可算個の位相空間族の直積空間は第 2 可算公理を満たす.

証明　$(X_i)_{i\in\boldsymbol{N}}$ を位相空間族とし, $p_j:\prod_{i\geq 1}X_i\to X_j$ $(j=1,2,\dots)$ を射影とする.

(1) 各 X_i は距離化可能であるとする. 補題 19.2 により, 各 X_i の距離関数 d_i で, 区間 $[0,1)$ に値をとるものがある. 関数 $d:\prod_{i\geq 1}X_i\times\prod_{i\geq 1}X_i\to\boldsymbol{R}$ を $d(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}d_i(p_i(\alpha),p_i(\beta))$ で定義する. このとき, d が $\prod_{i\geq 1}X_i$ の距離関数になることは容易に確かめられる. O_i を X_i の開集合とする. $\alpha\in p_i^{-1}(O_i)$ に対し, $p_i(\alpha)\in O_i$ だから, $r>0$ で $B_{d_i}(p_i(\alpha);r)\subset O_i$ を満たすものがある. $\beta\in B_d(\alpha;2^{-i}r)$ ならば $2^{-i}d_i(p_i(\beta),p_i(\alpha))\leqq d(\beta,\alpha)<2^{-i}r$ だから $p_i(\beta)\in B_{d_i}(p_i(\alpha);r)\subset O_i$ である. 故に $\beta\in p_i^{-1}(O_i)$ となるため $B_d(\alpha;2^{-i}r)\subset p_i^{-1}(O_i)$ となり, d から定まる $\prod_{i\geq 1}X_i$ の位相は直積空間としての位相より強いことがわかる.

$\alpha\in\prod_{i\geq 1}X_i$, $r>0$ として $2^{-N}<r$ を満たす正の整数 N をとる. $\beta\in\bigcap_{j=1}^{N}p_j^{-1}\left(B_{d_j}\left(p_j(\alpha);\frac{2^i(r-2^{-N})}{N}\right)\right)$ ならば $j=1,2,\dots,N$ に対して $d_j(p_j(\alpha),p_j(\beta))<\frac{2^i(r-2^{-N})}{N}$ だから $d(\beta,\alpha)=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}d_i(p_i(\alpha),p_i(\beta))<\sum_{j=1}^{N}\frac{r-2^{-N}}{N}+$

$\sum_{i=N+1}^{\infty} 2^{-i} = r - 2^{-N} + 2^{-N} = r$ である．従って $\beta \in B_d(\alpha; r)$ となり，$\bigcap_{j=1}^{N} p_j^{-1}\left(B_{d_j}\left(p_j(\alpha); \frac{2^i(r-2^{-N})}{N}\right)\right) \subset B_d(\alpha; r)$ が成り立つため $\prod_{i\geq 1} X_i$ の直積空間としての位相は d から定まる位相より強い．以上から d から定まる $\prod_{i\geq 1} X_i$ の位相は直積空間としての位相に一致するため $\prod_{i\geq 1} X_i$ は距離化可能である．

(2) 各 X_i は第 2 可算公理を満たすとして $\mathcal{B}_i$ を X_i の可算基とする．有限個の正の整数からなる集合全体の集合を S とする．$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i\in I} p_i^{-1}(O_i) \middle| I \in S,\ i \in I \text{ に対して } O_i \in \mathcal{B}_i \right\}$ とおけば，$\mathcal{B}$ は $\prod_{i\geq 1} X_i$ の基底である．交わらない合併集合 $\bigcup_{I\in S} \prod_{i\in I} \mathcal{B}_i$ を考え，写像 $f : \bigcup_{I\in S} \prod_{i\in I} \mathcal{B}_i \to \mathcal{B}$ を $f((O_i)_{i\in I}) = \bigcap_{i\in I} p_i^{-1}(O_i)$ $((O_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{B}_i)$ で定めれば f は全射である．各 $\mathcal{B}_i$ は高々可算な集合だから，これらの有限個の直積集合 $\prod_{i\in I} \mathcal{B}_i$ も高々可算である．また，S は補題 19.3 によって可算集合だから，高々可算な集合の可算個の合併集合 $\bigcup_{I\in S} \prod_{i\in I} \mathcal{B}_i$ も可算集合である．故に $\mathcal{B}$ は可算集合になるため $\prod_{i\geq 1} X_i$ は第 2 可算公理を満たす． □

定理 19.5　X を T_1-空間とする．このとき次の 3 つの命題は同値である．

(1) X は第 2 可算公理を満たす正則空間である．

(2) X は区間 $[0, 1]$ の可算個の直積空間のある部分空間と同相である．

(3) X は可分で，距離化可能である．

証明　(1)⇒(2); X を第 2 可算公理を満たす正則空間とすれば，命題 18.2 によって X は正規空間である．$\mathcal{B}$ を X の可算基として，$\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ の部分集合 P を $P = \{(U, V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} | \overline{U} \subset V\}$ で定義すれば，P は可算集合である．定理 17.1 から，各 $(U, V) \in P$ に対して，連続関数 $f_{(U,V)} : X \to [0, 1]$ で $f_{(U,V)}(\overline{U}) = \{0\}$, $f_{(U,V)}(X - V) = \{1\}$ を満たすものがある．$I_{(U,V)} = [0, 1]$ とおき，$p_{(U,V)} : \prod_{(U,V)\in P} I_{(U,V)} \to I_{(U,V)}$ を射影として，写像 $e : X \to \prod_{(U,V)\in P} I_{(U,V)}$ を $p_{(U,V)}(e(x)) = f_{(U,V)}(x)$ で定める．X の任意の閉集合 F と任意の $x \in X - F$ に対し，$\mathcal{B}$ が X の基底であることから $V \in \mathcal{B}$ で $x \in V \subset X - F$ となるものがある．さらに X は正則空間だから命題 16.4 の (4) から，x の開近傍 U で，$\overline{U} \subset V$ を満たすものがある．このとき $(U, V) \in P$ で，$x \in \overline{V}$, $F \subset X - V$ だから $f_{(U,V)}(x) = 0$, $f_{(U,V)}(F) = \{1\}$ である．従って $f_{(U,V)}(x) \notin \overline{f_{(U,V)}(F)}$ となるため，補題 18.6 の (2) より e は部分空間 $e(X)$ の上への開写像である．X は T_1-空間だから，上で $F = \{y\}$ の場合を考えれば $f_{(U,V)}(x) = 0$, $f_{(U,V)}(y) = 1$ を満たす $(U, V) \in P$ があるため，補題 18.6 の (1) より e は単射である．故に e は X から区間 $[0, 1]$ の可算個の直積空間の部分空間への同相写像である．

(2)⇒(3); 区間 $[0, 1]$ の可算個の直積空間は命題 19.4 の (1) により距離化可能であるため，その部分空間も距離化可能である．また，$[0, 1]$ は第 2 可算公理を満たすため，$[0, 1]$ の可算個の直積空間は命題 19.4 の (2) により第 2 可算公理を満たす．従って $[0, 1]$ の可算個の直積空間の部分空間も第 2 可算公理を満たすため，可分である．

(3)⇒(1); d を X の位相を与える距離関数とし，D を X の稠密な可算部分集合とする．$\mathcal{B} = \{B_d(p; 2^{-i}) |\ p \in D,\ i = 1, 2, \dots\}$ とおけば，$\mathcal{B}$ は高々可算な集合で，X の基底になる．実際，任意の $x \in X$ と $r > 0$ に対し，$y \in B_d(x; r)$ ならば，$2^{-i} < \frac{r-d(y,x)}{2}$ を満たす正の整数 i をとると，D の稠密性から $p \in B_d(y; 2^{-i}) \cap D$ となる p がある．このとき，$d(p, y) < 2^{-i}$ であり，$z \in B_d(p; 2^{-i})$ ならば $d(z, x) \leqq d(z, p) + d(p, y) + d(y, x) < 2^{-i} + 2^{-i} + d(y, x) < r$ であるため $z \in B_d(x; r)$ である．従って $y \in B_d(p; 2^{-i}) \subset B_d(x; r)$ となるため，$\mathcal{B}$ は X の基底である．故に X は第 2 可算公理を満たす．また，X は距離化可能だから命題 18.4 の (3) と命題 16.8 の (1) より，X は正則空間である． □

§20.　弱 Hausdorff 空間とコンパクト生成位相

定義 20.1　位相空間 X が次の条件 (CG) を満たすとき X の位相をコンパクト生成位相という．

(CG) X の部分集合 F が条件「X の任意のコンパクト部分集合 C に対し，$C \cap F$ は C の閉集合である.」を満たすならば F は X の閉集合である．

コンパクト生成位相をもつ位相空間を CG-空間と呼び, コンパクト生成位相をもつ弱 Hausdorff 空間を k-空間と呼ぶ.

命題 20.2　第 1 可算公理を満たす位相空間は CG-空間である.

証明　X を第 1 可算公理を満たす空間とする. A を閉集合でない X の部分集合とし, $x \in \overline{A} - A$ をとる. X は第 1 可算公理を満たすため, x に収束する A の点列 $x_1, x_2, \dots$ がある. $K = \{x_1, x_2, \dots,\} \cup \{x\}$ とおくと K はコンパクトであり, $x \notin \{x_1, x_2, \dots,\}$ より $K \cap A = \{x_1, x_2, \dots,\}$ は K の閉集合ではない. 従って, X の部分集合 A が閉集合でないならば X のコンパクトな部分集合 K で $K \cap A$ が K の閉集合にならないものがあるため, X は CG-空間である.□

命題 20.3　局所コンパクトな位相空間は CG-空間である.

証明　X を局所コンパクトな位相空間とする. A を閉集合でない X の部分集合とし, $x \in \overline{A} - A$ をとる. K を x のコンパクトな近傍, V を x の任意の近傍とすれば, $K \cap V$ は x の近傍だから $x \in \overline{A}$ より $K \cap V \cap A \neq \emptyset$ である. 従って $x \in \overline{K \cap A}$ である. $x \in K$ だから K における $K \cap A$ の閉包 $\overline{K \cap A} \cap K$ は x を含むが, $a \notin A$ より $K \cap A$ は x を含まないため $\overline{K \cap A} \cap K \neq K \cap A$ である. 故に $K \cap A$ は K の閉集合ではないため, X は CG-空間である.　□

定義 20.4　位相空間 X, Y の間の連続写像 $f : X \to Y$ が全射で, 次の条件 (Q) を満たすとき, f を商写像という. また, X から Y への商写像があるとき, Y を X の商空間という.

(Q) Y の部分集合 O に対し, $f^{-1}(O)$ が X の開集合ならば O は Y の開集合である.

$F = Y - O$ ならば $f^{-1}(F) = X - f^{-1}(O)$ だから上の条件 (Q) は「Y の部分集合 F に対し, $f^{-1}(F)$ が X の開集合ならば F は Y の開集合である.」と言い換えられる.

命題 20.5　CG-空間の商空間は CG-空間である.

証明　X を CG-空間, $f : X \to Y$ を商写像とする. Y の部分集合 F は条件「Y の任意のコンパクト部分空間 C に対し, $C \cap F$ は C の閉集合である.」を満たすとする. K を X の任意のコンパクトな部分空間とすれば $f(K)$ は Y のコンパクトな部分空間だから $F \cap f(K)$ は $f(K)$ の閉集合である. $g : K \to f(K)$ を $g(x) = f(x)$ で定めると, g の連続性により $g^{-1}(F \cap f(K))$ は K の閉集合である. 一方, $f^{-1}(f(K)) \supset K$ が成り立つため $g^{-1}(F \cap f(K)) = f^{-1}(F \cap f(K)) \cap K = f^{-1}(F) \cap f^{-1}(f(K)) \cap K = f^{-1}(F) \cap K$ だから $f^{-1}(F) \cap K$ は K の閉集合である. X は CG-空間だから $f^{-1}(F)$ は X の閉集合であり, f は商写像だから F は Y の閉集合である.　□

定理 20.6　位相空間 X が CG-空間であるためには, X が局所コンパクトな位相空間の商空間であることが必要十分である.

証明　X を CG-空間とし, $\mathcal{C}$ を X のコンパクト部分集合全体からなる集合とする. Y を $\mathcal{C}$ の要素全体の位相和 $\coprod_{K \in \mathcal{C}} K$ とする. $\pi : Y \to X$ を包含写像の族 $(i_K : K \to X)_{K \in \mathcal{C}}$ から誘導される写像とする. 任意の $x \in X$ に対し, $\{x\} \in \mathcal{C}$ だから π は全射である. 各 $K \in \mathcal{C}$ は Y のコンパクトな開かつ閉集合だから, Y は局所コンパクトである. F を X の部分集合で, $\pi^{-1}(F)$ が Y の閉集合になるものとする. 任意の $K \in \mathcal{C}$ に対し, K を Y の部分集合とみなすと, $\pi^{-1}(F) \cap K$ は K の閉集合であり, $i_K^{-1}(F) = K \cap F$ と同相である. 従って $K \cap F$ は X の部分空間 K の閉集合だから, X が CG-空間であることにより, F は X の閉集合である. 故に π は商写像であり, X は局所コンパクト空間 Y の商空間である.

命題 20.3 より, 局所コンパクトな位相空間は CG-空間であり, 命題 20.5 より, CG-空間の商空間は CG-空間だから, 局所コンパクトな位相空間の商空間は CG-空間である.　□

系 20.7　CG-空間は局所コンパクトなパラコンパクト空間の商空間であり, k-空間は局所コンパクトなパラコンパクト Hausdorff 空間の商空間である.

証明　定理 20.6 の証明において Y はコンパクト空間の位相和だから明らかにパラコンパクトであり, さらに X が弱

Hausdorff 空間ならば各 $K \in \mathcal{C}$ はコンパクトな Hausdorff 空間で, Y の開集合だから Y は Hausdorff 空間である. □

補題 20.8 X を弱 Hausdorff 空間とする. X の任意の部分集合 M と, 任意の $x \in \overline{M}$ に対して, X のコンパクト部分集合 C で, $x \in \overline{M \cap C}$ となるものがあれば, X は k-空間である.

証明 X の部分集合 F は条件「X の任意のコンパクト部分集合に C 対し, $C \cap F$ は C の閉集合である.」を満たすとする. 任意の $x \in \overline{F}$ に対して, 仮定から X のコンパクト部分集合 C で, $x \in \overline{F \cap C}$ となるものがある. 命題 16.5 により C は X の閉集合で, $F \cap C$ は C の閉集合だから $F \cap C$ は X の閉集合である. 故に $x \in \overline{F \cap C} = F \cap C \subset F$ となるため, $\overline{F} \subset F$ を得る. 従って $\overline{F} = F$ となり F は X の閉集合である. よって X は CG-空間であるため, k-空間である. □

位相空間 X の開集合 O が「任意の $x \in O$ に対し, x の近傍 U で, $\overline{U} \subset O$ となるものがある.」という条件を満たすとき, O を正則開集合と呼ぶ.

命題 20.9 k-空間の閉部分集合と正則開集合は k-空間である.

証明 A を k-空間 X の閉集合とする. 命題 18.5 の (2) により, A は弱 Hausdorff 空間である. A の部分集合 F は条件「A の任意のコンパクト部分集合 C に対し, $C \cap F$ は C の閉集合である.」を満たすとする. K を X の任意のコンパクトな部分集合とすれば, A は閉集合だから $A \cap K$ はコンパクト集合 K の閉部分集合になるため, $A \cap K$ は A のコンパクトな部分集合である. よって $F \cap (A \cap K) = F \cap K$ は $A \cap K$ の閉集合である. 一方命題 16.5 により, K は X の閉集合だから $A \cap K$ は X の閉集合である. 故に $F \cap K$ は X の閉集合である. X は CG-空間だから F は X の閉集合になる. 従って F は A の閉集合になるため, A はコンパクト生成位相をもつ.

O を X の正則開集合とする. 命題 18.5 の (2) により, O は弱 Hausdorff 空間である. O の部分集合 F は条件「O の任意のコンパクト部分集合 C に対し, $C \cap F$ は C の閉集合である.」を満たすとする. $x \in \overline{F} \cap O$ に対し, O は X の正則開集合だから, x の開近傍 V で, $\overline{V} \subset O$ となるものがある. K を X の任意のコンパクトな部分集合とすれば, 命題 16.5 により, K は X の閉集合であり, K の閉集合 $\overline{V} \cap K$ はコンパクトで O に含まれる. よって $F \cap \overline{V} \cap K$ は $\overline{V} \cap K$ の閉集合であり, X は CG-空間だから, $F \cap \overline{V}$ は X の閉集合である. x の X における任意の近傍 U をとると, $\overline{V} \cap U$ も x の近傍で, $x \in \overline{F}$ より $F \cap \overline{V} \cap U \neq \emptyset$ である. よって $x \in \overline{F \cap \overline{V}} = F \cap \overline{V} \subset F$ より $x \in F$ となるため, F の O における閉包 $\overline{F} \cap O$ は F に一致する. 従って F は O の閉集合になるため, O はコンパクト生成位相をもつ. □

命題 20.10 X を CG-空間, Y を弱 Hausdorff 空間とし, 写像 $f : X \to Y$ は X の任意のコンパクトな部分空間に制限すれば連続であるとする. このとき, f は連続写像である.

証明 F を Y の任意の閉集合, C を X の任意のコンパクト集合とする. 仮定により, f の C への制限 $f|_C$ は連続だから $f(C)$ は Y のコンパクト集合であり, 命題 16.5 により, $f(C)$ は Y の閉集合である. よって $F \cap f(C)$ は Y の閉集合だから, $f|_C$ の連続性から $f^{-1}(F) \cap C = (f|_C)^{-1}(F \cap f(C))$ は C の閉集合である. X はコンパクト生成位相をもつため, $f^{-1}(F)$ は X の閉集合になり, f の連続性が示された. □

補題 20.11 X, Y を位相空間, $f : X \to Y$ を閉写像である連続写像とする. 任意の $y \in Y$ に対して $f^{-1}(y)$ がコンパクトならば Y の任意のコンパクト集合 C に対して $f^{-1}(C)$ はコンパクトである.

証明 $g : X \to f(X)$ を $g(x) = f(x)$ で定めれば g は閉写像である連続な全射であり, 任意の $y \in f(X)$ に対して, $g^{-1}(y) = f^{-1}(y)$ はコンパクトである. f は閉写像だから Y の任意のコンパクト集合 C に対して, $f(X) \cap C$ は C の閉集合になるためコンパクトであり, $f^{-1}(C) = g^{-1}(f(X) \cap C)$ が成り立つため, $f(X)$ を Y で置き換え, g を f で置き換えることによって, f は全射であると仮定してよい.

X の開集合族 $(O_i)_{i \in I}$ は $f^{-1}(C) \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ を満たすとする. 任意の $y \in C$ に対し, $f^{-1}(y)$ コンパクトだか

ら, I の有限部分集合 I_y で $f^{-1}(y)\subset\bigcup_{i\in I_y}O_i$ を満たすものがある. $U_y=\bigcup_{i\in I_y}O_i$ とおき, $V_y=Y-f(X-U_y)$ とおくと, $y\in V_y$ であり, f は閉写像だから W_y は開集合である. $C\subset\bigcup_{y\in C}V_y$ で C のコンパクト性より, $C\subset\bigcup_{j=1}^{n}V_{y_j}=\bigcup_{j=1}^{n}(Y-f(X-U_{y_j}))=Y-\bigcap_{j=1}^{n}f(X-U_{y_j})$ を満たす $y_1,y_2,\dots,y_n\in C$ がある. f は全射だから $f^{-1}(C)\subset f^{-1}\left(Y-\bigcap_{j=1}^{n}f(X-U_{y_j})\right)=X-f^{-1}\left(\bigcap_{j=1}^{n}f(X-U_{y_j})\right)=X-\bigcap_{j=1}^{n}(X-U_{y_j})=\bigcup_{j=1}^{n}U_{y_j}=\bigcup_{j=1}^{n}\left(\bigcup_{i\in I_{y_j}}O_i\right)=\bigcup_{i\in\bigcup_{j=1}^{n}I_{y_j}}O_i$ であり, $\bigcup_{j=1}^{n}I_{y_j}$ は I の有限部分集合だから $f^{-1}(C)$ はコンパクトである. □

命題 20.12　G を有限群, X を G-空間とする. X が Hausdorff 空間ならば X/G も Hausdorff 空間であり, X が弱 Hausdorff 空間ならば X/G も弱 Hausdorff 空間である.

証明　$p:X\to X/G$ を商写像とし, Y を X の部分集合とすれば $p^{-1}(p(Y))=\bigcup_{g\in G}gY$ だから p は開写像かつ閉写像である.

X が Hausdorff 空間の場合: z, w を X/G の相異なる 2 点とし, $p(x)=z$, $p(y)=w$ を満たす $x,y\in X$ をとる. $G_x=\{g\in G|\,gx=x\}$, $G_y=\{g\in G|\,gy=y\}$ とおき, G の G_x, G_y による右剰余類の代表元を 1 つずつ定め, $G=a_1G_x\cup a_2G_x\cup\cdots\cup a_rG_x=b_1G_y\cup b_2G_y\cup\cdots\cup b_sG_y$, $a_1=b_1=1$ であり, $i\neq j$ ならば $a_iG_x\cap a_jG_x=b_iG_y\cap b_jG_y=\emptyset$ が成り立つとする. このとき $Gx=\{a_1x,a_2x,\dots,a_rx\}$, $Gy=\{b_1y,b_2y,\dots,b_sy\}$ であり, $z\neq w$ より $a_1x,a_2x,\dots,a_rx,b_1y,b_2y,\dots,b_sy$ は互いに相異なるため, a_ix, b_jy の開近傍 U_i, V_j で $i\neq k$, $j\neq l$ ならば $U_i\cap U_k=V_j\cap V_l=U_i\cap V_j=\emptyset$ を満たすものがある. そこで $U=\bigcap_{u\in G_x}\bigcap_{i=1}^{r}(a_iu)^{-1}U_i$, $V=\bigcap_{v\in G_y}\bigcap_{j=1}^{s}(b_jv)^{-1}V_j$ とおけば U, V はそれぞれ x, y の開近傍である. 任意の $g\in G$ に対して $g=b_jv$ を満たす $1\leqq j\leqq s$ と $v\in G_y$ が存在するため, $U\cap gV\subset U_1\cap V_j=\emptyset$ である. もし $p(U)\cap p(V)$ が空でなければ, $p(c)\in p(U)\cap p(V)$ を満たす $c\in X$ が存在する. このとき $c\in p^{-1}(p(U)\cap p(V))=\left(\bigcup_{g\in G}gU\right)\cap\left(\bigcup_{h\in G}hV\right)=\bigcup_{g,h\in G}(gU\cap hV)=\bigcup_{g,h\in G}g(U\cap(g^{-1}h)V)$ となるが, これは任意の $g\in G$ に対して $U\cap gV=\emptyset$ であることに矛盾する. 故に $p(U)$ と $p(V)$ は交わらない. また, p は開写像だから $p(U)$, $p(V)$ はそれぞれ z, w の開近傍である. 以上から X/G は Hausdorff 空間である.

X が弱 Hausdorff 空間の場合: 任意の $z\in X/G$ に対して $p(x)=z$ を満たす x をとれば $p^{-1}(z)=Gx$ だから $p^{-1}(z)$ は有限集合だからコンパクトである. C を X/G の任意のコンパクト集合とすれば, 補題 20.11 によって $p^{-1}(C)$ はコンパクトである. $p^{-1}(C)$ は G-空間で, 上の結果から $p^{-1}(C)/G$ は Hausdorff 空間であり, p は 同相写像 $p^{-1}(C)/G\to C$ を誘導するため C は Hausdorff 空間である. よって X/G は弱 Hausdorff 空間である. □

§21.　レトラクション関手

記号 21.1　弱 Hausdorff 空間と連続写像のなす圏を $\mathcal{W}$, k-空間と連続写像のなす圏を $\mathcal{K}$ で表す. このとき $\mathcal{K}$ は $\mathcal{W}$ の充満部分圏である.

定義 21.2　位相空間 X に対し, 位相空間 $k(X)$ を次のように定める. まず集合としては $k(X)=X$ であり, X の部分集合 F で条件

「X の任意のコンパクト集合 C に対し, $F\cap C$ が C における閉集合である.」

を満たすもの全体からなるものを $k(X)$ の閉集合全体からなる集合となるように $k(X)$ の位相を定義する. また, 写像 $\varepsilon_X:k(X)\to X$ を $\varepsilon_X(x)=x$ で定め, 写像 $f:X\to Y$ に対して $k(f):k(X)\to k(Y)$ を $k(f)(x)=f(x)$ で定める.

定理 21.3　弱 Hausdorff 空間 X, Y および写像 $f:X\to Y$ に に対し, 次の結果が成り立つ.

(1) $\varepsilon_X : k(X) \to X$ は連続で, $k(X)$ の任意のコンパクト集合 K に対して, ε_X の K への制限は $K \subset X$ の上への同相写像である.

(2) $k(X)$ のコンパクト集合の全体と X のコンパクト集合の全体は $\varepsilon_X : k(X) \to X$ によって 1 対 1 に対応する.

(3) $k(X)$ は k-空間であり, X が k-空間ならば, $\varepsilon_X : k(X) \to X$ は同相写像である.

(4) X の任意のコンパクト集合 C に対し, f の C への制限が連続ならば $k(f) : k(X) \to k(Y)$ は連続である.

(5) $\varepsilon_X : k(X) \to X$ はホモトピー群, 特異ホモロジー群, 特異コホモロジー群の同型写像を誘導する.

証明 (1) F を X の任意の閉集合とする. X の任意のコンパクト集合 C に対し, $F \cap C$ は C の閉集合になるため, F は $k(X)$ の閉集合でもある. 従って $\varepsilon_X : k(X) \to X$ は連続である. K を $k(X)$ の任意のコンパクト集合とする. F を K の任意の閉集合とすると K のコンパクト性により F もコンパクトである. 一方 $\varepsilon_X : k(X) \to X$ の連続性より, その K への制限 $\varepsilon_X|_K : K \to X$ は連続だから $F = (\varepsilon_X|_K)(F)$ は X のコンパクト集合になる. X は弱 Hausdorff 空間だから命題 16.5 により, F は X の閉集合である. よって $\varepsilon_X|_K : K \to X$ は K の上への連続な全単射で閉写像になるため, 同相写像である.

(2) K を $k(X)$ の任意のコンパクト集合とすると $\varepsilon_X : k(X) \to X$ の連続性から $\varepsilon_X(K) = K$ は X のコンパクト集合でもある. C を X のコンパクト集合とし, $C' = \varepsilon_X^{-1}(C)$ とおく. 命題 16.5 により弱 Hausdorff 空間のコンパクト部分集合は閉集合であるため, C は X の閉集合であり, ε_X の連続性から C' は $k(X)$ の閉集合である. $\iota_C : C' \to C$ を $\iota_C(x) = x$ 定めれば ε_X の連続性から ι_C は連続な全単射である. F を C' の任意の閉集合とすれば, C' は $k(X)$ の閉集合だから F は $k(X)$ の閉集合である. よって $k(X)$ の位相の定義から $F \cap C = F$ は C の閉集合である. 従って $\iota_C : C' \to C$ は閉写像でもあるため, 同相写像であり, C はコンパクトだから C' もコンパクトである.

(3) (1) より $k(X)$ の位相は X の位相より強く, $k(X)$ のコンパクト集合は X のコンパクト集合でもあるから, X が弱 Hausdorff 空間ならば $k(X)$ も弱 Hausdorff 空間である. $k(X)$ の部分集合 F は条件「$k(X)$ の任意のコンパクト部分集合 C に対し, $C \cap F$ は C の閉集合である.」を満たすとすると, (2) より F は条件「X の任意のコンパクト部分集合 C に対し, $\varepsilon_X^{-1}(C) \cap F$ は $\varepsilon_X^{-1}(C)$ の閉集合である.」を満たす. (2) より $\varepsilon_X^{-1}(C)$ はコンパクトで, (1) より $\varepsilon_X : k(X) \to X$ は $\varepsilon_X^{-1}(C)$ を C の上に同相に写すため, $C \cap F$ は X の閉集合になる. よって $k(X)$ の位相の定義から F は $k(X)$ の閉集合である. 従って, $k(X)$ はコンパクト生成位相をもつため k-空間である.

X を k-空間とする. (1), (2) より全単射 $\varepsilon_X^{-1} : X \to k(X)$ を X の任意のコンパクト集合に制限したものは連続であり, 仮定と上で示したことから X と $k(X)$ はともに k-空間である. 故に命題 20.10 から $\varepsilon_X^{-1} : X \to k(X)$ は連続であるため, $\varepsilon_X : k(X) \to X$ は同相写像である.

(4) (1) より $k(X)$ の任意のコンパクト集合 K に対し, $\varepsilon_X(K)$ は X のコンパクト集合だから, 仮定により f の $\varepsilon_X(K)$ への制限は連続である. 従って $f(\varepsilon_X(K))$ は Y のコンパクト集合だから, (1), (2) から $\varepsilon_Y^{-1} : Y \to k(Y)$ の $f(\varepsilon_X(K))$ への制限 $\varepsilon_Y^{-1}|_{f(\varepsilon_X(K))} : f(\varepsilon_X(K)) \to k(Y)$ は連続である. そこで, $\varepsilon' : K \to \varepsilon_X(K)$ を $\varepsilon'(x) = \varepsilon_X(x)$ で与えられる写像, $f' : \varepsilon_X(K) \to f(\varepsilon_X(K))$ を $f'(x) = f(x)$ で与えられる写像とすれば, これらは連続である. $k(f)$ の K への制限は 3 つの連続写像 ε', f', $\varepsilon_Y^{-1}|_{f(\varepsilon_X(K))}$ の合成だから連続である. (3) により, $k(X)$, $k(Y)$ はともに k-空間だから命題 20.10 から $k(f)$ は連続である.

(5) K がコンパクトな位相空間ならば $\varepsilon_{X*}(\varphi) = \varphi \circ \varepsilon_X$ によって定義される写像 $\varepsilon_{X*} : \mathrm{Map}(K, k(X)) \to \mathrm{Map}(K, X)$ が全単射であることを示せばよい. まず, ε_X は全射だから ε_{X*} は単射である. $\varphi \in \mathrm{Map}(K, X)$ に対し $\varphi(K)$ は X のコンパクト集合だから (1), (2) より $\varepsilon_X^{-1} : X \to k(X)$ の $\varphi(K)$ への制限 $\varepsilon_X^{-1}|_{\varphi(K)}$ は連続写像である. 写像 $\varphi' : K \to k(X)$ を $\varphi'(x) = \varepsilon_X^{-1}|_{\varphi(K)}(\varphi(x))$ で定義すれば $\varepsilon_{X*}(\varphi') = \varphi$ を満たすため ε_{X*} は全射である. $\square$

命題 21.4 Y を弱 Hausdorff 空間 X の閉部分空間, $i : Y \to X$ を包含写像とすると $k(i) : k(Y) \to k(X)$ は $k(Y)$ を $k(i)(k(Y))$ の上に同相に写す.

証明 F を $k(Y)$ の閉集合とし C を X の任意のコンパクト集合とすると Y は閉集合だから $Y \cap C$ は C の閉部分空間になるため, コンパクトである. $F \subset Y$ だから $F \cap C = F \cap (Y \cap C)$ で, $Y \cap C$ は Y のコンパクト集合であるため

$F\cap C$ は $Y\cap C$ の閉部分集合である．よって $F\cap C$ もコンパクトで, Hausdorff 空間 C の部分空間だから C の閉集合である．故に F は $k(X)$ の閉集合でもあるため, $k(i)$ は閉写像である．$k(i)$ は連続な単射だから $k(Y)$ を $k(i)(k(Y))$ の上に同相に写す. □

定理 21.3 から, 弱 Hausdorff 空間 X に対して $k(X)$ を対応させ, 弱 Hausdorff 空間の間の連続写像 f に対して $k(f)$ を対応させることにより, 関手 $k:\mathcal{W}\to\mathcal{K}$ が定義される．また, $i:\mathcal{K}\to\mathcal{W}$ を包含関手, $id_{\mathcal{K}}:\mathcal{K}\to\mathcal{K}$, $id_{\mathcal{W}}:\mathcal{W}\to\mathcal{W}$ を恒等関手とすれば, $k\circ i=id_{\mathcal{K}}$ であり, 自然変換 $\varepsilon:i\circ k\to id_{\mathcal{W}}$ が得られる.

補題 21.5 $k:\mathcal{W}\to\mathcal{K}$ は $i:\mathcal{K}\to\mathcal{W}$ の右随伴関手である.

証明 k-空間 X と弱 Hausdorff 空間 Y に対して写像 $\varphi_{X,Y}:\mathcal{W}(i(X),Y)\to\mathcal{K}(X,k(Y))$ を $\varphi_{X,Y}(f)=k(f)$ で定め, 写像 $\psi_{X,Y}:\mathcal{K}(X,k(Y))\to\mathcal{W}(i(X),Y)$ を $\psi_{X,Y}(g)=\varepsilon_Y\circ i(g)$ で定める．$\psi_{X,Y}(\varphi_{X,Y}(f))=\varepsilon_Y\circ i(k(f))=f$, $\varphi_{X,Y}(\psi_{X,Y}(g))=k(\varepsilon_Y\circ i(g))=g$ より $\varphi_{X,Y}$ は $\psi_{X,Y}$ を逆写像とする全単射である．また, k-空間の間の連続写像 $\alpha:X'\to X$ と弱 Hausdorff 空間の間の連続写像 $\beta:Y\to Y'$ に対して $\mathcal{K}(\alpha,k(\beta))\circ\varphi_{X,Y}(f)=k(\beta)\circ k(f)\circ\alpha=k(\beta\circ f\circ i(\alpha))=\varphi_{X',Y'}\circ\mathcal{W}(i(\alpha),\beta)(f)$ だから下図はは可換である.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{W}(i(X),Y) \arrow[r, "\varphi_{X,Y}"] \arrow[d, "\mathcal{W}(i(\alpha),\beta)"] & \mathcal{K}(X,k(Y)) \arrow[d, "\mathcal{K}(\alpha,k(\beta))"] \\
\mathcal{W}(i(X'),Y') \arrow[r, "\varphi_{X',Y'}"] & \mathcal{K}(X',k(Y'))
\end{tikzcd}$$

従って $k:\mathcal{W}\to\mathcal{K}$ は $i:\mathcal{K}\to\mathcal{W}$ の右随伴関手である. □

定義 21.6 X, Y が k-空間で, 連続写像 $i:X\to Y$ が次の条件を満たすとき, i はインクルーシブであるという.

(I) k-空間 Z に対し, 連続写像 $f:Z\to Y$ が $f(Z)\subset i(X)$ を満たせば, 連続写像 $f':Z\to X$ で $f=i\circ f'$ を満たすものがただ 1 つ存在する.

定義 21.7 X, Y が k-空間で, 連続写像 $p:X\to Y$ が次の条件を満たすとき, p はプロクルーシブであるという.

(P) k-空間 Z に対し, 連続写像 $f:X\to Z$ が条件「$x,y\in X$, $p(x)=p(y)$ ならば $f(x)=f(y)$」を満たせば, 連続写像 $f':Y\to Z$ で $f=f'\circ p$ を満たすものがただ 1 つ存在する.

命題 21.8 X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 を k-空間とする.

(1) $i_1:X_1\to Y$, $i_2:X_2\to Y$ がともにインクルーシブな写像で, $i_1(X_1)=i_2(X_2)$ が成り立つとき, 同相写像 $f:X_1\to X_2$ で $i_2\circ f=i_1$ を満たすものがただ 1 つ存在する.

(2) $p_1:X\to Y_1$, $p_2:X\to Y_2$ がともにプロクルーシブな写像で, $x,y\in X$ に対し, $p_1(x)=p_1(y)$ と $p_2(x)=p_2(y)$ は同値であるとき, 同相写像 $f:Y_1\to Y_2$ で $f\circ p_1=p_2$ を満たすものがただ 1 つ存在する.

証明 (1) まず $i_1(X_1)\subset i_2(X_2)$ より, 連続写像 $f:X_1\to X_2$ で $i_2\circ f=i_1$ を満たすものがただ 1 つ存在する．また $i_2(X_2)\subset i_1(X_1)$ より, 連続写像 $g:X_2\to X_1$ で $i_1\circ g=i_2$ を満たすものがただ 1 つ存在する．このとき $i_1\circ(g\circ f)=(i_1\circ g)\circ f=i_2\circ f=i_1=i_1\circ id_{X_1}$ であり, i_1 はインクルーシブだから, $i_1\circ h=i_1$ を満たす写像 $h:X_1\to X_1$ はただ 1 つだけであるため $g\circ f=id_{X_1}$ が成り立つ. 同様に $i_2\circ(f\circ g)=(i_2\circ f)\circ g=i_1\circ g=i_2=i_2\circ id_{X_2}$ より $f\circ g=id_{X_2}$ が成り立つため f は同相写像である.

(2) まず $x,y\in X$ に対し $p_1(x)=p_1(y)$ ならば $p_2(x)=p_2(y)$ より, 連続写像 $f:Y_1\to Y_2$ で $f\circ p_1=p_2$ を満たすものがただ 1 つ存在する．また $x,y\in X$ に対し $p_2(x)=p_2(y)$ ならば $p_1(x)=p_1(y)$ より, 連続写像 $g:Y_2\to Y_1$ で $g\circ p_2=p_1$ を満たすものがただ 1 つ存在する．このとき $(g\circ f)\circ p_1=g\circ(f\circ p_1)=g\circ p_2=p_1=id_{Y_1}\circ p_1$ であり, p_1 はプロクルーシブだから, $h\circ p_1=p_1$ を満たす写像 $h:Y_1\to Y_1$ はただ 1 つだけであるため $g\circ f=id_{Y_1}$ が成り立つ. 同様に $(f\circ g)\circ p_2=f\circ(g\circ p_2)=f\circ p_1=p_2=id_{Y_2}\circ p_2$ より $f\circ g=id_{Y_2}$ が成り立つため f は同相写像である.□

命題 21.9　(1) X, Y を k-空間とする．連続写像 $i : X \to Y$ がインクルーシブならば i は単射である．

(2) Y を k-空間, X を Y の部分空間, $j : X \to Y$ を包含写像とするとき, $k(j) : k(X) \to k(Y) = Y$ はインクルーシブである．

(3) X, Y を k-空間, $i : X \to Y$ を連続写像とし, $i' : X \to i(X)$ を $i'(x) = i(x)$ $(x \in X)$ で与えられる全射とする．i がインクルーシブであるためには $k(i') : X = k(X) \to k(i(X))$ が同相写像であることが必要十分である．

証明　(1) $x_1, x_2 \in X$, $i(x_1) = i(x_2) = y \in Y$ とし, $f : \{y\} \to Y$ を包含写像とする．$f_1, f_2 : \{y\} \to X$ を $f_1(y) = x_1$, $f_2(y) = x_2$ で定めれば $i \circ f_1 = i \circ f_2 = f$ となるため, $i \circ g = f$ を満たす $g : \{y\} \to X$ がただ 1 つしか存在しないことから $f_1 = f_2$ である．従って $x_1 = x_2$ となるため i は単射である．

(2) X, Y はともに弱 Hausdorff 空間であり, j は連続であるため, とくに j を X の任意のコンパクト部分集合に制限したものは連続である．よって定理 21.3 の (4) から, $k(j) : k(X) \to k(Y) = Y$ は連続である．Z を k-空間として, 連続写像 $f : Z \to Y$ は $f(Z) \subset k(j)(k(X)) = X$ を満たすとする．$\tilde{f} : Z \to X$ を $\tilde{f}(z) = f(z)$ で定めれば f の連続性から $\tilde{f}$ も連続で, $f = j \circ \tilde{f}$ が成り立つ．そこで $f' : Z \to k(X)$ を $f' = k(\tilde{f}) : Z = k(Z) \to k(X)$ で定めれば, $f = k(f) = k(j \circ \tilde{f}) = k(j) \circ k(\tilde{f}) = k(j) \circ f'$ であり, $\tilde{f}$ の連続性と定理 21.3 の (4) から, f' は連続である．また, $k(j)$ は単射だから f' は一意的に定まる．故に $k(j) : k(X) \to k(Y) = Y$ はインクルーシブである．

(3) $i : X \to Y$ がインクルーシブであるとする．$j : i(X) \to Y$ を包含写像とすれば, (2) より $k(j) : k(i(X)) \to k(Y) = Y$ はインクルーシブであり, $i(X) = k(j)(i(X))$ となる．$i = j \circ i'$ より $i = k(i) = k(j) \circ k(i')$ だから, 命題 21.8 の (1) よって i' は同相写像である．逆に i' が同相写像であるとする．(2) より $k(j) : k(i(X)) \to k(Y) = Y$ はインクルーシブだから, 合成写像 $i = k(i) = k(j) \circ k(i') : X \to Y$ もインクルーシブである．□

命題 21.10　X, Y を k-空間とする．$p : X \to Y$ がプロクルーシブであるためには, $p : X \to Y$ が商写像であることが必要十分である．

証明　$p : X \to Y$ を商写像とする．k-空間 Z に対し, 連続写像 $f : X \to Z$ が「$p(x) = p(x')$ ならば $f(x) = f(x')$」を満たすとする．そこで $f' : Y \to Z$ を次のように定める．p は全射だから, 各 $y \in Y$ に対して $p(x) = y$ となる $x \in X$ をとり, $f'(y) = f(x)$ とする．このとき, 仮定から $p(x) = p(x') = y$ ならば $f(x) = f(x')$ となるため, $f(x)$ は $p(x) = y$ を満たす x の選び方に依存しない．f' の定義から明らかに $f' \circ p = f$ である．F を Z の任意の閉集合とすると, $p^{-1}((f')^{-1}(F)) = f^{-1}(F)$ で, f の連続性により $p^{-1}((f')^{-1}(F))$ は X の閉集合である．さらに p は商写像だから $(f')^{-1}(F)$ は Y の閉集合になるため f' は連続である．また, p は全射だから $g \circ p = f$ を満たす写像 $g : Y \to Z$ は f' に一致する．従って p はプロクルーシブである．

$p : X \to Y$ がプロクルーシブであるとする．$p(X) = Z$ とおいて $q : X \to Z$ を $q(x) = p(x)$ で定義する．q は全射だから, Z には q による X の商位相を与える．p の連続性から, この Z の位相は Y の部分空間としての位相よりも強いため, Z は弱 Hausdorff 空間である．従って命題 20.5 により, Z は k-空間であり, 上で示したことから q はプロクルーシブである．明らかに $x, y \in X$ に対し, $p(x) = p(y)$ と $q(x) = q(y)$ は同値であり, $i : Z \to Y$ を包含写像とすれば, $p = i \circ p$ が成り立つため, 命題 21.8 の (2) によって i は同相写像である．すなわち包含写像 i が全射であるから $Z = Y$ で i は Y の恒等写像になる．従って p は全射で, $Z = Y$ の位相は Y の位相と一致するため, $p : X \to Y$ は商写像である．□

§22.　積空間

記号 22.1　位相空間 X, Y に対し, $X \times_C Y$ によって, 通常の X と Y の直積空間を表す．

定義 22.2　k-空間 X, Y に対して $X \times Y = k(X \times_C Y)$ とおくと, 上の補題により $X \times Y$ も k-空間であり, 射影 $p_1 : X \times_C Y \to X$, $p_2 : X \times_C Y \to Y$ は $pr_1 = k(p_1) : X \times Y \to k(X) = X$, $pr_2 = k(p_2) : X \times Y \to k(Y)$ を与える．

写像 $f:X\to X'$, $g:Y\to Y'$ に対し, $f\times g=k(f\times_C g):X\times Y=k(X\times_C Y)\to k(X'\times_C Y')=X'\times Y'$ とおく.

定理 22.3　k-空間 X, Y に対して $X\times Y$ は k-空間の圏 $\mathcal{K}$ における X と Y の直積である.

証明　k-空間 Z に対して写像 $\delta_Z:\mathcal{K}(Z,X\times Y)\to\mathcal{K}(Z,X)\times\mathcal{K}(Z,Y)$, $\bar{\delta}_Z:\mathcal{W}(i(Z),X\times_C Y)\to\mathcal{K}(i(Z),X)\times\mathcal{K}(i(Z),Y)$ を $\delta_Z(f)=(pr_1\circ f,pr_2\circ f)$, $\bar{\delta}_Z(f)=(p_1\circ f,p_2\circ f)$ で定義すれば下の図は可換である.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{W}(i(Z),X\times_C Y) \arrow[r, "\bar{\delta}_Z"] \arrow[d, "\varphi_{Z,X\times_C Y}"] & \mathcal{W}(i(Z),X)\times\mathcal{W}(i(Z),Y) \arrow[d, "\varphi_{Z,X}\times\varphi_{Z,Y}"] \\
\mathcal{K}(Z,X\times Y) \arrow[r, "\delta_Z"] & \mathcal{K}(Z,X)\times\mathcal{K}(Z,Y)
\end{tikzcd}$$

$X\times_C Y$ は弱 Hausdorff 空間の圏における X と Y の直積だから $\bar{\delta}_Z$ は全単射である. 補題 21.5 により $\varphi_{Z,X\times_C Y}$, $\varphi_{Z,X}\times\varphi_{Z,Y}$ は全単射であるため, 上の図の可換性により δ_Z も全単射である. 故に $X\times Y$ は $\mathcal{K}$ における X と Y の直積である. □

注意 22.4　定理 22.3 により, 通常の直積 $\times_C$ と同様に k-空間の圏 $\mathcal{K}$ において自然な同相写像 $X\times Y\to Y\times X$, $X\times(Y\times Z)\to(X\times Y)\times Z$ がある. 従って $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ が定義される.

また, k-空間 X, Y, Z と連続写像 $f:X\times_C Y\to Z$ が与えられたとき, 連続写像 $f':X\times Y\to Z$ が $f'=k(f):X\times Y=k(X\times_C Y)\to k(Z)=Z$ により定義される.

定理 22.5　X が局所コンパクトな弱 Hausdorff 空間で, Y が k-空間ならば $X\times_C Y$ は k-空間である. 従って $X\times Y=X\times_C Y$ である.

証明　まず命題 20.3 により X は k-空間である. $X\times_C Y$ の部分集合 F は条件「$X\times_C Y$ の任意のコンパクト集合 C に対し, $F\cap C$ が C における閉集合である.」を満たすとする. $(x_0,y_0)\in X\times_C Y-F$ を任意にとれば X の局所コンパクト性から x_0 の近傍 N でコンパクトなものがある. $N\times_C\{y_0\}$ は $X\times_C Y$ のコンパクト集合だから $F\cap(N\times_C\{y_0\})$ は $N\times_C\{y_0\}$ の閉集合である. $N\times_C\{y_0\}$ はコンパクト Hausdorff 空間で, $(x_0,y_0)\notin F\cap(N\times_C\{y_0\})$ だから $N\times_C\{y_0\}$ における (x_0,y_0) の開近傍 $U\times_C\{y_0\}$ で $F\cap(\overline{U}\times_C\{y_0\})=\emptyset$ を満たすものがある.

$p_2:X\times_C Y\to Y$ を Y への射影として $F_2=p_2(F\cap(\overline{U}\times_C Y))$ とおく. F_2 が Y の閉集合であることを示すために, Y のコンパクト集合 C を任意にとる. 命題 16.5 により, コンパクト集合 N は閉集合だから $\overline{U}$ は N に含まれるコンパクト集合である. 故に $\overline{U}\times_C C$ はコンパクトだから $F\cap(\overline{U}\times_C C)$ は $\overline{U}\times_C C$ の閉集合になる. 従って $F\cap(\overline{U}\times_C C)$ はコンパクトである. $F_2\cap C=p_2(F\cap(\overline{U}\times_C C))$ より $F_2\cap C$ はコンパクトであるから, Y が k-空間でであることと命題 16.5 から F_2 は Y の閉集合である.

$\overline{U}\times_C\{y_0\}$ と F は交わらないため y_0 は F_2 には含まれない. よって $U\times_C(Y-F_2)$ は (x_0,y_0) の近傍であり, $(x,y)\in F\cap(U\times_C Y)$ ならば $y=p_2(x,y)\in p_2(F\cap(U\times_C Y))\subset F_2$ であるため $U\times_C(Y-F_2)$ は F とは交わらない. 故に F は $X\times_C Y$ の閉集合になる. よって $X\times_C Y$ はコンパクト生成位相をもち, 命題 18.5 の (3) によって $X\times_C Y$ は k-空間である. □

命題 22.6　位相空間 X が弱 Hausdorff 空間であるためには $X\times_C X$ の対角集合 $\Delta=\{(x,x)\in X\times_C X|\, x\in X\}$ が $k(X\times_C X)$ の閉集合であることが必要十分である.

証明　X を弱 Hausdorff 空間とし, C を $X\times_C X$ の任意のコンパクト集合とする. $p_i:X\times_C X\to X$ $(i=1,2)$ を $X\times_C X$ の第 i 成分への射影として $K=p_1(C)\cup p_2(C)$ とおけば, K は X のコンパクト集合であり, X は弱 Hausdorff 空間だから K は Hausdorff 空間である. よって $\Delta\cap(K\times_C K)$ は $K\times_C K$ の閉集合であり, $K\times_C K$ は C を含むため, $\Delta\cap C=(\Delta\cap(K\times_C K))\cap C$ は C の閉集合である. 従って Δ は $k(X\times_C X)$ の閉集合である.

$\Delta=\{(x,x)\in X\times_C X|\, x\in X\}$ が $k(X\times_C X)$ の閉集合であるとして, K を X の任意のコンパクト集合とする.

$K \times_C K$ は $X \times_C X$ のコンパクト集合だから, 仮定により $K \times_C K$ の対角集合 $\Delta \cap (K \times_C K)$ は $K \times_C K$ の閉集合である. 故に K は Hausdorff 空間であるため, X は弱 Hausdorff 空間である. □

補題 22.7 $f : X \to X'$ を商写像とすれば, 局所コンパクト Hausdorff 空間 Y に対して $f \times id_Y : X \times_C Y \to X' \times_C Y$ も商写像である.

証明 W を $(f \times id_Y)^{-1}(W)$ が $X \times_C Y$ の開集合になるような $X' \times Y$ の部分集合とする. 任意の $(x_0', y_0) \in W$ に対し $f(x_0) = x_0'$ を満たす $x_0 \in X$ をとる. (x_0, y_0) は局所コンパクト Hausdorff 空間 $\{x_0\} \times Y$ の点で, $(f \times id_Y)^{-1}(W) \cap (\{x_0\} \times Y)$ は $\{x_0\} \times Y$ における (x_0, y_0) の近傍だから $\{x_0\} \times Y$ における (x_0, y_0) のコンパクトな近傍 $\{x_0\} \times N$ で $\{x_0\} \times N \subset (f \times id_Y)^{-1}(W)$ となるものがある. V を N の内点全体の集合とすれば, V は y_0 の開近傍であり, $\overline{V} \subset N$ であることに注意する.

$U = \{x \in X |\, \{f(x)\} \times \overline{V} \subset W\} = \{x \in X |\, \{x\} \times \overline{V} \subset (f \times id_Y)^{-1}(W)\}$ とおけば $x_0 \in U$ である. 任意の $x_1 \in U$ と $y \in \overline{V}$ に対し, (x_1, y) の近傍 $U_y \times V_y$ で $(f \times id_Y)^{-1}(W)$ に含まれるものがある. $\{x_1\} \times \overline{V} \subset \bigcup_{y \in \overline{V}} (U_y \times V_y)$ であり, $\overline{V}$ のコンパクト性から $\{x_1\} \times \overline{V} \subset \bigcup_{i=1}^{n} (U_{y_i} \times V_{y_i})$ を満たす $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \overline{V}$ がある. $N = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ とおくと N は x_1 の近傍で $N \times \overline{V} \subset (f \times id_Y)^{-1}(W)$ だから $N \subset U$ である. 故に U は X の開集合である. さらに $f^{-1}(f(U)) = U$ が成り立つ. 実際 $f^{-1}(f(U)) \supset U$ は明らかで, $x \in f^{-1}(f(U))$ ならば $f(x) = f(x')$ を満たす $x' \in U$ があるため $\{f(x)\} \times \overline{V} = \{f(x')\} \times \overline{V} \subset W$ だから $x \in U$ である. f は商写像だから $f(U)$ は X' の開集合で, $x_0 \in U$ より $(x_0', y_0) = (f(x_0), y_0) \in f(U) \times V \subset W$ となる. $f(U) \times V$ は W に含まれる (x_0', y_0) の近傍だから W は $X' \times Y$ の開集合である. 従って $f \times id_Y : X \times Y \to X' \times Y$ が商写像であることが示された. □

定理 22.8 $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ を k-空間の間の商写像とすれば $f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$ も商写像である.

証明 $f \times g = (f \times id_{Y'}) \circ (id_X \times g)$ で商写像の合成は商写像だから, $Y = Y'$, $g = id_Y$ の場合に主張を示せばよい. F を $(f \times id_Y)^{-1}(F)$ が $X \times Y$ の閉集合になるような $X' \times Y$ の部分集合とする. C を $X' \times_C Y$ のコンパクト集合とし, $p_1' : X' \times_C Y \to X'$, $p_2 : X' \times_C Y \to Y$ を射影とすれば $p_1(C)$, $p_2(C)$ はコンパクトで, $p_1(C) \times_C p_2(C)$ もコンパクトである. そこで $F \cap (p_1(C) \times_C p_2(C))$ が $p_1(C) \times_C p_2(C)$ の閉集合であることが示されれば, $p_1(C) \times_C p_2(C)$ は C を含むため $F \cap C = (F \cap (p_1(C) \times_C p_2(C))) \cap C$ は C の閉集合になることがわかり, $X' \times Y = k(X' \times_C Y)$ の位相の定義から F は $X' \times Y$ の閉集合であることが示される.

$p_1(C)$, $p_2(C)$ はそれぞれ弱 Hausdorff 空間 X', Y のコンパクト集合だから命題 16.5 により閉集合である. よって $f^{-1}(p_1(C))$ は X の閉集合であるため, 命題 20.9 より $f^{-1}(p_1(C))$ は k-空間である. さらに $p_2(C)$ はコンパクトだから定理 22.5 により, $f^{-1}(p_1(C)) \times_C p_2(C)$ は k-空間である. 一方 $f^{-1}(p_1(C)) \times_C p_2(C)$ は $X \times_C Y$ の閉集合だから $f^{-1}(p_1(C)) \times p_2(C) = f^{-1}(p_1(C)) \times_C p_2(C)$ は $X \times Y$ の閉集合である. 従って $f^{-1}(p_1(C)) \times p_2(C)$ を $X \times Y$ の部分空間とみなしたものを S とおけば命題 20.9 により S は k-空間である. 定理 21.3 の (2), (3) により $\varepsilon_{X \times_C Y} : X \times Y \to X \times_C Y$ を S に制限して得られる写像 $\varepsilon_S : S \to f^{-1}(p_1(C)) \times_C p_2(C)$ は S のコンパクト集合をその像の上に同相に写し, S のコンパクト集合全体の集合と $f^{-1}(p_1(C)) \times_C p_2(C)$ のコンパクト集合全体の集合を 1 対 1 に対応させる. S, $f^{-1}(p_1(C)) \times_C p_2(C)$ はともに k-空間だから, 定理 21.3 の (4) により ε_S の逆写像も連続になるため, S は $f^{-1}(p_1(C)) \times p_2(C) = f^{-1}(p_1(C)) \times_C p_2(C)$ と同じ位相をもつ.

$f_1 : f^{-1}(p_1(C)) \to p_1(C)$ を $f_1(x) = f(x)$ で定めれば f_1 は全射であり, f が商写像で $p_1(C)$ が閉集合であることから f_1 も商写像である. $p_2(C)$ は Y のコンパクトな部分空間だから Hausdorff 空間である. よって補題 22.7 から $f_1 \times id_{p_2(C)} : f^{-1}(p_1(C)) \times p_2(C) \to p_1(C) \times p_2(C)$ は商写像である. $(f \times id_Y)^{-1}(F)$ は $X \times Y$ の閉集合だから, $(f_1 \times id_{p_2(C)})^{-1}(F \cap (p_1(C) \times p_2(C))) = (f \times id_Y)^{-1}(F) \cap S$ は $X \times Y$ の閉集合である. 故に $F \cap (p_1(C) \times p_2(C))$ は $p_1(C) \times p_2(C)$ の閉集合である. □

補題 22.9 X, Y が弱 Hausdorff 空間ならば $k(\varepsilon_X \times_C \varepsilon_Y) : k(X) \times k(Y) = k(k(X) \times_C k(Y)) \to k(X \times_C Y)$ は同

相写像である.

証明 $\varepsilon_X \times_C \varepsilon_Y : k(X) \times_C k(Y) \to X \times_C Y$ は連続な全単射であり, この逆写像を $X \times_C Y$ の任意のコンパクト集合に制限したものが連続であることが示されれば, 定理 21.3 の (4) により $k(\varepsilon_X \times_C \varepsilon_Y)$ の逆写像も連続であることがわかる. C を $X \times_C Y$ の任意のコンパクト集合として, $p_1 : X \times_C Y \to X$, $p_2 : X \times_C Y \to Y$ を射影とする. $p_1(C)$, $p_2(C)$ はそれぞれ X, Y のコンパクト集合だから $p_1(C) \times_C p_2(C)$ は $X \times_C Y$ のコンパクト集合で C を含む. また, 定理 21.3 の (1), (2) により $\varepsilon_X^{-1}(p_1(C))$, $\varepsilon_X^{-1}(p_1(C))$ はそれぞれ $k(X)$, $k(Y)$ においてコンパクトであり, ε_X, ε_Y は $\varepsilon_X^{-1}(p_1(C))$, $\varepsilon_X^{-1}(p_1(C))$ を $p_1(C)$, $p_2(C)$ の上に同相に写す. 従って $\varepsilon_X \times_C \varepsilon_Y$ は $\varepsilon_X^{-1}(p_1(C)) \times_C \varepsilon_X^{-1}(p_1(C))$ を $p_1(C) \times_C p_2(C)$ の上に同相に写すため, $(\varepsilon_X \times_C \varepsilon_Y)^{-1}$ は C を含む部分空間 $p_1(C) \times_C p_2(C)$ をその像の上に同相に写す. よって $(\varepsilon_X \times_C \varepsilon_Y)^{-1}$ を C に制限したものは連続である □

定理 22.10 $i : X \to X'$, $j : Y \to Y'$ が k-空間の間のインクルーシブな写像ならば, $i \times j : X \times Y \to X' \times Y'$ もインクルーシブである.

証明 Z を k-空間, $f : Z \to X' \times Y'$ を連続写像とし, $f(Z) \subset (i \times j)(X \times Y)$ が成り立つとする. $pr'_1 : X' \times Y' \to X'$, $pr'_2 : X' \times Y' \to Y'$ を射影とすれば, $pr'_1 \circ f : Z \to X'$, $pr'_2 \circ f : Z \to Y'$ は $pr'_1 \circ f(Z) \subset pr'_1 \circ (i \times j)(X \times Y) = i(X)$, $pr'_2 \circ f(Z) \subset pr'_2 \circ (i \times j)(X \times Y) = j(Y)$ を満たすため, 連続写像 $f_1 : Z \to X$, $f_2 : Z \to Y$ で $pr'_1 \circ f = i \circ f_1$, $pr'_2 \circ f = j \circ f_2$ を満たすものがある. $pr_1 : X \times Y \to X$, $pr_2 : X \times Y \to Y$ を射影とすれば, 定理 22.3 により, 連続写像 $\tilde{f} : Z \to X \times Y$ で $pr_1 \circ \tilde{f} = f_1$, $pr_2 \circ \tilde{f} = f_2$ を満たすものがある. このとき, $pr'_1 \circ (i \times j) \circ \tilde{f} = i \circ pr_1 \circ \tilde{f} = i \circ f_1 = pr'_1 \circ f$, $pr'_2 \circ (i \times j) \circ \tilde{f} = j \circ pr_2 \circ \tilde{f} = j \circ f_2 = pr'_2 \circ f$ が成り立つため $(i \times j) \circ \tilde{f} = f$ が得られる. 命題 21.9 の (1) により i, j はともに単射だから $i \times j$ も単射である. 従って $(i \times j) \circ g = f$ を満たす写像 $g : Z \to X \times Y$ はただ 1 つしか存在しない. □

§23. 近傍変位レトラクト

定義 23.1 位相空間 X の閉部分空間 A が次の条件 $(*)$ を満たすとき, A を X における近傍変位レトラクト (NDR) といい, 位相空間の対 (X, A) を NDR-対と呼ぶ.

$(*)$ 連続写像 $u : X \to [0,1]$, $h : [0,1] \times X \to X$ で $A = u^{-1}(0)$, 「$(t,x) \in (\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times A)$ ならば $h(t,x) = x$」および $h\left(\{1\} \times u^{-1}[0,1)\right) \subset A$ を満たすものがある.

さらに, 上の h が $h(\{1\} \times X) \subset A$ を満たす場合は A を X の変位レトラクト (DR) といい, (X, A) を DR-対と呼ぶ.

注意 23.2 (1) (X, A) が NDR-対の場合, 上の定義の条件を満たす写像 u, h を考えて $W = u^{-1}[0,1)$ とおき, $r : W \to A$ を $r(x) = h(1,x)$ で定めれば, W は A を含む開集合で, r は U から A へのレトラクションになるため A は X の近傍レトラクトである.

(2) 位相空間 X に対して $(X, \emptyset)$ は NDR-対である. 実際 $u : X \to [0,1]$, $h : [0,1] \times X \to X$ を $u(x) = 1$, $h(t,x) = x$ ($x \in X$, $t \in [0,1]$) で定めればよい. また $u : X \to [0,1]$, $h : [0,1] \times X \to X$ を $u(x) = 0$, $h(t,x) = x$ ($x \in X$, $t \in [0,1]$) で定めることにより, (X, X) は DR-対であることがわかる.

補題 23.3 X を位相空間, I をコンパクトな位相空間とする. $x_0 \in X$ と $\{x_0\} \times I$ を含む $X \times I$ の開集合 U に対し, x_0 の開近傍 V で $V \times I \subset U$ となるものがある.

証明 任意の $y \in I$ に対し, $(x_0, y) \in U$ だから, x_0 の開近傍 V_y と y の開近傍 U_y で, $V_y \times U_y \subset U$ となるものがある. $I = \bigcup_{y \in I} U_y$ だから I のコンパクト性から $y_1, y_2, \ldots, y_n \in I$ で $I = \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$ となるものが存在する. そこで, $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$ とおけば V は x_0 の開近傍で, $V \times I = V \times \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (V \times U_{y_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (V_{y_i} \times U_{y_i}) \subset U$ である.□

定理 23.4　X, Y を k-空間とし, (X, A), (Y, B) を NDR-対とすれば $(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$ も NDR-対である. (X, A), (Y, B) の一方が DR-対ならば $(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$ は DR-対である.

証明　仮定から, 連続写像 $u : X \to [0,1]$, $h : [0,1] \times X \to X$, $v : Y \to [0,1]$, $g : [0,1] \times Y \to Y$ で定義 23.1 の条件 $(*)$ を満たすものがある. $w : X \times Y \to [0,1]$ を $w(x,y) = u(x)v(y)$ で定めると w は連続であり, $w^{-1}(0) = (X \times B) \cup (A \times Y)$ が成り立つ. $f : [0,1] \times X \times Y \to X \times Y$ を

$$f(t,x,y) = \begin{cases} (x,y) & x \in A,\ y \in B \\ \left(h(t,x), g\left(\frac{u(x)}{v(y)}t, y\right)\right) & u(x) \leqq v(y),\ v(y) > 0 \\ \left(h\left(\frac{v(y)}{u(x)}t, x\right), g(t,y)\right) & u(x) \geqq v(y),\ u(x) > 0 \end{cases}$$

により定める. $D_1 = \{(x,y) \in X \times Y | \, u(x) \leqq v(y),\ v(y) > 0\}$, $D_2 = \{(x,y) \in X \times Y | \, u(x) \geqq v(y),\ u(x) > 0\}$ とおくと $D_1 \cup D_2 = (X \times Y) - (A \times B) = \{(x,y) \in X \times Y | \, u(x) + v(y) > 0\}$ だから $D_1 = \{(x,y) \in D_1 \cup D_2 | \, v(y) \geqq u(x)\}$, $D_2 = \{(x,y) \in D_1 \cup D_2 | \, u(x) \geqq v(y)\}$ である. よって, D_1, D_2 は $D_1 \cup D_2$ の閉集合である. $[0,1] \times (D_1 \cap D_2)$ において上の f の 2 つの定義は一致するため, f は $[0,1] \times_C X \times_C Y$ の開集合 $[0,1] \times_C ((X \times_C Y) - (A \times_C B)$ において連続である. 任意の $(t,x,y) \in [0,1] \times A \times B$ に対し, U, V をそれぞれ x, y の任意の開近傍とする. $x \in A$ より $h([0,1] \times \{x\}) = \{x\} \subset U$ となるため $[0,1] \times \{x\} \subset h^{-1}(U)$ である. $[0,1]$ はコンパクトで, $h^{-1}(U)$ は $[0,1] \times X$ の開集合だから補題 23.3 により x の開近傍 W で $[0,1] \times W \subset h^{-1}(U)$ を満たすものがある. 同様に, y の開近傍 Z で $[0,1] \times Z \subset g^{-1}(V)$ を満たすものがある. 従って $f([0,1] \times W \times Z) \subset U \times V$ となり, f は (t,x,y) において連続である. 以上から $f : [0,1] \times_C X \times_C Y \to X \times_C Y$ は連続で, $k([0,1] \times_C X \times_C Y) = [0,1] \times X \times Y$, $k(X \times_C Y) = X \times Y$ だから $f : [0,1] \times X \times Y \to X \times Y$ は連続である.

任意の $(x,y) \in X \times Y$ に対して $h(0,x) = x$, $g(0,y) = y$ だから $f(0,x,y) = (x,y)$ である. $(x,y) \in (X \times B) \cup (A \times Y)$ とする. $x \in A$ の場合, $y \in B$ ならば直ちに $f(t,x,y) = (x,y)$ であり, $y \notin B$ ならば $u(x) = 0$, $v(y) > 0$ より $f(t,x,y) = (h(t,x), g(0,y)) = (x,y)$ である. 同様にして $y \in B$ の場合も $f(t,x,y) = (x,y)$ が成り立つ.

$(x,y) \in w^{-1}(0)$ の場合は $w^{-1}(0) = (X \times B) \cup (A \times Y)$ だから, 上でみたように $f(1,x,y) = (x,y) \in (X \times B) \cup (A \times Y)$ である. $(x,y) \in w^{-1}(0,1)$ ならば $u(x), v(y) > 0$ で $x \in u^{-1}(0,1)$ または $y \in v^{-1}(0,1)$ が成り立つ. $x \in u^{-1}(0,1)$ の場合, $u(x) \leqq v(y)$ ならば $f(1,x,y) = \left(h(1,x), g\left(\frac{u(x)}{v(x)}, y\right)\right)$ で, $h(1,x) \in A$ だから $f(1,x,y) \in (X \times B) \cup (A \times Y)$ である. $u(x) \geqq v(y)$ ならば $v(y) \leqq u(x) < 1$ より $y \in v^{-1}(0,1)$ となるから, $g(1,y) \in B$ である. よってこのときも $f(1,x,y) \in (X \times B) \cup (A \times Y)$ である. $y \in v^{-1}(0,1)$ の場合も同様にして $f(1,x,y) \in (X \times B) \cup (A \times Y)$ が示される. 以上から $w : X \times Y \to [0,1]$, $f : [0,1] \times X \times Y \to X \times Y$ により $(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$ は NDR-対である.

(X, A) DR-対で, $u : X \to [0,1]$, $h : [0,1] \times X \to X$ が定義 23.1 の条件 $(*)$ と, $h(\{1\} \times X) \subset A$ を満たすとする. このとき, u を $\frac{1}{2}u$ で置き換えても定義 23.1 の条件 $(*)$ が満たされ, 上記の w, f の定義において u の代わりに $\frac{1}{2}u$ を用いたものをそれぞれ w', f' とすれば, すべての $(x,y) \in X \times Y$ に対して $w'(x,y) < 1$ であり, $f'(\{1\} \times X \times Y) \subset (X \times B) \cup (A \times Y)$ が成り立つ. 実際 $(x,y) \in A \times B$ ならば $f'(1,x,y) = (x,y) \in A \times B$, $(x,y) \in D_1$ ならば $h(1,x) \in A$ より $f'(1,x,y) \in A \times X$, $(x,y) \in D_2$ ならば $v(y) \leqq u(x) < 1$ より $y \in v^{-1}(0,1)$ だから $g(1,y) \in B$ となるため $f'(1,x,y) = (x,y) \in X \times B$ である. 故に $(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$ は DR-対である. □

Σ_j を j 次対称群とし, k-空間 X の j 個の直積 $X^j = k(\overbrace{X \times_C X \times_C \cdots \times_C X}^{j\text{ 個}})$ に $\sigma \in \Sigma_j$ を $\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_j) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(j)})$ によって作用させる.

定理 23.5　(X, A) を NDR-対とすれば, 正の整数 j に対し, 連続写像 $u_j : X^j \to [0,1]$, $h_j : [0,1] \times X^j \to X^j$ で, $\left(X^j, \bigcup_{i=1}^{j} (X^{i-1} \times A \times X^{j-i})\right)$ に対して定義 23.1 の条件 $(*)$ を満たし, 任意の $\sigma \in \Sigma_j$ と $t \in [0,1]$, $x \in X^j$ に対して $u_j(\sigma x) = u_j(x)$, $h_j(t, \sigma x) = \sigma h_j(t,x)$ を満たすものがある.

証明 連続写像 $u : X \to [0,1]$, $h : [0,1] \times X \to X$ で定義 23.1 の条件 $(*)$ を満たすものがある.

$$s_i(x_1, x_2, \ldots, x_j) = \begin{cases} \min\left\{\frac{u(x_1)}{u(x_i)}, \frac{u(x_2)}{u(x_i)}, \ldots, \frac{u(x_j)}{u(x_i)},\right\} & x_i \notin A \\ 1 & x_i \in A \end{cases}$$

によって $s_i : X^j \to [0,1]$ $(i = 1, 2, \ldots, j)$ を定め, u_j, h_j を $u_j(x_1, x_2, \ldots, x_j) = \min\{u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_j)\}$, $h_j(t, x_1, x_2, \ldots, x_j) = (h(ts_1(x_1, x_2, \ldots, x_j), x_1), h(ts_2(x_1, x_2, \ldots, x_j), x_2), \ldots, h(ts_j(x_1, x_2, \ldots, x_j), x_j)$ で定義する. h_j は $[0,1] \times_C X^j$ の開集合 $X^{i-1} \times (X - A) \times X^{j-i}$ において連続であることは明らかである. 任意の $(t, p_1, p_2, \ldots, p_j) \in [0,1] \times X^{i-1} \times A \times X^{j-i}$ と p_i の任意の近傍 U をとる. $p_i \in A$ より $h([0,1] \times \{p_i\}) = \{p_i\} \subset U$ となるため $[0,1] \times \{p_i\} \subset h^{-1}(U)$ である. $[0,1]$ はコンパクトで $h^{-1}(U)$ は $[0,1] \times X$ の開集合だから, p_i の開近傍 V で $[0,1] \times V \subset h^{-1}(U)$ を満たすものがある. 従って $(t, x_1, x_2, \ldots, x_j) \in [0,1] \times X^j$ を $h(ts_i(x_1, x_2, \ldots, x_j), x_i) \in X$ に対応させる写像は $[0,1] \times X^{i-1} \times V \times X^{j-i}$ を U の中に写すため, $(t, p_1, p_2, \ldots, p_j)$ において連続である. 故に h_j は $\bigcup_{i=1}^{j}(X^{i-1} \times A \times X^{j-i})$ の各点においても連続だから $h_j : [0,1] \times_C X^j \to X^j$ は連続写像である. この写像にレトラクション関手を適用すれば $h_j : [0,1] \times X^j \to X^j$ の連続性が得られる.

u_j が連続であることと, $u_j^{-1}(0) = \bigcup_{i=1}^{j}(X^{i-1} \times A \times X^{j-i})$ および $h_j(0, x_1, x_2, \ldots, x_j) = (x_1, x_2, \ldots, x_j)$ が任意の $(x_1, x_2, \ldots, x_j) \in X^j$ に対して成り立つことは明らかである. $(t, x_1, x_2, \ldots, x_j) \in [0,1] \times \bigcup_{i=1}^{j}(X^{i-1} \times A \times X^{j-i})$ ならば $x_i \in A$ となる i があるため $h(ts_i(x_1, x_2, \ldots, x_j), x_i) \in A$ だから $h_j(t, x_1, x_2, \ldots, x_j) \in \bigcup_{i=1}^{j}(X^{i-1} \times A \times X^{j-i})$ である. また, $(x_1, x_2, \ldots, x_j) \in u_j^{-1}[0,1)$ に対し, $(x_1, x_2, \ldots, x_j) \in u_j^{-1}(0)$ ならば $u_j^{-1}(0) = \bigcup_{i=1}^{j}(X^{i-1} \times A \times X^{j-i})$ だから $h_j(1, x_1, x_2, \ldots, x_j) \in \bigcup_{i=1}^{j}(X^{i-1} \times A \times X^{j-i})$ であることは上で示した. $(x_1, x_2, \ldots, x_j) \in u_j^{-1}(0,1)$ ならば $u_j(x_1, x_2, \ldots, x_j) = u(x_i)$ を満たす i を選ぶと $s_i(x_1, x_2, \ldots, x_j) = 1$, $u(x_i) < 1$ である. 故に $h(1, x_i) \in A$ となるため $h_j(1, x_1, x_2, \ldots, x_j) \in X^{i-1} \times A \times X^{j-i}$ である. さらに, u_j, h_j の定義より $u_j(\sigma x) = u_j(x)$, $h_j(t, \sigma x) = \sigma h_j(t, x)$ が成り立つことは明らかである. □

定理 23.6 X を位相空間, A を X の閉集合とする. このとき, 次の条件は同値である.

(1) (X, A) は NDR-対である.

(2) $(\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times A)$ は $[0,1] \times X$ の変位レトラクトである.

(3) $(\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times A)$ は $[0,1] \times X$ のレトラクトである.

(4) (X, A) はホモトピー拡張性質をもつ.

証明 (1)⇒(2); $([0,1], \{0\})$ は DR-対だから補題 23.3 により $([0,1] \times X, (\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times A))$ は DR-対である.

(2)⇒(3); これは明らかである.

(3)⇒(4); $r : [0,1] \times X \to (\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times A)$ をレトラクションとする. 連続写像 $F : (\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times A) \to Y$ に対し, 合成写像 $F \circ r : [0,1] \times X \to Y$ は F の拡張になるため (X, A) はホモトピー拡張性質をもつ.

(4)⇒(3); 恒等写像 $id : (\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times A) \to (\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times A)$ をホモトピー拡張性質によって $[0,1] \times X$ に拡張したものを $r : [0,1] \times X \to (\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times A)$ とすれば, これはレトラクションである.

(4)⇒(1); $r : [0,1] \times X \to (\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times A)$ をレトラクションとして, $p : [0,1] \times X \to X$, $w : [0,1] \times X \to [0,1]$ を射影 $p(t,x) = x$, $w(t,x) = t$ とする. $h : [0,1] \times X \to X$ を $h(t,x) = p(r(t,x))$ で定めれば, 任意の $x \in X$ に対して $h(0,x) = p(r(0,x)) = p(0,x) = x$ であり, 任意の $(t,x) \in [0,1] \times A$ に対して $h(t,x) = p(r(t,x)) = p(t,x) = x$ である. あとは連続関数 $u : X \to [0,1]$ を定義して $u^{-1}(0) = A$ かつ $x \in u^{-1}[0,1)$ ならば $h(1,x) \in A$ となるようにすればよい.

負でない整数 m に対して $v_m : X \to \left[0, \frac{1}{2^m}\right]$ を $v_m(x) = \min\left\{\frac{1}{2^m}, w\left(r\left(\frac{1}{2^m}, x\right)\right)\right\}$ により定める. そこで u を

$u(x) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} v_0(x)v_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^m} - v_0(x)v_m(x)\right)$ で定めると任意の $x \in X$ に対して $v_0(x)v_m(x) \in \left[0, \frac{1}{2^m}\right]$ だから $\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^m} - v_0(x)v_m(x)\right)$ は一様収束するため u は連続である．

$x \in A$ ならば $w\left(r\left(\frac{1}{2^m}, x\right)\right) = w\left(\frac{1}{2^m}, x\right) = \frac{1}{2^m}$ より $v_m(x) = \frac{1}{2^m}$ となるため, $u(x) = 0$ である．また $x \notin A$ ならば $r(0,x) = (0,x) \in \{0\} \times (X - A)$ より $(0,x) \in r^{-1}(\{0\} \times (X - A))$ である．$\{0\} \times (X - A) = ([0,1] \times (X - A)) \cap ((\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times A))$ だから $\{0\} \times (X - A)$ は $(\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times A)$ の開集合であり, r の連続性から $r^{-1}(\{0\} \times (X - A))$ は $(0,x)$ の開近傍である．故に $\left(\frac{1}{2^n}, x\right) \in r^{-1}(\{0\} \times (X - A))$ を満たす負でない整数 n があるため, $w\left(r\left(\frac{1}{2^n}, x\right)\right) = 0$ となって, $v_n(x) = 0$ である．このとき $u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^m} - v_0(x)v_m(x)\right)$ の第 n 項は正で, 他の項は負でないため, $u(x) > 0$ である．以上から $u^{-1}(0) = A$ が得られる．

$x \in u^{-1}[0,1)$ ならば $1 - v_0(x) \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x) = u(x) < 1$ だから $v_0(x) > 0$ である．よって $v_0(x)$ の定義により $w(r(1,x)) > 0$ であり, 一方 $r(1,x) \in (\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times A)$ だから $r(1,x) \in [0,1] \times A$ となる．従って $h(1,x) = p(r(1,x)) \in A$ であることがわかる． □

位相空間 X と X の点 x_0 に対し, $(X, \{x_0\})$ を (X, x_0) で表すことにする．

系 23.7 (X, x_0) を NDR-対とし, Y を位相空間, $y_0 \in Y$ とする．

(1) 連続写像 $f : X \to Y$ に対し, y_0 が $f(x_0)$ と同じ弧状連結成分に属するならば, f とホモトピックな連続写像 $g : X \to Y$ で, $g(x_0) = y_0$ を満たすものが存在する．

(2) 連続写像 $H : [0,1] \times X \to Y$ に対し, y_0 が $H(0, x_0)$ と同じ弧状連結成分に属するならば, H とホモトピックな連続写像 $G : [0,1] \times X \to Y$ で, すべての $s \in [0,1]$ に対して $G(s, x_0) = y_0$ を満たすものが存在する．

証明 (1) 仮定から連続写像 $\omega : [0,1] \to Y$ で, $\omega(0) = f(x_0)$, $\omega(1) = y_0$ を満たすものが存在する．写像 $\varphi : (\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times \{x_0\}) \to Y$ を

$$\varphi(t,x) = \begin{cases} f(x) & t = 0 \\ \omega(t) & x = x_0 \end{cases}$$

で定義する．定理 23.6 から, レトラクション $r : [0,1] \times X \to (\{0\} \times X) \cup ([0,1] \times \{x_0\})$ が存在するため, これを用いて $H : [0,1] \times X \to X$ を $H = \varphi \circ r$ で定義すれば, 任意の $x \in X$ に対して $H(0,x) = \varphi(r(0,x)) = \varphi(0,x) = f(x)$ が成り立つ．そこで, $g : X \to Y$ を $g(x) = H(1,x)$ によって定めれば, g は f とホモトピックであり, $g(x_0) = H(1, x_0) = \varphi(r(1, x_0)) = \varphi(1, x_0) = \omega(1) = y_0$ が成り立つ．

(2) 仮定から連続写像 $\omega : [0,1] \to Y$ で $\omega(0) = H(0, x_0)$, $\omega(1) = y_0$ を満たすものが存在する．写像 $\rho : [0,1] \times [0,1] \to Y$ を

$$\rho(s,t) = \begin{cases} H\left(\frac{s-4t}{1-2t}, x_0\right) & t \leqq \frac{s}{4} \\ \omega\left(\frac{4t-s}{4-2s}\right) & \frac{s}{4} \leqq t \leqq 1 - \frac{s}{4} \\ y_0 & 1 - \frac{s}{4} \leqq t \end{cases}$$

によって定めると ρ は連続で, $s, t \in [0,1]$ ならば $\rho(s,0) = H(s, x_0)$, $\rho(s,1) = y_0$, $\rho(0,t) = \omega(t)$ が成り立つ．次に $\psi : ([0,1] \times \{0\} \times X) \cup ([0,1] \times [0,1] \times \{x_0\}) \to Y$ を

$$\psi(s,t,x) = \begin{cases} H(s,x) & t = 0 \\ \rho(s,t) & x = x_0 \end{cases}$$

で定め, (1) のレトラクション r を用いて, 写像 $\Phi : [0,1] \times [0,1] \times X \to Y$ を $\Phi(s,t,x) = \psi(s, r(t,x))$ で定める．このとき, ψ の定義から, $\Phi(s,0,x) = \psi(s, r(0,x)) = \psi(s,0,x) = H(s,x)$ が任意の $x \in X$, $s \in [0,1]$ に対して成り立つ．そこで $G : [0,1] \times X \to Y$ を $G(s,x) = \Phi(s,1,x)$ によって定めると, G は H とホモトピックであり, 任意の $s \in [0,1]$ に対して $G(s, x_0) = \Phi(s,1,x_0) = \psi(s, r(1,x_0)) = \psi(s,1,x_0) = \rho(s,1) = y_0$ が成り立つ． □

補題 23.8 (X,B), (B,A) を NDR-対とする．連続写像 $u:X\to[0,1]$, $h:[0,1]\times X\to X$ で, (X,A) に関して定義 23.1 の条件 $(*)$ を満たし, $h([0,1]\times B)=B$ を満たすものがある．

証明 仮定から連続写像 $w:X\to[0,1]$, $k:[0,1]\times X\to X$, $v:B\to[0,1]$, $j:[0,1]\times B\to B$ で, (w,k), (v,j) はそれぞれ (X,B), (B,A) に関して定義 23.1 の条件 $(*)$ を満たすものがある． $f:[0,1]\times B\to[0,1]$ を $f(t,b)=(1-t)w(b)+tv(b)$ で定める．定理 23.6 より, 包含写像 $B\to X$ はホモトピー拡張性質をもつため, 連続写像 $\tilde{j}:[0,1]\times X\to X$, $\tilde{f}:[0,1]\times X\to[0,1]$ で, $(t,b)\in[0,1]\times B$, $x\in X$ に対して $\tilde{j}(t,b)=j(t,b)$, $\tilde{j}(0,x)=x$, $\tilde{f}(t,b)=f(t,b)$, $\tilde{f}(0,x)=w(x)$ を満たすものがある．このとき, $x\in X$ に対して $k(1,x)=\tilde{j}(0,k(1,x))$ であることに注意して u, h を $u(x)=\max\{\tilde{f}(1,k(1,x)),w(x)\}$, $h(t,x)=\begin{cases}k(2t,x) & 0\leqq t\leqq\frac{1}{2}\\ \tilde{j}(2t-1,k(1,x)) & \frac{1}{2}\leqq t\leqq 1\end{cases}$ により定めれば, これらは連続である．

$u(x)=0$ ならば上の定義から $w(x)=\tilde{f}(1,k(1,x))=0$ である． このとき $w(x)=0$ より $x\in B$ だから $k(1,x)=x$, 従って $v(x)=f(1,x)=f(1,k(1,x))=\tilde{f}(1,k(1,x))=0$ となるため $x\in A$ である．逆に $x\in A$ ならば $x\in B$ だから $k(1,x)=x$ かつ $w(x)=v(x)=0$, 従って $\tilde{f}(1,k(1,x))=\tilde{f}(1,x)=f(1,x)=v(x)=0$ となるため $u(x)=0$ である． 故に $A=u^{-1}(0)$ が成り立つ． 任意の $x\in X$ に対して $h(0,x)=k(0,x)=x$ である． $x\in A$ ならば $x\in B$ だから $k(1,x)=x$ となるため, $0\leqq t\leqq\frac{1}{2}$ の場合は $h(t,x)=k(2t,x)=x$ であり, $\frac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ の場合も $h(t,x)=\tilde{j}(2t-1,k(1,x))=\tilde{j}(2t-1,x)=j(2t-1,x)=x$ が成り立つ． 任意の $x\in X$ に対して $w(x)\leqq u(x)$ だから $x\in u^{-1}[0,1)$ ならば $x\in w^{-1}[0,1)$ である． よって $k(1,x)\in B$ となるため $v(k(1,x))=f(1,k(1,x))=\tilde{f}(1,k(1,x))\leqq u(x)<1$, すなわち $k(1,x)\in B\cap v^{-1}[0,1)$ である． 従って $h(1,x)=\tilde{j}(1,k(1,x))=j(1,k(1,x))\in A$ が得られる． さらに $h\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\times B\right)=k([0,1]\times B)=B$, $h\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\times B\right)=\tilde{j}([0,1]\times k(\{1\}\times B))=\tilde{j}([0,1]\times B)=j([0,1]\times B)=B$ より $h([0,1]\times B)=B$ が成り立つ． □

補題 23.9 (X,A), (Y,B) を NDR-対とすると, $(X\times Y,(X\times B)\cup(A\times Y))$, $(X\times Y,X\times B)$, $(X\times Y,A\times Y)$, $(X\times B,A\times B)$, $(A\times Y,A\times B)$, $(X\times Y,A\times B)$, $((X\times B)\cup(A\times Y),A\times Y)$, $((X\times B)\cup(A\times Y),X\times B)$, $((X\times B)\cup(A\times Y),A\times B)$ はすべて NDR-対である．

証明 補題 23.3 より $(X\times Y,(X\times B)\cup(A\times Y))$, $(X\times Y,X\times B)$, $(X\times Y,A\times Y)$, $(X\times B,A\times B)$, $(A\times Y,A\times B)$ は NDR-対である．よって $(X\times Y,X\times B)$ と $(X\times B,A\times B)$ が NDR-対であることから補題 23.8 により $(X\times Y,A\times B)$ は NDR-対である．さて $(X\times B,A\times B)$ が NDR-対であるから $u:X\times B\to[0,1]$, $h:[0,1]\times X\times B\to X\times B$ を定義 23.1 の条件 $(*)$ を満たす連続写像とする． $(x,y)\in(X\times B)\cap(A\times Y)=A\times B$ ならば $u(x,y)=0$, $h(t,x,y)=(x,y)$ が成り立つことに注意して $u':(X\times B)\cup(A\times Y)\to[0,1]$, $h':[0,1]\times((X\times B)\cup(A\times Y))\to(X\times B)\cup(A\times Y)$ を $u'(x,y)=\begin{cases}u(x,y) & (x,y)\in X\times B\\ 0 & (x,y)\in A\times Y\end{cases}$, $h'(t,x,y)=\begin{cases}h(t,x,y) & (t,x,y)\in[0,1]\times X\times B\\ (x,y) & (t,x,y)\in[0,1]\times A\times Y\end{cases}$ で定める．このとき $u'(x,y)=0$ であることと $(x,y)\in A\times Y$ は同値だから $u'^{-1}(0)=A\times Y$ である． $(x,y)\in(X\times B)\cup(A\times Y)$ ならば $h'(0,x,y)=(x,y)$, $(t,x,y)\in[0,1]\times A\times Y$ ならば $h'(t,x,y)=(x,y)$ であることは直ちにわかる． $u'^{-1}[0,1)=u^{-1}[0,1)\cup(A\times Y)$ だから $(x,y)\in u'^{-1}[0,1)$ ならば $h'(1,x,y)\in A\times Y$ が成り立つ．故に u', h' により $((X\times B)\cup(A\times Y),A\times Y)$ は NDR-対で, 同様にして $((X\times B)\cup(A\times Y),X\times B)$ も NDR-対である． $((X\times B)\cup(A\times Y),A\times Y)$ と $(A\times Y,A\times B)$ が NDR-対であるから補題 23.8 により $((X\times B)\cup(A\times Y),A\times B)$ も NDR-対である． □

補題 23.10 (X,A), (X,B) を NDR-対として, $A\cap B=\emptyset$ が成り立つとする．このとき X の開集合 U, V で $A\subset U$, $B\subset V$, $U\cap V=\emptyset$ を満たすものがある．

証明 (X,A), (X,B) を NDR-対だから, 連続関数 $u,v:X\to[0,1]$ で $u^{-1}(0)=A$, $v^{-1}(0)=B$ を満たすものがある．そこで $U=\{x\in X|\,u(x)-v(x)<0\}$, $V=\{x\in X|\,u(x)-v(x)>0\}$ とおくと U, V は開集合で $A\subset U$, $B\subset V$,

$U \cap V = \emptyset$ を満たす. $\square$

定義 23.11 位相空間対の間の連続写像 $f : (X, A) \to (Y, B)$ が条件「$f : X \to Y$ は商写像であり, $X - A$ を $Y - B$ の上に同相に写す.」を満たすとき, f を相対同相写像という.

補題 23.12 (X, A) を NDR-対, $f : (X, A) \to (Y, B)$ を相対同相写像とする. $u : X \to [0, 1]$, $h : [0, 1] \times X \to X$ を定義 23.1 の条件 $(*)$ を満たす連続写像とすれば, 連続写像 $v : Y \to [0, 1]$, $j : [0, 1] \times Y \to Y$ で, $v \circ f = u$, $j \circ (id_{[0,1]} \times f) = f \circ h$ を満たすものが一意的に存在して, v, j は (Y, B) に関して定義 23.1 の条件 $(*)$ を満たす. 従って (Y, B) は NDR-対である.

証明 $x, y \in X$ が $x \neq y$, $f(x) = f(y)$ を満たすとき, f を $X - A$ に制限したものは単射だから $x, y \in A$ である. このとき $u(x) = u(y) = 0$ となり, f が商写像であることから, 連続写像 $v : Y \to [0, 1]$ で $v \circ f = u$ を満たすものがただ 1 つ存在する. $y \in B$ ならば, f は全射だから $f(x) = y$ となる $x \in X$ をとると, $f(X - A) \subset Y - B$ だから $x \in A$ であり, $v(y) = v(f(x)) = u(x) = 0$ が得られる. $y \in v^{-1}(0)$ ならば $f(x) = y$ となる $x \in X$ をとると, $u(x) = v(f(x)) = v(y) = 0$ だから $x \in A$ であり, $f(A) \subset B$ より $y = f(x) \in B$ となる. 以上から $v^{-1}(0) = B$.

$(t, x), (s, y) \in [0, 1] \times X$ が $(t, x) \neq (s, y)$, $(id_{[0,1]} \times f)(t, x) = (id_{[0,1]} \times f)(s, y)$ を満たすとき, $t = s$ であり, f を $X - A$ に制限したものは単射だから $x, y \in A$ である. 故に $f \circ h(t, x) = f(x) = f(y) = f \circ h(s, y)$ であり, 定理 22.8 から $id_{[0,1]} \times f$ は商写像だから, 連続写像 $j : [0, 1] \times Y \to Y$ で $j \circ (id_{[0,1]} \times f) = f \circ h$ を満たすものがただ 1 つ存在する. f は全射だから, 任意の $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ があるため, $j(0, y) = j(0, f(x)) = f(h(0, x)) = f(x) = y$ であり, $y \in B$ ならば $f(X - A) \subset Y - B$ より $x \in A$ となるため, 任意の $t \in [0, 1]$ に対して $j(t, y) = j(t, f(x)) = f(h(t, x)) = f(x) = y$ である. また, $v \circ f = u$ と f が全射であることから $v^{-1}[0, 1) = f(f^{-1}(v^{-1}[0, 1))) = f(u^{-1}[0, 1))$ である. よって, $y \in v^{-1}[0, 1)$ ならば $f(x) = y$ を満たす $x \in u^{-1}[0, 1)$ があるため, $h(1, x) \in A$ と $f(A) \subset B$ に注意すれば $j(1, y) = j(1, f(x)) = f(h(1, x)) \in B$ を得る. $\square$

補題 23.13 X, Y を位相空間, (X, A) を NDR-対として, $f : A \to Y$ を連続写像とする. このとき, f によって X と Y を接着した空間 $X \cup_f Y$ を考えると $(X \cup_f Y, Y)$ は NDR-対である.

証明 $u : X \to [0, 1]$, $h : [0, 1] \times X \to X$ を定義 23.1 の条件 $(*)$ を満たす連続写像とし, $Y \coprod X$ を Y と X の位相和として, 連続写像 $\tilde{u} : Y \coprod X \to [0, 1]$, $\tilde{f} : [0, 1] \times (Y \coprod X) \to Y \coprod X$ を

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in X \\ 0 & x \in Y \end{cases}, \qquad \tilde{h}(t, x) = \begin{cases} h(t, x) & (t, x) \in [0, 1] \times X \\ x & (t, x) \in [0, 1] \times Y \end{cases}$$

で定義すると, $\tilde{u}$, $\tilde{h}$ により $(Y \coprod X, Y \coprod A)$ は NDR-対である. $p : Y \coprod X \to X \cup_f Y$ を商写像とすると, $p(Y \coprod A) = Y$ で, $p : (Y \coprod X, Y \coprod A) \to (X \cup_f Y, Y)$ は相対同相写像だから補題 23.12 により $(X \cup_f Y, Y)$ は NDR-対である. $\square$

補題 23.14 A を位相空間 X の閉集合とし, A を含む開集合 W とレトラクション $r : W \to A$ および連続関数 $u : X \to [0, 1]$ で $A = u^{-1}(0)$ を満たすものがあるとする. このとき, $X - A$ と A がともに Hausdorff 空間ならば X も Hausdorff 空間であり, ともに弱 Hausdorff 空間ならば X も弱 Hausdorff 空間である.

証明 $X - A$, A を Hausdorff 空間として, x, y を X の相異なる 2 点とする. $x, y \in X - A$ の場合, $X - A$ は Hausdorff 空間だから, $X - A$ における x, y の開近傍 U, V で交わらないものがある. $X - A$ は開集合だから U, V は X における x, y の開近傍である. $x \in A$, $y \in X - A$ の場合, $U = u^{-1}\left[0, \frac{1}{2}u(y)\right)$, $V = u^{-1}\left(\frac{1}{2}u(y), 1\right]$ とおくと $A = u^{-1}(0)$ より, U, V はそれぞれ x, y の交わらない開近傍である. $x, y \in A$ の場合, A は Hausdorff 空間だから, A における x, y の開近傍 U_1, V_1 で交わらないものがある. $U = r^{-1}(U_1)$, $V = r^{-1}(V_1)$ とおくと U, V は X における x, y の交わらない開近傍である.

$X - A$, A を弱 Hausdorff 空間として, C を X のコンパクト集合, x, y を C の相異なる 2 点とする. $x, y \in X - A$

の場合, $A = u^{-1}(0)$ より $c = \frac{1}{2}\min\{u(x), u(y)\}$ とおくと $u > 0$ である. $O = u^{-1}(c, 1] \cap C$ とおくと O は x, y を含む C の開集合である. $\overline{O} \cap C$ は C の閉集合だからコンパクトで, $O \subset u^{-1}[c, 1]$ だから $\overline{O} \cap C \subset u^{-1}[c, 1] \subset X - A$ となるため, $X - A$ が弱 Hausdorff 空間であることから $\overline{O} \cap C$ は Hausdorff 空間である. よって $\overline{O} \cap C$ の部分空間である O も Hausdorff 空間であるため, O における x, y の開近傍 U, V で交わらないものがある. O は C の開集合だから, U, V は C の開集合でもある. $x \in A$, $y \in X - A$ の場合, $U = C \cap u^{-1}\left[0, \frac{1}{2}u(y)\right)$, $V = C \cap u^{-1}\left(\frac{1}{2}u(y), 1\right]$ とおくと $A = u^{-1}(0)$ より U, V はそれぞれ x, y の交わらない C における開近傍である. $x, y \in A$ の場合, $C - W$ における u の最小値を m をすれば $W \supset A = u^{-1}(0)$ より $m > 0$ であり, m の最小性から $u^{-1}\left[0, \frac{m}{2}\right]$ は W 含まれる. $N = C \cap u^{-1}\left[0, \frac{m}{2}\right)$ とおくと N は C の開集合で, 閉集合 $u^{-1}\left[0, \frac{m}{2}\right]$ に含まれるため $\overline{N} \subset C \cap u^{-1}\left[0, \frac{m}{2}\right] \subset C \cap W$ である. $\overline{N}$ はコンパクト集合 C の閉部分集合だからコンパクトである. $N = C \cap u^{-1}\left[0, \frac{m}{2}\right) \supset C \cap u^{-1}(0) = C \cap A$ だから $A \supset r\left(\overline{N}\right) \supset r(C \cap A) = C \cap A$ である. よって $r\left(\overline{N}\right)$ は x, y を含む A のコンパクト部分集合であるため, A が弱 Hausdorff 空間であることから, $r\left(\overline{N}\right)$ における x, y の開近傍 U_1, V_1 で交わらないものがある. $\tilde{r} : \overline{N} \to r\left(\overline{N}\right)$ を $\tilde{r}(z) = r(z)$ で与えられる写像として $U = N \cap \tilde{r}^{-1}(U_1)$, $V = N \cap \tilde{r}^{-1}(V_1)$ とおけば, $r^{-1}(U_1)$, $r^{-1}(V_1)$ は $\overline{N}$ の開集合だから U, V は N の開集合であり, N は C の閉集合だから U, V は C の閉集合である. さらに $U_1 \cap V_1 = \emptyset$ より $U \cap V = \emptyset$ であり, $x, y \in A \subset N$, $r(x) = x \in U_1$, $r(y) = y \in V_1$ より $x \in U$, $y \in V$ である. □

命題 23.15 X, Y を位相空間, (X, A) を NDR-対として, $f : A \to Y$ を連続写像とする. X, Y がともに Hausdorff 空間 (弱 Hausdorff 空間, k-空間) ならば $Y \cup_f X$ も Hausdorff 空間 (弱 Hausdorff 空間, k-空間) である.

証明 $Y \cup_f X - Y$ は X の開集合 $X - A$ と同相だから X が Hausdorff 空間ならば $Y \cup_f X - Y$ も Hausdorff 空間であり, X が弱 Hausdorff 空間ならば $Y \cup_f X - Y$ も弱 Hausdorff 空間である. 補題 23.13 により $(X \cup_f Y, Y)$ は NDR-対であり, 注意 23.2 の (1) から $Y \cup_f X - Y$, Y は補題 23.14 の条件を満たすため X, Y がともに Hausdorff 空間ならば $Y \cup_f X$ も Hausdorff 空間であり, X, Y がともに弱 Hausdorff 空間ならば $Y \cup_f X$ も弱 Hausdorff 空間である. X, Y がともにコンパクト生成位相をもてば, 位相和 $X \coprod Y$ もコンパクト生成位相ををもつため, 命題 20.5 から $Y \cup_f X$ もコンパクト生成位相ををもつ. よって X, Y がともに k-空間ならば $Y \cup_f X$ も k-空間である. □

§24. 拡張する位相空間列の合併

定義 24.1 位相空間の列 $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ で, 各 X_n は X_{n+1} の閉部分空間になっているものを拡張する位相空間列という. この合併集合 $X = \bigcup_{n \geqq 0} X_n$ には, 閉集合全体の集合が

$$\{A \subset X \mid \text{すべての } n = 0, 1, 2, \dots \text{ に対して } A \cap X_n \text{ は } X_n \text{ の閉集合である.}\}$$

である弱位相と呼ばれる位相を定義する.

上の定義において, 各 X_n は X の閉集合であり, X_n の X の部分空間としての位相は X_n の元の位相と一致する.

補題 24.2 $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ を拡張する位相空間列とし $X = \bigcup_{n \geqq 0} X_n$ に弱位相を与える.

(1) C を X のコンパクト集合とする. 各 X_n が T_1-空間ならば, $C \subset X_N$ となる N がある.
(2) 各 X_n が CG-空間ならば X も CG-空間である.
(3) 各 X_n が弱 Hausdorff 空間ならば X も弱 Hausdorff 空間である.
(4) 各 X_n が k-空間ならば X も k-空間である.

証明 (1) A をどの X_n にも含まれない X の部分集合とすると, 各 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して $x_n \in A - X_n$ がとれる. $T_m = \{x_n \mid n \geqq m\}$ とおくと, 各 n に対し $T_m \cap X_n$ は $n - 1$ 個以下の要素からなる有限集合であり, X_n は T_1-空間だから $T_m \cap X_n$ は X_n の閉集合である. 従って T_m は X の閉集合である. また $T_{m+1} \supset T_m$ だから

$\{T_m|\, m=0,1,2,\dots\}$ は有限交叉性をもつ A の閉部分集合族である．一方, 各 m に対して $T_m \subset X - X_m$ だから, $\bigcap_{m\geqq 0} T_m \subset \bigcap_{m\geqq 0}(X - X_m) = X - \bigcup_{m\geqq 0} X_m = \emptyset$ となるため $\bigcap_{m\geqq 0} T_m = \emptyset$ である．A がコンパクトならば有限交叉性をもつ閉部分集合族の共通部分は空でないため, $\bigcap_{m\geqq 0} T_m = \emptyset$ と矛盾する．よって A はコンパクトではない．

(2) F を X の任意のコンパクト集合 C に対し $F\cap C$ が C の閉集合になるような X の部分集合とする．任意の n と X_n の任意のコンパクト部分集合 K に対し, X_n は X の部分空間としての位相をもつため, K は X のコンパクト部分集合である．従って $(F\cap X_n)\cap K = F\cap K$ は K の閉集合であり, X_n は CG-空間だから $F\cap X_n$ は X_n の閉集合である．故に F は X の閉集合になるため X はコンパクト生成位相をもつ．

(3) 命題 16.5 により, 各 X_n は T_1-空間であるため, (1) によって X の任意のコンパクト集合 C に対して $C\subset X_N$ となる X_N がある．X_N は弱 Hausdorff 空間だから C は Hausdorff 空間である．

(4) (2) と (3) により明らかである． □

定理 24.3 $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ を拡張する位相空間列とし $X=\bigcup_{n\geqq 0} X_n$ に弱位相を与える．すべての n に対して X_n は k-空間であり, (X_{n+1}, X_n) が NDR-対ならば, (X, X_n) も NDR-対である．さらに各 X_n が Hausdorff 空間ならば X も Hausdorff 空間である．

証明 定理 23.6 の (3) から, 各 $m\geqq 0$ に対してレトラクション $r_m : [0,1]\times X_{m+1} \to (\{0\}\times X_{m+1})\cup([0,1]\times X_m)$ がある．$s_m : (\{0\}\times X)\cup([0,1]\times X_{m+1}) \to (\{0\}\times X)\cup([0,1]\times X_m)$ を $s_m(t,x) = \begin{cases} (0,x) & t=0,\ x\in X \\ r_m(t,x) & (t,x)\in[0,1]\times X_{m+1}\end{cases}$ で定めれば s_m はレトラクションであるから $(t,x)\in[0,1]\times X_m$ に対して $k>m$ ならば $s_m\circ s_{m+1}\circ\cdots\circ s_{k-1}(t,x) = (t,x)$ である．そこで $s : [0,1]\times X \to (\{0\}\times X)\cup([0,1]\times X_n)$ を $(t,x)\in[0,1]\times X$ に対して $x\in X_m$ となる $m>n$ を選んで $s(t,x) = s_n\circ s_{n+1}\circ\cdots\circ s_{m-1}(t,x)$ により定めると $(t,x)\in(\{0\}\times X)\cup([0,1]\times X_n)$ ならば $s(t,x)=(t,x)$ である．F を $(\{0\}\times X)\cup([0,1]\times X_n)$ の閉集合とする．s を $(\{0\}\times X)\cup([0,1]\times X_m)$ に制限した写像は連続写像 $s_n\circ s_{n+1}\circ\cdots\circ s_{m-1}$ だから $s^{-1}(F)\cap((\{0\}\times X)\cup([0,1]\times X_m))$ は $(\{0\}\times X)\cup([0,1]\times X_m)$ の閉集合である．C を $[0,1]\times X$ の任意のコンパクト集合とする．$p_2 : [0,1]\times X\to X$ を射影とすれば $p_2(C)$ は X のコンパクト集合だから補題 24.2 の (1) より $p_2(C)\subset X_m$ となる $m>n$ がある．このとき $C\subset[0,1]\times p_2(C)$ であり $s^{-1}(F)\cap([0,1]\times X_m)$ は $[0,1]\times X_m$ の閉集合だから $s^{-1}(F)\cap C$ は C の閉集合である．補題 24.2 の (4) から X は k-空間であるため, 定理 22.5 により $[0,1]\times X$ も k-空間だから $s^{-1}(F)$ は $[0,1]\times X$ の閉集合である．故に s は連続になるため, 定理 23.6 により (X, X_n) は NDR-対である．

各 X_n が Hausdorff 空間の場合, 相異なる $x,y\in X$ に対し $x,y\in X_n$ となる n をとれば x, y の X_n における開近傍 U_1, V_1 で交わらないものがある．(X,X_n) は NDR-対だから注意 23.2 の (1) により X_n を含む開集合 W とレトラクション $r : W\to X_n$ がある．このとき $r^{-1}(U_1)$, $r^{-1}(V_1)$ はそれぞれ x, y の開近傍で, 交わらないため X は Hausdorff 空間である． □

定理 24.4 X を k-空間, $f : X\to Y$ を商写像とする．X が拡張する位相空間列 $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ の合併で, すべての n に対して $f^{-1}(f(X_n)) = X_n$ であり, $f(X_n)$ は k-空間であるとする．このとき Y は $(f(X_n))_{n=0,1,2,\dots}$ に関して弱位相をもち, 各 $f(X_n)$ は Y の閉集合である．従って Y は k-空間である．

証明 $f^{-1}(f(X_n)) = X_n$ で X_n は X の閉集合であり f は商写像だから $f(X_n)$ は Y の閉集合である．F をすべての n に対して $F\cap f(X_n)$ が $f(X_n)$ の閉集合になるような Y の部分集合とする．ここで $f^{-1}(F)\cap X_n = f^{-1}(F)\cap f^{-1}(f(X_n)) = f^{-1}(F\cap f(X_n))$ であり $F\cap f(X_n)$ は X の閉集合だから, f の連続性から $f^{-1}(F)\cap X_n$ は X_n の閉集合である．X は $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ に関して弱位相をもつため $f^{-1}(F)$ は X の閉集合である．f は商写像だから F は Y の閉集合である．故に Y は $(f(X_n))_{n=0,1,2,\dots}$ に関して弱位相をもつ．さらに, 各 $f(X_n)$ は k-空間だから補題 24.2 の (4) から Y は k-空間である． □

§25. フィルター空間

定義 25.1 位相空間 X と拡張する X の閉部分空間の列 $(X_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ が与えられていて, $X = \bigcup_{n\geqq 0} X_n$ であり X は $(X_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ に関して弱位相をもつとき, $(X_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ を X のフィルトレイションといい, X と $(X_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ の対 $(X,(X_n)_{n=0,1,2,\ldots})$ をフィルター空間という. $(X,(X_n)_{n=0,1,2,\ldots})$, $(Y,(Y_n)_{n=0,1,2,\ldots})$ をフィルター空間とするとき, すべての n に対して $f(X_n)\subset Y_n$ を満たす連続写像 $f: X\to Y$ をフィルター写像という.

注意 25.2 (1) $(X,(X_n)_{n=0,1,2,\ldots})$ をフィルター空間とすれば, $(X_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ は定義 24.1 で定義した拡張する位相空間列である. 逆に, 各 X_n が k-空間である拡張する位相空間列 $(X_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ が与えられたとき, その合併を X とすれば $(X,(X_n)_{n=0,1,2,\ldots})$ はフィルター空間である.

(2) X, Y を k-空間とし, A, B をそれぞれ X, Y の閉集合とすると, 命題 20.9 により A, B は k-空間である. $A\times_C B$ は $X\times_C Y$ の閉部分空間だから $X\times Y$ の閉集合であり, 命題 21.4 により $A\times B$ を $X\times Y$ の閉部分空間とみなすことができる.

定理 25.3 X, Y を弱 Hausdorff 空間, $(X,(X_n)_{n=0,1,2,\ldots})$, $(Y,(Y_n)_{n=0,1,2,\ldots})$ をフィルター空間とする. このとき $(X\times Y)_n = \bigcup_{i=0}^{n}(X_i\times Y_{n-i})$ とおけば $(X\times Y,((X\times Y)_n)_{n=0,1,2,\ldots})$ はフィルター空間である.

証明 任意の $(x,y)\in X\times Y$ に対して $x\in X_i$, $y\in Y_j$ となる i, j があるため $(x,y)\in X_i\times Y_j\subset (X\times Y)_{i+j}$ である. よって $X\times Y = \bigcup_{n\geqq 0}(X\times Y)_n$ が成り立つ. また $X_i\subset X_{i+1}$, $Y_j\subset Y_{j+1}$ より $(X\times Y)_n\subset (X\times Y)_{n+1}$ である. F を各 n に対し, $F\cap (X\times Y)_n$ が $(X\times Y)_n$ の閉集合になるような $X\times Y$ の部分集合として, C を $X\times Y$ の任意のコンパクト集合とする. $p_1: X\times Y\to X$, $p_2: X\times Y\to Y$ をそれぞれ第 1 成分, 第 2 成分への射影とすれば, $p_1(C)$, $p_2(C)$ はそれぞれ X, Y のコンパクト集合だから補題 24.2 の (1) により $p_1(C)\subset X_i$, $p_2(C)\subset Y_j$ となる i, j がある. よって $C\subset p_1(C)\times p_2(C)\subset X_i\times Y_j\subset (X\times Y)_{i+j}$ であり, $F\cap (X\times Y)_{i+j}$ は $(X\times Y)_{i+j}$ の閉集合だから $F\cap C$ は C の閉集合である. 従って F は $X\times Y$ の閉集合である. □

定義 25.4 定理 25.3 のフィルター空間 $(X\times Y,((X\times Y)_n)_{n=0,1,2,\ldots})$ を $(X,(X_n)_{n=0,1,2,\ldots})$ と $(Y,(Y_n)_{n=0,1,2,\ldots})$ の積という.

定義 25.5 各 n に対して (X_{n+1},X_n) が NDR-対である位相空間 X のフィルトレイション $(X_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ を NDR によるフィルトレイションという. このとき定理 24.3 により, 各 n に対して (X,X_n) は NDR-対である.

定理 25.6 $(X_n)_{n=0,1,2,\ldots}$, $(Y_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ をそれぞれ k-空間 X, Y の NDR によるフィルトレイションとすれば $((X\times Y)_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ は $X\times Y$ の NDR によるフィルトレイションである.

証明 補題 23.3 により, $i=0,1,\ldots,n$ に対して $(X_i\times Y_{n-i},(X_i\times Y_{n-i-1})\cup(X_{i-1}\times Y_{n-i}))$ は NDR-対だから定理 23.6 により, レトラクション $r_i: [0,1]\times X_i\times Y_{n-i}\to(\{0\}\times X_i\times Y_{n-i})\cup([0,1]\times((X_i\times Y_{n-i-1})\cup(X_{i-1}\times Y_{n-i}))$ (ただし $X_{-1}=Y_{-1}=\emptyset$) がある. $0\leqq i<j\leqq n$ に対し, $(t,x,y)\in([0,1]\times X_i\times Y_{n-i})\cap([0,1]\times X_j\times Y_{n-j})$ ならば $(t,x,y)\in[0,1]\times X_i\times Y_{n-j}\subset[0,1]\times((X_i\times Y_{n-i-1})\cup(X_{j-1}\times Y_{n-j}))$ だから $r_i(t,x,y)=(t,x,y)=r_j(t,x,y)$ となるため $r:[0,1]\times(X\times Y)_n\to(\{0\}\times(X\times Y)_n)\cup([0,1]\times(X\times Y)_{n-1})$ を $(t,x,y)\in[0,1]\times X_i\times Y_{n-i}$ に対して $r(t,x,y)=r_i(t,x,y)$ で定める. r は $[0,1]\times(X\times Y)_n$ の閉集合 $[0,1]\times X_i\times Y_{n-i}$ 上で連続であるため, r は $[0,1]\times(X\times Y)_n=\bigcup_{i=0}^n([0,1]\times X_i\times Y_{n-i})$ 上で連続である. 各 r_i がレトラクションであることから r もレトラクションになるため, 定理 23.6 により $((X\times Y)_{n+1},(X\times Y)_n)$ は NDR-対である. □

§26. 写像空間

位相空間 X, Y に対し, X から Y への連続写像全体からなる集合を $\mathrm{Map}(X,Y)$ で表す.

記法 26.1 位相空間の対 (X,A), (Y,B) に対して $\mathrm{Map}((X,A),(Y,B)) = \{f \in \mathrm{Map}(X,Y) | f(A) \subset B\}$ とおき, X の部分集合 C と Y の部分集合 O に対し, $W(C,O) = \{f \in \mathrm{Map}((X,A),(Y,B)) | f(C) \subset O\}$ とおく. このとき $\mathrm{Map}((X,\emptyset),(Y,\emptyset)) = \mathrm{Map}(X,Y)$ であり, $\mathrm{Map}((X,A),(Y,B))$ は $\mathrm{Map}(X,Y)$ の部分集合であることに注意する.

X の部分集合 C と Y の部分集合 O に対し, $W(C,O)$ を $f(C) \subset O$ を満たす連続写像 $f : X \to Y$ 全体からなる $\mathrm{Map}(X,Y)$ の部分集合とする. このとき, 次の結果は容易に確かめられる.

補題 26.2 X, Y を位相空間とする.

(1) $C \subset D \subset X$, $U \subset V \subset Y$ ならば $W(C,U) \supset W(D,U)$, $W(C,U) \subset W(C,V)$ が成り立つ.

(2) C を X の部分空間, $(O_i)_{i\in I}$ を Y の部分集合族とすれば,

$$W\left(C, \bigcap_{i\in I} O_i\right) = \bigcap_{i\in I} W(C,O_i), \qquad W\left(C, \bigcup_{i\in I} O_i\right) \supset \bigcup_{i\in I} W(C,O_i).$$

(3) O を Y の部分空間, $(C_i)_{i\in I}$ を X の部分集合族とすれば,

$$W\left(\bigcap_{i\in I} C_i, O\right) \supset \bigcup_{i\in I} W(C_i,O), \qquad W\left(\bigcup_{i\in I} C_i, O\right) = \bigcap_{i\in I} W(C_i,O).$$

定義 26.3 $\mathrm{Map}((X,A),(Y,B))$ には $\{W(C,O) | C$ は X の コンパクト集合, O は Y の 開集合 $\}$ で生成される位相を与える. この $\mathrm{Map}((X,A),(Y,B))$ の位相をコンパクト開位相 (CO-位相) という. ここで, $\mathrm{Map}((X,A),(Y,B))$ のコンパクト開位相は $\mathrm{Map}(X,Y)$ のコンパクト開位相の部分空間としての位相に一致することに注意する.

補題 26.4 $x \in X$ に対し $e_x : \mathrm{Map}(X,Y) \to Y$ を $e_x(f) = f(x)$ で定めれば, e_x は連続である.

証明 $f \in \mathrm{Map}(X,Y)$ と $e_x(f) = f(x)$ を含む Y の開集合 O に対し, $\{x\}$ は X のコンパクト集合だから $W(\{x\},O)$ は f の開近傍である. このとき $e_x(W(\{x\},O)) \subset O$ だから e_x は f において連続である. □

補題 26.5 Y が弱 Hausdorff 空間ならば $\mathrm{Map}(X,Y)$ も弱 Hausdorff 空間である.

証明 C を $\mathrm{Map}(X,Y)$ の任意のコンパクト集合とし, $f, g \in C$ は異なる写像とすれば $f(x) \neq g(x)$ となる $c \in X$ がある. 補題 26.4 により $e_x(C)$ は Y のコンパクト集合で, $f(x), g(x) \in e_x(C)$ である. 仮定から $f(x)$, $g(x)$ の開近傍 U, V で $U \cap V \cap e_x(C) = \emptyset$ となるものがある. このとき $W(\{x\},U)$, $W(\{x\},V)$ はそれぞれ f, g の近傍であり, $W(\{x\},U) \cap W(\{x\},V) \cap C = \emptyset$ が成り立つ. 実際 $h \in W(\{x\},U) \cap W(\{x\},V) \cap C$ が存在すれば $h(x) \in U \cap V \cap e_x(C)$ となって, U, V の選び方に矛盾する. □

補題 26.6 V, X, Y を位相空間, $f : X \to Y$ を連続写像とする. $f_*(\varphi) = f \circ \varphi$, $f^*(\psi) = \psi \circ f$ によって写像

$$f_* : \mathrm{Map}(V,X) \to \mathrm{Map}(V,Y), \qquad f^* : \mathrm{Map}(Y,V) \to \mathrm{Map}(X,V)$$

を定義すれば, これらは連続写像である.

証明 C を V のコンパクト部分集合, O を Y の開集合とすれば,

$$(f_*)^{-1}(W(C,O)) = \{g \in \mathrm{Map}(V,X) | f(g(C)) \subset O\} = \{\varphi \in \mathrm{Map}(V,X) | \varphi(C) \subset f^{-1}(O)\} = W(C, f^{-1}(O))$$

である. f の連続性により $f^{-1}(O)$ は X の開集合だから $W(C, f^{-1}(O))$ は $\mathrm{Map}(V,X)$ の開集合であり, f_* の連続性がわかる.

C を X のコンパクト部分集合, O を V の開集合とすれば,

$$(f^*)^{-1}(W(C,O)) = \{\psi \in \mathrm{Map}(V,X) | \psi(f(C)) \subset O\} = W(f(C),O)$$

である. f の連続性により $f(C)$ は Y のコンパクト部分集合だから $W(f(C),O)$ は $\mathrm{Map}(Y,V)$ の開集合であり, f^* の連続性がわかる. □

注意 26.7 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を連続写像とするとき, 写像 $f_* : \mathrm{Map}(V,X) \to \mathrm{Map}(V,Y)$ と $g_* : \mathrm{Map}(V,Y) \to \mathrm{Map}(V,Z)$ の合成写像は $(g \circ f)_* : \mathrm{Map}(V,X) \to \mathrm{Map}(V,Z)$ に一致し, 写像 $g^* : \mathrm{Map}(Z,V) \to \mathrm{Map}(Y,V)$ と $f^* : \mathrm{Map}(Y,V) \to \mathrm{Map}(X,V)$ の合成写像は $(g \circ f)^* : \mathrm{Map}(Z,V) \to \mathrm{Map}(X,V)$ に一致する.

定義 26.8 弱 Hausdorff 空間 X, Y に対して $(Y,B)^{(X,A)} = k(\mathrm{Map}(X,A),(Y,B)))$, $Y^X = (Y,\emptyset)^{(X,\emptyset)}$ とおく.

注意 26.9 $i : \mathrm{Map}((X,A),(Y,B)) \to \mathrm{Map}(X,Y)$ を包含写像とすれば, 命題 21.9 の (2) から $k(i) : (Y,B)^{(X,A)} \to Y^X$ はインクルーシブである.

補題 26.10 X を弱 Hausdorff 空間として, 写像 $e_{X,Y} : \mathrm{Map}(X,Y) \times_C X \to Y$ を $e(f,x) = f(x)$ で定める. K を X の任意のコンパクトな部分空間とすれば, $e_{X,Y}$ を $\mathrm{Map}(X,Y) \times_C K$ に制限した写像は連続である. 従って X, Y がともに k-空間ならば $e_{X,Y} : Y^X \times X \to Y$ は連続である.

証明 $(f_0,x_0) \in \mathrm{Map}(X,Y) \times_C K$ と $e_{X,Y}(f_0,x_0) = f_0(x_0)$ の開近傍 U に対し, f_0 の連続性から $f_0^{-1}(U)$ は x_0 の開近傍である. $f_0^{-1}(U) \cap K$ はコンパクト Hausdorff 空間 K における x_0 の開近傍だから x_0 の K における開近傍 N で $\overline{N} \subset f_0^{-1}(U) \cap K$ を満たすものがとれる. このとき $f_0(\overline{N}) \subset U$ であり, $\overline{N}$ はコンパクト空間 K の閉部分空間だからコンパクトである. 従って $W(\overline{N},U) \times_C N$ は $\mathrm{Map}(X,Y) \times_C K$ の (f_0,x_0) 開近傍で, これは $e_{X,Y}$ によって U の中に写される. 従って $e_{X,Y}$ は $\mathrm{Map}(X,Y) \times_C K$ において連続である.

C を $\mathrm{Map}(X,Y) \times X$ の任意のコンパクト集合とする. $p_2 : \mathrm{Map}(X,Y) \times X \to X$ を射影とすると $p_2(C)$ は X のコンパクト集合であり, C は $\mathrm{Map}(X,Y) \times p_2(C) = \mathrm{Map}(X,Y) \times_C p_2(C)$ に含まれるため, $e_{X,Y}$ は C 上で連続になる. 定理 21.3 の (4) と補題 22.9 により, X, Y がともに k-空間ならば $e_{X,Y} : Y^X \times X \to Y$ は連続である. □

注意 26.11 上の結果から X が局所コンパクトならば $e_{X,Y} : \mathrm{Map}(X,Y) \times_C X \to Y$ は連続である.

補題 26.12 X, Y を位相空間, $\mathcal{B}$ を X の準基底とする. 写像 $f : X \to Y$ が単射で, 任意の $W \in \mathcal{B}$ に対して $f(W)$ が Y の開集合ならば f は開写像である.

証明 X の任意の開集合 O と $x \in O$ に対し, $W_1, W_2, \ldots, W_n \in \mathcal{B}$ で $x \in \bigcap_{i=1}^{n} W_i \subset O$ を満たすものがある. 各 i に対して $f(W_i)$ は Y の開集合で, f は単射だから $f\left(\bigcap_{i=1}^{n} W_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} f(W_i)$ も Y の開集合である. 従って $f\left(\bigcap_{i=1}^{n} W_i\right)$ は $f(O)$ に含まれる $f(x)$ の開近傍である. 故に $f(O)$ は Y の開集合である. □

補題 26.13 X が k-空間, Y が弱 Hausdorff 空間ならば $\varepsilon_Y : k(Y) \to Y$ が誘導する写像 $\varepsilon_{Y*} : \mathrm{Map}(X,k(Y)) \to \mathrm{Map}(X,Y)$ は連続な全単射であり, ε_{Y*} によって $\mathrm{Map}(X,k(Y))$ のコンパクト集合の全体と $\mathrm{Map}(X,Y)$ のコンパクト集合の全体は 1 対 1 に対応する. また, ε_{Y*} は $\mathrm{Map}(X,k(Y))$ の任意のコンパクト集合 A を $\varepsilon_{Y*}(A)$ の上に同相に写す. 従って $k(\varepsilon_{Y*}) : k(\mathrm{Map}(X,k(Y))) \to k(\mathrm{Map}(X,Y))$ は同相写像である.

証明 X は k-空間だから補題 21.5 と補題 26.6 によって ε_{Y*} は連続な全単射である. ε_Y の連続性と補題 26.6 によって ε_{Y*} は連続である. 従って $\mathrm{Map}(X,k(Y))$ のコンパクト集合は ε_{Y*} によって $\mathrm{Map}(X,Y)$ のコンパクト集合に写される. K を $\mathrm{Map}(X,Y)$ の任意のコンパクト集合とする. このとき ε_{Y*} は $\varepsilon_{Y*}^{-1}(K)$ から K の上への開写像を誘導することを示せば, $\varepsilon_{Y*}^{-1} : \mathrm{Map}(X,Y) \to \mathrm{Map}(X,k(Y))$ は K 上で連続になるため, $\varepsilon_{Y*}^{-1}(K)$ はコンパクトであることと ε_{Y*} は $\varepsilon_{Y*}^{-1}(K)$ を K の上に同相に写すことがわかり, 主張が示される. C を X のコンパクト集

合, O を $k(Y)$ の開集合とする. 補題 26.10 により $e:\mathrm{Map}(X,Y)\times_C C\to Y$ は連続だから, e を $K\times_C C$ に制限した写像 $e':K\times_C C\to Y$ も連続である. $K\times_C C$ はコンパクトだから $K\times_C C=k(K\times_C C)$ であり, 定理 21.3 により $k(e'):K\times_C C=k(K\times_C C)\to k(Y)$ も連続である. よって $k(e')^{-1}(O)$ は $K\times_C C$ の開集合である. $f\in W(C,O)\cap\varepsilon_{Y*}^{-1}(K)$ をとれば, $f(C)\subset O$ より $k(e')(\{f\}\times C)\subset O$ であるため $\{f\}\times C\subset k(e')^{-1}(O)$ が成り立つ. C はコンパクトだから K における $\varepsilon_{Y*}(f)$ の近傍 V で $V\times C\subset k(e')^{-1}(O)$ を満たすものがある. 故に $\varepsilon_{Y*}(f)\in V\subset\varepsilon_{Y*}(W(C,O))\cap K=\varepsilon_{Y*}(W(C,O)\cap\varepsilon_{Y*}^{-1}(K))$ となるため $\varepsilon_{Y*}(W(C,O)\cap\varepsilon_{Y*}^{-1}(K))$ は K の開集合である. 補題 26.12 により ε_{Y*} は $\varepsilon_{Y*}^{-1}(K)$ から K の上への開写像を誘導する □

補題 26.14 X, Y を位相空間とし, Y の準基底 $\mathcal{B}$ に対し, $\mathcal{W}=\{W(C,O)|\,C$ は X のコンパクト部分集合, $O\in\mathcal{B}\}$ とおく. このとき, X が弱 Hausdorff 空間ならば $\mathcal{W}$ は $\mathrm{Map}(X,Y)$ のコンパクト開位相の準基底である.

証明 C を X のコンパクト集合, O を Y の開集合として, $f\in W(C,O)$ を任意にとる. 各 $x\in C$ に対し, $f(x)\in\bigcap_{i=1}^{n_x}U_i(x)\subset O$ を満たす $U_1(x),U_2(x),\dots,U_{n_x}(x)\in\mathcal{B}$ が存在する. C はコンパクト Hausdorff 空間だから, 系 16.6 により正規空間であるため, $x\in V(x)\subset\overline{V(x)}\subset f^{-1}\Bigl(\bigcap_{i=1}^{n_x}U_i(x)\Bigr)\cap C$ を満たす C の開集合 $V(x)$ が存在する. C のコンパクト性から, $x_1,x_2,\dots,x_m\in C$ で $C=\bigcup_{j=1}^{m}V(x_j)$ を満たすものがある. $\overline{V(x_j)}$ はコンパクト集合 C の閉集合だからコンパクト集合であり, $f\bigl(\overline{V(x_j)}\bigr)\subset\bigcap_{i=1}^{n_{x_j}}U_i(x_j)$ が $j=1,2,\dots,m$ に対して成り立つことから, $f\in\bigcap_{j=1}^{m}W\Bigl(\overline{V(x_j)},\bigcap_{i=1}^{n_{x_j}}U_i(x_j)\Bigr)$ である. 一方, 補題 26.2 から

$$\bigcap_{j=1}^{m}\bigcap_{i=1}^{n_{x_j}}W\bigl(\overline{V(x_j)},U_i(x_j)\bigr)=\bigcap_{j=1}^{m}W\Bigl(\overline{V(x_j)},\bigcap_{i=1}^{n_{x_j}}U_i(x_j)\Bigr)\subset\bigcap_{j=1}^{m}W\bigl(\overline{V(x_j)},O\bigr)=W\Bigl(\bigcup_{j=1}^{m}\overline{V(x_j)},O\Bigr)=W(C,O)$$

となるため, 結果が得られる. □

命題 26.15 X を弱 Hausdorff 空間, Y, Z を位相空間, $p_1:Y\times_C Z\to Y$, $p_2:Y\times_C Z\to Z$ を射影 $p_1(y,z)=y$, $p_2(y,z)=z$ とする. $\widetilde{\Phi}:\mathrm{Map}(X,Y\times_C Z)\to\mathrm{Map}(X,Y)\times_C\mathrm{Map}(X,Z)$ を $\widetilde{\Phi}(f)=(p_1\circ f,p_2\circ f)$ で定めれば, $\widetilde{\Phi}$ は同相写像である.

証明 $Y\times_C Z$ は位相空間の圏における直積だから $\widetilde{\Phi}$ は全単射であり, 補題 26.6 により連続である. C を X のコンパクト集合, U を Y の開集合, V を Z の開集合とするとき,

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}^{-1}(W(C,U)\times_C W(D,V))&=\{f\in\mathrm{Map}(X,Y\times_C Z)|\,p_1(f(C))\subset U,\ p_2(f(C))\subset V\}\\&=\{f\in\mathrm{Map}(X,Y\times_C Z)|\,f(C)\subset p_1^{-1}(U)\cap p_2^{-1}(V)=U\times_C V\}\\&=W(C,U\times_C V)\end{aligned}$$

であり $\widetilde{\Phi}$ は全単射だから $\widetilde{\Phi}(W(C,U\times_C V))=W(C,U)\times_C W(D,V)$ が成り立つ. 従って補題 26.14 と補題 26.12 により $\widetilde{\Phi}$ は開写像でもあるため同相写像である. □

定理 26.16 X, Y, Z を k-空間, $p_1:Y\times Z\to Y$, $p_2:Y\times Z\to Z$ を射影 $p_1(y,z)=y$, $p_2(y,z)=z$ とする. $\Phi:(Y\times Z)^X\to Y^X\times Z^X$ を $\Phi(f)=(p_1\circ f,p_2\circ f)$ で定めれば, Φ は同相写像である.

証明 命題 26.15 により $k(\Phi):k(\mathrm{Map}(X,Y\times_C Z))\to k(\mathrm{Map}(X,Y)\times_C\mathrm{Map}(X,Z))$ は同相写像である. 補題 26.13 から $k(\varepsilon_{Y\times_C Z*}):(Y\times Z)^X=k(\mathrm{Map}(X,k(Y\times_C Z)))\to k(\mathrm{Map}(X,Y\times_C Z))$ は同相写像であり, 補題 22.9 から $k(\varepsilon_{\mathrm{Map}(X,Y)}\times_C\varepsilon_{\mathrm{Map}(X,Z)}):k\left(\mathrm{Map}(X,Y)\right)\times k(\mathrm{Map}(X,Z))=k(k(\mathrm{Map}(X,Y))\times_C k(\mathrm{Map}(X,Z)))\to k(\mathrm{Map}(X,Y)\times_C\mathrm{Map}(X,Z))$ は同相写像であるから $\Phi=k\left(\mathrm{Map}(X,Y)\right)\times k(\mathrm{Map}(X,Z))^{-1}\circ k(\Phi)\circ k(\varepsilon_{Y\times_C Z*})$ も同相写像である. □

補題 26.17 $u_{X,Y} : X \to \mathrm{Map}(Y, X \times_C Y)$ を $(u_{X,Y}(x))(y) = (x, y)$ で定めれば $u_{X,Y}$ は連続である. X, Y が k-空間ならば $u_{X,Y} : X \to (X \times Y)^Y$ は連続である.

証明 C を Y のコンパクト集合, O を $X \times_C Y$ の開集合とする. $x_0 \in u_{X,Y}^{-1}(W(C,O))$ ならば $\{x_0\} \times_C C = (u_{X,Y}(x))(C) \subset O$ だから, C のコンパクト性から x_0 の開近傍 V で $V \times_C C \subset O$ を満たすものがある. このとき, 任意の $x \in V$ と $y \in C$ に対して $(u_{X,Y}(x))(y) = (x, y) \in V \times_C C \subset O$ だから $u_{X,Y}(V) \subset W(C,O)$ である. よって $x_0 \in V \subset u_{X,Y}^{-1}(W(C,O))$ となるため $u_{X,Y}^{-1}(W(C,O))$ は X の開集合である. 故に $u_{X,Y}$ は連続である. X, Y が k-空間ならば補題 26.13 により $k(\varepsilon_{X \times_C Y*}) : (X \times Y)^X = k(\mathrm{Map}(X, k(X \times_C Y)) \to k(\mathrm{Map}(X, X \times_C Y))$ は同相写像だから $k(\varepsilon_{X \times_C Y*})^{-1} \circ k(u_{X,Y}) : X = k(X) \to (X \times Y)^Y$ は連続である. $\square$

補題 26.18 連続写像 $f : X \times_C Y \to Z$ に対し, 写像 $f_a : X \to \mathrm{Map}(Y, Z)$ を $(f_a(x))(y) = f(x, y)$ によって定めれば, f_a は連続である. 従って X, Y, Z が k-空間の場合, 連続写像 $f : X \times Y \to Z$ に対して $\tilde{f} : X \to Z^Y$ を $\tilde{f} = k((f \circ \varepsilon_{X \times_C Y})_a)$ によって定めれば $\tilde{f}$ は連続である.

証明 C を Y のコンパクト部分集合, O を Z の開集合とすれば,

$$f_a^{-1}(W(C,O)) = \{x \in X \,|\, f(\{x\} \times_C C) \subset O\} = \{x \in X \,|\, \{x\} \times_C C \subset f^{-1}(O)\}$$

であり, $f^{-1}(O)$ は $X \times_C Y$ の開集合だから, $x \in f_a^{-1}(W(C,O))$ に対し, 各 $y \in C$ の開近傍 V_y と x の開近傍 U_y で $U_y \times_C V_y \subset f^{-1}(O)$ となるものがとれる. C のコンパクト性により, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ で $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ を満たすものがある. そこで $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ とおけば U は x の開近傍で, $U \times_C V_{y_i} \subset f^{-1}(O)$ が $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して成り立つため $U \times_C C \subset U \times_C \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} \subset f^{-1}(O)$ である. 従って, 任意の $U \subset \bar{f}^{-1}(W(C,O))$ となるため, $f_a^{-1}(W(C,O))$ は X の開集合である. $\square$

上の補題により, k-空間 X, Y, Z に対して写像 $\mu_{X,Y,Z} : Z^{X \times Y} \to (Z^Y)^X$ を $\mu_{X,Y,Z}(f) = \tilde{f}$ で定義する.

補題 26.19 $F_{X,Z}^Y : Z^X \to (Z \times Y)^{X \times Y}$ を $F_{X,Z}^Y(f) = f \times id_Y$ で定義すれば, この写像は連続である.

証明 補題 26.10 から $e_{X,Z} \times id_Y : Z^X \times X \times Y \to Z \times Y$ は連続だから, $\mu_{Z^X, X \times Y, Z \times Y}(e_{X,Z} \times id_Y) : Z^X \to (Z \times Y)^{X \times Y}$ は補題 26.18 によって連続である. 一方, $f \in Z^X$, $(x, y) \in X \times Y$ に対して $((\mu_{Z^X, X \times Y, Z \times Y}(e_{X,Z} \times id_Y))(f))(x, y) = (e_{X,Z} \times id_Y)(f, x, y) = (e_{X,Z}(f, x), y) = (f(x), y) = (f \times id_Y)(x, y)$ だから $\mu_{Z^X, X \times Y, Z \times Y}(e_{X,Z} \times id_Y) = F_{X,Z}^Y$ である. $\square$

定理 26.20 $\Gamma : Z^Y \times Y^X \to Z^X$ を $\Gamma(g, f) = g \circ f$ で定義すれば Γ は連続である.

証明 補題 26.10 から $e_{Y,Z} \circ (id_{Z^Y} \times e_{X,Y}) : Z^Y \times Y^X \times X \to Z$ は連続だから, $\mu_{Z^Y \times Y^X, Y, Z}(e_{Y,Z} \circ (id_{Z^Y} \times e_{X,Y}))$ は補題 26.18 によって連続である. $(g, f) \in Z^Y \times Y^X$, $x \in X$ に対し, $((\mu_{Z^Y \times Y^X, Y, Z}(e_{Y,Z} \circ (id_{Z^Y} \times e_{X,Y})))(g, f))(x) = (e_{Y,Z} \circ (id_{Z^Y} \times e_{X,Y})))(g, f, x) = e_{Y,Z}(g, f(x)) = g(f(x)) = (\Gamma(g, f))(x)$ より $\mu_{Z^Y \times Y^X, Y, Z}(e_{Y,Z} \circ (id_{Z^Y} \times e_{X,Y})) = \Gamma$ が成り立つ. $\square$

系 26.21 $G_{X,Z}^Y : Z^X \to (Z^Y)^{X^Y}$, $H_{X,Y}^Z : Y^X \to (Z^X)^{Z^Y}$ をそれぞれ $G_{X,Z}^Y(f) = f_*$, $H_{X,Y}^Z(g) = g^*$ で定義すれば $G_{X,Z}^Y$, $H_{X,Y}^Z$ はともに連続である.

証明 $T : Y^X \times Z^Y \to Z^Y \times Y^X$ を $T(f, g) = (g, f)$ で定めると T は連続である. 定理 26.20 により $\Gamma : Z^Y \times Y^X \to Z^X$ は連続だから $\mu_{Z^Y, Y^X, Z^X}(\Gamma) : Z^X \to (Z^Y)^{X^Y}$, $\mu_{Y^X, Z^Y, Z^X}(\Gamma \circ T) : Y^X \to (Z^X)^{Z^Y}$ は補題 26.18 によって連続である. 一方 $f \in Y^X$, $g \in Z^X$ に対し, $((\mu_{Z^Y, Y^X, Z^X}(\Gamma))(g))(f) = \Gamma(g, f) = g \circ f = g_*(f) = (G_{X,Z}^Y(g))(f)$, $((\mu_{Y^X, Z^Y, Z^X}(\Gamma \circ T))(f))(g) = (\Gamma \circ T)(f, g) = g \circ f = f^*(g) = (H_{Y,X}^Z(f))(g)$ だから $\mu_{Z^Y, Y^X, Z^X}(\Gamma) = G_{X,Z}^Y$ および

$\mu_{Y^X,Z^Y,Z^X}(\Gamma\circ T)=H^Z_{X,Y}$ が成り立つ. $\square$

定理 26.22 k-空間 X, Y, Z に対し, $\mu_{X,Y,Z}:Z^{X\times Y}\to(Z^Y)^X$ は同相写像である.

証明 系 26.21, 補題 26.17, 補題 26.6 により $G^Y_{X\times Y,Z}:Z^{X\times Y}\to(Z^Y)^{(X\times Y)^Y}$ と $u^*_{X,Y}:(Z^Y)^{(X\times Y)^Y}\to(Z^Y)^X$ は連続だから $u^*_{X,Y}\circ G^Y_{X\times Y,Z}:Z^{X\times Y}\to(Z^Y)^X$ は連続である. また, $f\in Z^{X\times Y}$ と $(x,y)\in X\times Y$ に対して $((u^*_{X,Y}\circ G^Y_{X\times Y,Z}(f))(x))(y)=(u^*_{X,Y}(f_*)(x))(y)=(f_*(u_{X,Y}(x)))(y)=f((u_{X,Y}(x))(y))=f(x,y)=((\mu_{X,Y,Z}(f))(x))(y)$ だから $u^*_{X,Y}\circ G^Y_{X\times Y,Z}=\mu_{X,Y,Z}$ となるため $\mu_{X,Y,Z}$ は連続である. 補題 26.19, 補題 26.10, 補題 26.6 により $F^Y_{X,Z^Y}:(Z^Y)^X\to(Z^Y\times Y)^{X\times Y}$ と $e_{Y,Z*}:(Z^Y\times Y)^{X\times Y}\to Z^{X\times Y}$ は連続であるため $e_{Y,Z*}\circ F^Y_{X,Z^Y}$ は連続である. よって, $e_{Y,Z*}\circ F^Y_{X,Z^Y}$ が $\mu_{X,Y,Z}$ の逆写像になることを示せばよい.

$f\in Z^{X\times Y}$, $(x,y)\in X\times Y$ に対し, $(e_{Y,Z*}\circ F^Y_{X,Z^Y}(\mu_{X,Y,Z}(f)))(x,y)=(e_{Y,Z*}(\mu_{X,Y,Z}(f)\times id_Y))(x,y)=(e_{Y,Z}\circ(\mu_{X,Y,Z}\times id_Y))(x,y)=e_{Y,Z}(\mu_{X,Y,Z}(x),y)=(\mu_{X,Y,Z}(x))(y)=f(x,y)$ より $e_{Y,Z*}\circ F^Y_{X,Z^Y}\circ\mu_{X,Y,Z}=id_{Z^{X\times Y}}$, $g\in(Z^Y)^X$, $x\in X$, $y\in Y$ に対し, $((\mu_{X,Y,Z}((e_{Y,Z*}\circ F^Y_{X,Z^Y})(g)))(x))(y)=((\mu_{X,Y,Z}(e_{Y,Z*}(g\times id_Y)))(x))(y)=((\mu_{X,Y,Z}(e_{Y,Z}\circ(g\times id_Y)))(x))(y)=(e_{Y,Z}\circ(g\times id_Y))(x,y)=e_{Y,Z}(g(x),y)=(g(x))(y)$ より $\mu_{X,Y,Z}\circ e_{Y,Z*}\circ F^Y_{X,Z^Y}=id_{(Z^Y)^X}$ が成り立つ. 故に $e_{Y,Z*}\circ F^Y_{X,Z^Y}$ は $\mu_{X,Y,Z}$ の逆写像である. $\square$

定理 26.23 X_1, X_2, Y_1, Y_2 を k-空間とする. $\pi:Y_1^{X_1}\times Y_2^{X_2}\to(Y_1\times Y_2)^{X_1\times X_2}$ を $\pi(f_1,f_2)=f_1\times f_2$ で定めれば π は連続である.

証明 $S:Y_1^{X_1}\times Y_2^{X_2}\times X_1\times X_2\to Y_1^{X_1}\times X_1\times Y_2^{X_2}\times X_2$ を $S(f_1,f_2,x_1,x_2)=(f_1,x_1,f_2,x_2)$ で定めれば S は連続である. 従って補題 26.10 により $(e_{X_1,Y_1}\times e_{X_2,Y_2})\circ S:Y_1^{X_1}\times Y_2^{X_2}\times X_1\times X_2\to Y_1\times Y_2$ は連続であるため, 補題 26.18 により $\mu_{Y_1^{X_1}\times Y_2^{X_2},X_1\times X_2,Y_1\times Y_2}((e_{X_1,Y_1}\times e_{X_2,Y_2})\circ S):Y_1^{X_1}\times Y_2^{X_2}\to(Y_1\times Y_2)^{X_1\times X_2}$ は連続である. 一方 $(f_1,f_2)\in Y_1^{X_1}\times Y_2^{X_2}$, $(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$ に対して $((\mu_{Y_1^{X_1}\times Y_2^{X_2},X_1\times X_2,Y_1\times Y_2}((e_{X_1,Y_1}\times e_{X_2,Y_2})\circ S))(f_1,f_2))(x_1,x_2)=((e_{X_1,Y_1}\times e_{X_2,Y_2})\circ S)(f_1,f_2,x_1,x_2)=((e_{X_1,Y_1}\times e_{X_2,Y_2})(f_1,x_1,f_2,x_2)=(f_1(x_1),f_2(x_2))=(f_1\times f_2)(x_1,x_2)=(\pi(f_1,f_2))(x_1,x_2)$ だから $\pi=\mu_{Y_1^{X_1}\times Y_2^{X_2},X_1\times X_2,Y_1\times Y_2}((e_{X_1,Y_1}\times e_{X_2,Y_2})\circ S)$ である. $\square$

命題 26.24 X をコンパクト Hausdorff 空間, A を X の部分空間, (Y,B) を NDR-対とすれば, $\big((Y,B)^{(X,A)},B^X\big)$ も NDR-対である.

証明 $\nu:\mathrm{Map}(X,[0,1])\to[0,1]$ を $\nu(\varphi)=(\varphi$ の最大値$)$ で定めれば, ν は連続である. 実際, $\varphi\in\mathrm{Map}(X,[0,1])$ と任意の $\varepsilon>0$ に対し, $\varphi(c)=\nu(\varphi)$ を満たす $c\in X$ をとれば, φ の連続性と X がコンパクト Hausdorff 空間であることから, c のコンパクトな近傍 V で $\varphi(V)\subset(\nu(\varphi)-\varepsilon,\nu(\varphi)+\varepsilon)$ を満たすものがある. このとき $U=W(V,[0,1]\cap(\nu(\varphi)-\varepsilon,\nu(\varphi)+\varepsilon))\cap W(X,[0,1]\cap[0,\nu(\varphi)+\varepsilon))$ とおくと, U は φ の開近傍で, $\psi\in U$ ならば $\nu(\psi)\in(\nu(\varphi)-\varepsilon,\nu(\varphi)+\varepsilon)$ だから ν は φ において連続である.

$u:Y\to[0,1]$, $h:[0,1]\times Y\to Y$ を定義 23.1 の条件を満たす写像として, $v:(Y,B)^{(X,A)}\to[0,1]$ を合成写像

$$(Y,B)^{(X,A)}\xrightarrow{\varepsilon_{\mathrm{Map}((X,A),(Y,B))}}\mathrm{Map}((X,A),(Y,B))\xrightarrow{\text{inclusion}}\mathrm{Map}(X,Y)\xrightarrow{u_*}\mathrm{Map}(X,[0,1])\xrightarrow{\nu}[0,1]$$

とすれば, v は連続写像の合成写像だから連続である. また, $f\in(Y,B)^{(X,A)}$ に対し, $v(f)$ は $u\circ f:X\to[0,1]$ の最大値であるから $v^{-1}(0)=\big\{f\in(Y,B)^{(X,A)}\big|\ u(f(X))=\{0\}\big\}=\big\{f\in(Y,B)^{(X,A)}\big|\ f(X)\subset u^{-1}(0)=B\big\}=B^X$ が成り立つ. また $e':(Y,B)^{(X,A)}\times X\to Y$ を $e_{X,Y}:Y^X\times X\to Y$ の制限とすれば補題 26.10 により e' は連続である. 写像 $h\circ(id_{[1,0]}\times e'):[0,1]\times(Y,B)^{(X,A)}\times X\to Y$ の $\mu_{[0,1]\times(Y,B)^{(X,A)},X,Y}:Y^{[0,1]\times(Y,B)^{(X,A)}\times X}\to(Y^X)^{[0,1]\times(Y,B)^{(X,A)}}$ による像 $\mu_{[0,1]\times(Y,B)^{(X,A)},X,Y}(h\circ(id_{[1,0]}\times e')):[0,1]\times(Y,B)^{(X,A)}\to Y^X$ は補題 26.18 によって連続である. 任意の $(t,f)\in[0,1]\times(Y,B)^{(X,A)}$ と $x\in X$ に対し, $((\mu_{[0,1]\times(Y,B)^{(X,A)},X,Y}(h\circ(id_{[1,0]}\times e')))(t,f))(x)=h(t,f(x))$ だから $x\in A$ ならば $f(x)\in B$ $h(t,f(x))=f(x)$ より $(\mu_{[0,1]\times(Y,B)^{(X,A)},X,Y}(h\circ(id_{[1,0]}\times e')))(t,f)\in(Y,B)^{(X,A)}$ である. 従って $i:(Y,B)^{(X,A)}\to Y^X$ を包含写像とすれば, i は命題 21.9 の (2) によってインクルーシブだから, 連続写像

$j : [0,1] \times (Y,B)^{(X,A)} \to (Y,B)^{(X,A)}$ で $i \circ j = \mu_{[0,1]\times(Y,B)^{(X,A)},X,Y}(h \circ (id_{[1,0]} \times e'))$ を満たすものがある.

$(t,f) \in [0,1] \times (Y,B)^{(X,A)}$ と $x \in X$ に対し, $(j(t,f))(x) = h(t,f(x))$ だから $t = 0$ の場合は $(j(0,f))(x) = h(0,f(x)) = f(x)$ となるため $j(0,f) = f$ であり, $f \in B^X$ の場合は $f(x) \in B$ より $(j(t,f))(x) = h(t,f(x)) = f(x)$ となるため $j(t,f) = f$ である. さらに $f \in v^{-1}([0,1))$ ならば任意の $x \in X$ に対して $u(f(x)) < 1$ だから $f(x) \in u^{-1}([0,1))$ である. このとき任意の $t \in [0,1]$ に対して $(j(t,f))(x) = h(t,f(x)) \in B$ となるため, $j(t,f) \in B^X$ である. 以上から (v,j) により $\left((Y,B)^{(X,A)}, B^X\right)$ は NDR-対である. □

命題 26.25　命題 26.24 において「X はコンパクト Hausdorff 空間」という仮定を「X は k-空間」という仮定に弱めることができるか?

§27.　基点付き空間の圏

定義 27.1　位相空間 X と X の点 x_0 の対 (X,x_0) を基点付き空間という. 基点付き空間 (X,x_0), (Y,y_0) に対し, 連続写像 $f : X \to Y$ が $f(x_0) = y_0$ を満たすとき, f は基点を保つという. 基点付き k-空間を対象とし, 基点を保つ連続写像を射とする圏を $\mathcal{K}_*$ で表し, 基点付き空間の圏という.

補題 27.2　X を k-空間, A を X の部分空間として, X/A は k-空間であるとする. $a_0 \in X/A$ を A の点のクラスとし, $p : (X,A) \to (X/A,a_0)$ を商写像とする. 基点付き k-空間 (Y,y_0) に対し, p によって誘導される写像 $p^* : \mathrm{Map}((X/A,a_0),(Y,y_0)) \to \mathrm{Map}((X,A),(Y,y_0))$ は連続な全単射であり, $\mathrm{Map}((X/A,a_0),(Y,y_0))$ のコンパクト集合の全体と $\mathrm{Map}((X,A),(Y,y_0))$ のコンパクト集合の全体の間の 1 対 1 対応を与える. 従って $k(p^*) : (Y,y_0)^{(X/A,a_0)} \to (Y,y_0)^{(X,A)}$ は同相写像である.

証明　任意の $g \in \mathrm{Map}((X,A),(Y,y_0))$ に対し, $g(A) = \{a_0\}$ だから, p が商写像であることから, 連続写像 $f : X \to Y$ で $f \circ p = g$ を満たすものがただ 1 つ存在する. $a \in A$ を 1 つ選ぶと $p(a) = a_0$, $g(a) = y_0$ より $f(a_0) = f(p(a)) = g(a) = y_0$ となるため $f \in \mathrm{Map}((X/A,a_0),(Y,y_0))$ であり, $p^*(f) = g$ を満たす. 故に p^* は全単射である. 補題 26.6 によって p^* は連続であり, K が $\mathrm{Map}((X/A,a_0),(Y,y_0))$ のコンパクト集合ならば $p^*(K)$ は $\mathrm{Map}((X,A),(Y,y_0))$ のコンパクト集合である.

K を $\mathrm{Map}((X,A),(Y,y_0))$ のコンパクト集合とすると, 補題 26.5 と命題 18.5 により K は弱 Hausdorff 空間であるため, K はコンパクト Hausdorff 空間であることに注意する. 従ってとくに K は k-空間である. $p^{*-1} : \mathrm{Map}((X,A),(Y,y_0)) \to \mathrm{Map}((X/A,a_0),(Y,y_0))$ が K の上で連続であることを示せば $p^{*-1}(K)$ のコンパクト性が示される. 任意の $g_0 \in K$ と $p^{*-1}(g_0) \in W(C,O)$ を満たす X/A のコンパクト集合 C と Y の開集合 O をとる. $f_0 = p^{*-1}(g_0)$ とおけば $f_0 \circ p = g_0$ であり, $f_0(C) \subset O$ が成り立つ.

$a_0 \notin C$ の場合, p は $X - A$ を $X/A - \{a_0\}$ の上に同相に写すため, $p^{-1}(C)$ は X のコンパクト集合である. このとき, $g_0(p^{-1}(C)) = f_0(p(p^{-1}(C)))) = f_0(C) \subset O$ となるため, $g_0 \in W(p^{-1}(C),O)$ である. $g \in W(p^{-1}(C),O)$ に対し $f = p^{*-1}(g)$ とおくと $f \circ p = g$ だから $f(C) = f(p(p^{-1}(C)))) = g(p^{-1}(C)) \subset O$ となるため $f \in W(C,O)$ である. よって $p^{*-1}(W(p^{-1}(C),O)) \subset W(C,O)$ が成り立つ.

$a_0 \in C$ の場合, 補題 26.10 により $e_{X,Y} : \mathrm{Map}(X,Y) \times X \to Y$ を $K \times X$ に制限した写像 $\tilde{e} : K \times X \to Y$ は連続であり, また定理 22.8 より $id_K \times p : K \times X \to K \times X/A$ は商写像である. $(g,x),(h,y) \in K \times X$ が $(g,x) \neq (h,y)$ かつ $(id_K \times p)(g,x) = (id_K \times p)(h,y)$ を満たせば, $g = h$ かつ $x, y \in A$ だから $\tilde{e}(g,x) = g(x) = y_0 = g(y) = \tilde{e}(h,y)$ である. 従って, 連続写像 $\bar{e} : K \times X/A \to Y$ で $\bar{e} \circ (id_K \times p) = \tilde{e}$ を満たすものがある. $a \in A$ を 1 つ選ぶと $\bar{e}(g_0,a_0) = (\bar{e} \circ (id_K \times p))(g_0,a) = \tilde{e}(g_0,a) = g_0(a) = y_0 = f(a_0) \in f(C) \subset O$ だから g_0 の K における開近傍 U と a_0 の開近傍 V で, $\bar{e}(U \times V) \subset O$ を満たすものがある. $C - V$ は C の閉集合だからコンパクトであり, a_0 を含まないため, $p^{-1}(C - V)$ は X のコンパクト集合である. $g_0(p^{-1}(C - V)) \subset g_0(p^{-1}(C)) \subset O$ だから $U \cap W(p^{-1}(C - V),O)$ は K における g_0 の近傍である. 任意の $g \in U \cap W(p^{-1}(C - V),O)$ に対し, $g \in U$

より $g(p^{-1}(V)) = \tilde{e}(\{g\} \times p^{-1}(V)) = \bar{e}((id_K \times p)(\{g\} \times p^{-1}(V))) = \bar{e}(\{g\} \times V) \subset \bar{e}(U \times V) \subset O$ であり, $g \in W(p^{-1}(C - V), O)$ より $g(p^{-1}(C - V)) \subset O$ でもあるため $g(p^{-1}(C)) = g(p^{-1}(V)) \cup g(p^{-1}(C - V)) \subset O$ である. 故に $f = p^{*-1}(g)$ とおくと $f(C) = f(p(p^{-1}(C))) = g(p^{-1}(C)) \subset O$ だから $p^{*-1}(g) \in W(C, O)$ が得られるため $p^{*-1}(U \cap W(p^{-1}(C - V), O)) \subset W(C, O)$ が成り立つ. 以上により p^{*-1} は K の上で連続である. □

命題 27.3 X を位相空間, $x_0 \in X$ とする. $X - \{x_0\}$ が弱 Hausdorff 空間であり, $\{x_0\}$ がゼロ集合ならば X は弱 Hausdorff 空間である.

証明 $f : X \to \boldsymbol{R}$ を $f^{-1}(0) = \{x_0\}$ を満たす連続関数とすると, $|f|(x) = |f(x)|$ によって定義される関数 $|f| : X \to [0, +\infty)$ も連続で, $|f|^{-1}(0) = \{x_0\}$ を満たすため, f の代わりに $|f|$ を考えることによって, f は常に負でない値をとると仮定してよい. K を X の任意のコンパクト集合, x, y を K の相異なる点とする. K が x_0 を含まない場合, K は $X - \{x_0\}$ のコンパクト集合であるため, K は Hausdorff 空間である. K が x_0 を含み, x, y が x_0 とは異なる場合, $f(x)$ と $f(y)$ の小さい方を c とすれば, $c > 0$ であり, $K \cap f^{-1}\left[\frac{c}{2}, +\infty\right)$ は x_0 を含まない K の閉集合であるため, コンパクトである. 従って, x, y の開近傍 U, V で, $U \cap V \cap K \cap f^{-1}\left[\frac{c}{2}, +\infty\right) = \emptyset$ を満たすものがある. $W = U \cap f^{-1}\left(\frac{c}{2}, +\infty\right)$, $Z = V \cap f^{-1}\left(\frac{c}{2}, +\infty\right)$ とおけば W, Z はそれぞれ x, y の開近傍であり, $Z \cap W \cap K = \emptyset$ を満たすため, K は Hausdorff 空間である. $x = x_0$ の場合, $f(y) = c$ とおくと $f^{-1}\left(-\infty, \frac{c}{2}\right)$, $f^{-1}\left(\frac{c}{2}, +\infty\right)$ はそれぞれ x, y の開近傍で交わらないため K は Hausdorff 空間である. 以上により X は弱 Hausdorff 空間である. □

系 27.4 位相空間 X の部分空間 A がゼロ集合であり, $X - A$ が弱 Hausdorff 空間ならば X/A は弱 Hausdorff 空間である.

証明 $p : X \to X/A$ を商写像とし, A の点 a で代表される類を a_0 とする. $f : X \to \boldsymbol{R}$ を $f^{-1}(0) = A$ を満たす連続関数とすれば, 連続関数 $\bar{f} : X/A \to \boldsymbol{R}$ で $\bar{f} \circ p = f$ を満たすものがある. このとき, $\bar{f}^{-1}(0) = p(p^{-1}(\bar{f}^{-1}(0))) = p(f^{-1}(0)) = p(A) = \{a_0\}$ が成り立つため $\{a_0\}$ はゼロ集合である. p は $X - A$ から $X/A - \{a_0\}$ への同相写像を与えるため, $X/A - \{a_0\}$ は弱 Hausdorff 空間である. 従って命題 27.3 によって X/A は弱 Hausdorff 空間である. □

定義 27.5 基点付き空間 (X, x_0), (Y, y_0) に対し, $X \vee Y = (X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$ とおき, $(X \vee Y, (x_0, y_0))$ を (X, x_0) と (Y, y_0) のウェッジ和という. また, $X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y)$ とおき, $(x, y) \in X \times Y$ の $X \wedge Y$ におけるクラスを $x \wedge y$ とすれば $(X \wedge Y, x_0 \wedge y_0)$ を (X, x_0) と (Y, y_0) のスマッシュ積という.

注意 27.6 (1) X, Y がともに弱 Hausdorff 空間ならば, $X \vee Y$ も弱 Hausdorff 空間であり, X, Y がともに Hausdorff 空間ならば, $X \vee Y$ も Hausdorff 空間である.

(2) X, Y がともに弱 Hausdorff 空間であり, X, Y の基点 x_0, y_0 がともにゼロ集合ならば, $X \wedge Y$ も弱 Hausdorff 空間である. 実際 $f : X \to \boldsymbol{R}$, $g : Y \to \boldsymbol{R}$ を $f^{-1}(0) = \{x_0\}$, $g^{-1}(0) = \{y_0\}$ を満たす連続関数として, $h : X \times Y \to \boldsymbol{R}$ を $h(x, y) = \min\{|f(x)|, |g(y)|\}$ で定めれば, h は連続で $h^{-1}(0) = X \vee Y$ となるため, 系 27.4 によって $X \wedge Y$ は弱 Hausdorff 空間である.

(3) X, Y がともに Hausdorff 空間ならば, $X \wedge Y$ も Hausdorff 空間であることは次のように示される. $p : X \times Y \to X \wedge Y$ を商写像とすれば, p は $(X \times Y) - (X \vee Y)$ から $X \wedge Y - \{x_0 \wedge y_0\}$ の上への同相写像を与えるため, $X \wedge Y$ の開集合 $X \wedge Y - \{x_0 \wedge y_0\}$ は Hausdorff 空間である. z, w を $X \wedge Y$ の相異なる 2 点とすれば, $z, w \neq x_0 \wedge y_0$ ならば $X \wedge Y - \{x_0 \wedge y_0\}$ が Hausdorff 空間であることから, z, w の近傍で交わらないものがある. $w = x_0 \wedge y_0$ の場合, $p(x, y) = z$ を満たす $(x, y) \in X \times Y$ をとれば, $x \neq x_0$ かつ $y \neq y$ だから, x, x_0 の開近傍 U, U_0 と y, y_0 の開近傍 V, V_0 で, $U \cap U_0 = V \cap V_0 = \emptyset$ を満たすものがある. $W = p(U \times V)$, $Z = p((X \times V_0) \cup (U_0 \times Y))$ とおけば $U \times V \subset (X \times Y) - (X \vee Y)$ だから $p^{-1}(W) = U \times V$ となるため W は z の開近傍であり, $(X \times V_0) \cup (U_0 \times Y) \supset X \vee Y$ だから $p^{-1}(Z) = (X \times V_0) \cup (U_0 \times Y)$ となるため, Z は w の開近傍である. さらに $p^{-1}(W \cap Z) = p^{-1}(W) \cap p^{-1}(Z) = (U \times V) \cap ((X \times V_0) \cup (U_0 \times Y)) = \emptyset$ より $W \cap Z = \emptyset$ である.

問題 27.7　X, Y がともに弱 Hausdorff 空間ならば, $X\wedge Y$ も弱 Hausdorff 空間であると一般にいえるか?

補題 27.8　X, Y を位相空間, Z を Y の部分空間として, $i: Z\to Y$ を包含写像とする．このとき, $i:\mathrm{Map}(X,Z)\to\mathrm{Map}(X,Y)$ は像の上への同相写像である．

証明　C を X のコンパクト集合, U を Z の開集合とすれば Y の開集合 O で $U=Z\cap O$ となるものがある．このとき $i_*(W(K,U))=W(K,O)\cap i_*(\mathrm{Map}(X,Z))$ となり, i_* は単射だから, 補題 26.12 により i_* は像の中への開写像である．また補題 26.6 によって i_* は連続である． □

定理 27.9　(X,x_0), (Y,y_0), (Z,z_0) を基点付き空間とし, X, Y, Z は k-空間であるとする．$c_0:(Y,y_0)\to(Z,z_0)$ を定値写像 $c_0(Y)=\{y_0\}$ とすれば, 自然な同相写像 $(Z,z_0)^{(X\wedge Y,x_0\wedge y_0)}\to\big((Z,z_0)^{(Y,y_0)},c_0\big)^{(X,x_0)}$ がある．

証明　補題 27.2 から商写像 $p:(X\times Y,X\vee Y)\to(X\wedge Y,x_0\wedge y_0)$ は同相写像

$$p^*:(Z,z_0)^{(X\wedge Y,x_0\wedge y_0)}\to(Z,z_0)^{(X\times Y,X\vee Y)}$$

を誘導することがわかる．$i_1:\mathrm{Map}((X,x_0),(k(\mathrm{Map}((Y,y_0),(Z,z_0))),c_0))\to\mathrm{Map}(X,k(\mathrm{Map}((Y,y_0),(Z,z_0))))$, $i_2:\mathrm{Map}((Y,y_0),(Z,z_0))\to\mathrm{Map}(Y,Z)$, $j:\mathrm{Map}((X\times Y,X\vee Y),(Z,z_0))\to\mathrm{Map}(X\times Y,Z)$ を包含写像とする．補題 27.8 により $i_{2*}:\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}((Y,y_0),(Z,z_0)))\to\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))$ は包含写像とみなせることと, $\big((Z,z_0)^{(Y,y_0)},c_0\big)^{(X,x_0)}=k(\mathrm{Map}((X,x_0),(k(\mathrm{Map}((Y,y_0),(Z,z_0))),c_0)))$, $Z^{X\times Y}=k(\mathrm{Map}(X\times Y,Z))$ および $(Z,z_0)^{(X\times Y,X\vee Y)}=k(\mathrm{Map}((X\times Y,X\vee Y),(Z,z_0)))$ であることに注意すると, 命題 21.9 の (2) によって $k(j):(Z,z_0)^{(X\times Y,X\vee Y)}\to Z^{X\times Y}$, $k(i_1):\big((Z,z_0)^{(Y,y_0)},c_0\big)^{(X,x_0)}\to k(\mathrm{Map}(X,k(\mathrm{Map}((Y,y_0),(Z,z_0)))))$, $k(i_{2*}):k(\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}((Y,y_0),(Z,z_0))))\to k(\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z)))$ はインクルーシブである．また, 補題 26.13 により $k(\varepsilon_{\mathrm{Map}((Y,y_0),(Z,z_0))*}):k(\mathrm{Map}(X,k(\mathrm{Map}((Y,y_0),(Z,z_0)))))\to k(\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}((Y,y_0),(Z,z_0))))$ および $k(\varepsilon_{\mathrm{Map}(Y,Z)*}):(Z^Y)^X=k(\mathrm{Map}(X,k(\mathrm{Map}(Y,Z))))\to k(\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z)))$ は同相写像である．故に, 合成写像 $k(\varepsilon_{\mathrm{Map}(Y,Z)*})^{-1}\circ k(i_{2*})\circ k(\varepsilon_{\mathrm{Map}((Y,y_0),(Z,z_0))*})\circ k(i_1):\big((Z,z_0)^{(Y,y_0)},c_0\big)^{(X,x_0)}\to(Z^Y)^X$ はインクルーシブである．

定理 26.22 の同相写像 $\mu_{X,Y,Z}$ が $k(j)$ の像を, $k(\varepsilon_{\mathrm{Map}(Y,Z)*})^{-1}\circ k(i_{2*})\circ k(\varepsilon_{\mathrm{Map}((Y,y_0),(Z,z_0))*})\circ k(i_1)$ の像の上に写すことを示せば, 命題 21.8 の (1) により, 同相写像 $\check{\mu}_{X,Y,Z}:(Z,z_0)^{(X\times Y,X\vee Y)}\to\big((Z,z_0)^{(Y,y_0)},c_0\big)^{(X,x_0)}$ で, $\mu_{X,Y,Z}\circ k(j)=k(\varepsilon_{\mathrm{Map}(Y,Z)*})^{-1}\circ k(i_{2*})\circ k(\varepsilon_{\mathrm{Map}((Y,y_0),(Z,z_0))*})\circ k(i_1)\circ\check{\mu}_{X,Y,Z}$ を満たすものが存在する．$f\in Z^{X\times Y}$ が $k(j)$ の像に属するとき, $f(X\vee Y)=\{z_0\}$ だから, 任意の $x\in X$ に対して $((\mu_{X,Y,Z}(f))(x))(y_0)=f(x,y_0)=z_0$ が成り立つため, $(\mu_{X,Y,Z}(f))(x)\in(Z,z_0)^{(Y,y_0)}$ である．さらに, 任意の $y\in Y$ に対して $((\mu_{X,Y,Z}(f))(x_0))(y)=f(x_0,y)=z_0$ だから $(\mu_{X,Y,Z}(f))(x_0)=c_0$ が成り立つため, $\mu_{X,Y,Z}(f)$ は

$$k(\varepsilon_{\mathrm{Map}(Y,Z)*})^{-1}\circ k(i_{2*})\circ k(\varepsilon_{\mathrm{Map}((Y,y_0),(Z,z_0))*})\circ k(i_1):k(\mathrm{Map}((X,x_0),(k(\mathrm{Map}((Y,y_0),(Z,z_0))),c_0)))\to(Z^Y)^X$$

の像に属する．$g\in(Z^Y)^X$ が $k(\varepsilon_{\mathrm{Map}(Y,Z)*})^{-1}\circ k(i_{2*})\circ k(\varepsilon_{\mathrm{Map}((Y,y_0),(Z,z_0))*})\circ k(i_1)$ の像に属するならば, 任意の $x\in X$ に対して, $g(x)\in(Z,z_0)^{(Y,y_0)}$ だから $(g(x))(y_0)=z_0$ であり, $g(x_0)=c_0$ より $(g(x_0))(y)=z_0$ が任意の $y\in Y$ に対して成り立つ．一方, $(\mu_{X,Y,Z}^{-1}(g))(x,y)=(g(x))(y)$ だから $(\mu_{X,Y,Z}^{-1}(g))(X\vee Y)=\{z_0\}$ が成り立つため $\mu_{X,Y,Z}^{-1}(g)$ は $k(j)$ の像に属する．以上から $\mu_{X,Y,Z}$ は $k(j)$ の像を, $k(\varepsilon_{\mathrm{Map}(Y,Z)*})^{-1}\circ k(i_{2*})\circ k(\varepsilon_{\mathrm{Map}((Y,y_0),(Z,z_0))*})\circ k(i_1)$ の像の上に写す． □

§28.　写像空間についての補足その 1

補題 28.1　(1) X が弱 Hausdorff 空間ならば

$$\{W(C,W(D,O))\,|\,C\text{ は }X\text{ のコンパクト部分集合},\ D\text{ は }Y\text{ のコンパクト部分集合},\ O\text{ は }Z\text{ の開集合}\}$$

は $\mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z))$ の準基底である.

(2) X, Y がともに弱 Hausdorff 空間ならば

$$\{W(C \times_C D, O) |\, C \text{ は } X \text{ のコンパクト部分集合}, D \text{ は } Y \text{ のコンパクト部分集合}, O \text{ は } Z \text{ の開集合 } \}$$

は $\mathrm{Map}(X \times_C Y, Z)$ の準基底である.

証明 (1) $\{W(D, O) |\, D$ は Y のコンパクト部分集合, O は Z の開集合 $\}$ は $\mathrm{Map}(Y, Z)$ の準基底で, X は弱 Hausdorff 空間だから補題 26.14 によって結果が得られる.

(2) E を $X \times_C Y$ のコンパクト集合, O を Z の開集合とし, $f \in W(E, O)$ とする. $p_1 : X \times_C Y \to X$, $p_2 : X \times_C Y \to Y$ をそれぞれ X, Y への射影とすれば, E のコンパクト性から $p_1(E)$, $p_2(E)$ はそれぞれ X, Y のコンパクト部分空間である. 一方, 仮定から X と Y は弱 Hausdorff 空間だから, $p_1(E)$ と $p_2(E)$ は Hausdorff 空間でもあるため, 系 16.6 によって $p_1(E)$ と $p_2(E)$ は正規空間である. E は $p_1(E) \times_C p_2(E)$ の開集合 $f^{-1}(O) \cap (p_1(E) \times_C p_2(E))$ に含まれるため, 各 $(x, y) \in E$ に対し, $p_1(E)$ における x の開近傍 $U(x, y)$ と $p_2(E)$ における y の開近傍 $V(x, y)$ で, $U(x, y) \times_C V(x, y) \subset f^{-1}(O)$ となるものがある. さらに, $p_1(E)$ と $p_2(E)$ が正規空間であることから, x, y の $p_1(E)$, $p_2(E)$ における開近傍 $U'(x, y)$, $V'(x, y)$ で, $\overline{U'(x, y)} \subset U(x, y)$, $\overline{V'(x, y)} \subset V(x, y)$ を満たすものがある. E のコンパクト性から $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} (U'(x_i, y_i) \times_C V'(x_i, y_i))$ を満たす $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n) \in E$ が選べて, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し, $\overline{U'(x_i, y_i)}$, $\overline{V'(x_i, y_i)}$ はコンパクト空間 $p_1(E)$, $p_2(E)$ の閉集合だからコンパクトである. ここで, $f \in \bigcap_{i=1}^{n} W(\overline{U'(x_i, y_i)} \times_C \overline{V'(x_i, y_i)}, O) = W\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{U'(x_i, y_i)} \times_C \overline{V'(x_i, y_i)}, O\right) \subset W(E, O)$ となるため, 主張が示された. □

補題 26.18 を用いて, 写像 $\tilde{\mu}_{X,Y,Z} : \mathrm{Map}(X \times_C Y, Z) \to \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z))$ を $\tilde{\mu}_{X,Y,Z}(f) = f_a$ によって定義する.

補題 28.2 $C \subset X$, $D \subset Y$, $O \subset Z$ に対し, $\tilde{\mu}^{-1}_{X,Y,Z}(W(C, W(D, O))) = W(C \times_C D, O)$ が成り立つ.

証明 $C \subset X$, $D \subset Y$, $O \subset Z$ ならば

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}^{-1}_{X,Y,Z}(W(C, W(D, O))) &= \{f \in \mathrm{Map}(X \times_C Y, Z) |\, (\tilde{\mu}_{X,Y,Z}(f))(C) \subset W(D, O)\} \\
&= \{f \in \mathrm{Map}(X \times_C Y, Z) |\, x \in C \text{ ならば } ((\tilde{\mu}_{X,Y,Z}(f))(x))(D) \subset O\} \\
&= \{f \in \mathrm{Map}(X \times_C Y, Z) |\, x \in C \text{ ならば } f(\{x\} \times_C D) \subset O\} \\
&= \{f \in \mathrm{Map}(X \times_C Y, Z) |\, f(C \times_C D) \subset O\} \\
&= W(C \times_C D, O).
\end{aligned}$$

□

命題 28.3 $\tilde{\mu}_{X,Y,Z} : \mathrm{Map}(X \times_C Y, Z) \to \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z))$ は単射であり, X が弱 Hausdorff 空間ならば $\tilde{\mu}_{X,Y,Z}$ は連続である.

証明 $f, g \in \mathrm{Map}(X \times_C Y, Z)$ が $\tilde{\mu}_{X,Y,Z}(f) = \tilde{\mu}(g)$ を満たせば, 任意の $x \in X$, $y \in Y$ に対して $f(x, y) = (\tilde{\mu}_{X,Y,Z}(f)(x))(y) = (\tilde{\mu}_{X,Y,Z}(g)(x))(y) = g(x, y)$ だから $f = g$ である. 従って $\tilde{\mu}_{X,Y,Z}$ は単射である. X が弱 Hausdorff 空間ならば補題 28.1 の (1) と補題 28.2 により $\tilde{\mu}_{X,Y,Z}$ は連続である. □

命題 28.4 写像 $\widetilde{F}^Y_{X,Z} : \mathrm{Map}(X, Z) \to \mathrm{Map}(X \times_C Y, Z \times_C Y)$ を $f \in \mathrm{Map}(X, Z)$ に対し $\widetilde{F}^Y_{X,Z}(f) = f \times_C id_Y$ によって定義する. $e_{X,Z} : \mathrm{Map}(X, Z) \times_C X \to Z$ が連続ならば $\widetilde{F}^Y_{X,Z}$ は連続である.

証明 $\tilde{\mu}_{\mathrm{Map}(X,Z), X \times_C Y, Z \times_C Y} : \mathrm{Map}(\mathrm{Map}(X, Z) \times_C X \times_C Y, Z \times_C Y) \to \mathrm{Map}(\mathrm{Map}(X, Z), \mathrm{Map}(X \times_C Y, Z \times_C Y))$ を考える. $e_{X,Z} \times_C id_Y : \mathrm{Map}(X, Z) \times_C X \times_C Y \to Z \times_C Y$ は連続であり, $f \in \mathrm{Map}(X, Z)$, $(x, y) \in X \times_C Y$ に対して $((\tilde{\mu}_{\mathrm{Map}(X,Z), X \times_C Y, Z \times_C Y}(e_{X,Z} \times_C id_Y))(f))(x, y) = (e_{X,Z} \times_C id_Y)(f, x, y) = (f(x), y) = (f \times_C id_Y)(x, y) =$

$(\widetilde{F}^Y_{X,Z}(f))(x,y)$ だから $\tilde{\mu}_{\mathrm{Map}(X,Z),X\times_C Y,Z\times_C Y}(e_{X,Z}\circ(T\times_C id_Y))=\widetilde{F}^Y_{X,Z}$ である．従って補題 26.18 により $\widetilde{F}^Y_{X,Z}$ は連続である． $\square$

命題 28.5 $\Gamma:\mathrm{Map}(X,Z)\times_C\mathrm{Map}(Y,X)\to\mathrm{Map}(Y,Z)$ を $\Gamma(f,g)=f\circ g$ で定める．$e_{X,Z}:\mathrm{Map}(X,Z)\times_C X\to Z$, $e_{Y,X}:\mathrm{Map}(Y,X)\times_C Y\to X$ がともに連続ならば Γ は連続である．

証明 仮定により，写像 $e_{X,Z}\circ(id_{\mathrm{Map}(X,Z)}\times_C e_{Y,X}):\mathrm{Map}(X,Z)\times_C\mathrm{Map}(Y,X)\times_C Y\to Z$ は連続である．写像 $\tilde{\mu}_{\mathrm{Map}(X,Z)\times_C\mathrm{Map}(Y,X),Y,Z}:\mathrm{Map}(\mathrm{Map}(X,Z)\times_C\mathrm{Map}(Y,X)\times_C Y,Z)\to\mathrm{Map}(\mathrm{Map}(X,Z)\times_C\mathrm{Map}(Y,X),\mathrm{Map}(Y,Z))$ による $e_{X,Z}\circ(id_{\mathrm{Map}(X,Z)}\times_C e_{Y,X})$ の像が Γ に一致することを示す．$(f,g)\in\mathrm{Map}(X,Z)\times_C\mathrm{Map}(Y,X)$, $y\in Y$ に対し，$((\tilde{\mu}_{\mathrm{Map}(X,Z)\times_C\mathrm{Map}(Y,X),Y,Z}(e_{X,Z}\circ(id_{\mathrm{Map}(X,Z)}\times_C e_{Y,X})))(f,g))(y)=(e_{X,Z}\circ(id_{\mathrm{Map}(X,Z)}\times_C e_{Y,X}))(f,g,y)=e_{X,Z}(f,g(y))=f(g(y))=(f\circ g)(y)=(\Gamma(f,g))(y)$ より $\tilde{\mu}_{\mathrm{Map}(X,Z)\times_C\mathrm{Map}(Y,X),Y,Z}(e_{X,Z}\circ(id_{\mathrm{Map}(X,Z)}\times_C e_{Y,X}))=\Gamma$ が成り立つ．故に補題 26.18 により Γ は連続である． $\square$

系 28.6 $\widetilde{G}^Y_{X,Z}:\mathrm{Map}(X,Z)\to\mathrm{Map}(\mathrm{Map}(Y,X),\mathrm{Map}(Y,Z))$, $\widetilde{H}^Z_{Y,X}:\mathrm{Map}(Y,X)\to\mathrm{Map}(\mathrm{Map}(X,Z),\mathrm{Map}(Y,Z))$ をそれぞれ $\widetilde{G}^Y_{X,Z}(f)=f_*$, $\widetilde{H}^Z_{Y,X}(g)=g^*$ で定義する．$e_{X,Z}:\mathrm{Map}(X,Z)\times_C X\to Z$, $e_{Y,X}:\mathrm{Map}(Y,X)\times_C Y\to X$ がともに連続ならば $\widetilde{G}^Y_{X,Z}$, $\widetilde{H}^Z_{Y,X}$ はともに連続である．

証明 $T:\mathrm{Map}(Y,X)\times_C\mathrm{Map}(X,Z)\to\mathrm{Map}(X,Z)\times_C\mathrm{Map}(Y,X)$ を $T(g,f)=(f,g)$ で定めると T は明らかに連続である．命題 28.5 により $\Gamma:\mathrm{Map}(X,Z)\times_C\mathrm{Map}(Y,X)\to\mathrm{Map}(Y,Z)$ は連続だから，$\tilde{\mu}_{\mathrm{Map}(X,Z),\mathrm{Map}(Y,X),\mathrm{Map}(Y,Z)}:\mathrm{Map}(\mathrm{Map}(X,Z)\times_C\mathrm{Map}(Y,X),\mathrm{Map}(Y,Z))\to\mathrm{Map}(\mathrm{Map}(X,Z),\mathrm{Map}(\mathrm{Map}(Y,X),\mathrm{Map}(Y,Z)))$ による Γ, $\Gamma\circ T$ の像が，それぞれ $\widetilde{G}^Y_{X,Z}$, $\widetilde{H}^Z_{Y,X}$ に一致することを示せば，補題 26.18 により $\widetilde{G}^Y_{X,Z}$, $\widetilde{H}^Z_{Y,X}$ は連続である．$f\in\mathrm{Map}(X,Z)$, $g\in\mathrm{Map}(Y,X)$ に対し，$((\tilde{\mu}_{\mathrm{Map}(X,Z),\mathrm{Map}(Y,X),\mathrm{Map}(Y,Z)}(\Gamma))(f))(g)=\Gamma(f,g)=f\circ g=f_*(g)=(\widetilde{G}^Y_{X,Z}(f))(g)$ より $\tilde{\mu}_{\mathrm{Map}(X,Z),\mathrm{Map}(Y,X),\mathrm{Map}(Y,Z)}(\Gamma)=\widetilde{G}^Y_{X,Z}$ であり，$((\tilde{\mu}_{\mathrm{Map}(Y,X),\mathrm{Map}(X,Z),\mathrm{Map}(Y,Z)}(\Gamma\circ T))(g))(f)=(\Gamma\circ T)(g,f)=f\circ g=g^*(f)=(\widetilde{H}^Z_{Y,X}(g))(f)$ だから $\Phi(\Gamma\circ T)=\widetilde{H}^Z_{Y,X}$ が成り立つ． $\square$

$\tilde{\mu}_{X,Y,X\times_C Y}:\mathrm{Map}(X\times_C Y,X\times_C Y)\to\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,X\times_C Y))$ を考え，$\eta_{X,Y}:X\to\mathrm{Map}(Y,X\times_C Y)$ を $\eta_{X,Y}=\tilde{\mu}_{X,Y,X\times_C Y}(id_{X\times_C Y})$ で定める．このとき，$\eta_{X,Y}$ は $(\eta_{X,Y}(x))(y)=(x,y)$ $(x\in X,\ y\in Y)$ によって与えられる．

命題 28.7 $\tilde{\mu}_{X,Y,Z}:\mathrm{Map}(X\times_C Y,Z)\to\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))$ は次の合成写像に一致する．

$$\mathrm{Map}(X\times_C Y,Z)\xrightarrow{\widetilde{G}^Y_{X\times_C Y,Z}}\mathrm{Map}(\mathrm{Map}(Y,X\times_C Y),\mathrm{Map}(Y,Z))\xrightarrow{\eta^*_{X,Y}}\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))$$

従って，$e_{X\times_C Y,Z}:\mathrm{Map}(X\times_C Y,Z)\times_C X\times_C Y\to Z$, $e_{Y,X\times_C Y}:\mathrm{Map}(Y,X\times_C Y)\times_C Y\to X\times_C Y$ がともに連続ならば $\tilde{\mu}_{X,Y,Z}$ は連続である．

証明 任意の $f\in\mathrm{Map}(X\times_C Y,Z)$, $x\in X$, $y\in Y$ に対し，$(\eta^*_{X,Y}(\widetilde{G}^Y_{X\times_C Y,Z}(f))(x))(y)=(\eta^*_{X,Y}(f_*)(x))(y)=(f_*(\eta_{X,Y}(x)))(y)=(f\circ(\eta_{X,Y}(x)))(y)=f((\eta_{X,Y}(x))(y))=f(x,y)=(\Phi(f)(x))(y)$ より $\eta^*_{X,Y}\circ\widetilde{G}^Y_{X\times_C Y,Z}=\tilde{\mu}_{X,Y,Z}$ である．仮定と系 28.6 により $\widetilde{G}^Y_{X\times_C Y,Z}$ は連続であり，補題 26.18 および補題 26.6 から $\eta^*_{X,Y}$ も連続であるため，$\tilde{\mu}_{X,Y,Z}$ は連続である． $\square$

命題 28.8 $e_{Y,Z}:\mathrm{Map}(Y,Z)\times_C Y\to Z$ が連続ならば $\tilde{\mu}_{X,Y,Z}:\mathrm{Map}(X\times_C Y,Z)\to\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))$ の逆写像は次の合成写像と一致する．

$$\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))\xrightarrow{\widetilde{F}^Y_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)}}\mathrm{Map}(X\times_C Y,\mathrm{Map}(Y,Z)\times_C Y)\xrightarrow{e_{Y,Z*}}\mathrm{Map}(X\times_C Y,Z)$$

さらに $e_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)}:\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))\times_C Y\to\mathrm{Map}(Y,Z)$ も連続ならば $\tilde{\mu}_{X,Y,Z}$ の逆写像は連続である．

証明 任意の $f \in \mathrm{Map}(X \times_C Y, Z)$, $(x,y) \in X \times_C Y$ に対して, $(e_{Y,Z*}(\widetilde{F}^Y_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)}(\tilde{\mu}_{X,Y,Z}(f))))(x,y) = (e_{Y,Z*}(\tilde{\mu}_{X,Y,Z}(f)\times_C id_Y))(x,y) = (e_{Y,Z}\circ(\tilde{\mu}_{X,Y,Z}(f)\times_C id_Y))(x,y) = e_{Y,Z}(\tilde{\mu}_{X,Y,Z}(f)(x),y) = (\tilde{\mu}_{X,Y,Z}(f)(x))(y) = f(x,y)$ より $e_{Y,Z*} \circ \widetilde{F}^Y_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)} \circ \tilde{\mu}_{X,Y,Z} = id_{\mathrm{Map}(X\times_C Y,Z)}$ が成り立つ. また, 任意の $f \in \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y,Z))$ と $x \in X$, $y \in Y$ に対して, $((\tilde{\mu}_{X,Y,Z}(e_{Y,Z*}(\widetilde{F}^Y_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)}(f))))(x))(y) = ((\tilde{\mu}_{X,Y,Z}(e_{Y,Z*}(f \times_C id_Y)))(x))(y) = ((\tilde{\mu}_{X,Y,Z}(e_{Y,Z} \circ (f \times_C id_Y))(x))(y) = (e_{Y,Z} \circ (f \times_C id_Y))(x,y) = e_{Y,Z}(f(x),y) = (f(x))(y)$ が成り立つため $\tilde{\mu}_{X,Y,Z} \circ e_{Y,Z*} \circ \widetilde{F}^Y_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)} = id_{\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))}$ が得られる. 故に $e_{Y,Z*} \circ \widetilde{F}^Y_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)}$ は $\tilde{\mu}_{X,Y,Z}$ の逆写像である.

$e_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)} : \mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z)) \times_C Y \to \mathrm{Map}(Y,Z)$ も連続ならば命題 28.4 により $\widetilde{F}^Y_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)}$ は連続であり, 仮定と補題 26.6 により $e_{Y,Z*}$ も連続であるため, $e_{Y,Z*} \circ \widetilde{F}^Y_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)}$ は連続である. □

定理 28.9 位相空間 X, Y は弱 Hausdorff 空間であるとする. $e_{Y,Z} : \mathrm{Map}(Y,Z) \times_C Y \to Z$ が連続写像ならば $\tilde{\mu}_{X,Y,Z} : \mathrm{Map}(X \times_C Y, Z) \to \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y,Z))$ は同相写像である.

証明 命題 28.3 と命題 28.8 によって $\tilde{\mu}_{X,Y,Z}$ は連続な全単射である. また, 補題 28.2 によって, 任意の $C \subset X$, $D \subset Y$, $O \subset Z$ に対して, $\tilde{\mu}^{-1}_{X,Y,Z}(W(C, W(D,O))) = W(C \times_C D, O)$ が成り立つが, $\tilde{\mu}_{X,Y,Z}$ は全単射であるから, $\tilde{\mu}_{X,Y,Z}(W(C \times_C D, O)) = W(C, W(D,O))$ が成り立つことに注意する. 補題 28.1 の (2) により

$$\{W(C\times_C D, O))|\, C \text{ は } X \text{ のコンパクト部分集合}, D \text{ は } Y \text{ のコンパクト部分集合}, O \text{ は } Z \text{ の開集合}\}$$

は $\mathrm{Map}(X \times_C Y, Z))$ の準基底になるため, $\tilde{\mu}_{X,Y,Z}$ は開写像でもある. 従って $\tilde{\mu}_{X,Y,Z}$ は同相写像である. □

系 28.10 X が弱 Hausdorff 空間であり, Y が局所コンパクトな Hausdorff 空間ならば, 任意の位相空間 Z に対して $\tilde{\mu}_{X,Y,Z} : \mathrm{Map}(X \times_C Y, Z) \to \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y,Z))$ は同相写像である.

証明 仮定と命題 16.8 により, Y は強い意味で局所コンパクトであるため, 注意 26.11 により $e_{Y,Z} : \mathrm{Map}(Y,Z) \times_C Y \to Z$ は連続である. 従って定理 28.9 により, 結果が得られる. □

また命題 28.7, 命題 28.8 から次の結果を得る.

定理 28.11 $e_{X\times_C Y,Z} : \mathrm{Map}(X \times_C Y, Z) \times_C X \times_C Y \to Z$, $e_{Y,X\times_C Y} : \mathrm{Map}(Y, X \times_C Y) \times_C Y \to X \times_C Y$, $e_{Y,Z} : \mathrm{Map}(Y,Z) \times_C Y \to Z$, $e_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)} : \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y,Z)) \times_C Y \to \mathrm{Map}(Y,Z)$ がすべて連続ならば $\tilde{\mu}_{X,Y,Z} : \mathrm{Map}(X \times_C Y, Z) \to \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y,Z))$ は同相写像である.

§29. 写像空間についての補足その 2

写像 $\eta_{X,Y} : X \to \mathrm{Map}(Y, X \times Y)$ を $(\eta_{X,Y}(x))(y) = (x,y)$ $(x \in X,\ y \in Y)$ によって定める.

補題 29.1 $\eta_{X,Y} : X \to \mathrm{Map}(Y, X \times Y)$ は連続である.

証明 C を Y のコンパクトな部分集合, O を $X \times Y$ の開集合とすれば, 次の等式が成り立つ.

$$\eta^{-1}_{X,Y}(W(C,O)) = \{x \in X|\, (\eta_{X,Y}(x))(C) \subset O\} = \{x \in X|\, \{x\} \times C \subset O\}$$

O は $X \times Y$ の開集合だから, 各 $y \in C$ に対し, y の開近傍 V_y と x の開近傍 U_y で $U_y \times V_y \subset O$ を満たすものがある. このとき $C \subset \bigcup_{i\in Y} V_y$ だから C のコンパクト性により, $y_1, y_2, \dots, y_n$ で $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ を満たすものがある. そこで $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ とおけば U は x の開近傍で, $U \times V_{y_i} \subset O$ が $i = 1, 2, \dots, n$ に対して成り立つため $U \times C \subset U \times \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} \subset O$ である. 故に $U \subset \eta^{-1}_{X,Y}(W(C,O))$ となるため, $\eta^{-1}_{X,Y}(W(C,O))$ は X の開集合である. □

写像 $\varepsilon_{X,Y} : \mathrm{Map}(X,Y) \times X \to Y$ を $\varepsilon_{X,Y}(f,x) = f(x)$ $(f \in \mathrm{Map}(X,Y),\ x \in X)$ で定義する.

補題 29.2　X, Y, Z を位相空間, $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ を連続写像とする. 次の図式は可換である.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_{X,Y}"] \arrow[d, "f"] & \mathrm{Map}(Y, X \times Y) \arrow[d, "(f\times id_Y)_*"] \\ Z \arrow[r, "\eta_{Z,Y}"] & \mathrm{Map}(Y, Z \times Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Map}(X,Y) \times X \arrow[r, "\varepsilon_{X,Y}"] \arrow[d, "g_*\times id_X"] & Y \arrow[d, "g"] \\ \mathrm{Map}(X,Z) \times X \arrow[r, "\varepsilon_{Z,Y}"] & Z \end{tikzcd}$$

証明　任意の $x \in X$ と $y \in Y$ に対し, 次の等式が成り立つ.

$$(((f \times id_Y)_* \circ \eta_{X,Y})(x))(y) = ((f \times id_Y) \circ \eta_{X,Y}(x))(y) = (f \times id_Y)(x, y) = (f(x), y) = (\eta_{Z,Y}(f(x)))(y)$$

故に $((f \times id_Y)_* \circ \eta_{X,Y})(x) = \eta_{Z,Y}(f(x)) = (\eta_{Z,Y} \circ f)(x)$ だから, $(f \times id_Y)_* \circ \eta_{X,Y} = \eta_{Z,Y} \circ f$ である.

任意の $\varphi \in \mathrm{Map}(X, Y)$ と $x \in X$ に対し, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{X,Z} \circ (g_* \times id_X))(\varphi, x) &= \varepsilon_{X,Z}((g_* \times id_X)(\varphi, x)) = \varepsilon_{X,Z}(g \circ \varphi, x) = (g \circ \varphi)(x) = g(\varphi(x)) \\ &= g(\varepsilon_{X,Y}(\varphi, x)) = (g \circ \varepsilon_{X,Y})(\varphi, x)\end{aligned}$$

故に $\varepsilon_{X,Z} \circ (g_* \times id_X) = g \circ \varepsilon_{X,Y}$ である. □

命題 29.3　合成写像 $X \times Y \xrightarrow{\eta_{X,Y} \times id_Y} \mathrm{Map}(Y, X \times Y) \times Y \xrightarrow{\varepsilon_{Y,X\times Y}} X \times Y$ は $X \times Y$ の恒等写像である. $\varepsilon_{X,Y}$ が連続ならば, 合成写像 $\mathrm{Map}(X, Y) \xrightarrow{\eta_{\mathrm{Map}(X,Y),X}} \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(X, Y) \times X) \xrightarrow{(\varepsilon_{X,Y})_*} \mathrm{Map}(X, Y)$ は $\mathrm{Map}(X, Y)$ の恒等写像である.

証明　任意の $(x, y) \in X \times Y$, $f \in \mathrm{Map}(X, Y)$ に対し,

$$(\varepsilon_{Y,X\times Y} \circ (\eta_{X,Y} \times id_Y))(x, y) = \varepsilon_{Y,X\times Y}(\eta_{X,Y}(x), y) = (\eta_{X,Y}(x))(y) = (x, y)$$
$$(((\varepsilon_{X,Y})_* \circ \eta_{\mathrm{Map}(X,Y),X})(f))(x) = (\varepsilon_{X,Y} \circ \eta_{\mathrm{Map}(X,Y),X}(f))(x) = \varepsilon_{X,Y}(\eta_{\mathrm{Map}(X,Y),X}(f)(x)) = \varepsilon_{X,Y}(f, x) = f(x)$$

が成り立つため, 主張が成り立つ. □

補題 26.6 と補題 29.1 から, 各 $f \in \mathrm{Map}(X \times Y, Z)$ に対し, 次の合成写像は連続である.

$$X \xrightarrow{\eta_{X,Y}} \mathrm{Map}(Y, X \times Y) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Map}(Y, Z)$$

従って, 写像 $\Phi_{X,Y,Z} : \mathrm{Map}(X \times Y, Z) \to \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z))$ を $\Phi_{X,Y,Z}(f) = f_* \circ \eta_{X,Y}$ で定義することができる.

$\varepsilon_{Y,Z}$ が連続であるとき, 各 $f \in \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z))$ に対して, 次の合成写像は連続である.

$$X \times Y \xrightarrow{f \times id_Y} \mathrm{Map}(Y, Z) \times Y \xrightarrow{\varepsilon_{Y,Z}} Z$$

従って, 写像 $\Psi_{X,Y,Z} : \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z)) \to \mathrm{Map}(X \times Y, Z)$ を $\Psi_{X,Y,Z}(f) = \varepsilon_{Y,Z} \circ (f \times id_Y)$ で定義できる.

命題 29.4　$\Phi_{X,Y,Z}$ は単射であり, $\varepsilon_{Y,Z}$ が連続ならば, $\Phi_{X,Y,Z}$ は全単射で, $\Psi_{X,Y,Z}$ は $\Phi_{X,Y,Z}$ の逆写像である.

証明　$\Phi_{X,Y,Z}$ と $\eta_{X,Y}$ の定義から $x \in X$, $y \in Y$ に対して $(\Phi_{X,Y,Z}(f)(x))(y) = f(x, y)$ が成り立つことに注意する. $f, g \in \mathrm{Map}(X \times Y, Z)$ が $\Phi_{X,Y,Z}(f) = \Phi_{X,Y,Z}(g)$ を満たせば, 任意の $x \in X$, $y \in Y$ に対して $f(x, y) = (\Phi_{X,Y,Z}(f)(x))(y) = (\Phi_{X,Y,Z}(g)(x))(y) = g(x, y)$ だから $f = g$ となるため, $\Phi_{X,Y,Z}$ は単射である.

$\varepsilon_{Y,Z}$ は連続であるとする. $f \in \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z))$, $g \in \mathrm{Map}(X \times Y, Z)$ に対して, 補題 29.2 と命題 29.3 から

$$\begin{aligned}\Phi_{X,Y,Z}(\Psi_{X,Y,Z}(f)) &= \Phi_{X,Y,Z}(\varepsilon_{Y,Z} \circ (f \times id_Y)) = (\varepsilon_{Y,Z} \circ (f \times id_Y))_* \circ \eta_{X,Y} = (\varepsilon_{Y,Z})_* \circ (f \times id_Y)_* \circ \eta_{X,Y} \\ &= (\varepsilon_{Y,Z})_* \circ \eta_{\mathrm{Map}(Y,Z),Y} \circ f = f \\ \Psi_{X,Y,Z}(\Phi_{X,Y,Z}(g)) &= \Psi_{X,Y,Z}(g_* \circ \eta_{X,Y}) = \varepsilon_{Y,Z} \circ ((g_* \circ \eta_{X,Y}) \times id_Y) = \varepsilon_{Y,Z} \circ (g_* \times id_Y) \circ (\eta_{X,Y} \times id_Y) \\ &= g \circ \varepsilon_{Y,X\times Y} \circ (\eta_{X,Y} \times id_Y) = g\end{aligned}$$

が成り立つため, $\Phi_{X,Y,Z}$ は全単射で, $\Psi_{X,Y,Z}$ は $\Phi_{X,Y,Z}$ の逆写像である. □

注意 29.5 写像 $\Phi_{\mathrm{Map}(Y,Z),Y,Z} : \mathrm{Map}(\mathrm{Map}(Y,Z)\times Y,Z) \to \mathrm{Map}(\mathrm{Map}(Y,Z),\mathrm{Map}(Y,Z))$ が全射ならば連続写像 $e : \mathrm{Map}(Y,Z)\times Y \to Z$ で $\Phi_{\mathrm{Map}(Y,Z),Y,Z}(e)$ が $\mathrm{Map}(Y,Z)$ の恒等写像になるものが存在する．このとき $\Phi_{\mathrm{Map}(Y,Z),Y,Z}$ の定義から $f \in \mathrm{Map}(Y,Z)$ と $y \in Y$ に対し，$((\Phi_{\mathrm{Map}(Y,Z),Y,Z}(e))(f))(y) = e(f,y)$ であり，一方 $(\Phi_{\mathrm{Map}(Y,Z),Y,Z}(e))(f) = f$ だから，$e(f,y) = f(x)$ が成り立つため，e は $\varepsilon_{Y,Z}$ に一致する．従って $\Phi_{\mathrm{Map}(Y,Z),Y,Z}$ が全射ならば，$\varepsilon_{Y,Z}$ は連続である．

命題 29.6 Y が強い意味で局所コンパクトならば $\varepsilon_{Y,Z} : \mathrm{Map}(Y,Z)\times Y \to Z$ は連続である．従ってこのとき $\Phi_{X,Y,Z}$ は全単射である．

証明 $(f,x)\in \mathrm{Map}(Y,Z)\times Y$，$O$ を $f(x) = \varepsilon_{Y,Z}(f,x)$ の開近傍とする．仮定により $f^{-1}(O)$ に含まれる x のコンパクトな近傍 C が存在する．このとき $W(C,O)\times C$ は (f,x) の近傍で，$\varepsilon_{Y,Z}(W(C,O)\times C)\subset O$ だから $\varepsilon_{Y,Z}$ は (f,x) において連続である． □

写像 $F^Y_{X,Z} : \mathrm{Map}(X,Z) \to \mathrm{Map}(X\times Y, Z\times Y)$ を $F^Y_{X,Z}(f) = f\times id_Y$ で定義する．

命題 29.7 $\varepsilon_{X,Z} : \mathrm{Map}(X,Z)\times X \to Z$ が連続ならば $F^Y_{X,Z} : \mathrm{Map}(X,Z) \to \mathrm{Map}(X\times Y, Z\times Y)$ は連続である．

証明 $\Phi_{\mathrm{Map}(X,Z),X\times Y,Z\times Y} : \mathrm{Map}(\mathrm{Map}(X,Z)\times X\times Y, Z\times Y) \to \mathrm{Map}(\mathrm{Map}(X,Z),\mathrm{Map}(X\times Y,Z\times Y))$ を考える．$\varepsilon_{X,Z}\times id_Y : \mathrm{Map}(X,Z)\times X\times Y \to Z\times Y$ は連続であり，$f\in \mathrm{Map}(X,Z)$，$(x,y)\in X\times Y$ に対して

$$((\Phi_{\mathrm{Map}(X,Z),X\times Y,Z\times Y}(\varepsilon_{X,Z}\times id_Y))(f))(x,y) = (\varepsilon_{X,Z}\times id_Y)(f,x,y) = (f(x),y) = (f\times id_Y)(x,y) = (F^Y_{X,Z}(f))(x,y)$$

だから $\Phi_{\mathrm{Map}(X,Z),X\times Y,Z\times Y}(\varepsilon_{X,Z}\circ(T\times id_Y)) = F^Y_{X,Z}$ である．故に補題 26.6 と補題 29.1 から $F^Y_{X,Z}$ は連続である．□

命題 29.8 $\Gamma : \mathrm{Map}(X,Z)\times \mathrm{Map}(Y,X) \to \mathrm{Map}(Y,Z)$ を $\Gamma(f,g) = f\circ g$ で定義する．$\varepsilon_{X,Z} : \mathrm{Map}(X,Z)\times X \to Z$ と $\varepsilon_{Y,X} : \mathrm{Map}(Y,X)\times Y \to X$ がともに連続ならば Γ は連続である．

証明 $\Phi_{\mathrm{Map}(X,Z)\times\mathrm{Map}(Y,X),Y,Z} : \mathrm{Map}(\mathrm{Map}(X,Z)\times\mathrm{Map}(Y,X)\times Y, Z) \to \mathrm{Map}(\mathrm{Map}(X,Z)\times\mathrm{Map}(Y,X),\mathrm{Map}(Y,Z))$ を考える．仮定から写像 $\varepsilon_{X,Z}\circ(id_{\mathrm{Map}(X,Z)}\times\varepsilon_{Y,X}) : \mathrm{Map}(X,Z)\times\mathrm{Map}(Y,X)\times Y \to Z$ は連続であり，$(f,g)\in \mathrm{Map}(X,Z)\times\mathrm{Map}(Y,X)$，$y\in Y$ に対し，次の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}((\Phi_{\mathrm{Map}(X,Z)\times\mathrm{Map}(Y,X),Y,Z}(\varepsilon_{X,Z}\circ(id_{\mathrm{Map}(X,Z)}\times\varepsilon_{Y,X})))(f,g))(y) &= (\varepsilon_{X,Z}\circ(id_{\mathrm{Map}(X,Z)}\times\varepsilon_{Y,X}))(f,g,y)\\ &= \varepsilon_{X,Z}(f,g(y)) = f(g(y)) = (f\circ g)(y) = (\Gamma(f,g))(y)\end{aligned}$$

故に $\Phi_{\mathrm{Map}(X,Z)\times\mathrm{Map}(Y,X),Y,Z}(\varepsilon_{X,Z}\circ(id_{\mathrm{Map}(X,Z)}\times\varepsilon_{Y,X})) = \Gamma$ が成り立つため，補題 26.6 と補題 29.1 により Γ は連続である． □

系 29.9 $G^Y_{X,Z} : \mathrm{Map}(X,Z) \to \mathrm{Map}(\mathrm{Map}(Y,X),\mathrm{Map}(Y,Z))$，$H^Z_{Y,X} : \mathrm{Map}(Y,X) \to \mathrm{Map}(\mathrm{Map}(X,Z),\mathrm{Map}(Y,Z))$ をそれぞれ $G^Y_{X,Z}(f) = f_*$，$H^Z_{Y,X}(g) = g^*$ で定義する．$\varepsilon_{X,Z} : \mathrm{Map}(X,Z)\times X \to Z$，$\varepsilon_{Y,X} : \mathrm{Map}(Y,X)\times Y \to X$ がともに連続ならば $G^Y_{X,Z}$，$H^Z_{Y,X}$ はともに連続である．

証明 命題 29.8 により $\Gamma : \mathrm{Map}(X,Z)\times\mathrm{Map}(Y,X) \to \mathrm{Map}(Y,Z)$ は連続であり，$f\in\mathrm{Map}(X,Z)$，$g\in\mathrm{Map}(Y,X)$ に対し，$((\Phi_{\mathrm{Map}(X,Z),\mathrm{Map}(Y,X),\mathrm{Map}(Y,Z)}(\Gamma))(f))(g) = \Gamma(f,g) = f\circ g = f_*(g) = (G^Y_{X,Z}(f))(g)$ だから

$$\Phi_{\mathrm{Map}(X,Z),\mathrm{Map}(Y,X),\mathrm{Map}(Y,Z)}(\Gamma) = G^Y_{X,Z}$$

が成り立つため，補題 26.6 と補題 29.1 により $G^Y_{X,Z}$ は連続である．

$T : \mathrm{Map}(Y,X)\times\mathrm{Map}(X,Z) \to \mathrm{Map}(X,Z)\times\mathrm{Map}(Y,X)$ を $T(g,f) = (f,g)$ で定めると T は明らかに連続である．命題 29.8 により $\Gamma : \mathrm{Map}(X,Z)\times\mathrm{Map}(Y,X) \to \mathrm{Map}(Y,Z)$ は連続であり，$f\in\mathrm{Map}(X,Z)$，$g\in\mathrm{Map}(Y,X)$ に対し，$((\Phi_{\mathrm{Map}(Y,X),\mathrm{Map}(X,Z),\mathrm{Map}(Y,Z)}(\Gamma\circ T))(g))(f) = (\Gamma\circ T)(g,f) = f\circ g = g^*(f) = (H^Z_{Y,X}(g))(f)$ だから

$$\Phi_{\mathrm{Map}(Y,X),\mathrm{Map}(X,Z),\mathrm{Map}(Y,Z)}(\Gamma\circ T) = H^Z_{Y,X}$$

が成り立つため, 補題 26.6 と補題 29.1 により $H^Z_{Y,X}$ は連続である. □

命題 29.10 $\Phi_{X,Y,Z}:\mathrm{Map}(X\times Y,Z)\to\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))$ は次の合成写像に一致する.

$$\mathrm{Map}(X\times Y,Z)\xrightarrow{G^Y_{X\times Y,Z}}\mathrm{Map}(\mathrm{Map}(Y,X\times Y),\mathrm{Map}(Y,Z))\xrightarrow{\eta^*_{X,Y}}\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))$$

従って, $\varepsilon_{X\times Y,Z}:\mathrm{Map}(X\times Y,Z)\times X\times Y\to Z$ と $\varepsilon_{Y,X\times Y}:\mathrm{Map}(Y,X\times Y)\times Y\to X\times Y$ がともに連続ならば $\Phi_{X,Y,Z}$ は連続である.

証明 $f\in\mathrm{Map}(X\times Y,Z)$, $x\in X$, $y\in Y$ に対し

$$\begin{aligned}(\eta^*_{X,Y}(G^Y_{X\times Y,Z}(f))(x))(y)&=(\eta^*_{X,Y}(f_*)(x))(y)=(f_*(\eta_{X,Y}(x)))(y)=(f\circ(\eta_{X,Y}(x)))(y)=f((\eta_{X,Y}(x))(y))\\&=f(x,y)=(\Phi_{X,Y,Z}(f)(x))(y)\end{aligned}$$

だから $\eta^*_{X,Y}\circ G^Y_{X\times Y,Z}=\Phi_{X,Y,Z}$ である. $\varepsilon_{X\times Y,Z}$, $\varepsilon_{Y,X\times Y}$ がともに連続ならば系 29.9 により $G^Y_{X\times Y,Z}$ は連続であり, 補題 29.1 および補題 26.6 から $\eta^*_{X,Y}$ も連続であるため, $\Phi_{X,Y,Z}$ は連続である. □

命題 29.11 $\varepsilon_{Y,Z}:\mathrm{Map}(Y,Z)\times Y\to Z$ が連続であるとき, $\Psi_{X,Y,Z}:\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))\to\mathrm{Map}(X\times Y,Z)$ は次の合成写像に一致する.

$$\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))\xrightarrow{F^Y_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)}}\mathrm{Map}(X\times Y,\mathrm{Map}(Y,Z)\times Y)\xrightarrow{\varepsilon_{Y,Z*}}\mathrm{Map}(X\times Y,Z)$$

さらに $\varepsilon_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)}:\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))\times X\to\mathrm{Map}(Y,Z)$ も連続ならば $\Psi_{X,Y,Z}$ は連続である.

証明 前半の主張は $\Psi_{X,Y,Z}$ と $F^Y_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)}$ の定義から明らかである.

$\varepsilon_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)}:\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))\times X\to\mathrm{Map}(Y,Z)$ も連続ならば命題 29.7 により $F^Y_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)}$ は連続であり, 仮定と補題 26.6 により $\varepsilon_{Y,Z*}$ も連続であるため, $\varepsilon_{Y,Z*}\circ F^Y_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)}$ は連続である. □

命題 29.4, 命題 29.10, 命題 29.11 から次の結果を得る.

定理 29.12 4 つの写像

$$\begin{gathered}\varepsilon_{X\times Y,Z}:\mathrm{Map}(X\times Y,Z)\times X\times Y\to Z,\qquad \varepsilon_{Y,X\times Y}:\mathrm{Map}(Y,X\times Y)\times Y\to X\times Y,\\ \varepsilon_{Y,Z}:\mathrm{Map}(Y,Z)\times Y\to Z,\qquad \varepsilon_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)}:\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))\times X\to\mathrm{Map}(Y,Z)\end{gathered}$$

がすべて連続ならば $\Phi_{X,Y,Z}:\mathrm{Map}(X\times Y,Z)\to\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))$ は同相写像である.

補題 29.13 (1) X が弱 Hausdorff 空間ならば, 次の集合は $\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))$ の準基底である.

$$\{W(C,W(D,O))|\,C\text{ は }X\text{ のコンパクト部分集合},\ D\text{ は }Y\text{ のコンパクト部分集合},\ O\text{ は }Z\text{ の開集合}\}$$

(2) X, Y がともに弱 Hausdorff 空間ならば, 次の集合は $\mathrm{Map}(X\times Y,Z)$ の準基底である.

$$\{W(C\times D,O)|\,C\text{ は }X\text{ のコンパクト部分集合},\ D\text{ は }Y\text{ のコンパクト部分集合},\ O\text{ は }Z\text{ の開集合}\}$$

証明 (1) $\{W(D,O)|\,D$ は Y のコンパクト部分集合, O は Z の開集合$\}$ は $\mathrm{Map}(Y,Z)$ の準基底で, X は弱 Hausdorff 空間だから補題 26.14 によって結果が得られる.

(2) E を $X\times Y$ のコンパクト集合, O を Z の開集合とし, $f\in W(E,O)$ とする. $p_1:X\times Y\to X$, $p_2:X\times Y\to Y$ をそれぞれ X, Y への射影とすれば, E のコンパクト性から $p_1(E)$, $p_2(E)$ はそれぞれ X, Y のコンパクト部分空間である. 一方, 仮定から X と Y は弱 Hausdorff 空間だから, $p_1(E)$ と $p_2(E)$ は Hausdorff 空間でもあるため, 系 16.6 によって $p_1(E)$ と $p_2(E)$ は正規空間である. E は $p_1(E)\times p_2(E)$ の開集合 $f^{-1}(O)\cap(p_1(E)\times p_2(E))$ に

含まれるため, 各 $(x,y)\in E$ に対し, $p_1(E)$ における x の開近傍 $U(x,y)$ と $p_2(E)$ における y の開近傍 $V(x,y)$ で, $U(x,y)\times V(x,y)\subset f^{-1}(O)$ となるものがある. さらに, $p_1(E)$ と $p_2(E)$ が正規空間であることから, x, y の $p_1(E)$, $p_2(E)$ における開近傍 $U'(x,y)$, $V'(x,y)$ で, $\overline{U'(x,y)}\subset U(x,y)$, $\overline{V'(x,y)}\subset V(x,y)$ を満たすものがある. E のコンパクト性から $E\subset\bigcup_{i=1}^{n}(U'(x_i,y_i)\times V'(x_i,y_i))$ を満たす $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)\in E$ が選べて, $i=1,2,\dots,n$ に対し, $\overline{U'(x_i,y_i)}$, $\overline{V'(x_i,y_i)}$ はコンパクト空間 $p_1(E)$, $p_2(E)$ の閉集合だからコンパクトである. ここで, $f\in\bigcap_{i=1}^{n}W\left(\overline{U'(x_i,y_i)}\times\overline{V'(x_i,y_i)},O\right)=W\left(\bigcup_{i=1}^{n}\overline{U'(x_i,y_i)}\times\overline{V'(x_i,y_i)},O\right)\subset W(E,O)$ となるため, 主張が示された. □

補題 29.14 $C\subset X$, $D\subset Y$, $O\subset Z$ に対し, $\Phi_{X,Y,Z}^{-1}(W(C,W(D,O)))=W(C\times D,O)$ が成り立つ.

証明 $C\subset X$, $D\subset Y$, $O\subset Z$ ならば, 以下の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\Phi_{X,Y,Z}^{-1}(W(C,W(D,O)))&=\{f\in\mathrm{Map}(X\times Y,Z)|\,(\Phi_{X,Y,Z}(f))(C)\subset W(D,O)\}\\&=\{f\in\mathrm{Map}(X\times Y,Z)|\,x\in C \text{ ならば } ((\Phi_{X,Y,Z}(f))(x))(D)\subset O\}\\&=\{f\in\mathrm{Map}(X\times Y,Z)|\,x\in C \text{ ならば } f(\{x\}\times D)\subset O\}\\&=\{f\in\mathrm{Map}(X\times Y,Z)|\,f(C\times D)\subset O\}=W(C\times D,O)\end{aligned}$$

□

命題 29.15 X が弱 Hausdorff 空間ならば $\Phi_{X,Y,Z}:\mathrm{Map}(X\times Y,Z)\to\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))$ は連続である.

証明 X が弱 Hausdorff 空間ならば補題 29.13 の (1) と補題 29.14 により $\Phi_{X,Y,Z}$ は連続である. □

定理 29.16 X, Y が弱 Hausdorff 空間であり, $\varepsilon_{Y,Z}:\mathrm{Map}(Y,Z)\times Y\to Z$ が連続ならば

$$\Phi_{X,Y,Z}:\mathrm{Map}(X\times Y,Z)\to\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))$$

は同相写像である.

証明 命題 29.15 と命題 29.4 によって $\Phi_{X,Y,Z}$ は連続な全単射である. また, 補題 29.14 により, $C\subset X$, $D\subset Y$, $O\subset Z$ に対し, $\Phi_{X,Y,Z}^{-1}(W(C,W(D,O)))=W(C\times D,O)$ が成り立つが, $\Phi_{X,Y,Z}$ は全単射だから, $\Phi_{X,Y,Z}(W(C\times D,O))=W(C,W(D,O))$ が成り立つことに注意する. 補題 29.13 の (2) により

$$\{W(C\times D,O)|\,C \text{ は } X \text{ のコンパクト部分集合}, D \text{ は } Y \text{ のコンパクト部分集合}, O \text{ は } Z \text{ の開集合}\}$$

は $\mathrm{Map}(X\times Y,Z)$ の準基底になるため, $\Phi_{X,Y,Z}$ は開写像でもある. 従って $\Phi_{X,Y,Z}$ は同相写像である. □

系 29.17 X が弱 Hausdorff 空間, Y が局所コンパクトな Hausdorff 空間ならば, 任意の位相空間 Z に対して

$$\Phi_{X,Y,Z}:\mathrm{Map}(X\times Y,Z)\to\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))$$

は同相写像である.

証明 仮定と命題 16.8 により, Y は強い意味で局所コンパクトであるため, 命題 29.6 により $\varepsilon_{Y,Z}:\mathrm{Map}(Y,Z)\times Y\to Z$ は連続である. 従って定理 29.16 により, 結果が得られる. □