円周の間の連続写像と写像度

円周の間の連続写像に「写像度」と呼ばれる整数を対応させることにより, 連続写像の性質を調べるのが本論の目的である. 円周の間の連続写像の写像度とは, 直観的には, 円周上の点が円周を正の向きに 1 周するとき, その点の像は円周を何回かまわるが, この回数を符号まで込めて考えたものであるが, これを厳密に定義するために最初の節で準備をする. 次に, 写像度の定義を与え, いくつかの重要な性質を証明し, その応用として第 3 節では, Brouwer の不動点定理と呼ばれる結果や, 「複素数を係数とする代数方程式は複素数の範囲で解をもつ」という代数学の基本定理などを示す. さらに最後の節では, 写像度が高次元の球面の間の連続写像に対しても定義されることについても言及し, 「3 次元空間における体積のある 3 つの領域を同時に 2 等分するような平面が存在する」というハムサンドイッチの定理が示されることをみる.

§1. 準備

記号 1.1 $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$ により, それぞれ実数全体, 複素数全体の集合を表すことにする. 自然数 n に対し, $\boldsymbol{R}^n$ を n 個の実数の組全体よりなる集合 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) |\, x_j \in \boldsymbol{R}\}$ とする. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \boldsymbol{R}^n$ のとき, $x = y$ であるとは, $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots x_n = y_n$ が成り立つとこととし, 成分ごとに $\boldsymbol{R}^n$ の加法と実数倍を $x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n), rx = (rx_1, rx_2, \dots, rx_n)$ で定める. さらに, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ とおいて, x の長さといい, $\|x-y\|$ を x と y の距離という. また, $p \in \boldsymbol{R}^n$ と $\varepsilon > 0$ に対し, $B(p; \varepsilon) = \{x \in \boldsymbol{R} |\, \|x-p\| < \varepsilon\}$ とおいて, p を中心とする半径 ε の開球と呼ぶ. このように, 加法, 実数倍, 距離が定義された集合 $\boldsymbol{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間という.

命題 1.2 $x, y \in \boldsymbol{R}^n$, $r \in \boldsymbol{R}$ とすると, $\|x+y\| \leqq \|x\| + \|y\|$, $\|rx\| = |r| \cdot \|x\|$ であり, $\|x\| = 0$ が成り立つのは $x = 0$ の場合に限る.

記号 1.3 $a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a < b)$ に対し, $(a, b) = \{x \in \boldsymbol{R} |\, a < x < b\}$, $[a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} |\, a \leqq x \leqq b\}$ とおき, それぞれ $\boldsymbol{R}$ の開区間, 閉区間と呼ぶ. $[0,1]^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n |\, 0 \leqq x_j \leqq 1\}$ とおき, n 次元立方体という. $D^n = \{x \in \boldsymbol{R}^n |\, \|x\| \leqq 1\}$, $S^n = \{x \in \boldsymbol{R}^{n+1} |\, \|x\| = 1\}$ とおき, それぞれ n 次元球体, n 次元球面という. とくに, S^1 は原点を中心とする単位円であり, D^2 は S^1 を境界とする円板, S^2 は原点を中心とする単位球面である.

定義 1.4 X, Y をそれぞれ $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ の部分集合とする. 写像 $f : X \to Y$ が $p \in X$ において連続であるとは, どのような $\varepsilon > 0$ に対しても "$x \in B(p; \delta) \cap X$ ならば $f(x) \in B(f(p); \varepsilon)$" が成り立つような $\delta > 0$ が存在することをいう. f がすべての $p \in X$ で連続であるとき, f を連続写像という.

以後, X, Y などはとくに断らない限りユークリッド空間の部分集合とし, それらの間の写像は連続写像とする.

命題 1.5 (1) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ がともに連続写像ならば, 合成写像 $g \circ f : X \to Z$ も連続である.

(2) Y を $\boldsymbol{R}^m$ の部分集合, $f : X \to Y$ を写像とする. $x \in X$ に対し, $f(x)$ の 第 j 成分を $f_j(x)$ で表し, x に $f_j(x)$ を対応させることにより実数値関数 $f_j : X \to \boldsymbol{R}$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ が定まるが, f が連続であるためには, すべての $j = 1, 2, \dots, m$ に対して f_j が連続であることが必要十分である.

(3) $f, g : X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数, $c \in \boldsymbol{R}$ とすると, $f+g, cf, fg : X \to \boldsymbol{R}$ はすべて連続である. また, すべての $x \in X$ に対して $g(x) \neq 0$ ならば $\frac{f}{g} : X \to \boldsymbol{R}$ も連続である. 但し, $f+g$, cf, fg, $\frac{f}{g}$ はそれぞれ $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(cf)(x) = cf(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ で定義される関数である.

連続関数については, 次の結果は重要である.

定理 1.6 (中間値の定理) X を $\boldsymbol{R}$ の部分集合, $f : X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする. $[a, b] \subset X$ であり, $f(a) \neq f(b)$ なら

ば, $f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の値 d に対し, $f(c)=d$ となる $c \in (a,b)$ が存在する.

中間値の定理から次の結果がただちに得られる.

補題 1.7　$f:[a,b] \to \boldsymbol{R}$ が連続で, すべての $x \in [a,b]$ に対して $f(x)$ が整数ならば, f は定数値関数である.

集合 X, Y の間の 2 つの写像 $f, g : X \to Y$ に対し, $f(x)=g(x)$ を満たす x を f と g の一致点という. とくに, X が Y の部分集合で, g が包含写像 $g(x)=x$ の場合, f と g の一致点を f の不動点または固定点という.
中間値の定理を用いれば, 以下のことが容易に示される.

定理 1.8　閉区間 $[a,b]$ からそれ自身への連続写像は不動点をもつ.

定理 1.9　$f : S^1 \to \boldsymbol{R}$ を連続写像とするとき, $f(-x)=f(x)$ を満たす $x \in S^1$ が存在する.

証明　$h:[0,1] \to \boldsymbol{R}$ を $h(t)=f(\cos \pi t, \sin \pi t) - f(-\cos \pi t, -\sin \pi t)$ で定義すれば, h は連続で, $h(0)=-h(1)$ が成り立つ. $h(0)=0$ ならば $x=(1,0)$ が $f(-x)=f(x)$ を満たす. $h(0) \neq 0$ ならば $h(0)$ と $h(1)$ の符号が異なるため, 中間値の定理により $h(t_0)=0$ となる $t_0 \in [0,1]$ が存在する. このとき $x=(\cos \pi t_0, \sin \pi t_0)$ が $f(-x)=f(x)$ を満たす. □

次の定理は n 次元立方体で定義された実数値連続関数の本質的な性質の 1 つである.

定理 1.10　n 次元立方体で定義された実数値連続関数 $f:[0,1]^n \to \boldsymbol{R}$ は一様連続である. すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, "$\|x-y\| < \delta$ ならば $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$" が成り立つような $\delta > 0$ がある.

$\boldsymbol{R}^2$ と $\boldsymbol{C}$ を対応 $(x,y) \leftrightarrow x+iy$ により同一視して, 1 次元球面 (円周) S^1 を絶対値 1 の複素数全体の集合, 2 次元球体 (円板) D^2 を絶対値 1 以下の複素数全体の集合とみなす.
$e : \boldsymbol{R} \to S^1$ を $e(t)=\cos 2\pi t + i \sin 2\pi t$ で定義される写像とし, $l : S^1 - \{-1\} \to (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ を

$$l(x+iy) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \cos^{-1} x & y \geqq 0 \\ -\frac{1}{2\pi} \cos^{-1} x & y \leqq 0 \end{cases}$$

$(x, y \in \boldsymbol{R},\ x^2+y^2=1)$ で定めると次の補題は容易に示される.

補題 1.11　(1) e, l は連続であり, $e(l(x+iy)) = x+iy$ $(x+iy \in S^1 - \{-1\},\ x, y \in \boldsymbol{R})$, $l(e(t)) = t$ $(t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ が成り立つ.

(2) $s, t \in \boldsymbol{R}$ に対し, $e(s+t)=e(s)e(t)$ であり, $e(t)=e(s)$ であることと, $t-s$ が整数であることは同値である.

(3) 任意の $\delta > 0$ に対して, $\rho > 0$ で "$0 < |z+1| < \rho$ かつ $z \in S^1$ ならば $-\frac{1}{2} < l(z) < -\frac{1}{2}+\delta$ または $\frac{1}{2}-\delta < l(z) < \frac{1}{2}$" を満たすものがある.

補題 1.12　$f:[0,1]^n \to S^1$ を連続写像, $x_0 \in [0,1]^n$ とする.

(1) $f(x_0)=e(t_0)$ を満たす 実数 t_0 に対し, 連続写像 $\tilde{f}:[0,1]^n \to \boldsymbol{R}$ で, $e \circ \tilde{f} = f$ かつ $\tilde{f}(x_0)=t_0$ を満たすものが存在する.

(2) 連続写像 $\tilde{f}, \tilde{g} : [0,1]^n \to \boldsymbol{R}$ が $e \circ \tilde{f} = e \circ \tilde{g} = f$ を満たせば, $k = \tilde{g}(x_0) - \tilde{f}(x_0)$ とおくと k は整数で, すべての $x \in [0,1]^n$ に対して, $\tilde{g}(x) = \tilde{f}(x) + k$ が成り立つ.

証明　(1) $f(x) = f_1(x) + f_2(x)i$ $(f_1, f_2 : [0,1]^n \to \boldsymbol{R})$ とすると, (1.5) の (2) から f_1, f_2 は連続だから (1.10) を用いると "$\|x-y\| < \delta$ ならば $|f_j(x) - f_j(y)| < \sqrt{2}$ $(j=1,2)$" を満たすような $\delta > 0$ があることがわかる. 従って, $\|x-y\| < \delta$ ならば $|f(x)-f(y)| < 2$ が成り立つ. $N > \frac{\sqrt{n}}{\delta}$ である整数 N をとれば, 任意の $j=1,2,\ldots,N$ と $x \in [0,1]^n$ に対して, $\frac{j}{N}x \in [0,1]^n$ であることに注意すると $\|\frac{j}{N}x - \frac{j-1}{N}x\| = \frac{\|x\|}{N} < \delta$ だから $|f(\frac{j}{N}x) - f(\frac{j-1}{N}x)| < 2$ である. 一般に $z, w \in S^1$ が $|z-w| < 2$ を満たすことと $\frac{z}{w} \neq -1$ であることは同値だか

ら, $g_j(x) = f\left(x_0 + \frac{j}{N}(x - x_0)\right) f\left(x_0 + \frac{j-1}{N}(x - x_0)\right)^{-1}$ とおくと, g_j は $[0,1]^n$ から $S^1 - \{-1\}$ への写像であり, $g_j(x_0) = 1$ となる. このとき, $f(x) = f(x_0)g_1(x)g_2(x)\cdots g_N(x)$ がすべての $x \in [0,1]^n$ に対して成り立つ. そこで, $\tilde{f}$ を $\tilde{f}(x) = t_0 + \sum_{j=1}^{N} l(g_j(x))$ で定めると $\tilde{f}(x_0) = t_0$ であり, (1.11) を用いて $e(\tilde{f}(x)) = e\Big(t_0 + \sum_{j=1}^{N} l(g_j(x))\Big) = e(t_0)e(l(g_1(x)))\cdots e(l(g_N(x))) = f(x_0)g_1(x)\cdots g_N(x) = f(x)$.

(2) すべての $x \in [0,1]^n$ に対し, $e(\tilde{g}(x)) = e(\tilde{f}(x))$ が成り立つため, (1.11) により, $\tilde{g}(x) - \tilde{f}(x)$ は整数である. 従って $x \in [0,1]^n$ を固定して, $h(t) = \tilde{g}(x_0 + t(x - x_0)) - \tilde{f}(x_0 + t(x - x_0))$ により写像 $h : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を定めると h は連続で常に整数を値にとる. 故に (1.7) から h は定数値関数で, $h(1) = h(0) = k$ だから $\tilde{g}(x) = \tilde{f}(x) + k$ である.□

上の (2) において, とくに $k = 0$ の場合を考えると (1) の条件を満たす $\tilde{f}$ はただ 1 つしか存在しないことがわかる.

§2. 写像度の定義と性質

定義 2.1 連続写像 $f : S^1 \to S^1$ に対し, f の写像度と呼ばれる整数 $\deg f$ を以下のように定義する. $f \circ e : \boldsymbol{R} \to S^1$ の定義域を $[0,1]$ に制限した写像を $f' : [0,1] \to S^1$ とし, $f(1) = e(t_0)$ を満たす $t_0 \in \boldsymbol{R}$ を選んでおく. (1.12) により, $e \circ \tilde{f} = f'$, $\tilde{f}(0) = t_0$ を満たす $\tilde{f} : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ がただ 1 つあるが, $e(\tilde{f}(1)) = f'(1) = f(e(1)) = f(1) = f(e(0)) = f'(0) = e(\tilde{f}(0))$ だから $\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$ は整数である. そこで, $\deg f = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$ と定義する.

$f(1) = e(s_0)$ である $s_0 \in \boldsymbol{R}$ に対し, $e \circ \tilde{g} = f'$, $\tilde{g}(0) = s_0$ を満たす $\tilde{g} : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ をとれば, (1.12) から $\tilde{g}(x) = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(0) - \tilde{f}(0)$ がすべての $x \in [0,1]$ について成り立つから $\tilde{g}(1) - \tilde{g}(0) = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$ である. 従って, 上の写像度の定義は $f(1) = e(t_0)$ を満たす $t_0 \in \boldsymbol{R}$ の選び方に依存しない.

命題 2.2 $c, I, T : S^1 \to S^1$ をそれぞれ, 定値写像 $c(z) = p_0$ (p_0 は S^1 の定点), 恒等写像 $I(z) = z$, 対心写像 $T(z) = -z$ とすれば, $\deg c = 0$, $\deg I = \deg T = 1$ である.

証明 $e(t_0) = p_0$ とし, $\tilde{c} : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を定値写像 $\tilde{c}(x) = t_0$ とすれば $e(\tilde{c}(x)) = p_0 = c(e(x))$ だから $\deg c = \tilde{c}(1) - \tilde{c}(0) = t_0 - t_0 = 0$. $\tilde{I} : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を包含写像 $\tilde{I}(x) = x$ とすれば, $e(\tilde{I}(x)) = e(x) = I(e(x))$ だから $\deg I = \tilde{I}(1) - \tilde{I}(0) = 1 - 0 = 1$. $\widetilde{T} : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を $\widetilde{T}(x) = x + \frac{1}{2}$ で定めると, $e(\widetilde{T}(x)) = e\left(x + \frac{1}{2}\right) = -e(x) = T(e(x))$ だから $\deg T = \widetilde{T}(1) - \widetilde{T}(0) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$. □

命題 2.3 $f, g : S^1 \to S^1$ を 連続写像とする.

(1) 写像 $fg : S^1 \to S^1$ を複素数の積を用いて $(fg)(z) = f(z)g(z)$ で定めれば, $\deg(fg) = \deg f + \deg g$.

(2) $\deg(f \circ g) = (\deg f)(\deg g)$.

証明 $f', g' : [0,1] \to S^1$ を $f \circ e, g \circ e : \boldsymbol{R} \to S^1$ の定義域を $[0,1]$ に制限した写像とし, $f(1) = e(t_0)$, $g(1) = e(s_0)$ を満たす $t_0, s_0 \in \boldsymbol{R}$ を選んでおく. $e \circ \tilde{f} = f'$, $e \circ \tilde{g} = g'$, $\tilde{f}(0) = t_0$, $\tilde{g}(0) = s_0$ を満たす $\tilde{f}, \tilde{g} : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ をとる.

(1) $\tilde{h} : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を $\tilde{h}(x) = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)$ で定めれば, $e(\tilde{h}(x)) = e(\tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)) = e(\tilde{f}(x))e(\tilde{g}(x)) = f(e(x))g(e(x)) = (fg)(e(x))$ だから $\deg(fg) = \tilde{h}(1) - \tilde{h}(0) = (\tilde{f}(1) + \tilde{g}(1)) - (\tilde{f}(0) + \tilde{g}(0)) = (\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)) + (\tilde{g}(1) - \tilde{g}(0)) = \deg f + \deg g$.

(2) $\tilde{f}(1) = \tilde{f}(0) + \deg f$ だから $\hat{f} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $\hat{f}(x) = \tilde{f}(x - k) + k(\deg f)$ (但し k は $x \in [k, k+1]$ である整数) で定めることができる. このとき, $\hat{f}$ は連続で, $\tilde{g}(x) \in [m_x, m_x + 1]$ (m_x は整数) ならば $e(\hat{f} \circ \tilde{g}(x)) = e(\hat{f}(\tilde{g}(x))) = e(\tilde{f}(\tilde{g}(x) - m_x) + m_x(\deg f)) = e(\tilde{f}(\tilde{g}(x) - m_x)) = f(e(\tilde{g}(x) - m_x)) = f(e(\tilde{g}(x))) = (f \circ g)(e(x))$ である. 従って, $\deg(f \circ g) = \hat{f} \circ \tilde{g}(1) - \hat{f} \circ \tilde{g}(0) = \hat{f}(\tilde{g}(0) + \deg g) - \hat{f}(\tilde{g}(0)) = \tilde{f}(\tilde{g}(0) + \deg g - (m_0 + \deg g)) + (m_0 + \deg g)(\deg f) - (\tilde{f}(\tilde{g}(0) - m_0) + m_0(\deg f)) = (\deg f)(\deg g)$. □

系 2.4 n を整数とするとき $p_n(z) = z^n$ で定義される写像 $p_n : S^1 \to S^1$ の写像度は n である.

証明 $n=0$ の場合 p_0 は定値写像だから (2.2) から $\deg\, p_0 = 0$. $n>0$ の場合 p_n は恒等写像 I の n 乗 I^n だから (2.2) と (2.3) から $\deg\, p_n = n\deg\, I = n$. $n<0$ の場合 $p_n p_{-n} = p_0$ だから (2.3) から $\deg\, p_n + \deg\, p_{-n} = \deg\, p_0 = 0$. 一方 $\deg\, p_{-n} = -n$ だから $\deg\, p_n = n$. □

命題 2.5 $f : S^1 \to S^1$ を 連続写像とし, n を自然数, k を整数とする. $\xi_n = e\left(\frac{1}{n}\right)$ とおくとき, すべての $x \in S^1$ に対して $f(\xi_n x) = \xi_n^k f(x)$ であれば $\deg\, f - k$ は n の倍数である.

証明 $f' : [0,1] \to S^1$, $\tilde{f} : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を上の命題の証明におけるものと同じとする. 任意の $x \in \left[0, \frac{n-1}{n}\right]$ に対して $e\left(\tilde{f}\left(x+\frac{1}{n}\right)\right) = f\left(e\left(x+\frac{1}{n}\right)\right) = f(\xi_n e(x)) = \xi_n^k f(e(x)) = e(\tilde{f}(x))e\left(\frac{k}{n}\right) = e\left(\tilde{f}(x)+\frac{k}{n}\right)$ だから (1.11) の (2) により, $\tilde{f}\left(x+\frac{1}{n}\right) - \tilde{f}(x) - \frac{k}{n}$ は整数である. 従って $x \mapsto \tilde{f}\left(x+\frac{1}{n}\right) - \tilde{f}(x) - \frac{k}{n}$ は $\left[0, \frac{n-1}{n}\right]$ で定義された整数値をとる連続関数だから (1.7) により, 定数値関数である. そこで $m = \tilde{f}\left(x+\frac{1}{n}\right) - \tilde{f}(x) - \frac{k}{n}$ とおくと, $\deg\, f = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) = \sum_{j=1}^{n}\left(\tilde{f}\left(\frac{j}{n}\right) - \tilde{f}\left(\frac{j-1}{n}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(m+\frac{k}{n}\right) = mn + k$ で, m は整数だから $\deg\, f - k$ は n の倍数である. □

X, Y がそれぞれ $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ の部分集合であるとき, X の点 x と Y の点 y の対 (x,y) 全体の集合 $X \times Y = \{(x,y) |\, x \in X,\ y \in Y\}$ を X と Y の直積空間という. このとき, $X \times Y$ を $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の部分集合とみなす.

定義 2.6 $f, g : X \to Y$ を連続写像とする. 連続写像 $H : X \times [0,1] \to Y$ で, 各 $x \in X$ に対して $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ を満たすものが存在するとき f と g はホモトピックであるといい H を f と g の間のホモトピーという.

命題 2.7 $f, g : S^1 \to S^1$ がホモトピックな連続写像ならば $\deg\, f = \deg\, g$ である.

証明 $H : S^1 \times [0,1] \to S^1$ を f と g の間のホモトピーとする. $H' : [0,1]^2 \to S^1$ を $H'(s,t) = H(e(s),t)$ で定め, $H(0,0) = f(0) = e(t_0)$ を満たす $t_0 \in \boldsymbol{R}$ を 1 つとる. (1.12) から 連続写像 $\widetilde{H} : [0,1]^2 \to \boldsymbol{R}$ で, $e \circ \widetilde{H} = H'$ かつ $\widetilde{H}(0,0) = t_0$ を満たすものがある. このとき $s \in [0,1]$ に対し, $e(\widetilde{H}(s,0)) = H'(s,0) = H(e(s),0) = f(e(s))$, $e(\widetilde{H}(s,1)) = H'(s,1) = H(e(s),1) = g(e(s))$ だから $\deg\, f = \widetilde{H}(1,0) - \widetilde{H}(0,0)$, $\deg\, g = \widetilde{H}(1,1) - \widetilde{H}(0,1)$ である. 一方 $t \in [0,1]$ に対し, $e(\widetilde{H}(1,t)) = H'(1,t) = H(e(1),t) = H(1,t) = H(e(0),t) = H'(0,t) = e(\widetilde{H}(0,t))$ となるため $t \mapsto \widetilde{H}(1,t) - \widetilde{H}(0,t)$ は $[0,1]$ で定義された整数値をとる連続関数だから (1.7) により, 定数値関数である. 従って, 上式から $\deg\, f = \deg\, g$ である. □

命題 2.8 連続写像 $f : S^1 \to S^1$ に関する次の 4 つの条件は同値である.

(1) 連続写像 $F : D^2 \to S^1$ で, $x \in S^1$ ならば $F(x) = f(x)$ となるものがある.
(2) f は定値写像にホモトピックである.
(3) $\deg\, f = 0$.
(4) 連続写像 $\bar{f} : S^1 \to \boldsymbol{R}$ で, $e \circ \bar{f} = f$ を満たすものがある.

証明 (1) ⇒ (2); $H : S^1 \times [0,1] \to S^1$ を $H(z,t) = F(tz)$ で定めると, $H(z,0) = F(0)$, $H(z,1) = f(z)$ だから H は定値写像と f の間のホモトピーである.

(2) ⇒ (3); f が定値写像にホモトピックならば (2.7) と (2.2) から $\deg\, f = 0$ である.

(3) ⇒ (4); $\tilde{f} : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を $e(\tilde{f}(x)) = f(e(x))$ $(x \in [0,1])$ を満たす連続関数とすれば, 仮定から $\tilde{f}(1) = \tilde{f}(0)$ である. $t_0 = \tilde{f}(1) = \tilde{f}(0)$ とおき, $\bar{f} : S^1 \to \boldsymbol{R}$ を次で定めると, 1 以外の点では明らかに $\bar{f}$ は連続である.

$$\bar{f}(z) = \begin{cases} \tilde{f}(l(-z)+\frac{1}{2}) & z \neq 1 \\ t_0 & z = 1 \end{cases}$$

$\tilde{f}$ の 0, 1 における連続性から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, “$0 < x < \delta$ または $1-\delta < x < 1$ ならば $|\tilde{f}(x) - t_0| < \varepsilon$” を満

たす $\delta > 0$ がある．一方 (1.11) の (3) から $\rho > 0$ で，“$0 < |z-1| < \rho$ かつ $z \in S^1$ ならば $0 < l(-z) + \frac{1}{2} < \delta$ または $1-\delta < l(z) + \frac{1}{2} < 1$” を満たすものがある．従って，$\bar{f}$ は 1 においても連続である．$e \circ \bar{f} = f$ は $\bar{f}$ の定義からただちにわかる．

(4) $\Rightarrow$ (1); S^1 は $\boldsymbol{R}^2$ の有界閉集合だから，S^1 で定義された実数値連続関数 $\bar{f}$ は最大値と最小値をもつため，$\bar{f}(S^1) \subset [-M, M]$ を満たす正の実数 M がとれる．このとき $z \neq 0$ ならば $\left|\bar{f}\left(\frac{z}{|z|}\right)\right| \leqq M$ であるため，$z \to 0$ ならば $|z|\bar{f}\left(\frac{z}{|z|}\right) \to 0$ である．そこで $F : D^2 \to S^1$ を次で定めれば，F は 0 でも連続だから F は連続写像である．

$$F(z) = \begin{cases} e\left(|z|\bar{f}\left(\frac{z}{|z|}\right)\right) & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

$x \in S^1$ ならば $\bar{f}$ についての仮定から $F(x) = e(\bar{f}(z)) = f(x)$ が成り立つ． □

系 2.9 $f, g : S^1 \to S^1$ を連続写像とするとき，f と g がホモトピックであるためには，$\deg f = \deg g$ が成り立つことが必要十分である．

証明 $\deg f = \deg g$ が成り立つと仮定する．$\bar{g} : S^1 \to S^1$ を $\bar{g}(z) = \frac{1}{g(z)}$ で定義すると，積 $\bar{g}g$ は定値写像だから (2.3), (2.2) より $\deg \bar{g} + \deg g = \deg(\bar{g}g) = 0$. 従って，$\deg \bar{g} = -\deg g$ だから $\deg(f\bar{g}) = \deg f + \deg \bar{g} = \deg f - \deg g = 0$. 故に (2.8) から $f\bar{g}$ は定値写像にホモトピックである．$H : S^1 \times [0,1] \to S^1$ を $f\bar{g}$ と定値写像 c ($c(z) = \cos\theta_0 + i\sin\theta_0$) の間のホモトピー ($H(z,0) = f(z)\bar{g}(z)$, $H(z,1) = \cos\theta_0 + i\sin\theta_0$) として，$G : S^1 \times [0,1] \to S^1$ を $G(z,t) = g(z)H(z,t)(\cos(t\theta_0) - i\sin(t\theta_0))$ で定めれば，G は f から g へのホモトピーである． □

命題 2.10 任意の連続関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ に対し，$e \circ f : X \to S^1$ は定値写像にホモトピックである．

証明 $H : X \times [0,1] \to S^1$ を $H(x,t) = e(tf(x))$ で定めれば，H は定値写像から $e \circ f$ へのホモトピーである． □

$\mu : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ を，$\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$ で定めれば μ は連続関数である．このとき，$t \in \boldsymbol{R}$, $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $\mu(tx) = |t|\mu(x)$, $\|x\| \leqq \sqrt{n}\mu(x)$ が成り立ち，x が原点 0 であることと $\mu(x) = 0$ であることは同値であることに注意する．z_0 をすべての成分が $\frac{1}{2}$ である $[0,1]^n$ の点とすれば，$x \in [0,1]^n$ であるためには，$\mu(x - z_0) \leqq \frac{1}{2}$ であることが必要十分である．また $\partial[0,1]^n = \left\{x \in [0,1]^n \,\middle|\, \mu(x - z_0) = \frac{1}{2}\right\}$ とおく．

命題 2.11 $\eta_n : [0,1]^n \to D^n$ を次のように定めれば，η_n は $\partial[0,1]^n$ を S^{n-1} の上に写す同相写像である．

$$\eta_n(x) = \begin{cases} \frac{2\mu(x-z_0)}{\|x-z_0\|}(x - z_0) & x \neq z_0 \\ 0 & x = z_0 \end{cases}$$

証明 $x \in [0,1]^n$ かつ $x \neq z_0$ ならば $\|\eta_n(x)\| = 2\mu(x - z_0)$ だから，$\eta_n(x) \in D^n$ であり，$\eta_n(x) \in S^{n-1}$ であることと，$x \in \partial[0,1]^n$ であることは同値である．また μ の連続性から $\lim_{x \to z_0} \|\eta_n(x)\| = \lim_{x \to z_0} 2\mu(x - z_0) = 0$ だから η_n は z_0 で連続である．η_n は z_0 以外の点で明らかに連続だから，η_n は連続写像である．$\eta_n^{-1} : D^n \to [0,1]^n$ を

$$\eta_n^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{\|x\|}{2\mu(x)}x + z_0 & x \neq 0 \\ z_0 & x = 0 \end{cases}$$

で定めれば，$x \neq 0$ ならば $\mu\left(\eta_n^{-1}(x) - z_0\right) = \frac{\|x\|}{2}$ だから，確かに $x \in D^n$ ならば $\eta_n^{-1}(x) \in [0,1]^n$ である．$x \in D^n$ かつ $x \neq 0$ ならば $\left\|\eta_n^{-1}(x) - z_0\right\| = \frac{\|x\|^2}{2\mu(x)} \leqq \sqrt{n}\|x\|$ だから η_n^{-1} は原点で連続である．η_n^{-1} は原点以外の点で明らかに連続だから，η_n^{-1} は連続写像である．$\|\eta_n(x)\| = 2\mu(x - z_0)$ と $\mu(\eta_n(x)) = \frac{2\mu(x-z_0)^2}{\|x-z_0\|}$ を用いれば，任意の $x \in [0,1]^n$ に対して $\eta_n^{-1}(\eta_n(x)) = x$ であることが示され，$\left\|\eta_n^{-1}(x) - z_0\right\| = \frac{\|x\|^2}{2\mu(x)}$ と $\mu\left(\eta_n^{-1}(x) - z_0\right) = \frac{\|x\|}{2}$ を用いれば，任意の $x \in D^n$ に対して $\eta_n(\eta_n^{-1}(x)) = x$ であることが示されるため，η_n^{-1} は η_n の逆写像である． □

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$, $y \in \boldsymbol{R}$ に対し，$\boldsymbol{R}^{n+1}$ の点 $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ を (x, y) で表すことにする．

命題 2.12　$\rho_n : D^n \to S^n$ を

$$\rho_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sin(\pi\|x\|)}{\|x\|}x, \cos(\pi\|x\|)\right) & x \neq 0 \\ (0, 0, \dots, 0, 1) & x = 0 \end{cases}$$

によって定めれば ρ_n は S^{n-1} の点をすべて $(0, 0, \dots, 0, -1)$ に写す連続な全射である．さらに $x \neq x'$ かつ $\rho_n(x) = \rho_n(x')$ が成り立つのは，x と x' がともに S^{n-1} に属している場合に限る．

証明　$z \in \boldsymbol{R}^n$, $y \in \boldsymbol{R}$ に対し，$\|(z, y)\|^2 = \|z\|^2 + y^2$ だから，$x \neq 0$ ならば $\|\rho_n(x)\| = 1$ であり，確かに $\rho_n(x) \in S^n$ である．ρ_n が原点以外の点で連続であることは明らかである．$x \in D^n$ かつ $x \neq 0$ ならば $\left\|\frac{\sin(\pi\|x\|)}{\|x\|}x\right\| = \sin(\pi\|x\|)$ だから，$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(\pi\|x\|)}{\|x\|}x = 0$ となるため，ρ_n は原点でも連続であることがわかる．$(z, y) \in S^n$ $(z \in \boldsymbol{R}^n$, $y \in [-1, 1])$ に対し，$(z, y) \neq (0, 0, \dots, 0, \pm 1)$ ならば，$\|z\|^2 + y^2 = 1$ かつ $y \neq \pm 1$ だから，$\left\|\frac{\cos^{-1} y}{\pi\sqrt{1-y^2}}z\right\| = \frac{\cos^{-1} y}{\pi}$ であることに注意すれば，$\rho_n\left(\frac{\cos^{-1} y}{\pi\sqrt{1-y^2}}z\right) = (z, y)$ が成り立つことがわかる．また，$\rho_n(0, 0, \dots, 0) = (0, 0, \dots, 0, 1)$ であり $x \in S^{n-1}$ ならば $\rho_n(x) = (0, 0, \dots, 0, -1)$ だから ρ_n は S^{n-1} の点をすべて $(0, 0, \dots, 0, -1)$ に写す全射である．

　まず ρ_n の定義から，$\rho_n(x) = (0, 0, \dots, 0, 1)$ となる $x \in D^n$ は 0 のみである．$x, x' \in D^n - (S^{n-1} \cup \{0\})$ かつ $\rho_n(x) = \rho_n(x')$ ならば，$\sin(\pi\|x\|)$, $\sin(\pi\|x'\|)$ はともに 0 でないため，$\frac{\sin(\pi\|x\|)}{\|x\|}x = \frac{\sin(\pi\|x'\|)}{\|x'\|}x'$ かつ $\cos(\pi\|x\|) = \cos(\pi\|x'\|)$ より $x = x'$ が導かれる．従って，後半の主張が成り立つ．　□

注意 2.13　(1) n が 1 以上の整数ならば D^n は弧状連結だから，上の結果から S^n は弧状連結である．(2.11) により $\partial[0, 1]^n$ は S^{n-1} と同相だから，n が 2 以上の整数ならば $\partial[0, 1]^n$ は 弧状連結である．

　(2) D_n は $\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合であることからコンパクトで，S^n はハウスドルフ空間だから，ρ_n は閉写像である．従って，ρ_n は商写像である．

　(2.11), (2.12) と上の (2) から次のことがわかる．

補題 2.14　$x = y$ または $x, y \in \partial[0, 1]^n$ であるとき $x \sim y$ で表すことにして $[0, 1]^n$ の関係 $\sim$ を定めれば，$\sim$ は同値関係であり，$\rho_n \circ \eta_n : [0, 1]^n \to S^n$ はこの同値関係による商写像である．

定理 2.15　n が 2 以上の整数ならば，S^n から S^1 への任意の連続写像は，定値写像にホモトピックである．

証明　$f : S^n \to S^1$ を連続写像とし，$f(0, 0, \dots, 0, 1) = p_0$ とおく．$e(t_0) = p_0$ を満たす $t_0 \in \boldsymbol{R}$ を 1 つ選び，$\rho_n\eta_n(0, 0, \dots, 0) = (0, 0, \dots, 0, 1)$ であることに注意すれば，(1.12) の (1) から，連続写像 $g : [0, 1]^n \to \boldsymbol{R}$ で，$e \circ g = f \circ \rho_n \circ \eta_n$ かつ $g(0, 0, \dots, 0) = t_0$ を満たすものがある．$\partial[0, 1]^n$ は η_n によって S^{n-1} の上に同相に写り，S^{n-1} は ρ_n によって $(0, 0, \dots, 0, 1)$ に写るため，$\partial[0, 1]^n$ のすべての点は $e \circ g = f \circ \rho_n \circ \eta_n$ によって p_0 に写る．従って，$\partial[0, 1]^n$ は g によって，$e^{-1}(p_0) = \{n + t_0 | n \in \boldsymbol{Z}\}$ に写される．(2.13) の (1) により，$\partial[0, 1]^n$ の g による像は t_0 を含む $e^{-1}(p_0)$ の弧状連結な部分空間であるが，$e^{-1}(p_0)$ は $\boldsymbol{R}$ の離散位相をもつ部分空間であるため，$\partial[0, 1]^n$ の g による像は t_0 のみからなる集合である．故に (2.14) から，連続写像 $\tilde{f} : S^n \to \boldsymbol{R}$ で，$\tilde{f} \circ \rho_n \circ \eta_n = g$ を満たすものがある．このとき $e \circ \tilde{f} \circ \rho_n \circ \eta_n = e \circ g = f \circ \rho_n \circ \eta_n$ であり，$\rho_n \circ \eta$ は全射だから，$e \circ \tilde{f} = f$ が成り立つため，(2.10) によって f は定値写像にホモトピックである．　□

§3.　応用

定理 3.1　連続写像 $f, g : S^1 \to S^1$ の写像度が異なれば，f と g は一致点をもつ．とくに，f の写像度が 1 と異なれば，f は不動点をもち，f の写像度が 0 と異なれば，f は全射である．

証明　任意の $x \in S^1$ に対して，$f(x) \neq g(x)$ が成り立てば $\deg f = \deg g$ であることを示せばよい．このとき，任意

の $t\in[0,1]$ に対して $(1-t)f(x)\neq tg(x)$ だから, 連続写像 $F:S^1\times[0,1]\to S^1$ を $F(x,t)=\frac{(1-t)f(x)-tg(x)}{\|(1-t)f(x)-tg(x)\|}$ で定義できる. $F(x,0)=f(x)$, $F(x,1)=-g(x)$ だから (2.7), (2.3), (2.2) により, $\deg f=\deg(-g)=\deg(T\circ g)=(\deg T)(\deg g)=\deg g$. □

定理 3.2 連続写像 $f:D^2\to D^2$ は $f(S^1)\subset S^1$ を満たし, $f|_{S^1}:S^1\to S^1$ を $f|_{S^1}(z)=f(z)$ で与えられる写像としたとき $\deg(f|_{S^1})\neq 0$ であるとする. このとき, f は任意の連続写像 $g:D^2\to D^2$ と一致点をもつ. とくに, D^2 から D^2 への連続写像はつねに不動点をもつ.

証明 任意の $x\in D^2$ に対して, $f(x)\neq g(x)$ が成り立つと仮定する. 各 $x\in D^2$ に対し, $g(x)$ を始点として $f(x)$ を通る半直線と S^1 との交点を $F(x)$ とする. $u(x)=\frac{f(x)-g(x)}{\|f(x)-g(x)\|}$, $s(x)=-(f(x),u(x))+\sqrt{1-\|f(x)\|^2+(f(x),u(x))^2}$ とおけば, $F(x)=f(x)+s(x)u(x)$ であり, $F:D^2\to S^1$ は連続である. $x\in S^1$ ならば $f(x)\in S^1$ だから $F(x)=f(x)$ である. 従って, $f|_{S^1}$ は D^2 への拡張 F をもつため, (2.8) により $\deg(f|_{S^1})=0$ となって仮定に反する. □

上の定理の最後の主張は (1.8) の 2 次元のバージョンである. また (1.9) の 2 次元のバージョンは以下のようになる.

定理 3.3 任意の連続写像 $f:S^2\to\boldsymbol{R}^2$ に対し, $f(-x)=f(x)$ となる点 $x\in S^2$ が存在する.

証明 $h:D^2\to S^2$ を $h(x_1,x_2)=\left(x_1,x_2,\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\right)$ で定める. すべての $x\in S^2$ に対して, $f(-x)\neq f(x)$ と仮定すれば, $G:D^2\to S^1$ を $G(x)=\frac{f(h(x))-f(-h(x))}{\|f(h(x))-f(-h(x))\|}$ で定めることができる. $g:S^1\to S^1$ を G の S^1 への制限とすれば, (2.8) により $\deg g=0$ である. 一方すべての $x\in S^1$ に対して, $g(-x)=-g(x)$ が成り立つため, (2.5) において $n=2$, $k=1$ の場合を考えれば, $\deg g$ は奇数であり, 矛盾が生じる. □

定理 3.4 (1) 連続写像 $f:S^1\to S^1$ の写像度が奇数ならば $f(-x)=-f(x)$ となる点 $x\in S^1$ が存在する.
(2) 連続写像 $f:S^1\to S^1$ の写像度が偶数ならば $f(-x)=f(x)$ となる点 $x\in S^1$ が存在する.

証明 (1) すべての $x\in S^1$ に対して, $f(-x)\neq -f(x)$ ならば, f の写像度は偶数であることを示す. $g:S^1\to S^1$ を $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{\|f(x)+f(-x)\|}$ で定めると, すべての $x\in S^1$ に対して $g(-x)=g(x)$ だから, (2.5) において $n=2$, $k=0$ の場合を考えれば, g の写像度は偶数である. ところが任意の $x\in S^1$ と $t\in[0,1]$ に対して, $(1-t)f(x)+tg(x)\neq 0$ だから $H:S^1\times[0,1]\to S^1$ を $H(x,t)=\frac{(1-t)f(x)+tg(x)}{\|(1-t)f(x)+tg(x)\|}$ で定義できる. $H(x,0)=f(x)$, $H(x,1)=g(x)$ だから f は g にホモトピックである. 従って (2.7) から $\deg f=\deg g$ となって, $\deg f$ は偶数である.

(2) すべての $x\in S^1$ に対して, $f(-x)\neq f(x)$ ならば, f の写像度は奇数であることを示す. $g:S^1\to S^1$ を $g(x)=\frac{f(x)-(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$ で定めるとすべての $x\in S^1$ に対して $g(-x)=-g(x)$ だから, (2.5) において $n=2$, $k=1$ の場合を考えれば, g の写像度は奇数である. ところが任意の $x\in S^1$ と $t\in[0,1]$ に対して, $(1-t)f(x)-tg(x)\neq 0$ だから $H:S^1\times[0,1]\to S^1$ を $H(x,t)=\frac{(1-t)f(x)-tg(x)}{\|(1-t)f(x)-tg(x)\|}$ で定義できる. $H(x,0)=f(x)$, $H(x,1)=g(x)$ だから f は g にホモトピックである. 従って (2.7) から $\deg f=\deg g$ となって, $\deg f$ は奇数である. □

定理 3.5 (代数学の基本定理) 複素数を係数とする n 次代数方程式 $z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$ は $r=\max\{1,|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|\}$ とおくと, 絶対値が r 以下である複素数の解を少なくとも一つもつ.

証明 $|z|\leqq r$ ならば次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}|a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0|&\leqq|a_{n-1}||z^{n-1}|+\cdots+|a_1||z|+|a_0|\leqq|a_{n-1}|r^{n-1}+\cdots+|a_1|r+|a_0|\\&=r^{n-1}\left(|a_{n-1}|+\cdots+\frac{|a_1|}{r^{n-2}}+\frac{|a_0|}{r^{n-1}}\right)\leqq r^{n-1}(|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|)\leqq r^n\end{aligned}$$

そこで写像 $g:D^2\to D^2$ を $g(z)=-\frac{1}{r^n}(a_{n-1}(rz)^{n-1}+\cdots+a_1(rz)+a_0)$ で定義する. 一方, 連続写像 $f:D^2\to D^2$ を $f(z)=z^n$ で定義すれば, $f(S^1)\subset S^1$, $\deg(f|_{S^1})=n\neq 0$ だから (3.2) により f と g は一致点をもつ. これを z_0 とするとき $(rz_0)^n=-(a_{n-1}(rz_0)^{n-1}+\cdots+a_1(rz_0)+a_0)$ だから rz_0 は与えられた方程式の解である. □

§4. 一般化

写像度は一般に n 次元球面の間の連続写像に対しても定義される.

定理 4.1 連続写像 $f : S^n \to S^n$ に対して f の写像度と呼ばれる整数 $\deg f$ で, 以下の性質をもつものが定義される.

(1) 定値写像の写像度は 0 である.
(2) 恒等写像の写像度は 1 である.
(3) 対心写像の写像度は $(-1)^{n+1}$ である.
(4) $f, g : S^n \to S^n$ を連続写像とするとき, $\deg(g \circ f) = (\deg g)(\deg f)$ が成り立つ.
(5) $f, g : S^n \to S^n$ がホモトピックな連続写像ならば $\deg f = \deg g$ である.
(6) 連続写像 $f : S^n \to S^n$ がすべての $x \in S^n$ に対し $f(-x) = -f(x)$ を満たせば, $\deg f$ は奇数である.
(7) 連続写像 $f : S^n \to S^n$ がすべての $x \in S^n$ に対し $f(-x) = f(x)$ を満たせば, $\deg f$ は偶数である.

上の結果を用いれば, 前と同様の証明法で前節の (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) はそれぞれ以下のように一般化される.

定理 4.2 連続写像 $f, g : S^n \to S^n$ が $\deg f \neq (-1)^{n+1} \deg g$ を満たせば, f と g は一致点をもつ. とくに, f の写像度が $(-1)^{n+1}$ と異なれば, f は不動点をもち, f の写像度が 0 と異なれば, f は上への写像である.

定理 4.3 $f : D^n \to D^n$ は $f(S^{n-1}) \subset S^{n-1}$, $\deg(f|_{S^{n-1}}) \neq 0$ を満たす連続写像とする. このとき, f は任意の連続写像 $g : D^n \to D^n$ と一致点をもつ. とくに, D^n から D^n への連続写像はつねに不動点をもつ.

上の定理を Brouwer の一致点定理といい, その特別の場合を Brouwer の不動点定理という.

定理 4.4 $f : S^n \to \boldsymbol{R}^n$ を連続写像とするとき, $f(-x) = f(x)$ を満たす $x \in S^n$ が存在する.

上の定理を Borsuk の対心点定理または Borsuk-Ulam の定理という.

定理 4.5 連続写像 $f : S^n \to S^n$ の写像度が奇数ならば $f(-x) = -f(x)$ となる点 $x \in S^n$ が存在する. また, n が偶数で, f 写像度が 0 でなければ $f(-x) = -f(x)$ となる点 $x \in S^n$ が存在する.

次の定理は $n = 2$ の場合は中間値の定理の簡単な応用として得られるが, 一般の場合は (4.4) を用いて示される.

定理 4.6 (ハムサンドウィッチの定理) $\boldsymbol{R}^n$ のなかに n 個の有界な可測集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ が任意に与えられたとき, $\boldsymbol{R}^n$ の超平面 P で, 次のようなものが存在する. 各 j に対し, P で分割される A_j の 2 つの部分の測度は等しい.

証明 $\boldsymbol{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \boldsymbol{R}^{n+1} | x_{n+1} = 0\}$ とみなし, $y_0 = (0, 0, \ldots, 0, 1) \in \boldsymbol{R}^{n+1}$ とおく. 各 $x \in S^n$ に対し, x に垂直で y_0 を含む $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の超平面を Q_x とする. $y_0 \neq \boldsymbol{R}^n$ だから Q_x は $\boldsymbol{R}^n$ に一致しない. そこで, Q_x に関して $x + y_0$ 同じ側にある A_j の測度を $u_j(x)$ で表す. このとき各 $u_j : S^n \to \boldsymbol{R}$ は連続だから, $f(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$ で定義される連続写像 $f : S^n \to \boldsymbol{R}^n$ に対して (4.4) を用いると, $u_j(p) = u_j(-p)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ を満たす $p \in S^n$ が存在する. 各 $x \in S^n$ に対して $Q_x = Q_{-x}$ で, $x + y_0$ と $-x + y_0$ は Q_x に関して反対側にあるため A_j の測度を v_j とすれば $u_j(x) + u_j(-x) = v_j$ が成り立つ. 従って $u_j(p) = u_j(-p) = \frac{v_j}{2}$ であり, Q_p は $\boldsymbol{R}^n$ と平行でないため, Q_p と $\boldsymbol{R}^n$ の交わりを P とすればよい. □

参考文献

[1] 中岡　稔, 「不動点定理とその周辺」, 岩波書店, 1977.
[2] Spanier, Edwin H., *Algebraic Topology*, Springer Verlag, 1966.