位相幾何学特論 A

目次

1　集合と写像

定義 1.1　真か偽のいずれかである主張を命題という．また, 変数 x を含み, x に要素を代入したときに命題になるものを, 命題関数という．

定義 1.2　思考の対象として「明確な意味」をもつものを要素または元 (element) といい, 確定した範囲の要素をひとつにまとめた「集り」を集合 (set) と呼ぶ．

記法 1.3　(1) 要素 a が集合 A の要素であるとき, $a \in A$ または $A \ni a$ で表し, a は A に属するという．また要素 a が A の要素でないとき, $a \notin A$ または $A \not\ni a$ と表す．

(2) 要素 $a, b, c, \ldots$ からなる集合を $\{a, b, c, \ldots\}$ で表し (外延的記法), 変数 x を含む命題関数 $P(x)$ に対し, $P(x)$ が真である x 全体の集合を $\{x|\, P(x)\}$ で表す (内包的記法)．また, 集合 A の要素 x で, 命題関数 $P(x)$ が真であるもの全体からなる集合を $\{x|\, x \in A \text{ かつ } P(x)\}$ のかわりに $\{x \in A|\, P(x)\}$ で表すことが多い．

記法 1.4　自然数全体からなる集合を $\boldsymbol{N}$, 整数全体からなる集合 を $\boldsymbol{Z}$, 有理数全体からなる集合を $\boldsymbol{Q}$, 実数全体からなる集合を $\boldsymbol{R}$, 複素数全体からなる集合を $\boldsymbol{C}$ で表す．

記法 1.5　$a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a \leqq b)$ に対し, 実数の部分集合 (a, b), (a, ∞), $(-\infty, b)$, $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ を $(a, b) = \{x \in \boldsymbol{R}\,|\, a < x < b\}$, $(a, \infty) = \{x \in \boldsymbol{R}\,|\, x > a\}$, $(-\infty, b) = \{x \in \boldsymbol{R}\,|\, x < b\}$, $[a, b] = \{x \in \boldsymbol{R}\,|\, a \leqq x \leqq b\}$, $[a, \infty) = \{x \in \boldsymbol{R}\,|\, x \geqq a\}$, $(-\infty, b] = \{x \in \boldsymbol{R}\,|\, x \leqq b\}$, $(a, b] = \{x \in \boldsymbol{R}\,|\, a < x \leqq b\}$, $[a, b) = \{x \in \boldsymbol{R}\,|\, a \leqq x < b\}$ で定める．これらを総称して区間と呼び, (a, b), (a, ∞), $(-\infty, b)$ を開区間, $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ を閉区間という．

定義 1.6　(1) 2 つの集合 A, B はそれらの構成要素が全く同じであるとき, すなわち「$x \in A$ ならば $x \in B$」と「$x \in B$ ならば $x \in A$」が成り立つとき,「A と B は等しい」といい, $A = B$ で表す．

(2) 集合 A の要素がすべて集合 B の要素である, すなわち「$x \in A$ ならば $x \in B$」が成り立つとき, A は B の部分集合であるといい, $A \subset B$ または $B \supset A$ で表す．A が B の部分集合でないことを $A \not\subset B$ または $B \not\supset A$ で表す．

(3) 要素をもたない集合を空集合と呼び, $\emptyset$ で表す．

定義 1.7　A, B を集合とする．

(1) A, B の合併集合 (union) $A \cup B$, 共通部分 (intersection) $A \cap B$, 差集合 (difference) $A - B$ を次で定める．

$$A \cup B = \{x|\, x \in A \text{ または } x \in B\}, \quad A \cap B = \{x|\, x \in A \text{ かつ } x \in B\}, \quad A - B = \{x|\, x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

(2) 集合 A が集合 X の部分集合であるとき $X - A$ を (X における）A の補集合といい, A^c で表す．

(3) $x \in A, y \in B$ に対し (x, y) を x と y の順序対という．$x, z \in A$, $y, w \in B$ のとき, $x = z$ かつ $y = w$ であるときに限り, $(x, y) = (z, w)$ と表すことにする．A の要素と B の要素の順序対全体からなる集合 $\{(x, y)|\, x \in A,\ y \in B\}$ を A と B の直積集合と呼んで, $A \times B$ で表す．

定義 1.8　(1) X, Y を集合として, X の各要素に対して Y の 1 つの要素を対応させるとき, この対応を X から Y への写像と呼んで, $f : X \to Y$ や $X \xrightarrow{f} Y$ などで表す．このとき, X を f の定義域という．

(2) 各 $x \in X$ に対し, 写像 $f : X \to Y$ によって対応する Y の要素を $f(x)$ で表し, これを x の f による像と呼ぶ．

(3) 2 つの写像 $f : X \to Y$ と $g : Z \to W$ が「等しい」とは, $X = Z$ かつ $Y = W$ であり, すべての $x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ が成り立つことである．f と g が等しいことを $f = g$ で表す．

定義 1.9　(1) X, Y, Z を集合, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像とする．各 $x \in X$ に対して, $g(f(x)) \in Z$ を対応させる X から Z への写像を f と g の合成写像と呼んで $g \circ f$ で表す．

(2) X の各要素 x を x 自身に対応させる写像を X の恒等写像と呼び, id_X または 1_X などで表す．

(3) 写像 $f : X \to Y$ に対し, $g \circ f = id_X$, $f \circ g = id_Y$ を満たす写像 $g : Y \to X$ を f の逆写像といい, f^{-1} で表す．

注意 1.10 (1) 写像 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to W$ に対し, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, $id_Y \circ f = f \circ id_X = f$ が成り立つ.

(2) $x \in X$ に対し, $id_X(x) = x$ だから, 写像 $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ に対し, $g \circ f = id_X$ が成り立つためには, すべての $x \in X$ に対して $g(f(x)) = x$ が成り立つことが必要十分である. 故に g が f の逆写像であるためには,「すべての $x \in X$ に対して $g(f(x)) = x$」かつ「すべての $y \in Y$ に対して $f(g(y)) = y$」が成り立つことが必要十分である.

定義 1.11 (1) 写像 $f: X \to Y$ が, 条件「Y の各要素 c に対して, $f(x) = c$ となる $x \in X$ が存在する.」を満たすとき, f は全射 (または上への写像) であるという.

(2) 写像 $f: X \to Y$ が, 条件「$x, y \in X$ が $f(x) = f(y)$ を満たすならば $x = y$.」を満たすとき, f は単射 (または 1 対 1 写像) であるという.

(3) 全射かつ単射を全単射という.

命題 1.12 写像 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ が与えられているとする.

(1) f と g が全射ならば, $g \circ f: X \to Z$ も全射である. (2) f と g が単射ならば, $g \circ f: X \to Z$ も単射である.

証明 (1) g は全射だから, 任意の $z \in Z$ に対して $g(y) = z$ を満たす $y \in Y$ がある. さらに f も全射だから, $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ がある. このとき $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ となるため $g \circ f$ は全射である.

(2) $x, w \in X$ が $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(w)$ を満たすとすると $g(f(x)) = g(f(w))$ である. 従って, g が単射であることから, $f(x) = f(w)$ が得られる. さらに f も単射だから $x = w$ である. 故に $g \circ f$ も単射である. □

命題 1.13 写像 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ が与えられているとする.

(1) $g \circ f: X \to Z$ が全射ならば, g も全射である. (2) $g \circ f: X \to Z$ が単射ならば, f も単射である.

証明 (1) $g \circ f$ は全射だから, 任意の $z \in Z$ に対して $g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z$ を満たす $x \in X$ がある. そこで, $y = f(x)$ とおけば $g(y) = z$ だから, g は全射である.

(2) $x, w \in X$ が $f(x) = f(w)$ を満たすならば $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(w)) = (g \circ f)(w)$ が成り立つ. $g \circ f$ は単射だから, $x = w$ が得られ, f も単射であることがわかる. □

命題 1.14 (1) 写像 $f: X \to Y$ が全射で, 写像 $g, h: Y \to Z$ が $g \circ f = h \circ f$ を満たすならば $g = h$ である.

(2) 写像 $f: X \to Y$ が単射で, 写像 $g, h: W \to X$ が $f \circ g = f \circ h$ を満たすならば $g = h$ である.

証明 (1) f は全射だから任意の $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ がある. 仮定から $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = (h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(y)$ だから, 任意の $y \in Y$ に対して $g(y) = h(y)$ が成り立つため $g = h$ である.

(2) $w \in W$ に対して仮定から $f(g(w)) = (f \circ g)(w) = (f \circ h)(w) = f(h(w))$ が成り立ち, さらに f は単射だから $g(w) = h(w)$ である. 故に任意の $w \in W$ に対して $g(w) = h(w)$ が成り立つため $g = h$ である. □

命題 1.15 写像 $f: X \to Y$ の逆写像が存在するためには, f が全単射であることが必要十分であり, f の逆写像はただ一つに限る.

証明 写像 $f: X \to Y$ の逆写像 g が存在するとき, $f \circ g = id_Y$ は全射だから命題 1.13 の (1) から f は全射である. また $g \circ f = id_X$ は単射だから命題 1.13 の (2) から f は単射である.

逆に f が全単射ならば, 任意の $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ がただ 1 つ存在するため, $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ を対応させる写像を $g: Y \to X$ とする. このとき任意の $y \in Y$ に対して $f \circ g(y) = f(g(y)) = y$ が成り立つ. さらに任意の $x \in X$ に対して $f(x) = y$ とおくと, $g(y) = x$ だから $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x$ となるため, 注意 1.10 の (2) によって g は f の逆写像である.

$g, h: Y \to X$ を f の逆写像とすれば $g \circ f = h \circ f = id_X$ であり, f は全射だから, 命題 1.14 の (1) から, $g = h$ が成り立つ. 故に f の逆写像が 2 つ存在すれば, それらは一致するため f の逆写像が存在してもただ一つだけである.□

定義 1.16　写像 $f: X \to Y$ と X の部分集合 A, Y の部分集合 B に対し Y の部分集合 $f(A)$ と X の部分集合 $f^{-1}(B)$ をそれぞれ $f(A)=\{y \in Y \mid f(x)=y$ を満たす $x \in A$ がある.$\}$, $f^{-1}(B)=\{x \in X \mid f(x) \in B\}$ で定義する. $f(A)$ を「f による A の像」といい, $f^{-1}(B)$ を「f による B の逆像」という. また $f(X)$ を単に「f の像」という.

定義 1.17　n 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ の 2 つのベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対し, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の第 j 成分をそれぞれ x_j, y_j とするとき, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ で定義する. また, $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ とおいて, $\|\boldsymbol{x}\|$ を $\boldsymbol{x}$ の長さという.

次の結果は内積の定義から容易に確かめられる.

命題 1.18　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n$, $r \in \boldsymbol{R}$ とするとき, 次のことが成り立つ.

(1) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$ であり, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ と同値である.　(2) $(r\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, r\boldsymbol{y})$.

(3) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$.　(4) $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

定理 1.19　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, 不等式 $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|$ (シュワルツの不等式) が成り立つ.

証明　$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ の場合, $\|\boldsymbol{x}\| \neq 0$ だから, 命題 1.18 の (2), (3), (3) を用いれば, 任意の実数 t に対して

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{y}-t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}-t\boldsymbol{x}) &= (\boldsymbol{y}-t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}-t\boldsymbol{x}, -t\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) + (-t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, -t\boldsymbol{x}) + (-t\boldsymbol{x}, -t\boldsymbol{x}) \\ &= \|\boldsymbol{y}\|^2 - 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})t + \|\boldsymbol{x}\|^2 t^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 \left(t - \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\right)^2 + \frac{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\end{aligned}$$

だから $t = \dfrac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$ のとき, $(\boldsymbol{y}-t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}-t\boldsymbol{x})$ は最小値 $\dfrac{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$ をとる. 一方, 命題 1.18 の (1) から $(\boldsymbol{y}-t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}-t\boldsymbol{x}) \geqq 0$ が成り立つため, この最小値は 0 以上であるから $\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 \geqq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2$ が得られる.

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の場合は $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| = \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| = 0$ となって不等式は成り立つ. □

定理 1.20　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, 不等式 $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ (三角不等式) が成り立つ

証明　定理 1.19 から $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqq |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|$ であり, 定理 1.19 の証明で得た等式で $t = -1$ とすれば,

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})} = \sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2} \leqq \sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2} = \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|.$$ □

定義 1.17 で定義したベクトルの長さを用いれば, $\boldsymbol{R}^n$ における距離が, 次のように定義できる.

定義 1.21　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の距離という. そこで, $\boldsymbol{R}^n$ の直積集合 $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$ を定義域として, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$ に実数 $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|$ を対応させる関数を d_n で表して, これを $\boldsymbol{R}^n$ の距離関数と呼ぶ.

命題 1.22　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n$ とするとき, 次のことが成り立つ.

(1) $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqq 0$ であり, $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ と同値である.　(2) $d_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

(3) $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leqq d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ (三角不等式).

証明　(1) 命題 1.18 の (1) から明らかである.

(2) $r \in \boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して命題 1.18 の (1) から $\|r\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(r\boldsymbol{x}, r\boldsymbol{x})} = \sqrt{r^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = |r|\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = |r|\|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つため, $d_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = \|(-1)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\| = |-1|\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| = d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ である.

(3) 定理 1.20 から $d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}\| = \|(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y})\| \leqq \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\| = d_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_n(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$. □

各自然数 k に対して $\boldsymbol{R}^n$ の点 $\boldsymbol{x}_k$ を対応させる写像 $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}^n$ を $\boldsymbol{R}^n$ の点列といい, $(\boldsymbol{x}_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ で表す. $\boldsymbol{R}^n$ の距離を用いれば「限りなく近づく」という状態が数学的に表現できて, $\boldsymbol{R}^n$ の点列の収束の概念が次のように定義できる.

定義 1.23　$\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ とする. 任意の正の実数 ε に対し, 自然数 N で, 条件「$k \geqq N$ ならば $d_n(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{p}) < \varepsilon$」を満たすものが存在するとき, $\boldsymbol{R}^n$ の点列 $(\boldsymbol{x}_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ は $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n$ に収束するといい, このことを $\lim_{k \to \infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{p}$ で表す.

注意 1.24 $\boldsymbol{R}^n$ の点列 $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ に対し, 実数列 $(d_n(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{p}))_{k\in\boldsymbol{N}}$ を考えると, この数列は常に 0 以上の値をとり, 上の定義から, $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$ に収束するためには $(d_n(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{p}))_{k\in\boldsymbol{N}}$ が 0 に収束することが必要十分である.

例 1.25 $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0$ であることは次のように示される. 任意の正の実数 ε に対して, $N>\dfrac{1}{\varepsilon}$ を満たす自然数 N を選べば, $k\geqq N$ ならば $0<\dfrac{1}{k}\leqq\dfrac{1}{N}<\varepsilon$ だから $d_1\left(\frac{1}{k},0\right)<\varepsilon$ である.

命題 1.26 $(a_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$, $(b_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ をともに収束する実数列とし, $\displaystyle\lim_{k\to\infty}a_k=\alpha$, $\displaystyle\lim_{k\to\infty}b_k=\beta$ とする.

(1) すべての $k\in\boldsymbol{N}$ に対して $a_k\leqq b_k$ ならば $\alpha\leqq\beta$ である.

(2) 実数列 $(c_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が, すべての $k\in\boldsymbol{N}$ に対して $a_k\leqq c_k\leqq b_k$ を満たし, $\alpha=\beta$ ならば $(c_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ も収束して $\displaystyle\lim_{k\to\infty}c_k=\alpha$ である.

証明 (1) $\alpha>\beta$ と仮定すれば自然数 N_1, N_2 で,「$k\geqq N_1$ ならば $|a_k-\alpha|<\frac{\alpha-\beta}{2}$」,「$k\geqq N_2$ ならば $|b_k-\beta|<\frac{\alpha-\beta}{2}$」を満たすものがある. そこで N_1, N_2 の大きい方を N とすると, $k\geqq N$ ならば $-\frac{\alpha-\beta}{2}<a_k-\alpha$ かつ $b_k-\beta<\frac{\alpha-\beta}{2}$ が成り立つ. これらの不等式から $b_k<\frac{\alpha+\beta}{2}<a_k$ が得られるため, すべての $k\in\boldsymbol{N}$ に対して $a_k\leqq b_k$ が成り立つという仮定と矛盾する. 故に $\alpha\leqq\beta$ である.

(2) ε を任意の正の実数とすれば, 自然数 N_1, N_2 で,「$k\geqq N_1$ ならば $|a_k-\alpha|<\varepsilon$」,「$k\geqq N_2$ ならば $|b_k-\alpha|<\varepsilon$」を満たすものがある. そこで N_1, N_1 の大きい方を N とすると, 仮定からすべての自然数 k に対して $-|a_k-\alpha|\leqq a_k-\alpha\leqq c_k-\alpha\leqq b_k-\alpha\leqq|b_k-\alpha|$ が成り立つため, $k\geqq N$ ならば $|c_k-\alpha|<\varepsilon$ である. 従って $(c_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ も α に収束する. □

X, Y をそれぞれ $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ の部分集合とし, f を X から Y への写像とする. $\boldsymbol{x}\in X$ を $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$ に近づけたときに $f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{R}^m$ に近づくことを, 距離関数を用いて次のように定義できる.

定義 1.27 任意の正の実数 ε に対し, 正の実数 δ で, 条件「$\boldsymbol{x}\in X$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{p}$ かつ $d_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})<\delta$ ならば $d_m(f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{q})<\varepsilon$」を満たすものが存在するとき, 写像 f の $\boldsymbol{p}$ における極限は $\boldsymbol{q}$ であるといい, これを $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{q}$ で表す.

注意 1.28 (1) 上の定義では, 点 $\boldsymbol{p}$ に「いくらでも近い」X の点が存在することを暗黙のうちに仮定している. 以後 $\boldsymbol{p}$ における写像 f の極限を考えるときは, 任意の r に対して f の定義域の点 $\boldsymbol{x}$ で, $d_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})<r$ かつ $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{p}$ を満たすものが存在すると仮定する.

(2) $\boldsymbol{x}\in X$ を $d_m(f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{q})$ に対応させる関数を考えれば, この関数は常に 0 以上の値をとり, 上の定義から $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{q}$ であるためには $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}d_m(f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{q})=0$ であることが必要十分である.

上の定義 1.23, 定義 1.27 では, $\boldsymbol{R}^n$ の距離関数 d_n をそのまま用いて「近づく」ということを表現したが, 一旦 d_n を用いて与えられた点の「近くの点」全体からなる集合を定義してから, 定義 1.23 と定義 1.27 を言い換えてみる.

定義 1.29 $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$, $r>0$ に対して, $\boldsymbol{p}$ からの距離が r より小さい点全体からなる集合を $B_n(\boldsymbol{p};r)$ (すなわち $B_n(\boldsymbol{p};r)=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\,|\,d_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})<r\}$) で表し, これを半径 r 中心 $\boldsymbol{p}$ の開球または, $\boldsymbol{p}$ の r 近傍という.

まず, 定義 1.23 は次のように言い換えられる.

定義 1.30 $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$ と任意の正の実数 ε に対し, 自然数 N で, 条件「$k\geqq N$ ならば $\boldsymbol{x}_k\in B_n(\boldsymbol{p};\varepsilon)$」を満たすものが存在するとき, $\boldsymbol{R}^n$ の点列 $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は $\boldsymbol{p}$ に収束するといい, このことを $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{p}$ で表す.

また, $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{R}^m$ とするとき, 定義 1.27 は次のように言い換えられる.

定義 1.31 任意の正の実数 ε に対し, 正の実数 δ で, 条件「$\boldsymbol{x}\in B_n(\boldsymbol{p};\delta)\cap X$ かつ $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{p}$ ならば $f(\boldsymbol{x})\in B_m(\boldsymbol{q};\varepsilon)$」を満たすものがあるとき, 写像 $f:X\to Y$ の $\boldsymbol{p}$ における極限は $\boldsymbol{q}$ であるといい, このことを $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{q}$ で表す.

2　距離空間

定義 2.1　集合 X に対し, X の直積集合 $X \times X$ で定義された実数値関数 $d : X \times X \to \boldsymbol{R}$ で, 任意の $x, y, z \in X$ に対して次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすものを X の距離関数という. 距離関数 d が与えられた集合 X を距離空間といい, (X, d) で表す. なお, 距離関数 d を明示する必要がない場合は, (X, d) を X で表すことが多い.

(i) $d(x, y) \geqq 0$ であり, $d(x, y) = 0$ となるのは, $x = y$ の場合に限る.

(ii) $d(y, x) = d(x, y)$.

(iii) $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式).

以下の例 2.2, 例 2.3 では p を 1 以上の実数または $p = \infty$ とする.

例 2.2　$d_p : \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, 以下のように定義する.

$$d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} & p \geqq 1 \\ \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\} & p = \infty \end{cases}$$

このとき d_p が $\boldsymbol{R}^n$ の距離関数になることを示す. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqq 0$ であり, $d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ となるのは, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ の場合に限ることと, $d_p(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成り立つことは d_p の定義から明らかである. $1 < p < \infty$ の場合に $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leqq d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_p(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が成り立つことを以下で示す.

(i) $\alpha, \beta \geqq 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ならば $\alpha\beta \leqq \dfrac{\alpha^p}{p} + \dfrac{\beta^q}{q}$ が成り立つことを示す.

関数 $f : [0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{\beta^q}{q} - \beta x$ で定めれば $f'(x) = x^{p-1} - \beta$ で, $p > 1$ より f は区間 $\left[0, \beta^{\frac{1}{p-1}}\right]$ で単調に減少し, 区間 $\left[\beta^{\frac{1}{p-1}}, \infty\right)$ で単調に増加する. 従って $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ に注意すれば, f は $\beta^{\frac{1}{p-1}}$ において最小値

$$f\left(\beta^{\frac{1}{p-1}}\right) = \frac{\beta^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{\beta^q}{q} - \beta\beta^{\frac{1}{p-1}} = \frac{\beta^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \beta^{\frac{p}{p-1}}\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \beta^{\frac{p}{p-1}} = 0$$

をとる. 従って $\alpha \geqq 0$ に対して $\dfrac{\alpha^p}{p} + \dfrac{\beta^q}{q} - \alpha\beta = f(\alpha) \geqq f\left(\beta^{\frac{1}{p-1}}\right) = 0$ が成り立つ.

(ii) $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ならば $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, $\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqq d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) d_q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{0})$ が成り立つことを示す.

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ または $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ ならば上の不等式は両辺が 0 になって成立する. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ のとき $d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \neq 0$, $d_q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{0}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \neq 0$ だから, $\alpha = \dfrac{|x_i|}{d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})}$, $\beta = \dfrac{|y_i|}{d_q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{0})}$ を (i) の不等式に代入すれば

$$\frac{|x_i y_i|}{d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) d_q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{0})} \leqq \frac{|x_i|^p}{p d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})^p} + \frac{|y_i|^q}{q d_q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{0})^q} = \frac{|x_i|^p}{p \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} + \frac{|y_i|^q}{q \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q}$$

が得られる. この不等式の両辺を $i = 1, 2, \ldots, n$ について加えれば

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|}{d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) d_q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{0})} \leqq \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}{p \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} + \frac{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q}{q \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

が得られるため, 両辺に $d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) d_q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{0})$ をかければ $\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqq d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) d_q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{0})$ が得られる.

(iii) $d_p(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{0}) \leqq d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})+d_p(\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})$ が成り立つことを示す.
$|x_i+y_i| \leqq |x_i|+|y_i|$ の両辺に $|x_i+y_i|^{p-1}$ をかけて得られる $|x_i+y_i|^p \leqq |x_i||x_i+y_i|^{p-1}+|y_i||x_i+y_i|^{p-1}$ の両辺を $i=1,2,\ldots,n$ について加えれば $d_p(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})^p=\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p \leqq \sum_{i=1}^n |x_i||x_i+y_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^n |y_i||x_i+y_i|^{p-1} \cdots (*)$ が得られる. $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ を満たす q をとれば $q=\dfrac{p}{p-1}$ だから, (ii) の不等式の y_i に $|x_i+y_i|^{p-1}$ を代入すると次の不等式が得られる.

$$\sum_{i=1}^n |x_i||x_i+y_i|^{p-1} \leqq d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})\Big(\sum_{i=1}^n (|x_i+y_i|^{p-1})^q\Big)^{\frac{1}{q}} = d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})\Big(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p\Big)^{\frac{p-1}{p}} = d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})d_p(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})^{p-1}$$

同様に (ii) の不等式の x_i に $|x_i+y_i|^{p-1}$ を代入すれば $\sum_{i=1}^n |y_i||x_i+y_i|^{p-1} \leqq d_p(\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})d_p(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})^{p-1}$ が得られるため, これらの不等式と $(*)$ から $d_p(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})^p \leqq d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})d_p(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})^{p-1}+d_p(\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})d_p(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})^{p-1}$ が成り立つ. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ ならば (iii) の不等式は成り立つため, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$ と仮定すれば $d_p(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})\neq 0$ だから, 上の不等式の両辺を $d_p(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})^{p-1}$ で割って $d_p(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{0}) \leqq d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})+d_p(\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})$ を得る.

$d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=d_p(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})$ であることに注意すれば (iii) の不等式から, 次が成り立つ.

$$d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})=d_p(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z},\boldsymbol{0})=d_p((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}),\boldsymbol{0}) \leqq d_p(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})+d_p(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z},\boldsymbol{0})=d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+d_p(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$

例 2.3　$a,b\in\boldsymbol{R}$ $(a<b)$ に対し, 区間 $[a,b]$ の実数値連続関数全体の集合を $C[a,b]$ で表す. $d_p\colon C[a,b]\times C[a,b]\to\boldsymbol{R}$ を

$$d_p(f,g)=\begin{cases} \left(\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} & p\geqq 1 \\ (|f(x)-g(x)| \text{ の } a\leqq x\leqq b \text{ における最大値}) & p=\infty \end{cases}$$

により定義すると, d_p は $C[a,b]$ の距離関数になる. 実際, $f,g\in C[a,b]$ に対して $d_p(f,g)\geqq 0$, $d_p(f,f)=0$ と $d_p(g,f)=d_p(f,g)$ が成り立つことは d_p の定義から明らかである. また「$d_\infty(f,g)=0$ ならば $f=g$」であることも d_∞ の定義から明らかである. $1\leqq p<\infty$ の場合に「$d_p(f,g)=0$ ならば $f=g$」が成り立つことと, $1<p<\infty$ の場合に $f,g,h\in C[a,b]$ に対して $d_p(f,h)\leqq d_p(f,g)+d_p(g,h)$ が成り立つことを以下で示す. $[a,b]$ において常に値が 0 である定数値関数も 0 で表す.

(i) $1\leqq p<\infty$ の場合に「$d_p(f,g)=0$ ならば $f=g$」が成り立つことを示す.
命題「$\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx=0$ かつ "$x\in[a,b]$ ならば $\varphi(x)\geqq 0$" を満たす $\varphi\in C[a,b]$ は $\varphi=0$ に限る.」をまず示す.
$\varphi(c)\neq 0$ となる $c\in[a,b]$ が存在すれば, 仮定から $\varphi(c)>0$ である. $\varepsilon=\dfrac{\varphi(c)}{2}$ とおけば $\varepsilon>0$ で, φ の c における連続性から $\delta>0$ で条件「$x\in(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$ ならば $\varphi(x)\in(\varphi(c)-\varepsilon,\varphi(c)+\varepsilon)$」を満たすものがある. $\varphi(c)=2\varepsilon$ より $x\in(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$ ならば $\varphi(x)\in(\varepsilon,3\varepsilon)$ だから, $\varphi(x)>\varepsilon$ である. $c>a$ の場合, $\max\{c-\delta,a\}<d<c$ を満たす d を選べば $[d,c]\subset(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$ だから $x\in[d,c]$ ならば $\varphi(x)>\varepsilon$ である. 従って $x\in[a,b]$ ならば $\varphi(x)\geqq 0$ であることから $\displaystyle\int_a^d \varphi(x)\,dx\geqq 0$, $\displaystyle\int_c^b \varphi(x)\,dx\geqq 0$ であることに注意すれば $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx=\int_a^d \varphi(x)\,dx+\int_d^c \varphi(x)\,dx+\int_c^b \varphi(x)\,dx\geqq\int_d^c \varphi(x)\,dx\geqq\int_d^c \varepsilon\,dx=\varepsilon(c-d)>0$ が得られて仮定と矛盾する. $c<b$ の場合は $c<d<\min\{c+\delta,b\}$ を満たす d を選べば $[c,d]\subset(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$ だから $x\in[c,d]$ ならば $\varphi(x)>\varepsilon$ である. 従って $x\in[a,b]$ ならば $\varphi(x)\geqq 0$ であることから $\displaystyle\int_a^c \varphi(x)\,dx\geqq 0$, $\displaystyle\int_d^b \varphi(x)\,dx\geqq 0$ であることに注意すれば $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx=\int_a^c \varphi(x)\,dx+\int_c^d \varphi(x)\,dx+\int_d^b \varphi(x)\,dx\geqq\int_c^d \varphi(x)\,dx\geqq\int_c^d \varepsilon\,dx=\varepsilon(d-c)>0$ が得られて仮定と矛盾する. 以上から主張は示された.

$f,g\in C[a,b]$ が $d_p(f,g)=0$ を満たすとき, $\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|^p\,dx=0$ だから $\varphi(x)=|f(x)-g(x)|^p$ によって $\varphi\in C[a,b]$ を定めれば φ は上で示した命題の条件を満たすため, $\varphi=0$ である. 従って, $f=g$ である.

(ii) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ ならば $f,g\in C[a,b]$ に対し, $\displaystyle\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqq d_p(f,0)d_q(g,0)$ が成り立つことを示す.
$f=0$ または $g=0$ ならば上の不等式は両辺が 0 になって成立する. $f,g\neq 0$ のとき (i) の結果から $d_p(f,0)\neq 0$, $d_q(g,0)\neq 0$ だから, $x\in[a,b]$ に対し $\alpha(x)=\dfrac{|f(x)|}{d_p(f,0)}$, $\beta(x)=\dfrac{|g(x)|}{d_q(g,0)}$ を例 2.2 の (i) の不等式に代入すれば

$$\frac{|f(x)g(x)|}{d_p(f,0)d_q(g,0)} \leqq \frac{|f(x)|^p}{pd_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})^p}+\frac{|g(x)|^q}{qd_q(\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})^q} = \frac{|f(x)|^p}{p\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p dx}+\frac{|g(x)|^q}{q\displaystyle\int_a^b |g(x)|^q dx}$$

が得られる. この不等式の両辺を x について a から b まで積分すれば

$$\frac{\displaystyle\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx}{d_p(f,0)d_q(g,0)} \leqq \frac{\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p\,dx}{p\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p dx}+\frac{\displaystyle\int_a^b |g(x)|^q\,dx}{q\displaystyle\int_a^b |g(x)|^q dx}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

が得られるため, 両辺に $d_p(f,0)d_q(g,0)$ をかければ $\displaystyle\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqq d_p(f,0)d_q(g,0)$ が得られる.

(iii) $d_p(f+g,0)\leqq d_p(f,0)+d_p(g,0)$ が成り立つことを示す.
$|f(x)+g(x)|\leqq|f(x)|+|g(x)|$ の両辺に $|f(x)+g(x)|^{p-1}$ をかけて得られる

$$|f(x)+g(x)|^p \leqq |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}+|g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}$$

の両辺を x について a から b まで積分すれば

$$d_p(f+g,0)^p=\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx \leqq \int_a^b |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}dx+\int_a^b |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}dx\cdots(**)$$

が得られる. $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ を満たす q をとれば $q=\dfrac{p}{p-1}$ だから, (ii) の不等式の $g(x)$ に $|f(x)+g(x)|^{p-1}$ を代入すると, 次の不等式が得られる.

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}dx &\leqq d_p(f,0)\left(\int_a^b (|f(x)+g(x)|^{p-1})^q dx\right)^{\frac{1}{q}}=d_p(f,0)\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\\ &= d_p(f,0)d_p(f+g,0)^{p-1}\end{aligned}$$

同様に (ii) の不等式の $f(x)$ に $|f(x)+g(x)|^{p-1}$ を代入すれば $\displaystyle\int_a^b |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}dx \leqq d_p(g,0)d_p(f+g,0)^{p-1}$ が得られるため, これらの不等式と $(**)$ から $d_p(f+g,0)^p\leqq d_p(f,0)d_p(f+g,0)^{p-1}+d_p(g,0)d_p(f+g,0)^{p-1}$ が成り立つ. $f+g=0$ ならば (iii) の不等式は成り立つため, $f+g\neq 0$ と仮定すれば $d_p(f+g,0)\neq 0$ だから, 上の不等式の両辺を $d_p(f+g,0)^{p-1}$ で割って $d_p(f+g,0)\leqq d_p(f,0)+d_p(g,0)$ を得る.

$d_p(f,g)=d_p(f-g,0)$ であることに注意すれば (iii) の不等式から, 次が成り立つ.

$$d_p(f,h)=d_p(f-h,0)=d_p((f-g)+(g-h),0)\leqq d_p(f-g,0)+d_p(g-h,0)=d_p(f,g)+d_p(g,h)$$

例 2.4 p を与えられた素数とし, a を $0<a<1$ を満たす実数の定数とする. $x\in\boldsymbol{Q}-\{0\}$ に対して $x=\dfrac{m}{n}p^{l_x}$ (ただし, m, n は p で割れない整数で, l_x は整数) を満たす整数 l_x は一通りに定まるため, 関数 $\nu_p:\boldsymbol{Q}-\{0\}\to\boldsymbol{R}$ を $\nu_p(x)=a^{l_x}$ で定義することができる. そこで, 関数 $d_p:\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}\to\boldsymbol{R}$ を $d_p(x,y)=\begin{cases}\nu_p(x-y) & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$ で定めると d_p は $\boldsymbol{Q}$ の距離関数である.

例 2.5 虚部が正の実数である複素数全体からなる集合を $\boldsymbol{H}$ で表す. $d_{\boldsymbol{H}}(z,w)=\log\dfrac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|}$ によって関数 $d_{\boldsymbol{H}}:\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{R}$ を定義すれば, $d_{\boldsymbol{H}}$ は $\boldsymbol{H}$ の距離関数である.

距離空間には, 定義 1.29 と同様に開球の概念を定義できる.

定義 2.6　$p \in X$, $r > 0$ に対して, p からの距離が r より小さい点全体からなる集合を $B_d(p;r)$ (すなわち $B_d(p;r) = \{x \in X \,|\, d(x,p) < r$ で表し, これを半径 r 中心 p の開球または p の r 近傍という.

開球を用いて, 距離空間の部分集合から定まる集合が定義できる.

定義 2.7　(X,d) を距離空間, A を X の部分集合, $p \in X$ とする.

(1) 正の実数 r で, $B_d(p;r) \subset A$ を満たすものがあるとき, p を A の内点という. A の内点全体からなる集合を A の内部といい, A^i で表す.

(2) 正の実数 r で, $B_d(p;r) \cap A = \emptyset$ を満たすものがあるとき, p を A の外点という. A の外点全体からなる集合を A の外部といい, A^e で表す.

(3) 任意の正の実数 r に対して $B_d(p;r) \cap A \neq \emptyset$ であるとき, p を A の触点という. A の触点全体からなる集合を A の閉包といい, $\overline{A}$ で表す.

(4) 任意の正の実数 r に対して $B_d(p;r) \cap A \neq \emptyset$ かつ $B_d(p;r) \not\subset A$ であるとき, p を A の境界点という. A の境界点全体からなる集合を A の境界といい, ∂A で表す.

注意 2.8　(1) $B_d(p;r) \cap A = \emptyset$ は $B_d(p;r) \subset X - A$ と同値だから, p が A の外点であることと p が $X - A$ の内点であることは同値である. 従って $A^e = (X - A)^i$ である.

(2) $B_d(p;r) \not\subset A$ は $B_d(p;r) \cap (X - A) \neq \emptyset$ と同値だから, p が A の境界点であることと p が A と $X - A$ の両方の触点であることは同値である. 従って $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$ であり, この等式から $\partial(X - A) = \partial A$ が得られる.

(3) $p \in B_d(p;r)$ だから $B_d(p;r) \subset A$ ならば $p \in A$ であり, $p \in A$ ならば任意の $r > 0$ に対して $p \in B_d(p;r) \cap A$ だから $p \in \overline{A}$ である. また, $B_d(p;r) \cap A = \emptyset$ ならば $p \notin A$ である. 従って $A^i \subset A \subset \overline{A}$, $A^e \cap A = \emptyset$ である.

(4) p が A の内点でも外点ないことと, p が定義 2.7 の (4) の条件を満たすことと同値だから, $\partial A = X - (A^i \cup A^e)$ である. 従って $X = A^i \cup A^e \cup \partial A$ と $A^i \cap \partial A = A^e \cap \partial A = \emptyset$ が成り立つ. ((3) から $A^i \cap A^e = \emptyset$ も成り立つ.)

命題 2.9　(X,d) を距離空間, A を X の部分集合とすれば, $\overline{A} = A^i \cup \partial A$, $\overline{X - A} = X - A^i$ が成り立つ.

証明　定義 2.7 の (3) と (4) から, 境界点は触点だから $\partial A \subset \overline{A}$ であり, 注意 2.8 の (3) から $A^i \subset \overline{A}$ だから $A^i \cup \partial A \subset \overline{A}$ である. $p \in \overline{A}$ かつ $p \notin A^i$ ならば任意の $r > 0$ に対して $B_d(p;r) \cap A \neq \emptyset$ かつ $B_d(p;r) \not\subset A$ が成り立つため $p \in \partial A$ である. 故に $\overline{A} \subset A^i \cup \partial A$ も成り立つため, $\overline{A} = A^i \cup \partial A$ である.

$B_d(p;r) \cap (X - A) \neq \emptyset$ は $B_d(p;r) \not\subset A$ と同値だから $p \in \overline{X - A}$ は条件「任意の $r > 0$ に対して $B_d(p;r) \not\subset A$」と同値である. この条件は $p \in A^i$ であるための定義 2.7 の (1) の条件の否定だから, $p \in \overline{X - A}$ は $p \in X - A^i$ と同値である. 従って $\overline{X - A} = X - A^i$ が成り立つ. □

距離空間における点列の収束と写像の極限と深く関わっている開集合, 閉集合と呼ばれる概念を定義する.

定義 2.10　(X,d) を距離空間, A を X の部分集合とする. A の点がすべて内点であるとき, A を X の開集合といい, A の触点がすべて A に属するとき, A を X の閉集合という.

注意 2.11　(1) 注意 2.8 の (3) の 1 つめの式から, A が開集合であるためには, $A^i = A$ であることが必要十分であり, A が閉集合であるためには, $\overline{A} = A$ であることが必要十分である.

(2) A が空集合の場合も, 命題「$p \in A$ ならば p は A の内点である.」は真だから空集合も開集合である. またこのとき, A の触点は存在しないので, 命題「A の触点がすべて A に属する.」も真であるため, 空集合も閉集合である.

命題 2.12　(X,d) を距離空間, A を X の部分集合とすれば次の 3 つは同値である.

(i) A は閉集合である.　(ii) $X - A$ は開集合である.　(iii) $\partial A \subset A$

証明 $A = X - (X - A)$ だから命題 2.9 の 2 つ目の等式から $\overline{A} = \overline{X - (X - A)} = X - (X - A)^i$ である．従って $\overline{A} = A$ は $X - (X - A)^i = A = X - (X - A)$ と同値である．$X - (X - A)^i = X - (X - A)$ の両辺の補集合を考えれば $(X - A)^i = X - A$ が得られるため, $\overline{A} = A$ は $(X - A)^i = X - A$ と同値である．故に注意 2.11 の (1) から (i) と (ii) は同値である．A が閉集合ならば注意 2.11 の (1) と命題 2.9 の最初の等式から $A = \overline{A} = A^i \cup \partial A \supset \partial A$ である．逆に $\partial A \subset A$ ならば命題 2.9 の最初の等式と注意 2.8 の (3) から $\overline{A} = A^i \cup \partial A \subset A \subset \overline{A}$ だから $\overline{A} = A$ が成り立つため, A は閉集合である． □

命題 2.13 距離空間 (X, d) に関する条件「$p, q \in X$ と $r, s > 0$ に対し, $r+s > d(p, q)$ ならば $B_d(p\,;r) \cap B_d(q\,;s) \neq \emptyset$」を C とする．(ユークリッド空間 $(\boldsymbol{R}^n, d_n)$ はこの条件 C を満たす.)

(1) $B_d(p\,;r)$ は X の開集合, 従って $B_d(p\,;r)^i = B_d(p\,;r)$ である．

(2) $B_d(p\,;r)^e \supset \{x \in X \,|\, d(x, p) > r\}$ であり, (X, d) が C を満たせば, $B_d(p\,;r)^e = \{x \in X \,|\, d(x, p) > r\}$ である．

(3) $\partial B_d(p\,;r) \subset \{x \in X \,|\, d(x, p) = r\}$ であり, (X, d) が C を満たせば, $\partial B_d(p\,;r) = \{x \in X \,|\, d(x, p) = r\}$ である．

証明 (1) $q \in B_d(p\,;r)$ ならば $d(p, q) < r$ であり, 任意の $x \in B_d(q\,;r - d(p, q))$ は $d(q, x) < r - d(p, q)$ と定義 2.1 の (iii) より $d(p, x) \leqq d(p, q) + d(q, x) < r$ を満たし, $x \in B_d(p\,;r)$ となるため, $B_d(q\,;r - d(p, q)) \subset B_d(p\,;r)$ である．よって $B_d(p\,;r)$ のすべての点は内点だから $B_d(p\,;r)$ は X の開集合である．

(2) $q \in X$ が $d(p, q) > r$ かつ $B_d(q\,;d(p, q) - r) \cap B_d(p\,;r) \neq \emptyset$ を満たすならば $x \in B_d(q\,;d(p, q) - r) \cap B_d(p\,;r)$ が存在するので, $d(q, x) < d(p, q) - r$ かつ $d(p, x) < r$ が成り立つ．定義 2.1 の (ii), (iii) より $d(p, q) \leqq d(p, x) + d(x, q) = d(p, x) + d(q, x)$ だから上の二つの不等式を用いると $d(q, x) \geqq d(p, q) - d(p, x) > d(q, x) + r - d(p, x) > d(q, x)$ となって矛盾が生じる．故に $B_d(q\,;d(p, q) - r) \cap B_d(p\,;r) = \emptyset$ で, この等式は $B_d(q\,;d(p, q) - r) \subset X - B_d(p\,;r)$ と同値だから q は $X - B_d(p\,;r)$ の内点になり $q \in B_d(p\,;r)^e$ を得る．従って $\{x \in X \,|\, d(x, p) > r\} \subset B_d(p\,;r)^e$ である．

条件 C を仮定して, $q \in B_d(p\,;r)^e$ とすれば, $s > 0$ で $B_d(p\,;r) \cap B_d(q\,;s) = \emptyset$ を満たすものが存在するため, 条件 C の対偶から $r + s \leqq d(p, q)$ が成り立つ．故に $r \leqq d(p, q) - s < d(p, q)$ だから $q \in \{x \in X \,|\, d(x, p) > r\}$ となるため, $B_d(p\,;r)^e = \{x \in X \,|\, d(x, p) > r\}$ である．

(3) 注意 2.8 の (4) から $\partial B_d(p\,;r) = X - (B_d(p\,;r)^i \cup B_d(p\,;r)^e)$ だから (1) と (2) の結果から $q \in \partial B_d(p\,;r)$ ならば $d(x, p) = r$ である．故に $\partial B_d(p\,;r) \subset \{x \in X \,|\, d(x, p) = r\}$ である．

条件 C を仮定すれば (2) より $B_d(p\,;r)^e = \{x \in X \,|\, d(x, p) > r\}$ で, (1) より $B_d(p\,;r)^i = \{x \in X \,|\, d(x, p) < r\}$ だから $\partial B_d(p\,;r) = X - (B_d(p\,;r)^i \cup B_d(p\,;r)^e)$ から $\partial B_d(p\,;r) = \{x \in X \,|\, d(x, p) = r\}$ である． □

距離空間における点列の収束や, 距離空間の間の写像の極限がユークリッド空間の場合 (定義 1.30, 定義 1.31) と全く同様に定義できる．

定義 2.14 $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ を X の点列とする．任意の正の実数 ε に対し, 自然数 N で, 条件「$k \geqq N$ ならば $x_k \in B_d(p\,;\varepsilon)$」を満たすものが存在するとき, $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ は $p \in X$ に収束するといい, このことを $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = p$ で表す．

注意 2.15 (1) 上の定義をさらに言い換えると, $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ が $p \in X$ に収束するということは, 任意の正の実数 ε に対して, $x_k \notin B_d(p\,;\varepsilon)$ であるような自然数 k は有限個しかないということである．従って, X の点列 $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ が $p \in X$ に収束しないということは, 正の実数 ε_0 で, 条件「$x_k \notin B_d(p\,;\varepsilon_0)$ である自然数 k が無限に存在する.」を満たすものがあることである．

(2) X の点列 $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ に対し, 実数列 $(d(x_k, p))_{k \in \boldsymbol{N}}$ を考えると, この数列は常に 0 以上の値をとり, 上の定義から, $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ が p に収束するためには $(d(x_k, p))_{k \in \boldsymbol{N}}$ が 0 に収束することが必要十分である．

定義 2.16 (X, d), (Y, d') を距離空間とし, X の部分集合 Z, Y の部分集合 W と写像 $f : Z \to W$ が与えられているとする．$p \in X$, $q \in Y$ とし, 任意の正の実数 ε に対し, 正の実数 δ で, 条件「"$x \in B_d(p\,;\delta) \cap Z$ かつ $x \neq p$" ならば $f(x) \in B_{d'}(q\,;\varepsilon)$」を満たすものが存在するとき, 写像 $f : Z \to W$ の p における極限は q であるといい, このこ

とを $\lim_{x \to p} f(x) = q$ で表す.

注意 2.17　上の定義の状況の下で, $x \in Z$ を $d(f(x), q)$ に対応させる Z 上の実数値関数を考えると $\lim_{x \to p} f(x) = q$ であることと, $\lim_{x \to p} d(f(x), q) = 0$ であることは同値である.

極限の概念が定義できれば, 写像の連続性の概念が次のように定義できる.

定義 2.18　(X, d), (Y, d') を距離空間とする. 写像 $f : X \to Y$ が $p \in X$ に対し $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ を満たすとき f は点 p で連続であるという. さらに f が X の任意の点で連続であるとき, f を連続写像という.

注意 2.19　$B_d(p\,;\delta) \subset X$ かつ $f(p) \in B_{d'}(f(p)\,;\varepsilon)$ だから, f が p で連続であるとは, 任意の正の実数 ε に対して正の実数 δ で, 条件「$x \in B_d(p\,;\delta)$ ならば $f(x) \in B_{d'}(f(p)\,;\varepsilon)$」を満たすものが存在することである.

次の命題は, 連続写像が持つ重要な性質の一つである.

命題 2.20　(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z) を距離空間, $V \subset X$, $W \subset Y$ とし, 写像 $f : V \to W$ は $p \in X$, $q \in Y$ に対して $\lim_{x \to p} f(x) = q$ を満たし, 写像 $g : Y \to Z$ は q で連続であるとする. このとき $\lim_{x \to p} g(f(x)) = g(q)$ が成り立つ.

証明　g の q における連続性から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta_1 > 0$ で「$y \in B_{d_Y}(q\,;\delta_1) \cap Y$ ならば $g(y) \in B_{d_Z}(g(q)\,;\varepsilon)$」を満たすものがある. また, f についての仮定から, $\delta > 0$ で,「$x \in B_{d_X}(p\,;\delta) \cap X$ かつ $x \neq p$ ならば $f(x) \in B_{d_Y}(q\,;\delta_1)$」を満たすものがある. 従って $x \in B_{d_X}z(p\,;\delta) \cap X$ かつ $x \neq p$ ならば $g(f(x)) \in B_{d_Z}(g(q)\,;\varepsilon)$ となるため, $\lim_{x \to p} g(f(x)) = g(q)$ が成り立つ. □

注意 2.21　命題 2.20 の結果は $\lim_{x \to p} g(f(x)) = g\Big(\lim_{x \to p} f(x)\Big)$ とも表せる. これは, 連続関数が「極限をとる」という操作と交換可能であることを示している.

距離空間 (X, d) の部分集合が閉集合であるための必要十分条件が点列を用いて次のように与えられる.

命題 2.22　X の部分集合 A が 閉集合であるためには, 次の条件が満たされることが必要十分である.

すべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_k \in A$ である点列 $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ が $p \in X$ に収束すれば $p \in A$ である.

証明　A を X の閉集合, $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ を $p \in X$ に収束する A の点列とする. 命題 2.12 から $X - A$ は開集合だから, もし $p \in X - A$ ならば p は $X - A$ の内点である. 従って $B_d(p\,;r) \subset X - A$ を満たす $r > 0$ がある. 一方 $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ は $p \in X$ に収束するため, 自然数 N で条件「$k \geqq N$ ならば $x_k \in B_d(p\,;r)$」を満たすものがある. このとき $x_N \in B_d(p\,;r) \cap A$ だから $B_d(p\,;r) \cap A \neq \emptyset$ であるが $B_d(p\,;r) \subset X - A$ と矛盾する. 故に $p \notin X - A$ だから $p \in A$ となって, 命題の条件が満たされる.

命題の条件が満たされるとする. $p \in X - A$ が $X - A$ の内点でないとすると, 任意の $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $B_d\big(p\,;\frac{1}{k}\big) \not\subset X - A$ すなわち $B_d\big(p\,;\frac{1}{k}\big) \cap A$ は空集合ではないため $x_k \in B_d\big(p\,;\frac{1}{k}\big) \cap A$ が選べる. このとき, すべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_k \in A$ かつ $d(x_k, p) < \frac{1}{k}$ だから $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ は p に収束するため, 仮定から $p \in A$ となるが, これは $p \in X - A$ と矛盾する. 故に $X - A$ の点はすべて内点だから $X - A$ は開集合であり, 命題 2.12 によって A は閉集合である. □

注意 2.23　距離空間 (X, d) において収束する点列全体の集合を $\mathrm{Seq}(X, d)$ で表し, 収束する点列 $(x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ に対してその極限を対応させる写像 $\lim : \mathrm{Seq}(X, d) \to X$ を考える. すなわち $\lim_{k \to \infty} x_k = p$ のとき $\lim((x_k)_{k \in \boldsymbol{N}}) = p$ とする. 命題 2.22 は, X の部分集合 A が閉集合であるための必要十分条件が,「各項が A に属する点列の $\lim : \mathrm{Seq}(X, d) \to X$ による像が A に含まれる.」である, つまり “A が $\lim$ で閉じている” ことを主張している.

命題 2.24 (X,d) が距離空間のとき, X の部分集合 Y に対し, 次の等式が成り立つ.

$$\overline{Y} = \{p \in X \mid \text{すべての } k \in \boldsymbol{N} \text{ に対して } a_k \in Y \text{ かつ } p \text{ に収束する点列 } (a_k)_{k\in\boldsymbol{N}} \text{ が存在する.}\}$$

証明 $p \in \overline{Y}$ ならば任意の自然数 k に対して $B_d\big(p;\frac{1}{k}\big) \cap Y \neq \emptyset$ だから $a_k \in B_d\big(p;\frac{1}{k}\big) \cap Y$ が選べる. このとき, すべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $a_k \in Y$ かつ $d(a_k,p) < \frac{1}{k}$ だから $(a_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は p に収束する.

逆に, すべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $a_k \in Y$ かつ p に収束する点列 $(a_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ があるとき, 任意の $r > 0$ に対して $a_k \in B_d(p;r)$ を満たす $k \in \boldsymbol{N}$ が存在するため, $a_k \in B_d(p;r) \cap Y \neq \emptyset$ である. 従って $p \in \overline{Y}$ である. □

距離関数から定義される開球を用いて点列の収束や写像の極限の定義を行った (定義 2.14, 定義 2.16) が, 以下の命題 2.25 と命題 2.26 は, 開集合だけを用いて点列の収束と写像の極限が定義できることを示している.

命題 2.25 X の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が $p \in X$ に収束するためには, p を含む任意の開集合 U に対し, 自然数 N で, 条件「$k \geqq N$ ならば $x_k \in U$」を満たすものが存在することが必要十分である.

証明 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が $p \in X$ に収束するとし, U は p を含む開集合であるとする. 開集合の定義から, 正の実数 r で, $B_d(p;r) \subset U$ を満たすものがあり, $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が p に収束することから, 自然数 N で, 条件「$k \geqq N$ ならば $x_k \in B_d(p;r)$」を満たすものが存在する. $B_d(p;r) \subset U$ だから, 自然数 N は, 条件「$k \geqq N$ ならば $x_k \in U$」を満たす. 逆は, 命題 2.13 の (1) により開球が開集合であることから明らかである. □

命題 2.26 (X,d), (Y,d') を距離空間とし, $Z \subset X$, $W \subset Y$ と写像 $f: Z \to W$ が与えられているとする. 写像 f の $p \in X$ における極限が $q \in Y$ であるためには, q を含む Y の任意の開集合 V に対し, p を含む X の開集合 U で, 条件「“$x \in U \cap Z$ かつ $x \neq p$” ならば $f(x) \in V$」を満たすものが存在することが必要十分である.

証明 f の p における極限が q であるとし, V は q を含む開集合であるとする. 開集合の定義から, 正の実数 r で, $B_{d'}(q;r) \subset V$ を満たすものがあり, f の p における極限が q であることから, 正の実数 δ で, 条件「“$x \in B_d(p;\delta) \cap Z$ かつ $x \neq p$” ならば $f(x) \in B_{d'}(q;r)$」を満たすものが存在する. 開球 $B_d(p;\delta)$ は p を含む開集合だから, $U = B_d(p;\delta)$ とすればよい.

逆に, q を含む任意の開集合 V に対し, p を含む開集合 U で, 条件「“$x \in U \cap Z$ かつ $x \neq p$” ならば $f(x) \in V$」を満たすものが存在すると仮定する. 任意の正の実数 ε に対して $B_{d'}(q;\varepsilon)$ は q を含む開集合だから, 仮定から p を含む開集合 U で, 条件「“$x \in U \cap Z$ かつ $x \neq p$” ならば $f(x) \in B_{d'}(q;\varepsilon)$」を満たすものが存在する. 開集合の定義から, 正の実数 δ で, $B_d(p;\delta) \subset U$ を満たすものがあるため, 条件「“$x \in B_d(p;\delta) \cap Z$ かつ $x \neq p$” ならば $f(x) \in B_{d'}(q;\varepsilon)$」が満たされる. 故に f の p における極限は q である. □

注意 2.27 距離空間 (X,d) の開集合全体からなる集合を $\mathcal{O}_d$ で表すと, X の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が収束するかどうか, また収束する場合はどの点に収束するかは, 距離関数 d そのものより, d から定まる X の部分集合を要素とする集合 $\mathcal{O}_d$ のみに依存することが命題 2.25 から分かる. 故に, 集合 X に与えられた 2 種類の距離関数 d, d' が異なっていても, $\mathcal{O}_d = \mathcal{O}_{d'}$ ならば, X の任意の点 p に対して, 距離空間 (X,d) において p に収束する点列全体の集合と距離空間 (X,d) において p に収束する点列全体の集合は一致する. 命題 2.26 から写像の極限についても同様のことが言える.

点列の極限を用いれば, 写像の極限は次のように言い換えられる.

命題 2.28 (X,d), (Y,d') を距離空間, f を X の部分集合 Z から Y の部分集合 W への写像とし, $p \in X$, $q \in Y$ とする. f の p における極限が q であることは, 条件「すべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_k \in Z$, $x_k \neq p$ かつ $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = p$」を満たす X の任意の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ に対して $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = q$ が成り立つことと同値である.

証明 f の p における極限が q であることを仮定し, X の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は, 条件

$$\text{「すべての } k \in \boldsymbol{N} \text{ に対して } x_k \in Z,\ x_k \neq p \text{ かつ } \lim_{k\to\infty} x_k = p\text{」} \cdots (i)$$

を満たすとする. f についての仮定から, 任意の正の実数 ε に対して, 正の実数 δ で, 条件

$$「x \in Z \text{ かつ } 0 < d(x,p) < \delta \text{ ならば } d'(f(x),q) < \varepsilon」 \cdots (ii)$$

を満たすものが存在する. また $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ についての仮定 (i) から, 上の δ に対し, 自然数 N で, 条件

$$「k \geqq N \text{ ならば } x_k \in Z,\ x_k \neq p \text{ かつ } d(x_k,p) < \delta」$$

を満たすものが存在する. 従って $k \geqq N$ ならば, $x = x_k$ としたときに条件 (ii) の仮定が満たされて

$$「k \geqq N \text{ ならば } d'(f(x_k),q) < \varepsilon」$$

が成り立つため, $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = q$ である.

上で示した主張の逆の主張を示すために, 逆の主張の対偶である『f の p における極限が q でないならば, 条件「すべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_k \in Z$, $x_k \neq p$ かつ $\lim_{k\to\infty} x_k = p$」を満たす X の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ で $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = q$ が成り立たないものが存在する.』を示す.

f の p における極限が q でないとき, ある正の実数 ε_0 で, 次の条件を満たすものがある.

「任意の正の実数 δ に対して $f(x) \notin B_{d'}(q\,;\varepsilon_0)$ を満たす p と異なる $x \in B_d(p\,;\delta) \cap Z$ が存在する.」

従って, 任意の自然数 k に対して $f(x_k) \notin B_{d'}(q\,;\varepsilon_0)$ である p と異なる $x_k \in B_d\bigl(p\,;\frac{1}{k}\bigr) \cap Z$ が存在する. そこで, X の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を考えると, すべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_k \in Z$, $x_k \neq p$ であり, $0 < d(x_k,p) < \dfrac{1}{k}$ だから例 1.25 と命題 1.26 の (2) から, $\lim_{k\to\infty} d(x_k,p) = 0$ である. 従って, 注意 2.15 の (2) により $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は p に収束する. ところが, 任意の自然数 k に対して $f(x_k) \notin B_{d'}(q\,;\varepsilon_0)$ だから, 注意 2.15 の (1) によって $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = q$ は成り立たないため, 上の主張が示された. □

系 2.29 (X,d), (Y,d') を距離空間, f を X から Y への写像とし, $p \in X$ とする. このとき, f が p で連続であることは, p に収束する X の任意の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ に対して $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(p)$ が成り立つことと同値である.

証明 f が p で連続であると仮定し, $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ を p に収束する X の点列とする. 注意 2.19 から, 任意の正の実数 ε に対して, 正の実数 δ で次の条件を満たすものが存在する.

$$「d(x,p) < \delta \text{ ならば } d'(f(x),f(p)) < \varepsilon」 \cdots (i)$$

また $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は p に収束するため, 上の δ に対し, 自然数 N で, 条件「$k \geqq N$ ならば $d(x_k,p) < \delta$」を満たすものが存在する. 故に $k \geqq N$ ならば, $x = x_k$ としたときに条件 (i) の仮定が満たされて「$k \geqq N$ ならば $d'(f(x_k),f(p)) < \varepsilon$」が成り立つため, $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(p)$ である.

逆に p に収束する X の任意の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ に対して $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(p)$ が成り立つならば, 命題 2.28 により f は p で連続である. □

命題 2.30 (X,d), (Y,d') を距離空間とし, 写像 $f : X \to Y$ が与えられているとする.

(1) f が $p \in X$ で連続であるためには, $f(p)$ を含む Y の任意の開集合 V に対し, p が $f^{-1}(V)$ の内点であることが必要十分である.

(2) f が連続写像であるためには, Y の任意の開集合 V に対し, $f^{-1}(V)$ が X の開集合であることが必要十分である.

証明 (1) f が $p \in X$ で連続であるとし, V は Y の開集合で $f(p)$ を含むものとする. 命題 2.26 から, p を含む X の開集合 U で, 条件「"$x \in U$ かつ $x \neq p$" ならば $f(x) \in V$」を満たすものが存在する. ここで $f(x) \in V$ は $x \in f^{-1}(V)$ と同値であ, $f(p) \in V$ だから $p \in f^{-1}(V)$ となるため, U は条件「$x \in U$ ならば $f(x) \in V$」を満たす. 従って $U \subset f^{-1}(V)$ である. U は p を含む開集合だから p は U の内点である. 故に p は U を含む集合 $f^{-1}(V)$ の内点でもある. 逆に, $f(p)$ を含む Y の任意の開集合 V に対し, p が $f^{-1}(V)$ の内点であると仮定する. p は $f^{-1}(V)$ の内点だから, $r > 0$ で $B_d(p\,;r) \subset f^{-1}(V)$ を満たすものが存在する. そこで $U = B_d(p\,;r)$ とおけば, 例 2.13 の (1) から, U は p を含む X の開集合であり, $x \in U$ ならば $x \in f^{-1}(V)$, すなわち $f(x) \in V$ だから命題 2.26 によって f の p における極限は $f(p)$ である. 従って f は p で連続である.

(2) Y の任意の開集合 V に対し, $f^{-1}(V)$ が X の開集合であることと, $f^{-1}(V)$ の任意の点が $f^{-1}(V)$ の内点であることは同値だから, (1) より主張が成り立つ. □

注意 2.27 でも述べたように, 命題 2.25, 命題 2.26, 命題 2.30 により, 点列の収束や写像の極限, 連続性は距離関数そのものよりも, 距離関数から定まる開集合からなる集合に依存する概念であるといえる. そこで, 次の定義を行う.

定義 2.31 距離空間 (X,d) の開集合全体からなる集合を距離関数 d から定まる X の位相といい, $\mathcal{O}_d$ で表す.

距離関数を明示する必要がある場合は, 距離空間 (X,d) から距離空間 (Y,d') への写像を $f:(X,d)\to(Y,d')$ のように表す. X に 2 種類の距離関数が与えられた場合, 次のことが成り立つ.

定理 2.32 集合 X に 2 種類の距離関数 d と d' が与えられているとき, 次の 4 つの命題は同値である.

(i) $\mathcal{O}_{d'}\subset\mathcal{O}_d$

(ii) X の恒等写像 $id_X:(X,d)\to(X,d')$ は連続である.

(iii) 任意の $p\in X$ と $\varepsilon>0$ に対し, $\delta>0$ で, 条件「$d(x,p)<\delta$ ならば $d'(x,p)<\varepsilon$」を満たすものがある.

(iv) 任意の $p\in X$ に対し, X の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が距離空間 (X,d) で p に収束すれば, $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は距離空間 (X,d') でも p に収束する.

証明 (i) が成り立つならば, 任意の $V\in\mathcal{O}_{d'}$ に対して $id_X^{-1}(V)=V\in\mathcal{O}_d$ だから, 命題 2.30 の (2) によって $id_X:(X,d)\to(X,d')$ は連続である. (ii) が成り立つならば, 任意の $V\in\mathcal{O}_{d'}$ に対し, 命題 2.30 から $V=id_X^{-1}(V)$ は (X,d) の開集合であるため, $V\in\mathcal{O}_d$ である. 従って $\mathcal{O}_{d'}\subset\mathcal{O}_d$ が成り立つ.

$d'(id_X(x),id_X(p))=d'(x,p)$ に注意すれば, 連続性の定義から, (ii) と (iii) は同値である.

(ii) が成り立つと仮定し, X の点列 $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が距離空間 (X,d) で p に収束するならば, 系 2.29 を $X=Y$, $f=id_X$ に対して用いると, id_X の連続性から $(x_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は距離空間 (X,d') でも p に収束するため, (iv) が成り立つ. 逆に (iv) が成り立てば, 再び系 2.29 を $X=Y$, $f=id_X$ に対して用いると, id_X は X の任意の点 p で連続になるため, (ii) が成り立つ. □

距離空間 (X,d) と $p\in X$ に対し, p に収束する X の点列全体からなる集合を $\mathrm{Seq}_p(X,d)$ で表せば, 定理 2.32 の (iv) は「任意の $p\in X$ に対して $\mathrm{Seq}_p(X,d)\subset\mathrm{Seq}_p(X,d')$ である.」と言い換えられるので次の結果が得られる.

系 2.33 集合 X に 2 つの距離関数 d,d' が与えられているとき, すべての $p\in X$ に対して $\mathrm{Seq}_p(X,d)=\mathrm{Seq}_p(X,d')$ であるためには, $\mathcal{O}_d=\mathcal{O}_{d'}$ であることが必要十分である.

系 2.34 集合 X に 2 種類の距離関数 d と d' が与えられているとする. 正の実数の定数 K で条件「すべての $x,y\in X$ に対して $d'(x,y)\leqq Kd(x,y)$ が成り立つ.」を満たすものがあれば $\mathcal{O}_{d'}\subset\mathcal{O}_d$ である.

証明 任意の $p\in X$ と $\varepsilon>0$ に対し, $\delta=\dfrac{\varepsilon}{K}$ とおく. このとき $d(x,p)<\delta$ ならば $d'(x,p)\leqq Kd(x,p)<K\delta=\varepsilon$ が成り立ち, 定理 2.32 の (iii) が満たされるため, $\mathcal{O}_{d'}\subset\mathcal{O}_d$ である. □

注意 2.35 正の実数の定数 K, L で条件「すべての $x,y\in X$ に対して $Ld(x,y)\leqq d'(x,y)\leqq Kd(x,y)$ が成り立つ.」を満たすものがあれば $\mathcal{O}_{d'}=\mathcal{O}_d$ であることが上の結果から分かる.

まず距離関数が異なっていても, 位相が一致する例を挙げる.

例 2.36 p を 1 以上の実数とし, d_p, d_∞ を例 2.2 で定めた $\boldsymbol{R}^n$ の距離関数とする. $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\boldsymbol{R}^n$ に対し, $d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ の定義からすべての $i=1,2,\ldots,n$ に対して $|x_i-y_i|\leqq d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成り立つため, 次の不等式が得られる.

$$d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n}d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^p\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

また, すべての $j=1,2,\dots,n$ に対して $|x_j-y_j| \leqq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成り立つため,

$$d_\infty(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|,\dots,|x_n-y_n|\} \leqq d_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

が得られる. 故に注意 2.35 から, $\mathcal{O}_{d_p}=\mathcal{O}_{d_\infty}$ であり, 任意の $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して $\boldsymbol{R}^n$ の点列 $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が距離空間 $(\boldsymbol{R}^n,d_p)$ で $\boldsymbol{p}$ に収束するためには, $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が距離空間 $(\boldsymbol{R}^n,d_\infty)$ で $\boldsymbol{p}$ に収束することが必要十分である.

次の例は距離関数が異なっていて, 位相が一致しない例である. このような場合の 2 つの距離関数は「本質的に異なる」と考えられる.

例 2.37 p を 1 以上の実数とし, d_p, d_∞ を例 2.3 で定めた $C[a,b]$ の距離関数とする. $f,g\in C[a,b]$ に対し, $d_\infty(f,g)$ の定義からすべての $x\in[a,b]$ に対して $|f(x)-g(x)|\leqq d_\infty(f,g)$ が成り立つため, 次の不等式が得られる.

$$d_p(f,g) = \left(\int_a^b|f(x)-g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\int_a^b d_\infty(f,g)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = (b-a)^{\frac{1}{p}}d_\infty(f,g)$$

従って, 系 2.34 から $\mathcal{O}_{d_p}\subset\mathcal{O}_{d_\infty}$ が成り立つ. $C[a,b]$ の点列 (関数列) $(f_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ が距離空間 $(C[a,b],d_\infty)$ で関数 g に収束すれば, $\lim_{k\to\infty}d_\infty(f_k,g)=0$ だから, 上の不等式で $f=f_k$ とすれば, 命題 1.26 の (2) により $\lim_{k\to\infty}d_p(f_k,g)=0$ が得られる. 故に距離空間 $(C[a,b],d_p)$ でも $(f_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は g に収束する.

以後, 式を見やすくするために, $a=-1$, $b=1$ の場合を考える. 各自然数 k に対して $f_k\in C[-1,1]$ を以下のように定めれば, f_k は常に 0 以上の値をとり, 0 で最大値 1 をとる.

$$f_k(x) = \begin{cases} 1-k|x| & |x|\leqq\frac{1}{k} \\ 0 & \frac{1}{k}\leqq|x|\leqq 1 \end{cases}$$

$[-1,1]$ で値が常に 0 である定数値関数も 0 で表せば, すべての自然数 k に対して $d_\infty(f_k,0)=1$ だから, $(f_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は距離空間 $(C[-1,1],d_\infty)$ で 0 に収束しない. 一方

$$d_p(f_k,0) = \left(\int_{-1}^{1}|f_k(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}}(1-k|x|)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(2\int_0^{\frac{1}{k}}(1-kx)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{2}{k(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

だから $\lim_{k\to\infty}d_p(f_k,0)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2}{k(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}=0$ となるため, 距離空間 $(C[-1,1],d_p)$ では $(f_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は 0 に収束することが分かる. 故に系 2.33 の対偶から, $\mathcal{O}_{d_p}\neq\mathcal{O}_{d_\infty}$ である.

3 位相空間

集合 X に対し, X の部分集合全体からなる集合を $P(X)$ で表し, $P(X)$ を X の冪集合という. 集合 I の各要素 i に対して X の部分集合 S_i が与えられているとき, 言い換えると写像 $S:I\to P(X)$ が与えられていて $S(i)=S_i$ とおくとき, $(S_i)_{i\in I}$ を「I を添字集合とする集合族」という.

集合族 $(S_i)_{i\in I}$ に対して 合併 $\bigcup_{i\in I}S_i$ と共通部分 $\bigcap_{i\in I}S_i$ を以下のように定める.

$$\bigcup_{i\in I}S_i = \{x\,|\,x\in S_i \text{ となる } i\in I \text{ がある.}\},\qquad \bigcap_{i\in I}S_i = \{x\,|\,\text{すべての } i\in I \text{ に対して } x\in S_i.\}$$

また, Γ が X の部分集合を要素とする集合 (すなわち $\Gamma\subset P(X)$) のとき, Γ の要素全体の合併と共通部分を次のように表す.

$$\bigcup_{A\in\Gamma}A = \{x\,|\,x\in A \text{ となる } A\in\Gamma \text{ がある.}\},\qquad \bigcap_{A\in\Gamma}A = \{x\,|\,\text{すべての } A\in\Gamma \text{ に対して } x\in A.\}$$

定義 2.1 において距離関数とは, 命題 1.22 で示したユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の距離関数 d_n と同じ条件を満たすものとして定義したが, 位相空間の概念を定義する際も同様に, 距離空間における開集合全体の集合が満たす条件を考え示し, 集合 X の位相とは, 同じ条件を満たす X の部分集合を要素とする集合として定義する.

命題 3.1　距離空間 (X,d) に対し, X の開集合全体からなる集合 $\mathcal{O}_d$ は以下の条件を満たす.
(1) $X,\emptyset \in \mathcal{O}_d$. (2) $O_1,O_2 \in \mathcal{O}_d$ ならば $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_d$. (3) すべての $i \in I$ に対して $O_i \in \mathcal{O}_d$ ならば $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}_d$.

証明 (1) 任意の $p \in X$ に対して $B_d(p;1) \subset X$ だから p は X の内点である. 従って X のすべての点は内点だから X は開集合になるため $X \in \mathcal{O}_d$ である. また, 注意 2.11 から空集合は開集合だから $\emptyset \in \mathcal{O}_d$ である.

(2) $O_1,O_2 \in \mathcal{O}$ として, 任意の $p \in O_1 \cap O_2$ を取ると, O_1 と O_2 は開集合だから, p は O_1 の内点で, O_2 の内点でもあるので $r_1,r_2>0$ で $B_d(p;r_1) \subset O_1$, $B_d(p;r_2) \subset O_2$ を満たすものがある. 故に $B_d(p;r_1) \cap B_d(p;r_2) \subset O_1 \cap O_2$ が成り立つ. $r=\min\{r_1,r_2\}$ とおけば $0<r \leqq r_1,r_2$ だから $B_d(p;r) \subset B_d(p;r_1)$ かつ $B_d(p;r) \subset B_d(p;r_2)$ が成り立つので $B_d(p;r) \subset B_d(p;r_1) \cap B_d(p;r_2) \subset O_1 \cap O_2$ となり, p は $O_1 \cap O_2$ の内点である. 従って $O_1 \cap O_2$ は開集合だから $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_d$ である.

(3) $p \in \bigcup_{i\in I} O_i$ ならば $p \in O_j$ を満たす $j \in I$ がある. O_j は開集合だから p は O_j の内点で, $r>0$ で $B_d(p;r) \subset O_j$ を満たすものがある. このとき $B_d(p;r) \subset O_j \subset \bigcup_{i\in I} O_i$ だから p は $\bigcup_{i\in I} O_i$ の内点である. 従って $\bigcup_{i\in I} O_i$ は開集合だから $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}_d$ である. □

定義 3.2　X を集合, $\mathcal{O}$ を X の部分集合を要素とする集合 (すなわち $\mathcal{O} \subset P(X)$) とする. $\mathcal{O}$ が次の 3 つの条件を満たすとき, $\mathcal{O}$ を X の位相と呼び, 対 $(X,\mathcal{O})$ を位相空間という. また, $\mathcal{O}$ の要素を X の開集合という.
(O1) $X,\emptyset \in \mathcal{O}$.　(O2) $O_1,O_2 \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.　(O3) すべての $i \in I$ に対して $O_i \in \mathcal{O}$ ならば $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}$.

X の位相を一つ固定して考える場合は "位相空間 $(X,\mathcal{O})$" というかわりに, "位相空間 X" ということが多い.

注意 3.3　(O2) から, n による数学的帰納法で「$O_1,O_2,\ldots,O_n \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_n \in \mathcal{O}$.」が示される.

位相空間においても定義 2.7 と同様に, 内点, 内部, 外点, 外部, 触点, 閉包, 境界点, 境界の概念が定義される.

定義 3.4　$(X,\mathcal{O})$ を位相空間, A を X の部分集合, $p \in X$ とする.

(1) X の開集合 O で, $p \in O$ かつ $O \subset A$ を満たすものが存在するとき, p を A の内点という. A の内点全体からなる集合を A の内部といい, A^i で表す.

(2) X の開集合 O で, $p \in O$ かつ $O \cap A = \emptyset$ を満たすものが存在するとき, p を A の外点という. A の外点全体からなる集合を A の外部といい, A^e で表す.

(3) p を含む X の任意の開集合 O に対して $O \cap A \neq \emptyset$ であるとき, p を A の触点という. A の触点全体からなる集合を A の閉包といい, $\overline{A}$ で表す.

(4) p を含む X の任意の開集合 O に対して $O \cap A \neq \emptyset$ かつ $O \not\subset A$ であるとき, p を A の境界点という. A の境界点全体からなる集合を A の境界といい, ∂A で表す.

注意 3.5　以下で O は X の開集合とする.

(1) $O \cap A = \emptyset$ は $O \subset X - A$ と同値だから, p が A の外点であることと p が $X-A$ の内点であることは同値である. 従って $A^e = (X-A)^i$ である.

(2) $O \not\subset A$ は $O \cap (X-A) \neq \emptyset$ と同値だから, p が A の境界点であることと p が A と $X-A$ の両方の触点であることは同値である. 従って $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X-A}$ であり, この等式から $\partial(X-A) = \partial A$ が得られる.

(3) $p \in O$ かつ $O \subset A$ ならば $p \in A$ であり, $p \in A$ ならば p を含む X の任意の開集合 O に対して $p \in O \cap A$ だから $p \in \overline{A}$ である. また, $p \in O$ かつ $O \cap A = \emptyset$ ならば $p \notin A$ である. 従って $A^i \subset A \subset \overline{A}$, $A^e \cap A = \emptyset$ である.

(4) p が A の内点でも外点ないこととと, p が定義 3.4 の (4) の条件を満たすことと同値だから, $\partial A = X - (A^i \cup A^e)$ である. 従って $X = A^i \cup A^e \cup \partial A$ と $A^i \cap \partial A = A^e \cap \partial A = \emptyset$ が成り立つ. ((3) から $A^i \cap A^e = \emptyset$ も成り立つ.)

命題 3.6 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, A を X の部分集合とすれば, $\overline{A} = A^i \cup \partial A$, $\overline{X - A} = X - A^i$ が成り立つ.

証明 定義 3.4 の (3) と (4) から, 境界点は触点だから $\partial A \subset \overline{A}$ であり, 注意 3.5 の (3) から $A^i \subset \overline{A}$ だから $A^i \cup \partial A \subset \overline{A}$ である. $p \in \overline{A}$ かつ $p \notin A^i$ ならば p を含む X の任意の開集合 O に対して $O \cap A \neq \emptyset$ かつ $O \not\subset A$ が成り立つため $p \in \partial A$ である. 故に $\overline{A} \subset A^i \cup \partial A$ も成り立つため, $\overline{A} = A^i \cup \partial A$ である.

$O \cap (X - A) \neq \emptyset$ は $O \not\subset A$ と同値だから $p \in \overline{X - A}$ は条件「p を含む X の任意の開集合 O に対して $O \not\subset A$」と同値である. この条件は $p \in A^i$ であるための定義 3.4 の (1) の条件の否定だから, $p \in \overline{X - A}$ は $p \in X - A^i$ と同値である. 従って $\overline{X - A} = X - A^i$ が成り立つ. □

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ において, 開集合とは $\mathcal{O}$ の要素のことなので改めて定義する必要はない. そこで「近傍」と「閉集合」の概念だけ定義する.

定義 3.7 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, A を X の部分集合 とする.

(1) $p \in X$ に対し, A が $p \in A^i$ を満たすとき, A を p の近傍といい, 開集合である p の近傍を p の開近傍という.

(2) A の触点がすべて A に属するとき, A を X の閉集合という.

(3) $\overline{A} = X$ が成り立つとき, A は X において稠密 (dense) であるという.

注意 3.8 (1) 注意 3.5 の (3) から, $A \subset \overline{A}$ は常に成り立つため, A が閉集合であるためには, $\overline{A} = A$ であることが必要十分である.

(2) A が空集合の場合は A の触点は存在しないので, 命題「A の触点がすべて A に属する.」は真であるため, 空集合は閉集合である.

命題 3.9 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, X の部分集合 A に対して, A に含まれる開集合全体からなる集合を Γ とおく. このとき $A^i = \bigcup_{O \in \Gamma} O$ が成り立ち, A^i は開集合である. O が A に含まれる開集合ならば $O \subset A^i$ が成り立つ. 従って, A が開集合であること $A^i = A$ であることは同値である.

証明 $p \in A^i$ であることは $p \in O$ かつ $O \subset A$ を満たす X の開集合 O が存在することと同値で, このことは Γ の定義により, $p \in \bigcup_{O \in \Gamma} O$ であることと同値だから $A^i = \bigcup_{O \in \Gamma} O$ が成り立つ. 従って, (O3) によって A^i は開集合であり, Γ は A に含まれる開集合をすべて含むため, O が A に含まれる開集合ならば $O \subset A^i$ である. □

命題 3.9 は後述の命題 3.14 と対をなす命題である.

命題 3.10 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, A を X の部分集合とすれば次の 3 つは同値である.

(i) A は閉集合である.　(ii) $X - A$ は開集合である.　(iii) $\partial A \subset A$

証明 $A = X - (X - A)$ だから命題 3.6 の 2 つ目の等式から $\overline{A} = \overline{X - (X - A)} = X - (X - A)^i$ である. 従って $\overline{A} = A$ は $X - (X - A)^i = A = X - (X - A)$ と同値である. $X - (X - A)^i = X - (X - A)$ の両辺の補集合を考えれば $(X - A)^i = X - A$ が得られるため, $\overline{A} = A$ は $(X - A)^i = X - A$ と同値である. 故に注意 3.8 の (1) と命題 3.9 から (i) と (ii) は同値である.

A が閉集合ならば注意 3.8 の (1) と命題 3.6 の最初の等式から $A = \overline{A} = A^i \cup \partial A \supset \partial A$ である. 逆に $\partial A \subset A$ ならば命題 3.6 の最初の等式と注意 3.5 の (3) から $\overline{A} = A^i \cup \partial A \subset A \subset \overline{A}$ だから $\overline{A} = A$ が成り立つため, A は閉集合である. □

注意 3.11 X の部分集合 A が閉集合ならば, 上の命題から $X - A$ は開集合で, $A = X - (X - A)$ だから, A は開

集合 $X-A$ の補集合である．逆に A が X の開集合 O の補集合ならば $A=X-O$ だから $X-A=O$ であり, O は開集合だから上の命題より, A は閉集合である．従って X の部分集合 A が閉集合であるためには, A が開集合の補集合であることが必要十分である．

位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の開集合全体の集合 $\mathcal{O}$ は定義 3.2 の 3 つの条件を満たすものであった．一方, 定義 3.7 の (2) で定義した X の閉集合は上で示したように, 開集合の補集合に他ならないという事実を用いて, 次に X の閉集合全体からなる集合の性質を定義 3.2 の 3 つの条件から導く．そのために, 次の補題を示す．

補題 3.12 集合 X の部分集合からなる集合族 $(S_i)_{i\in I}$ に対し, 次の等式が成り立つ．

$$\bigcap_{i\in I}(X-S_i)=X-\bigcup_{i\in I}S_i,\qquad \bigcup_{i\in I}(X-S_i)=X-\bigcap_{i\in I}S_i$$

とくに $I=\{1,2\}$ の場合, $(X-S_1)\cap(X-S_2)=X-(S_1\cup S_2)$, $(X-S_1)\cup(X-S_2)=X-(S_1\cap S_2)$ が成り立つ．

証明 $x\in X-\bigcup_{i\in I}S_i$ であることは $x\notin\bigcup_{i\in I}S_i$ であることと同値で, これは「すべての $i\in I$ に対して $x\notin S_i$」と同値であり, $x\notin S_i$ は $x\in X-S_i$ と同値だから, $x\in X-\bigcup_{i\in I}S_i$ は「すべての $i\in I$ に対して $x\in X-S_i$」と同値である．この命題は $x\in\bigcap_{i\in I}(X-S_i)$ を意味するので $\bigcap_{i\in I}(X-S_i)=X-\bigcup_{i\in I}S_i$ が成り立つ．$T_i=X-S_i$ とおけば $S_i=X-T_i$ だから, 上で示したことから $\bigcap_{i\in I}S_i=\bigcap_{i\in I}(X-T_i)=X-\bigcup_{i\in I}T_i=X-\bigcup_{i\in I}(X-S_i)$ が成り立ち, この等式の両端の辺の補集合を考えれば $\bigcup_{i\in I}(X-S_i)=X-\bigcap_{i\in I}S_i$ が得られる． □

命題 3.13 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ における閉集合全体からなる集合を $\mathcal{F}$ で表せば, 次の (C1), (C2), (C3) が成り立つ．
(C1) $X,\emptyset\in\mathcal{F}$． (C2) $F_1,F_2\in\mathcal{F}$ ならば $F_1\cup F_2\in\mathcal{F}$ (C3) すべての $i\in I$ に対して $F_i\in\mathcal{F}$ ならば $\bigcap_{i\in I}F_i\in\mathcal{F}$.

証明 (C1) 注意 3.8 の (2) から $\emptyset\in\mathcal{F}$ であり, X の触点は X の点だから $X\in\mathcal{F}$ も成り立つ．

(C2) $F_1,F_2\in\mathcal{F}$ ならば命題 3.10 から $X-F_1, X-F_2\in\mathcal{O}$ だから補題 3.12 と (O2) より $X-(F_1\cup F_2)=(X-F_1)\cap(X-F_2)\in\mathcal{O}$ である．従って命題 3.10 から $F_1\cup F_2\in\mathcal{F}$ が得られる．

(C3) すべての $i\in I$ に対して $F_i\in\mathcal{F}$ ならば 命題 3.10 から $X-F_i\in\mathcal{O}$ だから補題 3.12 と (O3) より $X-\bigcap_{i\in I}F_i=\bigcup_{i\in I}(X-F_i)\in\mathcal{O}$ である．従って命題 3.10 から $\bigcap_{i\in I}F_i\in\mathcal{F}$ が得られる． □

命題 3.14 $(X,\mathcal{O})$ を位相空間とし, X の部分集合 A に対して, A を含む閉集合全体からなる集合を Δ とおく．このとき $\overline{A}=\bigcap_{F\in\Delta}F$ が成り立ち, $\overline{A}$ は閉集合である．F が A を含む閉集合ならば $F\supset\overline{A}$ が成り立つ．

証明 $p\in\overline{A}$ とする．$F\in\Delta$ で $p\notin F$ となるものが存在すれば, $p\in X-F$ で, $X-F$ は開集合かつ $p\in\overline{A}$ だから $(X-F)\cap A\neq\emptyset$ である．このとき A の要素で F に属さないものが存在することになるので $A\subset F$ と矛盾する．従って, すべての $F\in\Delta$ に対して $p\in F$ だから $p\in\bigcap_{F\in\Delta}F$ である．

$p\in\bigcap_{F\in\Delta}F$ とする．p を含む X の開集合 O で $O\cap A=\emptyset$ を満たすものが存在すれば $A\subset X-O$ で, $X-O$ は閉集合だから, $X-O\in\Delta$ である．$p\notin X-O$ だから, p がすべての $F\in\Delta$ に含まれていることと矛盾する．故に p を含む X の任意の開集合 O に対して $O\cap A\neq\emptyset$ だから $p\in\overline{A}$ である．以上から $\overline{A}=\bigcap_{F\in\Delta}F$ である．

命題 3.13 から, 閉集合の共通部分は閉集合だから $\overline{A}$ は閉集合である．また, Δ は A を含む閉集合をすべて含むため, F が A を含む閉集合ならば $F\supset\bigcap_{F\in\Delta}F=\overline{A}$ である． □

4 連続写像

位相空間の間の写像の極限の概念は次のように定義される．(命題 2.26 参照)

定義 4.1 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし, $Z \subset X$, $W \subset Y$ と写像 $f : Z \to W$ および $p \in \overline{Z}$ が与えられているとする. $q \in Y$ を含む Y の任意の開集合 V に対し, p を含む X の開集合 U で, 条件「"$x \in U \cap Z$ かつ $x \neq p$" ならば $f(x) \in V$」を満たすものが存在するとき, f の p における極限は q であるという.

写像 $f : X \to Y$ が $p \in X$ で連続であるとは, f の p における極限が $f(p)$ であることと定義されるが, 定義 4.1 において $Z = X$, $f(p) \in V$ であることから, 写像 f が $p \in X$ で連続であることの定義は次のように言い直される.

定義 4.2 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし, $f : X \to Y$ を写像, $p \in X$ とする. $f(p)$ を含む Y の任意の開集合 V に対し, p を含む X の開集合 U で, 条件「$x \in U$ ならば $f(x) \in V$」を満たすものが存在するとき, f は p において連続であるという. f が X のすべての点において連続であるとき, f を連続写像という. なお X と Y の位相を明示する必要がある場合は, 写像 $f : X \to Y$ を $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ と表す.

注意 4.3 定義 1.16 の記号を使うと, 定義 4.2 の条件「$x \in U$ ならば $f(x) \in V$」は 1 つの式 $f(U) \subset V$ で表され, さらにこれは $U \subset f^{-1}(V)$ と同値である.

命題 4.4 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし, $f : X \to Y$ を写像とする.
(1) f が $p \in X$ において連続であるためには, $f(p)$ を含む任意の開集合 V に対し, p が $f^{-1}(V)$ の内点であることが必要十分である.
(2) f が連続写像であるためには, Y の任意の開集合 V に対し, $f^{-1}(V)$ が X の開集合であることが必要十分である.

証明 (1) f が $p \in X$ において連続ならば $f(p)$ を含む任意の開集合 V に対し, 注意 4.3 から p を含む X の開集合 U で $U \subset f^{-1}(V)$ を満たすものが存在する. 従って内点の定義 3.4 から p は $f^{-1}(V)$ の内点である.
$f(p)$ を含む Y の任意の開集合 V に対し, p が $f^{-1}(V)$ の内点ならば p を含む X の開集合 U で, $U \subset f^{-1}(V)$ を満たすものが存在する. 故に定義 4.2 と注意 4.3 から f は p において連続である.
(2) Y の任意の開集合 V に対し, $f^{-1}(V)$ が X の開集合であることと, $f^{-1}(V)$ の任意の点が $f^{-1}(V)$ の内点であることは命題 3.9 により同値だから, (1) より主張が成り立つ. □

補題 4.5 X, Y を集合, $f : X \to Y$ を写像とする. Y の部分集合 A に対して $f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A)$ が成り立つ.

証明 $x \in f^{-1}(Y - A)$ は $f(x) \in Y - A$ と同値で, $f(x) \in Y - A$ は $f(x) \notin A$ と同値である. ここで $x \notin X - f^{-1}(A)$ すなわち $x \in f^{-1}(A)$ は $f(x) \in A$ と同値だから, $f(x) \notin A$ は $x \in X - f^{-1}(A)$ と同値である. 以上から $x \in f^{-1}(Y - A)$ と $x \in X - f^{-1}(A)$ は同値になるため, $X - f^{-1}(A) = f^{-1}(Y - A)$ である. □

閉集合を用いて写像が連続であるための条件が以下のように与えられる.

命題 4.6 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とする. 写像 $f : X \to Y$ が連続写像であるためには, Y の任意の閉集合 F に対して $f^{-1}(F)$ が X の閉集合であることが必要十分である.

証明 f を連続写像とし, F を Y の閉集合とすれば, $Y - F$ は Y の開集合だから, 命題 4.4 の (2) から $f^{-1}(Y - F)$ は X の開集合である. 補題 4.5 から $f^{-1}(Y - F) = X - f^{-1}(F)$ だから, $f^{-1}(F)$ は X の閉集合である.
逆に Y の任意の閉集合 F に対して $f^{-1}(F)$ が X の閉集合であると仮定して, O を Y の開集合とすれば $Y - O$ は Y の閉集合だから $f^{-1}(Y - O)$ は X の閉集合である. 補題 4.5 から $f^{-1}(Y - O) = X - f^{-1}(O)$ だから, $f^{-1}(O)$ は X の開集合である. 故に命題 4.4 の (2) から f は連続写像である. □

命題 4.7 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$, $(Z, \mathcal{O}_Z)$ を位相空間とし, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を写像とする. f が $p \in X$ において連続, g が $f(p) \in Y$ において連続ならば, 合成写像 $g \circ f : X \to Z$ は p において連続である. 従って連続写像の合成写像は連続写像である.

証明 g が $f(p)$ で連続であることから $(g\circ f)(p)=g(f(p))$ を含む任意の開集合 W に対し, $f(p)$ を含む開集合 V で $g(V)\subset W$ を満たすものがある. また, f が p で連続であることから p を含む開集合 U で $f(U)\subset V$ を満たすものがある. 従って $(g\circ f)(U)=g(f(U))\subset g(V)\subset W$ が成り立つため, $g\circ f$ は p で連続である. □

定義 4.8 $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする.

(1) 連続写像 $f:X\to Y$ に対し, 連続写像 $g:Y\to X$ で, $g\circ f=id_X$ かつ $f\circ g=id_Y$ を満たすものが存在するとき, f を同相写像 (または位相同型写像) という. $(X,\mathcal{O}_X)$ と $(Y,\mathcal{O}_Y)$ の間に同相写像が存在するとき, $(X,\mathcal{O}_X)$ と $(Y,\mathcal{O}_Y)$ は同相 (または位相同型) であるという.

(2) 写像 $f:X\to Y$ が条件「O が X の開集合ならば $f(O)$ は Y の開集合」を満たすとき, f を開写像と呼び, 条件「F が X の閉集合ならば $f(F)$ は Y の閉集合」を満たすとき, f を閉写像と呼ぶ.

注意 4.9 連続な全単射は同相写像であるとは限らないが, 連続な全単射が開写像または閉写像であれば, 同相写像である. 逆に同相写像は開写像であり, 閉写像でもある.

5 位相の生成

定義 5.1 集合 X の位相 $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ が $\mathcal{O}_1\subset\mathcal{O}_2$ を満たすとき位相 $\mathcal{O}_2$ は $\mathcal{O}_1$ より強い (細かい) といい, $\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より弱い (粗い) という.

注意 5.2 X に 2 つの位相 $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ が与えられているとき, 恒等写像 $id_X:(X,\mathcal{O}_1)\to(X,\mathcal{O}_2)$ が連続になるための必要十分条件は, $\mathcal{O}_1$ が $\mathcal{O}_2$ より強いことである. とくに, $\mathcal{O}_1=\mathcal{O}_2$ の場合, id_X は連続である.

集合 X と X の部分集合からなる集合 $\mathcal{B}$ が与えられたとき, X の部分集合を要素とする集合 $\widetilde{\mathcal{B}}$, $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ を以下のように定義する.

$$\widetilde{\mathcal{B}}=\{U\subset X\,|\,U=V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_n \text{ を満たす } V_1,V_2,\ldots,V_n\in\mathcal{B} \text{ がある.}\}\cup\{X\}$$
$$\mathcal{O}(\mathcal{B})=\left\{O\subset X\,\middle|\,\Gamma\subset\widetilde{\mathcal{B}}\text{ で } O=\bigcup_{U\in\Gamma}U \text{ を満たすものがある.}\right\}\cup\{\emptyset\}$$

命題 5.3 $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は X の位相で, $\mathcal{B}\subset\mathcal{O}(\mathcal{B})$ かつ条件「$\mathcal{O}$ が $\mathcal{B}\subset\mathcal{O}$ を満たす X の位相ならば $\mathcal{O}(\mathcal{B})\subset\mathcal{O}$ である.」を満たす. 従って $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は $\mathcal{B}$ の要素がすべて開集合である X の位相のうちで最も弱い位相である.

証明 $\widetilde{\mathcal{B}}$ と $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の定義から $\mathcal{B}\subset\widetilde{\mathcal{B}}\subset\mathcal{O}(\mathcal{B})$ であり, $X\in\widetilde{\mathcal{B}}$, $\emptyset\in\mathcal{O}(\mathcal{B})$ だから $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は位相の定義 3.2 における条件 (O1) を満たす.

$O_1,O_2\in\mathcal{O}(\mathcal{B})$ ならば $O_1=\bigcup_{O\in\Gamma_1}O$, $O_2=\bigcup_{O\in\Gamma_2}O$ を満たす $\Gamma_1,\Gamma_2\subset\widetilde{\mathcal{B}}$ がある.

$$\Gamma_3=\{U\subset X\,|\,U=V_1\cap V_2 \text{ を満たす } V_1\in\Gamma_1,\ V_2\in\Gamma_2 \text{ がある.}\}$$

とおけば, $\widetilde{\mathcal{B}}$ の定義から「$V_1,V_2\in\widetilde{\mathcal{B}}$ ならば $V_1\cap V_2\in\widetilde{\mathcal{B}}$」が成り立つため $\Gamma_3\subset\widetilde{\mathcal{B}}$ であり, $O_1\cap O_2=\bigcup_{O\in\Gamma_3}O$ が成り立つ. 実際, $x\in O_1\cap O_2$ は $x\in V_1$ を満たす $V_1\in\Gamma_1$ と $x\in V_2$ を満たす $V_2\in\Gamma_2$ が存在することが必要十分であり, このことは Γ_3 の定義から $x\in U$ を満たす $U\in\Gamma_3$ が存在することと同値である. 従って, $O_1\cap O_2\in\mathcal{O}(\mathcal{B})$ が成り立つため, $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は位相の定義 3.2 における条件 (O2) を満たす.

X の部分集合の族 $(O_i)_{i\in I}$ がすべての $i\in I$ に対して $O_i\in\mathcal{O}(\mathcal{B})$ を満たすならば, 各 $i\in I$ に対して $O_i=\bigcup_{U\in\Gamma_i}U$ を満たす $\Gamma_i\subset\widetilde{\mathcal{B}}$ が存在する. $\bar{\Gamma}=\bigcup_{i\in I}\Gamma_i$ とおけば, $\bar{\Gamma}\subset\widetilde{\mathcal{B}}$ だから $\bigcup_{U\in\bar{\Gamma}}U\in\mathcal{O}(\mathcal{B})$ であり, $\bigcup_{i\in I}O_i=\bigcup_{U\in\bar{\Gamma}}U$ が成り立つ. 実際, $i\in I$ ならば $\Gamma_i\subset\bar{\Gamma}$ より $O_i=\bigcup_{U\in\Gamma_i}U\subset\bigcup_{U\in\bar{\Gamma}}U$ であるため, $\bigcup_{i\in I}O_i\subset\bigcup_{U\in\bar{\Gamma}}U$ が成り立ち, $U\in\bar{\Gamma}$

ならば $U \in \Gamma_i$ を満たす $i \in I$ が存在し, $U \subset \bigcup_{V \in \Gamma_i} V = O_i \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ だから $\bigcup_{U \in \tilde{\Gamma}} U \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ が成り立つ. 故に $\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{U \in \tilde{\Gamma}} U \in \mathcal{O}(\mathcal{B})$ だから $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は位相の定義 3.2 における条件 (O3) を満たす. 従って $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は X の位相である.

$\mathcal{O}$ を $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ を満たす X の位相とする. $U \in \widetilde{\mathcal{B}}$ ならば $U = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$ を満たす $V_1, V_2, \ldots, V_n \in \mathcal{B}$ があるが, $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ より $V_i \in \mathcal{O}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ で, $\mathcal{O}$ が位相の定義 3.2 における条件 (O2) を満たすことから $U = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \in \mathcal{O}$ である. 従って $\widetilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{O}$ が成り立つ. $O \in \mathcal{O}(\mathcal{B})$ ならば $O = \bigcup_{U \in \Gamma} U$ を満たす $\Gamma \subset \widetilde{\mathcal{B}}$ があるが, $\widetilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{O}$ より $\Gamma \subset \mathcal{O}$ であり, $\mathcal{O}$ が位相の定義 3.2 における条件 (O3) を満たすことから $O = \bigcup_{U \in \Gamma} U \in \mathcal{O}$ である. 故に $\mathcal{O}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{O}$ である. □

定義 5.4 (1) 集合 X の部分集合を要素とする集合 $\mathcal{B}$ に対し, $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ を $\mathcal{B}$ で生成される X の位相という.

(2) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対し, X の部分集合を要素とする集合 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathcal{B})$ を満たすとき, $\mathcal{B}$ を $\mathcal{O}$ の準基底という.

(3) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対し, $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ かつ任意の $O \in \mathcal{O}$ に対して $O = \bigcup_{U \in \Gamma} U$ を満たす $\Gamma \subset \mathcal{B}$ が存在するとき, $\mathcal{B}$ を $\mathcal{O}$ の基底という.

命題 5.5 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対し, $\mathcal{O}$ の部分集合 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}$ の基底であるためには $\mathcal{B}$ が次の条件を満たすことが必要十分である.

$(*)$ 任意の $O \in \mathcal{O}$ と $x \in O$ に対して $x \in U$ かつ $U \subset O$ を満たす $U \in \mathcal{B}$ がある.

証明 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}$ の基底ならば任意の $O \in \mathcal{O}$ に対して $O = \bigcup_{V \in \Gamma} V$ を満たす $\Gamma \subset \mathcal{B}$ があるため, 任意の $x \in O$ に対して $x \in U$ を満たす $U \in \Gamma$ が存在する. このとき $U \subset \bigcup_{V \in \Gamma} V = O$ だから $\mathcal{B}$ は条件 $(*)$ を満たす.

逆に $\mathcal{B}$ が条件 $(*)$ を満たすと仮定すれば, 任意の $O \in \mathcal{O}$ と $x \in O$ に対して, $x \in U_x$ かつ $U_x \subset O$ を満たす $U_x \in \mathcal{B}$ がある. このとき $\Gamma = \{U_x \,|\, x \in O\}$ とおけば $\Gamma \subset \mathcal{B}$ であり, すべての $x \in O$ に対して $U_x \subset O$ だから $\bigcup_{U \in \Gamma} U = \bigcup_{x \in O} U_x \subset O$ である. 一方 $x \in U_x$ だから $O = \bigcup_{x \in O} \{x\} \subset \bigcup_{x \in O} U_x = \bigcup_{U \in \Gamma} U$ が成り立つため $O = \bigcup_{U \in \Gamma} U$ を満たす $\Gamma \subset \mathcal{B}$ が存在する. □

例 5.6 (1) 集合 X の部分集合を要素とする集合 $\mathcal{B}$ に対して $\widetilde{\mathcal{B}}$ は $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の基底である.

(2) (X, d) を距離空間, $\mathcal{O}_d$ を距離関数 d から定まる X の位相とする. 命題 5.5 と $\mathcal{O}_d$ の定義から開球全体の集合 $\{B_d(p; r) \,|\, p \in X,\ r > 0\}$ は $\mathcal{O}_d$ の基底である. 同様に, 半径が $\frac{1}{n}$ (n は自然数) の形の有理数である開球全体の集合 $\left\{B_d\left(p; \frac{1}{n}\right) \,\middle|\, p \in X,\ n \in \boldsymbol{N}\right\}$ も $\mathcal{O}_d$ の基底である.

命題 5.7 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $\mathcal{B}$ を $\mathcal{O}_Y$ の準基底とする. 写像 $f : X \to Y$ が条件「任意の $V \in \mathcal{B}$ に対して $f^{-1}(V)$ は X の開集合である.」を満たせば f は連続写像である.

証明 O を Y の任意の開集合とすれば, $\mathcal{B}$ の要素の有限個の共通部分で表される集合の族 $(U_i)_{i \in I}$ が存在して $O = \bigcup_{i \in I} U_i$ となり, さらに各 $i \in I$ に対して $U_i = V_{1,k} \cap V_{2,k} \cap \cdots \cap V_{i,n_i}$ を満たす $V_{i,k} \in \mathcal{B}$ $(k = 1, 2, \ldots, n_i)$ が存在する. このとき, $f^{-1}(U_i) = f^{-1}(V_{1,k} \cap V_{2,k} \cap \cdots \cap V_{i,n_i}) = f^{-1}(V_{1,k}) \cap f^{-1}(V_{2,k}) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_{i,n_i})$ であり, 仮定から $f^{-1}(V_{i,k})$ は X の開集合だから $f^{-1}(U_i)$ も X の開集合である. さらに $f^{-1}(O) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$ が成り立つため, $f^{-1}(O)$ は X の開集合である. 従って命題 4.4 の (2) から f は連続写像である. □

6 部分空間・直積空間

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間, Y を X の部分集合とするとき, Y に位相を定義する方法を考える.

条件 6.1 Y に位相 $\mathcal{O}'$ を与えたときに, $\mathcal{O}'$ が満たしてほしい条件として次の 2 つを考える.

(i) 包含写像 $i_Y : Y \to X$ が連続写像である.

(ii) 位相空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ と写像 $f : Z \to Y$ が与えられたとき, 合成写像 $i_Y \circ f : Z \to X$ が連続写像ならば f も連続写像である.

上の条件 (i) が満たされるためには, 命題 4.4 の (2) から $\mathcal{O}'$ が $i_Y^{-1}(O)$ $(O \in \mathcal{O})$ という形をした Y の部分集合をすべて含んでいることが必要十分である. $i_Y : Y \to X$ は包含写像だから, $i_Y^{-1}(O) = O \cap Y$ であることに注意する.

補題 6.2 $\mathcal{O}' = \{U \subset Y \,|\, U = O \cap Y$ となる $O \in \mathcal{O}$ がある.$\}$ とおけば, $\mathcal{O}'$ は Y の位相である.

証明 $\emptyset, X \in \mathcal{O}$ であり, $\emptyset = \emptyset \cap Y$, $Y = X \cap Y$ より $\emptyset, Y \in \mathcal{O}'$ である. $U_1, U_2 \in \mathcal{O}'$ とすれば $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ で $U_1 = O_1 \cap Y$, $U_2 = O_2 \cap Y$ を満たすものがあるので, $U_1 \cap U_2 = (O_1 \cap Y) \cap (O_2 \cap Y) = (O_1 \cap O_2) \cap Y$ と $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$ から $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}'$ である. $U_i \in \mathcal{O}'$ $(i \in I)$ とすれば, 各 $i \in I$ に対して $O_i \in \mathcal{O}$ で $U_i = O_i \cap Y$ を満たすものがあるので, $\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (O_i \cap Y) = \left(\bigcup_{i \in I} O_i \right) \cap Y$ と $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$ から $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}'$ である. □

従って Y の位相 $\mathcal{O}'$ は条件 6.1 の (i) を満たす Y の位相の中で最も弱いものである. Y の位相 $\mathcal{O}'$ が条件 6.1 の (ii) を満たすことを示すために, 次の補題を示す.

補題 6.3 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ と Z の部分集合 A に対して $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ が成り立つ.

証明 $x \in (g \circ f)^{-1}(A)$ は $g(f(x)) = (g \circ f)(x) \in A$ と同値であり, $g(f(x)) \in A$ は $f(x) \in g^{-1}(A)$ と同値である. さらに $f(x) \in g^{-1}(A)$ は $x \in f^{-1}(g^{-1}(A))$ と同値だから $x \in (g \circ f)^{-1}(A)$ は $x \in f^{-1}(g^{-1}(A))$ と同値である. □

命題 6.4 Y の位相 $\mathcal{O}'$ は条件 6.1 の (ii) を満たす.

証明 位相空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ と写像 $f : Z \to Y$ が与えられていて, 合成写像 $i_Y \circ f : Z \to X$ が連続写像であるとする. 任意の $U \in \mathcal{O}'$ に対して $O \in \mathcal{O}$ で $U = O \cap Y = i_Y^{-1}(O)$ を満たすものがある. 補題 6.3 から $f^{-1}(U) = f^{-1}(i_Y^{-1}(O)) = (i_Y \circ f)^{-1}(O)$ で, $i_Y \circ f$ の連続性と命題 4.4 の (2) より $f^{-1}(U)$ は Z の開集合である. 従って命題 4.4 の (2) より f は連続写像である. □

定義 6.5 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, Y を X の部分集合とするとき, 補題 6.2 で与えた Y の位相 $\mathcal{O}'$ を Y の X に関する相対位相といい, 位相空間 $(Y, \mathcal{O}')$ を $(X, \mathcal{O})$ の部分空間または部分位相空間という.

注意 6.6 $\mathcal{O}'$ の要素 $O \cap Y$ の Y における補集合は $(X - O) \cap Y$ だから, 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分空間 $(Y, \mathcal{O}')$ の閉集合全体の集合は $\{A \subset Y \,|\, A = F \cap Y$ となる X の閉集合 F がある.$\}$ である.

定義 6.7 集合の族 $(X_i)_{i \in I}$ に対して写像 $x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$ で, 各 $i \in I$ に対して $x(i) \in X_i$ を満たすもの全体からなる集合を $\prod_{i \in I} X_i$ で表して, $(X_i)_{i \in I}$ の直積集合という. $j \in I$ に対して $x \in \prod_{i \in I} X_i$ を $x(j) \in X_j$ に対応させる写像を $\mathrm{pr}_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ で表して, 第 j 成分への射影という. $x \in \prod_{i \in I} X_i$, $i \in I$ に対して $x_i = x(i)$ とおき, x を $(x_i)_{i \in I}$ で表す. $I = \{1, 2, \dots, n\}$ の場合, $\prod_{i \in I} X_i = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \,|\, x_i \in X_i \ (i = 1, 2, \dots, n)\}$ である.

位相空間の族 $((X_i, \mathcal{O}_i))_{i \in I}$ が与えられたとき, $\prod_{i \in I} X_i$ に位相を定義する方法を考える.

条件 6.8 $\prod_{i \in I} X_i$ に位相 $\mathcal{O}$ を与えたときに, $\mathcal{O}$ が満たしてほしい条件として次の 2 つを考える.

(i) $\mathrm{pr}_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ はすべての $j \in I$ に対して連続写像である.

(ii) 位相空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ と写像 $f : Y \to \prod_{i \in I} X_i$ が与えられたとき, すべての $i \in I$ に対して合成写像 $\mathrm{pr}_i \circ f : Y \to X_i$ が連続写像ならば f も連続写像である.

条件 (i) が満たされるためには, 命題 4.4 の (2) から $\mathcal{O}$ が $\mathrm{pr}_i^{-1}(O_i)$ $(O_i \in \mathcal{O}_i,\ i \in I)$ という形をした $\prod_{i\in I} X_i$ の部分集合をすべて含んでいることが必要十分である. そこで, $\mathcal{B} = \bigcup_{i\in I} \{\mathrm{pr}_i^{-1}(O_i) \,|\, O_i \in \mathcal{O}_i\}$ とおいて, $\mathcal{B}$ で生成される $\prod_{i\in I} X_i$ の位相 $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ を考えれば, $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は条件 (i) を満たす $\prod_{i\in I} X_i$ の位相の中で最も弱い位相である.

命題 6.9　上で定義した $\mathcal{B}$ で生成される $\prod_{i\in I} X_i$ の位相 $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は条件 6.8 の (ii) を満たす.

証明　任意の $V \in \mathcal{B}$ に対して $V = \mathrm{pr}_i^{-1}(O_i)$ を満たす $i \in I$ と $O_i \in \mathcal{O}_i$ が存在し, 補題 6.3 から $f^{-1}(V) = f^{-1}(\mathrm{pr}_i^{-1}(O_i)) = (\mathrm{pr}_i \circ f)^{-1}(O_i)$ が成り立つ. 仮定から $\mathrm{pr}_i \circ f$ は連続写像であり, 命題 4.4 の (2) から $(\mathrm{pr}_i \circ f)^{-1}(O_i)$ は Y の開集合だから, 上式と命題 5.7 から f は連続写像になり, $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は条件 (ii) を満たす. □

以上の結果をふまえて次の定義をする.

定義 6.10　位相空間の族 $((X_i, \mathcal{O}_i))_{i\in I}$ に対し, $\mathcal{B} = \bigcup_{i\in I} \{\mathrm{pr}_i^{-1}(O_i) \,|\, O_i \in \mathcal{O}_i\}$ によって生成される $\prod_{i\in I} X_i$ の位相 $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ を $((X_i, \mathcal{O}_i))_{i\in I}$ の直積位相といい, $\left(\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{O}(\mathcal{B})\right)$ を $((X_i, \mathcal{O}_i))_{i\in I}$ の直積空間または直積位相空間という.

命題 6.11　$I = \{1, 2, \ldots, n\}$ の場合, 定義 6.10 で与えた $\mathcal{B}$ の有限個の要素の共通部分として表される $\prod_{i=1}^{n} X_i$ の部分集合全体からなる集合を $\widetilde{\mathcal{B}}$ とすれば $\widetilde{\mathcal{B}} = \{O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \,|\, O_i \in \mathcal{O}_i\ (i \in I)\}$ が成り立つ.

証明　$\bar{\mathcal{B}} = \{O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \,|\, O_i \in \mathcal{O}_i\ (i \in I)\}$ とおく. X_i の 開集合 O_i に対して

$$\mathrm{pr}_i^{-1}(O_i) = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times O_i \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n | \, x_i \in O_i\}$$

だから $\mathrm{pr}_i^{-1}(O_i) \in \bar{\mathcal{B}}$ であり, $\mathrm{pr}_1^{-1}(O_1) \cap \mathrm{pr}_2^{-1}(O_2) \cap \cdots \cap \mathrm{pr}_n^{-1}(O_n) = O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$ が成り立つ. 従って $\mathcal{B} \subset \bar{\mathcal{B}} \subset \widetilde{\mathcal{B}}$ である. X_i の部分集合 O_i, O_i' に対して等式

$$(O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n) \cap (O_1' \times O_2' \times \cdots \times O_n') = (O_1 \cap O_1') \times (O_2 \cap O_2') \times \cdots \times (O_n \cap O_n')$$

が成り立つことから, $\bar{\mathcal{B}}$ は $\mathcal{B}$ の有限個の要素の共通部分として表される $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の部分集合をすべて含むため, $\bar{\mathcal{B}} = \widetilde{\mathcal{B}}$ である. □

$(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ と $((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n) \in (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$ を同一視することによって, 次の命題では $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ と $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$ を同一視する.

命題 6.12　$(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{O}_n)$ を位相空間とする. $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{O}_{n-1})$ の直積位相を $\mathcal{O}'$ とすれば, $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}, \mathcal{O}')$ と $(X_n, \mathcal{O}_n)$ の直積位相は $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{O}_n)$ の直積位相と一致する.

証明　$(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{O}_n)$ の直積位相を $\mathcal{O}$ とし, $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}, \mathcal{O}')$ と $(X_n, \mathcal{O}_n)$ の直積位相を $\mathcal{O}''$ とする.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{B}} &= \{O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \,|\, O_i \in \mathcal{O}_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)\},\\
\widetilde{\mathcal{B}}' &= \{O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_{n-1} \,|\, O_i \in \mathcal{O}_i\ (i = 1, 2, \ldots, n-1)\},\\
\widetilde{\mathcal{B}}'' &= \{O' \times O_n \,|\, O' \in \mathcal{O}',\ O_n \in \mathcal{O}_n\}
\end{aligned}$$

とおくと, 例 5.6 の (1) と命題 6.11 から $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$, $\mathcal{O}''$ の各要素はそれぞれ $\widetilde{\mathcal{B}}$, $\widetilde{\mathcal{B}}'$, $\widetilde{\mathcal{B}}''$ の要素の合併集合である.

任意の $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \in \widetilde{\mathcal{B}}$ に対して $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_{n-1} \in \widetilde{\mathcal{B}}' \subset \mathcal{O}'$ だから

$$O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n = (O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_{n-1}) \times O_n \in \widetilde{\mathcal{B}}'' \subset \mathcal{O}''$$

である. $\mathcal{O}$ の各要素は $\widetilde{\mathcal{B}}$ の要素の合併集合だから $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}''$ である.

$O' \in \mathcal{O}'$, $O_n \in \mathcal{O}_n$ とすると, $\Gamma \subset \widetilde{\mathcal{B}}'$ で $O' = \bigcup_{U \in \Gamma} U$ を満たすものが存在し,

$$\Gamma' = \{V \subset (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n \,|\, V = U \times O_n \text{ を満たす } U \in \Gamma \text{ がある.}\}$$

とおけば, $\Gamma \subset \widetilde{\mathcal{B}}'$ より $\Gamma' \subset \widetilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{O}$ であり, $O' \times O_n = \left(\bigcup_{U \in \Gamma} U\right) \times O_n = \bigcup_{U \in \Gamma} (U \times O_n) = \bigcup_{V \in \Gamma'} V \in \mathcal{O}$ が成り立つ. $\mathcal{O}''$ の各要素は $\widetilde{\mathcal{B}}''$ の要素の合併集合だから $\mathcal{O}'' \subset \mathcal{O}$ である. 故に $\mathcal{O} = \mathcal{O}''$ が成り立つ. □

補題 6.13 $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \ldots, (X_n, d_n)$ を距離空間とし, 関数 $d : (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n) \times (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n) \to \boldsymbol{R}$ を以下で定めれば, d は $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の距離関数である.

$$d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2 + \cdots + d_n(x_n, y_n)^2}$$

証明 $d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)^2} \geqq 0$ であり, $d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = 0$ ならば, すべての $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $d_i(x_i, y_i) = 0$ だから $x_i = y_i$, すなわち $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ である. $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ に対し, $d_i(y_i, x_i) = d_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ より

$$d((y_1, y_2, \ldots, y_n), (x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(y_i, x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)^2} = d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)).$$

また, $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ とし, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を第 i 成分がそれぞれ $d_i(x_i, y_i)$, $d_i(y_i, z_i)$ である n 次元数ベクトルとすれば, 定理 1.20 から $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$ であり 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $d_i(x_i, z_i) \leqq d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)$ が成り立つため,

$$\begin{aligned} d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n)) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, z_i)^2} \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i))^2} \\ &= \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(y_i, z_i)^2} \\ &= d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) + d((y_1, y_2, \ldots, y_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n)) \end{aligned}$$

が得られ, d に関して三角不等式が成り立つ. 以上から d は $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の距離関数である. □

命題 6.14 $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \ldots, (X_n, d_n)$ を距離空間とし, 距離関数 d_i から定まる X_i の位相を $\mathcal{O}_{d_i}$ とする. $(X_1, \mathcal{O}_{d_1}), (X_2, \mathcal{O}_{d_2}), \ldots, (X_n, \mathcal{O}_{d_n})$ の直積位相と補題 6.13 の距離関数 d から定まる $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の位相は一致する.

証明 $(X_1, \mathcal{O}_{d_1}), (X_2, \mathcal{O}_{d_2}), \ldots, (X_n, \mathcal{O}_{d_n})$ の直積位相を $\mathcal{O}$, 距離関数 d から定まる $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ の位相を $\mathcal{O}_d$ とする. $O_i \in \mathcal{O}_{d_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ とし, $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$ の任意の点 $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ に対し, $p_i \in O_i$ で, O_i は X_i の開集合だから, $r_i > 0$ で, $B_{d_i}(p_i\,; r_i) \subset O_i$ を満たすものがある. $r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ とおき, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B_d(p\,; r)$ ならば $d_j(x_j, p_j) \leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, p_i)^2} = d(x, p) < r \leqq r_j$ が各 $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して成り立つため, $x_j \in B_{d_j}(p_j\,; r_j) \subset O_j$ である. 従って $x \in O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$ だから $B_d(p\,; r) \subset O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$ が成り立つ. 故に p は $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$ の内点だから $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n \in \mathcal{O}_d$ である. 例 5.6 の (1) と命題 6.11 から, $\mathcal{O}$ の各要素は $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$ $(O_i \in \mathcal{O}_{d_i})$ という形の集合の合併集合として表されるため, $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_d$ が成り立つ.

$O \in \mathcal{O}_d$ ならば任意の $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in O$ に対し, $r_p > 0$ で $B_d(p\,; r_p) \subset O$ を満たすものがある. 中心が p_i, 半径が $\frac{r_p}{\sqrt{n}}$ の (X_i, d_i) の開球 $B_{d_i}\left(p_i\,; \frac{r_p}{\sqrt{n}}\right)$ を $O_{p,i}$ を とする. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in O_{p,1} \times O_{p,2} \times \cdots \times O_{p,n}$ な

らば各 $i=1,2,\ldots,n$ に対して $x_i \in O_{p,i}$ より $d_i(x_i,p_i) < \dfrac{r_p}{\sqrt{n}}$ だから $d(x,p) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,p_i)^2} < r_p$ が成り立つ. 従って $x \in B_d(p\,;r_p)$ であり, $B_d(p\,;r_p) \subset O$ から $x \in O$ である. 故に $O_{p,1}\times O_{p,2}\times\cdots\times O_{p,n} \subset O$ が任意の $p \in O$ に対して成り立つため $\bigcup_{p\in O}(O_{p,1}\times O_{p,2}\times\cdots\times O_{p,n}) \subset O$ である. また各 $p \in O$ に対して $p \in O_{p,1}\times O_{p,2}\times\cdots\times O_{p,n}$ だから $O = \bigcup_{p\in O}\{p\} \subset \bigcup_{p\in O}(O_{p,1}\times O_{p,2}\times\cdots\times O_{p,n})$ も成り立つ. 従って $O = \bigcup_{p\in O}(O_{p,1}\times O_{p,2}\times\cdots\times O_{p,n})$ であり, 命題 6.11 から $O_{p,1}\times O_{p,2}\times\cdots\times O_{p,n} \in \mathcal{O}$ だから $O_{p,1}\times O_{p,2}\times\cdots\times O_{p,n}$ の合併である O も $\mathcal{O}$ に属するため $\mathcal{O}_d \subset \mathcal{O}$ も成り立ち, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$ が得られる. □

系 6.15 距離関数 d_n から定まる $\boldsymbol{R}^n$ の位相を $\mathcal{O}_n$ とすれば, $\mathcal{O}_n$ は位相空間 $(\boldsymbol{R},\mathcal{O}_1)$ の n 個の直積位相と一致する.

後ほど必要になる結果を示す.

補題 6.16 $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $\mathrm{pr}_1 : X\times Y \to X$, $\mathrm{pr}_2 : X\times Y \to Y$ をそれぞれ $\mathrm{pr}_1(x,y) = x$, $\mathrm{pr}_2(x,y) = y$ で定義される写像とする. $p \in X$, $q \in Y$ に対し, $X\times Y$ の部分空間 $\mathrm{pr}_2^{-1}(q) = X\times\{q\}$, $\mathrm{pr}_1^{-1}(p) = \{p\}\times Y$ はそれぞれ X, Y と同相である.

証明 相対位相の定義から包含写像 $i_1 : X\times\{q\} \to X\times Y$ は連続で, 直積位相の定義から $\mathrm{pr}_1 : X\times Y \to X$ も連続だから命題 4.7 から合成写像 $\mathrm{pr}_1\circ i_1 : X\times\{q\} \to X$ は連続である. 写像 $f : X \to X\times\{q\}$ を $f(x) = (x,q)$ で定めれば, 合成写像 $\mathrm{pr}_1\circ i_1\circ f : X \to X$ は X の恒等写像だから連続であり (注意 5.2), $\mathrm{pr}_2\circ i_1\circ f : X \to Y$ は q への定値写像だから連続である. 従って命題 6.9 によって $i_1\circ f : X \to X\times Y$ は連続であり, さらに命題 6.4 から f も連続である. $f\circ\mathrm{pr}_1\circ i_1$ は $X\times\{q\}$ の恒等写像だから, f は $\mathrm{pr}_1\circ i_1 : X\times\{q\} \to X$ の連続な逆写像である. 故に $X\times\{q\}$ は X と同相である. $\{p\}\times Y$ が Y と同相であることも同様に示される. □

7 商空間と商写像

定義 7.1 X を集合とするとき, $X\times X$ の部分集合 R が次の 3 つの条件を満たすとき, R を X の同値関係という.

(反射律) 任意の $x \in X$ に対して $(x,x) \in R$.
(対称律) $(x,y) \in R$ ならば $(y,x) \in R$.
(推移律) $(x,y) \in R$ かつ $(y,z) \in R$ ならば $(x,z) \in R$.

例 7.2 (1) $X = \boldsymbol{Z}\times(\boldsymbol{Z}-\{0\})$ とおいて $X\times X$ の部分集合 R を $R = \{((a,b),(c,d)) \in X\times X \,|\, ad = bc\}$ によって定めれば, R は X の同値関係である.

(2) $Y = \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ とおいて $Y\times Y$ の部分集合 S を $S = \{((k,l),(m,n)) \in Y\times Y \,|\, k+n = l+m\}$ によって定めれば, S は Y の同値関係である.

定義 7.3 R を集合 X の同値関係とする. $x \in X$ に対して X の部分集合 R_x を $R_x = \{y \in X \,|\, (x,y) \in R\}$ によって定め, X の部分集合を要素とする集合 X/R を次のように定め, X/R を X の同値関係 R による商集合という.

$$X/R = \{C \subset X \,|\, C = R_x \text{ となる } x \in X \text{ が存在する.}\}$$

また $x \in X$ に対して R_x を対応させる写像 $p : X \to X/R$ を商写像という.

注意 7.4 (1) 任意の $x \in X$ に対して $(x,x) \in R$ だから $x \in R_x$ である. 従って $R_x \neq \emptyset$ である.

(2) 商写像 $p : X \to X/R$ は全射である.

命題 7.5 R を集合 X の同値関係とする.

(1) $R_x = R_y$ と $R_x \cap R_y \neq \emptyset$ と $(x,y) \in R$ は同値である.
(2) $C \in X/R$ に対し, $x \in C$ ならば $C = R_x$ である.

証明 (1) $R_x = R_y$ ならば注意 7.4 の (1) から $R_x \cap R_y = R_x \neq \emptyset$ である．

$R_x \cap R_y \neq \emptyset$ ならば $z \in R_x \cap R_y$ が存在するため，$(x, z) \in R$ かつ $(y, z) \in R$ であり，後者から対称律により $(z, y) \in R$ である．従って推移律から $(x, y) \in R$ である．

$(x, y) \in R$ と仮定する．$z \in R_y$ ならば $(y, z) \in R$ だから推移律から $(x, z) \in R$，すなわち $z \in R_x$ である．$z \in R_x$ ならば $(x, z) \in R$ であり，仮定と対称律により $(y, x) \in R$ だから，推移律から $(y, z) \in R$，すなわち $z \in R_y$ である．故に $R_x = R_y$ である．

(2) $C \in X/R$ に対して $C = R_y$ となる $y \in X$ がある．故に $x \in C$ ならば $x \in R_Y$ だから $(y, x) \in R$ である．従って (1) から $R_y = R_x$ となるため，$C = R_x$ である． □

命題 7.6 R を集合 X の同値関係，$p : X \to X/R$ を商写像とする．写像 $f : X \to Y$ が条件「$(x, y) \in R$ ならば $f(x) = f(y)$」を満たすとき，写像 $\bar{f} : X/R \to Y$ で $f = \bar{f} \circ p$ を満たすものがただ 1 つ存在する．

証明 任意の $C \in X/R$ に対して $x \in C$ を選べば，命題 7.5 の (2) から $C = R_x$ である．別の $y \in C$ を選べば $y \in C = R_x$ だから $(x, y) \in R$ となるため，仮定によって $f(x) = f(y)$ が成り立つ．故に $f(x)$ の値は $x \in C$ である x の選び方に依存しない．そこで写像 $\bar{f} : X/R \to Y$ を $C \in X/R$ に対して $x \in C$ を選んで $\bar{f}(C) = f(x)$ で定めることができる．任意の $x \in X$ に対して $x \in R_x = p(x)$ だから $\bar{f}$ の定義から，$(\bar{f} \circ p)(x) = \bar{f}(p(x)) = \bar{f}(R_x) = f(x)$ が成り立つため，$f = \bar{f} \circ p$ である．写像 $\tilde{f} : X/R \to Y$ も $f = \tilde{f} \circ p$ を満たすならば，$\tilde{f} \circ p = f = \bar{f} \circ p$ である．p は全射だから $\tilde{f} = \bar{f}$ が得られるため，$f = \bar{f} \circ p$ を満たす写像 $\bar{f} : X/R \to Y$ はただ 1 つである． □

例 7.7 例 7.2 の同値関係 R, S を考える．$X = \boldsymbol{Z} \times (\boldsymbol{Z} - \{0\})$ から有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ への写像 $f : X \to \boldsymbol{Q}$ と $Y = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ から整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ への写像 $g : Y \to \boldsymbol{Z}$ を $f(a, b) = \dfrac{a}{b}$, $g(k, l) = k - l$ によって定めれば f, g はそれぞれ条件

「$((a, b), (c, d)) \in R$ ならば $f(a, b) = f(c, d)$」，　「$((k, l), (m, n)) \in S$ ならば $g(k, l) = b(m, n)$」

を満たす．$p : X \to X/R$, $q : Y \to Y/S$ を商写像とすれば，命題 7.6 より，写像 $\bar{f} : X/R \to \boldsymbol{Q}$, $\bar{g} : Y/S \to \boldsymbol{Z}$ で $f = \bar{f} \circ p$, $g = \bar{g} \circ q$ を満たすものが存在する．f, g はともに全射だから $\bar{f}$ と $\bar{g}$ も全射である．さらに，

「$f(a, b) = f(c, d)$ ならば $((a, b), (c, d)) \in R$」，　「$g(k, l) = b(m, n)$ ならば $((k, l), (m, n)) \in S$」

が成り立つため，$\bar{f}$ と $\bar{g}$ はともに単射だから，全単射である．従って $\bar{f}$, $\bar{g}$ によって商集合 X/R, Y/S はそれぞれ $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Z}$ と同一視される．

命題 7.8 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，Y を集合，$f : X \to Y$ を写像とする．$\mathcal{O}_f = \{O \subset Y | f^{-1}(O) \in \mathcal{O}\}$ によって Y の部分集合を要素とする集合 $\mathcal{O}_f$ を で定めると，$\mathcal{O}_f$ は Y の位相であり，$f : (X, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}_f)$ は連続写像である．

証明 $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{O}$, $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{O}$ だから $\emptyset, Y \in \mathcal{O}_f$ である．$U, V \in \mathcal{O}_f$ ならば $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \in \mathcal{O}$ だから，$\mathcal{O}$ が X の位相であることから $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \in \mathcal{O}$ である．従って $\mathcal{O}_f$ の定義から $U \cap V \in \mathcal{O}_f$ である．$(O_i)_{i \in I}$ は各 $i \in I$ に対して $O_i \in \mathcal{O}_f$ を満たす集合族であるとすれば，各 $i \in I$ に対して $f^{-1}(O_i) \in \mathcal{O}$ だから，$\mathcal{O}$ が X の位相であることから $f^{-1}\Bigl(\bigcup_{i \in I} O_i\Bigr) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i) \in \mathcal{O}$ である．故に $\mathcal{O}_f$ の定義から $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}_f$ である．以上から $\mathcal{O}_f$ は Y の位相である．命題 4.4 の (2) と $\mathcal{O}_f$ の定義から $f : (X, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}_f)$ は連続写像である． □

命題 7.9 $f : (X, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が連続写像であるためには，$\mathcal{O}_Y$ は $\mathcal{O}_f$ より弱い位相であることが必要十分である．また，$f : (X, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が連続写像であるとき，$\mathcal{O}_Y$ が次の条件 $(*)$ を満たすためには，$\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_f$ であることが必要十分である．

$(*)$ 位相空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ と写像 $g : Y \to Z$ に対し，$g \circ f : (X, \mathcal{O}) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ が連続ならば $g : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ は連続である．

証明 命題 4.4 の (2) より $f : (X, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が連続写像であることは「$O \in \mathcal{O}_Y$ ならば $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}$.」が成

り立つことと同値であり, $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}$ は $O \in \mathcal{O}_f$ と同値だから, $f:(X,\mathcal{O}) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ が連続写像であることは $\mathcal{O}_Y \subset \mathcal{O}_f$ と同値である.

$f:(X,\mathcal{O}) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ が連続写像で $\mathcal{O}_Y$ が条件 $(*)$ を満たすとする. $(Z,\mathcal{O}_Z) = (Y,\mathcal{O}_Y)$ として $g = id_Y : (Y,\mathcal{O}_Y) \to (Y,\mathcal{O}_f)$ を考えれば $f = id_Y \circ f : (X,\mathcal{O}) \to (Y,\mathcal{O}_f)$ は命題 7.8 により連続写像だから, 仮定により $id_Y : (Y,\mathcal{O}_Y) \to (Y,\mathcal{O}_f)$ は連続である. 従って $\mathcal{O}_f \subset \mathcal{O}_Y$ であり, 前半の結果から $\mathcal{O}_Y \subset \mathcal{O}_f$ だから $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_f$ である. 逆に $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_f$ が成り立つと仮定し, 写像 $g : Y \to Z$ に対し, $g \circ f : (X,\mathcal{O}) \to (Z,\mathcal{O}_Z)$ が連続であるとする. 任意の $O \in \mathcal{O}_Z$ に対して $f^{-1}(g^{-1}(O)) = (g \circ f)^{-1}(O)$ だから, 命題 4.4 の (2) と $g \circ f$ の連続性により $f^{-1}(g^{-1}(O))$ は X の開集合である. 故に $\mathcal{O}_f$ の定義から $g^{-1}(O) \in \mathcal{O}_f = \mathcal{O}_Y$ だから, 命題 4.4 の (2) により g は連続である. □

定義 7.10 (1) $(X,\mathcal{O})$ を位相空間, R を X の同値関係, $p : X \to X/R$ を商写像とする. このとき, 位相空間 $(X/R,\mathcal{O}_p)$ を $(X,\mathcal{O})$ の商空間といい, $\mathcal{O}_p$ を X/R の商位相という.

(2) $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を連続な全射とする. $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_f$ が成り立つとき f を商写像という.

命題 7.11 $f:(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ を定義 7.10 の (2) の意味での商写像とし, $R = \{(x,y) \in X \times X \,|\, f(x) = f(y)\}$ とおけば R は X の同値関係であり, $p : X \to X/R$ を定義 7.3 の意味での商写像とする. このとき $f = \bar{f} \circ p$ を満たす写像 $\bar{f} : (X/R,\mathcal{O}_p) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ は同相写像である.

証明 R が X の同値関係であることは明らかである. 命題 7.6 から $f = \bar{f} \circ p$ を満たす写像 $\bar{f} : X/R \to Y$ がただ 1 つ存在する. $f = \bar{f} \circ p$ であり, f は全射だから命題 1.13 の (1) より $\bar{f}$ も全射である. $\alpha, \beta \in X/R$ が $\bar{f}(\alpha) = \bar{f}(\beta)$ を満たすとき $p(a) = \alpha$, $p(b) = \beta$ を満たす $a, b \in X$ を選べば次の等式が成り立つため $(a,b) \in R$ である

$$f(a) = (\bar{f} \circ p)(a) = \bar{f}(p(a)) = \bar{f}(\alpha) = \bar{f}(\beta) = \bar{f}(p(b)) = (\bar{f} \circ p)(b) = f(b)$$

従って $\alpha = p(a) = p(b) = \beta$ だから $\bar{f}$ は単射でもあるので, $\bar{f}$ 全単射である. 故に X/R の任意の開集合 O に対して $\bar{f}^{-1}(\bar{f}(O)) = O$ が成り立つため, $f^{-1}(\bar{f}(O)) = (\bar{f} \circ p)^{-1}(\bar{f}(O)) = p^{-1}(\bar{f}^{-1}(\bar{f}(O))) = p^{-1}(O)$ が成り立ち, p の連続性から $f^{-1}(\bar{f}(O))$ は X の開集合である. このことと f が命題 7.10 の (2) の意味での商写像であることから, $\bar{f}(O)$ は Y の開集合である. 従って $\bar{f}$ は開写像である. また命題 7.9 によって $\bar{f}$ は連続写像でもあるので, 注意 4.9 から $\bar{f}$ は同相写像である. □

補題 7.12 写像 $f : X \to Y$ と Y の部分集合 B に対して $f(X - f^{-1}(B)) = f(X) - B$ が成り立つ.

証明 $y \in f(X - f^{-1}(B))$ ならば $x \in X - f^{-1}(B)$ で $f(x) = y$ となるものがある. $x \in X$ で $f(x) = y$ だから $y \in f(X)$ である. もし $y \in B$ ならば $f(x) = y \in B$ だから $x \in f^{-1}(B)$ となり, $x \in X - f^{-1}(B)$ と矛盾するため, $y \notin B$ すなわち $y \in Y - B$ である. 従って $y \in f(X) \cap (Y - B) = f(X) - B$ である.

$y \in f(X) - B$ ならば $y \in f(X)$ だから $x \in X$ で $f(x) = y$ となるものがある. もし $x \in f^{-1}(B)$ ならば $y = f(x) \in B$ だから $y \in f(X) - B$ と矛盾するため, $x \notin f^{-1}(B)$ すなわち $x \in X - f^{-1}(B)$ である. 故に $f(x) = y$ から $y \in f(X - f^{-1}(B))$ である. 以上から $f(X - f^{-1}(B)) = f(X) - B$ が成り立つ. □

命題 7.13 連続な全射が開写像または閉写像ならば商写像である.

証明 $f:(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ を連続な全射とし, O は Y の部分集合で $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$ を満たすとする. f が開写像ならば $f(f^{-1}(O)) \in \mathcal{O}_Y$ であり, f は全射だから $f(f^{-1}(O)) = O$ が成り立つため, $O \in \mathcal{O}_Y$ である. 故に f は商写像である. f が閉写像ならば $f(X - f^{-1}(O))$ は Y の閉集合である. 補題 7.12 より $f(X - f^{-1}(O)) = f(X) - O$ であり, f は全射だから $f(X) = Y$ が成り立つため, $Y - O$ は Y の閉集合である. 従って O は Y の開集合だから f は商写像である. □

例 7.14 $n+1$ 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の部分空間 $X = \boldsymbol{R}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ の同値関係 R を

$$R = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in X \times X \,|\, \boldsymbol{y} = r\boldsymbol{x} \text{ を満たす実数 } r \text{ が存在する.}\}$$

によって定める. このとき商空間 X/R を n 次元実射影空間といい, $\boldsymbol{R}P^n$ で表す.

n 次元球面 S^n を $S^n = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1} \,|\, \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ で定める. $p : \boldsymbol{R}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\} \to \boldsymbol{R}P^n$ を商写像とすれば, 任意の $\alpha \in \boldsymbol{R}P^n$ に対して $p(\boldsymbol{x}) = \alpha$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\}$ が存在する. $\boldsymbol{x}' = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}$ とおけば $\boldsymbol{x}' \in S^n$ であり $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \in R$ だから $p(\boldsymbol{x}') = p(\boldsymbol{x}) = \alpha$ が成り立つため, $p(S^n) = \boldsymbol{R}P^n$ である.

8 連結性とその基本的性質

定義 8.1 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする.

(1) Y, Z を X の部分集合とする. $Y \cap \overline{Z} = \overline{Y} \cap Z = \emptyset$ であるとき, Y と Z は離れているという.

(2) X が離れている 2 つの空でない部分集合の合併集合にならないとき, すなわち X の部分集合 Y, Z が $Y \cap \overline{Z} = \overline{Y} \cap Z = \emptyset$ かつ $X = Y \cup Z$ を満たすならば $Y = \emptyset$ または $Z = \emptyset$ であるとき, $(X, \mathcal{O})$ は連結であるという.

(3) X の任意の 2 点 p, q に対し, 連続写像 $\omega : [0, 1] \to X$ で, $\omega(0) = p$, $\omega(1) = q$ を満たすものがあるとき $(X, \mathcal{O})$ は弧状連結であるという.

注意 8.2 (X, d) は距離空間で, $\mathcal{O}_d$ を 距離関数 d から定まる X の位相とする. 位相空間 $(X, \mathcal{O}_d)$ において X の部分集合 Y と Z が離れているためには, Y のどの点も Z に含まれる点列の極限にならず, かつ Z のどの点も Y に含まれる点列の極限にならないことが必要十分であることが命題 2.24 から分かる.

命題 8.3 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対し, 次の 4 つは同値である.

(i) $(X, \mathcal{O})$ は連結である.

(ii) $(X, \mathcal{O})$ の開かつ閉集合は $\emptyset$ と X だけである.

(iii) $X = Y \cup Z$, $Y \cap Z = \emptyset$ で, Y, Z が開集合ならば $Y = \emptyset$ または $Z = \emptyset$ である.

(iv) $X = Y \cup Z$, $Y \cap Z = \emptyset$ で, Y, Z が閉集合ならば $Y = \emptyset$ または $Z = \emptyset$ である.

証明 $(i) \Rightarrow (ii)$: Y を X の開かつ閉集合とし, $Z = X - Y$ とおけば, Z は X の開かつ閉集合 Y の補集合だから Z も開かつ閉集合である. 従って $Y = \overline{Y}$, $Z = \overline{Z}$ だから $Y \cap \overline{Z} = \overline{Y} \cap Z = Y \cap Z = \emptyset$ となるため, Y と Z は離れている. さらに $X = Y \cup (X - Y) = Y \cup Z$ だから, 仮定より $Y = \emptyset$ または $Z = \emptyset$ である. 後者の場合は $Y = X - (X - Y) = X - Z = X$ となるため, X の開かつ閉集合は $\emptyset$ と X だけである.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: $X = Y \cup Z$, $Y \cap Z = \emptyset$ ならば $Y = X - Z$ だから, Y, Z が開集合ならば Y は開集合 Z の補集合になるため, Y は閉集合でもある. 従って Y は $\emptyset$ または X であり, 後者の場合は $Z = X - Y = \emptyset$ である.

$(iii) \Rightarrow (vi)$: $X = Y \cup Z$, $Y \cap Z = \emptyset$ ならば $Y = X - Z$, $Z = X - Y$ だから, Y, Z が閉集合ならば Y, Z はそれぞれ閉集合 Z, Y の補集合になるため, Y, Z は開集合でもある. 従って仮定から $Y = \emptyset$ または $Z = \emptyset$ である.

$(iv) \Rightarrow (i)$: $X = Y \cup Z$ で, Y と Z は離れているとすれば, $Y \cap \overline{Z} = \emptyset$ だから $Y \subset X - \overline{Z}$ より $X = Y \cup Z \subset (X - \overline{Z}) \cup Z \subset X$ となるため $X = (X - \overline{Z}) \cup Z$ である. $Z \subset \overline{Z}$ だから $X - \overline{Z} \subset X - Z$ であることに注意すれば $(X - \overline{Z}) \cap Z \subset (X - Z) \cap Z = \emptyset$ となるため, $(X - \overline{Z}) \cap Z = \emptyset$ である. 従って $X = (X - \overline{Z}) \cup Z$ より $Z = X - (X - \overline{Z}) = \overline{Z}$ が得られるため, Z は閉集合である. 同様に $\overline{Y} \cap Z = \emptyset$ から Y も閉集合であることが示される. $Y \cap Z = Y \cap \overline{Z} = \emptyset$ だから, 仮定より $Y = \emptyset$ または $Z = \emptyset$ である. 故に X が離れている 2 つの空でない部分集合の合併集合にならないため X は連結である. □

命題 8.4 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分空間 Y が連結であることは, 次の条件 $(*)$ と同値である.

$(*)$ X の開集合 U, V が $Y \subset U \cup V$, $Y \cap U \cap V = \emptyset$ を満たせば $Y \cap U = \emptyset$ または $Y \cap V = \emptyset$ である.

証明 X の部分空間 Y に対し, X の開集合 U, V が $Y \subset U \cup V$, $Y \cap U \cap V = \emptyset$ を満たすとする. $Z = Y \cap U$,

$W=Y\cap V$ とおけば Z, W は Y の開集合であり, $Y\subset U\cup V$ より $Z\cup W=(Y\cap U)\cup(Y\cap V)=Y\cap(U\cup V)=Y$ が成り立つ．また, $Z\cap W=(Y\cap U)\cap(Y\cap V)=Y\cap U\cap V=\emptyset$ だから Y が連結ならば命題 8.3 の (iii) により $Y\cap U=Z=\emptyset$ または $Y\cap V=W=\emptyset$ である．

逆に $(*)$ が満たされると仮定し, $Y=Z\cup W$, $Z\cap W=\emptyset$ で, Z, W が Y の開集合であるとする．$Z=Y\cap U$, $W=Y\cap V$ を満たす X の開集合 U, V が存在し, $Y=Z\cup W=(Y\cap U)\cup(Y\cap V)=Y\cap(U\cup V)\subset U\cup V$, $Y\cap U\cap V=(Y\cap U)\cap(Y\cap V)=Z\cap W=\emptyset$ だから, 仮定から $Z=Y\cap U=\emptyset$ または $W=Y\cap V=\emptyset$ である．故に命題 8.3 の (i) により Y は連結である． □

命題 8.5 $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f:X\to Y$ を連続写像とする．X が連結ならば Y の部分空間 $f(X)$ も連結である．

証明 Y の開集合 U, V が $f(X)\subset U\cup V$, $f(X)\cap U\cap V=\emptyset$ を満たすとする．$f(X)\subset U\cup V$ より $X=f^{-1}(U\cup V)=f^{-1}(U)\cup f^{-1}(V)$ であり, $f(X)\cap U\cap V=\emptyset$ より $U\cap V\subset Y-f(X)$ だから $f^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)=f^{-1}(U\cap V)\subset f^{-1}(Y-f(X))=\emptyset$ である．実際 $x\in f^{-1}(Y-f(X))$ ならば $f(x)\in Y-f(X)$ となって $f(x)\in f(X)$ と矛盾する．故に $f^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)=\emptyset$ である．さらに f の連続性により $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ は X の開集合だから, X の連結性により $f^{-1}(U)=\emptyset$ または $f^{-1}(V)=\emptyset$ である．前者の場合は $f(X)\cap U=\emptyset$ であり, 後者の場合は $f(X)\cap V=\emptyset$ となるため, 命題 8.4 により $f(X)$ は連結である． □

命題 8.6 $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f:X\to Y$ を連続写像とする．X が弧状連結ならば Y の部分空間 $f(X)$ も弧状連結である．

証明 $p,q\in f(X)$ に対し, $f(a)=p$, $f(b)=q$ を満たす $a,b\in X$ をとれば, 仮定から連続写像 $\omega:[0,1]\to X$ で $\omega(0)=a$, $\omega(1)=b$ を満たすものが存在する．このとき, 合成写像 $f\circ\omega:[0,1]\to Y$ は連続で, $(f\circ\omega)([0,1])=f(\omega([0,1]))\subset f(X)$ だから, 写像 $\zeta:[0,1]\to f(X)$ を $\zeta(t)=(f\circ\omega)(t)$ で定めることができる．命題 6.4 から ζ は連続であり, $\zeta(0)=f(\omega(0))=f(a)=p$, $\zeta(1)=f(\omega(1))=f(b)=q$ が成り立つため, $f(X)$ も弧状連結である． □

命題 8.7 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の部分空間 Y が連結で, $Y\subset Z\subset\overline{Y}$ ならば Z も連結である．

証明 X の開集合 U, V が $Z\subset U\cup V$, $Z\cap U\cap V=\emptyset$ を満たすとすれば, $Y\subset Z$ より $Y\subset U\cup V$, $Y\cap U\cap V=\emptyset$ である．Y の連結性から命題 8.4 より $Y\cap U=\emptyset$ または $Y\cap V=\emptyset$ である．前者の場合は $Y\subset X-U$ であり $X-U$ は X の閉集合だから命題 3.14 より $\overline{Y}\subset X-U$ が得られる．このとき, 仮定 $Z\subset\overline{Y}$ より $Z\subset X-U$ だから $Z\cap U=\emptyset$ である．後者の場合も同様にして $Z\cap V=\emptyset$ が得られるため, 命題 8.4 により Z は連結である． □

命題 8.8 $(X_1,\mathcal{O}_1),(X_2,\mathcal{O}_2),\dots,(X_n,\mathcal{O}_n)$ がすべて連結な位相空間ならば, これらの直積空間も連結である．

証明 命題 6.12 により, 直積空間 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ と $(X_1\times X_2\times\cdots\times X_{n-1})\times X_n$ の位相は一致するため, $n=2$ の場合に主張を示せば, n による帰納法で一般の場合も主張が示される．

$X_1\times X_2$ の開集合 U, V で $X_1\times X_2=U\cup V$, $U\cap V=\emptyset$ を満たすものが存在して, $U\neq\emptyset$ であると仮定する．$(x_1,x_2)\in U$ ならば $\mathrm{pr}_i^{-1}(x_i)\cap U$ $(i=1,2)$ は (x_1,x_2) を含むため, 空集合ではなく, 補題 6.16 によって $\mathrm{pr}_1^{-1}(x_1)$, $\mathrm{pr}_2^{-1}(x_2)$ はそれぞれ連結な位相空間 X_2, X_1 に同相だから, これらは連結な $X_1\times X_2$ の部分空間である．さらに $\mathrm{pr}_i^{-1}(x_i)\subset X_1\times X_2=U\cup V$, $\mathrm{pr}_i^{-1}(x_i)\cap U\cap V=\emptyset$ だから $\mathrm{pr}_i^{-1}(x_i)$ の連結性と命題 8.4 から $\mathrm{pr}_i^{-1}(x_i)\cap V=\emptyset$ すなわち $\mathrm{pr}_i^{-1}(x_i)\subset X_1\times X_2-V=U$ であることがわかる．

U は空集合でないため $(p_1,p_2)\in U$ を一つ選べば, 上で示したことから $\mathrm{pr}_2^{-1}(p_2)\subset U$ であり, 任意の $(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$ に対し, $(x_1,p_2)\in\mathrm{pr}_2^{-1}(p_2)$ だから $(x_1,p_2)\in U$ である．従って, 上の結果を再度用いれば $\mathrm{pr}_1^{-1}(x_1)\subset U$ であり, $(x_1,x_2)\in\mathrm{pr}_1^{-1}(x_1)$ だから $(x_1,x_2)\in U$ である．故に $U=X_1\times X_2$ となるため, U の補集合 V は空集合になり, $X_1\times X_2$ は連結であることが示された． □

補題 8.9 X を $\boldsymbol{R}$ の連結な部分空間とするとき, $p, q \in X$ かつ $p < q$ ならば $(p, q) \subset X$ である.

証明 もし, $c \in (p, q)$ で $c \notin X$ であるものが存在すれば $p \in X \cap (-\infty, c)$, $q \in X \cap (c, \infty)$ だから $X \cap (-\infty, c)$, $X \cap (c, \infty)$ はともに空集合ではない. $(-\infty, c)$, (c, ∞) は $\boldsymbol{R}$ の開集合で, $c \notin X$ より $X \subset \boldsymbol{R} - \{c\} = (-\infty, c) \cup (c, \infty)$ と $(-\infty, c) \cap (c, \infty) = \emptyset$ が成り立つため, 命題 8.4 より X が連結であることと矛盾する. 故に $(p, q) \subset X$ である.□

定理 8.10 (中間値の定理) $(X, \mathcal{O})$ を連結な位相空間, $f : X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする. $p, q \in X$ に対し, $f(p) < f(q)$ ならば $f(p) < m < f(q)$ である任意の $m \in \boldsymbol{R}$ に対して $f(c) = m$ となる $c \in X$ が存在する.

証明 命題 8.5 より $f(X)$ は $\boldsymbol{R}$ の連結な部分集合で, $f(p)$ と $f(q)$ を含むため, 補題 8.9 から $f(X)$ は $(f(p), f(q))$ を含む. 従って $m \in (f(p), f(q))$ ならば $m \in f(X)$ だから $f(c) = m$ となる $c \in X$ が存在する. □

9 実数の連結性と中間値の定理

実数の連結性を示すために必要な「上界」,「上限」などの概念を定義する.

定義 9.1 A を $\boldsymbol{R}$ の部分集合とする.

(1) $A \subset (-\infty, b]$ を満たす実数 b を A の上界といい, A の上界が存在するとき, A は上に有界であるという. また $A \subset [a, \infty)$ を満たす実数 a を A の下界といい, A の下界が存在するとき, A は下に有界であるという. A が上と下に有界であるとき, A は有界であるという.

(2) A が上に有界であるとき, A の上界のうちで最小のものを A の上限といい, $\sup A$ で表す. すなわち s が A の上限であるとは, 「すべての $x \in A$ に対して $x \leqq s$」と「$t < s$ ならば $x > t$ である $x \in A$ が存在する.」が成り立つことである. A が下に有界であるとき, A の下界のうちで最大のものを A の下限といい, $\inf A$ で表す.

「上に有界な単調増加数列は収束する.」という実数の性質を用いて次の主張を示す.

定理 9.2 $\boldsymbol{R}$ の空でない部分集合 A が上に有界ならば, A は上限をもつ.

証明 A の上界全体からなる集合を B として, 数列 $(a_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$, $(b_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ を次のように帰納的に定める. まず $a_1 \in A$, $b_1 \in B$ を一つずつ選ぶ. $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ が, 条件 $a_i \in A$, $b_i \in B$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$, $b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n$, $b_i - a_i \leqq 2^{-i+1}(b_1 - a_1)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を満たすように選べたと仮定する.

$\dfrac{a_n + b_n}{2} \in B$ の場合は $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ と定めれば, $a_{n+1} \in A$, $b_{n+1} \in B$ であり, $b_n \in B$ だから $a_n \leqq b_n$ となっているため, $b_n \geqq b_{n+1}$ である. さらに, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2} \leqq 2^{-n}(b_1 - a_1)$ も成り立つ.

$\dfrac{a_n + b_n}{2} \notin B$ の場合は A の要素で, $\dfrac{a_n + b_n}{2}$ より大きなものがある. その一つを a_{n+1} として $b_{n+1} = b_n$ と定めれば, $a_{n+1} \in A$, $b_{n+1} \in B$ であり, $b_n \in B$ だから $a_n \leqq b_n$ となっているため, $a_n \leqq \dfrac{a_n + b_n}{2} < a_{n+1}$ である. さらに, $b_{n+1} - a_{n+1} < b_n - \dfrac{a_n + b_n}{2} = \dfrac{b_n - a_n}{2} \leqq 2^{-n}(b_1 - a_1)$ も成り立つ.

以上から, すべての項が A に属する単調増加数列 $(a_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ と すべての項が B に属する単調減少数列 $(b_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ で, 任意の n に対して $b_n - a_n \leqq 2^{-n+1}(b_1 - a_1)$ を満たすものがある. すべての n に対して $a_1 \leqq a_n \leqq b_n \leqq b_1$ が成り立つため, $(a_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ は上に有界であり, $(b_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ は下に有界である. 上に有界な単調増加数列と下に有界な単調減少数列は収束するため $(a_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ と $(b_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ はともに収束する. そこで $\alpha = \lim_{n \to \infty} a_n$, $\beta = \lim_{n \to \infty} b_n$ とおけば, 不等式 $a_n \leqq b_n$, $b_n - a_n \leqq 2^{-n+1}(b_1 - a_1)$ より, それぞれ $\alpha \leqq \beta$, $\beta - \alpha \leqq 0$ を得るため, $\alpha = \beta$ であることがわかる.

任意の $x \in A$ と自然数 n に対し, $b_n \in B$ だから $x \leqq b_n$ が成り立つ. この不等式で $n \to \infty$ とすれば, $x \leqq \beta = \alpha$ が得られるため, $\alpha \in B$ であることがわかる. もし α より小さな B の要素 γ が存在すれば, $a_n \leqq \gamma$ が任意の自然数 n に対して成り立つため, $n \to \infty$ とすれば, $\alpha \leqq \gamma$ が得られて, γ が α より小さいことと矛盾する. 従って, α より

小さい B の要素は存在しないため, α は B の最小元, すなわち, α は A の上限である. $\square$

定理 9.3 $\boldsymbol{R}$ は連結である.

証明 $\boldsymbol{R}$ が連結でないならば $\boldsymbol{R}$ の空でない開集合 U, V で $\boldsymbol{R} = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ を満たすものがある. U, V は空でないため $a \in U$, $b \in V$ が選べて, $a < b$ と仮定してよい. U は a を含む開集合だから, $(a-r, a+r) \subset U$ を満たす $r > 0$ があるため, $A = \{x \in \boldsymbol{R} | (a, x) \subset U\}$ とおけば, $a + r \in A$ である. また $x \in A$ ならば $x \leqq b$ である. 実際, もし $x > b$ ならば $b \in (a, x) \subset U$ となるが, $b \in V$ であるため $b \in U \cap V$ となって $U \cap V = \emptyset$ と矛盾する. 故に A は空でない上に有界な $\boldsymbol{R}$ の部分集合だから, 定理 9.2 より上限が存在し, $m = \sup A$ とおけば, $m \geqq a + r > a$ である.

U は開集合だから, $m \in U$ ならば $(m-s, m+s) \subset U$ となる $0 < s < m-a$ が存在し, m が A の上限であることから $m - s < c$ を満たす $c \in A$ がある. このとき $(a, c) \subset U$ となるため, $(a, m+s) = (a, c) \cup (m-s, m+s) \subset U$ だから $m + s \in A$ となり, m が A の上界であることと矛盾する.

V は開集合だから, $m \in V$ ならば $(m-t, m+t) \subset V$ となる $0 < t < m-a$ が存在し, m が A の上限であることから $m - t < d \leqq m$ を満たす $d \in A$ がある. $m - t < e < d$ を満たす e をとれば, $e \in (a, d) \subset U$ かつ $e \in (m-t, m+t) \subset V$ だから $e \in U \cap V$ となって $U \cap V = \emptyset$ であることと矛盾する.

従って $m \notin U$ かつ $m \notin V$ であるが, これは $\boldsymbol{R} = U \cup V$ と矛盾するため, $\boldsymbol{R}$ は連結である. $\square$

系 9.4 $a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a < b)$ に対し, 区間 (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ は連結である.

証明 関数 $f : \boldsymbol{R} \to (-1, 1)$ を $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ で定めれば, $g(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$ で定義される関数 $g : (-1, 1) \to \boldsymbol{R}$ は f の逆関数だから f は全単射である. 定理 9.3 より $\boldsymbol{R}$ は連結で, f は連続関数だから命題 8.5 により, $(-1, 1)$ は連結である. $a < b$ ならば, 関数 $h : (-1, 1) \to (a, b)$ を $h(x) = \dfrac{b-a}{2}x + \dfrac{b+a}{2}$ で定めれば, h は連続な全単射だから命題 8.5 により, (a, b) は連結である. $\overline{(a, b)} = [a, b]$ であり, I が $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ のいずれかならば $(a, b) \subset I \subset \overline{(a, b)}$ だから, 命題 8.7 により, I は連結である.

関数 $p : \boldsymbol{R} \to (0, \infty)$ を $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & x \leqq 0 \\ 1 + x & x \geqq 0 \end{cases}$ で定めれば, $q(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & 0 < x \leqq 1 \\ x - 1 & x \geqq 1 \end{cases}$ で定義される関数 $q : (0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ は p の逆関数だから p は全単射である. p は連続関数で, $\boldsymbol{R}$ は連結だから命題 8.5 により, $(0, \infty)$ は連結である. 関数 $r : (0, \infty) \to (a, \infty)$ を $r(x) = x + a$ で定めれば, r は連続な全単射だから命題 8.5 により, (a, ∞) は連結である. $\overline{(a, \infty)} = [a, \infty)$ だから, 命題 8.7 により, $[a, \infty)$ も連結である. さらに関数 $u : (-b, \infty) \to (-\infty, b)$, $v : [-b, \infty) \to (-\infty, b]$ を $u(x) = -x$, $v(x) = -x$ で定めれば, これらは連続な全単射だから, 命題 8.5 により, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ も連結である. $\square$

系 9.5 X を $\boldsymbol{R}$ の部分空間とし, $f : X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする. 閉区間 $[a, b]$ が X に含まれていて, $f(a) \neq f(b)$ であるとき, $f(a) < m < f(b)$ または $f(b) < m < f(a)$ を満たす任意の実数 m に対して $f(c) = m$ を満たす $c \in (a, b)$ が存在する.

証明 $i : [a, b] \to X$ を包含写像とすれば, $f \circ i : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ は相対位相の定義と命題 4.7 から連続関数である. 系 9.4 から $[a, b]$ は連結だから定理 8.10 により $f(c) = m$ を満たす $c \in [a, b]$ が存在する. $f(c) = m \neq f(a), f(b)$ だから, $c \neq a, b$ である. $\square$

系 9.6 弧状連結な位相空間は連結である.

証明 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が連結でないならば, 空でない開集合 U, V で $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在する. U, V は空でないため $p \in U$, $q \in V$ を選ぶことができる. $(X, \mathcal{O})$ が弧状連結ならば連続写像 $\omega : [0, 1] \to X$ で $\omega(0) = p$, $\omega(1) = q$ を満たすものが存在する. $0 \in \omega^{-1}(U)$, $1 \in \omega^{-1}(V)$ だから $\omega^{-1}(U)$, $\omega^{-1}(V)$ はともに $[0, 1]$ の

空でない開集合である．さらに $X=U\cup V$, $U\cap V=\emptyset$ だから $\omega^{-1}(U)\cup\omega^{-1}(V)=\omega^{-1}(U\cup V)=\omega^{-1}(X)=[0,1]$, $\omega^{-1}(U)\cap\omega^{-1}(V)=\omega^{-1}(U\cap V)=\emptyset$ となって，$[0,1]$ が連結であるという系 9.4 と矛盾する．従って X が弧状連結ならば連結である． □

命題 9.7　$\boldsymbol{R}$ の連結な部分空間は $\boldsymbol{R}$ 全体か，系 9.4 の区間のいずれかである．

証明　X を $\boldsymbol{R}$ の連結な部分空間とする．X が下に有界である場合は $a=\inf X$ とおけば，$X\subset[a,\infty)$ であり，下に有界でない場合は $a=-\infty$ とおく．また，X が上に有界である場合は $b=\sup X$ とおけば，$X\subset(-\infty,b]$ であり，上に有界でない場合は $b=\infty$ とおく．従って X が有界ならば $X\subset[a,b]$ である．

$x\in(a,b)$ に対し，$a\neq-\infty$ の場合は a が X の下限であることから $a<p<x$ を満たす $p\in X$ が存在し，$a=-\infty$ の場合は X が下に有界ではないため，$p<x$ を満たす $p\in X$ が存在する．同様に，$b\neq\infty$ の場合は b が X の上限であることから $x<q<b$ を満たす $q\in X$ が存在し，$b=\infty$ の場合は X が上に有界ではないため，$q>x$ を満たす $q\in X$ がある．従って，補題 8.9 から $(p,q)\subset X$ であり，$x\in(p,q)$ より $x\in X$ である．故に $(a,b)\subset X$ である．

以上から，X が有界ならば $(a,b)\subset X\subset[a,b]$ となるため，X は (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$ のいずれかで，X が下に有界であるが上に有界でない場合は $(a,\infty)\subset X\subset[a,\infty)$ となるため，X は (a,∞), $[a,\infty)$ のいずれかであり，X が上に有界であるが下に有界でない場合は $(-\infty,b)\subset X\subset(\infty,b]$ となるため，X は $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$ のいずれかである．X が上にも下にも有界でない場合は $(-\infty,\infty)\subset X$ だから $X=(-\infty,\infty)=\boldsymbol{R}$ である． □

10　コンパクト性とその基本的性質

位相空間 $(X,\mathcal{O})$ に対し，X の部分集合からなる集合 Γ (集合族 $(A_i)_{i\in I}$) が $X=\bigcup_{O\in\Gamma}O$ $(X=\bigcup_{i\in I}A_i)$ を満たすとき，Γ $((A_i)_{i\in I})$ を X の被覆といい，さらにすべての Γ の要素 (すべての $i\in I$ に対して A_i) が X の開集合であるとき Γ $((A_i)_{i\in I})$ を X の開被覆という．

定義 10.1　位相空間 $(X,\mathcal{O})$ が次の条件を (C) 満たすとき，$(X,\mathcal{O})$ はコンパクトであるという．

(C) $\Gamma\subset\mathcal{O}$ が X の開被覆ならば Γ の有限部分集合 Γ' で X の開被覆になるものがある．

命題 10.2　位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の部分空間 Y がコンパクトであることと次の条件 $(*)$ は同値である．

$(*)$ $\mathcal{O}$ の部分集合 Γ が $Y\subset\bigcup_{O\in\Gamma}O$ を満たせば Γ の有限部分集合 Γ' で $Y\subset\bigcup_{O\in\Gamma'}O$ となるものがある．

証明　条件 $(*)$ を仮定し，Y の開集合を要素とする集合 Δ は $Y=\bigcup_{O\in\Delta}O$ を満たすとする．各 $U\in\Delta$ に対し，$U=Y\cap O_U$ となる $O_U\in\mathcal{O}$ を選び，$\Gamma=\{O_U|U\in\Delta\}$ とおけば Γ は X の開集合を要素とする集合で，各 $U\in\Delta$ に対し $U\subset O_U$ だから，$Y=\bigcup_{O\in\Delta}O\subset\bigcup_{O_U\in\Gamma}O_U$ である．故に $(*)$ から Γ の有限部分集合 $\Gamma'=\{O_{U_1},O_{U_2},\dots,O_{U_n}\}$ で $Y\subset\bigcup_{O\in\Gamma'}O=\bigcup_{i=1}^{n}O_{U_i}$ となるものがある．そこで $\Delta'=\{U_1,U_2,\dots,U_n\}$ とおけば，$\Delta'\subset\Delta$ で $i=1,2,\dots,n$ に対し $Y\cap O_{U_i}=U_i$ だから $Y=Y\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}O_{U_i}\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(Y\cap O_{U_i})=\bigcup_{i=1}^{n}U_i=\bigcup_{U\in\Delta'}U$ となり，Y はコンパクトである．

Y はコンパクトであると仮定し，$\mathcal{O}$ の部分集合 Γ は $Y\subset\bigcup_{O\in\Gamma}O$ を満たすとする．$\Delta=\{Y\cap O|O\in\Gamma\}$ とおけば，Δ は Y の開集合からなる集合であり，$Y=Y\cap\left(\bigcup_{O\in\Gamma}O\right)=Y\cap\left(\bigcup_{O\in\Gamma}O\right)=\bigcup_{O\in\Gamma}(Y\cap O)=\bigcup_{U\in\Delta}U$ だから，Δ の有限部分集合 Δ' で $Y=\bigcup_{U\in\Delta'}U$ となるものがある．$\Delta'=\{Y\cap O_1,Y\cap O_2,\dots,Y\cap O_n\}$ $(O_1,O_2,\dots,O_n\in\Gamma)$ として，$\Gamma'=\{O_1,O_2,\dots,O_n\}$ とおけば，Γ' は Γ の有限部分集合であり，$Y=\bigcup_{U\in\Delta'}U=\bigcup_{i=1}^{n}(Y\cap O_i)\subset\bigcup_{i=1}^{n}O_i=\bigcup_{O\in\Gamma'}O$ となるため，$(*)$ が満たされる． □

定理 10.3　$\boldsymbol{R}$ の有限閉区間 $[a,b]$ はコンパクトである.

証明　$\boldsymbol{R}$ の開集合を要素とする集合 Γ に対して $[a,b] \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O$ が成り立つと仮定して, 区間 $(a,b]$ の部分集合 A を

$$A = \{x \in (a,b] \,|\, [a,x] \subset O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n \text{ を満たす } O_1, O_2, \ldots, O_n \in \Gamma \text{ が存在する.}\}$$

で定める. このとき $b \in A$ であることを示せば, 命題 10.2 により $[a,b]$ はコンパクトである.

$a \in [a,b] \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O$ だから $a \in O$ を満たす $O \in \Gamma$ がある. a は O の内点だから $(a-r, a+r) \subset O$ を満たす $r > 0$ が存在する. このとき $c = \min\{a + \frac{r}{2}, b\}$ とおけば, $[a,c] \subset O$ となるため, $c \in A$ であり, A は空集合ではない. A の定義から b は A の上界だから, A は上に有界である. 従って定理 9.2 から A の上限が存在して, u を A の上限とする. $c \in A$ だから $u \geqq c > a$ であり, b は A の上界だから $u \leqq b$ であることに注意する.

$u < b$ と仮定すれば, $u \in [a,b] \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O$ だから $u \in U$ を満たす $U \in \Gamma$ がある. u は U の内点だから $(u-s, u+s) \subset U$ を満たす $s > 0$ が存在するため, $d = \min\{u + \frac{s}{2}, b\}$ とおけば, $u < d \leqq b$ かつ $(u-s, d] \subset U$ である. また, u は A の上限だから $u - s < v \leqq u$ を満たす $v \in A$ が存在し, さらに $[a,v] \subset O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n$ を満たす $O_1, O_2, \ldots, O_n \in \Gamma$ が存在する. このとき, $[a,d] \subset [a,v] \cup (u-s,d] \subset O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n \cup U$ が成り立つため, $d \in A$ となり, u が A の上限であることと矛盾する. 故に $u = b$ である.

$b \in [a,b] \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O$ だから $b \in V$ を満たす $V \in \Gamma$ がある. b は V の内点だから $(b-t, b+t) \subset V$ を満たす $t > 0$ が存在する. また, b は A の上限だから $b - t < w < b$ を満たす $w \in A$ が存在し, さらに $[a,w] \subset W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_n$ を満たす $W_1, W_2, \ldots, W_n \in \Gamma$ が存在する. このとき, $[a,b] \subset [a,w] \cup (b-t,b] \subset W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_n \cup V$ が成り立つため, $b \in A$ であることがわかる. 従って Γ の有限部分集合 $\Gamma' = \{W_1, W_2, \ldots, W_n, V\}$ は $[a,b] \subset \bigcup_{O \in \Gamma'} O$ を満たすため $[a,b]$ はコンパクトである. □

補題 10.4　$\boldsymbol{R}$ の有界な閉集合は最大値と最小値をもつ.

証明　X を $\boldsymbol{R}$ の有界な閉集合とすれば定理 9.2 により X の上限と下限が存在する. $M = \sup X$, $m = \inf X$ とおく. もし $M \notin X$ ならば $M \in \boldsymbol{R} - X$ であり, $\boldsymbol{R} - X$ は開集合だから $r > 0$ で $(M-r, M+r) \subset \boldsymbol{R} - X$ を満たすものが存在する. 一方 M は X の上限だから $M - r < a \leqq M$ を満たす $a \in X$ が存在する. このとき $a \in (M-r, M+r) \subset \boldsymbol{R} - X$ だから, $a \notin X$ となり, 矛盾が生じる. 故に $M \in X$ である. $m \in X$ であることも同様に示され, M が X の最大値, m が X の最小値である. □

補題 10.5　次の条件 (i) と (ii) は同値である.

(i) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ はコンパクトである.

(ii) $(X, \mathcal{O})$ の基底 $\mathcal{B}$ で次の条件を満たすものがある.

「$\Gamma \subset \mathcal{B}$ かつ $X = \bigcup_{O \in \Gamma} O$ ならば Γ の有限部分集合 Γ' で $X = \bigcup_{O \in \Gamma'} O$ となるものがある.」

証明　$(i) \Rightarrow (ii)$: $\mathcal{B} = \mathcal{O}$ とすればよい.

$(ii) \Rightarrow (i)$: $\Gamma \subset \mathcal{O}$ は $X = \bigcup_{O \in \Gamma} O$ を満たすとする. 任意の $x \in X$ に対し, x を含む $O_x \in \Gamma$ が存在し, さらに $\mathcal{B}$ が $(X, \mathcal{O})$ の基底であることから O_x は $\mathcal{B}$ の要素の合併集合になるため, $U_x \in \mathcal{B}$ で $x \in U_x \subset O_x$ を満たすものがある. そこで $\Delta = \{U_x | \, x \in X\}$ とおくと, $\Delta \subset \mathcal{B}$ かつ $X = \bigcup_{U_x \in \Delta} U_x$ である. 従って, 仮定から $U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_n} \in \Delta$ で $X = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \cdots \cup U_{x_n}$ を満たすものがある. このとき $U_{x_i} \subset O_{x_i}$ が $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して成り立つため, $X = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \cdots \cup U_{x_n} \subset O_{x_1} \cup O_{x_2} \cup \cdots \cup O_{x_n}$ だから $X = O_{x_1} \cup O_{x_2} \cup \cdots \cup O_{x_n}$ である. 故に X はコンパクトである. □

定理 10.6　$(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{O}_n)$ がすべてコンパクトな位相空間ならば, これらの直積空間もコンパクトである.

証明 命題 6.12 により, 直積空間 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ と $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$ の位相は一致するため, $n = 2$ の場合に主張を示せば, n による帰納法で一般の場合も主張が示される.

$\mathcal{B} = \{U \times V | U \in \mathcal{O}_1, V \in \mathcal{O}_2\}$ とおくと命題 6.11 から $\mathcal{B}$ は $(X_1, \mathcal{O}_1)$, $(X_2, \mathcal{O}_2)$ の直積空間の基底である. $\Gamma \subset \mathcal{B}$ が $X_1 \times X_2 = \bigcup_{O \in \Gamma} O$ を満たすとする. 各 $y \in X_2$ に対し, 補題 6.16 により, X_1 と $\mathrm{pr}_2^{-1}(y)$ は同相だから $\mathrm{pr}_2^{-1}(y)$ はコンパクトである. 従って $U_{y,1} \times V_{y,1}, U_{y,2} \times V_{y,2}, \dots, U_{y,n(y)} \times V_{y,n(y)} \in \Gamma$ で, $\mathrm{pr}_2^{-1}(y) \subset \bigcup_{i=1}^{n(y)} (U_{y,i} \times V_{y,i})$ を満たすものが存在する. $y \notin V_{y,i}$ ならば $\mathrm{pr}_2^{-1}(y) \cap (U_{y,i} \times V_{y,i}) = \emptyset$ だから, $y \in V_{y,i}$ である i についての $U_{y,i} \times V_{y,i}$ の合併集合は $\mathrm{pr}_2^{-1}(y)$ を含むため, $y \notin V_{y,i}$ である番号 i は除外して番号を付け直し, すべての $i = 1, 2, \dots, n(y)$ に対して $y \in V_{y,i}$ であるとしてよい. そこで, $V_y = \bigcap_{i=1}^{n(y)} V_{y,i}$ とおけば V_y は y を含む開集合である. 故に $X_2 = \bigcup_{y \in X_2} \{y\} \subset \bigcup_{y \in X_2} V_y \subset X_2$ より $X_2 = \bigcup_{y \in X_2} V_y$ だから X_2 のコンパクト性から, $y_1, y_2, \dots, y_k \in X_2$ で $X_2 = \bigcup_{j=1}^{k} V_{y_j}$ を満たすものが存在する. このとき, $X_1 \times X_2 = \bigcup_{1 \leqq j \leqq k, 1 \leqq i \leqq n(y_j)} (U_{y_j,i} \times V_{y_j,i})$ が成り立つ. 実際, 任意の $(x, y) \in X_1 \times X_2$ に対し, $y \in V_{y_j}$ となる j が存在し, さらに $(x, y_j) \in \mathrm{pr}_2^{-1}(y_j) \subset \bigcup_{i=1}^{n(y_j)} (U_{y_j,i} \times V_{y_j,i})$ だから $(x, y_j) \in U_{y_j,l} \times V_{y_j,l}$ となる l が存在して $y \in V_{y_j} = \bigcap_{i=1}^{n(y_j)} V_{y_j,i} \subset V_{y_j,l}$ であるため, $(x, y) \in U_{y_j,l} \times V_{y_j,l}$ が得られる. $1 \leqq j \leqq k$, $1 \leqq i \leqq n(y_j)$ に対して $U_{y_j,i} \times V_{y_j,i} \in \Gamma$ だから補題 10.5 により $X_1 \times X_2$ はコンパクトである.□

定理 10.3 と定理 10.6 から次の結果が得られる.

系 10.7 有限閉区間の直積 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ はコンパクトな $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間である.

11 コンパクト性の応用

命題 11.1 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ がコンパクトで, X の部分空間 Y が X の閉集合ならば Y もコンパクトである.

証明 X の開集合からなる集合 Γ が $Y \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O$ を満たすとする. Y は X の閉集合だから $X - Y$ は X の開集合で, $X = Y \cup (X - Y)$ と $Y \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O$ より $X = \left(\bigcup_{O \in \Gamma} O\right) \cup (X - Y)$ が成り立つ. 故に X のコンパクト性から Γ の有限部分集合 Γ' で $X = \left(\bigcup_{O \in \Gamma'} O\right) \cup (X - Y)$ を満たすものがある. このとき

$$Y = Y \cap X = Y \cap \left(\left(\bigcup_{O \in \Gamma'} O\right) \cup (X - Y)\right) = \left(Y \cap \left(\bigcup_{O \in \Gamma'} O\right)\right) \cup (Y \cap (X - Y)) = \left(Y \cap \left(\bigcup_{O \in \Gamma'} O\right)\right) \cup \emptyset \subset \bigcup_{O \in \Gamma'} O$$

が成り立つため, 命題 10.2 から Y はコンパクトである. □

命題 11.2 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を連続写像とする. $(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクトならば f の像 $f(X)$ はコンパクトな部分空間である.

証明 Y の開集合からなる集合 Γ が $f(X) \subset \bigcup_{O \in \Gamma} O$ を満たすとして $\Delta = \{f^{-1}(O) | O \in \Gamma\}$ とおく. このとき f の連続性から Δ は X の開集合からなる集合である. 任意の $x \in X$ に対して $f(x) \in f(X)$ だから $f(x) \in O$ となる $O \in \Gamma$ が存在する. このとき, $x \in f^{-1}(O)$ だから $X = \bigcup_{O \in \Delta} O$ である. X のコンパクト性により, Δ の有限部分集合 $\{f^{-1}(O_1), f^{-1}(O_2), \dots, f^{-1}(O_n)\}$ $(O_1, O_2, \dots, O_n \in \Gamma)$ で $X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(O_i)$ を満たすものがある. 故に任意の $y \in f(X)$ に対して $y = f(x)$ となる $x \in X$ をとれば, $x \in f^{-1}(O_k)$ となる k がある. このとき $y = f(x) \in O_k$ だから, $f(X) \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_i$ が成り立つことがわかる. 故に命題 10.2 から $f(X)$ はコンパクトである. □

定義 11.3　位相空間 $(X,\mathcal{O})$ が次の条件 (T_2) を満たすとき, $(X,\mathcal{O})$ を Hausdorff 空間または T_2 空間という.

(T_2) x, y を X の異なる 2 点とすると, x を含む開集合 U と y を含む開集合 V で $U\cap V=\emptyset$ となるものがある.

注意 11.4　Hausdorff 空間において, 一点からなる部分集合は閉集合である. 実際, X を Hausdorff 空間とし, $x\in X$ とすれば, 任意の $y\in X-\{x\}$ に対し, x を含む開集合 U と y を含む開集合 V で $U\cap V=\emptyset$ となるものが存在し, $V\subset X-U\subset X-\{x\}$ だから, y は $X-\{x\}$ の内点である. 従って, $X-\{x\}$ は開集合だから, $\{x\}$ は閉集合である.

例 11.5　(X,d) を距離空間とし, $\mathcal{O}_d$ を距離関数 d から定まる X の位相とする. x, y を X の異なる 2 点として $U=B_d\bigl(x;\frac{d(x,y)}{2}\bigr)$, $V=B_d\bigl(y;\frac{d(x,y)}{2}\bigr)$ とおけば, U, V はそれぞれ x, y の開近傍である. もし $z\in U\cap V$ が存在すれば $d(x,z)<\frac{d(x,y)}{2}$ かつ $d(z,y)=d(y,z)<\frac{d(x,y)}{2}$ だから, 三角不等式から $d(x,y)\leqq d(x,z)+d(z,y)<d(x,y)$ が得られるため, 矛盾が生じる. 故に $U\cap V=\emptyset$ だから, 位相空間 $(X,\mathcal{O}_d)$ は Hausdorff 空間である.

命題 11.6　Hausdorff 空間の任意の部分空間は Hausdorff 空間である.

証明　(X,d) を Hausdorff 空間, Y を X の部分空間とする. x, y を Y の異なる 2 点とすれば, 仮定から X の開集合 U, V で $x\in U$, $y\in V$, $U\cap V=\emptyset$ を満たすものが存在する. このとき $U\cap Y$, $V\cap Y$ はともに Y の開集合で, それぞれ x, y を含み, $(U\cap Y)\cap(V\cap Y)=(U\cap V)\cap Y=\emptyset\cap Y=\emptyset$ である. 故に Y は Hausdorff 空間である. □

命題 11.7　$(X_1,\mathcal{O}_1),(X_2,\mathcal{O}_2),\dots,(X_n,\mathcal{O}_n)$ が Hausdorff 空間ならば, これらの直積空間も Hausdorff 空間である.

証明　$(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $(y_1,y_2,\dots,y_n)$ が $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ の異なる 2 点ならば $x_j\neq y_j$ となる j がある. X_j は Hausdorff 空間だから X_j の開集合 U, V で $x_j\in U$, $y_j\in V$, $U\cap V=\emptyset$ を満たすものが存在する. このとき, $\mathrm{pr}_j^{-1}(U)$, $\mathrm{pr}_j^{-1}(V)$ はともに $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ の開集合で, $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathrm{pr}_j^{-1}(U)$, $(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathrm{pr}_j^{-1}(V)$ であり, $\mathrm{pr}_j^{-1}(U)\cap\mathrm{pr}_j^{-1}(V)=\mathrm{pr}_j^{-1}(U\cap V)=\mathrm{pr}_j^{-1}(\emptyset)=\emptyset$ だから $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ は Hausdorff 空間である.□

命題 11.8　A,B を Hausdorff 空間 $(X,\mathcal{O})$ のコンパクトな部分空間とする. $A\cap B=\emptyset$ ならば X の開集合 U, V で $A\subset U$, $B\subset V$ かつ $U\cap V=\emptyset$ を満たすものがある. とくに Hausdorff 空間のコンパクトな部分空間は閉集合である.

証明　$A\cap B=\emptyset$ だから $x\in A$, $y\in B$ ならば $x\neq y$ であるため, X の開集合 $U_{x,y}$, $V_{x,y}$ で $x\in U_{x,y}$, $y\in V_{x,y}$, $U_{x,y}\cap V_{x,y}=\emptyset$ を満たすものが存在する. 各 $x\in A$ に対し, $B=\bigcup\limits_{y\in B}\{y\}\subset\bigcup\limits_{y\in B}V_{x,y}$ だから, B のコンパクト性により $y_1,y_2,\dots,y_{n(x)}\in B$ で $B\subset\bigcup\limits_{j=1}^{n(x)}V_{x,y_j}$ を満たすものが存在する. $U_x=\bigcap\limits_{j=1}^{n(x)}U_{x,y_j}$ とおけば, 各 U_{x,y_j} は x を含むため, $A=\bigcup\limits_{x\in A}\{x\}\subset\bigcup\limits_{x\in A}U_x$ である. 従って A のコンパクト性により $x_1,x_2,\dots,x_m\in A$ で $A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m}U_{x_i}$ を満たすものが存在する. そこで $U=\bigcup\limits_{i=1}^{m}U_{x_i}$, $V=\bigcap\limits_{i=1}^{m}\Bigl(\bigcup\limits_{j=1}^{n(x_i)}V_{x_i,y_j}\Bigr)$ とおけば, $A\subset U$ であり, 各 $i=1,2,\dots,m$ に対して $B\subset\bigcup\limits_{j=1}^{n(x_i)}V_{x_i,y_j}$ より $B\subset V$ である. $V\subset\bigcup\limits_{j=1}^{n(x_i)}V_{x_i,y_j}$, $U_{x_i}\subset U_{x_i,y_j}$ であることに注意すれば次の式が得られる.

$$
\begin{aligned}
U\cap V&=\Bigl(\bigcup_{i=1}^{m}U_{x_i}\Bigr)\cap V=\bigcup_{i=1}^{m}\Bigl(U_{x_i}\cap V\Bigr)\subset\bigcup_{i=1}^{m}\Bigl(U_{x_i}\cap\Bigl(\bigcup_{j=1}^{n(x_i)}V_{x_i,y_j}\Bigr)\Bigr)=\bigcup_{i=1}^{m}\Bigl(\bigcup_{j=1}^{n(x_i)}\Bigl(U_{x_i}\cap V_{x_i,y_j}\Bigr)\Bigr)\\
&\subset\bigcup_{i=1}^{m}\Bigl(\bigcup_{j=1}^{n(x_i)}\Bigl(U_{x_i,y_j}\cap V_{x_i,y_j}\Bigr)\Bigr)=\bigcup_{i=1}^{m}\Bigl(\bigcup_{j=1}^{n(x_i)}\emptyset\Bigr)=\emptyset
\end{aligned}
$$

とくに任意の $y\in X-A$ に対して $B=\{y\}$ として上の結果を用いれば, y を含む開集合 V で A と交わらないものが存在するため, y は $X-A$ の内点であることがわかる. 従って A は閉集合である. □

命題 11.9　X が Hausdorff 空間であるためには, 直積空間 $X\times X$ の対角線集合 $\Delta_X=\{(x,x)\in X\times X\,|\,x\in X\}$ が閉集合であることが必要十分である.

証明 X を Hausdorff 空間とする．$(x, y) \in X \times X - \Delta_X$ ならば $x \neq y$ だから X の開集合 U, V で $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在する．このとき $U \times V$ は (x, y) を含む $X \times X$ の開集合である．もし $(p, q) \in (U \times V) \cap \Delta_X$ が存在すれば $(p, q) \in \Delta_X$ より $p = q$ であり, $p \in U$ かつ $q \in V$ だから $p \in U \cap V$ となり, $U \cap V = \emptyset$ であることと矛盾する．従って $(U \times V) \cap \Delta_X = \emptyset$ だから $U \times V \subset X \times X - \Delta_X$ が成り立つ．故に (x, y) は $X \times X - \Delta_X$ の内点であるため, Δ_X は閉集合である．

Δ_X は $X \times X$ の閉集合であるとする．x, y を X の異なる 2 点とすれば, $(x, y) \in X \times X - \Delta_X$ であり, $X \times X - \Delta_X$ は $X \times X$ の開集合だから X の開集合 U, V で $(x, y) \in U \times V \subset X \times X - \Delta_X$ を満たすものが存在する．このとき $x \in U$, $y \in V$ であり, もし $z \in U \cap V$ が存在すれば $(z, z) \in (U \times V) \cap \Delta_X$ だから $(U \times V) \cap \Delta_X \neq \emptyset$ となり, $U \times V \subset X \times X - \Delta_X$ であることに矛盾する．従って $U \cap V = \emptyset$ が成り立つため, X は Hausdorff 空間である．□

命題 11.10 f, g を位相空間 X から Hausdorff 空間 Y への連続写像とすると, $\{x \in X | \, f(x) = g(x)\}$ は X の閉集合である．従って, X の稠密な部分集合 D で, f, g の D への制限が一致するものが存在すれば $f = g$ である．

証明 $h : X \to Y \times Y$ を $h(x) = (f(x), g(x))$ で定める．$\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : Y \times Y \to Y$ をそれぞれ第 1 成分, 第 2 成分への射影とすれば, $\mathrm{pr}_1 \circ h = f$, $\mathrm{pr}_2 \circ h = g$ だから $\mathrm{pr}_1 \circ h$ と $\mathrm{pr}_2 \circ h$ はともに連続写像である．従って, 系 8.8 の (1) により h は連続である．Y は Hausdorff 空間だから, (1) によって $Y \times Y$ の対角線集合 Δ_Y は $Y \times Y$ の閉集合であり, $\{x \in X | \, f(x) = g(x)\} = h^{-1}(\Delta_Y)$ だから $\{x \in X | \, f(x) = g(x)\}$ は X の閉集合である．□

命題 11.11 コンパクトな位相空間から Hausdorff 空間への連続写像は閉写像である．

証明 $(X, \mathcal{O}_X)$ をコンパクトな位相空間, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を Hausdorff 空間とし, $f : X \to Y$ を連続写像とする．A を X の閉集合とすれば, 命題 11.1 により, A は X のコンパクトな部分空間だから, 命題 11.2 により, $f(A)$ も Y のコンパクトな部分空間である．Y は Hausdorff 空間だから, 命題 11.8 により $f(A)$ は閉集合である．□

定義 11.12 (X, d) を距離空間とする．X の部分集合 A に対して $p \in X$ と $R > 0$ で, $A \subset B_d(p\,; R)$ を満たすものがあるとき, A は有界であるという．

注意 11.13 $p, q \in X$ と $R > 0$ に対して三角不等式から $B_d(p\,; R) \subset B_d(q\,; R + d(p, q))$ が示されるため, p_0 を X の定点とするとき, A が有界ならば $R' > 0$ で, $A \subset B_d(p_0\,; R')$ を満たすものがある．

定理 11.14 $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間 X がコンパクトであるためには X が有界な閉集合であることが必要十分である．

証明 $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間 X がコンパクトならば, 例 11.5 から $\boldsymbol{R}^n$ は Hausdorff 空間だから, 命題 11.8 より, X は閉集合である．各自然数 k に対して, 原点を中心として半径が k である開球 $B(\mathbf{0}; k)$ を考えれば $X \subset \boldsymbol{R}^n = \bigcup_{k \geqq 1}^{\infty} B(\mathbf{0}; k)$ だから, X のコンパクト性により, $X \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(\mathbf{0}; k_i)$ を満たす自然数 $k_1, k_2, \ldots, k_N$ がある．これらのうちで最大のものを K とすれば, $i = 1, 2, \ldots, N$ に対して $B(\mathbf{0}; k_i) \subset B(\mathbf{0}; K)$ だから $X \subset B(\mathbf{0}; K)$ となるため, X は有界である．

X が $\boldsymbol{R}^n$ の有界な閉集合ならば注意 11.13 により $X \subset B(\mathbf{0}; K)$ を満たす正の実数 K が存在する．$[-K, K]^n$ を閉区間 $[-K, K]$ の n 個の直積集合とすれば $B(\mathbf{0}; K) \subset [-K, K]^n$ だから X は $[-K, K]^n$ の閉集合である．故に系 10.7 と命題 11.1 により X はコンパクトである．□

定理 11.15 (最大値・最小値の定理) コンパクトな位相空間で定義された実数値連続関数は最大値と最小値をもつ．

証明 $(X, \mathcal{O})$ をコンパクトな位相空間, $f : X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする．命題 11.2 により $f(X)$ は $\boldsymbol{R}$ のコンパクトな部分空間だから, 定理 11.14 によって $f(X)$ は $\boldsymbol{R}$ の有界な閉集合である．従って, 補題 10.4 により $f(X)$ は最大値と最小値をもつ．$f(X)$ の最大値は f の最大値で, $f(X)$ の最小値は f の最小値に他ならない．□

定理 11.14 と定理 11.15 から, 次の結果が得られる．

系 11.16 $\boldsymbol{R}^n$ の有界な閉集合で定義された実数値連続関数は最大値と最小値をもつ.

定義 11.17 位相空間 X の各点がコンパクトな近傍をもつとき X は局所コンパクトであるという.

命題 11.18 X を局所コンパクト Hausdorff 空間とする. 任意の $x \in X$ と x の任意の近傍 U に対し, U に含まれる x の近傍でコンパクトなものが存在する. 特に, 局所コンパクト Hausdorff 空間の開部分空間も局所コンパクトである.

証明 x のコンパクトな近傍を C とする. $U \cap C$ は X の近傍だから, $x \in V \subset U \cap C$ を満たす開集合 V が存在する. $C - V$ はコンパクトな部分空間 C の閉集合だから, 命題 11.1 によりコンパクトであり, $\{x\} \cap (C - V) = \emptyset$ だから, 命題 11.8 から, C の開集合 P, Q で, $P \cap Q = \emptyset$, $x \in P$, $C - V \subset Q$ を満たすものが存在する.

X の開集合 S, T で $P = C \cap S$, $Q = C \cap T$ を満たすものをとり, $Z = S \cap V$ とおくと, $x \in P \subset S$ だから Z は x の開近傍である. $Z \not\subset C - T$ と仮定すれば, $y \in Z$ かつ $y \notin C - T$ を満たす y が存在する. $Z \subset V \subset C$ より $y \in C$ だから, $y \notin C - T$ より $y \in T$ となるため, $y \in C \cap T = Q$ であるが, $Z \subset S$ より $y \in S$ だから $y \in C \cap S = P$ となって, $P \cap Q = \emptyset$ であることに矛盾する. 故に $Z \subset C - T$ が成り立つため, $C - T$ は x の近傍である. また, T は開集合だから, $C - T$ は閉集合であり, コンパクトな部分空間 C に含まれるため, 命題 11.1 によりコンパクトである. さらに $C - V \subset Q$ より $C - Q \subset V$ だから $C - T = C - (C \cap T) = C - Q \subset V \subset U$ が成り立つため, $C - T$ は U に含まれる x の近傍でコンパクトなものである. □

命題 11.19 距離空間 (X, d), (Y, d') に対し, $d_1 : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \boldsymbol{R}$ を $d_1((x, y), (z, w)) = d(x, z) + d'(y, w)$ で定めれば d_1 は $X \times Y$ の距離関数であり, d_1 から定まる $X \times Y$ の位相は d から定まる X の位相と d' から定まる Y の位相の直積位相と一致する.

証明 d_1 が $X \times Y$ の距離関数であることは容易に確かめられる. $d_2 : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \boldsymbol{R}$ を $d_2((x, y), (z, w)) = \sqrt{d(x, z)^2 + d'(y, w)^2}$ で定めれば命題 6.14 から d_2 は $X \times Y$ の距離関数であり, d_2 から定まる $X \times Y$ の位相は d から定まる X の位相と d' から定まる Y の位相の直積位相と一致する. 任意の $(x, y), (z, w) \in X \times Y$ に対し, $d_2((x, y), (z, w)) = \sqrt{d(x, z)^2 + d'(y, w)^2} \leqq d(x, z) + d'(y, w) = d_1((x, y), (z, w))$ であり, $2d_2((x, y), (z, w))^2 - d_1((x, y), (z, w))^2 = (d(x, z) - d'(y, w))^2 \geqq 0$ だから $d_2((x, y), (z, w)) \leqq d_1((x, y), (z, w)) \leqq \sqrt{2} d_2((x, y), (z, w))$ が成り立つため注意 2.35 より $X \times Y$ の d_1 から定まる位相と d_2 から定まる位相は一致するため, 主張が示された. □

命題 11.20 (X, d) を距離空間とし, d_1 を命題 11.19 で $Y = X$, $d' = d$ として定義した $X \times X$ の距離関数とする.

(1) $(x, y), (p, q) \in X \times X$ に対し, $|d(x, y) - d(p, q)| \leqq d(x, p) + d(y, q)$ が成り立つ.

(2) 距離関数 $d : X \times X \to \boldsymbol{R}$ は距離空間 $(X \times X, d_1)$ 上の実数値連続関数である.

証明 (1) 三角不等式より $d(x, y) \leqq d(x, p) + d(p, y) \leqq d(x, p) + d(p, q) + d(y, p)$ が得られるため $d(x, y) - d(p, q) \leqq d(x, p) + d(y, p)$ であり, この不等式の x と p, y と q を入れ替えれば $d(p, q) - d(x, y) \leqq d(p, x) + d(q, y) = d(x, p) + d(y, q)$ が得られるので $|d(x, y) - d(p, q)| \leqq d(x, p) + d(y, p)$ が成り立つ.

(2) (1) の結果から $(x, y), (p, q) \in X \times X$ に対し, $|d(x, y) - d(p, q)| \leqq d_1((x, y), (p, q))$ だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $d_1((x, y), (p, q)) < \varepsilon$ ならば $|d(x, y) - d(p, q)| < \varepsilon$ が成り立つ. 故に d は任意の $(p, q) \in X \times X$ で連続である.□

距離空間 (X, d) が与えられたとき, X の部分集合 A と $p \in X$ に対し, $d(A, p) = \inf\{d(x, p) \,|\, x \in A\}$ とおく.

命題 11.21 (X, d) を距離空間, A を X の部分集合とするとき, $|d(A, x) - d(A, y)| \leqq d(x, y)$ が成り立つ. 従って, 関数 $d_A : X \to \boldsymbol{R}$ を $d_A(x) = d(A, x)$ で定めれば d_A は連続である.

証明 $a \in A$, $x, y \in X$ に対して三角不等式から $d(A, x) \leqq d(a, x) \leqq d(a, y) + d(y, x) = d(a, y) + d(x, y)$ が成り立つため, 任意の a に対して $d(A, x) - d(x, y) \leqq d(a, y)$ が成り立つ. この不等式の左辺は a に無関係だから, $d(A, y)$

の定義から $d(A,x)-d(x,y) \leqq d(A,y)$ である．故に $d(A,x)-d(A,y) \leqq d(x,y)$ が得られ, x と y を入れ替えれば, $d(A,y)-d(A,x) \leqq d(y,x)=d(x,y)$ が得られるため, $|d(A,x)-d(A,y)| \leqq d(x,y)$ が成り立つ． □

命題 11.22 (X,d) を距離空間, A を X の部分集合とすれば $\overline{A}=d_A^{-1}(\{0\})$ が成り立つ．従って A が X の閉集合であることと, $A=d_A^{-1}(\{0\})$ は同値である．

証明 $\{0\}$ は $\boldsymbol{R}$ の閉集合で, 命題 11.21 から d_A は連続関数だから, 命題 4.6 により $d_A^{-1}(\{0\})$ は閉集合である．$x \in A$ ならば $d_A(x)=d(A,x)=0$ だから $x \in d_A^{-1}(\{0\})$ となるので, $A \subset d_A^{-1}(\{0\})$ である．従って命題 3.14 から $\overline{A} \subset d_A^{-1}(\{0\})$ である．$x \in d_A^{-1}(\{0\})$ ならば $d(A,x)=0$ だから任意の自然数 n に対して $d(a_n,x)<\frac{1}{n}$ を満たす $a_n \in A$ が存在する．このとき点列 $(a_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は x に収束するため, 命題 2.24 から $x \in \overline{A}$ である．故に $d_A^{-1}(\{0\}) \subset \overline{A}$ も成り立つので $\overline{A}=d_A^{-1}(\{0\})$ である． □

$r>0$ に対し, X の部分集合 $U(A\,;r)$ を $U(A\,;r)=\{x \in X \,|\, d(A,x)<r\}=d_A^{-1}((-\infty,r))$ で定める．

命題 11.23 (X,d) を距離空間, C を X のコンパクトな部分空間, O を X の開集合で, C を含むものとする．このとき $r>0$ で, $U(C\,;r) \subset O$ を満たすものが存在する．

証明 関数 $d_{X-O}: X \to \boldsymbol{R}$ の定義域を C に制限すれば, 最大値・最小値の定理から d_{X-O} は C における最小値をとり, その値を r とする．もし $r=0$ ならば $d_{X-O}(p)=0$ となる $p \in C$ をとれば, O は開集合だから $X-O$ は閉集合であることと命題 11.22 から $p \in d_{X-O}^{-1}(\{0\})=\overline{X-O}=X-O$ である．従って $p \in C\cap(X-O)$ となるが, $C \subset O$ だから $C\cap(X-O)=\emptyset$ であることと矛盾が生じる．故に $r>0$ であり, $x \in X-O$ ならば任意の $c \in C$ に対して $d(c,x)=d(x,c) \geqq d(X-O,c) \geqq r$ が成り立つため, $d(C,x) \geqq r$ である．$x \in U(C\,;r)$ ならば $d(C,x)<r$ だから, 上の不等式から $x \notin X-O$ すなわち $x \in O$ である．よって $U(C\,;r) \subset O$ である． □

定義 11.24 (X,d_X), (Y,d_Y) を距離空間, $f: X \to Y$ を写像とする．任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ で条件「$d_X(x,y)<\delta$ ならば $d_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$」を満たすものが存在するとき, f は一様連続であるという．

注意 11.25 距離空間 (X,d_X) が与えられたとき, $r>0$ に対して $X\times X$ の部分集合 $D_X(r)$ を次で定める．

$$D_X(r)=\{(x,y)\in X\times X \,|\, d_X(x,y)<r\}$$

さらに距離空間 (Y,d_Y) と写像 $f: X \to Y$ が与えられたとき, $f\times f: X\times X \to Y\times Y$ を $(f\times f)(x,y)=(f(x),f(y))$ で定める．このとき, f が一様連続であるためには, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $(f\times f)(D_X(\delta)) \subset D_Y(\varepsilon)$ が成り立つような $\delta>0$ が存在することが必要十分である．

$r>0$ に対して $D_X(r)=d^{-1}((-\infty,r))$ だから, 命題 4.4 の (2) と命題 11.20 から次の結果が得られる．

補題 11.26 $r>0$ に対して $D_X(r)$ は距離空間 $(X\times X,d_1)$ における開集合である．

$X\times X$ の部分集合 Δ_X を $\Delta_X=\{(x,y)\in X\times X \,|\, x=y\}$ で定める．

補題 11.27 距離空間 $(X\times X,d_1)$ において, $r>0$ に対して $U(\Delta_X\,;r)=D_X(r)$ が成り立つ．

証明 $(x,y)\in U(\Delta_X\,;r)$ が $d(x,y)\geqq r$ を満たすと仮定すれば, 任意の $(z,z)\in\Delta_X$ に対して

$$r \leqq d(x,y) \leqq d(x,z)+d(z,y)=d(z,x)+d(z,y)=d_1((z,z),(x,y))$$

が成り立つため, $d(\Delta_X,(x,y))=\inf\{d((z,z),(x,y)) \,|\, (z,z)\in\Delta_X\} \geqq r$ となって $(x,y)\in U(\Delta_X\,;r)$ と矛盾する．従って $d(x,y)<r$ だから $(x,y)\in D_X(r)$ である．$(x,y)\in D_X(r)$ が $d(\Delta_X,(x,y))\geqq r$ を満たすと仮定すれば, $(x,x)\in\Delta_X$ に対して $d(x,y)=d(x,x)+d(x,y)=d_1((x,x),(x,y))\geqq d(\Delta_X,(x,y))\geqq r$ となって $(x,y)\in D_X(r)$ と矛盾する．従って $d(\Delta_X,(x,y))<r$ だから $(x,y)\in U(\Delta_X\,;r)$ である． □

定理 11.28　(X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とし, d_X から定まる X の位相に関して, X はコンパクトであるとする. このとき, $f : X \to Y$ が連続写像ならば一様連続である.

証明　写像 $\mathrm{pr}_{X1}, \mathrm{pr}_{X2} : X \times X \to X$, $\mathrm{pr}_{Y1}, \mathrm{pr}_{Y2} : Y \times Y \to Y$ をそれぞれ $\mathrm{pr}_{X1}(x, y) = x$, $\mathrm{pr}_{X2}(x, y) = y$, $\mathrm{pr}_{Y1}(z, w) = z$, $\mathrm{pr}_{Y2}(z, w) = w$ で定めれば

$$(\mathrm{pr}_{Y1} \circ (f \times f))(x, y) = \mathrm{pr}_{Y1}(f(x), f(y)) = f(x) = (f \circ \mathrm{pr}_{X1})(x, y),$$
$$(\mathrm{pr}_{Y2} \circ (f \times f))(x, y) = \mathrm{pr}_{Y2}(f(x), f(y)) = f(y) = (f \circ \mathrm{pr}_{X2})(x, y)$$

だから $\mathrm{pr}_{Y1} \circ (f \times f) = f \circ \mathrm{pr}_{X1}$, $\mathrm{pr}_{Y2} \circ (f \times f) = f \circ \mathrm{pr}_{X2}$ が成り立つ. これらの右辺はともに連続写像だから, 命題 6.9 により $f \times f$ は連続写像である. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 補題 11.26 から $D_Y(\varepsilon)$ は $Y \times Y$ の開集合だから, 命題 4.4 の (2) から $(f \times f)^{-1}(D_Y(\varepsilon))$ は $X \times X$ の開集合である. $(x, x) \in \Delta_X$ ならば $(f \times f)(x, x) = (f(x), f(x)) \in D_Y(\varepsilon)$ だから $\Delta_X \subset (f \times f)^{-1}(D_Y(\varepsilon))$ である. Δ_X は $x \mapsto (x, x)$ で与えられる X から $X \times X$ への写像の像であり, この写像は命題 6.9 を用いれば連続であることがわかる. 従って X がコンパクトならば命題 11.2 から Δ_X もコンパクトである. 命題 11.23 から $\delta > 0$ で, $U(\Delta_X ; \delta) \subset (f \times f)^{-1}(D_Y(\varepsilon))$ を満たすものが存在する. 故に補題 11.27 から $D_X(\delta) \subset (f \times f)^{-1}(D_Y(\varepsilon))$ だから $(f \times f)(D_X(\delta)) \subset D_Y(\varepsilon)$ が得られるため, $f : X \to Y$ は一様連続である. □

12　分離公理

定義 12.1　集合 X に対し, 自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ から X への全単射が存在するとき, X を可算集合という. また, 有限集合または可算集合である集合をたかだか可算な集合という.

位相空間の点の近傍で閉集合であるものを閉近傍という.

公理 12.2　位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対し, 次の分離公理が考えられる.

(T_0) x, y を X の異なる 2 点とすると, x の近傍で y を含まないものか, y の近傍で x を含まないものが存在する.
(T_1) x, y を X の異なる 2 点とすると, x の近傍で y を含まないものと, y の近傍で x を含まないものが存在する.
(WT_2) X の任意のコンパクトな部分空間 C は Hausdorff 空間である.
(T_2) x, y を X の異なる 2 点とすると, x の近傍 U と y の近傍 V で $U \cap V = \emptyset$ となるものが存在する.
($T_{2\frac{1}{2}}$) x, y を X の異なる 2 点とすると, x の閉近傍 U と y の閉近傍 V で $U \cap V = \emptyset$ となるものが存在する.
(CT_2) x, y を X の異なる 2 点とすると, 連続関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ で, $f(x) \neq f(y)$ となるものが存在する.
(T_3) X の任意の閉集合 F と $x \in X - F$ に対し, x の近傍 U と F を含む開集合 O で, $U \cap O = \emptyset$ となるものが存在する.
(CT_3) X の任意の閉集合 F と $x \in X - F$ に対し, 連続関数 $f : X \to [0, 1]$ で, $f(x) = 1$, $f(F) = \{0\}$ となるものが存在する.
(T_4) X の 2 つの閉集合 F_1, F_2 が交わらなければ X の開集合 O_1, O_2 で, $F_1 \subset O_1$, $F_2 \subset O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ を満たすものが存在する.
(T_5) X の任意の部分空間が T_4 を満たす.
(T_6) X は T_4 を満たし, X の任意の閉集合は, たかだか可算個の開集合の共通部分になっている.

定義 12.3　(1) T_0, T_1, WT_2, T_2, $T_{2\frac{1}{2}}$, CT_2, T_1 かつ T_3, T_1 かつ CT_3, T_1 かつ T_4, T_1 かつ T_5, T_1 かつ T_6 を満たす位相空間をそれぞれ T_0-空間, T_1-空間, 弱 Hausdorff 空間, Hausdorff 空間 (または T_2-空間), Urysohn 空間, 完全 Hausdorff 空間, 正則空間, 完全正則空間 (または Tychonoff 空間), 正規空間, 全部分正規空間 (または継承的正規空間), 完全正規空間という.

(2) 位相空間 X の部分集合 A で, $f^{-1}(0) = A$ となる連続関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ が存在するようなものをゼロ集合と呼

び, 部分集合 B で, $g^{-1}(\boldsymbol{R}-\{0\})=B$ となる連続関数 $g:X\to\boldsymbol{R}$ が存在するようなものをコゼロ集合と呼ぶ.

注意 12.4　上の定義から「完全 Hausdorff 空間 $\Rightarrow$ Urysohn 空間 $\Rightarrow$ Hausdorff 空間 $\Rightarrow$ T_1-空間 $\Rightarrow$ T_0-空間」および「$T_5 \Rightarrow T_4$」が成り立つことがわかる.

命題 12.5　(1) $T_0 \Leftrightarrow x,y\in X$ が $\overline{\{x\}}=\overline{\{y\}}$ を満たすのは $x=y$ の場合に限る.

(2) $T_1 \Leftrightarrow$ 任意の $x\in X$ に対し, $\{x\}$ は X の閉集合である.

(3) $T_2 \Leftrightarrow X$ の相異なる 2 点 x, y に対して, x の開近傍 O で $y\in X-\overline{O}$ を満たすものが存在する

(4) $T_3 \Leftrightarrow$ 任意の $x\in X$ と x の任意の近傍 U に対し, x の近傍 V で, $\overline{V}\subset U$ となるものが存在する.

(5) $CT_3 \Leftrightarrow$ コゼロ集合からなる X の基底が存在する.

(6) $T_4 \Leftrightarrow X$ の任意の閉集合 F と, F を含む任意の開集合 U に対して, $F\subset V\subset\overline{V}\subset U$ となる開集合 V が存在する.

(7) $T_5 \Leftrightarrow X$ の 2 つの部分集合 Y と Z が離れていれば, X の開集合 U, V で, $Y\subset U$, $Z\subset V$, $U\cap V=\emptyset$ を満たすものが存在する.

証明　(1) $(\Rightarrow)$ X を T_0 空間として $x,y\in X$ が $\overline{\{x\}}=\overline{\{y\}}$ を満たすとする. もし $x\neq y$ ならば x の近傍 U で y を含まないものか, y の近傍 V で x を含まないものが存在するが, 前者の場合は $x\notin\overline{\{y\}}$ であり, 後者の場合は $y\notin\overline{\{x\}}$ となるため $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$ である.

$(\Leftarrow)$ $x,y\in X$, $x\neq y$ とすれば仮定から $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$ だから $\overline{\{x\}}-\overline{\{y\}}\neq\emptyset$ または $\overline{\{y\}}-\overline{\{x\}}\neq\emptyset$ である. $U=X-\overline{\{y\}}$, $V=X-\overline{\{x\}}$ とおけば, 前者の場合は U は y を含まない x の近傍で, 後者の場合は V は x を含まない y の近傍である.

(2) $(\Rightarrow)$ $x\in X$ に対し, $y\notin\{x\}$ ならば x を含まない y の近傍があるため, $\{x\}$ は X の閉集合である.

$(\Leftarrow)$ $x,y\in X$, $x\neq y$ ならば $y\notin\{x\}$ で, $\{x\}$ は閉集合だから y の近傍で $\{x\}$ と交わらないものが存在する. すなわち y の近傍で x を含まないものが存在する

(3) $(\Rightarrow)$ X の相異なる 2 点 x, y に対して, x の開近傍 O と y の開近傍 V で $O\cap V=\emptyset$ を満たすものが存在する. このとき $O\subset X-V$ であり, $X-V$ は閉集合だから $\overline{O}\subset X-V$ が成り立つため $y\in V\subset X-\overline{O}$ が成り立つ.

$(\Leftarrow)$ X の相異なる 2 点 x, y に対して, x の開近傍 O で $y\in X-\overline{O}$ を満たすものが存在するとき, $V=X-\overline{O}$ とおけば V は y の開近傍で $O\cap V=\emptyset$ を満たすため $(X,\mathcal{O})$ は Hausdorff 空間である.

(4) $(\Rightarrow)$ $x\in X$ と x の任意の近傍 U に対し, x の開近傍 W で U に含まれるものをとると, $X-W$ は x を含まない閉集合だから x の開近傍 V と, $X-W$ を含む開集合 O で V と交わらないものがある. このとき $X-O$ は V を含む閉集合で, $X-W\subset O$ より $\overline{V}\subset X-O\subset W\subset U$ である.

$(\Leftarrow)$ X の任意の閉集合 F と $x\in X-F$ に対し, x の近傍 U で $\overline{U}\subset X-F$ となるものが存在する. このとき, $V=X-\overline{U}$ とおくと V は F を含む開集合で U と交わらない.

(5) $(\Rightarrow)$ X の任意の開集合 O と $x\in O$ に対して, 連続関数 $f:X\to[0,1]$ で $f(x)=1$, $f(X-O)=0$ を満たすものがある. このとき, $x\in f^{-1}((0,1])\subset O$ だからコゼロ集合全体からなる集合は X の基底になることがわかる.

$(\Leftarrow)$ X の任意の閉集合 F と $x\in X-F$ に対し, x を含むコゼロ集合で $X-F$ に含まれるものがあるため, 連続関数 $g:X\to\boldsymbol{R}$ で $x\in g^{-1}(\boldsymbol{R}-\{0\})\subset X-F$ を満たすものがある. そこで, $c=g(x)$ とおき, $f:X\to[0,1]$ を $f(p)=\min\left\{1,\frac{(|c|+1)|g(p)|}{|c|(|g(p)|+1)}\right\}$ で定めれば, f は連続で, $f(x)=1$, $f(F)=\{0\}$ を満たす.

(6) $(\Rightarrow)$ X の閉集合 F と, F を含む任意の開集合 U に対して, F と $X-U$ は交わらない閉集合だから, X の開集合 V, W で, $F\subset V$, $X-U\subset W$, $V\cap W=\emptyset$ を満たすものが存在する. このとき, $X-W$ は V を含み, U に含まれる閉集合だから, $F\subset V\subset\overline{V}\subset X-W\subset U$ である.

$(\Leftarrow)$ X の 2 つの閉集合 F_1, F_2 が交わらないとすれば, $X-F_2$ は F_1 を含む開集合である. このとき $F_1\subset V\subset\overline{V}\subset X-F_2$ となる開集合 V が存在するため $O_1=V$, $O_1=X-\overline{V}$ とおけば O_1, O_2 は X の開集合で, $F_1\subset O_1$, $F_2\subset O_2$, $O_1\cap O_2=\emptyset$ を満たす.

(7) (⇒) X の 2 つの部分集合 Y と Z が離れているとする. $A = X - (\overline{Y} \cap \overline{Z})$ とおくと A は開集合で, $\overline{Y} \cap Z = Y \cap \overline{Z} = \emptyset$ より $Z \subset X - \overline{Y} \subset A$, $Y \subset X - \overline{Z} \subset A$ である. $Y' = A \cap \overline{Y}$, $Z' = A \cap \overline{Z}$ とおけば, これらは A における閉集合で, $Y \subset Y'$, $Z \subset Z'$ かつ $Y' \cap Z' = A \cap (\overline{Y} \cap \overline{Z}) = \emptyset$ が成り立つ. 仮定から A における交わらない開集合 U, V で $Y' \subset U$, $Z' \subset V$ となるものが存在する. A は X の開集合だから U, V も X の開集合である.

(⇐) A を X の部分集合, Y, Z を A における交わらない閉集合とすれば $Y = A \cap \overline{Y}$, $Z = A \cap \overline{Z}$ である. $\overline{Y} \cap Z = \overline{Y} \cap A \cap Z = Y \cap Z = \emptyset$, $Y \cap \overline{Z} = Y \cap A \cap \overline{Z} = Y \cap Z = \emptyset$ だから, 仮定により X の開集合 U, V で, $Y \subset U$, $Z \subset V$, $U \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在する. このとき, $A \cap U$, $A \cap V$ は交わらない A の開集合で, それぞれ Y, Z を含む. □

命題 12.6　弱 Hausdorff 空間のコンパクト部分集合は閉集合である. とくに弱 Hausdorff 空間は T_1-空間である.

証明　X を弱 Hausdorff 空間とし, C を X の任意のコンパクト部分集合とする. $p \in X - C$ に対し, $C \cup \{p\}$ はコンパクトだから Hausdorff 空間である. よって任意の $x \in C$ に対し, x の開近傍 U_x と p の開近傍 V_x が存在して $U_x \cap V_x \cap (C \cup \{p\}) = \emptyset$ となる. 従って, $U_x \cap V_x \cap C = \emptyset$ である. $C \subset \bigcup_{x \in C} U_x$ であり, C のコンパクト性より $x_1, x_2, \ldots, x_n \in C$ で $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ となるものがある. そこで $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ とおくと $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $V \subset V_{x_i}$ だから $C \cap V = \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}\right) \cap C \cap V = \bigcup_{i=1}^{n} (U_{x_i} \cap V \cap C) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (U_{x_i} \cap V_{x_i} \cap C) = \emptyset$ である. 故に $C \cap V = \emptyset$ だから C は閉集合である □

命題 11.1 と命題 11.8 からただちに次の結果が得られる.

系 12.7　コンパクト Hausdorff 空間は正規空間である.

定義 12.8　X を位相空間とする. 任意の $x \in X$ と x の任意の近傍 U に対し, U に含まれる x の近傍でコンパクトなものが存在するとき X は強い意味で局所コンパクトであるという.

命題 11.18 で局所コンパクト Hausdorff 空間は強い意味で局所コンパクトであることを示したが, Hausdorff 空間という仮定を弱 Hausdorff 空間という仮定に弱めることができる.

命題 12.9　局所コンパクトな弱 Hausdorff 空間は Hausdorff 空間で, 強い意味で局所コンパクトである. 特に, 局所コンパクトな Hausdorff 空間の開部分空間も局所コンパクトである.

証明　X を局所コンパクトな弱 Hausdorff 空間, U を $x \in X$ の開近傍とする. V を x のコンパクトな近傍とすれば, 命題 12.6 により V は閉集合であり, $V \cap U$ は $\{x\}$ を含む V の開集合である. 系 12.7 により V は正規空間だから, 命題 12.5 の (6) から x を含む V の開集合 W で $\overline{W} \cap V \subset U$ を満たすものがある. このとき, $\overline{W} \cap V$ は x の近傍であり, V の閉部分集合だから, コンパクトである. 従って X は強い意味で局所コンパクトである.

x, y を X の相異なる 2 つの点とすれば, 命題 12.6 により, $X - \{y\}$ は x の近傍である. 従って, 上で示したことから, X のコンパクトな近傍 Z で $X - \{y\}$ に含まれるものがある. 命題 12.6 により, Z は閉集合で y を含まないため, $X - Z$ は y の開近傍で, Z と交わらないため X は Hausdorff 空間である. □

13　正規空間

定義 13.1　集合 X 上で定義された実数値関数の列 $(f_n)_{n=1,2,\ldots}$ と実数値関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ が与えられているとする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば, すべての $x \in X$ に対して $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$」を満たすものがあるとき, 関数列 $(f_n)_{n=1,2,\ldots}$ は f に一様収束するという.

定理 13.2　$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．X 上の実数値連続関数の列 $(f_n)_{n=1,2,\dots}$ が関数 f に一様収束すれば，f は連続関数である．

証明 $p \in X$ と $\varepsilon > 0$ を任意にとる．仮定から，整数 N で $n \geqq N$ ならば，すべての $x \in X$ に対して $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ を満たすものがある．また，f_N の連続性から p の近傍 U で，$x \in U$ ならば $|f_N(x) - f_N(p)| < \frac{\varepsilon}{3}$ を満たすものがある．従って $x \in U$ ならば

$$\begin{aligned}|f(x) - f(p)| &= |(f(x) - f_N(x)) + (f_N(x) - f_N(p)) + (f_N(p) - f(p))| \\ &\leqq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(p)| + |f_N(p) - f(p)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

となるため f は p において連続である．□

定理 13.3　X を集合とする．各 $n \in \boldsymbol{N}$ に対して実数値関数 $f_n : X \to \boldsymbol{R}$ が与えられていて，任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N で，条件「$m, n \geqq N$ ならば，すべての $x \in X$ に対して $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$」を満たすものがあるとき，実数値関数の列 $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ はある実数値関数に一様収束する．

証明 仮定から各 $x \in X$ に対して数列 $(f_n(x))_{n=1,2,\dots}$ は Cauchy 列だから収束する．$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ とおいて関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ を定義する．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，自然数 N で「$m, n \geqq N$ ならば，すべての $x \in X$ に対して $|f_m(x) - f_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$」を満たすものがあるため，不等式 $|f_m(x) - f_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ において $m \to \infty$ とすれば，$|f(x) - f_n(x)| \leqq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ が任意の $n \geqq N$ と $x \in X$ に対して成り立つため，$(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ は f に一様収束する．□

定理 13.4　位相空間 X が T_4 を満たすことは，次の 3 つの条件のいずれとも同値である．

(1) F_1, F_2 が交わらない X の閉集合ならば，連続関数 $f : X \to [0, 1]$ で，$f(F_1) = \{0\}$, $f(F_2) = \{1\}$ を満たすものがある．

(2) X の任意の閉集合 F と，有界な連続関数 $f : F \to \boldsymbol{R}$ に対し，有界な連続関数 $g : X \to \boldsymbol{R}$ で F への制限が f に一致するようなものがある．

(3) X の任意の閉集合 F と，連続関数 $f : F \to \boldsymbol{R}$ に対し，連続関数 $g : X \to \boldsymbol{R}$ で F への制限が f に一致するようなものがある．

証明 $T_4 \Rightarrow (1)$; F_1, F_2 を交わらない X の閉集合とする．正の整数 j と $i = 1, 2, \dots, 2^j - 1$ に対して開集合 $O\bigl(\frac{i}{2^j}\bigr)$ を次のように選ぶ．まず，命題 12.5 の (6) から $F_1 \subset O\bigl(\frac{1}{2}\bigr) \subset \overline{O\bigl(\frac{1}{2}\bigr)} \subset X - F_2$ を満たす開集合 $O\bigl(\frac{1}{2}\bigr)$ がとれる．$j \geqq 2$ に対し，F_1 を含む開集合 $O\bigl(\frac{1}{2^j}\bigr), O\bigl(\frac{2}{2^j}\bigr), \dots, O\bigl(\frac{2^j-1}{2^j}\bigr)$ で，$i = 1, 2, \dots, 2^j - 1$ に対して $\overline{O\bigl(\frac{i}{2^j}\bigr)} \subset O\bigl(\frac{i+1}{2^j}\bigr)$ (ただし $O(1) = X - F_2$) を満たすものを選んだとする．$i = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ に対し，$O\bigl(\frac{2i+1}{2^{j+1}}\bigr)$ は

$$F_1 \subset O\bigl(\tfrac{1}{2^{j+1}}\bigr) \subset \overline{O\bigl(\tfrac{1}{2^{j+1}}\bigr)} \subset O\bigl(\tfrac{1}{2^j}\bigr), \qquad \overline{O\bigl(\tfrac{i}{2^j}\bigr)} \subset O\bigl(\tfrac{2i+1}{2^{j+1}}\bigr) \subset \overline{O\bigl(\tfrac{2i+1}{2^{j+1}}\bigr)} \subset O\bigl(\tfrac{i+1}{2^j}\bigr)$$

を満たす開集合であるとする．$I = \bigl\{\frac{i}{2^j} \bigm| j = 1, 2, \dots,\ i = 1, 2, \dots, 2^j - 1\bigr\}$ とおくと，上のように選んだ開集合族 $(O(\lambda))_{\lambda\in I}$ は $\lambda, \mu \in I$, $\lambda < \mu$ ならば $\overline{O(\lambda)} \subset O(\mu)$ を満たすことに注意する．

$O = \bigcup\limits_{\lambda\in I} O(\lambda)$ とおき，$f : X \to [0, 1]$ を $f(x) = \begin{cases} \inf\{\lambda \in I \,|\, x \in O(\lambda)\} & x \in O \\ 1 & x \in X - O \end{cases}$ によって定義する．$x \in F_1$ ならば，すべての $\lambda \in I$ に対して $x \in O(\lambda)$ だから $f(x) = 0$ であり，$O \subset X - F_2$ より $F_2 \subset X - O$ となるため $x \in F_2$ ならば，$f(x) = 1$ である．また，$\lambda \in I$ に対し，$x \in O(\lambda)$ ならば $f(x) \leqq \lambda$ であり，$x \in X - O(\lambda)$ ならば $(0, \lambda] \cap \{\mu \in I \,|\, x \in O(\mu)\} = \emptyset$ である．実際，$\nu \in I$ かつ $\nu \leqq \lambda$ ならば $O(\nu) \subset O(\lambda)$ より $x \in X - O(\lambda) \subset X - O(\nu)$ だから $\nu \notin \{\mu \in I \,|\, x \in O(\mu)\}$ である．よって $x \in X - O(\lambda)$ ならば $f(x) \geqq \lambda$ となるため $f(x) < \lambda$ ならば $x \in O(\lambda)$ である．従って $f(x) = 0$ ならば $x \in \bigcap\limits_{\lambda\in I} O(\lambda)$ である．

$p \in X$, $\varepsilon > 0$ を任意にとる．$f(p) = 0$ の場合，$\lambda < \varepsilon$ を満たす $\lambda \in I$ を選ぶと，上で述べたことから $p \in O(\lambda)$ であり，$x \in O(\lambda)$ ならば $|f(x) - f(p)| = f(x) \leqq \lambda < \varepsilon$ となるため，f は p において連続である．$0 < f(p) < 1$ の

場合, $f(p)-\varepsilon<\lambda<\lambda'<f(p)<\mu<f(p)+\varepsilon$, を満たすように $\lambda,\lambda',\mu\in I$ を選ぶと, $f(p)<\mu$ より $p\in O(\mu)$, $f(p)>\lambda'>\lambda$ より $p\in X-O(\lambda')\subset X-\overline{O(\lambda)}$ だから $p\in O(\mu)-\overline{O(\lambda)}$ である. $x\in O(\mu)-\overline{O(\lambda)}$ ならば $f(p)-\varepsilon<\lambda\leqq f(x)\leqq\mu<f(p)+\varepsilon$ となるため $|f(x)-f(p)|<\varepsilon$ である. 故にこの場合も f は p において連続である. $f(p)=1$ の場合, $\lambda'>\lambda>1-\varepsilon$ を満たす $\lambda',\lambda\in I$ を選ぶと, $p\in X-O(\lambda')\subset X-\overline{O(\lambda)}$ である. $x\in X-\overline{O(\lambda)}$ ならば $1\geqq f(x)\geqq\lambda>1-\varepsilon$ だから $|f(x)-f(p)|=1-f(x)<\varepsilon$ となって, このときも f は p において連続である.

(1) $\Rightarrow$ (2); $f(F)\subset[-a,a]$ となる $a>0$ をとり, $H_1=f^{-1}\big([-a,-\frac{a}{3}]\big)$, $K_1=f^{-1}\big([\frac{a}{3},a]\big)$ とおけば, H_1, K_1 は交わらない X の閉集合である. 仮定から連続関数 $g_1:X\to\big[-\frac{a}{3},\frac{a}{3}\big]$ で, $g_1(H_1)=\big\{-\frac{a}{3}\big\}$, $g_1(K_1)=\big\{\frac{a}{3}\big\}$ を満たすものがある. このとき, すべての $x\in F$ に対して $|f(x)-g_1(x)|\leqq\frac{2}{3}a$ が成り立つ.

$f_0=f$ とおき, 帰納的に $i=1,2,\ldots,k$ に対して連続関数

$$f_{i-1}:F\to\big[-\big(\tfrac{2}{3}\big)^{i-1}a,\big(\tfrac{2}{3}\big)^{i-1}a\big],\qquad g_i:X\to\big[-\tfrac{2^{i-1}}{3^i}a,\tfrac{2^{i-1}}{3^i}a\big]$$

が定義され, すべての $x\in F$ に対して $|f_{i-1}(x)-g_i(x)|\leqq\big(\frac{2}{3}\big)^ia$ が成り立つとして関数 $f_k:F\to\big[-\big(\frac{2}{3}\big)^ka,\big(\frac{2}{3}\big)^ka\big]$ を $f_k(x)=f_{k-1}(x)-g_k(x)$ で定める. $H_k=f_k^{-1}\big(\big[-\big(\frac{2}{3}\big)^ka,-\frac{2^k}{3^{k+1}}a\big]\big)$, $K_k=f_k^{-1}\big(\big[\frac{2^k}{3^{k+1}}a,\big(\frac{2}{3}\big)^ka\big]\big)$ とおけば, H_k, K_k は交わらない X の閉集合である. 仮定から連続関数 $g_{k+1}:X\to\big[-\frac{2^k}{3^{k+1}}a,\frac{2^k}{3^{k+1}}a\big]$ で, $g_{k+1}(H_k)=\big\{-\frac{2^k}{3^{k+1}}a\big\}$, $g_{k+1}(K_k)=\big\{\frac{2^k}{3^{k+1}}a\big\}$ を満たすものがある. このとき, すべての $x\in F$ に対して $|f_{k+1}(x)-g_k(x)|\leqq\big(\frac{2}{3}\big)^{k+1}a$ が成り立つ.

従って, 連続関数の列 $\big(f_i:F\to\big[-\big(\frac{2}{3}\big)^ia,\big(\frac{2}{3}\big)^ia\big]\big)_{i\in\boldsymbol{N}\cup\{0\}}$, $\big(g_i:X\to\big[-\frac{2^{i-1}}{3^i}a,\frac{2^{i-1}}{3^i}a\big]\big)_{i\in\boldsymbol{N}}$ で, 任意の $x\in F$ と $i=1,2,\ldots$ に対して $f_i(x)=f_{i-1}(x)-g_i(x)$ を満たすものがとれる. $F_k:F\to[-3a,3a]$, $G_k:X\to[-a,a]$ を $F_k(x)=\sum_{i=0}^{k}f_i(x)$, $G_k(x)=\sum_{i=1}^{k}g_i(x)$ で定めれば, これらは連続関数であり, $k\leqq l$ のとき,

$$|F_l(x)-F_k(x)|\leqq\sum_{i=k+1}^{l}|f_i(x)|\leqq\sum_{i=k+1}^{l}\big(\tfrac{2}{3}\big)^ia<\tfrac{2^{k+1}}{3^k}a,\quad |G_l(x)-G_k(x)|\leqq\sum_{i=k+1}^{l}|g_i(x)|\leqq\sum_{i=k+1}^{l}\tfrac{2^{i-1}}{3^i}a<\tfrac{2^k}{3^k}a$$

が成り立つため, 関数列 $(F_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$, $(G_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ は定理 13.3 の仮定を満たす. 故に定理 13.2, 定理 13.3 により, $(F_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$, $(G_k)_{k\in\boldsymbol{N}}$ はともに連続関数に一様収束する. $\lim\limits_{k\to\infty}F_k=\bar{f}$, $\lim\limits_{k\to\infty}G_k=g$ とおけば, $F_k-f=F_{k-1}-G_k|_F$ が任意の $k=1,2,\ldots$ に対して成り立つことから, $\bar{f}-f=\bar{f}-g|_F$, すなわち $f=g|_F$ が得られる. ここで, 各 G_k が $[-a,a]$ に値をとるため, g も $[-a,a]$ に値をとることにがわかる.

(2) $\Rightarrow$ (3); $\varphi:\boldsymbol{R}\to(-1,1)$ を $\varphi(t)=\frac{2}{\pi}\arctan t$ で定めると, φ は単調増加関数である同相写像である. $\varphi\circ f$ は F で定義された有界な連続関数だから, 仮定により, X で定義された有界な連続関数 h で $h|_F=\varphi\circ f$ を満たすものがある. $H=\{x\in X\,|\,|h(x)|\geqq1\}$ とおくと H は F と交わらない X の閉集合だから, 関数 $\xi:F\cup H\to\boldsymbol{R}$ を $\xi(x)=\begin{cases}0 & x\in H\\ 1 & x\in F\end{cases}$ によって定めれば, ξ は有界な連続関数である. 従って仮定により X で定義された有界な連続関数 ζ で, $\zeta(F)=\{1\}$, $\zeta(H)=\{0\}$ を満たすものがある. さらに関数 $\kappa:\boldsymbol{R}\to[0,1]$ を $\kappa(t)=\begin{cases}0 & t\leqq0\\ t & 0\leqq t\leqq1\\ 1 & t\geqq1\end{cases}$ によって定めて, $\chi:X\to[0,1]$ を $\chi=\kappa\circ\zeta$ で定めれば, χ は連続関数で, $\chi(F)=\{1\}$, $\chi(H)=\{0\}$ を満たす. このとき, $x\in H$ ならば $h(x)\chi(x)=0$ だから, 任意の $x\in X$ に対して $h(x)\chi(x)\in(-1,1)$ であることに注意する. そこで, $g:X\to\boldsymbol{R}$ を $g(x)=\varphi^{-1}(h(x)\chi(x))$ によって定めれば, g は連続で, $x\in F$ ならば $g(x)=\varphi^{-1}(h(x)\chi(x))=\varphi^{-1}(\varphi\circ f(x))=f(x)$ である.

(3) $\Rightarrow$ T_4; F_1, F_2 を交わらない X の閉集合とする. 関数 $\xi:F_1\cup F_2\to\boldsymbol{R}$ を $\xi(x)=\begin{cases}0 & x\in F_1\\ 1 & x\in F_2\end{cases}$ によって定めれば, ξ は連続関数である. 仮定により X で定義された連続関数 ζ で, $\zeta(F_1)=\{0\}$, $\zeta(F_2)=\{1\}$ を満たすものがある. $O_1=\zeta^{-1}\big((-\infty,\frac{1}{2})\big)$, $O_2=\zeta^{-1}\big((\frac{1}{2},+\infty)\big)$ とおけば O_1, O_2 は交わらない開集合で, それぞれ F_1, F_2 を含む.□

上の証明からわかるように, T_4 を満たす位相空間 X の閉集合 F で定義された実数値関数 f が $[-a,a]$ に値をとれば, f の拡張 $g: X \to \boldsymbol{R}$ で $[-a,a]$ に値をとるものが存在する.

系 13.5 局所コンパクト Hausdorff 空間は完全正則である.

証明 X を局所コンパクト Hausdorff 空間として, F を X の閉集合, $p \in X - F$ とする. $X - F$ は x の開近傍だから命題 11.18 により, コンパクトな p の近傍 V で, $X - F$ に含まれるものが存在する. U を p の開近傍で V に含まれるものとすれば, X の部分空間として V は系 12.7 により正規空間である. よって定理 13.4 の (1) から, 連続関数 $f: V \to [0,1]$ で, $f(p) = 1$, $f(V - U) = \{0\}$ を満たすものがある. ここで V, $X - U$ はともに X の閉集合で, $X = V \cup (X - U)$, $V \cap (X - U) = V - U$ だから $g: X \to [0,1]$ を $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in V \\ 0 & x \in X - U \end{cases}$ で定めれば, g は連続関数である. $g(p) = f(p) = 1$ であり, $U \subset V \subset X - F$ だから $F \subset X - U$ となるため g は F の各点で 1 を値にとる. □

14 完全正規空間・完全正則空間

定義 14.1 (1) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ がたかだか可算である基底をもつとき, $(X, \mathcal{O})$ は第 2 可算公理を満たすという.

(2) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次の条件を満たすとき, $(X, \mathcal{O})$ を Lindelöf 空間という.

「$\Gamma \subset \mathcal{O}$ に対し, $X = \bigcup \Gamma$ ならば Γ のたかだか可算な部分集合 Γ' で $X = \bigcup \Gamma'$ となるものがある.」

命題 14.2 (1) 第 2 可算公理を満たす位相空間は Lindelöf 空間である.

(2) T_3 分離公理を満たす Lindelöf 空間は T_4 分離公理を満たす.

証明 (1) 位相空間 X は第 2 可算公理を満たすとし, $\{O_i | i = 1, 2, \dots\}$ を可算個の開集合からなる X の基底とする. Γ を X の開被覆とすれば, 任意の $x \in X$ に対し, $x \in U$ を満たす $U \in \Gamma$ があるため, $x \in O_{i_x} \subset U$ を満たす正の整数 i_x が存在する. $S = \{i_x | x \in X\}$ とおけば, S はたかだか可算な集合で, 各 $i \in S$ に対して $O_i \subset U_i$ が存在して, $X = \bigcup_{i \in S} O_i$ だから $X = \bigcup_{i \in S} U_i$ である. 従って は Lindelöf 空間である.

(2) T_3 分離公理を満たす Lindelöf 空間 X の交わらない閉集合 F, H が与えられたとする. $x \in F$ に対し, $X - H$ は x の開近傍だから命題 12.5 の (4) から x の開近傍 U_x で, $\overline{U}_x \subset X - H$ となるものがある. $X - F$ は開集合で $F \subset \bigcup_{x \in F} U_x$ より $X = (X - F) \cup \left(\bigcup_{x \in F} U_x \right)$ である. X は Lindelöf 空間だから $X = (X - F) \cup \left(\bigcup_{i \geqq 1} U_{x_i} \right)$ となる $x_1, x_2, \dots \in F$ がある. このとき $F \subset \bigcup_{i \geqq 1} U_{x_i}$ である. 同様に $H \subset \bigcup_{i \geqq 1} V_{y_i}$ となる $y_1, y_2, \dots \in H$ がある.

$$U = U_{x_1} \cup \left(\bigcup_{i \geqq 2} \left(U_{x_i} - \bigcup_{j=1}^{i-1} \overline{V}_{y_j} \right) \right), \qquad V = \bigcup_{i \geqq 1} \left(V_{y_i} - \bigcup_{j=1}^{i} \overline{U}_{x_j} \right)$$

とおくと, これらは開集合で $F \cap \overline{V}_y = H \cap \overline{U}_x = \emptyset$ だから $F \subset U$, $H \subset V$ である. $x \in U \cap V$ ならば $x \in V$ より $x \in V_{y_i} - \bigcup_{j=1}^{i} \overline{U}_{x_j}$ となる i がある. $x \in U$ でもあるから $x \in U_{x_k} - \bigcup_{j=1}^{k-1} \overline{V}_{y_j}$ を満たす $k > i$ があるが, このとき $x \notin \overline{V}_{y_i}$ となるため矛盾が生じる. 従って $U \cap V = \emptyset$ である. □

命題 14.3 X を位相空間とする.

(1) X の交わらないゼロ集合 F, H に対し, 連続関数 $f: X \to [0,1]$ で, $F = f^{-1}(0)$, $H = f^{-1}(1)$ を満たすものがある.

(2) X のゼロ集合は, たかだか可算個の開集合の共通部分である. また X が T_4 分離公理を満たせば, X の可算個の開集合の共通部分になっている閉集合はゼロ集合である.

(3) X が T_6 分離公理を満たすためには X の閉集合がすべてゼロ集合であることが必要十分である.

(4) T_6 分離公理を満たす位相空間 X の任意の部分空間は T_6 分離公理を満たす.

証明 (1) 連続関数 $g, h : X \to \boldsymbol{R}$ で $g^{-1}(0) = F$, $h^{-1}(0) = H$ を満たすものがある. $\bar{g}, \bar{h} : X \to [0, 1)$ を $\bar{g}(x) = \frac{|g(x)|}{|g(x)|+1}$, $\bar{h}(x) = \frac{|h(x)|}{|h(x)|+1}$ で定めれば, これらは連続関数であり, $F = \bar{g}^{-1}(0)$, $H = \bar{h}^{-1}(0)$ が成り立つ. F と H は交わらないので, $\bar{g}(x) = \bar{h}(x) = 0$ を満たす $x \in X$ は存在しないことに注意して, $f : X \to [0, 1]$ を $f(x) = \frac{\bar{g}(x)}{\bar{g}(x)+\bar{h}(x)}$ によって定義すれば, f は連続で, $F = f^{-1}(0)$, $H = f^{-1}(1)$ が成り立つ.

(2) F を X のゼロ集合とすれば, 連続関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ で $F = f^{-1}(0)$ を満たすものがある. 正の整数 n に対し, $O_n = f^{-1}\left(\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right)$ とおくと O_n は F を含む X の開集合で, $\bigcap_{n \geqq 1} O_n = f^{-1}\left(\bigcap_{n \geqq 1} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right) = f^{-1}(0) = F$ である.

(3) X が T_6 分離公理を満たすとして, F を X の任意の閉集合とする. 仮定から $F = \bigcap_{n \geqq 1} U_n$ を満たす開集合 $U_1, U_2, \ldots$ がある. $X - U_n$ と F は交わらない閉集合だから定理 13.4 の (1) により, 連続関数 $f_n : X \to [0, 1]$ で $f_n(F) = \{0\}$, $f_n(X - U_n) = \{1\}$ を満たすものがある. 正の整数 k に対して $F_k : X \to [0, 1]$ を $F_k(x) = \sum_{n=1}^{k} 2^{-n} f_n(x)$ により定義すれば, 関数列 $(F_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ は定理 13.3 の仮定を満たすため, 定理 13.2, 定理 13.3 により連続関数に一様収束する. $f = \lim_{k \to \infty} F_k$ とおくと, 各 $x \in X$ に対し $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_n(x)$ だから $f^{-1}(0) = \bigcap_{n \geqq 1} f_n^{-1}(0) \supset F$ である. $x \in X - F = \bigcup_{n \geqq 1} (X - U_n)$ だから $x \in X - U_n$ を満たす n がある. このとき, $f_n(x) = 1$ だから $f(x) \geqq 2^{-n} > 0$ である. 故に $x \in f^{-1}(0)$ ならば $x \in F$ となり, $f^{-1}(0) = F$ である.

X の閉集合がすべてゼロ集合ならば (1) と定理 13.4 により, X は T_4 分離公理を満たす. さらに (2) によって, X の閉集合は, たかだか可算個の開集合の共通部分である.

(4) Y を X の部分空間として, A を Y の任意の閉集合とする. このとき, X の閉集合 F で $A = F \cap Y$ を満たすものがある. (3) により F はゼロ集合だから, 連続関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ で $F = f^{-1}(0)$ を満たすものがある. f の Y への制限 $f|_Y : Y \to \boldsymbol{R}$ を考えると $(f|_Y)^{-1}(0) = f^{-1}(0) \cap Y = A$ だから A は Y のゼロ集合である. 従って (3) により Y も T_6 分離公理を満たす. □

命題 14.4 距離空間は完全正規空間である.

証明 A を距離空間 (X, d) の閉集合とすれば, 命題 11.22 から $A = \overline{A} = d_A^{-1}(0)$ となるため, A はゼロ集合である. よって命題 14.3 の (3) により, X は T_6 分離公理を満たす. □

命題 14.5 (1) $T_6 \Rightarrow T_5$, $CT_3 \Rightarrow T_3$, 正規空間 $\Rightarrow$ 完全正則空間 $\Rightarrow$ 正則空間 $\Rightarrow$ Hausdorff 空間.

(2) T_0, T_1, WT_2, T_2, T_3, CT_3 を満たす位相空間の任意の部分空間も, それぞれ T_0, T_1, WT_2, T_2, T_3, CT_3 を満たす.

(3) T_0, T_1, WT_2, T_2, T_3, CT_3 を満たす位相空間族の直積空間も, それぞれ T_0, T_1, WT_2, T_2, T_3, CT_3 を満たす.

証明 (1) $T_6 \Rightarrow T_5$; 位相空間 X は T_6 分離公理を満たすとする. 命題 14.3 の (3) により, X の閉集合はすべてゼロ集合だから, 命題 14.3 の (1) と定理 13.4 により X は T_4 分離公理を満たす. 命題 14.3 の (4) により X の任意の部分空間 Y は T_6 分離公理を満たすため, Y も T_4 分離公理を満たす. 従って X は T_6 分離公理を満たす.

$CT_3 \Rightarrow T_3$; X の任意の閉集合 F と $x \in X - F$ に対し, 連続関数 $f : X \to [0, 1]$ で, $f(x) = 1$, $f(F) = \{0\}$ となるものが存在する. $U = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$, $O = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$ とおけば, これらは交わらない開集合であり, U は x の開近傍であり, O は F を含む.

正規空間 $\Rightarrow$ 完全正則空間; X の任意の閉集合 F と $x \in X - F$ に対し, 命題 12.5 の (3) により $\{x\}$ と F は交わらない閉集合だから定理 13.4 により, 連続関数 $f : X \to [0, 1]$ で, $f(x) = 1$, $f(F) = \{0\}$ となるものが存在する.

完全正則空間 $\Rightarrow$ 正則空間; 上で $CT_3 \Rightarrow T_3$ を示したため, 定義から明らかである.

正則空間 $\Rightarrow$ Hausdorff 空間; 正則空間の 1 点からなる部分集合は命題 12.5 の (2) によって閉集合だから, 正則空間

は Hausdorff 空間である.

(2) X を位相空間, Y を X の部分空間とする.

Y の異なる 2 点 x, y に対し, x の X における近傍で U で y を含まないものがあるとき, $U\cap Y$ は Y における x の近傍で y を含まないため, X が T_0 を満たせば Y も T_0 を満たし, X が T_1 を満たせば Y も T_1 を満たす. x の X における近傍 U と y の X における近傍 V で $U\cap V=\emptyset$ となるものが存在すれば, $U\cap Y$ は Y における x の近傍, $V\cap Y$ は Y における y の近傍で, これらは交わらないため, X が T_2 を満たせば Y も T_2 を満たす.

Y の閉集合 F で x 含まないものが与えられたとき, X の閉集合 H で, $F=H\cap Y$ を満たすものをとると, H は x を含まない. X が T_3 を満たせば, x の X における近傍 U と H を含む X の開集合 O で, $U\cap O=\emptyset$ となるものが存在する. このとき, $U\cap H$ は Y における x の近傍, $O\cup Y$ は F を含む Y の開集合で, これらは交わらないため, Y も T_3 を満たす. X が CT_3 を満たせば, 連続関数 $f:X\to[0,1]$ で, $f(x)=1$, $f(H)=\{0\}$ となるものが存在する. このとき, f の Y への制限 $f|_Y:Y\to[0,1]$ は $f|_Y(x)=1$, $f|_Y(H)=\{0\}$ を満たすため, Y も CT_3 を満たす.

X が WT_2 を満たすとして C を Y の任意のコンパクト集合とすれば C は X のコンパクト集合でもあるから C は Hausdorff 空間である. 従って Y も WT_2 を満たす.

(3) $(X_i)_{i\in I}$ を位相空間族, $p_j:\prod\limits_{i\in I}X_i\to X_j$ を射影とする.

$\prod\limits_{i\in I}X_i$ の異なる 2 点 x, y に対し, $p_j(x)\neq p_j(y)$ を満たす $j\in I$ がある. X_j における $p_j(x)$ の近傍で U で $p_j(y)$ を含まないものがあるとき, $p_j^{-1}(U)$ は $\prod\limits_{i\in I}X_i$ における x の近傍で y を含まないため, 各 X_i が T_0 を満たせば $\prod\limits_{i\in I}X_i$ も T_0 を満たし, 各 X_i が T_1 を満たせば $\prod\limits_{i\in I}X_i$ も T_1 を満たす. X_j における $p_j(x)$ の近傍 U と X における $p_j(y)$ の近傍 V で $U\cap V=\emptyset$ となるものが存在すれば, $p_j^{-1}(U)$ は $\prod\limits_{i\in I}X_i$ における x の近傍, $p_j^{-1}(U)$ は $\prod\limits_{i\in I}X_i$ における y の近傍で, これらは交わらないため, 各 X_i が T_2 を満たせば $\prod\limits_{i\in I}X_i$ も T_2 を満たす.

$\prod\limits_{i\in I}X_i$ の閉集合 F で x 含まないものが与えられたとき, $i_1,i_2,\dots,i_k\in I$ と X_{i_s} の開集合 O_s $(s=1,2,\dots,k)$ で, $\bigcap\limits_{s=1}^{k}p_{i_s}^{-1}(O_s)$ が F と交わらない x の近傍になるものがある.

各 X_i が T_3 を満たせば, O_s は $p_{i_s}(x)$ の近傍だから, $p_{i_s}(x)$ の近傍 V_s で, $\overline{V_s}\subset O_s$ となるものが存在する. このとき, $\bigcap\limits_{s=1}^{k}p_{i_s}^{-1}(\overline{V_s})\subset\bigcap\limits_{s=1}^{k}p_{i_s}^{-1}(O_s)$ だから $\prod\limits_{i\in I}X_i-\bigcap\limits_{s=1}^{k}p_{i_s}^{-1}(\overline{V_s})$ は F を含む開集合で x の近傍 $\bigcap\limits_{s=1}^{k}p_{i_s}^{-1}(V_s)$ と交わらない. 従って, $\prod\limits_{i\in I}X_i$ も T_3 を満たす.

$s=1,2,\dots,k$ に対し, $X_{i_s}-O_s$ は $p_{i_s}(x)$ を含まない X_{i_s} の閉集合だから, 各 X_i が CT_3 を満たせば, 連続関数 $f_s:X_{i_s}\to[0,1]$ で, $f_s(p_{i_s}(x))=1$, $f_s(X_{i_s}-O_s)=\{0\}$ となるものが存在する. $f:\prod\limits_{i\in I}X_i\to[0,1]$ を $f(x)=f_1(p_{i_1}(x))f_2(p_{i_2}(x))\cdots f_k(p_{i_k}(x))$ で定めれば f は連続で $f(x)=1$ を満たす. また, $x\in F$ ならば $F\subset\prod\limits_{i\in I}X_i-\bigcap\limits_{s=1}^{k}p_{i_s}^{-1}(O_s)=\bigcup\limits_{s=1}^{k}\Bigl(\prod\limits_{i\in I}X_i-p_{i_s}^{-1}(O_s)\Bigr)$ だから $p_{i_s}(x)\in X_{i_s}-O_s$ を満たす s がある. よって $f(x)=0$ となり, $f(F)=\{0\}$ である. 従って, $\prod\limits_{i\in I}X_i$ も CT_3 を満たす.

各 X_i が WT_2 を満たすとして C を $\prod\limits_{i\in I}X_i$ の任意のコンパクト集合とすれば, 任意の $i\in I$ に対し $p_i(C)$ は X_i のコンパクト集合だから, Hausdorff 空間である. 従って上で示したことにより $\prod\limits_{i\in I}p_i(C)=\bigcap\limits_{i\in I}p_i^{-1}(p_i(C))$ は C を含む Hausdorff 空間である. よって, (2) により C も Hausdorff 空間である. 故に $\prod\limits_{i\in I}X_i$ も WT_2 を満たす. □

補題 14.6 X を位相空間, M を X を定義域にもつ連続写像 $f:X\to Y_f$ の集合とし, $g\in M$ に対し $p_g:\prod\limits_{f\in M}Y_f\to Y_g$ を射影とする. $e:X\to\prod\limits_{f\in M}Y_f$ を $p_g(e(x))=g(x)$ で定める.

(1) e は連続写像で, e が単射であることと, M が条件「x, y が X の相異なる点ならば $f(x)\neq f(y)$ を満たす $f\in M$ が存在する.」が成り立つことは同値である.

(2) X の任意の閉集合 F と任意の $x\in X-F$ に対し, $f(x)\notin\overline{f(F)}$ となる $f\in M$ が存在すれば, e は $\prod\limits_{f\in M}Y_f$

の部分空間 $e(X)$ の上への開写像である.

証明 (1) まず $g \in M$ に対し $p_g \circ e = g$ が成り立つことに注意する. $f_1, f_2, \ldots, f_n \in M$ とし, $s = 1, 2, \ldots, n$ に対して O_s を Y_{f_s} の開集合とする.

$$e^{-1}\Big(\bigcap_{s=1}^{n} p_{f_s}^{-1}(O_s)\Big) = \bigcap_{s=1}^{n} e^{-1}(p_{f_s}^{-1}(O_s)) = \bigcap_{s=1}^{n} (p_{f_s} \circ e)^{-1}(O_s) = \bigcap_{s=1}^{n} f_s^{-1}(O_s)$$

より $e^{-1}\Big(\bigcap_{s=1}^{n} p_{f_s}^{-1}(O_s)\Big)$ は X の開集合になるため, e は連続である. $x, y \in X$ に対し, $e(x) = e(y)$ であるためには, すべての $f \in M$ に対して $f(x) = p_f(e(x)) = p_f(e(y)) = f(y)$ が成り立つことが必要十分である. 従って e が単射で, $x \neq y$ ならば $e(x) \neq e(y)$ だから $f(x) \neq f(y)$ を満たす $f \in M$ がある. 逆に $x \neq y$ ならば $f(x) \neq f(y)$ を満たす $f \in M$ があるとき, e の定義から $x \neq y$ ならば $e(x) \neq e(y)$ となるため e は単射である.

(2) O を X の開集合とする. 任意の $a \in e(O)$ に対し $a = e(x)$ を満たす $x \in O$ が存在し, 仮定から $f(x) \notin \overline{f(X - O)}$ となる $f \in M$ がある. $p_f(a) = p_f(e(x)) = f(x) \in Y_f - \overline{f(X - O)}$ だから $U = p_f^{-1}\big(Y_f - \overline{f(X - O)}\big)$ とおけば U は a の開近傍である. 任意の $y \in e^{-1}(U)$ に対し, $f(y) = p_f(e(y)) \in Y_f - \overline{f(X - O)}$ だから次の関係式が成り立つ.

$$y \in f^{-1}\big(Y_f - \overline{f(X - O)}\big) = X - f^{-1}\big(\overline{f(X - O)}\big) \subset X - f^{-1}(f(X - O))) \subset X - (X - O) = O \subset e^{-1}(e(O))$$

故に $e^{-1}(U) \subset e^{-1}(e(O))$ だから $e(X) \cap U = e(X \cap e^{-1}(U)) = e(e^{-1}(U)) \subset e(e^{-1}(e(O))) \subset e(O)$ が得られる. $e(X) \cap U$ は $\prod_{f \in M} Y_f$ の部分空間 $e(X)$ における a の開近傍で, $e(O)$ に含まれるため, a は $e(X)$ において $e(O)$ の内点である. 従って $e(O)$ は $e(X)$ の開集合である. □

定理 14.7 X を完全正則空間, $M_X = \{f : X \to [0, 1] | f$ は連続関数 $\}$ とし, 各 $f \in M_X$ に対し, $I_f = [0, 1]$ とおく. 補題 14.6 と同様に写像 $e_X : X \to \prod_{f \in M_X} I_f$ を定義すれば, e_X は $e_X(X)$ の上への同相写像である. 従って, 完全正則空間は区間 $[0, 1]$ の直積空間のある部分空間と同相である.

証明 X の任意の閉集合 F と任意の $x \in X - F$ に対し, $f(x) = 1$, $f(F) = \{0\}$ を満たす連続関数 $f : X \to [0, 1]$ が存在するため補題 14.6 の (2) より e_X は部分空間 $e_X(X)$ の上への開写像であり, F が一点からなる集合の場合を考えれば, 補題 14.6 の (1) より e は単射である. 故に e_X は $e_X(X)$ の上への同相写像である. □

命題 14.8 X を完全正則空間, $e_X : X \to \prod_{f \in M} I_f$ を定理 14.7 と同じ写像とする. コンパクト Hausdorff 空間 Y と連続写像 $\varphi : X \to Y$ が与えられたとき, 連続写像 $\psi : \overline{e_X(X)} \to Y$ で $\varphi = \psi \circ e_X$ を満たすものがただ 1 つ存在して $\overline{\varphi(X)} = \psi(\overline{e_X(X)})$ が成り立つ.

証明 Y に対しても定理 14.7 と同様の写像 $e_Y : Y \to \prod_{g \in M_Y} I_g$ を考えると, 系 12.7, 命題 14.5 によりコンパクト Hausdorff 空間は完全正則空間であるため, $\tilde{e}_Y : Y \to e_Y(Y)$ を $\tilde{e}_Y(y) = e_Y(y)$ で与えられる写像とすれば, 定理 14.7 によって $\tilde{e}_Y$ は同相写像である. Y はコンパクトだから $e_Y(Y)$ もコンパクトで, Hausdorff 空間 $\prod_{g \in M_Y} I_g$ の部分集合だから命題 11.28 の (1) により閉集合である. 故に, e_Y は閉集合の上への同相写像だから Y の任意の部分集合 Z に対して $e_Y(\overline{Z}) = \overline{e_Y(Z)}$ が成り立つことに注意する.

$\varphi^{**} : \prod_{f \in M_X} I_f \to \prod_{g \in M_Y} I_g$ を $p_g(\varphi^{**}(\alpha)) = p_{g \circ \varphi}(\alpha)$ で定めれば, φ^{**} は連続で, 任意の $x \in X$ と $g \in M_Y$ に対して, $p_g((\varphi^{**} \circ e_X)(x)) = p_{g \circ \varphi}(e_X(x)) = g \circ \varphi(x) = g(\varphi(x)) = p_g(e_Y(\varphi(x))) = p_g(e_Y \circ \varphi(x))$ だから $\varphi^{**} \circ e_X = e_Y \circ \varphi$ が成り立つ. 従って $\varphi^{**}(\overline{e_X(X)}) \subset \overline{\varphi^{**}(e_X(X))} = \overline{e_Y(\varphi(X))} \subset \overline{e_Y(Y)} = e_Y(Y)$ となるため, $\psi : \overline{e_X(X)} \to Y$ を $\psi(\alpha) = \tilde{e}_Y^{-1}(\varphi^{**}(\alpha))$ によって定めることができる. このとき $x \in X$ に対し $\psi \circ e_X(x) = \tilde{e}_Y^{-1}(\varphi^{**}(e_X(x))) = \tilde{e}_Y^{-1}(e_Y(\varphi(x))) = \varphi(x)$ だから $\varphi = \psi \circ e_X$ である. $\psi' : \overline{e_X(X)} \to Y$ も $\varphi = \psi' \circ e_X$ を満たす連続写像とすれば, 任意の $x \in X$ に対して $\psi'(e_X(x)) = \varphi(x) = \psi(e(x))$ だから ψ' と ψ を

$e_X(X)$ に制限した写像は一致する．$e_X(X)$ は $\overline{e_X(X)}$ で稠密だから命題 11.27 の (2) により $\psi' = \psi$ である．

$\varphi = \psi \circ e_X$ より $\overline{\varphi(X)} = \overline{\psi(e_X(X))} \supset \psi(\overline{e_X(X)})$ である．一方 $\overline{e_X(X)}$ はコンパクト空間 $\prod_{f \in M} I_f$ の閉集合だからコンパクトであり，$\psi(\overline{e_X(X)})$ は Hausdorff 空間 Y のコンパクト集合だから，閉集合である．従って $\psi(e_X(X)) \subset \psi(\overline{e_X(X)})$ より $\overline{\varphi(X)} = \overline{\psi(e_X(X))} \subset \psi(\overline{e_X(X)})$ が得られる．故に $\overline{\varphi(X)} = \psi(\overline{e_X(X)})$ が成り立つ．□

注意 14.9 (1) コンパクト Hausdorff 空間の任意の部分空間は完全正則空間だから，定理 14.7 の後半の主張の逆も成り立つ．

(2) $\overline{e(X)}$ はコンパクトで，これを X の Stone-Čech コンパクト化といい，命題 14.8 の意味で，X の「極大な」コンパクト化である．

15 写像空間

記法 15.1 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ に対して X から Y への連続写像全体からなる集合を $\mathrm{Map}(X, Y)$ で表す．X の部分集合 C と Y の部分集合 O に対し，$W(C, O)$ を $f(C) \subset O$ を満たす連続写像 $f : X \to Y$ 全体からなる $\mathrm{Map}(X, Y)$ の部分集合とする．

このとき，次の結果は容易に確かめられる．

補題 15.2 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．

(1) $C \subset D \subset X$, $U \subset V \subset Y$ ならば $W(C, U) \supset W(D, U)$, $W(C, U) \subset W(C, V)$ が成り立つ．

(2) C を X の部分空間，$(O_i)_{i \in I}$ を Y の部分集合族とすれば，

$$W\left(C, \bigcap_{i \in I} O_i\right) = \bigcap_{i \in I} W(C, O_i), \qquad W\left(C, \bigcup_{i \in I} O_i\right) \supset \bigcup_{i \in I} W(C, O_i).$$

(3) O を Y の部分空間，$(C_i)_{i \in I}$ を X の部分集合族とすれば，

$$W\left(\bigcap_{i \in I} C_i, O\right) \supset \bigcup_{i \in I} W(C_i, O), \qquad W\left(\bigcup_{i \in I} C_i, O\right) = \bigcap_{i \in I} W(C_i, O).$$

定義 15.3 $\mathrm{Map}(X, Y)$ には $\{W(C, O) | C$ は X の コンパクト集合，O は Y の 開集合 $\}$ で生成される位相を与える．この $\mathrm{Map}(X, Y)$ の位相をコンパクト開位相 (CO-位相) という．

補題 15.4 $x \in X$ に対し $e_x : \mathrm{Map}(X, Y) \to Y$ を $e_x(f) = f(x)$ で定めれば，e_x は連続である．

証明 $f \in \mathrm{Map}(X, Y)$ と $e_x(f) = f(x)$ を含む Y の開集合 O に対し，$\{x\}$ は X のコンパクト集合だから $W(\{x\}, O)$ は f の開近傍である．このとき $e_x(W(\{x\}, O)) \subset O$ だから e_x は f において連続である．□

補題 15.5 Y が弱 Hausdorff 空間ならば $\mathrm{Map}(X, Y)$ も弱 Hausdorff 空間である．

証明 C を $\mathrm{Map}(X, Y)$ の任意のコンパクト集合とし，$f, g \in C$ は異なる写像とすれば $f(x) \neq g(x)$ となる $c \in X$ がある．補題 15.4 により $e_x(C)$ は Y のコンパクト集合で，$f(x), g(x) \in e_x(C)$ である．仮定から $f(x)$, $g(x)$ の開近傍 U, V で $U \cap V \cap e_x(C) = \emptyset$ となるものがある．このとき $W(\{x\}, U)$, $W(\{x\}, V)$ はそれぞれ f, g の近傍であり，$W(\{x\}, U) \cap W(\{x\}, V) \cap C = \emptyset$ が成り立つ．実際 $h \in W(\{x\}, U) \cap W(\{x\}, V) \cap C$ が存在すれば $h(x) \in U \cap V \cap e_x(C)$ となって，U, V の選び方に矛盾する．□

補題 15.6 Z, X, Y を位相空間，$f : X \to Y$ を連続写像とする．$f_*(\varphi) = f \circ \varphi$, $f^*(\psi) = \psi \circ f$ によって写像

$$f_* : \mathrm{Map}(Z, X) \to \mathrm{Map}(Z, Y), \qquad f^* : \mathrm{Map}(Y, Z) \to \mathrm{Map}(X, Z)$$

を定義すれば，これらは連続写像である．

証明 C を Z のコンパクト部分集合, O を Y の開集合とすれば,

$$(f_*)^{-1}(W(C,O))=\{g\in \mathrm{Map}(Z,X)|\, f(g(C))\subset O\}=\{\varphi\in \mathrm{Map}(Z,X)|\,\varphi(C)\subset f^{-1}(O)\}=W(C,f^{-1}(O))$$

である. f の連続性により $f^{-1}(O)$ は X の開集合だから $W(C,f^{-1}(O))$ は $\mathrm{Map}(Z,X)$ の開集合であり, f_* の連続性がわかる.

C を X のコンパクト部分集合, O を Z の開集合とすれば,

$$(f^*)^{-1}(W(C,O))=\{\psi\in \mathrm{Map}(Z,X)|\,\psi(f(C))\subset O\}=W(f(C),O)$$

である. f の連続性により $f(C)$ は Y のコンパクト部分集合だから $W(f(C),O)$ は $\mathrm{Map}(Y,Z)$ の開集合であり, f^* の連続性がわかる. □

注意 15.7 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ を連続写像とするとき, 写像 $f_*:\mathrm{Map}(V,X)\to \mathrm{Map}(V,Y)$ と $g_*:\mathrm{Map}(V,Y)\to \mathrm{Map}(V,Z)$ の合成写像は $(g\circ f)_*:\mathrm{Map}(V,X)\to \mathrm{Map}(V,Z)$ に一致し, 写像 $g^*:\mathrm{Map}(Z,V)\to \mathrm{Map}(Y,V)$ と $f^*:\mathrm{Map}(Y,V)\to \mathrm{Map}(X,V)$ の合成写像は $(g\circ f)^*:\mathrm{Map}(Z,V)\to \mathrm{Map}(X,V)$ に一致する.

補題 15.8 X, Y を位相空間とし, Y の準基底 $\mathcal{B}$ に対し, $\mathcal{W}=\{W(C,O)|\,C$ は X のコンパクト部分集合, $O\in\mathcal{B}\}$ とおく. このとき, X が弱 Hausdorff 空間ならば $\mathcal{W}$ は $\mathrm{Map}(X,Y)$ のコンパクト開位相の準基底である.

証明 C を X のコンパクト集合, O を Y の開集合として, $f\in W(C,O)$ を任意にとる. 各 $x\in C$ に対し, $f(x)\in\bigcap_{i=1}^{n_x}U_i(x)\subset O$ を満たす $U_1(x),U_2(x),\dots,U_{n_x}(x)\in\mathcal{B}$ が存在する. C はコンパクト Hausdorff 空間だから, 系 12.7 により正規空間であるため, $x\in V(x)\subset\overline{V(x)}\subset f^{-1}\Bigl(\bigcap_{i=1}^{n_x}U_i(x)\Bigr)\cap C$ を満たす C の開集合 $V(x)$ が存在する. C のコンパクト性から, $x_1,x_2,\dots,x_m\in C$ で $C=\bigcup_{j=1}^{m}V(x_j)$ を満たすものがある. $\overline{V(x_j)}$ はコンパクト集合 C の閉集合だからコンパクト集合であり, $f\bigl(\overline{V(x_j)}\bigr)\subset\bigcap_{i=1}^{n_{x_j}}U_i(x_j)$ が $j=1,2,\dots,m$ に対して成り立つことから, $f\in\bigcap_{j=1}^{m}W\Bigl(\overline{V(x_j)},\bigcap_{i=1}^{n_{x_j}}U_i(x_j)\Bigr)$ である. 一方, 補題 15.2 から

$$\bigcap_{j=1}^{m}\bigcap_{i=1}^{n_{x_j}}W\bigl(\overline{V(x_j)},U_i(x_j)\bigr)=\bigcap_{j=1}^{m}W\Bigl(\overline{V(x_j)},\bigcap_{i=1}^{n_{x_j}}U_i(x_j)\Bigr)\subset\bigcap_{j=1}^{m}W\bigl(\overline{V(x_j)},O\bigr)=W\Bigl(\bigcup_{j=1}^{m}\overline{V(x_j)},O\Bigr)=W(C,O)$$

となるため, 結果が得られる. □

写像 $\eta_{X,Y}:X\to \mathrm{Map}(Y,X\times Y)$ を $(\eta_{X,Y}(x))(y)=(x,y)$ $(x\in X,\ y\in Y)$ によって定める.

補題 15.9 $\eta_{X,Y}:X\to \mathrm{Map}(Y,X\times Y)$ は連続である.

証明 C を Y のコンパクトな部分集合, O を $X\times Y$ の開集合とすれば, 次の等式が成り立つ.

$$\eta_{X,Y}^{-1}(W(C,O))=\{x\in X|\,(\eta_{X,Y}(x))(C)\subset O\}=\{x\in X|\,\{x\}\times C\subset O\}$$

O は $X\times Y$ の開集合だから, 各 $y\in C$ に対し, y の開近傍 V_y と x の開近傍 U_y で $U_y\times V_y\subset O$ を満たすものがある. このとき $C\subset\bigcup_{i\in Y}V_y$ だから C のコンパクト性により, $y_1,y_2,\dots,y_n$ で $C\subset\bigcup_{i=1}^{n}V_{y_i}$ を満たすものがある. そこで $U=\bigcap_{i=1}^{n}U_{y_i}$ とおけば U は x の開近傍で, $U\times V_{y_i}\subset O$ が $i=1,2,\dots,n$ に対して成り立つため $U\times C\subset U\times\bigcup_{i=1}^{n}V_{y_i}\subset O$ である. 故に $U\subset\eta_{X,Y}^{-1}(W(C,O))$ となるため, $\eta_{X,Y}^{-1}(W(C,O))$ は X の開集合である. □

写像 $\varepsilon_{X,Y}:\mathrm{Map}(X,Y)\times X\to Y$ を $\varepsilon_{X,Y}(f,x)=f(x)$ $(f\in \mathrm{Map}(X,Y),\ x\in X)$ で定義する.

補題 15.10　X, Y, Z を位相空間, $f: X \to Z$, $g: Y \to Z$ を連続写像とする.

(1) 合成写像 $X \xrightarrow{\eta_{X,Y}} \mathrm{Map}(Y, X \times Y) \xrightarrow{(f \times id_Y)_*} \mathrm{Map}(Y, Z \times Y)$ と $X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{\eta_{Z,Y}} \mathrm{Map}(Y, Z \times Y)$ は一致する.

(2) 合成写像 $\mathrm{Map}(X, Y) \times X \xrightarrow{g_* \times id_X} \mathrm{Map}(X, Z) \times X \xrightarrow{\varepsilon_{X,Z}} Z$ と $\mathrm{Map}(X, Y) \times X \xrightarrow{\varepsilon_{X,Y}} Y \xrightarrow{g} Z$ は一致する.

証明　(1) 任意の $x \in X$ と $y \in Y$ に対し, 次の等式が成り立つ.

$$(((f \times id_Y)_* \circ \eta_{X,Y})(x))(y) = ((f \times id_Y) \circ \eta_{X,Y}(x))(y) = (f \times id_Y)(x, y) = (f(x), y) = (\eta_{Z,Y}(f(x)))(y)$$

故に $((f \times id_Y)_* \circ \eta_{X,Y})(x) = \eta_{Z,Y}(f(x)) = (\eta_{Z,Y} \circ f)(x)$ だから, $(f \times id_Y)_* \circ \eta_{X,Y} = \eta_{Z,Y} \circ f$ である.

(2) 任意の $\varphi \in \mathrm{Map}(X, Y)$ と $x \in X$ に対し, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{X,Z} \circ (g_* \times id_X))(\varphi, x) &= \varepsilon_{X,Z}((g_* \times id_X)(\varphi, x)) = \varepsilon_{X,Z}(g \circ \varphi, x) = (g \circ \varphi)(x) = g(\varphi(x)) \\ &= g(\varepsilon_{X,Y}(\varphi, x)) = (g \circ \varepsilon_{X,Y})(\varphi, x)\end{aligned}$$

故に $\varepsilon_{X,Z} \circ (g_* \times id_X) = g \circ \varepsilon_{X,Y}$ である. □

命題 15.11　合成写像 $X \times Y \xrightarrow{\eta_{X,Y} \times id_Y} \mathrm{Map}(Y, X \times Y) \times Y \xrightarrow{\varepsilon_{Y,X \times Y}} X \times Y$ は $X \times Y$ の恒等写像である. $\varepsilon_{X,Y}$ が連続ならば, 合成写像 $\mathrm{Map}(X, Y) \xrightarrow{\eta_{\mathrm{Map}(X,Y),X}} \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(X, Y) \times X) \xrightarrow{(\varepsilon_{X,Y})_*} \mathrm{Map}(X, Y)$ は $\mathrm{Map}(X, Y)$ の恒等写像である.

証明　任意の $(x, y) \in X \times Y$, $f \in \mathrm{Map}(X, Y)$ に対し,

$$(\varepsilon_{Y,X \times Y} \circ (\eta_{X,Y} \times id_Y))(x, y) = \varepsilon_{Y,X \times Y}(\eta_{X,Y}(x), y) = (\eta_{X,Y}(x))(y) = (x, y)$$
$$(((\varepsilon_{X,Y})_* \circ \eta_{\mathrm{Map}(X,Y),X})(f))(x) = (\varepsilon_{X,Y} \circ \eta_{\mathrm{Map}(X,Y),X}(f))(x) = \varepsilon_{X,Y}(\eta_{\mathrm{Map}(X,Y),X}(f)(x)) = \varepsilon_{X,Y}(f, x) = f(x)$$

が成り立つため, 主張が成り立つ. □

補題 15.6 と補題 15.9 から, 各 $f \in \mathrm{Map}(X \times Y, Z)$ に対し, 次の合成写像は連続である.

$$X \xrightarrow{\eta_{X,Y}} \mathrm{Map}(Y, X \times Y) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Map}(Y, Z)$$

従って, 写像 $\Phi_{X,Y,Z}: \mathrm{Map}(X \times Y, Z) \to \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z))$ を $\Phi_{X,Y,Z}(f) = f_* \circ \eta_{X,Y}$ で定義することができる.

$\varepsilon_{Y,Z}$ が連続であるとき, 各 $f \in \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z))$ に対して, 次の合成写像は連続である.

$$X \times Y \xrightarrow{f \times id_Y} \mathrm{Map}(Y, Z) \times Y \xrightarrow{\varepsilon_{Y,Z}} Z$$

従って, 写像 $\Psi_{X,Y,Z}: \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z)) \to \mathrm{Map}(X \times Y, Z)$ を $\Psi_{X,Y,Z}(f) = \varepsilon_{Y,Z} \circ (f \times id_Y)$ で定義できる.

命題 15.12　$\Phi_{X,Y,Z}$ は単射であり, $\varepsilon_{Y,Z}$ が連続ならば, $\Phi_{X,Y,Z}$ は全単射で, $\Psi_{X,Y,Z}$ は $\Phi_{X,Y,Z}$ の逆写像である.

証明　$\Phi_{X,Y,Z}$ と $\eta_{X,Y}$ の定義から $x \in X$, $y \in Y$ に対して $(\Phi_{X,Y,Z}(f)(x))(y) = f(x, y)$ が成り立つことに注意する. $f, g \in \mathrm{Map}(X \times Y, Z)$ が $\Phi_{X,Y,Z}(f) = \Phi_{X,Y,Z}(g)$ を満たせば, 任意の $x \in X$, $y \in Y$ に対して $f(x, y) = (\Phi_{X,Y,Z}(f)(x))(y) = (\Phi_{X,Y,Z}(g)(x))(y) = g(x, y)$ だから $f = g$ となるため, $\Phi_{X,Y,Z}$ は単射である.

$\varepsilon_{Y,Z}$ は連続であるとする. $f \in \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z))$, $g \in \mathrm{Map}(X \times Y, Z)$ に対して, 補題 15.10 と命題 15.11 から

$$\begin{aligned}\Phi_{X,Y,Z}(\Psi_{X,Y,Z}(f)) &= \Phi_{X,Y,Z}(\varepsilon_{Y,Z} \circ (f \times id_Y)) = (\varepsilon_{Y,Z} \circ (f \times id_Y))_* \circ \eta_{X,Y} = (\varepsilon_{Y,Z})_* \circ (f \times id_Y)_* \circ \eta_{X,Y} \\ &= (\varepsilon_{Y,Z})_* \circ \eta_{\mathrm{Map}(Y,Z),Y} \circ f = f \\ \Psi_{X,Y,Z}(\Phi_{X,Y,Z}(g)) &= \Psi_{X,Y,Z}(g_* \circ \eta_{X,Y}) = \varepsilon_{Y,Z} \circ ((g_* \circ \eta_{X,Y}) \times id_Y) = \varepsilon_{Y,Z} \circ (g_* \times id_Y) \circ (\eta_{X,Y} \times id_Y) \\ &= g \circ \varepsilon_{Y,X \times Y} \circ (\eta_{X,Y} \times id_Y) = g\end{aligned}$$

が成り立つため, $\Phi_{X,Y,Z}$ は全単射で, $\Psi_{X,Y,Z}$ は $\Phi_{X,Y,Z}$ の逆写像である. □

注意 15.13 写像 $\Phi_{\mathrm{Map}(Y,Z),Y,Z}:\mathrm{Map}(\mathrm{Map}(Y,Z)\times Y,Z)\to\mathrm{Map}(\mathrm{Map}(Y,Z),\mathrm{Map}(Y,Z))$ が全射ならば連続写像 $e:\mathrm{Map}(Y,Z)\times Y\to Z$ で $\Phi_{\mathrm{Map}(Y,Z),Y,Z}(e)$ が $\mathrm{Map}(Y,Z)$ の恒等写像になるものが存在する. このとき $\Phi_{\mathrm{Map}(Y,Z),Y,Z}$ の定義から $f\in\mathrm{Map}(Y,Z)$ と $y\in Y$ に対し, $((\Phi_{\mathrm{Map}(Y,Z),Y,Z}(e))(f))(y)=e(f,y)$ であり, 一方 $(\Phi_{\mathrm{Map}(Y,Z),Y,Z}(e))(f)=f$ だから, $e(f,y)=f(x)$ が成り立つため, e は $\varepsilon_{Y,Z}$ に一致する. 従って $\Phi_{\mathrm{Map}(Y,Z),Y,Z}$ が全射ならば, $\varepsilon_{Y,Z}$ は連続である.

命題 15.14 Y が強い意味で局所コンパクトならば $\varepsilon_{Y,Z}:\mathrm{Map}(Y,Z)\times Y\to Z$ は連続である. 従ってこのとき $\Phi_{X,Y,Z}$ は全単射である.

証明 $(f,x)\in\mathrm{Map}(Y,Z)\times Y$, O を $f(x)=\varepsilon_{Y,Z}(f,x)$ の開近傍とする. 仮定により $f^{-1}(O)$ に含まれる x のコンパクトな近傍 C が存在する. このとき $W(C,O)\times C$ は (f,x) の近傍で, $\varepsilon_{Y,Z}(W(C,O)\times C)\subset O$ だから $\varepsilon_{Y,Z}$ は (f,x) において連続である. □

写像 $F^Y_{X,Z}:\mathrm{Map}(X,Z)\to\mathrm{Map}(X\times Y,Z\times Y)$ を $F^Y_{X,Z}(f)=f\times id_Y$ で定義する.

命題 15.15 $\varepsilon_{X,Z}:\mathrm{Map}(X,Z)\times X\to Z$ が連続ならば $F^Y_{X,Z}:\mathrm{Map}(X,Z)\to\mathrm{Map}(X\times Y,Z\times Y)$ は連続である.

証明 $\Phi_{\mathrm{Map}(X,Z),X\times Y,Z\times Y}:\mathrm{Map}(\mathrm{Map}(X,Z)\times X\times Y,Z\times Y)\to\mathrm{Map}(\mathrm{Map}(X,Z),\mathrm{Map}(X\times Y,Z\times Y))$ を考える. $\varepsilon_{X,Z}\times id_Y:\mathrm{Map}(X,Z)\times X\times Y\to Z\times Y$ は連続であり, $f\in\mathrm{Map}(X,Z)$, $(x,y)\in X\times Y$ に対して

$$((\Phi_{\mathrm{Map}(X,Z),X\times Y,Z\times Y}(\varepsilon_{X,Z}\times id_Y))(f))(x,y)=(\varepsilon_{X,Z}\times id_Y)(f,x,y)=(f(x),y)=(f\times id_Y)(x,y)=(F^Y_{X,Z}(f))(x,y)$$

だから $\Phi_{\mathrm{Map}(X,Z),X\times Y,Z\times Y}(\varepsilon_{X,Z}\circ(T\times id_Y))=F^Y_{X,Z}$ である. 故に補題 15.6 と補題 15.9 から $F^Y_{X,Z}$ は連続である. □

命題 15.16 $\Gamma:\mathrm{Map}(X,Z)\times\mathrm{Map}(Y,X)\to\mathrm{Map}(Y,Z)$ を $\Gamma(f,g)=f\circ g$ で定義する. $\varepsilon_{X,Z}:\mathrm{Map}(X,Z)\times X\to Z$ と $\varepsilon_{Y,X}:\mathrm{Map}(Y,X)\times Y\to X$ がともに連続ならば Γ は連続である.

証明 $\Phi_{\mathrm{Map}(X,Z)\times\mathrm{Map}(Y,X),Y,Z}:\mathrm{Map}(\mathrm{Map}(X,Z)\times\mathrm{Map}(Y,X)\times Y,Z)\to\mathrm{Map}(\mathrm{Map}(X,Z)\times\mathrm{Map}(Y,X),\mathrm{Map}(Y,Z))$ を考える. 仮定から写像 $\varepsilon_{X,Z}\circ(id_{\mathrm{Map}(X,Z)}\times\varepsilon_{Y,X}):\mathrm{Map}(X,Z)\times\mathrm{Map}(Y,X)\times Y\to Z$ は連続であり, $(f,g)\in\mathrm{Map}(X,Z)\times\mathrm{Map}(Y,X)$, $y\in Y$ に対し, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}((\Phi_{\mathrm{Map}(X,Z)\times\mathrm{Map}(Y,X),Y,Z}(\varepsilon_{X,Z}\circ(id_{\mathrm{Map}(X,Z)}\times\varepsilon_{Y,X})))(f,g))(y)&=(\varepsilon_{X,Z}\circ(id_{\mathrm{Map}(X,Z)}\times\varepsilon_{Y,X}))(f,g,y)\\&=\varepsilon_{X,Z}(f,g(y))=f(g(y))=(f\circ g)(y)=(\Gamma(f,g))(y)\end{aligned}$$

故に $\Phi_{\mathrm{Map}(X,Z)\times\mathrm{Map}(Y,X),Y,Z}(\varepsilon_{X,Z}\circ(id_{\mathrm{Map}(X,Z)}\times\varepsilon_{Y,X}))=\Gamma$ が成り立つため, 補題 15.6 と補題 15.9 により Γ は連続である. □

系 15.17 $G^Y_{X,Z}:\mathrm{Map}(X,Z)\to\mathrm{Map}(\mathrm{Map}(Y,X),\mathrm{Map}(Y,Z))$, $H^Z_{Y,X}:\mathrm{Map}(Y,X)\to\mathrm{Map}(\mathrm{Map}(X,Z),\mathrm{Map}(Y,Z))$ をそれぞれ $G^Y_{X,Z}(f)=f_*$, $H^Z_{Y,X}(g)=g^*$ で定義する. $\varepsilon_{X,Z}:\mathrm{Map}(X,Z)\times X\to Z$, $\varepsilon_{Y,X}:\mathrm{Map}(Y,X)\times Y\to X$ がともに連続ならば $G^Y_{X,Z}$, $H^Z_{Y,X}$ はともに連続である.

証明 命題 15.16 により $\Gamma:\mathrm{Map}(X,Z)\times\mathrm{Map}(Y,X)\to\mathrm{Map}(Y,Z)$ は連続であり, $f\in\mathrm{Map}(X,Z)$, $g\in\mathrm{Map}(Y,X)$ に対し, $((\Phi_{\mathrm{Map}(X,Z),\mathrm{Map}(Y,X),\mathrm{Map}(Y,Z)}(\Gamma))(f))(g)=\Gamma(f,g)=f\circ g=f_*(g)=(G^Y_{X,Z}(f))(g)$ だから

$$\Phi_{\mathrm{Map}(X,Z),\mathrm{Map}(Y,X),\mathrm{Map}(Y,Z)}(\Gamma)=G^Y_{X,Z}$$

が成り立つため, 補題 15.6 と補題 15.9 により $G^Y_{X,Z}$ は連続である.

$T:\mathrm{Map}(Y,X)\times\mathrm{Map}(X,Z)\to\mathrm{Map}(X,Z)\times\mathrm{Map}(Y,X)$ を $T(g,f)=(f,g)$ で定めると T は明らかに連続である. 命題 15.16 により $\Gamma:\mathrm{Map}(X,Z)\times\mathrm{Map}(Y,X)\to\mathrm{Map}(Y,Z)$ は連続であり, $f\in\mathrm{Map}(X,Z)$, $g\in\mathrm{Map}(Y,X)$

に対し, $((\Phi_{\mathrm{Map}(Y,X),\mathrm{Map}(X,Z),\mathrm{Map}(Y,Z)}(\Gamma\circ T))(g))(f)=(\Gamma\circ T)(g,f)=f\circ g=g^*(f)=(H^Z_{Y,X}(g))(f)$ だから

$$\Phi_{\mathrm{Map}(Y,X),\mathrm{Map}(X,Z),\mathrm{Map}(Y,Z)}(\Gamma\circ T)=H^Z_{Y,X}$$

が成り立つため, 補題 15.6 と補題 15.9 により $H^Z_{Y,X}$ は連続である. □

命題 15.18 $\Phi_{X,Y,Z}:\mathrm{Map}(X\times Y,Z)\to\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))$ は次の合成写像に一致する.

$$\mathrm{Map}(X\times Y,Z)\xrightarrow{G^Y_{X\times Y,Z}}\mathrm{Map}(\mathrm{Map}(Y,X\times Y),\mathrm{Map}(Y,Z))\xrightarrow{\eta^*_{X,Y}}\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))$$

従って, $\varepsilon_{X\times Y,Z}:\mathrm{Map}(X\times Y,Z)\times X\times Y\to Z$ と $\varepsilon_{Y,X\times Y}:\mathrm{Map}(Y,X\times Y)\times Y\to X\times Y$ がともに連続ならば $\Phi_{X,Y,Z}$ は連続である.

証明 $f\in\mathrm{Map}(X\times Y,Z)$, $x\in X$, $y\in Y$ に対し

$$\begin{aligned}(\eta^*_{X,Y}(G^Y_{X\times Y,Z}(f))(x))(y)&=(\eta^*_{X,Y}(f_*)(x))(y)=(f_*(\eta_{X,Y}(x)))(y)=(f\circ(\eta_{X,Y}(x)))(y)=f((\eta_{X,Y}(x))(y))\\&=f(x,y)=(\Phi_{X,Y,Z}(f)(x))(y)\end{aligned}$$

だから $\eta^*_{X,Y}\circ G^Y_{X\times Y,Z}=\Phi_{X,Y,Z}$ である. $\varepsilon_{X\times Y,Z}$, $\varepsilon_{Y,X\times Y}$ がともに連続ならば系 15.17 により $G^Y_{X\times Y,Z}$ は連続であり, 補題 15.9 および補題 15.6 から $\eta^*_{X,Y}$ も連続であるため, $\Phi_{X,Y,Z}$ は連続である. □

命題 15.19 $\varepsilon_{Y,Z}:\mathrm{Map}(Y,Z)\times Y\to Z$ が連続であるとき, $\Psi_{X,Y,Z}:\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))\to\mathrm{Map}(X\times Y,Z)$ は次の合成写像に一致する.

$$\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))\xrightarrow{F^Y_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)}}\mathrm{Map}(X\times Y,\mathrm{Map}(Y,Z)\times Y)\xrightarrow{\varepsilon_{Y,Z*}}\mathrm{Map}(X\times Y,Z)$$

さらに $\varepsilon_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)}:\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))\times X\to\mathrm{Map}(Y,Z)$ も連続ならば $\Psi_{X,Y,Z}$ は連続である.

証明 前半の主張は $\Psi_{X,Y,Z}$ と $F^Y_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)}$ の定義から明らかである.

$\varepsilon_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)}:\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))\times X\to\mathrm{Map}(Y,Z)$ も連続ならば命題 15.15 により $F^Y_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)}$ は連続であり, 仮定と補題 15.6 により $\varepsilon_{Y,Z*}$ も連続であるため, $\varepsilon_{Y,Z*}\circ F^Y_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)}$ は連続である. □

命題 15.12, 命題 15.18, 命題 15.19 から次の結果を得る.

定理 15.20 4 つの写像

$$\varepsilon_{X\times Y,Z}:\mathrm{Map}(X\times Y,Z)\times X\times Y\to Z,\qquad\varepsilon_{Y,X\times Y}:\mathrm{Map}(Y,X\times Y)\times Y\to X\times Y,$$
$$\varepsilon_{Y,Z}:\mathrm{Map}(Y,Z)\times Y\to Z,\qquad\varepsilon_{X,\mathrm{Map}(Y,Z)}:\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))\times X\to\mathrm{Map}(Y,Z)$$

がすべて連続ならば $\Phi_{X,Y,Z}:\mathrm{Map}(X\times Y,Z)\to\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))$ は同相写像である.

補題 15.21 (1) X が弱 Hausdorff 空間ならば, 次の集合は $\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))$ の準基底である.

$$\{W(C,W(D,O))\,|\,C\text{ は }X\text{ のコンパクト部分集合, }D\text{ は }Y\text{ のコンパクト部分集合, }O\text{ は }Z\text{ の開集合}\}$$

(2) X, Y がともに弱 Hausdorff 空間ならば, 次の集合は $\mathrm{Map}(X\times Y,Z)$ の準基底である.

$$\{W(C\times D,O)\,|\,C\text{ は }X\text{ のコンパクト部分集合, }D\text{ は }Y\text{ のコンパクト部分集合, }O\text{ は }Z\text{ の開集合}\}$$

証明 (1) $\{W(D,O)\,|\,D$ は Y のコンパクト部分集合, O は Z の開集合$\}$ は $\mathrm{Map}(Y,Z)$ の準基底で, X は弱 Hausdorff 空間だから補題 15.8 によって結果が得られる.

(2) E を $X\times Y$ のコンパクト集合, O を Z の開集合とし, $f\in W(E,O)$ とする. $p_1:X\times Y\to X$, $p_2:X\times Y\to Y$ をそれぞれ X, Y への射影とすれば, E のコンパクト性から $p_1(E)$, $p_2(E)$ はそれぞれ X, Y のコンパクト部分空

間である. 一方, 仮定から X と Y は弱 Hausdorff 空間だから, $p_1(E)$ と $p_2(E)$ は Hausdorff 空間でもあるため, 系 12.7 によって $p_1(E)$ と $p_2(E)$ は正規空間である. E は $p_1(E)\times p_2(E)$ の開集合 $f^{-1}(O)\cap(p_1(E)\times p_2(E))$ に含まれるため, 各 $(x,y)\in E$ に対し, $p_1(E)$ における x の開近傍 $U(x,y)$ と $p_2(E)$ における y の開近傍 $V(x,y)$ で, $U(x,y)\times V(x,y)\subset f^{-1}(O)$ となるものがある. さらに, $p_1(E)$ と $p_2(E)$ が正規空間であることから, x, y の $p_1(E)$, $p_2(E)$ における開近傍 $U'(x,y)$, $V'(x,y)$ で, $\overline{U'(x,y)}\subset U(x,y)$, $\overline{V'(x,y)}\subset V(x,y)$ を満たすものがある. E のコンパクト性から $E\subset\bigcup_{i=1}^{n}(U'(x_i,y_i)\times V'(x_i,y_i))$ を満たす $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)\in E$ が選べて, $i=1,2,\dots,n$ に対し, $\overline{U'(x_i,y_i)}$, $\overline{V'(x_i,y_i)}$ はコンパクト空間 $p_1(E)$, $p_2(E)$ の閉集合だからコンパクトである. ここで, $f\in\bigcap_{i=1}^{n}W\bigl(\overline{U'(x_i,y_i)}\times\overline{V'(x_i,y_i)},O\bigr)=W\Bigl(\bigcup_{i=1}^{n}\overline{U'(x_i,y_i)}\times\overline{V'(x_i,y_i)},O\Bigr)\subset W(E,O)$ となるため, 主張が示された. □

補題 15.22　$C\subset X$, $D\subset Y$, $O\subset Z$ に対し, $\Phi_{X,Y,Z}^{-1}(W(C,W(D,O)))=W(C\times D,O)$ が成り立つ.

証明　$C\subset X$, $D\subset Y$, $O\subset Z$ ならば, 以下の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\Phi_{X,Y,Z}^{-1}(W(C,W(D,O)))&=\{f\in\mathrm{Map}(X\times Y,Z)\,|\,(\Phi_{X,Y,Z}(f))(C)\subset W(D,O)\}\\&=\{f\in\mathrm{Map}(X\times Y,Z)\,|\,x\in C\text{ ならば }((\Phi_{X,Y,Z}(f))(x))(D)\subset O\}\\&=\{f\in\mathrm{Map}(X\times Y,Z)\,|\,x\in C\text{ ならば }f(\{x\}\times D)\subset O\}\\&=\{f\in\mathrm{Map}(X\times Y,Z)\,|\,f(C\times D)\subset O\}=W(C\times D,O)\end{aligned}$$
□

命題 15.23　X が弱 Hausdorff 空間ならば $\Phi_{X,Y,Z}:\mathrm{Map}(X\times Y,Z)\to\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))$ は連続である.

証明　X が弱 Hausdorff 空間ならば補題 15.21 の (1) と補題 15.22 により $\Phi_{X,Y,Z}$ は連続である. □

定理 15.24　X, Y が弱 Hausdorff 空間で, $\varepsilon_{Y,Z}:\mathrm{Map}(Y,Z)\times Y\to Z$ が連続ならば, 次の写像は同相写像である.

$$\Phi_{X,Y,Z}:\mathrm{Map}(X\times Y,Z)\to\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))$$

証明　命題 15.23 と命題 15.12 によって $\Phi_{X,Y,Z}$ は連続な全単射である. また, 補題 15.22 により, $C\subset X$, $D\subset Y$, $O\subset Z$ に対し, $\Phi_{X,Y,Z}^{-1}(W(C,W(D,O)))=W(C\times D,O)$ が成り立つが, $\Phi_{X,Y,Z}$ は全単射だから, $\Phi_{X,Y,Z}(W(C\times D,O))=W(C,W(D,O))$ が成り立つことに注意する. 補題 15.21 の (2) により

$$\{W(C\times D,O)\,|\,C\text{ は }X\text{ のコンパクト部分集合, }D\text{ は }Y\text{ のコンパクト部分集合, }O\text{ は }Z\text{ の開集合 }\}$$

は $\mathrm{Map}(X\times Y,Z)$ の準基底になるため, $\Phi_{X,Y,Z}$ は開写像でもある. 従って $\Phi_{X,Y,Z}$ は同相写像である. □

系 15.25　X が弱 Hausdorff 空間, Y が局所コンパクトな Hausdorff 空間ならば, 任意の位相空間 Z に対して

$$\Phi_{X,Y,Z}:\mathrm{Map}(X\times Y,Z)\to\mathrm{Map}(X,\mathrm{Map}(Y,Z))$$

は同相写像である.

証明　仮定と命題 12.9 により, Y は強い意味で局所コンパクトであるため, 命題 15.14 により $\varepsilon_{Y,Z}:\mathrm{Map}(Y,Z)\times Y\to Z$ は連続である. 従って定理 15.24 により, 結果が得られる. □