ベクトル解析　第 1 回 ベクトルの外積

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の両方に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{w}$ で, 3 次正方行列 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{pmatrix}$ の行列式の値が正になるものを求めよ.

[解答例] (1) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} (-1)(-1) - 0{\cdot}1 \\ 1{\cdot}1 - 1(-1) \\ 1{\cdot}0 - 1(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{w} = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ とおけば, $\boldsymbol{w}$ は単位ベクトルで, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{pmatrix}$ の行列式の値は $D_3(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) =$ $\dfrac{1}{\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = 6 > 0$ だから, $\boldsymbol{w} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が求めるベクトルである.

ベクトル解析 第 2 回 ベクトル値関数の微分

$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$ によって定義されるベクトル値関数 $\boldsymbol{x} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^3$ を考える.

(1) $\boldsymbol{x}'(t)$, $\boldsymbol{x}''(t)$ を求めよ.

(2) $t \in \boldsymbol{R}$ に対して $\boldsymbol{x}''(t) = \alpha(t)\boldsymbol{x}'(t) + \boldsymbol{n}(t)$ かつ $(\boldsymbol{x}'(t), \boldsymbol{n}(t)) = 0$ を満たす実数 $\alpha(t)$ とベクトル $\boldsymbol{n}(t)$ を求めよ.

[解答例] (1) $\boldsymbol{x}'(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}''(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{x}''(t) = \alpha(t)\boldsymbol{x}'(t) + \boldsymbol{n}(t)$ かつ $(\boldsymbol{x}'(t), \boldsymbol{n}(t)) = 0$ ならば

$$(\boldsymbol{x}''(t), \boldsymbol{x}'(t)) = (\alpha(t)\boldsymbol{x}'(t) + \boldsymbol{n}(t), \boldsymbol{x}'(t)) = (\alpha(t)\boldsymbol{x}'(t), \boldsymbol{x}'(t)) + (\boldsymbol{n}(t), \boldsymbol{x}'(t)) = \alpha(t)\|\boldsymbol{x}'(t)\|^2$$

だから $\alpha(t) = \dfrac{(\boldsymbol{x}''(t), \boldsymbol{x}'(t))}{\|\boldsymbol{x}'(t)\|^2} = \dfrac{\cos t \sin t}{2\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \dfrac{\cos t \sin t}{\sin^2 t + 2}$ である. 従って

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}(t) = \boldsymbol{x}''(t) - \alpha(t)\boldsymbol{x}'(t) &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\cos t \sin t}{\sin^2 t + 2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin^2 t + 2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\cos t(\sin^2 t + 2) + \sqrt{2}\cos t \sin^2 t \\ -\sin t(\sin^2 t + 2) - \cos^2 t \sin t \\ -\cos t \sin t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin^2 t + 2}\begin{pmatrix} -2\sqrt{2}\cos t \\ -3\sin t \\ -\cos t \sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ベクトル解析 第 3 回 合成写像の微分法

写像 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ と関数 $g : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ を次で定める.

$$f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x^3 - y^3 \\ x^2 y - 2xy^2 \end{pmatrix}, \qquad g\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) = z^3 w^3 - zw^2 - z^2 w$$

(1) f の $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ における微分 $f'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ と g の $\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)$ における微分 $g'\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right)$ を求めよ.

(2) 合成写像 $g\circ f$ の $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ における微分 $(g\circ f)'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ を求め, さらに $\dfrac{\partial g\circ f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ と $\dfrac{\partial g\circ f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ の値を求めよ.

[解答例] (1) $f'\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6x^2 & -3y^2 \\ 2xy - 2y^2 & x^2 - 4xy \end{pmatrix}$, $g'\left(\begin{smallmatrix} z \\ w \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3z^2 w^3 - w^2 - 2zw & 3z^3 w^2 - 2zw - z^2 \end{pmatrix}$

(2) 合成写像の微分法から $(g\circ f)'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = g'\left(f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) f'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = g'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) f'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -12 & -6 \end{smallmatrix}\right)$.

$(g\circ f)'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g\circ f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) & \frac{\partial g\circ f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix}$ だから, 上の結果から $\dfrac{\partial g\circ f}{\partial x}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = -12$, $\dfrac{\partial g\circ f}{\partial y}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = -6$ である.

ベクトル解析 第 4 回 空間曲線の曲率と捩率

$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^3 - t \\ 2\cos t + 2t\sin t \\ 2t\cos t - 2\sin t \end{pmatrix}$ $(t \in \boldsymbol{R})$ によってパラメータ表示される空間曲線 C を考える.

(1) C の $\boldsymbol{x}(0)$ から $\boldsymbol{x}(t)$ の部分の長さを求めよ.

(2) $\boldsymbol{x}'(0) \times \boldsymbol{x}''(0)$, $\det(\boldsymbol{x}'(0), \boldsymbol{x}''(0), \boldsymbol{x}'''(0))$ を求めよ.

(3) C 上の点 $\boldsymbol{x}(0)$ における曲率 $\kappa(0)$ と捩率 $\tau(0)$ を求めよ.

[解答例] (1) $\boldsymbol{x}'(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ 2t\cos t \\ -2t\sin t \end{pmatrix}$ だから $\|\boldsymbol{x}'(t)\| = t^2 + 1$ である. 従って $\displaystyle\int_0^t \|\boldsymbol{x}'(s)\|\, ds = \int_0^t (s^2 + 1)\, ds = \frac{1}{3}t^3 + t$.

(2) $\boldsymbol{x}''(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 2\cos t - 2t\sin t \\ -2\sin t - 2t\cos t \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}'''(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4\sin t - 2t\cos t \\ -4\cos t + 2t\sin t \end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{x}'(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}'''(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ だから $\boldsymbol{x}'(0) \times \boldsymbol{x}''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\det(\boldsymbol{x}'(0), \boldsymbol{x}''(0), \boldsymbol{x}'''(0)) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 8$ である.

(3) 上の結果から $\|\boldsymbol{x}'(0)\| = 1$, $\|\boldsymbol{x}'(0) \times \boldsymbol{x}''(0)\| = 2$ である. 従って $\boldsymbol{x}(0)$ における曲率 $\kappa(0)$ と捩率 $\tau(0)$ は $\kappa(0) = \dfrac{\|\boldsymbol{x}'(0) \times \boldsymbol{x}''(0)\|}{\|\boldsymbol{x}'(0)\|^3} = 2$, $\tau(0) = \dfrac{\det(\boldsymbol{x}'(0), \boldsymbol{x}''(0), \boldsymbol{x}'''(0))}{\|\boldsymbol{x}'(0) \times \boldsymbol{x}''(0)\|^2} = 2$ で与えられる.

ベクトル解析 第 5 回 接平面

$\boldsymbol{p}\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u + v \\ u^2 + 2uv \\ u^3 + 3u^2 v \end{pmatrix}$ によって定義される写像 $\boldsymbol{p} : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ でパラメータ表示される曲面を S とする.

(1) $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2$ に対し, $\boldsymbol{p}_u\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{p}_v\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{p}_u\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \times \boldsymbol{p}_v\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$ を求めよ.

(2) S 上の点 $\boldsymbol{p}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ における S の接平面の方程式を求めよ.

[解答例] (1) $\boldsymbol{p}_u\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2u + 2v \\ 3u^2 + 6uv \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_v\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2u \\ 3u^2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_u\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \times \boldsymbol{p}_v\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -6u^2 v \\ 6uv \\ -2v \end{pmatrix} = -2v \begin{pmatrix} 3u^2 \\ -3u \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{p}\binom{1}{1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ であり, $\boldsymbol{p}_u\binom{1}{1} \times \boldsymbol{p}_v\binom{1}{1} = -2\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから, $\boldsymbol{p}\binom{1}{1}$ における S の接平面は $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ を通り, 法線ベクトルが $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である平面である. 故に, 求める方程式は $3(x-2) - 3(y-3) + z - 4 = 0$, すなわち $3x - 3y + z - 1 = 0$ である

ベクトル解析 第 6 回 曲面の面積

$E = \left\{\binom{u}{v} \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; v \geqq 0\right\}$ とするとき, $\boldsymbol{p}\binom{u}{v} = \begin{pmatrix} u^2 \\ \sqrt{2}uv \\ v^2 \end{pmatrix}$ によって定義される写像 $\boldsymbol{p} : E \to \boldsymbol{R}^3$ でパラメータ表示される曲面を S とする. $D = \left\{\binom{u}{v} \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; u^2 + v^2 \leqq 1,\, v \geqq 0\right\}$ とおくとき, $\boldsymbol{p}$ による D の像である S の部分集合の面積を求めよ.

[解答例] $\binom{s}{t}, \binom{u}{v} \in E$ が $\boldsymbol{p}\binom{s}{t} = \boldsymbol{p}\binom{u}{v}$ を満たすならば $\binom{s}{t} = \pm\binom{u}{v}$ であるが, $t, v \geqq 0$ より $\binom{s}{t} = \binom{u}{v}$ または「$t = v = 0$ かつ $u = -s$」である. 故に $\boldsymbol{p}$ は E を S の上に面積 0 の部分を除いて, 1 対 1 に写す.

一方, $\boldsymbol{p}_u\binom{u}{v} = \begin{pmatrix} 2u \\ \sqrt{2}v \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_v\binom{u}{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}u \\ 2v \end{pmatrix}$ だから $\left\|\boldsymbol{p}_u\binom{u}{v} \times \boldsymbol{p}_v\binom{u}{v}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 2\sqrt{2}v^2 \\ -4uv \\ 2\sqrt{2}u^2 \end{pmatrix}\right\| = 2\sqrt{2}(u^2 + v^2)$ である. $\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\sin\theta \end{cases}$ $(r \geqq 0,\, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と変数変換すれば D は面積 0 の部分を除いて $[0,1] \times [0,\pi]$ と 1 対 1 に対応し, この変数変換のヤコビ行列式は r である. 従って, 求める面積は

$$\iint_D \left\|\boldsymbol{p}_u\binom{u}{v} \times \boldsymbol{p}_v\binom{u}{v}\right\| dudv = \iint_D 2\sqrt{2}(u^2+v^2)\, dudv = \int_0^1 \left(\int_0^\pi 2\sqrt{2}r^3 d\theta\right) dr = \int_0^1 2\sqrt{2}\pi r^3 dr = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

ベクトル解析 第 7 回 スカラー場とベクトル場

$f\binom{x}{y} = x^2 + 2y^2$ によって $\boldsymbol{R}^2$ のスカラー場 f を定義する.

(1) f の勾配 $\mathrm{grad}\, f$ を求めよ.

(2) 点 $\binom{1}{1}$ を通る $\mathrm{grad}\, f$ の積分曲線の方程式を $y = g(x)$ の形に表せ.

[解答例] (1) $\mathrm{grad}\, f\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ を $\mathrm{grad}\, f$ の積分曲線のパラメータ表示とすれば $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}'(t) = \mathrm{grad} f(\boldsymbol{x}(t)) = \begin{pmatrix} 2x(t) \\ 4y(t) \end{pmatrix}$ だから $x(t)$, $y(t)$ に関する微分方程式 $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) \\ y'(t) = 4y(t) \end{cases}$ が得られる. この一般解は $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t} \\ y(t) = C_2 e^{4t} \end{cases}$ で与えられるため, 積分曲線が $\binom{1}{1}$ を通るならば $C_1 e^{2t_0} = C_2 e^{4t_0} = 1$ を満たす実数 t_0 がある. このとき $C_1 = e^{-2t_0}$ より $C_2 = e^{-4t_0}$ だから, $\begin{cases} x(t) = e^{2(t-t_0)} \\ y(t) = e^{4(t-t_0)} \end{cases}$ が得られる. 従って $y(t) = x(t)^2$ が成り立ち, $x(t)$ は正の実数全体を動くため, $\binom{1}{1}$ を通る $\mathrm{grad}\, f$ の積分曲線の方程式は $y = x^2$ $(x > 0)$ である.

ベクトル解析 第 8 回 線積分と保存力場

$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \\ t \end{pmatrix}$ で定義される写像 $\boldsymbol{x} : [0,1] \to \boldsymbol{R}^3$ によってパラメータ表示される $\boldsymbol{x}(0)$ から $\boldsymbol{x}(1)$ に向かう曲線を C とする. このとき, 以下で与えられる $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{X}$ に対し, $\boldsymbol{x}(0)$ から $\boldsymbol{x}(1)$ への C に沿った $\boldsymbol{X}$ の線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{X}$ を求めよ.

(1) $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z^2 \end{pmatrix}$ (2) φ を $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{(x^2-y^2)^2+z^2+1}$ によって定義するとき, $\boldsymbol{X} = \operatorname{grad}\varphi$.

[解答例] (1) $\boldsymbol{x}'(t) = \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t)) = \begin{pmatrix} -\sinh t \\ \cosh t \\ t^2 \end{pmatrix}$ だから $(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t)), \boldsymbol{x}'(t)) = 2 + t^2$ である.
従って $\displaystyle\int_C \boldsymbol{X} = \int_0^1 (\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t)), \boldsymbol{x}'(t))\,dt = \int_0^1 (1+t^2)\,dt = \frac{4}{3}$.

(2) $\boldsymbol{X}$ は φ をポテンシャルとする保存力場だから $\displaystyle\int_C \boldsymbol{X} = \varphi(\boldsymbol{x}(1)) - \varphi(\boldsymbol{x}(0)) = \varphi\begin{pmatrix} \cosh 1 \\ \sinh 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}$.

ベクトル解析 第 9 回 ベクトル場の発散

C^1 級関数 $f : (0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ が与えられたとき, $\boldsymbol{R}^3 - \{\boldsymbol{0}\}$ のベクトル場 $\boldsymbol{X}$ を次のように定義する.

$$\boldsymbol{X}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} xf\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \\ yf\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \\ zf\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \end{pmatrix}$$

(1) f, f', $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ を用いて $\operatorname{div}\boldsymbol{X}$ を表せ.
(2) $\operatorname{div}\boldsymbol{X} = 0$ であるとき, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とおいて, f が満たす微分方程式を求めよ.
(3) $\operatorname{div}\boldsymbol{X} = 0$ であるとき, $f(1) = 1$ を満たす関数 f を求めよ.

[解答例] (1) div の定義と, 合成関数の微分法から

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\boldsymbol{X} &= \frac{\partial}{\partial x}xf\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}yf\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}zf\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \\
&= 3f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) + \frac{(x^2+y^2+z^2)\,f'\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
&= 3f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,f'\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right).
\end{aligned}$$

(2) (1) より $\operatorname{div}\boldsymbol{X} = 3f(r) + rf'(r)$ だから $\operatorname{div}\boldsymbol{X} = 0$ ならば, $y = f(r)$ は微分方程式 $3y + r\dfrac{dy}{dr} = 0$ を満たす.

(3) 上の微分方程式の変数を分離すれば $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dr} = -\dfrac{3}{r}$ となるため, $\log|y| = -3\log r + D$ である. 従って $f(r) = y = \dfrac{C}{r^3}$ だから, $f(1) = 1$ ならば $C = 1$ である. 故に $f(r) = \dfrac{1}{r^3}$ である.

ベクトル解析 第 10 回 ベクトル場の回転

a, b, c を実数の定数とし, $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ayz \\ bxz \\ cxy \end{pmatrix}$ で定めるとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{X}$ が渦なしベクトル場になるような a, b, c で, $a^2+b^2+c^2=1$ かつ $a \geqq 0$ を満たすものを求めよ.

(2) $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{Y}$ を $\boldsymbol{Y}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2y \\ z \end{pmatrix}$ で定める. $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$ が成り立つとき, a を用いて b, c を表せ.

[解答例] (1) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}cxy - \frac{\partial}{\partial z}bxz \\ \frac{\partial}{\partial z}ayz - \frac{\partial}{\partial x}cxy \\ \frac{\partial}{\partial x}bxz - \frac{\partial}{\partial y}ayz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c-b)x \\ (a-c)y \\ (b-a)z \end{pmatrix}$ だから $\boldsymbol{Z}$ が渦なしベクトル場になるためには $a=b=c$ であることが必要十分である. 従って $a^2+b^2+c^2=1$ かつ $a \geqq 0$ ならば $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である.

(2) $\begin{pmatrix} x \\ -2y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{Y} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} (c-b)x \\ (a-c)y \\ (b-a)z \end{pmatrix}$ が成り立つためには $c-b=1$, $a-c=-2$, $b-a=1$ が成り立つことが必要十分である. これらは $b=a+1$ かつ $c=a+2$ と同値である.

ベクトル解析 第 11 回 グリーンの定理

$D=[0,1]\times[0,1]$ とし, $\boldsymbol{R}^2$ のベクトル場 $\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3-3xy^2 \\ 3xy^2-y^3 \end{pmatrix}$ で定める. グリーンの定理を用いて D の境界 ∂D を反時計回りに 1 周する $\boldsymbol{X}$ の線積分 $\displaystyle\int_{\partial D} \boldsymbol{X}$ の値を求めよ.

[解答例] $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{X} = 3y^2-(-6xy) = 3y^2+6xy$ だから, グリーンの定理より

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{X} = \iint_D \mathrm{rot}\,\boldsymbol{X}\,dxdy = \iint_D (3y^2+6xy)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (3y^2+6xy)\,dy\right)dx = \int_0^1 (1+3x)\,dx = \frac{5}{2}$$

ベクトル解析 第 12 回 面積分

S を上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z \geqq 0$ とするとき, 面積分 $\displaystyle\iint_S (2xy+3z^2)\,dA$ を求めよ.

[解答例] $\boldsymbol{p} : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi] \to \boldsymbol{R}^3$ を $\boldsymbol{p}\begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\sin\theta\cos\varphi \\ a\sin\theta\sin\varphi \\ a\cos\theta \end{pmatrix}$ によって定めれば $\boldsymbol{p}$ の像は S に一致し,

$$\boldsymbol{p}_\theta\begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta\cos\varphi \\ a\cos\theta\sin\varphi \\ -a\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_\varphi\begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin\theta\sin\varphi \\ a\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_\theta\begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \times \boldsymbol{p}_\varphi\begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = a^2\sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

より $\left\|\boldsymbol{p}_\theta\left(\begin{smallmatrix}\theta\\ \varphi\end{smallmatrix}\right)\times\boldsymbol{p}_\varphi\left(\begin{smallmatrix}\theta\\ \varphi\end{smallmatrix}\right)\right\| = a^2\sin\theta$ だから

$$\begin{aligned}\iint_S (2xy+3z^2)\,dA &= \iint_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2\pi]} (2a^2\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi + 3a^2\cos^2\theta)\left\|\boldsymbol{p}_\theta\left(\begin{smallmatrix}\theta\\ \varphi\end{smallmatrix}\right)\times\boldsymbol{p}_\varphi\left(\begin{smallmatrix}\theta\\ \varphi\end{smallmatrix}\right)\right\| d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}(a^2\sin^2\theta\sin 2\varphi + 3a^2\cos^2\theta)\,a^2\sin\theta\,d\varphi\right)d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\pi a^4\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta = \left[-2\pi a^4\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi a^4\end{aligned}$$

ベクトル解析 第 13 回 ストークスの定理

M を中心が原点で半径が 1 の球面 $x^2+y^2+z^2=1$ の $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$ を満たす部分とし, M には原点と反対方向の単位法線ベクトル場を与える. M のベクトル場 $\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{X}\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\\ z\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}-2y\\ -2z\\ -2x\end{smallmatrix}\right)$ で定めるとき, ストークスの定理を用いて $\operatorname{rot}\boldsymbol{X}$ の面積分 $\displaystyle\iint_M \operatorname{rot}\boldsymbol{X}\,dA$ の値を求めよ.

[解答例] M は $\boldsymbol{p}\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$ で定義される写像 $\boldsymbol{p}:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\boldsymbol{R}^3$ でパラメータ表示される.

$\boldsymbol{\omega}_i:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\boldsymbol{R}^3$ $(i=1,2,3)$ を $\boldsymbol{\omega}_1(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\omega}_2(t) = \begin{pmatrix}0\\ \cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\omega}_3(t) = \begin{pmatrix}\sin t\\ 0\\ \cos t\end{pmatrix}$ で定義して, C_i を $\boldsymbol{\omega}_i$ によってパラメータ表示される曲線とすれば, $\partial M = C_1 + C_2 + C_3$ である.

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}_1(t)) = \begin{pmatrix}-2\sin t\\ 0\\ -2\cos t\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\omega}_1'(t) = \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix},\qquad (\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}_1(t)),\boldsymbol{\omega}_1'(t)) = 2\sin^2 t = 1-\cos 2t$$

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}_2(t)) = \begin{pmatrix}-2\cos t\\ -2\sin t\\ 0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\omega}_2'(t) = \begin{pmatrix}0\\ -\sin t\\ \cos t\end{pmatrix},\qquad (\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}_2(t)),\boldsymbol{\omega}_2'(t)) = 2\sin^2 t = 1-\cos 2t$$

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}_3(t)) = \begin{pmatrix}0\\ -2\cos t\\ -2\sin t\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\omega}_3'(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ 0\\ -\sin t\end{pmatrix},\qquad (\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}_3(t)),\boldsymbol{\omega}_2'(t)) = 2\sin^2 t = 1-\cos 2t$$

だから, ストークスの定理により

$$\begin{aligned}\iint_M \operatorname{rot}\boldsymbol{X}\,dA &= \int_{\partial M}\boldsymbol{X} = \int_{C_1}\boldsymbol{X} + \int_{C_2}\boldsymbol{X} + \int_{C_3}\boldsymbol{X} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}_1(t)),\boldsymbol{\omega}_1'(t))\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}_2(t)),\boldsymbol{\omega}_2'(t))\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}_3(t)),\boldsymbol{\omega}_3'(t))\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt = 3\left[t-\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

［注意］ $\boldsymbol{p}_\theta\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix}\times\boldsymbol{p}_\varphi\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\sin\varphi\sin\theta\\ \cos\varphi\sin\theta\\ 0\end{pmatrix} = \sin\theta\,\boldsymbol{p}\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix}$ だから $\boldsymbol{p}\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{p}\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix}\in M$ における原点と反対方向の単位法線ベクトルである. $\operatorname{rot}\boldsymbol{X}\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\\ z\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}2\\ 2\\ 2\end{smallmatrix}\right)$ だから, ストークスの定理を用いずに直接

$\displaystyle\iint_M \operatorname{rot}\boldsymbol{X}\,dA$ を計算すれば, 以下のようになるので, 上の結果と一致する.

$$\begin{aligned}
\iint_M \operatorname{rot}\boldsymbol{X}\,dA &= \iint_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \left(\operatorname{rot}\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{p}\left(\begin{smallmatrix}\theta\\ \varphi\end{smallmatrix}\right)\right), \boldsymbol{p}_\theta\left(\begin{smallmatrix}\theta\\ \varphi\end{smallmatrix}\right)\times\boldsymbol{p}_\varphi\left(\begin{smallmatrix}\theta\\ \varphi\end{smallmatrix}\right)\right)d\theta d\varphi \\
&= \iint_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \left(\operatorname{rot}\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{p}\left(\begin{smallmatrix}\theta\\ \varphi\end{smallmatrix}\right)\right), \sin\theta\,\boldsymbol{p}\left(\begin{smallmatrix}\theta\\ \varphi\end{smallmatrix}\right)\right)d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\varphi\sin^2\theta + 2\sin\varphi\sin^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta)\,d\varphi\right)d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2 - 2\cos 2\theta + \frac{\pi}{2}\sin 2\theta\right)d\theta = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

ベクトル解析 第 14 回 ガウスの定理

S を中心が原点で半径が R の球面として, S には外向きの単位法線ベクトル場により向きをつける. このとき, ガウスの定理を用いることによって $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x(y^2+z^2)\\ y(x^2+z^2)\\ z(x^2+y^2)\end{pmatrix}$ で定義される $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{X}$ の S 上の面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{X}\,dA$ を求めよ.

[解答例] $D = \{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3 \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqq r\}$ とおけば $S = \partial D$ である. $\operatorname{div}\boldsymbol{X} = 2(x^2+y^2+z^2)$ だから, ガウスの定理を用いて, 極座標変換を行えば

$$\begin{aligned}
\iint_S \boldsymbol{X}\,dA &= \iint_{\partial D}\boldsymbol{X}\,dA = \iiint_D \operatorname{div}\boldsymbol{X}\,dxdydz = \iiint_D 2(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz \\
&= \int_0^R\left(\int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi}2r^4\sin\theta\,d\varphi\right)d\theta\right)dr = \int_0^R\left(\int_0^\pi 4\pi r^4\sin\theta\,d\theta\right)dr = \int_0^R 8\pi r^4\,dr = \frac{8\pi}{5}R^5
\end{aligned}$$

ベクトル解析 第 15 回 応用

中心が原点で半径が a である球面の $z \geqq 0$ の部分を S とする. S の面密度が均一であるとき, S の重心の z 座標を求めよ.

[解答例] 半径が a である球面の面積は $4\pi a^2$ だから, S の面積は $2\pi a^2$ である. $\boldsymbol{p} : \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\times[0,2\pi] \to \boldsymbol{R}^3$ を $\boldsymbol{p}\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\sin\theta\cos\varphi\\ a\sin\theta\sin\varphi\\ a\cos\theta\end{pmatrix}$ によって定めれば $\boldsymbol{p}$ は S のパラメータ表示だから, S の重心の z 座標は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi a^2}\iint_S z\,dA &= \frac{1}{2\pi a^2}\iint_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2\pi]} a\cos\theta\left\|\boldsymbol{p}_\theta\left(\begin{smallmatrix}\theta\\ \varphi\end{smallmatrix}\right)\times\boldsymbol{p}_\varphi\left(\begin{smallmatrix}\theta\\ \varphi\end{smallmatrix}\right)\right\|d\theta d\varphi = \frac{1}{2\pi a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}a^3\cos\theta\sin\theta\,d\varphi\right)d\theta \\
&= \frac{a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta = \frac{a}{4}[-\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

ベクトル解析期末試験問題　(2016.8.5 実施)

1. $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$ で定義し, $\boldsymbol{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 - \sin t \\ t \end{pmatrix}$ で定義される写像 $\boldsymbol{\omega} : [0, 2\pi] \to \boldsymbol{R}^3$ によってパラメータ表示される曲線を C を とする.

(1) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{X}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{X}$ のポテンシャルが存在すればそれを求め, 存在しなければその理由を述べよ.

(3) 線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{X}$ を求めよ.

2. $\boldsymbol{p}\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2 \\ -v + \frac{1}{3}v^3 - u^2 v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}$ によって定義される写像 $\boldsymbol{p} : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ でパラメータ表示される曲面を S とする.

(1) S の $\boldsymbol{p}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ における接平面の方程式を求めよ.

(2) D を $\boldsymbol{R}^2$ の原点を中心とする半径が $\sqrt{3}$ の円板 $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, u^2 + v^2 \leqq 3 \right\}$ とする. $\boldsymbol{p}$ による D の像である S の部分集合の面積を求めよ.

3. $D = [3, 5] \times [1, 3]$ とし, $\boldsymbol{R}^2$ のベクトル場 $\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ -3xy \end{pmatrix}$ で定める. グリーンの定理を用いて D の境界 ∂D を反時計回りに 1 周する $\boldsymbol{X}$ の線積分 $\displaystyle\int_{\partial D} \boldsymbol{X}$ の値を求めよ.

4. M を中心が原点で半径が 1 の球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ を満たす部分とし, M には原点と反対方向の単位法線ベクトル場を与える. M のベクトル場 $\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{X}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} y^2+z^2 \\ z^2+x^2 \\ x^2+y^2 \end{smallmatrix}\right)$ で定めるとき, ストークスの定理を用いて線積分 $\displaystyle\int_{\partial M} \boldsymbol{X}$ を求めよ.

5. D を一辺の長さが a の立方体 $[0, a] \times [0, a] \times [0, a]$ とし, D の境界 ∂D には外向きの単位法線ベクトル場を与える. D のベクトル場 $\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{X}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{smallmatrix}\right)$ で定めるとき, ガウスの定理を用いて面積分 $\displaystyle\iint_{\partial D} \boldsymbol{X}\, dA$ を求めよ.

ベクトル解析期末試験解答例

[1 の解答例] (1) $\operatorname{rot} \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$

(2) $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xyz$ で $\boldsymbol{R}^3$ のスカラー場 φ を定めれば $\operatorname{grad}\varphi = \boldsymbol{X}$ となるため, φ は $\boldsymbol{X}$ のポテンシャルである.

(3) $\displaystyle\int_C \boldsymbol{X} = \int_C \operatorname{grad}\varphi = \varphi(\boldsymbol{\omega}(2\pi)) - \varphi(\boldsymbol{\omega}(0)) = \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2\pi \end{pmatrix} - \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\pi$

[2 の解答例] (1) $\boldsymbol{p}_u\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1-u^2+v^2 \\ -2uv \\ 2u \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_v\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2uv \\ -1+v^2-u^2 \\ -2v \end{pmatrix}$ だから $\boldsymbol{p}_u\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \times \boldsymbol{p}_v\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = (u^2+v^2+1)\begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ u^2+v^2-1 \end{pmatrix}$ である. 従って $\boldsymbol{p}\left(\begin{smallmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_u\left(\begin{smallmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \times \boldsymbol{p}_v\left(\begin{smallmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 8\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから, S の $\boldsymbol{p}\left(\begin{smallmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ における接平面は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ を通り, $8\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に垂直な平面である. 故にこの接平面の方程式は $\sqrt{3}x + z = 3$ である.

(2) 上の結果から $\|\boldsymbol{p}_u\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \times \boldsymbol{p}_v\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)\| = (u^2+v^2+1)^2$ である. 従って S の面積は $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$ と変数変換を行えば, D は (r,θ) の領域 $\left[0,\sqrt{3}\right] \times [0, 2\pi]$ に対応するため,

$$\iint_D \|\boldsymbol{p}_u\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \times \boldsymbol{p}_v\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)\|\,dudv = \int_0^{\sqrt{3}}\left(\int_0^{2\pi} r(r^2+1)^2 d\theta\right)dr = \int_0^{\sqrt{3}} 2\pi r(r^2+1)^2\,dr = \left[\frac{\pi}{3}(r^2+1)^3\right]_0^{\sqrt{3}} = 21\pi$$

[3 の解答例] $\operatorname{rot} \boldsymbol{X} = -3y - 2x$ だから, グリーンの定理より

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{X} = \iint_D \operatorname{rot} \boldsymbol{X}\,dxdy = \iint_D 4(-3y-2x)\,dxdy = \int_1^3\left(\int_3^5 (-3y-2x)\,dx\right)dy = \int_1^3 (-6y-16)\,dx = -56$$

[4 の解答例] $\boldsymbol{x} \in M$ における原点と反対方向の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ である. $\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in M$ に対して $(\operatorname{rot} \boldsymbol{X})(\boldsymbol{x}) = \left(\begin{smallmatrix} 2y-2z \\ 2z-2x \\ 2x-2y \end{smallmatrix}\right)$ だから $((\operatorname{rot} \boldsymbol{X})(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})) = 0$ である. 従って, ストークスの定理より

$$\int_{\partial M} \boldsymbol{X} = \iint_M \operatorname{rot} \boldsymbol{X}\,dA = \iint_M (\operatorname{rot} \boldsymbol{X}, \boldsymbol{n})\,dA = 0$$

[5 の解答例] $\operatorname{div} \boldsymbol{X} = 2(x+y+z)$ だから, ガウスの定理より

$$\begin{aligned}\iint_{\partial D} \boldsymbol{X}\,dA &= \iiint_D \operatorname{div} \boldsymbol{X}\,dxdydz = \int_0^a\left(\int_0^a\left(\int_0^a 2(x+y+z)\,dx\right)dy\right)dz = \int_0^a\left(\int_0^a (a^2+2ay+2az)\,dy\right)dz \\ &= \int_0^a (2a^3+2a^2z)\,dz = 3a^4\end{aligned}$$

ベクトル解析期末試験問題　(2017.8.4 実施)

1. 実数の定数 c に対し, $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{X}$, を $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ x-cz \\ x+y \end{pmatrix}$ で定義する. $\boldsymbol{\omega}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t \end{pmatrix}$ で定義される写像 $\boldsymbol{\omega} : [0, 2\pi] \to \boldsymbol{R}^3$ によってパラメータ表示される曲線を C を とする.

(1) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{X}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{X}$ のポテンシャルが存在するように c の値を定めて, そのときの $\boldsymbol{X}$ のポテンシャル求めよ.

(3) c が (2) で求めた値であるとき, 線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{X}$ を求めよ.

2. $\boldsymbol{p}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+v \\ uv \\ u-v \end{pmatrix}$ によって定義される写像 $\boldsymbol{p} : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ でパラメータ表示される曲面を S とする.

(1) S の $\boldsymbol{p}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ における接平面の方程式を求めよ.

(2) D を $\boldsymbol{R}^2$ の原点を中心とする半径が 1 の円板 $D = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, u^2+v^2 \leqq 1 \right\}$ とする. $\boldsymbol{p}$ による D の像である S の部分集合の面積を求めよ.

3. $D = [0,1] \times [0,1]$ とし, $\boldsymbol{R}^2$ のベクトル場 $\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$ で定める. グリーンの定理を用いて D の境界 ∂D を反時計回りに 1 周する $\boldsymbol{X}$ の線積分 $\displaystyle\int_{\partial D} \boldsymbol{X}$ の値を求めよ.

4. M を中心が原点で半径が 1 の球面 $x^2+y^2+z^2=1$ の $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ を満たす部分とし, M には原点と反対方向の単位法線ベクトル場を与える. M のベクトル場 $\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2 \\ x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ ストークスの定理を用いて線積分 $\displaystyle\int_{\partial M} \boldsymbol{X}$ を求めよ.

5. D を立方体 $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$ とし, D の境界 ∂D には外向きの単位法線ベクトル場を与える. D のベクトル場 $\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy^2 \\ yz^2 \\ zx^2 \end{pmatrix}$ で定めるとき, ガウスの定理を用いて面積分 $\displaystyle\iint_{\partial D} \boldsymbol{X}\, dA$ を求めよ.

[1 の解答例] (1) $\operatorname{rot}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c+1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(2) $c=-1$ で, $\varphi\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=xy+yz+xz$ で $\boldsymbol{R}^3$ のスカラー場 φ を定めれば $\operatorname{grad}\varphi=\boldsymbol{X}$ となるため, φ は $\boldsymbol{X}$ のポテンシャルである.

(3) $\displaystyle\int_C\boldsymbol{X}=\int_C\operatorname{grad}\varphi=\varphi(\boldsymbol{\omega}(2\pi))-\varphi(\boldsymbol{\omega}(0))=\varphi\begin{pmatrix}2\pi\\0\\2\pi\end{pmatrix}-\varphi\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=4\pi^2$

[2 の解答例] (1) $\boldsymbol{p}_u\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\v\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_v\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\u\\-1\end{pmatrix}$ だから $\boldsymbol{p}_u\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\times\boldsymbol{p}_v\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-u-v\\2\\u-v\end{pmatrix}$ である. 従って $\boldsymbol{p}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_u\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\times\boldsymbol{p}_v\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ だから, S の $\boldsymbol{p}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ における接平面は $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ を通り, $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ に垂直な平面である. 故にこの接平面の方程式は $-(x-1)+2y+z-1=0$, すなわち $-x+2y+z=0$ である.

(2) 上の結果から $\|\boldsymbol{p}_u\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)\times\boldsymbol{p}_v\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)\|=\sqrt{2u^2+2v^2+4}$ である. 従って S の面積は $u=r\cos\theta$, $v=r\sin\theta$ と変数変換を行えば, D は (r,θ) の領域 $[0,1]\times[0,2\pi]$ に対応するため,

$$\iint_D\|\boldsymbol{p}_u\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)\times\boldsymbol{p}_v\left(\begin{smallmatrix}u\\v\end{smallmatrix}\right)\|\,dudv=\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}r\sqrt{2r^2+4}\,d\theta\right)dr=\int_0^1 2\pi r\sqrt{2r^2+4}\,dr=\left[\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(2+r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=\pi\left(2\sqrt{6}-\frac{8}{3}\right)$$

[3 の解答例] $\operatorname{rot}\boldsymbol{X}=0$ だから, グリーンの定理より $\displaystyle\int_{\partial D}\boldsymbol{X}=\iint_D\operatorname{rot}\boldsymbol{X}\,dxdy=\iint_D 0\,dxdy=0.$

[4 の解答例] M は $\boldsymbol{p}\begin{pmatrix}\theta\\\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta\\\sin\varphi\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}$ によって定義される写像 $\boldsymbol{p}:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\boldsymbol{R}^3$ でパラメータ表示される. $\boldsymbol{p}_\theta\begin{pmatrix}\theta\\\varphi\end{pmatrix}\times\boldsymbol{p}_\varphi\begin{pmatrix}\theta\\\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\theta\\\sin\varphi\cos\theta\\-\sin\theta\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\sin\varphi\sin\theta\\\cos\varphi\sin\theta\\0\end{pmatrix}=\sin\theta\,\boldsymbol{p}\begin{pmatrix}\theta\\\varphi\end{pmatrix}$ だから $\boldsymbol{p}\begin{pmatrix}\theta\\\varphi\end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{p}\begin{pmatrix}\theta\\\varphi\end{pmatrix}\in M$ におけ

る原点と反対方向の単位法線ベクトルである．$(\operatorname{rot}\boldsymbol{X})\big(\boldsymbol{p}\big(\begin{smallmatrix}\theta\\ \varphi\end{smallmatrix}\big)\big) = \begin{pmatrix} 2\sin\varphi\sin\theta \\ 2\cos\theta \\ 2\cos\varphi\sin\theta \end{pmatrix}$ だから，ストークスの定理により

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M}\boldsymbol{X} &= \iint_M \operatorname{rot}\boldsymbol{X}\,dA = \iint_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \left(\operatorname{rot}\boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{p}\big(\begin{smallmatrix}\theta\\ \varphi\end{smallmatrix}\big)\big), \boldsymbol{p}_\theta\big(\begin{smallmatrix}\theta\\ \varphi\end{smallmatrix}\big)\times\boldsymbol{p}_\varphi\big(\begin{smallmatrix}\theta\\ \varphi\end{smallmatrix}\big)\right)d\theta d\varphi \\
&= \iint_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \left(\operatorname{rot}\boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{p}\big(\begin{smallmatrix}\theta\\ \varphi\end{smallmatrix}\big)\big), \sin\theta\,\boldsymbol{p}\big(\begin{smallmatrix}\theta\\ \varphi\end{smallmatrix}\big)\right)d\theta d\varphi \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta(\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta + \sin\varphi\cos\theta\sin\theta + \cos\varphi\cos\theta\sin\theta)\,d\varphi\right)d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\theta + 4\cos\theta\sin^2\theta)\,d\theta = \int_0^1(1-t^2)\,dt + \int_0^1 4t^2\,dt = 2
\end{aligned}$$

[補足] ストークスの定理を用いずに線積分 $\displaystyle\int_{\partial M}\boldsymbol{X}$ を直接計算してみる．$\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \boldsymbol{R}^3$ を

$$\boldsymbol{\omega}_1(t) = \boldsymbol{p}\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_2(t) = \boldsymbol{p}\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_3(t) = \boldsymbol{p}\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} - t \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

によって定めて，$\boldsymbol{\omega}_1$,$\boldsymbol{\omega}_2$, $\boldsymbol{\omega}_3$ によってパラメータ表示される曲線をそれぞれ C_1, C_2, C_3 とすれば $\partial M = C_1 + C_2 + C_3$ であり，$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}_1(t)) = \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ \sin^2 t \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}_2(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos^2 t \\ \sin^2 t \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}_3(t)) = \begin{pmatrix} \sin^2 t \\ 0 \\ \cos^2 t \end{pmatrix}$ だから

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M}\boldsymbol{X} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}_1(t)), \boldsymbol{\omega}_1'(t))\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}_2(t)), \boldsymbol{\omega}_2'(t))\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}_2(t)), \boldsymbol{\omega}_3'(t))\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\,dt = 2
\end{aligned}$$

[5 の解答例] $\operatorname{div}\boldsymbol{X} = x^2 + y^2 + z^2$ だから，ガウスの定理より

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial D}\boldsymbol{X}\,dA &= \iiint_D \operatorname{div}\boldsymbol{X}\,dxdydz = \int_{-1}^1\left(\int_{-1}^1\left(\int_{-1}^1(x^2+y^2+z^2)\,dx\right)dy\right)dz = \int_{-1}^1\left(\int_{-1}^1\left(\frac{2}{3} + 2y^2 + 2z^2\right)dy\right)dz \\
&= \int_{-1}^1\left(\frac{8}{3} + 4z^2\right)dz = 8
\end{aligned}$$