数学の視点　空間の数学

詳細版

目次

1　ベクトルと計量とユークリッド幾何学

一般に, 集合 X, Y が与えられたとき, X の要素 x と Y の要素 y の対 (x, y) 全体からなる集合を $X \times Y$ で表し, X と Y の直積 (集合) という. $X \times Y$ の 2 つの要素 (x, y), (z, w) が $x = z$ かつ $y = w$ を満たすとき, またその時に限り (x, y) と (z, w) は等しいといい, $(x, y) = (z, w)$ で表す. この記号を用いると, 実 n 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ の加法は, 数ベクトルの対 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を $\boldsymbol{R}^n$ の要素 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ に対応させる $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^n$ への写像であり, スカラー倍は, 実数 c と数ベクトル $\boldsymbol{x}$ の対 $(c, \boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{R}^n$ の要素 $c\boldsymbol{x}$ に対応させる $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^n$ への写像であるとみることができる.

数ベクトルの集まりでない一般の集合では, $\boldsymbol{R}^n$ の加法とスカラー倍に着目し, 集合 V(要素は関数の集合や多項式の集合など, 数や数ベクトルでなくてもよい) と数の集合 $\boldsymbol{K}$ に対して, 2 種類の写像 $f : V \times V \to V$ と $g : \boldsymbol{K} \times V \to V$ を与え, $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, $g(r, \boldsymbol{x}) = r\boldsymbol{x}$ とおくことによってそれぞれ加法, 実数倍と呼ばれる演算を定義する. このように一般化された「演算」を考えることで, 数ベクトル空間の概念が一般化される. そこで, ベクトル空間の定義を以下のように行う. 以後 $\boldsymbol{K}$ は, 実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ または複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ を表す.

定義 1.1　集合 V に, 加法, スカラー倍とよばれる次の 2 種類の演算

- **加法** : V の 2 つの要素の対 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対して, V の要素 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ を対応させる演算.
- **スカラー倍** : $\boldsymbol{K}$ の要素 c と V の要素 $\boldsymbol{x}$ の対 $(c, \boldsymbol{x})$ に対して, V の要素 $c\boldsymbol{x}$ を対応させる演算.

が定義されていて, 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$, $c, d \in \boldsymbol{K}$ に対して, 次の $(i) \sim (vii)$ が成り立つとき, V を $\boldsymbol{K}$ 上の**ベクトル空間**という. また, V の要素を**ベクトル**とよび, それに対して $\boldsymbol{K}$ の要素を**スカラー**とよぶ.

(i) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ (結合法則).
(ii) V の要素 $\boldsymbol{0}$ で, すべての $\boldsymbol{x} \in V$ に対して, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ を満たすものがある.
(iii) 各 $\boldsymbol{x} \in V$ に対して, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{x}' \in V$ がある.
(iv) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ (交換法則).
(v) $(cd)\boldsymbol{x} = c(d\boldsymbol{x})$ (結合法則).
(vi) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.
(vii) $c(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = c\boldsymbol{x} + c\boldsymbol{y}$,　$(c + d)\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$ (分配法則).

条件 (ii) の $\boldsymbol{0}$ を V の零ベクトルといい, 条件 (iii) の $\boldsymbol{x}'$ を $-\boldsymbol{x}$ で表して $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{y})$ を $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ で表す.

注意 1.2　(1) $\boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{0}'$ がともに条件 (ii) を満たせば $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}' + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}'$ だから条件 (ii) を満たす $\boldsymbol{0}$ は 1 つしかない.

(2) $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\boldsymbol{x}'$ と $\boldsymbol{x}''$ がともに条件 (iii) を満たせば, 条件 (i), (ii) から $\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x}'' + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}'' + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') = (\boldsymbol{x}'' + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'$ だから各 $\boldsymbol{x} \in V$ に対して条件 (iii) を満たす $\boldsymbol{x}'$ は 1 つしかない.

(3) 条件 (ii), (vii) から $r\boldsymbol{0} + r\boldsymbol{0} = r(\boldsymbol{0} + \boldsymbol{0}) = r\boldsymbol{0}$, $0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x} = (0 + 0)\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x}$ だから条件 $(i) \sim (iii)$ より $r\boldsymbol{0} = r\boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = r\boldsymbol{0} + (r\boldsymbol{0} + (-r\boldsymbol{0})) = (r\boldsymbol{0} + r\boldsymbol{0}) + (-r\boldsymbol{0}) = r\boldsymbol{0} + (-r\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, $0\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{x} + (0\boldsymbol{x} + (-0\boldsymbol{x})) = (0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x}) + (-0\boldsymbol{x}) = 0\boldsymbol{x} + (-0\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ である. 従って $0\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ である.

(4) 条件 (iv), (vii) と (3) から $\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} = (1 + (-1))\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $(-1)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x} + 1\boldsymbol{x} = ((-1) + 1)\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ だから (2) によって $(-1)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{x}$ である.

定義 1.3　V, W を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする. V から W への写像 f が, 任意の V のベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ と $c \in \boldsymbol{K}$ に対して, $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ と $f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$ を満たすとき, f を V から W への **1 次写像**または**線形写像**という. なお, $V = W$ のときは, f を V の **1 次変換**という.

高校では, 平面ベクトル, 空間ベクトルの内積と 2 つのベクトルのなす角との関係を学んだ. 一般のベクトル空間では, ベクトルの長さや 2 つのベクトルのなす角を定義することはできないが, 加法と実数倍という演算を用いて一般のベクトル空間を定義したように, 内積を 2 つのベクトルの対に対して実数を対応させる演算として次のように抽象的に定義して, ベクトルの長さや直交, ベクトルのなす角という概念は内積を用いることによって定義する.

定義 1.4　V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする. V の二つのベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して $\boldsymbol{K}$ の要素 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を対応させる演

算 $(\ ,\ ): V\times V\to \boldsymbol{K}$ が, 任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V$, $c\in\boldsymbol{K}$ に対し, 次の (i)〜(iv) を満たすとき, $(\ ,\ )$ を V の**内積**という. 内積が定まっているベクトル空間を**計量ベクトル空間**という.

(i) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$, $\quad(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$

(ii) $(c\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $\quad(\boldsymbol{x},c\boldsymbol{y})=\bar{c}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$

(iii) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}$

(iv) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geqq 0$ であり, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$ となるのは $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ のときに限る.

注意 1.5 条件 (ii) から $(\boldsymbol{0},\boldsymbol{x})=(0\boldsymbol{0},\boldsymbol{x})=0(\boldsymbol{0},\boldsymbol{x})=0$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})=(\boldsymbol{x},0\boldsymbol{0})=\bar{0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})=0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})=0$ である.

例 1.6 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{K}^n$ の第 j 成分をそれぞれ x_j, y_j として, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{j=1}^{n}x_j\bar{y}_j$ で定めれば $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は定義 1.4 の条件を全て満たすので $\boldsymbol{K}^n$ の内積である. これを $\boldsymbol{K}^n$ の標準的な内積といい, $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ のとき, この内積が与えられた計量ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間という. $\boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{R}^3$ はユークリッド幾何学を展開する場である.

定義 1.7 V を $\boldsymbol{K}$ 上の計量ベクトル空間とし, $(\ ,\ )$ を V の内積とする. V のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して, $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$ とおき, $\|\boldsymbol{x}\|$ を $\boldsymbol{x}$ の**長さ**という. 長さが 1 であるベクトルを**単位ベクトル**という.

$c\in\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{x}\in V$ に対し, 定義 1.4 の (ii) から $\|c\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(c\boldsymbol{x},\,c\boldsymbol{x})}=\sqrt{c\bar{c}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}=\sqrt{c\bar{c}}\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}=|c|\|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つ. とくに $\|-\boldsymbol{x}\|=\|(-1)\boldsymbol{x}\|=|-1|\|\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{x}\|$ である.

複素数 z に対して $\mathrm{Re}\,z$ で z の実部 $\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$ を表し, $\mathrm{Im}\,z$ で z の虚部 $\dfrac{1}{2i}(z-\bar{z})$ を表す.

命題 1.8 V を $\boldsymbol{K}$ 上の計量ベクトル空間とする. $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ に対し $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2+2\mathrm{Re}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\|\boldsymbol{y}\|^2$ が成り立つ.

証明 定義 1.7, 定義 1.4 の (i) と (iii) より

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2&=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\\&=\|\boldsymbol{x}\|^2+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}+\|\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2+2\mathrm{Re}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\|\boldsymbol{y}\|^2\end{aligned}$$

だから結果が得られる. □

上の等式の $\boldsymbol{y}$ を $-\boldsymbol{y}$ で置き換えると $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2-2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\|\boldsymbol{y}\|^2$ だから, 次の結果が得られる.

系 1.9 V を $\boldsymbol{K}$ 上の計量ベクトル空間, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を V のベクトルとすれば, 以下の等式が成り立つ.

(1) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2=2\left(\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2\right)$

(2) $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ ならば $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\dfrac{1}{4}\left(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\right)$

(3) $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$ ならば $\mathrm{Re}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\dfrac{1}{4}\left(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\right)$, $\mathrm{Im}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\dfrac{1}{4}\left(\|\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}\|^2-\|\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y}\|^2\right)$

注意 1.10 V が座標平面 $\boldsymbol{R}^2$ または座標空間 $\boldsymbol{R}^3$ で, 原点 O を頂点の一つとする $\triangle$OAB を考え, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ をそれぞれ点 A, B の位置ベクトルとする. ここで, $\boldsymbol{x}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ とおけば, $\boldsymbol{x}$ は辺 AB の中点 M の位置ベクトルであり, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ だから $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|=\|\boldsymbol{a}\|=\mathrm{OA}$, $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\|\boldsymbol{b}\|=\mathrm{OB}$, $\|\boldsymbol{x}\|=\mathrm{OM}$, $\|\boldsymbol{y}\|=\mathrm{BM}=\mathrm{AM}$ が成り立つ. 故に系 1.9 の (1) の等式は「中線定理」$\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2=2\left(\mathrm{OM}^2+\mathrm{AM}^2\right)$ を意味する.

定理 1.11 V を $\boldsymbol{K}$ 上の計量ベクトル空間とする. V のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対して, 次の不等式が成り立つ.

シュワルツの不等式 : $|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|\leqq\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|$ 　　　三角不等式 : $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|\leqq\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$

証明 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V$ に対し, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ の場合, 命題 1.8 の等式の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ にそれぞれ $\boldsymbol{a}$, $-\dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b}$ を代入すれば, 右辺は

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}\|^2+\left(\boldsymbol{a},-\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b}\right)+\overline{\left(\boldsymbol{a},-\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b}\right)}+\left\|-\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b}\right\|^2&=\|\boldsymbol{a}\|^2-\frac{\overline{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}}{\|\boldsymbol{b}\|^2}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})-\overline{\frac{\overline{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}}{\|\boldsymbol{b}\|^2}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}+\left|-\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\right|^2\|\boldsymbol{b}\|^2\\&=\|\boldsymbol{a}\|^2-\frac{|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2}{\|\boldsymbol{b}\|^2}-\frac{|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2}{\|\boldsymbol{b}\|^2}+\frac{|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2}{\|\boldsymbol{b}\|^4}\|\boldsymbol{b}\|^2\\&=\|\boldsymbol{a}\|^2-\frac{|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2}{\|\boldsymbol{b}\|^2}=\frac{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\end{aligned}$$

となり, 左辺は 0 以上の実数だから, $\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 \geqq |(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2$ が成り立つ. $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ の場合, 注意 1.5 から $\|\boldsymbol{b}\|$ と $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ はともに 0 になり, この場合も $\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 \geqq |(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2$ が成り立つため, 両辺の正の平方根をとって $\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \geqq |(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|$ を得る. また, $\mathrm{Re}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \leqq |(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|$ だから命題 1.8 と上の結果により

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\mathrm{Re}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2 \leqq \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| + \|\boldsymbol{b}\|^2 \leqq \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| + \|\boldsymbol{b}\|^2 = (\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)^2$$

が得られる. 従って $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leqq \|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$ が成り立つ. □

V が $\boldsymbol{R}$ 上の計量ベクトル空間の場合, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ は実数だから, シュワルツの不等式は $-\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \leqq (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ と書き直せる. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が零ベクトルではない V のベクトルならば, $\|\boldsymbol{a}\|$ と $\|\boldsymbol{b}\|$ は正の実数だから, 上の不等式の各辺を $\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ で割れば $-1 \leqq \dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} \leqq 1$ が得られるため, $\dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \cos\theta$ を満たす $0 \leqq \theta \leqq \pi$ が 1 通りに定まる. この θ を **$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角**と定義する. このように $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角 θ を定義すれば, 高校で $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を定義する式として学んだ

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta \tag{1.1}$$

は実は, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角の方を定義する式であると考えられる. また, 命題 1.8 の等式から

$$\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 - 2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

が得られるが, この等式に (1.1) を代入すれば, 次の等式が得られる.

$$\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 - 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta \tag{1.2}$$

とくに, V が座標平面 $\boldsymbol{R}^2$ または座標空間 $\boldsymbol{R}^3$ で, 原点 O を頂点の一つとする $\triangle$OAB を考え, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ をそれぞれ点 A, B の位置ベクトルとすれば, $\|\boldsymbol{a}\| = \mathrm{OA}$, $\|\boldsymbol{b}\| = \mathrm{OB}$, $\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\| = \mathrm{AB}$, $\theta = \angle\mathrm{AOB}$ だから, (1.2) は次の余弦定理を意味する.

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA}\,\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB}$$

定義 1.12 V を $\boldsymbol{K}$ 上の計量ベクトル空間とする.

(1) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$ が $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ を満たすとき $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は**直交する**という.

(2) V のベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の**距離** $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ で定める.

$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ の場合, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ のとき $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が直交することと $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{2}$ であることは同値である.

定義 1.13 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間, $\boldsymbol{a}$ を V のベクトルとする. V のベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$ に対応させる V から V への写像を, **$\boldsymbol{a}$ 方向の平行移動**といい, $T_{\boldsymbol{a}}$ で表す.

定義 1.14 V, W を $\boldsymbol{K}$ 上の計量ベクトル空間, f を V から W への写像とする.

(1) 任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$ に対して $(f(\boldsymbol{x}),\, f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成り立つとき, f は**内積を保つ**という.

(2) 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\|f(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つとき, f は**ベクトルの長さを保つ**という.

(3) 任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$ に対して $d(f(\boldsymbol{x}),\, f(\boldsymbol{y})) = d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成り立つとき, f は**距離を保つ**という. とくに $V=W$ の場合, V から V への距離を保つ写像を V の**合同変換**という.

(4) 任意の単位ベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$ に対して $f(\boldsymbol{x})$, $f(\boldsymbol{y})$ は零ベクトルではなく, $\dfrac{(f(\boldsymbol{x}),\, f(\boldsymbol{y}))}{\|f(\boldsymbol{x})\|\|f(\boldsymbol{y})\|} = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成り立つとき, f は**角度を保つ**という.

注意 1.15 定義 1.14 から次のことがわかる.

(1) ベクトルの長さは内積を用いて定義されているため, 内積を保つ写像はベクトルの長さと角度を保つ.

(2) 系 1.9 の (2) と (3) から, 内積はベクトル空間の演算とベクトルの長さを用いて表されるため, ベクトルの長さを保つ 1 次写像は内積を保つ.

(3) ベクトルの間の距離は, ベクトル空間の演算とベクトルの長さを用いて定義されているため, ベクトルの長さを保つ 1 次写像は距離を保つ.

(4) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$ に対して $T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) - T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ だから, 平行移動は距離を保つ.

定理 1.16 V, W を $\boldsymbol{K}$ 上の計量ベクトル空間とする．1 次写像 $f: V \to W$ に関する次の 3 つの条件は同値である．

(i) f は単射で $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ が $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ を満たすならば $(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = 0$ である．

(ii) f は角度を保つ．

(iii) 正の実数 r で $\boldsymbol{x} \in V$ を $rf(\boldsymbol{x}) \in W$ に対応させる写像が内積を保つ写像になるものが存在する．

証明 $(i) \Rightarrow (ii)$: $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を V の単位ベクトルとする．$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ の場合は仮定から $\dfrac{(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))}{\|f(\boldsymbol{x})\|\|f(\boldsymbol{y})\|} = 0 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ である．$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq 0$ とする．$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{y}$ とおくと $\|\boldsymbol{y}\| = 1$ より $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) = 0$ だから，仮定から $(f(\boldsymbol{z}), f(\boldsymbol{y})) = 0$ である．一方 $f(\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})$ だから次の等式が得られる．

$$(f(\boldsymbol{z}), f(\boldsymbol{y})) = (f(\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{y})) = (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})(f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{y})) = (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\|f(\boldsymbol{y})\|^2$$

故に $(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\|f(\boldsymbol{y})\|^2$ であり，この等式の $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を入れ替えれば $(f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x})) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\|f(\boldsymbol{x})\|^2$ が得られる．内積の定義 1.4 の (iii) から $(f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x})) = \overline{(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))}$, $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\|f(\boldsymbol{x})\|^2 = \overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}\|f(\boldsymbol{x})\|^2$ だから $\overline{(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))} = \overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}\|f(\boldsymbol{x})\|^2$ が成り立つ．この両辺の共役を考えれば $(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\|f(\boldsymbol{x})\|^2$ が得られるため，上で得た式とあわせて $(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\|f(\boldsymbol{x})\|^2 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\|f(\boldsymbol{y})\|^2$ が成り立つ．従って $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq 0$ より $\|f(\boldsymbol{x})\|^2 = \|f(\boldsymbol{y})\|^2$ だから $\|f(\boldsymbol{x})\| = \|f(\boldsymbol{y})\|$ が得られるため $\dfrac{(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))}{\|f(\boldsymbol{x})\|\|f(\boldsymbol{y})\|} = \dfrac{(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))}{\|f(\boldsymbol{x})\|^2} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ である．

$(ii) \Rightarrow (iii)$: (i) が成り立つため，V の単位ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq 0$ の場合は $\|f(\boldsymbol{x})\| = \|f(\boldsymbol{y})\|$ が上の証明から得られる．$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ の場合，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$ であり $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$ は V の単位ベクトルだから上の証明から $\left\|f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\right)\right\| = \|f(\boldsymbol{y})\|$ が成り立つ．仮定から $(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = 0$ で，命題 1.8 よりこの等式の左辺の 2 乗は $\dfrac{1}{2}\|f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})\|^2 = \dfrac{1}{2}\|f(\boldsymbol{x})\|^2 + \dfrac{1}{2}\|f(\boldsymbol{y})\|^2$ に等しくなり，これが $\|f(\boldsymbol{y})\|^2$ に等しいことから，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ の場合も $\|f(\boldsymbol{x})\| = \|f(\boldsymbol{y})\|$ が成り立つ．従って $\boldsymbol{x}$ が単位ベクトルならば $\|f(\boldsymbol{x})\|$ は一定の値をとり，この値を c とおくと仮定から $c > 0$ である．ともに零でない V のベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して $\dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}$, $\dfrac{1}{\|\boldsymbol{y}\|}\boldsymbol{y}$ は単位ベクトルだから，$\left\|f\left(\dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}\right)\right\| = \left\|f\left(\dfrac{1}{\|\boldsymbol{y}\|}\boldsymbol{y}\right)\right\| = r$ であり，f は角度を保つことから $\dfrac{\left(f\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}\right), f\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{y}\|}\boldsymbol{y}\right)\right)}{c^2} = \left(\dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}, \dfrac{1}{\|\boldsymbol{y}\|}\boldsymbol{y}\right)$ が成り立つ．この両辺に $\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ をかけて $r = \dfrac{1}{c}$ とおけば $(rf(\boldsymbol{x}), rf(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が得られ，$\boldsymbol{x} \in V$ を $rf(\boldsymbol{x}) \in W$ に対応させる写像は内積を保つことがわかる．

$(iii) \Rightarrow (i)$: 内積を保つ写像はベクトルの長さを保つため，単射である．従って仮定から f も単射である．$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ を満たす $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対し，仮定から $|r|^2(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (rf(\boldsymbol{x}), rf(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ であり，$r \neq 0$ だから $(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = 0$ である． □

定理 1.17 内積を保つ写像は 1 次写像である．

証明 $f: V \to W$ が内積を保つ写像ならば，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と $c \in \boldsymbol{K}$ に対して，命題 1.8 と仮定から

$$\begin{aligned}
\|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\|^2 &= \|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|^2 + (f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), -f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})) + \overline{(f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), -f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}))} \\
&\quad + \|-f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\|^2 \\
&= \|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|^2 - (f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x})) - (f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{y})) - \overline{(f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x}))} \\
&\quad - \overline{(f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{y}))} + \|f(\boldsymbol{x})\|^2 + (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) + \overline{(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))} + \|f(\boldsymbol{y})\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) - \overline{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} - \overline{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})} \\
&\quad + \|\boldsymbol{x}\|^2 + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - \overline{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})} + \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = 0 \\
\|f(c\boldsymbol{x}) - cf(\boldsymbol{x})\|^2 &= \|f(c\boldsymbol{x})\|^2 - (f(c\boldsymbol{x}), cf(\boldsymbol{x})) - \overline{(f(c\boldsymbol{x}), cf(\boldsymbol{x}))} + \|cf(\boldsymbol{x})\|^2 \\
&= \|f(c\boldsymbol{x})\|^2 - \bar{c}(f(c\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x})) - c\overline{(f(c\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}))} + |c|^2\|f(\boldsymbol{x})\|^2 \\
&= \|c\boldsymbol{x}\|^2 - \bar{c}(c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - c\overline{(c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} + |c|^2\|\boldsymbol{x}\|^2 \\
&= |c|^2\left(\|\boldsymbol{x}\|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - \overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} + \|\boldsymbol{x}\|^2\right) = 0
\end{aligned}$$

が得られるため $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})=f(c\boldsymbol{x})-cf(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ である．故に f は 1 次写像である． □

定理 1.18 V, W を $\boldsymbol{K}$ 上の計量ベクトル空間とする．距離を保つ写像 $f: V \to W$ に対し $\tilde{f}$ を f と $-f(\mathbf{0})$ 方向の平行移動との合成写像 $T_{-f(\mathbf{0})} \circ f$ とすれば, 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $\mathrm{Re}(\tilde{f}(\boldsymbol{x}), \tilde{f}(\boldsymbol{y})) = \mathrm{Re}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成り立つ．

証明 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $\|\tilde{f}(\boldsymbol{x}) - \tilde{f}(\boldsymbol{y})\| = \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ であり, $\tilde{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ が成り立つため, 等式 $\|\tilde{f}(\boldsymbol{x}) - \tilde{f}(\boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ において $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ の場合を考えれば, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\|\tilde{f}(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つ．命題 1.8 から $\|\tilde{f}(\boldsymbol{x}) - \tilde{f}(\boldsymbol{y})\|^2 = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2$ の左辺は $\|\tilde{f}(\boldsymbol{x})\|^2 - 2\mathrm{Re}(\tilde{f}(\boldsymbol{x}), \tilde{f}(\boldsymbol{y})) + \|\tilde{f}(\boldsymbol{y})\|^2$ に等しく, 右辺は $\|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\mathrm{Re}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2$ に等しいため $\mathrm{Re}(\tilde{f}(\boldsymbol{x}), \tilde{f}(\boldsymbol{y})) = \mathrm{Re}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が得られる． □

注意 1.19 (1) $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ ならば定理 1.18 の $\tilde{f}$ は内積を保ち $f = T_{f(\mathbf{0})} \circ \tilde{f}$ だから f は内積を保つ写像と $f(\mathbf{0})$ 方向の平行移動の合成写像である．

(2) 例 1.6 で定義した内積を $\boldsymbol{C}^2$ に与える． $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} \bar{z} \\ \bar{w} \end{pmatrix}$ に対応させる $\boldsymbol{C}^2$ から $\boldsymbol{C}^2$ への写像を f とするとき, f は距離とベクトルの長さを保つが, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^2$ に対して $f(i\boldsymbol{x}) = -if(\boldsymbol{x})$ が成り立つため f は $\boldsymbol{C}^2$ の 1 次変換ではない

問題

以下の各問題の数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{R}^3$ には例 1.6 で定めた標準的な内積が与えられているものとする．

(A) $\boldsymbol{R}^2$ において $\triangle\mathrm{ABC}$ の頂点 B を通り AC に垂直な直線と直線 AC の交点を P, 頂点 C を通り AB に垂直な直線と直線 AB の交点を Q とし, BP と CQ との交点を H とする． $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ およびこれらの内積を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を表し, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は直交することを示せ．

(B) A, B, C, D を同一平面上にない $\boldsymbol{R}^3$ の点とする．B, C, D を通る平面を G として A, C, D を通る平面を H とするとき, 次の 3 つの条件は同値であることを示せ．

(i) $\big(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}\big) = 0$

(ii) $\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BD}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BC}^2$

(iii) A を通り G に垂直な直線と B を通り H に垂直な直線が交わる．

(C) A, B, C, D を同一平面上にない $\boldsymbol{R}^3$ の点とする．四面体 ABCD の内部の点 P で $\angle\mathrm{PAB} = \angle\mathrm{PAC} = \angle\mathrm{PAD}$ かつ $\angle\mathrm{PBA} = \angle\mathrm{PBC} = \angle\mathrm{PBD}$ を満たすものが存在するためには $\mathrm{AC} + \mathrm{BD} = \mathrm{AD} + \mathrm{BC}$ が成り立つことが必要十分であることを示せ．

2 距離と極限と位相

高校では,「関数の極限」や「数列の収束」を定義する際に「限りなく近づく」という直観に訴える表現を用いていたが, これは数学的に厳密な定義ではない．本節では, 集合が与えられたとき, 2 つの要素に対してその間の距離を対応させる「距離関数」と呼ばれる関数を導入することによって, 極限や収束の概念が定義されることを示す．

定義 2.1 X を集合とする．関数 $d: X \times X \to \boldsymbol{R}$ が次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすとき, d を X の距離関数という．距離関数 d が定義された集合 X を距離空間と呼んで, (X, d) で表す．

(i) 任意の $x, y \in X$ に対して $d(x,y) \geqq 0$ であり, $d(x,y) = 0$ は $x = y$ と同値である．

(ii) 任意の $x, y \in X$ に対して $d(x,y) = d(y,x)$ が成り立つ．

(iii) 任意の $x, y, z \in X$ に対して $d(x,z) \leqq d(x,y) + d(y,z)$ (三角不等式) が成り立つ．

まず $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V の距離関数について考える．$\boldsymbol{z}$ を V の一定のベクトル, c を $\boldsymbol{K}$ の要素とするとき, V には $\boldsymbol{x} \in V$ を $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}$ に対応させる平行移動と, $c\boldsymbol{x}$ に対応させる相似拡大という V の 2 種類の変換がある．そこで, 関数 $d: V \times V \to \boldsymbol{R}$ に関する次の条件を考える．

条件 2.2 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間, d を $V \times V$ で定義された実数値関数とする．

(Di) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ に対して $d(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

(Dii) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と $c \in \boldsymbol{K}$ に対して $d(c\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y}) = |c| d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

d が V の距離関数の場合, (Di) は平行移動によって距離が保たれることを意味し, (Dii) は c 倍する相似拡大で距離は c の絶対値倍されることを意味する. (Di) を満たす距離関数 d が与えられた V の 2 点 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の距離 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は平行移動により, $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ と原点との距離 $d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})$ に等しいので, d は $\boldsymbol{x}\in V$ を $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})$ に対応させる V で定義された実数値関数を定めれば一通りに定まる. そこで V で定義された実数値関数について次の条件を考える.

条件 2.3 ρ を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V で定義された実数値関数とする.

(Ni) すべての $\boldsymbol{x}\in V$ に対して $\rho(\boldsymbol{x})\geqq 0$ であり, $\rho(\boldsymbol{x})=0$ となるのは $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の場合に限る.

(Nii) $c\in\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{x}\in V$ に対し, $\rho(c\boldsymbol{x})=|c|\rho(\boldsymbol{x})$ が成り立つ.

(Niii) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ に対し, $\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\leqq\rho(\boldsymbol{x})+\rho(\boldsymbol{y})$ が成り立つ.

命題 2.4 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とし, $d:V\times V\to\boldsymbol{R}$ に対して $\rho_d:V\to\boldsymbol{R}$ を $\rho_d(\boldsymbol{x})=d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})$ で定める.

(1) d が定義 2.1 の (i) を満たせば ρ_d は条件 2.3 の (Ni) を満たす. d が条件 2.2 の (Di) を満たし, ρ_d が条件 2.3 の (Ni) を満たせば, d は定義 2.1 の (i) を満たす.

(2) d が条件 2.2 の (Dii) を満たせば ρ_d は条件 2.3 の (Nii) を満たす. d が条件 2.2 の (Di) を満たし, ρ_d が条件 2.3 の (Nii) を満たせば, d は定義 2.1 の (ii) と条件 2.2 の (Dii) を満たす.

(3) d が定義 2.1 の (iii) と条件 2.2 の (Di) を満たせば ρ_d は条件 2.3 の (Niii) を満たす. d が条件 2.2 の (Di) を満たし, ρ_d が条件 2.3 の (Niii) を満たせば d は定義 2.1 の (iii) を満たす.

証明 d が (Di) を満たせば, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ に対して $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=d(\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+(-\boldsymbol{y}))=d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})=\rho_d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ である.

(1) 前半の主張は明らかである. d が (Di) を満たし ρ_d が (Ni) を満たせば, 任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ に対して $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\rho_d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\geqq 0$ であり, $\rho_d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=0$ は $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ と同値だから d は定義 2.1 の (i) を満たす.

(2) d が (Dii) を満たせば, 任意の $c\in\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{x}\in V$ に対し $\rho_d(c\boldsymbol{x})=d(c\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})=d(c\boldsymbol{x},c\boldsymbol{0})=|c|d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})=|c|\rho_d(\boldsymbol{x})$ だから ρ_d は (Nii) を満たす. d が (Di) を満たし, ρ_d が (Nii) を満たせば, 任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ と $c\in\boldsymbol{K}$ に対して $d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=\rho_d(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})=\rho_d((-1)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))=|-1|\rho_d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\rho_d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $d(c\boldsymbol{x},c\boldsymbol{y})=\rho_d(c\boldsymbol{x}-c\boldsymbol{y})=\rho_d(c(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))=|c|\rho_d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=|c|d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ だから d は定義 2.1 の (ii) と (Dii) を満たす.

(3) d が定義 2.1 の (iii) と (Di) を満たせば $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ に対し $\rho_d(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=d(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})=d(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+(-\boldsymbol{y}),\boldsymbol{0}+(-\boldsymbol{y}))=d(\boldsymbol{x},-\boldsymbol{y})\leqq d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})+d(\boldsymbol{0},-\boldsymbol{y})=d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})+d(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{y},-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y})=d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})+d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})=\rho_d(\boldsymbol{x})+\rho_d(\boldsymbol{y})$ だから ρ_d は (Niii) を満たす. d が (Di) を満たし, ρ_d が (Niii) を満たせば $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V$ に対し $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})=\rho_d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})=\rho_d((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}))\leqq\rho_d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+\rho_d(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})=d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ だから d は定義 2.1 の (iii) を満たす. □

命題 2.5 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とし, $\rho:V\to\boldsymbol{R}$ に対して $d_\rho:V\times V\to\boldsymbol{R}$ を $d_\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ で定める.

(1) ρ が条件 2.3 の (Ni) を満たすことと d_ρ が定義 2.1 の (i) を満たすことは同値である.

(2) ρ が条件 2.3 の (Nii) を満たすことと d_ρ が条件 2.2 の (Dii) を満たすことは同値であり, このとき d_ρ は定義 2.1 の (ii) を満たす.

(3) ρ が条件 2.3 の (Niii) を満たすことと d_ρ が条件 2.2 の (Diii) を満たすことは同値である.

証明 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V$ に対し $d_\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=\rho((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})-(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}))=\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=d_\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ だから d_ρ は (Di) を満たす. d_ρ から命題 2.4 のように $\rho_{d_\rho}:V\to\boldsymbol{R}$ を定めれば, 任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して $\rho_{d_\rho}(\boldsymbol{x})=d_\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})=\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{0})=\rho(\boldsymbol{x})$ だから $\rho_{d_\rho}=\rho$ であることに注意する.

(1) 上の注意と命題 2.4 の (1) から主張が成り立つ.

(2) 最初の注意と命題 2.4 の (2) から ρ が (Nii) を満たせば d_ρ は定義 2.1 の (ii) と (Dii) を満たし, d_ρ が (Dii) を満たせば ρ は (Nii) を満たす.

(3) 最初の注意と命題 2.4 の (3) から主張が成り立つ. □

関数 $d:V\times V\to\boldsymbol{R}$ に対して $d_{\rho_d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\rho_d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})$ が任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ 対して成り立つため, d が条件 2.2 の (Di) を満たせば $d_{\rho_d}=d$ である. この事実と命題 2.4, 命題 2.5 から次の結果が得られる.

系 2.6 $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V に対し, $D(V)$ を条件 2.2 の (Di), (Dii) を満たす V の距離関数全体の集合, $N(V)$ を条件 2.3 の (Ni), (Nii), (Niii) を満たす V で定義された実数値関数全体の集合とする. (1) $d\in D(V)$ ならば $\rho_d\in N(V)$ であり, $\rho\in N(V)$ ならば $d_\rho\in D(V)$ である.

(2) $d \in D(V)$ を $\rho_d \in N(V)$ に対応させる $D(V)$ から $N(V)$ への写像は全単射で, この写像の逆写像は $\rho \in N(V)$ を $d_\rho \in D(V)$ に対応させる写像である.

そこで, ベクトルの長さの概念を抽象化した「ノルム」と呼ばれる概念を導入する.

定義 2.7 $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V で定義された実数値関数 ρ が条件 2.3 の (Ni), (Nii), (Niii) を満たすとき ρ を V のノルムという. ベクトル空間 V と V のノルムの対 (V,ρ) をノルム空間という.

注意 2.8 $\rho : \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{K}$ を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間としての $\boldsymbol{K}$ のノルムとすれば, 定義 2.7 の (Niii) より, $\rho(x) = \rho(x1) = |x|\rho(1)$ だから, $\boldsymbol{K}$ のノルムは $\rho(x) = k|x|$ の形で与えられる. 従って, ノルムから定義される $\boldsymbol{K}$ の距離関数は $d(x,y) = k|x-y|$ の形のものに限られる.

以下, ノルムと距離空間の例を与える.

例 2.9 V を $\boldsymbol{K}$ 上の計量ベクトル空間とする. 関数 $\rho : V \to \boldsymbol{R}$ を $\rho(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$ で定めれば定義 1.4 の (iv) から ρ は条件 2.3 の (Ni) を満たし, 定義 1.4 の (ii) から ρ は条件 2.3 の (Nii) を満たす. さらに定理 1.11 の三角不等式から ρ は条件 2.3 の (Niii) を満たすため, ρ は V のノルムである. V の距離関数 d_ρ は定義 1.12 の (2) で定義したものに他ならない. ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ には例 1.6 で与えた内積を用いて上のように定義される距離関数 d_ρ を与える.

例 2.10 以下の (1), (2), (3) では p を 1 以上の実数または $p = \infty$ とする.

(1) $\rho_p : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{R}$ を $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し, $\boldsymbol{x}$ の第 j 成分を x_j とするとき, 実数値関数 $\rho_p : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{R}$ を

$$\rho_p(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} & p \geqq 1 \\ (|x_1|, \dots, |x_n| \text{ の中で最大のもの}) & p = \infty \end{cases}$$

によって定める. このとき, ρ_p は $\boldsymbol{K}^n$ のノルムである.

(2) $a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a < b)$ に対し, $C[a,b]$ により閉区間 $[a,b]$ で定義された連続な実数値関数全体の集合を表す. このとき $C[a,b]$ は関数の和と実数倍で, $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間になる. 実数値関数 $\rho_p : C[a,b] \to \boldsymbol{R}$ を

$$\rho_p(f) = \begin{cases} \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} & p \geqq 1 \\ (t \in [a,b] \text{ を } |f(t)| \text{ に対応させる関数の最大値}) & p = \infty \end{cases}$$

によって定める. このとき, ρ_p は $C[a,b]$ のノルムである.

(3) $\boldsymbol{K}$ の数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ で, $p \geqq 1$ の場合は $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ が収束するもの全体からなる集合, $p = \infty$ の場合は $\{|x_n| \,|\, n = 0, 1, 2, \dots\}$ が上に有界であるもの全体からなる集合を $\ell^p(\boldsymbol{K})$ で表すことにする. このとき $\ell^p(\boldsymbol{K})$ は数列の和とスカラー倍で $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間になる. 実数値関数 $\rho_p : \ell^p(\boldsymbol{K}) \to \boldsymbol{R}$ を

$$\rho_p(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}) = \begin{cases} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} & p \geqq 1 \\ \sup\{|x_n| \,|\, n = 0, 1, 2, \dots\} & p = \infty \end{cases}$$

で定義すれば ρ_p は $\ell^p(\boldsymbol{K})$ のノルムである.

例 2.11 $\boldsymbol{Q}$ を有理数全体からなる集合とし, p を素数, α を 1 より小さな正の実数とする. 0 でない有理数 x に対し, $x = \frac{a}{b}p^n$ (ただし, n は整数で, a と b は p で割れない整数) であるとき, 実数 $\nu(x)$ を $\nu(x) = \alpha^n$ により定義する. $d_p : \boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R}$ を, $d_p(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \nu(x-y) & x \neq y \end{cases}$ で定めると d_p は $\boldsymbol{Q}$ の距離関数になる.

例 2.12 V を $\boldsymbol{R}$ 上の計量ベクトル空間とし, $r > 0$ に対して $S(V;r) = \{\boldsymbol{x} \in V \,|\, \|\boldsymbol{x}\| = r\}$ とおく. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S(V;r)$ に対して, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角を $\theta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ とするとき, 関数 $d : S(V;r) \times S(V;r) \to \boldsymbol{R}$ を $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = r\theta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ で定義すれば, d は $S(V;r)$ の距離関数である.

距離空間において, 点列の収束は次のように定義される.

定義 2.13 (X,d) を距離空間, $p \in X$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の点列とする. 任意の正の実数 ε に対し, 自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $d(a_n,p) < \varepsilon$」を満たすものが存在するとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は p に収束するといい, このことを $\lim_{n\to\infty} a_n = p$ で表す.

注意 2.14 (1) 定義 2.13 をさらに言い換えると, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $p \in X$ に収束するということは, 任意の正の実数 ε に対して, $d(a_n,p) \geqq \varepsilon$ であるような自然数 n は有限個しかないということである. 従って, X の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $p \in X$ に収束しないということは, 正の実数 ε_0 で, 条件「$d(a_n,p) \geqq \varepsilon_0$ である自然数 n が無限に存在する.」を満たすものが存在することである.

(2) X の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し, 実数列 $\{d(a_n,p)\}_{n=1}^{\infty}$ を考えると, この数列は常に 0 以上の値をとり, 定義 2.13 から, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が p に収束するためには $\{d(a_n,p)\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束することが必要十分である.

定義 2.13 を使えば「はさみうちの原理」と呼ばれる次の命題が厳密に証明できる.

命題 2.15 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ をともに収束する実数列とする. 実数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ がすべての自然数 n に対して $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ を満たし, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ ならば $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ である.

証明 任意の正の実数 ε に対し, 自然数 N_1, N_2 で「$n \geqq N_1$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$」, 「$n \geqq N_2$ ならば $|b_n - \alpha| < \varepsilon$」を満たすものがある. 仮定からすべての自然数 n に対して $-|a_n - \alpha| \leqq a_n - \alpha \leqq c_n - \alpha \leqq b_n - \alpha \leqq |b_n - \alpha|$ が成り立つため, N_1, N_1 の大きい方を N とすると, $n \geqq N$ ならば $|c_n - \alpha| < \varepsilon$ である. 従って $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ である. □

距離空間の間の写像の極限は次のように定義される.

定義 2.16 (X,d_X), (Y,d_Y) を距離空間, f を X の部分集合 Z から Y の部分集合 W への写像, $p \in X$, $q \in Y$ とする. 任意の正の実数 ε に対し, 正の実数 δ で, 条件「$x \in Z$ かつ $0 < d_X(x,p) < \delta$ ならば $d_Y(f(x),q) < \varepsilon$」を満たすものが存在するとき, 写像 f の p における極限は q であるといい, これを $\lim_{x\to p} f(x) = q$ で表す.

上の写像の極限の定義は, 点列の極限を用いて次のように言い換えることができる.

命題 2.17 (X,d_X), (Y,d_Y) を距離空間, f を X の部分集合 Z から Y の部分集合 W への写像とし, $p \in X$, $q \in Y$ とする. このとき, $\lim_{x\to p} f(x) = q$ であることは, 条件「すべての自然数 n に対して $x_n \in Z$, $x_n \neq p$ かつ $\lim_{n\to\infty} x_n = p$」を満たす X の任意の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = q$ が成り立つことと同値である.

証明 f の p における極限が q であることを仮定し, X の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, 条件

$$\text{「すべての } n \in \boldsymbol{N} \text{ に対して } x_n \in Z,\ x_n \neq p \text{ かつ } \lim_{n\to\infty} x_n = p\text{」} \cdots (i)$$

を満たすとする. f についての仮定から, 任意の正の実数 ε に対して, 正の実数 δ で, 条件

$$\text{「} x \in Z \text{ かつ } 0 < d_X(x,p) < \delta \text{ ならば } d_Y(f(x),q) < \varepsilon \text{」} \cdots (ii)$$

を満たすものが存在する. また $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ についての仮定 (i) から, 上の δ に対し, 自然数 N で, 条件

$$\text{「} k \geqq N \text{ ならば } x_n \in Z,\ x_n \neq p \text{ かつ } d_X(x_n,p) < \delta \text{」}$$

を満たすものが存在する. 従って $k \geqq N$ ならば, $x = x_n$ としたときに条件 (ii) の仮定が満たされて

$$\text{「} k \geqq N \text{ ならば } d_Y(f(x_n),q) < \varepsilon \text{」}$$

が成り立つため, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = q$ である.

上で示した主張の逆の主張を示すために, 逆の主張の対偶である『f の p における極限が q でないならば, 条件「すべての $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_n \in Z$, $x_n \neq p$ かつ $\lim_{n\to\infty} x_n = p$」を満たす X の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = q$ が成り立たないものが存在する.』を示す.

f の p における極限が q でないとき, ある正の実数 ε_0 で, 次の条件を満たすものがある.

「任意の正の実数 δ に対して $f(x) \notin B_{d_Y}(q\,;\varepsilon_0)$ を満たす p と異なる $x \in B_{d_X}(p\,;\delta) \cap Z$ が存在する.」

従って, 任意の自然数 k に対して $f(x_n) \notin B_{d_Y}(q\,;\varepsilon_0)$ である p と異なる $x_n \in B_{d_X}(p\,;\frac{1}{k}) \cap Z$ が存在する. そこで X の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考えると, すべての $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_n \in Z$, $x_n \neq p$ であり, $0 < d_X(x_n,p) < \frac{1}{n}$ だから

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (課題その 2 の問題 D) と命題 2.15 から, $\lim_{n\to\infty} d_X(x_n, p) = 0$ である. 従って, 注意 2.14 の (2) により $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は p に収束する. ところが, 任意の自然数 k に対して $f(x_n) \notin B_{d_Y}(q\,;\varepsilon_0)$ だから, 注意 2.14 の (1) によって $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = q$ は成り立たないため, 上の主張が示された. □

集合 X に 2 つの距離関数 d, d' が与えられたとき, d と d' が異なる関数であっても, 例えば正の実数 k が存在して $d'(x,y) = kd(x,y)$ がすべての $x, y \in X$ に対して成り立つ場合のように, X 点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が距離関数 d のもとで収束することと, 距離関数 d' のもとで収束することが同値になることがある. これは, 点列の収束が距離関数そのものに直接依存するのではなく, 距離関数から定まる X の何らかの「構造」に依存することを示唆している. そこで, 以下の定義を行う.

定義 2.18 (X, d) を距離空間とする.

(1) $p \in X$, $r > 0$ に対して $d(x,p) < r$ を満たす X の点 x 全体からなる集合とを中心 p, 半径 r の開球といい $B_d(p\,;r)$ で表す.

(2) Y を X の部分集合とする. Y の点 p に対し, $B_d(p\,;r) \subset Y$ を満たす $r > 0$ が存在するとき, p を (距離関数 d に関する) Y の内点という.

(3) Y を X の部分集合とする. Y のすべての点が Y の内点であるとき, Y を (X, d) の開集合という.

(4) X の点 p に対し, X の部分集合 U で, p が U の内点になっているようなものを, p の近傍という. とくに, p を含む (X, d) の開集合を p の開近傍という.

注意 2.19 開球は開集合である. 実際, 任意の $q \in B_d(p\,;r)$ に対し,$d(q,p) < r$ だから, $r - d(q,p) > 0$ であり, $x \in B_d(q\,;r - d(q,p))$ ならば $d(x,q) < r - d(q,p)$ が成り立つため, 距離関数の定義の (iii) から $d(x,p) \leqq d(x,q) + d(q,p) < r$ である. 従って $x \in B_d(p\,;r)$ が成り立ち, $B_d(q\,;r - d(q,p))$ は $B_d(p\,;r)$ に含まれるため, q は $B_d(p\,;r)$ の内点である. 故に $B_d(p\,;r)$ のすべての点は $B_d(p\,;r)$ の内点だから $B_d(p\,;r)$ は開集合である.

開集合を用いれば, 定義 2.13 は以下のように言い換えられる.

定義 2.20 (X, d) を距離空間, $p \in X$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の点列とする. p を含む任意の開集合 U に対し, 自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $a_n \in U$」を満たすものが存在するとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は p に収束するといい, このことを $\lim_{n\to\infty} a_n = p$ で表す.

実際, p を中心とする開球は p を含む開集合で, $a_n \in B_d(p\,;\varepsilon)$ であることと $d(a_n, p) < \varepsilon$ であることは同値だから, 定義 2.20 の意味で点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が p に収束していれば, 定義 2.13 の意味でも点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は p に収束している. 逆に, 定義 2.13 の意味で点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が p に収束しているとする. p を含む任意の開集合 U に対し, p は U の内点であることから $B_d(p\,;\varepsilon) \subset U$ を満たす正の数 ε がある. 仮定から自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $d(a_n, p) < \varepsilon$ すなわち $a_n \in B_d(p\,;\varepsilon)$」を満たすものが存在し, $B_d(p\,;\varepsilon) \subset U$ だから「$n \geqq N$ ならば $a_n \in U$」が成り立つ. 故に定義 2.20 の意味でも点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は p に収束するため, 定義 2.13 と定義 2.20 は同値な定義である.

また, 定義 2.16 は開集合を用いて以下のように言い換えられる.

定義 2.21 (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, f を X の部分集合 Z から Y の部分集合 W への写像, $p \in X$, $q \in Y$ とする. q を含む Y の任意の開集合 V に対し, p を含む X の開集合 U で, 条件「$x \in Z \cap U$ かつ $x \neq p$ ならば $f(x) \in V$」を満たすものが存在するとき, f の p における極限は q であるといい, これを $\lim_{x\to p} f(x) = q$ で表す.

定義 2.21 の意味で写像 f の p における極限が q であるとき, 任意の正の実数 ε に対し, $B_{d_Y}(q\,;\varepsilon)$ は q を含む Y の開集合だから p を含む X の開集合 U で, 条件「$x \in Z \cap U$ かつ $x \neq p$ ならば $f(x) \in B_{d_Y}(q\,;\varepsilon)$」を満たすものが存在する. このとき p は U の内点であることから $B_d(p\,;\delta) \subset U$ を満たす正の実数 δ がある. 従って δ は条件「$x \in Z \cap B_{d_X}(p\,;\delta)$ かつ $x \neq p$ ならば $f(x) \in B_{d_Y}(q\,;\varepsilon)$」を満たし, $x \in Z \cap B_{d_X}(p\,;\delta)$ かつ $x \neq p$ であることと $x \in Z$ かつ $0 < d_X(x,p) < \delta$ であることは同値であり, $f(x) \in B_{d_Y}(q\,;\varepsilon)$ は $d_Y(f(x), q) < \varepsilon$ と同値だから, 定義 2.16 の意味でも写像 f の p における極限は q である. 逆に定義 2.16 の意味で写像 f の p における極限が q であるとする. q を含む Y の任意の開集合 V に対し, q は V の内点であることから $B_{d_Y}(q\,;\varepsilon) \subset V$ を満たす正の実

数 ε がある．従って仮定から, 正の実数 δ で条件「$x \in Z$ かつ $0 < d_X(x,p) < \delta$ ならば $d_Y(f(x),q) < \varepsilon$」すなわち,「$x \in Z \cap B_{d_X}(p\,;\delta)$ かつ $x \neq p$ ならば $f(x) \in B_{d_Y}(q\,;\varepsilon)$」を満たすものが存在する．$B_{d_X}(p\,;\delta)$ は p を含む開集合で, $B_{d_Y}(q\,;\varepsilon)$ は V に含まれるため, 定義 2.21 の意味でも写像 f の p における極限は q である．以上から, 定義 2.16 と定義 2.21 は同値な定義である．

上でみたように定義 2.20 と定義 2.21 によって, 距離空間における点列の収束と, 写像の極限を定義することができるが, これらの定義では初めに与えた定義とは異なり, 距離関数の存在が完全に隠蔽されていて, 点列の収束や写像の極限は距離関数そのものより, 距離関数から定まる「開集合」と呼ばれる X の部分集合の集まりに依存していることがわかる．

そこで, 距離空間 (X,d) の開集合全体からなる集合を $\mathcal{O}_d$ で表す．開集合は X の部分集合だから, それらの集まりである $\mathcal{O}_d$ は X の部分集合全体からなる集合の部分集合である．また $p \in X$ に対し, p に収束する X の点列全体からなる集合を $\mathrm{Seq}_p(X,d)$ で表す．X に 2 種類の距離関数 d, d' が与えられたとき, 次のことが成り立つ．

定理 2.22　すべての $p \in X$ に対して $\mathrm{Seq}_p(X,d) \subset \mathrm{Seq}_p(X,d')$ であることと $\mathcal{O}_d \supset \mathcal{O}_{d'}$ であることは同値である．従って, すべての $p \in X$ に対して $\mathrm{Seq}_p(X,d) = \mathrm{Seq}_p(X,d')$ であることと $\mathcal{O}_d = \mathcal{O}_{d'}$ であることは同値である．

証明　定義 2.20 から, $\mathcal{O}_d \supset \mathcal{O}_{d'}$ ならば, すべての $p \in X$ に対して $\mathrm{Seq}_p(X,d) \subset \mathrm{Seq}_p(X,d')$ であることがわかる．逆に, すべての $p \in X$ に対して $\mathrm{Seq}_p(X,d) \subset \mathrm{Seq}_p(X,d')$ であるとして, $\mathcal{O}_d$ に属さない $\mathcal{O}_{d'}$ の要素 O が存在すると仮定すれば, $p \in O$ で, 距離関数 d に関して O の内点でないものが存在する．従って, 任意の自然数 n に対して $B_d\big(p\,;\frac{1}{n}\big) \not\subset O$ が成り立つため, $a_n \in B_d\big(p;\,\frac{1}{n}\big)$ で, O に属さないものが存在する．このとき X の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は距離関数 d に関して p に収束するため, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{Seq}_p(X,d)$ だから, 仮定によって $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{Seq}_p(X,d')$ でもある．一方, $p \in O$ かつ $O \in \mathcal{O}_{d'}$ だから $B_{d'}(p\,;\varepsilon) \subset O$ を満たす $\varepsilon > 0$ が存在し, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は距離関数 d' に関して p に収束することから, $a_N \in B_{d'}(p\,;\varepsilon)$ となる自然数 N が存在する．ところが, すべての自然数 n に対して a_n は O に属さないため, $B_{d'}(p\,;\varepsilon) \subset O$ であることと矛盾が生じる．故に $\mathcal{O}_d$ に属さない $\mathcal{O}_{d'}$ の要素は存在しない．すなわち $\mathcal{O}_d \supset \mathcal{O}_{d'}$ である． □

上の結果から, 距離空間 (X,d) の点列が収束するかどうかは, 距離関数 d から定まる開集合全体からなる集合 $\mathcal{O}_d$ にかかっている．この集合 $\mathcal{O}_d$ を「距離関数 d から定まる X の位相」という．

問題

(A) ρ_p を例 2.10 の (1) で与えた $\boldsymbol{K}^n$ のノルムとする．任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し, $\rho_\infty(\boldsymbol{x}) \leqq \rho_p(\boldsymbol{x}) \leqq n^{\frac{1}{p}}\rho_\infty(\boldsymbol{x})$ が成り立つことを示せ．

(B) ρ_p を例 2.10 の (2) で与えた $C[0,1]$ のノルムとする．自然数 n と 1 以上の実数 q に対し, 関数 $f_n : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を $f_n(x) = \begin{cases} n^{\frac{q+1}{q}}\left(\frac{1}{n} - x\right) & 0 \leqq x \leqq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \leqq x \leqq 1 \end{cases}$ によって定義する．$1 \leqq p < \infty$ のとき, $\rho_p(f_n) = \left(\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ を求め, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \rho_p(f_n) = 0$ であるためには $p < q$ であることが必要十分であることを示せ．従って距離空間 $(C[0,1], d_{\rho_p})$ における点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, $1 \leqq p < q$ ならばつねに値が 0 である関数に収束するが, $q \leqq p \leqq \infty$ ならばこの点列はつねに値が 0 である関数には収束しない．

(C) 例 2.11 で定義した $\nu(x)$, d_p に関して以下の問いに答えよ．

(1) 任意の $x, y \in \boldsymbol{Q} - \{0\}$ に対し, $\nu(xy) = \nu(x)\nu(y)$ が成り立つことを示せ．

(2) 任意の $x, y \in \boldsymbol{Q} - \{0\}$ に対し, $x + y \neq 0$ ならば $\nu(x+y) \leqq \max\{\nu(x), \nu(y)\}$ が成り立つことを示せ．

(3) $x, y, z \in \boldsymbol{Q}$ に関して $d_p(x,z) \leqq \max\{d_p(x,y),\, d_p(y,z)\}$ が成り立つことを示し, d_p は $\boldsymbol{Q}$ の距離関数になることを示せ．

(D) d_p を例 2.11 で与えた $\boldsymbol{Q}$ の距離関数とするとき, 距離空間 $(\boldsymbol{Q}, d_p)$ において, 次の数列はどんな有理数に収束するか答えよ．

(1) $1, p^{-1}, p^{-2}, \dots, p^{-n}, \dots$　(2) $1, p, p^2, \dots, p^n, \dots$　(3) $1, 1+p, 1+p+p^2, \dots, \displaystyle\sum_{i=0}^{n} p^k, \dots$

(E) 素数 p の倍数でない分母をもつ有理数全体からなる $\boldsymbol{Q}$ の部分集合を $\boldsymbol{Z}_{(p)}$ で表す．d_p を問題 (C) で与えた $\boldsymbol{Q}$

の距離関数とするとき, $\boldsymbol{Z}_{(p)}$ と $\boldsymbol{Q}$ における $\boldsymbol{Z}_{(p)}$ の補集合 $\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{Z}_{(p)}$ は距離空間 $(\boldsymbol{Q},d_p)$ の開集合であることを示せ.

(F) 例 2.12 で与えた関数 $d:S(V;r)\times S(V;r)\to\boldsymbol{R}$ は $S(V;r)$ の距離関数であることを示せ.

(G) $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V のノルム ρ が任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ に対して等式 $\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2+\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2=2(\rho(\boldsymbol{x})^2+\rho(\boldsymbol{y})^2)$ を満たすとする. $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ に対して $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を次のように定めれば, V の内積であることを示せ.

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2-\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2) & \boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}\text{ の場合}\\ \dfrac{1}{4}(\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2-\rho(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2)+\dfrac{i}{4}(\rho(\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y})^2-\rho(\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y})^2) & \boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}\text{ の場合}\end{cases}$$

3　空間のつながり方とその測り方

頂点や辺, 面のつながり方を指定するデータとして「頂点の集合」と「頂点の集合の部分集合の集まり」を与えることによって, 多面体の概念を一般化する「単体的複体」の概念を以下のように定義する.

定義 3.1　V を集合とする. V の空集合ではない有限部分集合からなる集合 Σ が次の条件を満たすとき, V と Σ の対 (V,Σ) を単体的複体という. このとき, V の要素を頂点, Σ の要素を単体という.

(i) $v\in V$ ならば $\{v\}\in\Sigma$ である.　　(ii) $\sigma\in\Sigma$ かつ $\tau\subset\sigma$ ならば $\tau\in\Sigma$ である.

定義 3.2　$K=(V,\Sigma)$ を単体的複体とする.

(1) K の単体 $\sigma\in\Sigma$ の要素の数が $n+1$ であるとき, σ を n 次元単体といい, n を $\dim\sigma$ で表す.

(2) K の単体の中で次元が最大であるものが存在して, その値が n であるとき, K を n 次元単体的複体という.

(3) K の n 次元以下の単体全体からなる Σ の部分集合を Σ^n で表せば, (V,Σ^n) は単体的複体である. これを K の n 骨格といい, K^n で表す.

(4) $W\subset V$, $T\subset\Sigma$ かつ $L=(W,T)$ が単体的複体であるとき, L を K の部分複体という.

定義 3.3　単体的複体 $K=(V,\Sigma)$ に対し, V から閉区間 $[0,1]$ への関数 p で 次の条件を満たすもの全体からなる集合を $|K|$ とおく.

(i) $p(v)\neq 0$ である頂点 $v\in V$ 全体からなる集合は Σ に属する.　　(ii) $\sum\limits_{v\in V}p(v)=1$

$d:|K|\times|K|\to\boldsymbol{R}$ を $p,q\in|K|$ に対し, $d(p,q)=\sqrt{\sum\limits_{v\in V}(p(v)-q(v))^2}$ で定めれば d は $|K|$ の距離関数である. 距離空間 $(|K|,d)$ を K の幾何学的実現という.

0 以上の整数 n に対し, 0 以上 n 以下の整数からなる集合 $\{0,1,2,\dots,n\}$ を $[n]$ で表す. また i 番目の成分が 1 で他の成分は 0 である $\boldsymbol{R}^{n+1}$ のベクトルを $\boldsymbol{e}_i$ とする.

命題 3.4　頂点の集合が $[n]$ である単体的複体 $K=([n],\Sigma)$ に対し, $\varphi_K:|K|\to\boldsymbol{R}^{n+1}$ を $\varphi_K(p)=\sum\limits_{i=0}^{n}p(i)\boldsymbol{e}_{i+1}$ で定めれば, φ_K は距離を保つ写像である.

証明　$p,q\in|K|$ ならば $\varphi_K(p)$, $\varphi_K(q)$ はそれぞれ $p(i)$, $q(i)$ を第 $i+1$ 成分とする $\boldsymbol{R}^{n+1}$ のベクトルだから $\|\varphi_K(p)-\varphi_K(q)\|=\sqrt{\sum\limits_{i=0}^{n}(p(i)-q(i))^2}=d(p,q)$ である.　□

例 3.5　(標準的 n 単体とその境界)

(1) $\Sigma(n)$ を空集合でない $[n]$ の部分集合全体からなる集合 $\{0,1,2,\dots,n\}$ とするとき, 単体的複体 $([n],\Sigma(n))$ を標準的 n 単体といい, Δ_n で表す. Δ_n は n 次元単体的複体で, $|\Delta_n|$ は $[n]$ から $[0,1]$ への写像全体からなる集合である. 成分がすべて 0 以上で, すべての成分の和が 1 であるような $\boldsymbol{R}^{n+1}$ のベクトル全体からなる集合を T_n とすれば命題 3.4 で定義した写像 $\varphi_{\Delta_n}:|\Delta_n|\to\boldsymbol{R}^{n+1}$ の像は T_n になるため, φ_{Δ_n} は $|\Delta_n|$ から T_n への距離を保つ全単射を与える. 従って,「図形」として $|\Delta_n|$ と T_n は同一視される. とくに, $|\Delta_0|$ は 1 つの点, $|\Delta_1|$ は線分, $|\Delta_2|$ は正三角形, $|\Delta_3|$ は正四面体とみなされる.

(2) Δ_n の $n-1$ 骨格は $([n], \Sigma(n) - \{[n]\})$ であり，これを $\partial\Delta_n$ で表す．$\partial\Delta_n$ は $n-1$ 次元単体的複体であり，$|\partial\Delta_n|$ は $|\Delta_n|$ の要素 p で，少なくとも一つの $i \in [n]$ に対して $p(i) = 0$ となるもの全体からなる $|\Delta_n|$ の部分集合である．T_n の点で，少なくとも一つの成分が 0 であるもの全体からなる T_n の部分集合を ∂T_n で表せば，∂T_n は T_n の「表面」である．命題 3.4 で定義した写像 $\varphi_{\partial\Delta_n} : |\partial\Delta_n| \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ の像は ∂T_n になるため，$\varphi_{\partial\Delta_n}$ は $|\partial\Delta_n|$ から ∂T_n への距離を保つ全単射を与える．従って，「図形」として $|\partial\Delta_n|$ と ∂T_n は同一視される．とくに，$|\partial\Delta_1|$ は線分の両端，$|\partial\Delta_2|$ は正三角形の周囲，$|\partial\Delta_3|$ は正四面体の表面とみなされる．

例 3.6　下の図 1 の長方形の上下の辺と左右の辺をそれぞれ矢印が重なるように貼り合わせれば，ドーナツ面 (2 次元トーラス) ができる．この長方形を図 2 のように三角形からなる面に分割して，各頂点に 0 から 8 の番号を付ける．

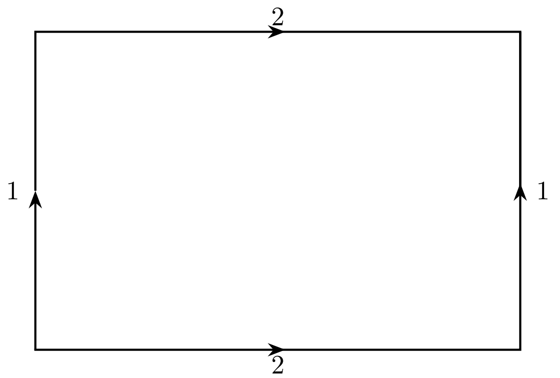


図 1

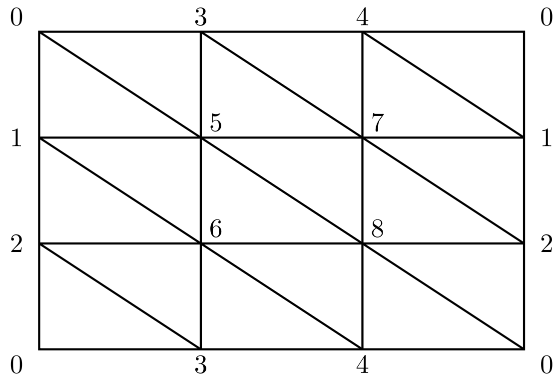


図 2

次に頂点の集合 $[8] = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ の部分集合を要素とする集合 Σ_T^0, Σ_T^1, Σ_T^2 を以下のように定める．

$$\begin{aligned}
\Sigma_T^0 &= \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\},\{8\}\} \\
\Sigma_T^1 &= \{\{0,1\},\{1,2\},\{0,2\},\{0,3\},\{0,5\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,6\},\{2,3\},\{3,5\},\{5,6\},\{3,6\},\{3,4\},\{3,7\}, \\
&\qquad \{5,7\},\{5,8\},\{6,8\},\{4,6\},\{4,7\},\{7,8\},\{4,8\},\{0,4\},\{1,4\},\{1,7\},\{2,7\},\{2,8\},\{0,8\}\} \\
\Sigma_T^2 &= \{\{0,3,5\},\{0,1,5\},\{1,5,6\},\{1,2,6\},\{2,3,6\},\{0,2,3\},\{3,4,7\},\{3,5,7\},\{5,7,8\}, \\
&\qquad \{5,6,8\},\{4,6,8\},\{3,4,6\},\{0,1,4\},\{1,4,7\},\{1,2,7\},\{2,7,8\},\{0,2,8\},\{0,4,8\}\}
\end{aligned}$$

$T^2 = ([8], \Sigma_T^0 \cup \Sigma_T^1 \cup \Sigma_T^2)$ とおけば，T^2 はドーナツ面を表す単体的複体である．

例 3.7　下の図 3 の長方形の辺の点を対角線の交点に関して対称な点と貼りあわせてできる図形を射影平面と呼ぶ．この長方形を図 4 のように三角形からなる面に分割して，各頂点に 0 から 9 の番号を付ける．

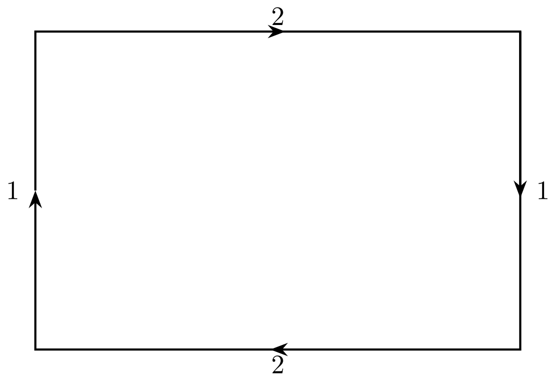


図 3

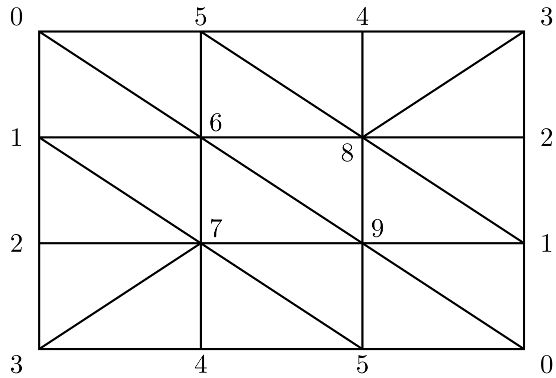


図 4

次に頂点の集合 $[9]=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ の部分集合を要素とする集合 Σ_P^0, Σ_P^1, Σ_P^2 を以下のように定める.

$$\begin{aligned}
\Sigma_P^0 =& \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\},\{8\},\{9\}\} \\
\Sigma_P^1 =& \{\{0,1\},\{1,2\},\{2,3\},\{0,5\},\{0,6\},\{1,6\},\{1,7\},\{2,7\},\{3,7\},\{3,4\},\{5,6\},\{6,7\},\{4,7\},\{4,5\}, \\
& \{5,8\},\{6,8\},\{6,9\},\{7,9\},\{5,7\},\{4,8\},\{8,9\},\{5,9\},\{3,8\},\{2,8\},\{1,8\},\{1,9\},\{0,9\}\} \\
\Sigma_P^2 =& \{\{0,5,6\},\{0,1,6\},\{1,6,7\},\{1,2,7\},\{2,3,7\},\{3,4,7\},\{4,5,8\},\{5,6,8\},\{6,8,9\}, \\
& \{6,7,9\},\{5,7,9\},\{4,5,7\},\{3,4,8\},\{2,3,8\},\{1,2,8\},\{1,8,9\},\{0,1,9\},\{0,5,9\}\}
\end{aligned}$$

$P^2=([9],\Sigma_P^0\cup\Sigma_P^1\cup\Sigma_P^2)$ とおけば, P^2 は射影平面を表す単体的複体である.

例 3.8　下の図 5 の長方形の上下の辺はそのまま同じ向きに貼りあわせ, 左右の辺の点は対角線の交点に関して対称な点と貼りあわせてできる図形をクラインの壷と呼ぶ. この長方形を図 6 のように三角形からなる面に分割して, 各頂点に 0 から 8 の番号を付ける.

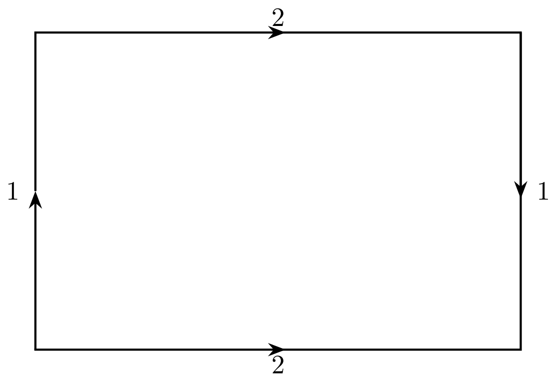


図 5

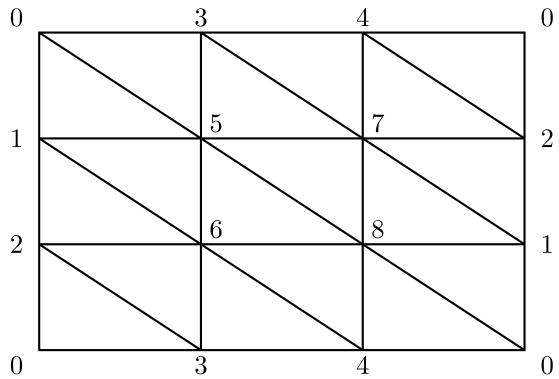


図 6

次に頂点の集合 $[8]=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ の部分集合を要素とする集合 Σ_K^0, Σ_K^1, Σ_K^2 を以下のように定める.

$$\begin{aligned}
\Sigma_K^0 =& \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\},\{8\}\} \\
\Sigma_K^1 =& \{\{0,1\},\{1,2\},\{0,2\},\{0,3\},\{0,5\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,6\},\{2,3\},\{3,5\},\{5,6\},\{3,6\},\{3,4\},\{3,7\}, \\
& \{5,7\},\{5,8\},\{6,8\},\{4,6\},\{4,7\},\{7,8\},\{4,8\},\{0,4\},\{2,4\},\{2,7\},\{1,7\},\{1,8\},\{0,8\}\} \\
\Sigma_K^2 =& \{\{0,3,5\},\{0,1,5\},\{1,5,6\},\{1,2,6\},\{2,3,6\},\{0,2,3\},\{3,4,7\},\{3,5,7\},\{5,7,8\}, \\
& \{5,6,8\},\{4,6,8\},\{3,4,6\},\{0,2,4\},\{2,4,7\},\{1,2,7\},\{1,7,8\},\{0,1,8\},\{0,4,8\}\}
\end{aligned}$$

このとき $K^2=([9],\Sigma_K^0\cup\Sigma_K^1\cup\Sigma_K^2)$ とおけば, K^2 はクラインの壷を表す単体的複体である. クラインの壷はメビウスの帯を 2 つ貼りあわせて得られる曲面でもある. 実際, 図 7 の長方形を 3 の線分で切り離し, B の部分を真下に平行移動して 2 の線分どうしを図 8 のように張りあわせれば, A の部分と, B と C を合わせた部分が, それぞれメビウスの帯になる. ただし, 射影平面とクラインの壷は 3 次元空間の中では作れないことが知られている.

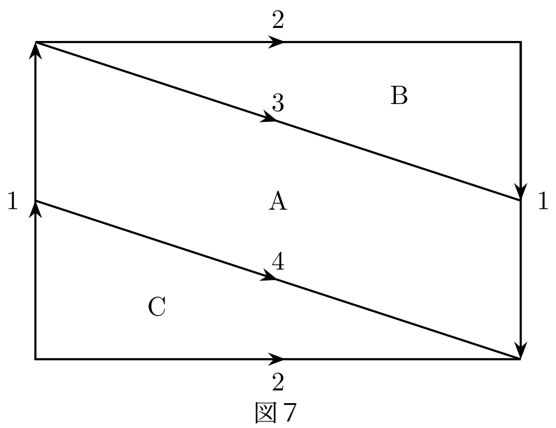


図 7

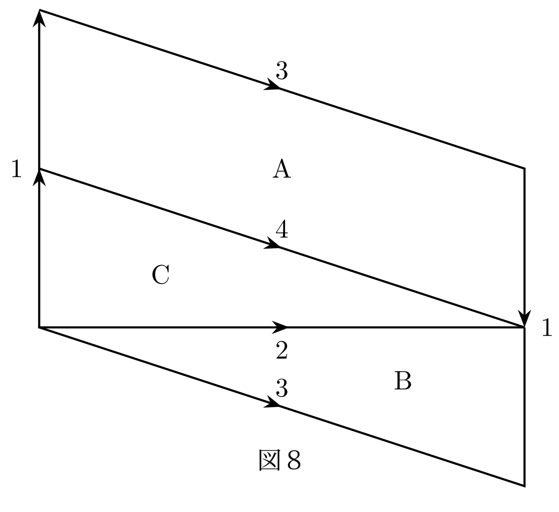


図 8

頂点の数が有限個である単体的複体を有限単体的複体という.

定義 3.9 $K = (V, \Sigma)$ を n 次元有限単体的複体とする. K の i 次元単体の個数を N_i とすると, $\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i N_i$ を K のオイラー数といい, $\chi(K)$ で表す.

例 3.10 二つ以上の離れた部分に分かれていない漢字のオイラー数は以下のようになる.

	一	十	大	千	万	口	曰	年	日	百	月	目	自	田	面	黽	雷	婁	畢	亀
頂点の数	2	5	6	7	8	4	6	13	6	10	9	8	10	9	15	23	23	26	23	25
辺の数	1	4	5	6	7	4	6	13	7	11	10	10	12	12	19	28	29	32	30	33
オイラー数	1	1	1	1	1	0	0	0	-1	-1	-1	-2	-2	-3	-4	-5	-6	-6	-7	-8

例 3.11 (1) 標準的 n 単体の i 次元単体の個数は, $n+1$ 個の要素をもつ集合 $[n]$ の $i+1$ 個の要素からなる部分集合の個数だから $\binom{n+1}{i+1}$ 個である. 従って $\chi(\Delta_n) = \sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n+1}{i+1}$ である. 二項定理 $(1+x)^{n+1} = 1 + \sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}x^{i+1}$ において $x=-1$ を代入すれば $1 - \sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n+1}{i+1} = 0$ が得られるため, $\chi(\Delta_n) = 1$ であることがわかる.

(2) $\partial\Delta_n$ は Δ_n から n 次元単体 $[n]$ のみを除いて得られる単体的複体だから $\chi(\partial\Delta_n) = \sum\limits_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n+1}{i+1} = \chi(\Delta_n) - (-1)^n\binom{n+1}{n+1} = 1-(-1)^n$ である.

例 3.12 T^2 と K^2 の頂点は 9 個, 1 次元単体は 27 個, 2 次元単体は 18 個だから, $\chi(T^2) = \chi(K^2) = 9-27+18 = 0$ である. 一方 P^2 の頂点は 10 個, 1 次元単体は 27 個, 2 次元単体は 18 個だから, $\chi(P^2) = 10-27+18 = 1$ である.

集合 X, Y に対して, $(X \cup Y) \times \{0,1\}$ の部分集合 $X \times \{0\}$ と $Y \times \{1\}$ の合併集合を $X \coprod Y$ で表す. このとき, $x \in X$ を $(x, 0)$ と同一視し, $y \in Y$ を $(y, 1)$ と同一視することにより, X と Y を $X \coprod Y$ の部分集合とみなす.

定義 3.13 $K = (V, \Sigma)$, $L = (W, T)$ を n 次元単体的複体, $\alpha = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, $\beta = \{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$ をそれぞれ K, L の n 次元単体 とする. 各 $i = 0, 1, \ldots, n$ に対し, $V \coprod W$ の要素 a_i と b_i を同一視して得られる集合を $V \# W$ で表し, V, W を $V \# W$ の部分集合とみなす. また, $\Sigma \coprod T$ から α と β を取り除き, 要素の個数が n 個以下である α の部分集合 $\{a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$ と β の部分集合 $\{b_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\}$ を同一視して得られる集合を $\Sigma \# T$ で表し, $\Sigma - \{\alpha\}$, $T - \{\beta\}$ を $\Sigma \# T$ の部分集合とみなす. このとき, $(V \# W, \Sigma \# T)$ は単体的複体であり, これを K と L の結合和と呼んで, $K \# L$ で表す.

例 3.14 (1) $\partial\Delta_2 = (\{0,1,2\}, \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}\})$ だから, $\partial\Delta_2$ から 1 次元単体 $\{1,2\}$ を取り除いて得られる結合和 $\partial\Delta_2\#\partial\Delta_2$ の頂点の集合は $\{(0,0), (1,0), (2,0), (0,1)\}$ ($(1,0) = (1,1)$, $(2,0) = (2,1)$) であり, 1 次元単体の集合は $\{\{(0,0),(1,0)\}, \{(0,0),(2,0)\}, \{(0,1),(1,0)\}, \{(0,1),(2,0)\}\}$ となるため, $\partial\Delta_2\#\partial\Delta_2$ は四角形を表すことがわかる.

(2) 2 次元単体的複体 K に対して $K\#T^2$ は K に「取っ手」を取り付けた形になっている.

定理 3.15 n 次元有限単体的複体 K, L に対して等式 $\chi(K\#L) = \chi(K) + \chi(L) - (-1)^n - 1$ が成り立つ.

証明 K, L の i 次元単体の個数をそれぞれ k_i, l_i とする. $0 \leqq i \leqq n-1$ の場合, L の i 次元単体と同一視される K の i 次元単体の個数は $n+1$ 個の要素をもつ集合の $i+1$ 個の要素からなる部分集合の個数だから $\binom{n+1}{i+1}$ 個である. 従って, $K\#L$ の i 次元単体の個数は $k_i + l_i - \binom{n+1}{i+1}$ である. また, $K\#L$ の n 次元単体の個数は $k_n + l_n - 2$ である. 故に例 3.11 の (1) で得た $\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n+1}{i+1} = 1$ を用いれば

$$
\begin{aligned}
\chi(K\#L) &= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\left(k_i + l_i - \binom{n+1}{i+1}\right) + (-1)^n(k_n + l_n - 2) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i k_i + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i l_i - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n+1}{i+1} - (-1)^n = \chi(K) + \chi(L) - (-1)^n - 1
\end{aligned}
$$

が得られる. □

上の結果と, $\chi(T^2)=0$, $\chi(P^2)=1$ から n による数学的帰納法によって次の結果が得られる.

系 3.16 2 次元有限単体的複体 K に対して $\chi(K\# T^2)=\chi(K)-2$, $\chi(K\# P^2)=\chi(K)-1$ が成り立つ. 従って, n 個のドーナツ面の連結和を X_n で表し, n 個の射影平面の連結和を Y_n で表せば, $\chi(X_n)=2-2n$, $\chi(Y_n)=2-n$ が成り立つ.

問題

(A) 二つ以上の離れた部分に分かれていない漢字は例 3.10 の表にあるものの他に, 九, 才, 上, 下, 久, 木, 本, 生, 缶, 干, 止, 正, 夭, 矢, 走, 丘, 古, 舌, 右, 中, 凹, 凸, 虫, 克, 早, 束, 且, 免, 東, 里, 由, 甲, 申, 串, 曳, 用, 角, 亜などがあるが, これらのオイラー数を求めよ.

(B) 二つ以上の離れた部分に分かれていなくて例 3.10 の表に無い漢字で, オイラー数が -4, -5, -6, -7, -8 であるものをできるだけたくさん見つけよ.

(C) 二つ以上の離れた部分に分かれていない漢字で, オイラー数が -9 以下になる漢字はあるか？

(D) Y_2 はクラインの壷になることを示せ.

4 円周の幾何学

円周の間の連続写像に「写像度」と呼ばれる整数を対応させることにより, 連続写像の性質を調べるのが本節の目的である. 円周の間の連続写像の写像度とは, 直観的には, 円周上の点が円周を正の向きに 1 周するとき, その点の像は円周を何回かまわるが, この回数を符号まで込めて考えたものである. 写像度を厳密に定義するために準備を行った後, 写像度の定義を与え, いくつかの重要な性質を証明し, その応用として, Brouwer の不動点定理と呼ばれる結果や, 「複素数を係数とする代数方程式は複素数の範囲で解をもつ」という代数学の基本定理などを示す.

記号 4.1 $[0,1]^n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in \boldsymbol{R}^n\,|\,0\leqq x_j\leqq 1\}$ とおき, n 次元立方体という. $D^n=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\,|\,\|\boldsymbol{x}\|\leqq 1\}$, $S^n=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^{n+1}\,|\,\|\boldsymbol{x}\|=1\}$ とおき, それぞれ n 次元球体, n 次元球面という. 特に, S^1 は原点を中心とする単位円であり, D^2 は S^1 を境界とする円板である. また, S^2 は原点を中心とする単位球面である.

X, Y がそれぞれ $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ の部分集合であるとき, X の点 $\boldsymbol{x}$ と Y の点 $\boldsymbol{y}$ の対 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 全体の集合 $X\times Y=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,|\,\boldsymbol{x}\in X,\ \boldsymbol{y}\in Y\}$ を X と Y の直積空間という. このとき, $X\times Y$ を $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の部分集合とみなす.

定義 4.2 $f,g:X\to Y$ を連続写像とする. 連続写像 $H:X\times[0,1]\to Y$ で, 各 $x\in X$ に対して $H(x,0)=f(x)$, $H(x,1)=g(x)$ を満たすものが存在するとき f と g はホモトピックであるといい H を f と g の間のホモトピーという.

距離空間 (X,d_X), (Y,d_Y) に対し, X から Y への連続写像全体からなる集合を $\mathrm{Map}(X,Y)$ で表す.

定義 4.3 距離空間 (X,d_X) と $p_0\in X$ に対し, $f(0)=f(1)=p_0$ を満たす $\mathrm{Map}([0,1],X)$ の要素全体からなる $\mathrm{Map}([0,1],X)$ の部分集合を $\mathrm{Map}_*([0,1],X)$ で表す. $f,g\in\mathrm{Map}_*([0,1],X)$ に対し, f と g の間のホモトピー $H:[0,1]\times[0,1]\to X$ で, すべての $t\in[0,1]$ に対して $H(0,t)=H(1,t)=p_0$ を満たすものが存在するとき, f と g は基点を保ってホモトピックであるという.

集合 $\mathrm{Map}_*([0,1],X)$ において, 基点を保ってホモトピックである写像同士をすべて同一視して得られる集合を $\pi(X,p_0)$ で表す. すなわち, $f\in\mathrm{Map}_*([0,1],X)$ に対し, $[f]$ を f と基点を保ってホモトピックである写像全体からなる $\mathrm{Map}_*([0,1],X)$ の部分集合とすれば, $\pi(X,p_0)$ は $[f]$ という形をした $\mathrm{Map}_*([0,1],X)$ の部分集合全体からなる集合である. $f,g\in\mathrm{Map}_*([0,1],X)$ に対し, $f*g,\,{}^tf:[0,1]\to X$ を

$$(f*g)(t)=\begin{cases} f(2t) & 0\leqq t\leqq \frac{1}{2}\\ g(2t-1) & \frac{1}{2}\leqq t\leqq 1\end{cases}\qquad {}^tf(t)=f(1-t)$$

で定義する．このとき, 次の結果が成り立つ．

命題 4.4 $f, g, h, k \in \mathrm{Map}_*([0,1], X)$ とする．

(1) f と h が基点を保ってホモトピックで, g と k が基点を保ってホモトピックならば $f*g$ と $h*k$ は基点を保ってホモトピックであり, ${}^t\!f$ と ${}^t\!h$ は基点を保ってホモトピックである．

(2) $(f*g)*h$ と $f*(g*h)$ は基点を保ってホモトピックである．

(3) 1_{p_0} をすべての $t \in [0,1]$ を p_0 に写す $\mathrm{Map}_*([0,1], X)$ の要素とすれば, $f * 1_{p_0}$ と $1_{p_0} * f$ はともに f と基点を保ってホモトピックである．

(4) $f * {}^t\!f$ と ${}^t\!f * f$ はともに 1_{p_0} と基点を保ってホモトピックである．

上の命題をふまえて, 以下のように X の基本群が定義できる．

定義 4.5 $\alpha, \beta \in \pi(X, p_0)$ に対し, $\alpha = [f]$, $\beta = [g]$ となる $f, g \in \mathrm{Map}_*([0,1], X)$ を選び, $\alpha * \beta = [f*g]$ によって $\pi(X, p_0)$ における演算 $*$ を定義する．この演算により, $\pi(X, p_0)$ は群になるが, $\pi(X, p_0)$ を X の基本群という．

以後, X, Y などは特に断らない限りユークリッド空間の部分集合とし, それらの間の写像は連続写像とする．

命題 4.6 (1) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ がともに連続写像ならば, 合成写像 $g \circ f : X \to Z$ も連続である．

(2) Y を $\boldsymbol{R}^m$ の部分集合, $f : X \to Y$ を写像とする．$\boldsymbol{x} \in X$ に対し, $f(\boldsymbol{x})$ の 第 j 成分を $f_j(\boldsymbol{x})$ で表し, $\boldsymbol{x}$ に $f_j(\boldsymbol{x})$ を対応させせることにより実数値関数 $f_j : X \to \boldsymbol{R}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ が定まるが, f が連続であるためには, すべての $j = 1, 2, \ldots, m$ に対して f_j が連続であることが必要十分である．

(3) $f, g : X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数, $c \in \boldsymbol{R}$ とすると, $f+g, cf, fg : X \to \boldsymbol{R}$ はすべて連続である．また, すべての $\boldsymbol{x} \in X$ に対して $g(\boldsymbol{x}) \neq 0$ ならば $\dfrac{f}{g} : X \to \boldsymbol{R}$ も連続である．ただし, $f+g$, cf, fg, $\dfrac{f}{g}$ はそれぞれ $(f+g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})$, $(cf)(\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$, $(fg)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(\boldsymbol{x}) = \dfrac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}$ で定義される関数である．

連続関数については, 次の結果は重要である．

定理 4.7 (中間値の定理) X を $\boldsymbol{R}$ の部分集合, $f : X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする．$[a, b] \subset X$ であり, $f(a) \neq f(b)$ ならば, $f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の値 d に対し, $f(c) = d$ となる $c \in (a, b)$ が存在する．

中間値の定理から次の結果がただちに得られる．

補題 4.8 $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ が連続で, すべての $x \in [a, b]$ に対して $f(x)$ が整数ならば, f は定数値関数である．

集合 X, Y の間の 2 つの写像 $f, g : X \to Y$ に対し, $f(x) = g(x)$ を満たす x を f と g の一致点という．特に, X が Y の部分集合で, g が包含写像 $g(x) = x$ の場合, f と g の一致点を f の不動点または固定点という．

中間値の定理を用いれば, 以下のことが容易に示される．

定理 4.9 閉区間 $[a, b]$ からそれ自身への連続写像は不動点をもつ．

定理 4.10 $f : S^1 \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とするとき, $f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ を満たす $\boldsymbol{x} \in S^1$ が存在する．

証明 $h : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を $h(t) = f(\cos \pi t, \sin \pi t) - f(-\cos \pi t, -\sin \pi t)$ で定義すれば, h は連続で, $h(0) = -h(1)$ が成り立つ．$h(0) = 0$ ならば $\boldsymbol{x} = (1, 0)$ が $f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ を満たす．$h(0) \neq 0$ ならば $h(0)$ と $h(1)$ の符号が異なるため, 中間値の定理により $h(t_0) = 0$ となる $t_0 \in [0,1]$ が存在する．このとき $\boldsymbol{x} = (\cos \pi t_0, \sin \pi t_0)$ が $f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ を満たす． □

次の定理は n 次元立方体で定義された実数値連続関数の本質的な性質の 1 つである．

定理 4.11 n 次元立方体で定義された実数値連続関数 $f : [0,1]^n \to \boldsymbol{R}$ は一様連続である．すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ で条件「$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \delta$ ならば $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \varepsilon$」を満たすものがある．

$\boldsymbol{R}^2$ と $\boldsymbol{C}$ を対応 $(x, y) \leftrightarrow x + iy$ により同一視して, 1 次元球面 (円周) S^1 を絶対値 1 の複素数全体の集合, 2 次元

球体 (円板) D^2 を絶対値 1 以下の複素数全体の集合とみなす.
$e : \boldsymbol{R} \to S^1$ を $e(t) = \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t$ で定義される写像とし, $l : S^1 - \{-1\} \to \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を

$$l(x+iy) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\cos^{-1} x & y \geqq 0 \\ -\frac{1}{2\pi}\cos^{-1} x & y \leqq 0 \end{cases}$$

$(x, y \in \boldsymbol{R},\ x^2+y^2 = 1)$ で定めると次の補題は容易に示される.

補題 4.12 (1) e, l は連続であり, $e(l(x+iy)) = x+iy$ $(x+iy \in S^1 - \{-1\},\ x, y \in \boldsymbol{R})$, $l(e(t)) = t$ $\left(t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$ が成り立つ.

(2) $s, t \in \boldsymbol{R}$ に対し, $e(s+t) = e(s)e(t)$ であり, $e(t) = e(s)$ であることと, $t-s$ が整数であることは同値である.

(3) 任意の $\delta > 0$ に対して, $\rho > 0$ で条件「$0 < |z+1| < \rho$ かつ $z \in S^1$ ならば $-\dfrac{1}{2} < l(z) < -\dfrac{1}{2} + \delta$ または $\dfrac{1}{2} - \delta < l(z) < \dfrac{1}{2}$」を満たすものがある.

補題 4.13 $f : [0,1]^n \to S^1$ を連続写像, $\boldsymbol{x}_0 \in [0,1]^n$ とする.

(1) $f(\boldsymbol{x}_0) = e(t_0)$ を満たす 実数 t_0 に対し, 連続写像 $\tilde{f} : [0,1]^n \to \boldsymbol{R}$ で, $e \circ \tilde{f} = f$ かつ $\tilde{f}(\boldsymbol{x}_0) = t_0$ を満たすものが存在する.

(2) 連続写像 $\tilde{f}, \tilde{g} : [0,1]^n \to \boldsymbol{R}$ が $e \circ \tilde{f} = e \circ \tilde{g} = f$ を満たせば, $k = \tilde{g}(\boldsymbol{x}_0) - \tilde{f}(\boldsymbol{x}_0)$ とおくと k は整数で, すべての $\boldsymbol{x} \in [0,1]^n$ に対して, $\tilde{g}(\boldsymbol{x}) = \tilde{f}(\boldsymbol{x}) + k$ が成り立つ.

証明 (1) $f(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{x}) + f_2(\boldsymbol{x})i$ $(f_1, f_2 : [0,1]^n \to \boldsymbol{R})$ とすると, 命題 4.6 の (2) から f_1, f_2 は連続だから定理 4.11 を用いると「$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \delta$ ならば $|f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{y})| < \sqrt{2}$ $(j = 1, 2)$」を満たすような $\delta > 0$ があることがわかる. 従って, $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \delta$ ならば $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < 2$ が成り立つ. $N > \dfrac{\sqrt{n}}{\delta}$ である整数 N をとれば, 任意の $j = 1, 2, \ldots, N$ と $\boldsymbol{x} \in [0,1]^n$ に対して, $\dfrac{j}{N}\boldsymbol{x} \in [0,1]^n$ であることに注意すると $\left\|\dfrac{j}{N}\boldsymbol{x} - \dfrac{j-1}{N}\boldsymbol{x}\right\| = \dfrac{\|\boldsymbol{x}\|}{N} < \delta$ だから $\left|f\left(\dfrac{j}{N}\boldsymbol{x}\right) - f\left(\dfrac{j-1}{N}\boldsymbol{x}\right)\right| < 2$ である. 一般に $z, w \in S^1$ が $|z - w| < 2$ を満たすことと $\dfrac{z}{w} \neq -1$ であることは同値だから, $g_j(\boldsymbol{x}) = f\left(\boldsymbol{x}_0 + \dfrac{j}{N}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\right) f\left(\boldsymbol{x}_0 + \dfrac{j-1}{N}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\right)^{-1}$ とおくと, g_j は $[0,1]^n$ から $S^1 - \{-1\}$ への写像であり, $g_j(\boldsymbol{x}_0) = 1$ となる. このとき, $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)g_1(\boldsymbol{x})g_2(\boldsymbol{x}) \cdots g_N(\boldsymbol{x})$ がすべての $\boldsymbol{x} \in [0,1]^n$ に対して成り立つ. そこで, $\tilde{f}$ を $\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = t_0 + \sum\limits_{j=1}^{N} l(g_j(\boldsymbol{x}))$ で定めると $\tilde{f}(\boldsymbol{x}_0) = t_0$ であり, 補題 4.12 を用いれば,

$$e(\tilde{f}(\boldsymbol{x})) = e\left(t_0 + \sum_{j=1}^{N} l(g_j(\boldsymbol{x}))\right) = e(t_0)e(l(g_1(\boldsymbol{x}))) \cdots e(l(g_N(\boldsymbol{x}))) = f(\boldsymbol{x}_0)g_1(\boldsymbol{x}) \cdots g_N(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}).$$

(2) すべての $\boldsymbol{x} \in [0,1]^n$ に対し, $e(\tilde{g}(\boldsymbol{x})) = e(\tilde{f}(\boldsymbol{x}))$ が成り立つため, 補題 4.12 により, $\tilde{g}(\boldsymbol{x}) - \tilde{f}(\boldsymbol{x})$ は整数である. 従って $\boldsymbol{x} \in [0,1]^n$ を固定して, $h(t) = \tilde{g}(\boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)) - \tilde{f}(\boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0))$ により写像 $h : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を定めると h は連続で常に整数を値にとる. 故に補題 4.8 から h は定数値関数で, $h(1) = h(0) = k$ だから $\tilde{g}(\boldsymbol{x}) = \tilde{f}(\boldsymbol{x}) + k$ である. □

上の (2) において, 特に $k = 0$ の場合を考えると, (1) の条件を満たす $\tilde{f}$ はただ 1 つしか存在しないことがわかる.

定義 4.14 連続写像 $f : S^1 \to S^1$ に対し, f の写像度と呼ばれる整数 $\deg f$ を以下のように定義する. $f \circ e : \boldsymbol{R} \to S^1$ の定義域を $[0,1]$ に制限した写像を $f' : [0,1] \to S^1$ とし, $f(1) = e(t_0)$ を満たす $t_0 \in \boldsymbol{R}$ を選んでおく. 補題 4.13 により, $e \circ \tilde{f} = f'$, $\tilde{f}(0) = t_0$ を満たす $\tilde{f} : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ がただ 1 つあるが, $e(\tilde{f}(1)) = f'(1) = f(e(1)) = f(1) = f(e(0)) = f'(0) = e(\tilde{f}(0))$ だから $\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$ は整数である. そこで, $\deg f = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$ と定義する.

$f(1) = e(s_0)$ である $s_0 \in \boldsymbol{R}$ に対し, $e \circ \tilde{g} = f'$, $\tilde{g}(0) = s_0$ を満たす $\tilde{g} : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ をとれば, 補題 4.13 から $\tilde{g}(x) = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(0) - \tilde{f}(0)$ がすべての $x \in [0,1]$ について成り立つから $\tilde{g}(1) - \tilde{g}(0) = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$ である. 従って, 上の写像度の定義は $f(1) = e(t_0)$ を満たす $t_0 \in \boldsymbol{R}$ の選び方に依存しない.

命題 4.15 $c, I, T : S^1 \to S^1$ をそれぞれ, 定値写像 $c(z) = p_0$ (p_0 は S^1 の定点), 恒等写像 $I(z) = z$, 対心写像 $T(z) = -z$ とすれば, $\deg c = 0$, $\deg I = \deg T = 1$ である.

証明 $e(t_0)=p_0$ とし, $\tilde{c}:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ を定値写像 $\tilde{c}(x)=t_0$ とすれば $e(\tilde{c}(x))=p_0=c(e(x))$ だから $\deg\ c=\tilde{c}(1)-\tilde{c}(0)=t_0-t_0=0$. $\tilde{I}:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ を包含写像 $\tilde{I}(x)=x$ とすれば, $e(\tilde{I}(x))=e(x)=I(e(x))$ だから $\deg\ I=\tilde{I}(1)-\tilde{I}(0)=1-0=1$. $\widetilde{T}:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ を $\widetilde{T}(x)=x+\dfrac{1}{2}$ で定めると, $e(\widetilde{T}(x))=e\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=-e(x)=T(e(x))$ だから $\deg\ T=\widetilde{T}(1)-\widetilde{T}(0)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}=1$. $\square$

命題 4.16 $f,g:S^1\to S^1$ を 連続写像とする.

(1) 写像 $fg:S^1\to S^1$ を複素数の積を用いて $(fg)(z)=f(z)g(z)$ で定めれば, $\deg(fg)=\deg\ f+\deg\ g$.

(2) $\deg(f\circ g)=(\deg\ f)(\deg\ g)$.

証明 $f',g':[0,1]\to S^1$ を $f\circ e, g\circ e:\boldsymbol{R}\to S^1$ の定義域を $[0,1]$ に制限した写像とし, $f(1)=e(t_0)$, $g(1)=e(s_0)$ を満たす $t_0,s_0\in\boldsymbol{R}$ を選んでおく. $e\circ\tilde{f}=f'$, $e\circ\tilde{g}=g'$, $\tilde{f}(0)=t_0$, $\tilde{g}(0)=s_0$ を満たす $\tilde{f},\tilde{g}:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ をとる.

(1) $\tilde{h}:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ を $\tilde{h}(x)=\tilde{f}(x)+\tilde{g}(x)$ で定めれば, $e(\tilde{h}(x))=e(\tilde{f}(x)+\tilde{g}(x))=e(\tilde{f}(x))e(\tilde{g}(x))=f(e(x))g(e(x))=(fg)(e(x))$ だから $\deg(fg)=\tilde{h}(1)-\tilde{h}(0)=(\tilde{f}(1)+\tilde{g}(1))-(\tilde{f}(0)+\tilde{g}(0))=(\tilde{f}(1)-\tilde{f}(0))+(\tilde{g}(1)-\tilde{g}(0))=\deg\ f+\deg\ g$.

(2) $\tilde{f}(1)=\tilde{f}(0)+\deg\ f$ だから $\hat{f}:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $\hat{f}(x)=\tilde{f}(x-k)+k(\deg\ f)$ (但し k は $x\in[k,k+1]$ である整数) で定めることができる. このとき, $\hat{f}$ は連続で, $\tilde{g}(x)\in[m_x,m_x+1]$ (m_x は整数) ならば $e(\hat{f}\circ\tilde{g}(x))=e(\hat{f}(\tilde{g}(x)))=e(\tilde{f}(\tilde{g}(x)-m_x)+m_x(\deg\ f))=e(\tilde{f}(\tilde{g}(x)-m_x))=f(e(\tilde{g}(x)-m_x))=f(e(\tilde{g}(x)))=(f\circ g)(e(x))$ である. 従って, $\deg(f\circ g)=\hat{f}\circ\tilde{g}(1)-\hat{f}\circ\tilde{g}(0)=\hat{f}(\tilde{g}(0)+\deg\ g)-\hat{f}(\tilde{g}(0))=\tilde{f}(\tilde{g}(0)+\deg\ g-(m_0+\deg\ g))+(m_0+\deg\ g)(\deg\ f)-(\tilde{f}(\tilde{g}(0)-m_0)+m_0(\deg\ f))=(\deg\ f)(\deg\ g)$. $\square$

系 4.17 n を整数とするとき $p_n(z)=z^n$ で定義される写像 $p_n:S^1\to S^1$ の写像度は n である.

証明 $n=0$ の場合 p_0 は定値写像だから命題 4.15 から $\deg\ p_0=0$. $n>0$ の場合 p_n は恒等写像 I の n 乗 I^n だから命題 4.15 と命題 4.16 から $\deg\ p_n=n\deg\ I=n$. $n<0$ の場合 $p_np_{-n}=p_0$ だから命題 4.16 から $\deg\ p_n+\deg\ p_{-n}=\deg\ p_0=0$. 一方 $\deg\ p_{-n}=-n$ だから $\deg\ p_n=n$. $\square$

命題 4.18 $f:S^1\to S^1$ を 連続写像とし, n を自然数, k を整数とする. $\xi_n=e\left(\frac{1}{n}\right)$ とおくとき, すべての $x\in S^1$ に対して $f(\xi_nx)=\xi_n^kf(x)$ であれば $\deg\ f-k$ は n の倍数である.

証明 $f':[0,1]\to S^1$, $\tilde{f}:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ を上の命題の証明におけるものと同じとする. 任意の $x\in\left[0,\frac{n-1}{n}\right]$ に対して $e\left(\tilde{f}\left(x+\frac{1}{n}\right)\right)=f\left(e\left(x+\frac{1}{n}\right)\right)=f(\xi_ne(x))=\xi_n^kf(e(x))=e(\tilde{f}(x))e\left(\frac{k}{n}\right)=e\left(\tilde{f}(x)+\frac{k}{n}\right)$ だから補題 4.12 の (2) により, $\tilde{f}\left(x+\frac{1}{n}\right)-\tilde{f}(x)-\frac{k}{n}$ は整数である. 従って $x\mapsto\tilde{f}\left(x+\frac{1}{n}\right)-\tilde{f}(x)-\frac{k}{n}$ は $\left[0,\frac{n-1}{n}\right]$ で定義された整数値をとる連続関数だから補題 4.8 により, 定数値関数である. そこで $m=\tilde{f}\left(x+\frac{1}{n}\right)-\tilde{f}(x)-\frac{k}{n}$ とおくと, $\deg\ f=\tilde{f}(1)-\tilde{f}(0)=\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\tilde{f}\left(\frac{j}{n}\right)-\tilde{f}\left(\frac{j-1}{n}\right)\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(m+\frac{k}{n}\right)=mn+k$ で, m は整数だから $\deg\ f-k$ は n の倍数である. $\square$

命題 4.19 $f,g:S^1\to S^1$ がホモトピックな連続写像ならば $\deg\ f=\deg\ g$ である.

証明 $H:S^1\times[0,1]\to S^1$ を f と g の間のホモトピーとする. $H':[0,1]^2\to S^1$ を $H'(s,t)=H(e(s),t)$ で定め, $H(0,0)=f(0)=e(t_0)$ を満たす $t_0\in\boldsymbol{R}$ を 1 つとる. 補題 4.13 から連続写像 $\widetilde{H}:[0,1]^2\to\boldsymbol{R}$ で, $e\circ\widetilde{H}=H'$ かつ $\widetilde{H}(0,0)=t_0$ を満たすものがある. このとき $s\in[0,1]$ に対し, $e(\widetilde{H}(s,0))=H'(s,0)=H(e(s),0)=f(e(s))$, $e(\widetilde{H}(s,1))=H'(s,1)=H(e(s),1)=g(e(s))$ だから $\deg\ f=\widetilde{H}(1,0)-\widetilde{H}(0,0)$, $\deg\ g=\widetilde{H}(1,1)-\widetilde{H}(0,1)$ である. 一方 $t\in[0,1]$ に対し, $e(\widetilde{H}(1,t))=H'(1,t)=H(e(1),t)=H(1,t)=H(e(0),t)=H'(0,t)=e(\widetilde{H}(0,t))$ となるため $t\mapsto\widetilde{H}(1,t)-\widetilde{H}(0,t)$ は $[0,1]$ で定義された整数値をとる連続関数だから補題 4.8 により, 定数値関数である. 従って, 上式から $\deg\ f=\deg\ g$ である. $\square$

命題 4.20 連続写像 $f:S^1\to S^1$ に関する次の 4 つの条件は同値である.

(1) 連続写像 $F:D^2\to S^1$ で, $x\in S^1$ ならば $F(x)=f(x)$ となるものがある.

(2) f は定値写像にホモトピックである.

(3) $\deg f = 0$.

(4) 連続写像 $\bar{f}: S^1 \to \boldsymbol{R}$ で, $e \circ \bar{f} = f$ を満たすものがある.

証明 (1) $\Rightarrow$ (2); $H: S^1 \times [0,1] \to S^1$ を $H(z,t) = F(tz)$ で定めると, $H(z,0) = F(0)$, $H(z,1) = f(z)$ だから H は定値写像と f の間のホモトピーである.

(2) $\Rightarrow$ (3); f が定値写像にホモトピックならば命題 4.19 と命題 4.15 から $\deg f = 0$ である.

(3) $\Rightarrow$ (4); $\tilde{f}: [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を $e(\tilde{f}(x)) = f(e(x))$ $(x \in [0,1])$ を満たす連続関数とすれば, 仮定から $\tilde{f}(1) = \tilde{f}(0)$ である. $t_0 = \tilde{f}(1) = \tilde{f}(0)$ とおき, $\bar{f}: S^1 \to \boldsymbol{R}$ を

$$\bar{f}(z) = \begin{cases} \tilde{f}(l(-z) + \frac{1}{2}) & z \neq 1 \\ t_0 & z = 1 \end{cases}$$

で定めると, 1 以外の点では明らかに $\bar{f}$ は連続である. $\tilde{f}$ の 0, 1 における連続性から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 条件「$0 < x < \delta$ または $1 - \delta < x < 1$ ならば $|\tilde{f}(x) - t_0| < \varepsilon$」を満たす $\delta > 0$ がある. 一方補題 4.12 の (3) から $\rho > 0$ で, 条件「$0 < |z-1| < \rho$ かつ $z \in S^1$ ならば $0 < l(-z) + \dfrac{1}{2} < \delta$ または $1 - \delta < l(z) + \dfrac{1}{2} < 1$」を満たすものがある. 従って, $\bar{f}$ は 1 においても連続である. $e \circ \bar{f} = f$ は $\bar{f}$ の定義からただちにわかる.

(4) $\Rightarrow$ (1); S^1 は $\boldsymbol{R}^2$ の有界閉集合だから, S^1 で定義された実数値連続関数 $\bar{f}$ は最大値と最小値をもつため, $\bar{f}(S^1) \subset [-M, M]$ を満たす正の実数 M がとれる. このとき $z \neq 0$ ならば $\left|\bar{f}\left(\dfrac{z}{|z|}\right)\right| \leqq M$ であるため, $z \to 0$ ならば $|z|\bar{f}\left(\dfrac{z}{|z|}\right) \to 0$ である. そこで $F: D^2 \to S^1$ を

$$F(z) = \begin{cases} e\left(|z|\bar{f}\left(\frac{z}{|z|}\right)\right) & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

で定めれば, F は 0 においても連続だから F は連続写像で, $x \in S^1$ ならば $\bar{f}$ についての仮定から $F(x) = e(\bar{f}(z)) = f(x)$ が成り立つ. $\square$

系 4.21 $f, g: S^1 \to S^1$ を連続写像とするとき, f と g がホモトピックであるためには, $\deg f = \deg g$ が成り立つことが必要十分である.

証明 $\deg f = \deg g$ が成り立つと仮定する. $\bar{g}: S^1 \to S^1$ を $\bar{g}(z) = \dfrac{1}{g(z)}$ で定義すると, 積 $\bar{g}g$ は定値写像だから命題 4.16, 系 4.15 より $\deg \bar{g} + \deg g = \deg(\bar{g}g) = 0$. 従って, $\deg \bar{g} = -\deg g$ だから $\deg(f\bar{g}) = \deg f + \deg \bar{g} = \deg f - \deg g = 0$. 故に命題 4.20 から $f\bar{g}$ は定値写像にホモトピックである. $H: S^1 \times [0,1] \to S^1$ を $f\bar{g}$ と定値写像 c $(c(z) = \cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$ の間のホモトピー $(H(z,0) = f(z)\bar{g}(z),\ H(z,1) = \cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$ として, $G: S^1 \times [0,1] \to S^1$ を $G(z,t) = g(z)H(z,t)(\cos(t\theta_0) - i\sin(t\theta_0))$ で定めれば, G は f と g の間のホモトピーである. $\square$

命題 4.22 任意の連続関数 $f: X \to \boldsymbol{R}$ に対し, $e \circ f: X \to S^1$ は定値写像にホモトピックである.

証明 $H: X \times [0,1] \to S^1$ を $H(x,t) = e(tf(x))$ で定めれば, H は定値写像から $e \circ f$ へのホモトピーである. $\square$

$\mu: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ を, $\mu(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$ で定めれば μ は連続関数である. このとき, $t \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $\mu(t\boldsymbol{x}) = |t|\mu(\boldsymbol{x})$, $\|\boldsymbol{x}\| \leqq \sqrt{n}\mu(\boldsymbol{x})$ が成り立ち, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ であることと $\mu(\boldsymbol{x}) = 0$ であることは同値であることに注意する. $\boldsymbol{z}_0$ をすべての成分が $\dfrac{1}{2}$ である $[0,1]^n$ の点とすれば, $\boldsymbol{x} \in [0,1]^n$ であるためには, $\mu(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0) \leqq \dfrac{1}{2}$ であることが必要十分である. また $\partial[0,1]^n = \left\{\boldsymbol{x} \in [0,1]^n \,\middle|\, \mu(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0) = \dfrac{1}{2}\right\}$ とおく.

命題 4.23 $\eta_n: [0,1]^n \to D^n$ を

$$\eta_n(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{2\mu(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0)}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0\|}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0) & \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{z}_0 \\ 0 & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}_0 \end{cases}$$

で定めれば, η_n は $\partial[0,1]^n$ を S^{n-1} の上に写す同相写像である.

証明 $\boldsymbol{x}\in[0,1]^n$ かつ $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{z}_0$ ならば $\|\eta_n(\boldsymbol{x})\|=2\mu(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_0)$ だから, $\eta_n(\boldsymbol{x})\in D^n$ であり, $\eta_n(\boldsymbol{x})\in S^{n-1}$ であることと, $\boldsymbol{x}\in\partial[0,1]^n$ であることは同値である. また μ の連続性から $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{z}_0}\|\eta_n(\boldsymbol{x})\|=\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{z}_0}2\mu(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_0)=0$ だから η_n は $\boldsymbol{z}_0$ で連続である. η_n は $\boldsymbol{z}_0$ 以外の点で明らかに連続だから, η_n は連続写像である. $\eta_n^{-1}:D^n\to[0,1]^n$ を

$$\eta_n^{-1}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\frac{\|\boldsymbol{x}\|}{2\mu(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{x}\neq 0\\ \boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{x}=0\end{cases}$$

で定めれば, $\boldsymbol{x}\neq 0$ ならば $\mu\left(\eta_n^{-1}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{z}_0\right)=\dfrac{\|\boldsymbol{x}\|}{2}$ だから, 確かに $\boldsymbol{x}\in D^n$ ならば $\eta_n^{-1}(\boldsymbol{x})\in[0,1]^n$ である. $\boldsymbol{x}\in D^n$ かつ $\boldsymbol{x}\neq 0$ ならば $\left\|\eta_n^{-1}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{z}_0\right\|=\dfrac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{2\mu(\boldsymbol{x})}\leqq\sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|$ だから η_n^{-1} は原点で連続である. η_n^{-1} は原点以外の点で明らかに連続だから, η_n^{-1} は連続写像である. $\|\eta_n(\boldsymbol{x})\|=2\mu(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_0)$ と $\mu(\eta_n(\boldsymbol{x}))=\dfrac{2\mu(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_0)^2}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_0\|}$ を用いれば, 任意の $\boldsymbol{x}\in[0,1]^n$ に対して $\eta_n^{-1}(\eta_n(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{x}$ であることが示され, $\left\|\eta_n^{-1}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{z}_0\right\|=\dfrac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{2\mu(\boldsymbol{x})}$ と $\mu\left(\eta_n^{-1}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{z}_0\right)=\dfrac{\|\boldsymbol{x}\|}{2}$ を用いれば, 任意の $\boldsymbol{x}\in D^n$ に対して $\eta_n(\eta_n^{-1}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{x}$ であることが示されるため, η_n^{-1} は η_n の逆写像である. □

$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n$, $y\in\boldsymbol{R}$ に対し, $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の点 $(x_1,x_2,\dots,x_n,y)$ を $(\boldsymbol{x},y)$ で表すことにする.

命題 4.24 $\rho_n:D^n\to S^n$ を

$$\rho_n(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\left(\frac{\sin(\pi\|\boldsymbol{x}\|)}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x},\cos(\pi\|\boldsymbol{x}\|)\right) & \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\\ (0,0,\dots,0,1) & \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\end{cases}$$

によって定めれば ρ_n は S^{n-1} の点をすべて $(0,0,\dots,0,-1)$ に写す連続な全射である. さらに $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}'$ かつ $\rho_n(\boldsymbol{x})=\rho_n(\boldsymbol{x}')$ が成り立つのは, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ がともに S^{n-1} に属している場合に限る.

証明 $\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}^n$, $y\in\boldsymbol{R}$ に対し, $\|(\boldsymbol{z},y)\|^2=\|\boldsymbol{z}\|^2+y^2$ だから, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ ならば $\|\rho_n(\boldsymbol{x})\|=1$ であり, 確かに $\rho_n(\boldsymbol{x})\in S^n$ である. ρ_n が原点以外の点で連続であることは明らかである. $\boldsymbol{x}\in D^n$ かつ $\boldsymbol{x}\neq 0$ ならば $\left\|\dfrac{\sin(\pi\|\boldsymbol{x}\|)}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}\right\|=\sin(\pi\|\boldsymbol{x}\|)$ だから, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}}\dfrac{\sin(\pi\|\boldsymbol{x}\|)}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ となるため, ρ_n は原点でも連続であることがわかる. $(\boldsymbol{z},y)\in S^n$ ($\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}^n$, $y\in[-1,1]$) に対し, $(\boldsymbol{z},y)\neq(0,0,\dots,0,\pm1)$ ならば, $\|\boldsymbol{z}\|^2+y^2=1$ かつ $y\neq\pm1$ だから, $\left\|\dfrac{\cos^{-1}y}{\pi\sqrt{1-y^2}}\boldsymbol{z}\right\|=\dfrac{\cos^{-1}y}{\pi}$ であることに注意すれば, $\rho_n\left(\dfrac{\cos^{-1}y}{\pi\sqrt{1-y^2}}\boldsymbol{z}\right)=(\boldsymbol{z},y)$ が成り立つことがわかる. また, $\rho_n(0,0,\dots,0)=(0,0,\dots,0,1)$ であり $\boldsymbol{x}\in S^{n-1}$ ならば $\rho_n(\boldsymbol{x})=(0,0,\dots,0,-1)$ だから ρ_n は S^{n-1} の点をすべて $(0,0,\dots,0,-1)$ に写す全射である.

まず ρ_n の定義から, $\rho_n(\boldsymbol{x})=(0,0,\dots,0,1)$ となる $\boldsymbol{x}\in D^n$ は 0 のみである. $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\in D^n-(S^{n-1}\cup\{0\})$ かつ $\rho_n(\boldsymbol{x})=\rho_n(\boldsymbol{x}')$ ならば, $\sin(\pi\|\boldsymbol{x}\|)$, $\sin(\pi\|\boldsymbol{x}'\|)$ はともに 0 でないため, $\dfrac{\sin(\pi\|\boldsymbol{x}\|)}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}=\dfrac{\sin(\pi\|\boldsymbol{x}'\|)}{\|\boldsymbol{x}'\|}\boldsymbol{x}'$ かつ $\cos(\pi\|\boldsymbol{x}\|)=\cos(\pi\|\boldsymbol{x}'\|)$ より $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$ が導かれる. 従って, 後半の主張が成り立つ. □

注意 4.25 (1) n が 1 以上の整数ならば D^n は弧状連結だから, 上の結果から S^n は弧状連結である. 命題 4.23 により $\partial[0,1]^n$ は S^{n-1} と同相だから, n が 2 以上の整数ならば $\partial[0,1]^n$ は 弧状連結である.

(2) D_n は $\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合であることからコンパクトで, S^n はハウスドルフ空間だから, ρ_n は閉写像である. 従って, ρ_n は商写像である.

命題 4.23, 命題 4.24 と上の (2) から次のことがわかる.

補題 4.26 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ または $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\partial[0,1]^n$ であるとき $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$ で表すことにして $[0,1]^n$ の関係 $\sim$ を定めれば, $\sim$ は同値関係であり, $\rho_n\circ\eta_n:[0,1]^n\to S^n$ はこの同値関係による商写像である.

定理 4.27 n が 2 以上の整数ならば, S^n から S^1 への任意の連続写像は, 定値写像にホモトピックである.

証明 $f:S^n\to S^1$ を連続写像とし, $f(0,0,\dots,0,1)=p_0$ とおく. $e(t_0)=p_0$ を満たす $t_0\in\boldsymbol{R}$ を 1 つ選び,

$\rho_n\eta_n(0,0,\dots,0) = (0,0,\dots,0,1)$ であることに注意すれば，補題 4.13 の (1) から，連続写像 $g : [0,1]^n \to \boldsymbol{R}$ で，$e\circ g = f\circ\rho_n\circ\eta_n$ かつ $g(0,0,\dots,0) = t_0$ を満たすものがある．$\partial[0,1]^n$ は η_n によって S^{n-1} の上に同相に写り，S^{n-1} は ρ_n によって $(0,0,\dots,0,1)$ に写るため，$\partial[0,1]^n$ のすべての点は $e\circ g = f\circ\rho_n\circ\eta_n$ によって p_0 に写る．従って，$\partial[0,1]^n$ は g によって，$e^{-1}(p_0) = \{n+t_0 | n \in \boldsymbol{Z}\}$ に写される．注意 4.25 の (1) により，$\partial[0,1]^n$ の g による像は t_0 を含む $e^{-1}(p_0)$ の弧状連結な部分集合であるが，$e^{-1}(p_0)$ は $\boldsymbol{R}$ の離散位相をもつ部分空間であるため，$\partial[0,1]^n$ の g による像は t_0 のみからなる集合である．故に補題 4.26 から，連続写像 $\tilde{f} : S^n \to \boldsymbol{R}$ で，$\tilde{f}\circ\rho_n\circ\eta_n = g$ を満たすものがある．このとき $e\circ\tilde{f}\circ\rho_n\circ\eta_n = e\circ g = f\circ\rho_n\circ\eta_n$ であり，$\rho_n\circ\eta$ は全射だから，$e\circ\tilde{f} = f$ が成り立つため，命題 4.22 によって f は定値写像にホモトピックである． □

定理 4.28 連続写像 $f, g : S^1 \to S^1$ の写像度が異なれば，f と g は一致点をもつ．特に，f の写像度が 1 と異なれば，f は不動点をもち，f の写像度が 0 と異なれば，f は上への写像である．

証明 任意の $x \in S^1$ に対して，$f(x) \neq g(x)$ が成り立てば $\deg f = \deg g$ であることを示せばよい．このとき，任意の $t \in [0,1]$ に対して $(1-t)f(x) \neq tg(x)$ だから，連続写像 $F : S^1 \times [0,1] \to S^1$ を $F(x,t) = \dfrac{(1-t)f(x) - tg(x)}{\|(1-t)f(x) - tg(x)\|}$ で定義できる．$F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = -g(x)$ だから命題 4.19, 命題 4.16, 命題 4.15 により，$\deg f = \deg(-g) = \deg(T\circ g) = (\deg T)(\deg g) = \deg g$． □

定理 4.29 連続写像 $f : D^2 \to D^2$ は $f(S^1) \subset S^1$ を満たし，$\tilde{f} : S^1 \to S^1$ を $\tilde{f}(z) = f(z)$ で与えられる写像としたとき $\deg(\tilde{f}) \neq 0$ であるとする．このとき，f は任意の連続写像 $g : D^2 \to D^2$ と一致点をもつ．特に，D^2 から D^2 への連続写像はつねに不動点をもつ．

証明 任意の $x \in D^2$ に対して，$f(x) \neq g(x)$ が成り立つと仮定する．各 $x \in D^2$ に対し，$g(x)$ を始点として $f(x)$ を通る半直線と S^1 との交点を $F(x)$ とする．

$$u(x) = \frac{f(x) - g(x)}{\|f(x) - g(x)\|}, \quad s(x) = -\langle f(x), u(x)\rangle + \sqrt{1 - \|f(x)\|^2 + \langle f(x), u(x)\rangle^2}$$

とおけば，$F(x) = f(x) + s(x)u(x)$ であり，$F : D^2 \to S^1$ は連続である．また，$x \in S^1$ ならば $f(x) \in S^1$ だから $F(x) = f(x)$ である．従って，$\tilde{f}$ は D^2 への拡張 F をもつため，命題 4.20 により $\deg(\tilde{f}) = 0$ となって仮定に反する． □

上の定理の最後の主張は定理 4.9 の 2 次元のバージョンである．また定理 4.10 の 2 次元のバージョンは以下のようになる．

定理 4.30 任意の連続写像 $f : S^2 \to \boldsymbol{R}^2$ に対し，$f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ となる点 $\boldsymbol{x} \in S^2$ が存在する．

証明 $h : D^2 \to S^2$ を $h(x_1, x_2) = \left(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\right)$ で定める．すべての $\boldsymbol{x} \in S^2$ に対して，$f(-\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{x})$ と仮定すれば，$G : D^2 \to S^1$ を $G(\boldsymbol{x}) = \dfrac{f(h(\boldsymbol{x})) - f(-h(\boldsymbol{x}))}{\|f(h(\boldsymbol{x})) - f(-h(\boldsymbol{x}))\|}$ で定めることができる．$g : S^1 \to S^1$ を G の S^1 への制限とすれば，命題 4.20 により $\deg g = 0$ である．一方すべての $x \in S^1$ に対して，$g(-x) = -g(x)$ が成り立つため，命題 4.18 において $n = 2$, $k = 1$ の場合を考えれば，$\deg g$ は奇数であり，矛盾が生じる． □

定理 4.31 (1) 連続写像 $f : S^1 \to S^1$ の写像度が奇数ならば $f(-x) = -f(x)$ となる点 $x \in S^1$ が存在する．
(2) 連続写像 $f : S^1 \to S^1$ の写像度が偶数ならば $f(-x) = f(x)$ となる点 $x \in S^1$ が存在する．

証明 (1) すべての $x \in S^1$ に対して，$f(-x) \neq -f(x)$ ならば，f の写像度は偶数であることを示す．$g : S^1 \to S^1$ を $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{\|f(x) + f(-x)\|}$ で定めると，すべての $x \in S^1$ に対して $g(-x) = g(x)$ だから，命題 4.18 において $n = 2$, $k = 0$ の場合を考えれば，g の写像度は偶数である．ところが任意の $x \in S^1$ と $t \in [0,1]$ に対して，$(1-t)f(x) + tg(x) \neq 0$ だから $H : S^1 \times [0,1] \to S^1$ を $H(x,t) = \dfrac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\|(1-t)f(x) + tg(x)\|}$ で定義できる．$H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ だから f は g にホモトピックである．従って命題 4.19 から $\deg f = \deg g$ となって，$\deg f$ は偶数である．

(2) すべての $x \in S^1$ に対して, $f(-x) \neq f(x)$ ならば, f の写像度は奇数であることを示す. $g : S^1 \to S^1$ を $g(x) = \dfrac{f(x) - (-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$ で定めるとすべての $x \in S^1$ に対して $g(-x) = -g(x)$ だから, 命題 4.18 において $n = 2$, $k = 1$ の場合を考えれば, g の写像度は奇数である. ところが任意の $x \in S^1$ と $t \in [0,1]$ に対して, $(1-t)f(x) - tg(x) \neq 0$ だから $H : S^1 \times [0,1] \to S^1$ を $H(x,t) = \dfrac{(1-t)f(x) - tg(x)}{\|(1-t)f(x) - tg(x)\|}$ で定義できる. $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ だから f は g にホモトピックである. 従って命題 4.19 から $\deg f = \deg g$ となって, $\deg f$ は奇数である. □

定理 4.32 (代数学の基本定理) 複素数を係数とする n 次代数方程式 $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ は $r = \max\{1, |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|\}$ とおくと, 絶対値が r 以下である複素数の解を少なくとも一つもつ.

証明 $|z| \leqq r$ ならば,

$$
\begin{aligned}
|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| &\leqq |a_{n-1}||z^{n-1}| + \cdots + |a_1||z| + |a_0| \leqq |a_{n-1}|r^{n-1} + \cdots + |a_1|r + |a_0| \\
&= r^{n-1}\Bigl(|a_{n-1}| + \cdots + \frac{|a_1|}{r^{n-2}} + \frac{|a_0|}{r^{n-1}}\Bigr) \leqq r^{n-1}(|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|) \leqq r^n
\end{aligned}
$$

だから, 連続写像 $g : D^2 \to D^2$ を $g(z) = -\dfrac{1}{r^n}(a_{n-1}(rz)^{n-1} + \cdots + a_1(rz) + a_0)$ で定義する. 一方, 連続写像 $f : D^2 \to D^2$ を $f(z) = z^n$ で定義すれば, $f(S^1) \subset S^1$, $\deg(\tilde{f}) = n \neq 0$ だから定理 4.29 により f と g は一致点をもつ. これを z_0 とするとき $(rz_0)^n = -(a_{n-1}(rz_0)^{n-1} + \cdots + a_1(rz_0) + a_0)$ だから rz_0 は与えられた方程式の解である. □

写像度は一般に n 次元球面の間の連続写像に対しても定義される.

定理 4.33 連続写像 $f : S^n \to S^n$ に対して f の写像度と呼ばれる整数 $\deg f$ で, 以下の 7 つの性質をもつものが定義される.

(1) 定値写像の写像度は 0 である.

(2) 恒等写像の写像度は 1 である.

(3) 対心写像の写像度は $(-1)^{n+1}$ である.

(4) $f, g : S^n \to S^n$ を連続写像とするとき, $\deg(g \circ f) = (\deg g)(\deg f)$ が成り立つ.

(5) $f, g : S^n \to S^n$ がホモトピックな連続写像ならば $\deg f = \deg g$ である.

(6) 連続写像 $f : S^n \to S^n$ がすべての $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対し $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ を満たせば, $\deg f$ は奇数である.

(7) 連続写像 $f : S^n \to S^n$ がすべての $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対し $f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ を満たせば, $\deg f$ は偶数である.

上の結果を用いれば, 前と同様の証明法で定理 4.28, 定理 4.29, 定理 4.30, 定理 4.31 はそれぞれ以下のように一般化される.

定理 4.34 連続写像 $f, g : S^n \to S^n$ が $\deg f \neq (-1)^{n+1} \deg g$ を満たせば, f と g は一致点をもつ. 特に, f の写像度が $(-1)^{n+1}$ と異なれば, f は不動点をもち, f の写像度が 0 と異なれば, f は上への写像である.

定理 4.35 連続写像 $f : D^n \to D^n$ は $f(S^{n-1}) \subset S^{n-1}$ を満たし, $\tilde{f} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ を $\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ で与えられる写像としたとき $\deg(\tilde{f}) \neq 0$ であるとする. このとき, f は任意の連続写像 $g : D^n \to D^n$ と一致点をもつ. 特に, D^n から D^n への連続写像はつねに不動点をもつ.

上の定理を Brouwer の一致点定理といい, その特別の場合を Brouwer の不動点定理という.

定理 4.36 $f : S^n \to \boldsymbol{R}^n$ を連続写像とするとき, $f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ を満たす $\boldsymbol{x} \in S^n$ が存在する.

上の定理を Borsuk の対心点定理または Borsuk-Ulam の定理という.

定理 4.37 連続写像 $f : S^n \to S^n$ の写像度が奇数ならば $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ となる点 $\boldsymbol{x} \in S^n$ が存在する. また, n が偶数で, f 写像度が 0 でなければ $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ となる点 $\boldsymbol{x} \in S^n$ が存在する.

次の定理は $n=2$ の場合は中間値の定理の簡単な応用として得られるが, 一般の n に対しては, 定理 4.36 を用いて示される.

定理 4.38 (ハムサンドウィッチの定理) $\boldsymbol{R}^n$ のなかに n 個の有界な可測集合 (体積がある集合) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ が任意に与えられたとき, $\boldsymbol{R}^n$ の超平面 P で, 次のようなものが存在する. 各 j に対し, P で分割される A_j の 2 つの部分の測度は等しい.

証明 $\boldsymbol{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \boldsymbol{R}^{n+1} | x_{n+1} = 0\}$ とみなし, $y_0 = (0, 0, \ldots, 0, 1) \in \boldsymbol{R}^{n+1}$ とおく. 各 $x \in S^n$ に対し, x に垂直で y_0 を含む $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の超平面を Q_x とする. $y_0 \neq \boldsymbol{R}^n$ だから Q_x は $\boldsymbol{R}^n$ に一致しない. そこで, Q_x に関して $x+y_0$ 同じ側にある A_j の測度を $u_j(x)$ で表す. このとき各 $u_j : S^n \to \boldsymbol{R}$ は連続だから, $f(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$ で定義される連続写像 $f : S^n \to \boldsymbol{R}^n$ に対して定理 4.36 を用いると, $u_j(p) = u_j(-p)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ を満たす $p \in S^n$ が存在する. 各 $x \in S^n$ に対して $Q_x = Q_{-x}$ で, $x + y_0$ と $-x + y_0$ は Q_x に関して反対側にあるため A_j の測度を v_j とすれば $u_j(x) + u_j(-x) = v_j$ が成り立つ. 従って $u_j(p) = u_j(-p) = \frac{v_j}{2}$ であり, Q_p は $\boldsymbol{R}^n$ と平行でないため, Q_p と $\boldsymbol{R}^n$ の交わりを P とすればよい. □

$\boldsymbol{x} \in S^n$ に対し, $\boldsymbol{R}^{n+1}$ のベクトルで $\boldsymbol{x}$ と直交するものを $\boldsymbol{x}$ における S^n の接ベクトルという. 写像 $v : S^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ で, 各 $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対して $v(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}$ における S^n の接ベクトルになるようなものを S^n の接ベクトル場といい, v が連続であれば連続な接ベクトル場という. また $v(\boldsymbol{x}) = 0$ となる $\boldsymbol{x} \in S^n$ を v の零点または特異点という. n が奇数ならば零点をもたない S^n の接ベクトル場が存在する. 例えば, $v(x_1, x_2, \ldots, x_{2m}) = (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2m}, x_{2m-1})$ で定められる $v : S^{2m-1} \to \boldsymbol{R}^{2m}$ がそうである.

定理 4.39 偶数次元の球面上の連続な接ベクトル場は必ず零点をもつ.

証明 S^{2m} 上に零点をもたない連続な接ベクトル場 $v : S^{2m} \to \boldsymbol{R}^{2m+1}$ が存在すると仮定する. $f : S^{2m} \to S^{2m}$ を $f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{\|v(\boldsymbol{x})\|} v(\boldsymbol{x})$ で定義すれば, 各 $\boldsymbol{x} \in S^{2m}$ に対し, $\boldsymbol{x}$ と $f(\boldsymbol{x})$ は直交するため, f は不動点をもたない. 従って定理 4.34 から $\deg f = (-1)^{2m+1} = -1$ である. 一方 $H : S^{2m} \times [0,1] \to S^{2m}$ を $H(\boldsymbol{x}, t) = \cos \dfrac{\pi t}{2} f(\boldsymbol{x}) + \sin \dfrac{\pi t}{2} \boldsymbol{x}$ で定めれば, 任意の $\boldsymbol{x} \in S^{2m}$ に対して $H(\boldsymbol{x}, 0) = f(\boldsymbol{x})$, $H(\boldsymbol{x}, 1) = \boldsymbol{x}$ が成り立つ. 従って, f は S^{2m} の恒等写像にホモトピックになり, $\deg f = 1$ が得られて矛盾が生じる. □

問題

(A) 与えられた楕円に四つの辺が外接する正方形が存在することを示せ.

(B) 地図上で円を描き, 円の内部に定点を 1 つ定める. その定点を中心として直線を回転させるとき, 円と直線の 2 つの交点における標高が等しくなることを示せ. ただし, 円周上には絶壁はないものとする.

(C) 滑らかな曲面になっている床に, 長さが等しい 4 本足の椅子を, がたつかないように置くことができることを示せ. ただし, 床は椅子を置くのに十分な広さをもつものとする.

(D) 微積分学で学んだ定理の中で, 中間値の定理を用いて示される定理を一つ以上述べ, その証明を与えよ.

5 距離空間における曲線の長さ

(X, d) を距離空間とするとき, $\boldsymbol{R}$ の区間から X への写像を X の曲線という. 距離関数を用いて, $\boldsymbol{R}$ の有限閉区間を定義域とする X の曲線の長さを以下のように定義する.

定義 5.1 (1) $\boldsymbol{R}$ の有限閉区間 $[a, b]$ に対し, $a = t_0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq \cdots \leqq t_n = b$ を満たす数列 $\Delta = \{t_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ を区間 $[a, b]$ の分割という.

(2) 区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta = \{t_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ に対し, $\|\Delta\| = \max\{t_1 - t_0, t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_{n-1}\}$ とおいて, これを分割 Δ の粗さという.

(3) $\Gamma = \{s_i\}_{i=0,1,\dots,m}$, $\Delta = \{t_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ を区間 $[a,b]$ の分割とする. $\{s_0, s_1, \dots, s_m\}$ が $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ の部分集合であるとき, Δ は Γ の細分であるいい, このことを $\Gamma \subset \Delta$ または $\Delta \supset \Gamma$ で表す. また, 数列 $s_1, s_2, \dots, s_m, t_1, t_2, \dots, t_n$ を単調増加数列になるように並び替えて得られる数列を $u_1, u_2, \dots, u_{m+n}$ とし, $u_0 = a$ とおいて得られる区間 $[a,b]$ の分割 $\{u_i\}_{i=0,1,\dots,m+n}$ を $\Gamma \cup \Delta$ で表す. このとき, $\Gamma \cup \Delta$ は Γ と Δ の細分である.

定義 5.2 X の曲線 $\omega : [a,b] \to X$ と $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{t_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ に対して

$$s(\omega, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} d(\omega(t_i), \omega(t_{i-1}))$$

とおく. $\boldsymbol{R}$ の部分集合 $S_\omega = \{x | \, x = s(\omega, \Delta)$ となる $[a,b]$ の分割 Δ がある.$\}$ が上に有界であるとき, ω は長さを持つといい, S_ω の上限を ω の長さと呼ぶ.

注意 5.3 Γ, Δ を $[a,b]$ の分割とする. Γ が Δ の細分ならば, $\|\Gamma\| \leqq \|\Delta\|$ であり, X の曲線 $\omega : [a,b] \to X$ に対し, 三角不等式から $s(\omega, \Gamma) \geqq s(\omega, \Delta)$ が成り立つ.

命題 5.4 X の曲線 $\omega : [a,b] \to X$ に対し, 次の条件 (L) を満たす実数 λ が存在すれば, λ は曲線 ω の長さである. また, 曲線 ω が連続写像で, 長さが λ であるとき, λ は条件 (L) を満たす.

(L) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ で, 条件「$\|\Delta\| < \delta$ ならば $|s(\omega, \Delta) - \lambda| < \varepsilon$」を満たす.

証明 実数 λ が条件 (L) を満たすとして, $[a,b]$ の分割 Δ_1 で $s(\omega, \Delta_1) > \lambda$ を満たすものが存在すると仮定する. (L) から $\delta > 0$ で, 条件「$\|\Delta\| < \delta$ ならば $|s(\omega, \Delta) - \lambda| < s(\omega, \Delta_1) - \lambda$」を満たすものが存在する. $\|\Delta_2\| < \delta$ を満たす $[a,b]$ の分割 Δ_2 を 1 つ選び, $\Delta_3 = \Delta_1 \cup \Delta_2$ とおけば, $\|\Delta_3\| \leqq \|\Delta_2\| < \delta$ かつ $\Delta_3 \supset \Delta_1$ が成り立つため, $|s(\omega, \Delta_3) - \lambda| < s(\omega, \Delta_1) - \lambda$ と $s(\omega, \Delta_3) \geqq s(\omega, \Delta_1) > \lambda$ が成り立つ. これらの不等式から $s(\omega, \Delta_3) < s(\omega, \Delta_1)$ が得られて矛盾が生じるため, λ は S_ω の上界である. $\lambda' < \lambda$ とすれば, (L) から $\delta > 0$ で, 条件「$\|\Delta\| < \delta$ ならば $|s(\omega, \Delta) - \lambda| < \lambda - \lambda'$」を満たすものが存在する. λ は S_ω の上界かつ (L) を満たすので, $\delta > 0$ で, 条件「$\|\Delta\| < \delta$ ならば $\lambda - s(\omega, \Delta) < \lambda - \lambda'$」を満たすものが存在する. 従って $\|\Delta\| < \delta$ ならば $s(\omega, \Delta) > \lambda'$ が成り立つため, λ は S_ω の上限である.

ω が連続写像で, 長さが λ であるとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $[a,b]$ の分割 $\Delta_\varepsilon = \{s_k\}_{k=0}^m$ で $\lambda - \dfrac{\varepsilon}{2} < s(\omega, \Delta_\varepsilon)$ を満たすものが存在する. このとき, $k = 1, 2, \dots, m$ に対して $s_{k-1} < s_k$ であると仮定してよい. 閉区間 $[a,b]$ はコンパクトだから, ω は一様連続である. 従って $\delta' > 0$ で条件「$x, y \in [a,b]$ かつ $|x - y| < \delta'$ ならば, $d(\omega(x), \omega(y)) < \dfrac{\varepsilon}{4m}$」を満たすものが存在する. そこで $\delta > 0$ を $\delta < \min\{s_k - s_{k-1} \,|\, k = 1, 2, \dots, m\}$ かつ $\delta \leqq \delta'$ を満たすように選ぶ. $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{t_i\}_{i=0}^n$ に対し, $i_k = \max\{i \in \{0, 1, \dots, n\} \,|\, t_i \in [a, s_k]\}$ によって整数列 $i_0, i_1, \dots, i_m$ を定める. $i_{k-1} > i_k$ を満たす k が存在すれば, $a \leqq t_{i_k} \leqq t_{i_{k-1}} \leqq s_{k-1}$ だから, i_{k-1} が $t_i \in [a, s_{k-1}]$ を満たす最大の整数であることと矛盾が生じるため, $i_0, i_1, \dots, i_m$ は単調増加数列である. Δ が $\|\Delta\| < \delta$ を満たすとき, $\{t_0, t_1, \dots, t_n\} \cap (s_k - \delta, s_k] \neq \emptyset$ であり, $s_{k-1} < s_k - \delta$ だから $\{t_0, t_1, \dots, t_n\} \cap (s_k - \delta, s_k] = \{t_{i_k}\}$ である. $a \leqq t_{i_0} \leqq s_0 = a$ だから $t_{i_0} = a$, また $t_n = b = s_m$ だから $t_{i_m} = b$ である. 従って $\Delta' = \{t_{i_k}\}_{k=0}^m$ とおくと Δ' は $[a,b]$ の分割であり, $\Delta' \cup \Delta_\varepsilon = \{t_{i_0}, s_0, t_{i_1}, s_1, \dots, t_{i_m}, s_m\}$ が成り立つ. このとき $d(\omega(s_0), \omega(t_{i_0})) = d(\omega(s_m), \omega(t_{i_m})) = 0$, $d(\omega(s_k), \omega(t_{i_k})) < \dfrac{\varepsilon}{4m}$ であり, 三角不等式から $d(\omega(t_{i_k}), \omega(t_{i_{k-1}})) \geqq d(\omega(t_{i_k}), \omega(s_{k-1})) - d(\omega(s_{k-1}), \omega(t_{i_{k-1}}))$ が成り立つため, 次の不等式が得られる.

$$\begin{aligned} s(\omega, \Delta' \cup \Delta_\varepsilon) - s(\omega, \Delta') &= \sum_{k=0}^{m} d(\omega(s_k), \omega(t_{i_k})) + \sum_{k=1}^{m} d(\omega(t_{i_k}), \omega(s_{k-1})) - \sum_{k=1}^{m} d(\omega(t_{i_k}), \omega(t_{i_{k-1}})) \\ &\leqq \sum_{k=0}^{m} d(\omega(s_k), \omega(t_{i_k})) + \sum_{k=1}^{m} d(\omega(s_{k-1}), \omega(t_{i_{k-1}})) = 2\sum_{k=1}^{m} d(\omega(s_k), \omega(t_{i_k})) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

従って $\lambda - \dfrac{\varepsilon}{2} < s(\omega, \Delta_\varepsilon) \leqq s(\omega, \Delta' \cup \Delta_\varepsilon) < s(\omega, \Delta') + \dfrac{\varepsilon}{2}$ であり, $\Delta \supset \Delta'$ より $\lambda - \varepsilon < s(\omega, \Delta') \leqq s(\omega, \Delta)$ が得られる. λ が S_ω の上界であることから, $\|\Delta\| < \delta$ ならば $0 \leqq \lambda - s(\omega, \Delta) < \varepsilon$ だから λ は条件 (L) を満たす. □

命題 5.5 $\omega : [a,b] \to X$ を X の曲線とし, 関数 $\psi : [c,d] \to [a,b]$ は全単射で, 単調増加または単調減少であるとする. $\omega \circ \psi$ が長さを持つことと ω が長さを持つことは同値であり, $\omega \circ \psi$ の長さと ω の長さは等しい.

証明 $\omega\circ\psi$ が長さを持つと仮定し, その長さを L とする. 区間 $[a,b]$ の任意の分割 $\Delta=\{t_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ に対し, ψ が単調増加関数ならば $\Delta'=\{\psi^{-1}(t_i)\}_{i=0,1,\dots,n}$ とおき, ψ が単調減少関数ならば $\Delta'=\{\psi^{-1}(t_{n-i})\}_{i=0,1,\dots,n}$ とおけば, Δ' は $[c,d]$ の分割である. このとき,

$$s(\omega,\Delta)=\sum_{i=1}^{n}d(\omega(t_i),\omega(t_{i-1}))=\sum_{i=1}^{n}d((\omega\circ\psi)(\psi^{-1}(t_i)),(\omega\circ\psi)(\psi^{-1}(t_{i-1})))=s(\omega\circ\psi,\Delta')\leqq L$$

だから, L は S_ω の上界である. 従って, ω は長さを持ち, その長さは L を越えない. 逆に, ω が長さを持つと仮定し, その長さを M とする. $\omega'=\omega\circ\psi$ とおけば $\omega=\omega'\circ\psi^{-1}$ であり, $\psi^{-1}:[a,b]\to[c,d]$ も単調増加または単調減少である全単射だから, 上の議論における ω, ψ, L をそれぞれ ω', ψ^{-1}, M で置き換えれば, $\omega'=\omega\circ\psi$ は長さを持ち, その長さは M を越えないことが示される. 故に, ω か $\omega\circ\psi$ の一方が長さを持てば, 他方も長さを持ち, 一方の長さは他方の長さを越えないため, $\omega\circ\psi$ の長さと ω の長さは等しい. □

注意 5.6 $\psi:[c,d]\to[a,b]$ が全単射で, 単調増加または単調減少ならば連続であることが, 次のように示される. ψ が単調増加関数の場合, ψ が全射であることから $p\in[c,d)$ ならば $\psi(p)<b$ であり, $q\in(c,d]$ ならば $\psi(q)>a$ であることに注意する. このとき, 任意の $0<\varepsilon\leqq b-\psi(p)$ と $0<\varepsilon'\leqq\psi(q)-a$ に対し, 逆関数 ψ^{-1} も単調増加関数だから, $p=\psi^{-1}(\psi(p))<\psi^{-1}(\psi(p)+\varepsilon)$ と $\psi^{-1}(\psi(q)-\varepsilon')<\psi^{-1}(\psi(q))=q$ が成り立つ. そこで, $\delta=\psi^{-1}(\psi(p)+\varepsilon)-p$, $\delta'=q-\psi^{-1}(\psi(q)-\varepsilon')$ とおけば, $\delta,\delta'>0$ である. $x\in[p,p+\delta)$, $y\in(q-\delta',q]$ ならば

$$\psi(p)\leqq\psi(x)<\psi(p+\delta)=\psi(\psi^{-1}(\psi(p)+\varepsilon))=\psi(p)+\varepsilon$$
$$\psi(q)-\varepsilon'=\psi(\psi^{-1}(\psi(q)-\varepsilon'))=\psi(q-\delta')<\psi(y)\leqq\psi(q)$$

が成り立ち, ψ は $[c,d]$ の任意の点で連続であることがわかる. ψ が単調減少関数の場合, $\iota:[a,b]\to[-b,-a]$ を $\iota(x)=-x$ で定めれば, $\iota\circ\psi:[c,d]\to[-b,-a]$ は単調増加関数で全単射だから, 上の結果から連続関数である. ι の逆関数 ι^{-1} は $\iota^{-1}(x)=-x$ で与えられるため, ι^{-1} も連続である. 従って $\psi=\iota^{-1}\circ(\iota\circ\psi)$ も連続関数である.

命題 5.7 (X,d_X), (Y,d_Y) を距離空間, f を X から Y への写像, $\omega:[a,b]\to X$ を X の曲線とする.

(1) ω が長さをもち, 任意の $s,t\in[a,b]$ に対して $d_Y(f(\omega(s)),f(\omega(t)))\leqq d_X(\omega(s),\omega(t))$ が成り立つならば Y の曲線 $f\circ\omega:[a,b]\to Y$ も長さをもち, その長さは ω の長さを越えない.

(2) Y の曲線 $f\circ\omega:[a,b]\to Y$ が長さをもち, 任意の $s,t\in[a,b]$ に対して $d_X(\omega(s),\omega(t))\leqq d_Y(f(\omega(s)),f(\omega(t)))$ が成り立つならば ω も長さをもち, その長さは $f\circ\omega$ の長さを越えない.

(3) 任意の $s,t\in[a,b]$ に対して $d_X(\omega(s),\omega(t))=d_Y(f(\omega(s)),f(\omega(t)))$ が成り立つならば ω が長さをもつことと, $f\circ\omega$ が長さをもつことは同値であり, ω の長さと $f\circ\omega$ の長さは等しい.

証明 (1) ω の長さを L とする. 区間 $[a,b]$ の任意の分割 $\Delta=\{t_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ に対し,

$$s(f\circ\omega,\Delta)=\sum_{i=1}^{n}d_Y(f(\omega(t_i)),f(\omega(t_{i-1})))\leqq\sum_{i=1}^{n}d_X(\omega(t_i),\omega(t_{i-1}))\leqq L$$

だから, $S_{f\circ\omega}$ は上に有界であり, その上限は L を越えない.

(2) $f\circ\omega$ の長さを L' とする. 区間 $[a,b]$ の任意の分割 $\Delta=\{t_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ に対し,

$$s(\omega,\Delta)=\sum_{i=1}^{n}d_X(\omega(t_i),\omega(t_{i-1}))\leqq\sum_{i=1}^{n}d_Y(f(\omega(t_i)),f(\omega(t_{i-1})))\leqq L'$$

だから, S_ω は上に有界であり, その上限は L' を越えない.

(3) (1) と (2) から明らかである. □

命題 5.8 X の曲線 $\omega:[a,b]\to X$ に対し, 正の実数 K で, 条件「$s,t\in[a,b]$ ならば $d(\omega(s),\omega(t))\leqq K|s-t|$」を満たすものが存在すれば, ω は長さをもつ.

証明 区間 $[a,b]$ の任意の分割 $\Delta=\{t_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ に対し, 仮定から

$$s(\omega,\Delta)=\sum_{i=1}^{n}d(\omega(t_i),\omega(t_{i-1}))\leqq\sum_{i=1}^{n}K(t_i-t_{i-1})=K(b-a)$$

が成り立つため, S_ω は上に有界である. 従って ω は長さをもつ. □

系 5.9 $d_{\boldsymbol{R}^n}$ を $d_{\boldsymbol{R}^n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ で定義される $\boldsymbol{R}^n$ の距離関数とする. $\boldsymbol{R}^n$ の曲線 $\omega : [a,b] \to \boldsymbol{R}^n$ に対し, $t \in [a,b]$ を $\omega(t)$ の第 j 成分に対応させる関数を ω_j で表す. すべての $j = 1,2,\ldots,n$ に対して (a,b) の各点で ω_j が微分可能で, 導関数 $\omega_j' : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ が有界ならば ω は $d_{\boldsymbol{R}^n}$ に関して長さをもつ.

証明 仮定から正の実数 M で, すべての $j = 1,2,\ldots,n$ と $t \in (a,b)$ に対し, $|\omega_j'(t)| \leqq M$ を満たすものがある. 平均値の定理から, 各 $i = 1,2,\ldots,m$ と $a \leqq < s < t \leqq b$ に対し, $\omega_j(t) - \omega_j(s) = \omega_j'(c)(t-s)$ を満たす $s < c < t$ がある. 従って

$$d_{\boldsymbol{R}^n}(\omega(s),\omega(t)) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\omega_j(t)-\omega_j(s))^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \omega_j'(c)^2(t-s)^2} \leqq \sqrt{n}M(t-s)$$

が成り立つため, 命題 5.8 から ω は $d_{\boldsymbol{R}^n}$ に関して長さをもつ. □

命題 5.10 (X,d) を距離空間とし, X に d から定まる位相を与える. X の距離関数 d' で, 以下の条件 $(*)$ を満たすものが与えられているとする. X の曲線 $\omega : [a,b] \to X$ が連続写像であり, 距離関数 d に関して長さを持つならば, ω は距離関数 d' に関しても長さを持つ.

$(*)$ X の開被覆 $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ と, 各 $i \in I$ に対し, 正の実数 K_i で条件「$x, y \in U_i$ ならば $d'(x,y) \leqq K_i d(x,y)$.」を満たすものが存在する.

証明 ω の連続性から, $\omega([a,b])$ はコンパクトだから, $i_1, i_2, \ldots, i_l \in I$ で, $\omega([a,b]) \subset \bigcup_{k=1}^{l} U_{i_k}$ を満たすものがある. $K = \max\{K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots, K_{i_l}\}$ とおけば, 仮定から, 任意の $s,t \in [a,b]$ に対して $d'(\omega(s),\omega(t)) \leqq Kd(\omega(s),\omega(t))$ が成り立つ. 距離関数 d に関する ω の長さを L とおけば, 区間 $[a,b]$ の任意の分割 $\Delta = \{t_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ に対し, $\sum_{i=1}^n d'(\omega(s),\omega(t)) \leqq \sum_{i=1}^n Kd(\omega(s),\omega(t)) \leqq KL$ だから, 距離関数 d' に関する集合 S_ω は上に有界である. 従って ω は距離関数 d' に関しても長さを持つ. □

X の曲線 $\omega : [a,b] \to X$ と $p, q \in [a,b]$ $(p \leqq q)$ に対し, ω の定義域を $[p,q]$ に制限して得られる曲線の長さを $L_\omega(p,q)$ で表す.

命題 5.11 $\omega : [a,b] \to X$ を X の曲線, $p,q,r \in [a,b]$ $(p \leqq q \leqq r)$ とする. $L_\omega(p,r)$ が存在するためには, $L_\omega(p,q)$ と $L_\omega(q,r)$ が存在することが必要十分であり, $L_\omega(p,r) = L_\omega(p,q) + L_\omega(q,r)$ が成り立つ.

証明 ω の定義域を区間 $[p,q]$, $[q,r]$, $[p,r]$ に制限して得られる曲線をそれぞれ α, β, γ とする.

$[p,r]$ の任意の分割 $\Delta = \{t_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ に対し, $r \in [t_{k-1}, t_k]$ を満たす k を選び, 数列 $\Delta' = \{t_i'\}_{i=0,1,\ldots,n+1}$ を

$$t_i' = \begin{cases} t_i & 0 \leqq i \leqq k-1 \\ r & i = k \\ t_{i-1} & k+1 \leqq i \leqq n+1 \end{cases}$$

によって定めれば, Δ' は $[p,r]$ の分割であり, Δ' の定義と三角不等式,

$$d(\gamma(t_{k-1}),\gamma(t_k)) \leqq d(\gamma(t_{k-1}),\gamma(r)) + d(\gamma(r),\gamma(t_k)) = d(\gamma(t_{k-1}'),\gamma(t_k')) + d(\gamma(t_k'),\gamma(t_{k+1}'))$$

から, $s(\gamma,\Delta) \leqq s(\gamma,\Delta')$ が成り立つことがわかる. さらに, $i = 0,1,\ldots,n-k$ に対して $t_i'' = t_{k+i}'$ とおき, $\Delta_1 = \{t_i\}_{i=0,1,\ldots,k}$, $\Delta_2 = \{t_i''\}_{i=0,1,\ldots,n-k}$ とおけば, Δ_1 は $[p,q]$ の分割, Δ_2 は $[q,r]$ の分割であり, Δ', Δ_1, Δ_2 の定義からただちに $s(\gamma,\Delta') = s(\alpha,\Delta_1) + s(\beta,\Delta_2)$ が得られる. α, β が長さをもてば, $s(\alpha,\Delta_1) \leqq L_\omega(p,q)$ かつ $s(\beta,\Delta_2) \leqq L_\omega(q,r)$ だから, 上式より $s(\gamma,\Delta) \leqq s(\gamma,\Delta') = s(\alpha,\Delta_1) + s(\beta,\Delta_2) \leqq L_\omega(p,q) + L_\omega(q,r)$ が成り立つため, S_γ は上に有界である. 従って, γ も長さをもち, $L_\omega(p,r) \leqq L_\omega(p,q) + L_\omega(q,r)$ が成り立つ.

$[p,q]$ の分割 $\Gamma_1 = \{s_i\}_{i=0,1,\ldots,m}$ と $[q,r]$ の分割 $\Gamma_2 = \{t_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ に対し, 数列 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \{u_i\}_{i=0,1,\ldots,m+n}$ を

$$u_i = \begin{cases} s_i & 0 \leqq i \leqq m \\ t_{i-m} & m+1 \leqq i \leqq m+n \end{cases}$$

で定めれば $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ は $[p,r]$ の分割であり, $s(\gamma,\Gamma_1\cup\Gamma_2) = s(\alpha,\Gamma_1)+s(\beta,\Gamma_2)$ が成り立つ. 従って, γ が長さを持てば, $s(\alpha,\Gamma_1), s(\beta,\Gamma_2) \leqq s(\alpha,\Gamma_1)+s(\beta,\Gamma_2) = s(\gamma,\Gamma_1\cup\Gamma_2) \leqq L_\omega(p,r)$ が成り立つため, S_α と S_β はともに上に有界であり, α と β も長さをもつ. $L_\omega(p,r) < L_\omega(p,q)+L_\omega(q,r)$ と仮定して $\varepsilon = \dfrac{1}{2}(L_\omega(p,q)+L_\omega(q,r)-L_\omega(p,r))$ とおくと, $[p,q]$ の分割 Ξ_1 と $[q,r]$ の分割 Ξ_2 で, $L_\omega(p,q)-\varepsilon < s(\alpha,\Xi_1)$, $L_\omega(q,r)-\varepsilon < s(\beta,\Xi_2)$ を満たすものがある. そこで, 上と同様に $[p,r]$ の分割 $\Xi_1\cup\Xi_2$ を定義すれば, $s(\gamma,\Xi_1\cup\Xi_2)\in S_\gamma$ であるが,

$$L_\omega(p,r) = (L_\omega(p,q)-\varepsilon)+(L_\omega(q,r)-\varepsilon) < s(\alpha,\Xi_1)+s(\beta,\Xi_2) = s(\gamma,\Xi_1\cup\Xi_2)$$

が成り立ち, $L_\omega(p,r)$ が S_γ の上限であることに矛盾する. 故に $L_\omega(p,r) \geqq L_\omega(p,q)+L_\omega(q,r)$ が成り立つため, 前半の議論から $L_\omega(p,r) = L_\omega(p,q)+L_\omega(q,r)$ が得られる. □

命題 5.12 $\omega : [a,b] \to X$ が次の条件を満たす X の曲線ならば長さをもつ.

(*i*) 任意の $a<p<q<b$ に対して, $L_\omega(p,q)$ が存在する.

(*ii*) 定数 M で, $a<p<q<b$ に対して, $L_\omega(p,q) \leqq M$ を満たすものが存在する.

証明 $c \in (a,b)$ を選んで, ω の定義域を $[a,c]$, $[c,b]$ に制限した曲線をそれぞれ α, β とする. 関数 $f : (a,c) \to \boldsymbol{R}$, $g : (c,b) \to \boldsymbol{R}$ をそれぞれ $f(x) = L_\omega(x,c)$, $g(x) = L_\omega(c,x)$ で定めれば, 命題 5.11 から, f は単調減少関数であり, g は単調増加関数である. 仮定 (ii) から f と g は有界だから, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ と $\lim\limits_{x\to b-0} g(x)$ が存在する. そこで $A = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $B = \lim\limits_{x\to b-0} g(x)$ とおけば, $t\in(a,c)$ ならば $L_\omega(t,c) \leqq A$ であり, $t\in(c,b)$ ならば $L_\omega(c,t)\leqq B$ が成り立つ. $[a,c]$ の任意の分割 $\Delta = \{t_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ と $t_k > a$ を満たす最小の k に対し, $\{t_{k+i}\}_{i=0,1,\ldots,n-k}$ は $[t_k,c]$ の分割だから

$$\begin{aligned}
s(\alpha,\Delta) &= \sum_{i=1}^{k} d(\omega(t_{i-1}),\omega(t_i)) + \sum_{i=1}^{n-k} d(\omega(t_{k+i-1}),\omega(t_{k+i})) \leqq d(\omega(a),\omega(t_k)) + L_\omega(t_k,c)\\
&\leqq d(\omega(a),\omega(c)) + d(\omega(c),\omega(t_k)) + A \leqq d(\omega(a),\omega(c)) + L_\omega(t_k,c) + A \leqq d(\omega(a),\omega(c)) + 2A
\end{aligned}$$

が成り立つため, S_α は上に有界で, $L_\omega(a,c)$ が存在する.

$[c,b]$ の任意の分割 $\Delta = \{t_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ と $t_k < b$ を満たす最大の k に対し, $\{t_i\}_{i=0,1,\ldots,k}$ は $[c,t_k]$ の分割だから

$$\begin{aligned}
s(\beta,\Delta) &= \sum_{i=1}^{k} d(\omega(t_{i-1}),\omega(t_i)) + \sum_{i=1}^{n-k} d(\omega(t_{k+i-1}),\omega(t_{k+i})) \leqq L_\omega(c,t_k) + d(\omega(t_k),\omega(b))\\
&\leqq B + d(\omega(t_k),\omega(c)) + d(\omega(c),\omega(b)) \leqq B + L_\omega(c,t_k) + d(\omega(c),\omega(b)) \leqq 2B + d(\omega(c),\omega(b))
\end{aligned}$$

が成り立つため, S_β は上に有界で, $L_\omega(c,b)$ が存在する. 従って命題 5.11 から ω は長さをもつ. □

命題 5.13 $\omega : [a,b] \to X$ は X の曲線で長さをもつとする. ω が a で連続ならば, $L_\omega(a,b) = \lim\limits_{x\to a+0} L_\omega(x,b)$ であり, ω が b で連続ならば, $L_\omega(a,b) = \lim\limits_{x\to b-0} L_\omega(a,x)$ が成り立つ.

証明 ω が a で連続であると仮定して, $\varepsilon > 0$ を任意にとる. 関数 $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = L_\omega(x,b)$ で定めれば, f は単調減少関数であり, $f(x) \leqq L_\omega(a,b)$ が成り立つため, f は上に有界である. 従って, $\lim\limits_{x\to a+0} L_\omega(x,b)$ が存在する. この極限値を L とおいて, $L - \dfrac{\varepsilon}{2} < L_\omega(p,b)$ を満たす $p\in(a,b]$ をとる. さらに $L_\omega(p,b) - \dfrac{\varepsilon}{2} < s(\omega,\Delta_1)$ を満たす $[p,b]$ の分割 Δ_1 をとると, $L-\varepsilon < s(\omega,\Delta_1)$ が成り立つ. 従って Δ_1 に分点 a を加えて得られる $[a,b]$ の分割を Δ_2 とすれば $s(\omega,\Delta_2) \geqq s(\omega,\Delta_1) > L-\varepsilon$ である.

仮定から, $c\in(a,b)$ で条件「$a<x<c$ ならば $d(\omega(x),\omega(a))<\varepsilon$」を満たすものがある. $[a,b]$ の任意の分割 Δ に対し, Δ の a 以外の分点のうちで最小のものを d として Δ に $a<p<c,d$ を満たす分点 p を付け加えた $[a,b]$ の分割を $\bar\Delta$, $\bar\Delta$ から a を除いてできる $[p,b]$ の分割を $\tilde\Delta$ とすると,

$$s(\omega,\Delta) \leqq s(\omega,\bar\Delta) = s(\omega,\tilde\Delta) + d(\omega(a),\omega(p)) \leqq L_\omega(p,b)+\varepsilon \leqq L+\varepsilon$$

である. ここで $\varepsilon>0$ は任意に選べたので $s(\omega,\Delta)\leqq L$ が得られ, L は集合 S_ω の上限であることが分かる. ω が b で連続ならば, $L_\omega(a,b) = \lim\limits_{x\to b-0} L_\omega(a,x)$ が成り立つことも同様に示される. □

定義 5.14 I を $\boldsymbol{R}$ の区間とする．距離空間 (X,d) の曲線 $\sigma: I \to X$ が $s<t<u$ を満たす任意の $s,t,u \in I$ に対して等式 $d(\sigma(s),\sigma(u)) = d(\sigma(s),\sigma(t)) + d(\sigma(t),\sigma(u))$ を満たすとき, σ を線分という．線分 $\sigma: I \to X$ が条件「線分 $\tau: J \to X$ が $\sigma(I) \subset \tau(J)$ を満たせば, $\sigma(I) = \tau(J)$ である.」を満たすとき, σ を直線という．

注意 5.15 (1) σ が線分で, $\sigma(s) = \sigma(u)$ を満たす $s<u$ が存在すれば, $t \in [s,u]$ に対して $\sigma(t) = \sigma(s)$ である．

(2) $f: X \to Y$ が距離を保つ写像で, σ が X の線分ならば $f\circ\sigma$ は Y の線分である．

命題 5.16 $p,q \in X$ に対し, $\sigma: [a,b] \to X$ を $\sigma(a) = p$ と $\sigma(b) = q$ を満たす曲線とする．

(1) σ が線分ならば, σ の長さは $d(p,q)$ であり, $\omega(a) = p$ と $\omega(b) = q$ を満たす X の曲線 $\omega: [a,b] \to X$ のうちで長さが最小のものである．

(2) σ が線分ではないならば, σ の長さは $d(p,q)$ より大きい．

証明 (1) $[a,b]$ の任意の分割 $\Delta = \{t_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ に対し, $s(\sigma,\Delta) = \sum_{i=1}^{n} d(\sigma(t_i),\sigma(t_{i-1})) = d(p,q)$ が成り立つことが線分の定義と n による数学的帰納法で示されるため σ の長さは $d(p,q)$ である． $\omega(c) = p$, $\omega(d) = q$ を満たす曲線 $\omega: [c,d] \to X$ が長さをもてば, $[c,d]$ の任意の分割 $\Delta = \{t_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ に対し, 三角不等式から $s(\omega,\Delta) = \sum_{i=1}^{n} d(\omega(t_i),\omega(t_{i-1})) \geqq d(p,q)$ だから, ω の長さは σ の長さを越えない．

(2) 仮定から $s<t<u$ である $s,t,u \in [a,b]$ で $d(\sigma(s),\sigma(u)) < d(\sigma(s),\sigma(t)) + d(\sigma(t),\sigma(u))$ を満たすものが存在する． $[a,b]$ の分割 $\Delta_0 = \{a,s,t,u,b\}$ を考えると

$$s(\sigma,\Delta_0) = d(p,\sigma(s)) + d(\sigma(s),\sigma(t)) + d(\sigma(t),\sigma(u)) + d(\sigma(u),q) > d(p,\sigma(s)) + d(\sigma(s),\sigma(u)) + d(\sigma(u),q) \geqq d(p,q)$$

だから, σ の長さは $d(p,q)$ より大きい． □

問題

(A) d_1 を $p=1$ の場合に例 2.10 の (1) で与えたノルム ρ_1 から定義される $\boldsymbol{R}^2$ の距離関数とする．

(1) I を区間とし, $\varphi,\psi: I \to \boldsymbol{R}$ が単調増加である連続関数ならば $\boldsymbol{\omega}(t) = (\varphi(t),\psi(t))$ で定義される $\boldsymbol{R}^2$ の曲線 $\boldsymbol{\omega}: I \to \boldsymbol{R}^2$ は, 距離空間 $(\boldsymbol{R}^2, d_1)$ における線分であることを示せ．

(2) $r>0$ に対し, 原点を中心とし, 半径が r の $(\boldsymbol{R}^2, d_1)$ における円周, すなわち $|x|+|y| = d((x,y),(0,0)) = r$ を満たす $\boldsymbol{R}^2$ の点 (x,y) 全体からなる集合の周囲の長さを r の式で表せ．

(B) (V,ρ) を $\boldsymbol{K}$ 上のノルム空間, d_ρ を ρ から定まる V の距離関数とし, ρ は次の条件を満たすとする．

「$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$ が $\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \rho(\boldsymbol{x}) + \rho(\boldsymbol{y})$ を満たせば, $\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{y}$ または $\boldsymbol{y} = r\boldsymbol{x}$ を満たす実数 $r \geqq 0$ が存在する.」

(1) I を区間とし, $\boldsymbol{\omega}: I \to V$ を V の線分とする． $a,b \in I$ は $a<b$ かつ $\boldsymbol{\omega}(a) \neq \boldsymbol{\omega}(b)$ を満たすとき, 任意の $t \in I$ に対して $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(a) + \lambda(t)(\boldsymbol{\omega}(b) - \boldsymbol{\omega}(a))$ を満たす実数 $\lambda(t)$ がただ一つ存在することを示せ．

(2) $t \in I$ を $\lambda(t)$ に対応させる関数 $\lambda: I \to \boldsymbol{R}$ は単調増加関数または単調減少であることを示せ．

(3) $\boldsymbol{\omega}$ が V の直線であるためには λ が全射であることが必要十分であることを示せ．

6 群の作用で不変な距離関数の構成

定義 6.1 集合 G に対し, 写像 $\mu: G\times G \to G$ が与えられていて以下の条件 $(\mathrm{G}i) \sim (\mathrm{G}iii)$ を満たすとき, 対 (G,μ) (または G) を群という．以下で, G の要素 g, h に対し, G の要素 $\mu(g,h)$ を gh で表す．

$(\mathrm{G}i)$ $g,h,k \in G$ に対して $(gh)k = g(hk)$.

$(\mathrm{G}ii)$ $e \in G$ で, すべての $g \in G$ に対して $eg = ge = g$ を満たすものが存在する．

$(\mathrm{G}iii)$ $g \in G$ に対して $h \in G$ で, $gh = hg = e$ を満たすものが存在する．

$(\mathrm{G}ii)$ を満たす G の要素 e を G の単位元という．また, $g \in G$ に対して $(\mathrm{G}iii)$ の条件を満たす $h \in G$ を G の逆元といい, g^{-1} で表す．

注意 6.2 (1) $e_1, e_2 \in G$ が, すべての $g \in G$ に対して $e_1 g = g e_2 = g$ を満たせば $e_1 = e_2$ である．実際, $g = e_1$ に

対して $ge_2 = g$ が成り立ち, $g = e_2$ に対して $e_1 g = g$ が成り立つことから $e_1 = e_1 e_2 = e_2$ である．従って, (Gii) を満たす $e \in G$ はただ 1 つである．

(2) $g \in G$ に対して $h_1, h_2 \in G$ が, $gh_1 = h_2 g = e$ を満たせば, $h_1 = h_2$ である．実際 (Gi) と (Gii) から $h_1 = eh_1 = (h_2 g)h_1 = h_2(gh_1) = h_2 e = h_2$ である．従って, $g \in G$ に対して (Giii) を満たす $h \in G$ はただ 1 つである．

定義 6.3 G を群, X を集合とする．写像 $\alpha : G \times X \to X$ が以下の条件 (Ai) と (Aii) を満たすとき, α を G の X への左作用という．以下で, G の要素 g, X の要素 x に対し, x の要素 $\alpha(g, x)$ を gx で表す．

(Ai) $g, h \in G$, $x \in X$ に対して $(gh)x = g(hx)$.

(Aii) $x \in X$ に対して $ex = x$.

定義 6.4 集合 X に左 G 作用が与えられているとする．X の距離関数 d が, 任意の $x, y \in X$ と $g \in G$ に対して $d(gx, gy) = d(x, y)$ を満たすとき, d は G 不変であるという．

条件 6.5 G を群, X を集合とし, $\alpha : G \times X \to X$ を X への G の左作用とする．X の部分集合 Y と Y の要素 x_0 の対 (Y, x_0) に関して次の条件 (C) を考える．

(C) 任意の $x, y \in X$ に対して $gx = x_0$, $gy \in Y$ を満たす $g \in G$ が存在する．

条件 6.6 X の部分集合 Y と Y の要素 x_0 の対 (Y, x_0) が, 条件 6.5 の (C) を満たすとき, 関数 $\rho : Y \to \boldsymbol{R}$ に関して以下の条件を考える．

(Ri) $x \in Y$ ならば $\rho(x) \geqq 0$ であり, $\rho(x) = 0$ であることと $x = x_0$ であることは同値である．

(Rii) $g, h \in G$ に対して, $gx_0, hx_0, ghx_0 \in Y$ ならば $\rho(ghx_0) \leqq \rho(gx_0) + \rho(hx_0)$.

(Riii) $g, h \in G$ に対して, $gx_0, hx_0, ghx_0 \in Y$ かつ $\rho(gx_0), \rho(hx_0) \leqq \rho(ghx_0)$ ならば $\rho(gx_0) + \rho(hx_0) = \rho(ghx_0)$.

(Riv) $g \in G$ に対して, $gx_0, g^{-1}x_0 \in Y$ ならば $\rho(gx_0) = \rho(g^{-1}x_0)$.

注意 6.7 d が G 不変な X の距離関数で, (Y, x_0) が条件 6.5 の (C) を満たすとき, $\rho : Y \to \boldsymbol{R}$ を $\rho(x) = d(x_0, x)$ で定めれば, ρ は条件 6.6 の (Ri), (Rii) と (Riv) を満たす．

以後, X の部分集合 Y と Y の要素 x_0 の対 (Y, x_0) は条件 6.5 の (C) を満たし, 関数 $\rho : Y \to \boldsymbol{R}$ は条件 6.6 の (Ri) $\sim$ (Riv) を満たすと仮定する．

命題 6.8 $x, y \in X$ に対し, $g, h \in G$ が $gx = hx = x_0$, $gy, hy \in Y$ を満たせば, $\rho(gy) = \rho(hy)$ である．

証明 $\rho(gy) \geqq \rho(hy)$ であると仮定してよい．仮定から $p \in G$ で $phy = x_0$, $px_0 \in Y$ を満たすものが存在する．このとき, $gh^{-1}p^{-1}x_0 = gy \in Y$, $p^{-1}x_0 = hy \in Y$, $gh^{-1}x_0 = gx = x_0 \in Y$ であり, $\rho(gh^{-1}x_0) = \rho(x_0) = 0$, $\rho(p^{-1}x_0) = \rho(hy) \leqq \rho(gy) = \rho(gh^{-1}p^{-1}x_0)$ だから, (Riii) より

$$\rho(hy) = \rho(p^{-1}x_0) = \rho(gh^{-1}x_0) + \rho(p^{-1}x_0) = \rho(gh^{-1}p^{-1}x_0) = \rho(gy)$$

が得られる． □

$x, y \in X$ に対して $gx = x_0$, $gy \in Y$ を満たす $g \in G$ を選べば, 命題 6.8 から $\rho(gy)$ は $gx = x_0$, $gy \in Y$ を満たす $g \in G$ の選び方に依存しない．そこで, 関数 $d_\rho : X \times X \to \boldsymbol{R}$ を $d_\rho(x, y) = \rho(gy)$ によって定義する．

命題 6.9 $g \in G$, $x, y \in X$ に対して, $d_\rho(gx, gy) = d_\rho(x, y)$ である．

証明 $x, y \in X$ に対して $hx = x_0$, $hy \in Y$ を満たす $h \in G$ を選ぶ．このとき, $(hg^{-1})gx = hx = x_0$, $(hg^{-1})gy = hy \in Y$ だから d_ρ の定義によって $d_\rho(gx, gy) = \rho((hg^{-1})gy) = \rho(gy) = d_\rho(x, y)$ が成り立つ． □

命題 6.10 d_ρ は X の距離関数である．また, 関数 $d' : X \times X \to \boldsymbol{R}$ が任意の $g \in G$, $x, y \in X$ に対して, $d'(gx, gy) = d'(x, y)$ を満たし,「$x \in Y$ ならば $d'(x_0, x) = \rho(x)$」が成り立てば $d' = d_\rho$ である．

証明 (Ri) と d_ρ の定義から d_ρ はつねに 0 以上の値をとる．$x, y \in X$ に対して $gx = x_0$, $gy \in Y$ を満たす $g \in G$ を

選ぶ. $d_\rho(x,y)=0$ ならば $\rho(gy)=0$ だから (Ri) より $gy=x_0=gx$ が得られるため, $y=x$ である.

$gx=x_0$, $gy\in Y$, $hy=x_0$, $hx\in Y$ を満たす $g,h\in G$ を選ぶ. $x=g^{-1}x_0$, $y=h^{-1}x_0$ だから $hx=hg^{-1}x_0=(gh^{-1})^{-1}x_0$, $gy=gh^{-1}x_0$ である. 従って (Riv) より $d_\rho(y,x)=\rho(hx)=\rho((gh^{-1})^{-1}x_0)=\rho(gh^{-1}x_0)=\rho(gy)=d_\rho(x,y)$ が成り立つ.

$x,y,z\in X$ に対し, $gx=x_0$, $gz\in Y$ を満たす $g\in G$ を選び, $hgy=x_0$, $hx_0\in Y$, $kgz=x_0$, $kgy\in Y$ を満たす $h,k\in G$ を選ぶ. このとき, $gz=k^{-1}x_0$, $gy=h^{-1}x_0$ だから $d_\rho(x,z)=d_\rho(gx,gz)=\rho(gz)=\rho(k^{-1}x_0)=\rho(kx_0)$, $d_\rho(x,y)=d_\rho(gx,gy)=d_\rho(gy,gx)=d_\rho(gy,x_0)=\rho(hx_0)$, $d_\rho(y,z)=d_\rho(gy,gz)=d_\rho(gz,gy)=\rho(kgy)=\rho(kh^{-1}x_0)$ が成り立つ. 従って (Rii) から $d_\rho(x,z)=\rho(kx_0)=\rho((kh^{-1})hx_0)\leqq\rho(kh^{-1}x_0)+\rho(hx_0)=d_\rho(x,y)+d_\rho(y,z)$ である. 以上から, d_ρ は X の距離関数である.

$x,y\in X$ に対して $gx=x_0$, $gy\in Y$ を満たす $g\in G$ を選べば, 仮定と命題 6.9 から $d'(x,y)=d'(gx,gy)=d'(x_0,gy)=\rho(gy)=d_\rho(x_0,gy)=d_\rho(gx,gy)=d_\rho(x,y)$ が成り立つため $d'=d_\rho$ である. □

注意 6.11 X の G 不変な距離関数 d で条件「$g,h\in G$ に対して, $gx_0,hx_0,ghx_0\in Y$ かつ $d(x_0,gx_0),d(x_0,hx_0)\leqq d(x_0,ghx_0)$ ならば $d(x_0,gx_0)+d(x_0,hx_0)=d(x_0,ghx_0)$ 」全体からなる集合を $\mathrm{Dist}_G(X,Y,x_0)$ で表し, 条件 6.6 を満たす関数 $\rho:Y\to\boldsymbol{R}$ 全体からなる集合を $\mathrm{Ruler}(Y,x_0;G)$ で表す. $d\in\mathrm{Dist}_G(X,Y,x_0)$ に対し, 関数 $\rho_d:Y\to\boldsymbol{R}$ を $\rho_d(x)=d(x_0,x)$ で定めれば, 注意 6.7 から, $\rho_d\in\mathrm{Ruler}(Y,x_0;G)$ であり, 命題 6.10 によって, $d\in\mathrm{Dist}_G(X,Y,x_0)$ を ρ_d に対応させる $\mathrm{Dist}_G(X,Y,x_0)$ から $\mathrm{Ruler}(Y,x_0;G)$ への写像は全単射である.

問題

(A) d を $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ で定義される $\boldsymbol{R}^2$ の通常の距離関数とし, 実数を成分とする 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ が与えられているとする. 任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^2$ に対して $d(A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})=d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成り立つならば $a^2+c^2=1$ であり, $(a,b)=(d,-c)$ または $(a,b)=(-d,c)$ のいずれか一方が成り立つことを示せ.

(B) 実数 θ に対して $R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ とおき, $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ とおく. $\boldsymbol{R}^2$ の距離関数 $\tilde{d}$ が任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}^2$, $a>0$, $\theta\in\boldsymbol{R}$ に対して次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすとする.

(i) $\tilde{d}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ (ii) $\tilde{d}(a\boldsymbol{x},a\boldsymbol{y})=ad(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ (iii) $\tilde{d}(R(\theta)\boldsymbol{x},R(\theta)\boldsymbol{y})=d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$

(1) $\boldsymbol{R}^2$ の相異なるベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して, $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$ を原点を中心として時計回りに θ だけ回転させれば x 軸の正の部分と重なるとき, $R(-\theta)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|\boldsymbol{e}_1$ が成り立つことを示せ.

(2) $\tilde{d}$ が (i), (ii), (iii) を満たすことを用いて, $\tilde{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\tilde{d}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_1)\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|$ であることを示せ.

7 曲った空間と非ユークリッド幾何学

7.1 ユークリッドの公理

ギリシャ時代の数学者ユーリッド (Euclid, B.C.330〜B.C.275 頃) は『原論』において幾何学を体系的に構築するために, 証明無しに議論の前提とする「公理」と呼ばれる以下の 5 つの命題を与えた.

公理 7.1

公理 1. 与えられた 2 点 A, B に対して A と B を結ぶ線分を唯一つ引くことができる.

公理 2. 与えられた線分はどちら側にも限りなく伸ばすことができる.

公理 3. 平面上に 2 点 A, B が与えられたとき, A を中心とし B を通る円を唯一つ描くことができる.

公理 4. 直角はすべて相等しい.

公理 5. 二直線と交わる一つの直線が同じ側につくる内角の和が二直角より小さいならば, 二直線をその側に伸ばせばどこかで交わる.

公理 4 の「直角」とは「一直線上にもう一つの直線が立ってできる隣り合わせの二角が互いに等しいとき, いずれの角をも直角と呼ぶ.」と定義される. 公理 5 が「平行線の公理」と呼ばれるもので, 19 世紀に多くの数学者達が, 公

理 1 から公理 4 を用いて証明できるのではないかと考え, その証明のために多大な努力を重ねた.

ところが, 座標平面において y 座標が正である点全体からなる「上半平面」に通常とは異なる距離関数を与えることによって得られる距離空間において, 公理 1〜4 は成り立つが公理 5 が成り立たない「非ユークリッド幾何学」と呼ばれる幾何学が展開される. このことは, 公理 5 が他の 4 つの公理からは証明できないことを意味する. 本節では, まず上半平面に 2 次特殊線形群と呼ばれる群 $SL_2(\boldsymbol{R})$ の作用を与え, 前節の結果を用いることによって, $SL_2(\boldsymbol{R})$ の作用で不変な上半平面の距離関数を定義する.

7.2 上半平面への 2 次特殊線形群の作用

複素数 z の実部を $\mathrm{Re}(z)$, 虚部を $\mathrm{Im}(z)$ で表す.

命題 7.2 (1) $a,b,c,d,z \in \boldsymbol{C}$ に対し, $cz+d \neq 0$ ならば次の等式が成り立つ.

$$\mathrm{Re}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\mathrm{Re}(a\bar{c})|z|^2 + \mathrm{Re}((a\bar{d}+\bar{b}c)z) + \mathrm{Re}(b\bar{d})}{|cz+d|^2}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\mathrm{Im}(a\bar{c})|z|^2 + \mathrm{Im}((a\bar{d}-\bar{b}c)z) + \mathrm{Im}(b\bar{d})}{|cz+d|^2}$$

(2) $a,b,c,d \in \boldsymbol{R}$, $z \in \boldsymbol{C}$ に対し, $ad-bc>0$ かつ $\mathrm{Im}(z)>0$ ならば $\mathrm{Im}\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right) > 0$ である.

証明 (1) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i} = -\mathrm{Re}(iz)$ だから

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{az+b}{cz+d} + \frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}}\right) = \frac{(az+b)(\bar{c}\bar{z}+\bar{d}) + (\bar{a}\bar{z}+\bar{b})(cz+d)}{2|cz+d|^2} \\
&= \frac{a\bar{c}|z|^2 + b\bar{c}\bar{z} + a\bar{d}z + b\bar{d} + \bar{a}c|z|^2 + \bar{a}d\bar{z} + \bar{b}cz + \bar{b}d}{2|cz+d|^2} \\
&= \frac{(a\bar{c}+\bar{a}c)|z|^2 + a\bar{d}z + \bar{a}d\bar{z} + b\bar{c}\bar{z} + \bar{b}cz + b\bar{d} + \bar{b}d}{2|cz+d|^2} \\
&= \frac{2\mathrm{Re}(a\bar{c})|z|^2 + 2\mathrm{Re}(a\bar{d}z) + 2\mathrm{Re}(\bar{b}cz) + 2\mathrm{Re}(b\bar{d})}{2|cz+d|^2} = \frac{\mathrm{Re}(a\bar{c})|z|^2 + \mathrm{Re}((a\bar{d}+\bar{b}c)z) + \mathrm{Re}(b\bar{d})}{|cz+d|^2} \\
\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) &= -\mathrm{Re}\left(\frac{aiz+bi}{cz+d}\right) = \frac{-\mathrm{Re}(ai\bar{c})|z|^2 - \mathrm{Re}((ai\bar{d}+\overline{bi}c)z) - \mathrm{Re}(ib\bar{d})}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{\mathrm{Im}(a\bar{c})|z|^2 - \mathrm{Re}(i(a\bar{d}-\bar{b}c)z) + \mathrm{Im}(b\bar{d})}{|cz+d|^2} = \frac{\mathrm{Im}(a\bar{c})|z|^2 + \mathrm{Im}((a\bar{d}-\bar{b}c)z) + \mathrm{Im}(b\bar{d})}{|cz+d|^2}
\end{aligned}$$

(2) $a,b,c,d \in \boldsymbol{R}$ ならば $\mathrm{Im}(a\bar{c}) = \mathrm{Im}(b\bar{d}) = 0$, $\mathrm{Im}((a\bar{d}-\bar{b}c)z) = (ad-bc)\mathrm{Im}(z)$ だから $ad-bc>0$ かつ $\mathrm{Im}(z)>0$ ならば (1) の結果から $\mathrm{Im}\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right) = \dfrac{(ad-bc)\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} > 0$ である. □

座標平面上の点 (x,y) に複素数 $x+yi$ を対応させることによって, 座標平面を複素数全体からなる集合 $\boldsymbol{C}$ と同一視する. また, 虚部が正の実数である複素数全体からなる集合を $\boldsymbol{H}$ で表せば, y 座標が正である座標平面の点全体からなる「上半平面」は $\boldsymbol{H}$ に対応する.

実数を成分とする 2 次正方行列で, 行列式の値が 1 であるもの全体からなる集合を $SL_2(\boldsymbol{R})$ で表せば, 行列の積により, $SL_2(\boldsymbol{R})$ は群である. この群を 2 次特殊線形群という. このとき, 命題 7.2 の (2) から, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\boldsymbol{R})$ と $z \in \boldsymbol{H}$ に対し, $\mathrm{Im}\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right) > 0$ だから写像 $\tau_A : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ を $\tau_A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ で定めることができる.

命題 7.3 $A,B \in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対し, $\tau_A \circ \tau_B = \tau_{AB}$, $\tau_A^{-1} = \tau_{A^{-1}}$ が成り立つ. また, $\tau_A = \tau_B$ であることは $A = \pm B$ であることと同値である.

証明 前半の主張は容易に確かめられる. $\tau_A = \tau_B$ のとき, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと, 任意の $z \in \boldsymbol{H}$ に対して $(az+b)(rz+s) = (cz+d)(pz+q)$ が成り立つため, $\begin{cases} -cp+ar=0 \\ -dp+br=cq-as \end{cases}$, $bs=dq$ が得られる. 前者を

p, r を未知数とする連立 1 次方程式とみて, $ad-bc=1$ であることを用いると, $p=-a(cq-as)$, $r=-c(cq-as)$ が得られる. これらを $ps-qr=1$ に代入すれば, $(cq-as)^2=1$ が得られるので, $cq-as=\pm1$ である. 従って $\begin{cases}-dq+bs=0\\ cq-as=\pm1\end{cases}$ が成り立ち, これを q, s を未知数とする連立 1 次方程式とみて, $ad-bc=1$ であることを用いると, $q=\pm b$, $s=\pm c$ (複号同順) が得られる, これらと, $p=-a(cq-as)$, $r=-c(cq-as)$ から, $B=\pm A$ であることがわかる. 逆に, $B=\pm A$ ならば $\tau_A=\tau_B$ であることは明らかである. □

上の結果から, とくに $\tau_A:\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}$ は全単射であり, 写像 $\alpha:SL_2(\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}$ を $\alpha(A,z)=\tau_A(z)$ で定めれば α は 群 $SL_2(\boldsymbol{R})$ の $\boldsymbol{H}$ への左作用である. 次の結果は容易に確かめられる.

命題 7.4 $a\neq0$ ならば $\begin{pmatrix}a & b\\ c & \frac{bc+1}{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\frac{c}{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & \frac{1}{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{b}{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ が成り立ち, $b\neq0$ ならば $\begin{pmatrix}0 & b\\ -\frac{1}{b} & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{b} & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -bd\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ が成り立つ. 従って, $SL_2(\boldsymbol{R})$ は $\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & \frac{1}{a}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ の形の行列で生成される.

$\boldsymbol{H}$ の部分集合 Y を $Y=\{z\in\boldsymbol{H}\,|\,\mathrm{Im}(z)\geqq1,\ \mathrm{Re}(z)=0\}$ で定める.

命題 7.5 z, w を $\boldsymbol{H}$ の相異なる 2 点とする.

(1) $\tau_A(z)=i$, $\tau_A(w)=\lambda i$ を満たす $A\in SL_2(\boldsymbol{R})$ と 1 より大きな実数 λ が存在する. 従って (Y,i) は条件 6.5 の (C) を満たす.

(2) $A,B\in SL_2(\boldsymbol{R})$ と $\lambda,\mu>1$ に対し, $\tau_A(z)=\tau_B(z)=i$, $\tau_A(w)=\lambda i$, $\tau_B(w)=\mu i$ ならば $\lambda=\mu$, $B=\pm A$ である.

証明 (1) $z=u+vi$, $w=x+yi$ $(u,v,x,y\in\boldsymbol{R})$ とする. $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とおくと, $\tau_A(z)=i$, $\tau_A(w)=\lambda i$ が成り立つためには, $au+b+avi=-cv+(cu+d)i$ と $ax+b+ayi=-c\lambda y+(c\lambda x+d\lambda)i$ が成り立つことが必要十分である. これらの等式の実部と虚部を比較すれば, $au+b=-cv$, $av=cu+d$, $ax+b=-c\lambda y$, $ay=c\lambda x+d\lambda$ が得られる. 1 つ目と 2 つ目の等式から $b=-au-cv$, $d=av-cu$ だから, これらを 3 つ目と 4 つ目の等式に代入すれば $a(x-u)-c(v-\lambda y)=0$, $a(y-\lambda v)+c\lambda(u-x)=0$ が得られる. これらを a, c を未知数とする斉次連立 1 次方程式とみなせば, $ad-bc=1$ より, a と c の少なくとも一方は 0 でないため, $-\lambda(u-x)^2+(v-\lambda y)(y-\lambda v)=0$ が成り立ち, λ を未知数とする 2 次方程式 $vy\lambda^2-((u-x)^2+v^2+y^2)\lambda+vy=0$ が得られる. $z\neq w$ であることと, $z,w\in\boldsymbol{H}$ より $v,y>0$ だから, この方程式の判別式 D は $D=((u-x)^2+(v-y)^2)((u-x)^2+(v+y)^2)>0$ である. さらに解と係数の関係から, この 2 次方程式の 2 つの解は正の実数であり, その積は 1 だから, 大きい方の解は 1 より大きい. 従って, $\lambda=\dfrac{(u-x)^2+v^2+y^2+\sqrt{D}}{2vy}$ である. $x\neq u$ の場合, 上記の a, c を未知数とする斉次連立 1 次方程式の解は, k を任意の定数として $a=k(v-\lambda y)$, $c=k(x-u)$ で与えられる. このとき $b=k(\lambda uy-vx)$, $d=k(u^2+v^2-ux-\lambda vy)$ であり, $D-((u-x)^2-v^2+y^2)^2=4v^2(u-x)^2>0$ だから $A\in SL_2(\boldsymbol{R})$ であるためには $k=\pm\sqrt{\dfrac{2v}{D+((u-x)^2-v^2+y^2)\sqrt{D}}}$ であることが必要十分である. $x=u$ の場合, $v<y$ ならば $\lambda=\dfrac{y}{v}$ だから $c=0$, $b=-au$, $d=av$ である. さらに $A\in SL_2(\boldsymbol{R})$ であることから, $d^2=v$ が得られるため, $d=\pm\sqrt{v}$, $a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{v}}$, $b=\mp\dfrac{u}{\sqrt{v}}$ (複号同順) と定まる. $v>y$ ならば $\lambda=\dfrac{v}{y}$ だから $a=0$, $b=-cv$, $d=-cu$ である. さらに $A\in SL_2(\boldsymbol{R})$ であることから, $b^2=v$ が得られるため, $b=\pm\sqrt{v}$, $c=\mp\dfrac{1}{\sqrt{v}}$, $d=\pm\dfrac{u}{\sqrt{v}}$ (複号同順) と定まる.

(2) (1) の議論から 1 より大きい λ は 1 通りに定まるため, $\lambda=\mu=\dfrac{(u-x)^2+v^2+y^2+\sqrt{D}}{2vy}$ である. この λ に

対して $\tau_A(z)=i,\ \tau_A(w)=\lambda i$ を満たす $A\in SL_2(\boldsymbol{R})$ は (1) の議論から次の形のものに限る

$$A=\begin{cases}\pm\sqrt{\dfrac{2v}{D+((u-x)^2-v^2+y^2)\sqrt{D}}}\begin{pmatrix}v-\lambda y & \lambda uy-vx\\ x-u & u^2+v^2-ux-\lambda vy\end{pmatrix} & x\neq u\\ \pm\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{v}} & -\frac{u}{\sqrt{v}}\\ 0 & \sqrt{v}\end{pmatrix} & x=u,\ v<y\\ \pm\begin{pmatrix}0 & \sqrt{v}\\ -\frac{1}{\sqrt{v}} & \frac{u}{\sqrt{v}}\end{pmatrix} & x=u,\ v>y\end{cases}$$

□

注意 7.6　上の (1) の証明における D と 1 より大きな実数 λ は $z,w\in\boldsymbol{H}$ の関数として以下で与えられる.

$$D=|z-w|^2|z-\bar{w}|^2$$
$$\lambda=1+\frac{|z-w|(|z-w|+|z-\bar{w}|)}{2vy}=\frac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|}$$

実数 θ と正の実数 λ に対して $R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, $S(\lambda)=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\end{pmatrix}$ とおくと, $\tau_{R(\theta)}(i)=i$ であり, 任意の $z\in\boldsymbol{H}$ に対して $\tau_{S(\lambda)}(z)=\lambda z$ が成り立つ.

補題 7.7　(1) $A\in SL_2(\boldsymbol{R})$ が $\tau_A(i)\in Y$ 満たすためには, $A=S(\lambda)R(\theta)$ を満たす $\lambda\geqq 1$ と $0\leqq\theta<2\pi$ が存在することが必要十分である.

(2) $A=S(\lambda)R(\theta),\ B=S(\mu)R(\varphi)$ $(\lambda,\mu\geqq 1,\ 0\leqq\theta,\varphi<2\pi)$ が $\tau_{AB}(i)\in Y$ を満たすためには, 次の (i), (ii), (iii) のいずれかが成り立つことが必要十分である.

$$(i)\ \mu=1 \qquad (ii)\ \theta=0\ \text{または}\ \theta=\pi. \qquad (iii)\ \text{「}\theta=\frac{\pi}{2}\ \text{または}\ \theta=\frac{3\pi}{2}\text{」かつ}\ \mu\leqq\lambda.$$

(3) $A=S(\lambda)R(\theta)$ $(\lambda\geqq 1,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ が $\tau_{A^{-1}}(i)\in Y$ を満たすためには, $\lambda=1$ または $\theta=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}$ であることが必要十分である.

証明　(1) $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ に対し, 命題 7.2 の (1) より $\mathrm{Im}(\tau_A(i))=\dfrac{1}{c^2+d^2}$, $\mathrm{Re}(\tau_A(i))=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}$ だから, $\tau_A(i)\in Y$ であるためには, $c^2+d^2\leqq 1$ かつ $ac+bd=0$ であることが必要十分である. $ac+bd=0$ かつ $ad-bc=1$ ならば $a=\dfrac{d}{c^2+d^2}$, $b=-\dfrac{c}{c^2+d^2}$ であり, $c^2+d^2\leqq 1$ ならば $\lambda=\dfrac{1}{c^2+d^2}$ とおけば $\lambda\geqq 1$ である. そこで $c=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\theta$, $d=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\cos\theta$ を満たす $0\leqq\theta<2\pi$ をとれば, $a=\sqrt{\lambda}\cos\theta$, $b=-\sqrt{\lambda}\sin\theta$ が成り立つため, $A=S(\lambda)R(\theta)$ である. 逆に $\lambda\geqq 1$ かつ $A=S(\lambda)R(\theta)$ ならば命題 7.3 より $\tau_A(i)=\tau_{S(\lambda)}\circ\tau_{R(\theta)}(i)=\tau_{S(\lambda)}(i)=\lambda i\in Y$ である.

(2) $\lambda,\mu\geqq 1,\ 0\leqq\theta<2\pi$ に対して, $S(\lambda)R(\theta)S(\mu)=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda\mu}\cos\theta & -\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\mu}}\sin\theta\\ \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\lambda}}\sin\theta & \frac{1}{\sqrt{\lambda\mu}}\cos\theta\end{pmatrix}$ であり, 下記の等式が成り立つ.

$$\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\lambda}}\sin\theta\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda\mu}}\cos\theta\right)^2=\frac{1}{\lambda\mu}(1+(\mu^2-1)\sin^2\theta)$$
$$\left(\sqrt{\lambda\mu}\cos\theta\right)\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\lambda}}\sin\theta\right)+\left(-\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\mu}}\sin\theta\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda\mu}}\cos\theta\right)=\frac{1}{2}\left(\mu-\frac{1}{\mu}\right)\sin 2\theta$$

$\tau_{AB}(i)=\tau_{S(\lambda)R(\theta)S(\mu)R(\psi)}(i)=\tau_{S(\lambda)R(\theta)S(\mu)}(\tau_{R(\psi)}(i))=\tau_{S(\lambda)R(\theta)S(\mu)}(i)$ であることに注意すれば, 上式と (1) の証明から $\tau_{AB}(i)\in Y$ であるためには, $\mu=1$ または「$\sin 2\theta=0$ かつ $1+(\mu^2-1)\sin^2\theta\leqq\lambda\mu$」が成り立つことが必要十分である. 後者は,「$\theta=0$ または $\theta=\pi$」であるか, 「$\theta=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}$ かつ $\mu\leqq\lambda$」であることと同値である.

(3) $A^{-1}=R(\theta)^{-1}S(\lambda)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\cos\theta}{\sqrt{\lambda}} & \sqrt{\lambda}\sin\theta\\ -\frac{\sin\theta}{\sqrt{\lambda}} & \sqrt{\lambda}\cos\theta\end{pmatrix}$ より $\tau_{A^{-1}}(i)\in Y$ であるためには, (1) の証明から,

$$\left(-\frac{\sin\theta}{\sqrt{\lambda}}\right)^2+\left(\sqrt{\lambda}\cos\theta\right)^2\leqq 1\ \text{かつ}\ \left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{\lambda}}\right)\left(-\frac{\sin\theta}{\sqrt{\lambda}}\right)+\left(\sqrt{\lambda}\sin\theta\right)\left(\sqrt{\lambda}\cos\theta\right)=0$$

が成り立つことが必要十分である. 後者は $\sin 2\theta(\lambda^2-1)=0$ と同値で, これは $\lambda=1$ または $\theta=0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2}$ であることと同値である. $\lambda=1$ の場合は $A^{-1}=R(-\theta)$ だから $\tau_{A^{-1}}(i)=i\in Y$ である. $\theta=0,\pi$ の場合は, 前者から $\lambda\leqq 1$ が得られるため, $\lambda=1$ である. $\theta=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}$ の場合は, $A^{-1}=\pm\begin{pmatrix}0 & \sqrt{\lambda}\\ -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0\end{pmatrix}$ だから $\tau_{A^{-1}}(i)=\lambda i=\tau_A(i)\in Y$ である. □

7.3 上半平面の距離関数

$\boldsymbol{H}$ の距離関数 d で, $SL_2(\boldsymbol{R})$ 不変なもの, すなわち任意の $z,w\in\boldsymbol{H}$ と $A\in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対して

$$d(\tau_A(z),\tau_A(w))=d(z,w)$$

を満たすものが存在すれば, 命題 7.5 から, $\tau_A(z)=i$, $\tau_A(w)=\lambda i$ を満たす $A\in SL_2(\boldsymbol{R})$ と 1 以上の実数 λ が存在するため, $d(z,w)=d(\tau_A(z),\tau_A(w))=d(i,\lambda i)$ が成り立つ. 従って, 各 $\lambda>1$ に対し, i と λi の間の距離が定まれば, $SL_2(\boldsymbol{R})$ 不変な $\boldsymbol{H}$ の距離関数が一通りに定まる.

補題 7.8 関数 $f:[0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ がつねに 0 以上の値をとり, 任意の $x,y\in[0,\infty)$ に対して $f(x+y)=f(x)+f(y)$ を満たすとき, $k=f(1)$ とおけば, すべての $x\in[0,\infty)$ に対して $f(x)=kx$ が成り立つ.

証明 仮定から, $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$ だから $f(0)=0$ であることに注意して, 関数 $\tilde f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を

$$\tilde f(x)=\begin{cases} f(x) & x\geqq 0\\ -f(-x) & x\leqq 0\end{cases}$$

で定めれば, 任意の $x,y\in\boldsymbol{R}$ に対して $\tilde f(x+y)=\tilde f(x)+\tilde f(y)$ が成り立つことを示す. $x,y\geqq 0$ の場合,

$$\tilde f(x+y)=f(x+y)=f(x)+f(y)=\tilde f(x)+\tilde f(y)$$

であり, $x,y\leqq 0$ の場合,

$$\tilde f(x+y)=-f(-(x+y))=-f((-x)+(-y))=-(f(-x)+f(-y))=-f(-x)+(-f(-y))=\tilde f(x)+\tilde f(y)$$

が成り立つ. また, $x\leqq 0\leqq y$ の場合, $x+y\leqq 0$ ならば

$$\tilde f(x+y)-\tilde f(y)=-f(-x-y)-f(y)=-(f(-x-y)+f(y))=-f(-x-y+y)=-f(-x)=\tilde f(x)$$

であり, $x+y\geqq 0$ ならば

$$\tilde f(x+y)-\tilde f(x)=f(x+y)-(-f(-x))=f(x+y)+f(-x)=f(x+y-x)=f(y)=\tilde f(y)$$

だから, $x\leqq 0\leqq y$ の場合も $\tilde f(x+y)=\tilde f(x)+\tilde f(y)$ が成り立つことがわかる.

n による数学的帰納法で $\tilde f(nx)=n\tilde f(x)$ が成り立つことを示す. $n=0$ の場合は, $\tilde f(0)=f(0)=0$ だから, 主張は正しい. 0 以上の整数 n に対して $\tilde f(nx)=n\tilde f(x)$ が成り立つと仮定する. 帰納法の仮定から

$$\tilde f((n+1)x)=\tilde f(nx+x)=\tilde f(nx)+\tilde f(x)=n\tilde f(x)+\tilde f(x)=(n+1)\tilde f(x)$$

となり, 帰納法が進む. n が正の整数のとき, 実数 x に対し, 上の結果から, $n\tilde f\left(\dfrac{x}{n}\right)=\tilde f\left(n\dfrac{x}{n}\right)=\tilde f(x)$ だから $\tilde f\left(\dfrac{x}{n}\right)=\dfrac{1}{n}\tilde f(x)$ が成り立つ. $m,\ n$ を正の整数とすれば $\tilde f\left(\dfrac{m}{n}x\right)=\dfrac{1}{n}\tilde f(mx)=\dfrac{m}{n}\tilde f(x)$ だから, 任意の正の有理数 r に対して $\tilde f(rx)=r\tilde f(x)$ が成り立つ. さらに $\tilde f(x)+\tilde f(-x)=\tilde f(x+(-x))=\tilde f(0)=0$ だから $\tilde f(-x)=-\tilde f(x)$ である. r を負の有理数とすれば $\tilde f(rx)=\tilde f((-r)(-x))=(-r)\tilde f(-x)=r\tilde f(x)$ より, 任意の有理数 r に対して $\tilde f(rx)=r\tilde f(x)$ が成り立つ.

$x \leqq y$ ならば, $\tilde{f}(y-x) = f(y-x) \geqq 0$ だから, $\tilde{f}(y) = \tilde{f}(x+(y-x)) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y-x) \geqq \tilde{f}(x)$ となるため, $\tilde{f}$ は単調増加関数である. 任意の $p \in \boldsymbol{R}$ と $\varepsilon > 0$ に対し, $N > \dfrac{\tilde{f}(1)}{\varepsilon}$ を満たす整数 N を選ぶ. $|x-p| < \dfrac{1}{N}$ ならば

$$\tilde{f}(p) - \varepsilon < \tilde{f}(p) - \frac{\tilde{f}(1)}{N} = \tilde{f}\left(p - \frac{1}{N}\right) \leqq \tilde{f}(x) \leqq \tilde{f}\left(p + \frac{1}{N}\right) = \tilde{f}(p) + \frac{\tilde{f}(1)}{N} < \tilde{f}(p) + \varepsilon$$

が成り立つため, $\tilde{f}$ は p で連続である. 任意の実数 x に対して $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ を満たす有理数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ があるため, $k = f(1) = \tilde{f}(1)$ とおくと $\tilde{f}$ の連続性から $\tilde{f}(x) = \tilde{f}\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \tilde{f}(1) = kx$ である. □

命題 7.9 $\boldsymbol{H}$ の距離関数 d が以下の (i) と (ii) の条件を満たせば, 正の実数 k が存在して, $z, w \in \boldsymbol{H}$ に対し, d は $d(z,w) = k \log \dfrac{|z-\bar{w}| + |z-w|}{|z-\bar{w}| - |z-w|}$ で与えられる.

(i) 任意の $z, w \in \boldsymbol{H}$ と $A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対して $d(\tau_A(z), \tau_A(w)) = d(z,w)$ が成り立つ.

(ii) $\lambda, \mu \geqq 1$ に対し, $d(i, \mu\lambda i) = d(i, \mu i) + d(\mu i, \mu\lambda i)$ が成り立つ.

証明 $\lambda, \mu \geqq 1$ に対し, (i) から $d(i, \lambda i) = d(\tau_{S(\mu)}(i), \tau_{S(\mu)}(\lambda i)) = d(\mu i, \lambda\mu i)$ である. また (ii) と上式から $d(i, \mu\lambda i) = d(i, \mu i) + d(\mu i, \mu\lambda i) = d(i, \mu i) + d(i, \lambda i)$ が得られる. そこで関数 $f : [0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = d(i, ie^x)$ で定めれば, f はつねに 0 以上の値をとり, 任意の $x, y \in [0, \infty)$ に対して $f(x+y) = f(x) + f(y)$ が成り立つため, 補題 7.8 から $k = d(i, ei)$ とおけば, 任意の $x \geqq 0$ に対して $d(i, ie^x) = f(x) = kx$ が成り立つため, $d(i, \lambda i) = k \log \lambda$ である.

任意の $z, w \in \boldsymbol{H}$ に対して, 命題 7.5 の (1) と注意 7.6 から $\lambda = \dfrac{|z-\bar{w}| + |z-w|}{|z-\bar{w}| - |z-w|}$ とおけば, $\tau_A(z) = i$, $\tau_A(w) = \lambda i$ を満たす $A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ が存在する. 従って (i) から次が得られる.

$$d(z,w) = d(\tau_A(z), \tau_A(w)) = d(i, \lambda i) = k \log \lambda = k \log \frac{|z-\bar{w}| + |z-w|}{|z-\bar{w}| - |z-w|}$$

□

注意 7.10 命題 7.9 の条件 (ii) は, 任意の $a > 1$ に対して, $\sigma_a(t) = it$ で定義される曲線 $\sigma_a : [1, a] \to \boldsymbol{H}$ が距離空間 $(\boldsymbol{H}, d)$ の線分であることと同値である.

$k > 0$ に対し, 関数 $d_{\boldsymbol{H}} : \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{R}$ を $d_{\boldsymbol{H}}(z,w) = k \log \dfrac{|z-\bar{w}| + |z-w|}{|z-\bar{w}| - |z-w|}$ で定めて, $d_{\boldsymbol{H}}$ が $\boldsymbol{H}$ の距離関数であることと, 命題 7.9 の 2 つの条件を満たすことを確かめる.

命題 7.11 $\rho : Y \to \boldsymbol{R}$ を $\rho(z) = d_{\boldsymbol{H}}(i, z)$ で定義すれば, ρ は条件 6.6 の (Ri) $\sim$ (Riv) をすべて満たす.

証明 $z \in Y$ ならば $z = \mathrm{Im}(z) i$ であり, $\mathrm{Im}(z) \geqq 1$ だから

$$\rho(z) = k \log \frac{|i-\bar{z}| + |i-z|}{|i-\bar{z}| - |i-z|} = k \log \frac{|i+\mathrm{Im}(z)i| + |i-\mathrm{Im}(z)i|}{|i+\mathrm{Im}(z)i| - |i-\mathrm{Im}(z)i|} = k \log \frac{|1+\mathrm{Im}(z)| + |1-\mathrm{Im}(z)|}{|1+\mathrm{Im}(z)| - |1-\mathrm{Im}(z)|} = k \log(\mathrm{Im}(z))$$

が成り立つため, ρ は (Ri) を満たす.

$A, B \in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対し, $\tau_A(i), \tau_B(i), \tau_{AB}(i) \in Y$ ならば, 補題 7.7 から, 次の (i), (ii), (iii) のいずれかが成り立つ.

(i) $A = S(\lambda)R(\theta)$, $B = R(\varphi)$ $(\lambda \geqq 1,\ 0 \leqq \theta, \varphi < 2\pi)$

(ii) $A = \pm S(\lambda)$, $B = S(\mu)R(\varphi)$ $(\lambda, \mu \geqq 1,\ 0 \leqq \varphi < 2\pi)$

(iii) $A = \pm S(\lambda) R\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $B = S(\mu)R(\varphi)$ かつ $1 \leqq \mu \leqq \lambda$ $(0 \leqq \varphi < 2\pi)$

(i) の場合, $\tau_A(i) = \lambda i$, $\tau_B(i) = i$, $\tau_{AB}(i) = \lambda i$ だから $\rho(\tau_A(i)) = k \log \lambda$, $\rho(\tau_B(i)) = 0$, $\rho(\tau_{AB}(i)) = k \log \lambda$ となり, (Rii) と (Riii) が成り立つ. (ii) の場合, $\tau_A(i) = \lambda i$, $\tau_B(i) = \mu i$, $\tau_{AB}(i) = \lambda\mu i$ だから $\rho(\tau_A(i)) = k \log \lambda$, $\rho(\tau_B(i)) = k \log \mu$, $\rho(\tau_{AB}(i)) = k \log(\lambda\mu) = k \log \lambda + k \log \mu$ となり, この場合も (Rii) と (Riii) が成り立つ. (iii) の場合, $\tau_A(i) = \lambda i$, $\tau_B(i) = \mu i$ であり, $R\left(\dfrac{\pi}{2}\right) S(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \\ \sqrt{\mu} & 0 \end{pmatrix} = S\left(\dfrac{1}{\mu}\right) R\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ だから, $\tau_{AB}(i) = \dfrac{\lambda}{\mu} i$ であ

る．従って $\rho(\tau_A(i)) = k\log\lambda$, $\rho(\tau_B(i)) = k\log\mu$, $\rho(\tau_{AB}(i)) = k\log\dfrac{\lambda}{\mu} = k\log\lambda - k\log\mu$ だから (Rii) が成り立ち，この場合は $\mu = 1$ ならば (Riii) が成り立ち，$\mu > 1$ ならば (Riii) の仮定は満たされない．

$A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対して，$\tau_A(i), \tau_{A^{-1}}(i) \in Y$ ならば，補題 7.7 から，A は $R(\theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ または $\pm S(\lambda)R\Bigl(\dfrac{\pi}{2}\Bigr)$ $(\lambda \geqq 1)$ という形の行列である．前者の場合は $\tau_A(i) = \tau_{A^{-1}}(i) = i$, 後者の場合は $\tau_A(i) = \tau_{A^{-1}}(i) = \lambda i$ だから，いずれにしても $\rho(\tau_A(i)) = \rho(\tau_{A^{-1}}(i))$ となって (Riv) が成り立つ． □

命題 7.12 $d_{\boldsymbol{H}}$ は命題 7.9 の条件 (i) と (ii) を満たす $\boldsymbol{H}$ の距離関数である．また，任意の $z, w \in \boldsymbol{H}$ に対して $d_{\boldsymbol{H}}(-\bar{z}, -\bar{w}) = d_{\boldsymbol{H}}(z, w)$ が成り立つ．

証明 $d_{\boldsymbol{H}}$ の定義から $d_{\boldsymbol{H}} = d_\rho$ であり，前節の命題 6.9, 6.10 から $d_{\boldsymbol{H}}$ は命題 7.9 の条件 (i) を満たす $\boldsymbol{H}$ の距離関数である．また，$d_{\boldsymbol{H}}(i, z) = \rho(z) = k\log(\mathrm{Im}(z))$ だから，$d_{\boldsymbol{H}}$ は命題 7.9 の条件 (ii) も満たす．さらに，

$$d_{\boldsymbol{H}}(-\bar{z}, -\bar{w}) = k\log\frac{|-\bar{z}+w| + |-\bar{z}+\bar{w}|}{|-\bar{z}+w| - |-\bar{z}+\bar{w}|} = k\log\frac{|\bar{z}-w| + |\bar{z}-\bar{w}|}{|\bar{z}-w| - |\bar{z}-\bar{w}|} = k\log\frac{|z-\bar{w}| + |z-w|}{|z-\bar{w}| - |z-w|} = d_{\boldsymbol{H}}(z, w)$$

より後半の主張が成り立つ． □

以後，距離関数 $d_{\boldsymbol{H}}$ は $k = 1$, すなわち $d_{\boldsymbol{H}}(i, ei) = 1$ の場合について考えることにする．

命題 7.13 $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \boldsymbol{H}$ が $d_{\boldsymbol{H}}(z_1, w_1) = d_{\boldsymbol{H}}(z_2, w_2) > 0$ を満たすとき，$A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ で $\tau_A(z_1) = z_2$, $\tau_A(w_1) = w_2$ を満たすものが存在する．

証明 命題 7.5 により，$\lambda_1, \lambda_2 > 1$ と $A_1, A_2 \in SL_2(\boldsymbol{R})$ で $\tau_{A_1}(z_1) = \tau_{A_2}(z_2) = i$, $\tau_{A_1}(w_1) = \lambda_1 i$, $\tau_{A_2}(w_2) = \lambda_2 i$ を満たすものがある．τ_{A_1} と τ_{A_2} が距離を保つことと，仮定から下記の等式が成り立つため，$\lambda_1 = \lambda_2$ である．

$$\log\lambda_1 = d_{\boldsymbol{H}}(i, \lambda_1 i) = d_{\boldsymbol{H}}(z_1, w_1) = d_{\boldsymbol{H}}(z_2, w_2) = d_{\boldsymbol{H}}(i, \lambda_2 i) = \log\lambda_2$$

そこで，$A = A_2^{-1}A_1$ とおけば，命題 7.3 から $\tau_A(z_1) = \tau_{A_2}^{-1}(\tau_{A_1}(z_1)) = \tau_{A_2}^{-1}(i) = z_2$, $\tau_A(w_1) = \tau_{A_2}^{-1}(\tau_{A_1}(w_1)) = \tau_{A_2}^{-1}(\lambda_1 i) = \tau_{A_2}^{-1}(\lambda_2 i) = w_2$ である． □

7.4 上半平面の円

$(z, w) \in \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}$ を $|z-w|$ に対応させる $\boldsymbol{C}$ の通常の距離関数を $d_{\boldsymbol{C}}$ で表し，$p \in \boldsymbol{C}$ と $r > 0$ に対して

$$B_{\boldsymbol{C}}(p\,;r) = \{z \in \boldsymbol{C} \,|\, d_{\boldsymbol{C}}(z, p) < r\}, \qquad C_{\boldsymbol{C}}(p\,;r) = \{z \in \boldsymbol{C} \,|\, d_{\boldsymbol{C}}(z, p) = r\}$$

とおく．また，$p \in \boldsymbol{H}$ の場合，

$$B_{\boldsymbol{H}}(p\,;r) = \{z \in \boldsymbol{H} | \, d_{\boldsymbol{H}}(z, p) < r\}, \qquad C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r) = \{z \in \boldsymbol{H} \,|\, d_{\boldsymbol{H}}(z, p) = r\}$$

とおき，$C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ を中心が p, 半径 r の円という．

命題 7.14 $p \in \boldsymbol{H}$ と $r > 0$ に対し，次の等式が成り立つ．

$$B_{\boldsymbol{H}}(p\,;r) = B_{\boldsymbol{C}}(\mathrm{Re}(p) + i\cosh r\mathrm{Im}(p)\,;\sinh r\mathrm{Im}(p)), \quad C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r) = C_{\boldsymbol{C}}(\mathrm{Re}(p) + i\cosh r\mathrm{Im}(p)\,;\sinh r\mathrm{Im}(p))$$

証明 $z \in \boldsymbol{H}$ に対し，次の等式から $d_{\boldsymbol{H}}(z, p) - r$ と $|z - (\mathrm{Re}(p) + i\cosh r\mathrm{Im}(p))| - \sinh r\mathrm{Im}(p)$ は同符号である．

$$\begin{aligned}
e^{d_{\boldsymbol{H}}(z,p)-r} - 1 &= \frac{(e^r+1)^2|z-p|^2 - (e^r-1)^2|z-\bar{p}|^2}{e^r(|z-\bar{p}| - |z-p|)((e^r+1)|z-p| + (e^r-1)|z-\bar{p}|)} \\
&= \frac{4(z\bar{z} + p\bar{p}) + 2\cosh r(z-\bar{z})(p-\bar{p}) - 2(z+\bar{z})(p+\bar{p})}{(|z-\bar{p}| - |z-p|)((e^r+1)|z-p| + (e^r-1)|z-\bar{p}|)} \\
&= \frac{4((\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(p))^2 + (\mathrm{Im}(z) - \cosh r\mathrm{Im}(p))^2 - \sinh^2 r\mathrm{Im}(p)^2)}{(|z-\bar{p}| - |z-p|)((e^r+1)|z-p| + (e^r-1)|z-\bar{p}|)} \\
&= \frac{4(|z - (\mathrm{Re}(p) + i\cosh r\mathrm{Im}(p))|^2 - (\sinh r\mathrm{Im}(p))^2)}{(|z-\bar{p}| - |z-p|)((e^r+1)|z-p| + (e^r-1)|z-\bar{p}|)}
\end{aligned}$$

また $z \in \boldsymbol{C}$ が $|z-(\mathrm{Re}(p)+i\cosh r\mathrm{Im}(p))| \leqq \sinh r\mathrm{Im}(p)$ を満たせば, 次の不等式が成り立つため, $z \in \boldsymbol{H}$ である.

$$\mathrm{Im}(z) = \cosh r\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(z-(\mathrm{Re}(p)+i\cosh r\mathrm{Im}(p))) \geqq \cosh r\mathrm{Im}(p) - \sinh r\mathrm{Im}(p) = e^{-r}\mathrm{Im}(p) > 0$$

故に $B_{\boldsymbol{C}}(\mathrm{Re}(p)+i\cosh r\mathrm{Im}(p)\,;\sinh r\mathrm{Im}(p)) \subset \boldsymbol{H}$, $C_{\boldsymbol{C}}(\mathrm{Re}(p)+i\cosh r\mathrm{Im}(p)\,;\sinh r\mathrm{Im}(p)) \subset \boldsymbol{H}$ である. □

注意 7.15 上の命題から $p,q \in \boldsymbol{H}$, $r,s>0$ に対し, $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r) = C_{\boldsymbol{H}}(q\,;s)$ であることは

$$\mathrm{Re}(p)+i\cosh r\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Re}(q)+i\cosh s\mathrm{Im}(q) \quad かつ \quad \sinh r\mathrm{Im}(p) = \sinh s\mathrm{Im}(q)$$

が成り立つことと同値である. 前者の等式は $\mathrm{Re}(p)=\mathrm{Re}(q)$ かつ $\cosh r\mathrm{Im}(p) = \cosh s\mathrm{Im}(q)$ と同値だから, 後者の等式から $\tanh r = \tanh s$ が得られるため, $r=s$ である. 従って $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Im}(q)$ も成り立つため $p=q$ である. また, $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ が p と異なる点 q を通る円であるためには $r = d_{\boldsymbol{H}}(p,q)$ であることが必要十分だから, 公理 7.1 の 3 番目の公理が成り立つことがわかる.

系 7.16 $q \in \boldsymbol{C}$, $r,s>0$, $p \in \boldsymbol{H} \cap B_{\boldsymbol{C}}(q\,;s)$ に対し, $a=\mathrm{Re}(p)$, $b=\mathrm{Im}(p)$, $c=\mathrm{Re}(q)$, $d=\mathrm{Im}(q)$ とおけば, $B_{\boldsymbol{H}}(p\,;r) \subset B_{\boldsymbol{C}}(q\,;s)$ であるための条件は, $s=d$ ならば $r \leqq \log\dfrac{2bd}{(a-c)^2+b^2}$ であり, $s \neq d$ ならば $r \leqq \log\dfrac{(a-c)^2+b^2+d^2-s^2-\sqrt{(s^2-(a-c)^2+b^2-d^2)^2+4b^2(a-c)^2}}{2b(d-s)}$ である.

証明 $p \in \boldsymbol{H} \cap B_{\boldsymbol{C}}(q\,;s)$ より $b>0$ かつ $s^2 > (a-c)^2+(b-d)^2 \geqq (b-d)^2$ だから $s+d>b>0$ である. 命題 7.14 から $B_{\boldsymbol{H}}(p\,;r) \subset B_{\boldsymbol{C}}(q\,;s)$ は $b\sinh r \leqq s$ かつ $(a-c)^2+(b\cosh r-d)^2 \leqq (s-b\sinh r)^2$ が成り立つことと同値である. 前者は $r \leqq \log\dfrac{s+\sqrt{s^2+b^2}}{b}$ と同値であり, $f(x) = b(d-s)x^2-((a-c)^2+b^2+d^2-s^2)x+b(d+s)$ で与えられる関数 f を考えれば, 後者は $f(e^r) \geqq 0$ と同値である. ここで, 等式

$$(s^2+b^2)((a-c)^2+b^2+(d-s)^2)^2-(2b^2d-s((a-c)^2+b^2+(d-s)^2))^2 = b^2(((a-c)^2+b^2-d^2+s^2)^2+4d^2(a-c)^2)$$

の右辺は負でないため, $\sqrt{s^2+b^2}((a-c)^2+b^2+(d-s)^2) \geqq |2b^2d-s((a-c)^2+b^2+(d-s)^2)|$ が成り立つ. 上式から, この等号が成立する条件は $a=c$ かつ $d^2=b^2+s^2$ である. このとき, $2b^2d-s((a-c)^2+b^2+(d-s)^2) = 2d^2(d-s)$ だから $\sqrt{s^2+b^2}((a-c)^2+b^2+(d-s)^2) = 2b^2d-s((a-c)^2+b^2+(d-s)^2)$ が成り立つための条件は $a=c$ かつ $d^2=b^2+s^2$ かつ $d>s$ である. 故に

$$f\left(\frac{s+\sqrt{s^2+b^2}}{b}\right) = -\frac{\sqrt{s^2+b^2}((a-c)^2+b^2+(d-s)^2)-(2b^2d-s((a-c)^2+b^2+(d-s)^2))}{b} \leqq 0$$

であり, 等号が成立するのは $a=c$ かつ $d^2=b^2+s^2$ かつ $d>s$ の場合に限る.

$s=d$ ならば $f(e^r) \geqq 0$ は $r \leqq \log\dfrac{2bd}{(a-c)^2+b^2}$ と同値であり, $f\left(\dfrac{s+\sqrt{s^2+b^2}}{b}\right) < 0$ だから $\log\dfrac{s+\sqrt{s^2+b^2}}{b}$ は $\log\dfrac{2bd}{(a-c)^2+b^2}$ より大きい. また, $f(1)>0$ より $\dfrac{2bd}{(a-c)^2+b^2} > 1$ であることに注意する. 従って $s=d$ の場合, $B_{\boldsymbol{H}}(p\,;r) \subset B_{\boldsymbol{C}}(q\,;s)$ は $r \leqq \log\dfrac{2bd}{(a-c)^2+b^2}$ と同値である.

$s \neq d$ の場合, α, β を以下のように定めれば, $f(x) = b(d-s)(x-\alpha)(x-\beta)$ である.

$$\alpha = \frac{(a-c)^2+b^2+d^2-s^2-\sqrt{(s^2-(a-c)^2+b^2-d^2)^2+4b^2(a-c)^2}}{2b(d-s)}$$
$$\beta = \frac{(a-c)^2+b^2+d^2-s^2+\sqrt{(s^2-(a-c)^2+b^2-d^2)^2+4b^2(a-c)^2}}{2b(d-s)}$$

$s<d$ ならば $(a-c)^2+b^2+d^2-s^2>0$ だから $0<\alpha<\beta$ であり, $f(x) \geqq 0$ は $x \leqq \alpha$ または $x \geqq \beta$ と同値である. また $f\left(\dfrac{s+\sqrt{s^2+b^2}}{b}\right) \leqq 0$ だから $\alpha \leqq \dfrac{s+\sqrt{s^2+b^2}}{b} \leqq \beta$ であり, $\dfrac{s+\sqrt{s^2+b^2}}{b} > 1$ かつ $f(1)>0$ より $\alpha>1$ である. 従って $s<d$ の場合, $B_{\boldsymbol{H}}(p\,;r) \subset B_{\boldsymbol{C}}(q\,;s)$ は $r \leqq \log\alpha$ と同値である.

$s > d$ ならば $\alpha\beta = \dfrac{d+s}{d-s} < 0$, $\alpha > \beta$ だから $\beta < 0 < \alpha$ であり, $f(x) \geqq 0$ は $\beta \leqq x \leqq \alpha$ と同値である. また $f\left(\dfrac{s+\sqrt{s^2+b^2}}{b}\right) < 0$, $f(1) > 0$ だから $1 < \alpha < \dfrac{s+\sqrt{s^2+b^2}}{b}$ である. 従って $s > d$ の場合も $B_{\boldsymbol{H}}(p\,;r) \subset B_{\boldsymbol{C}}(q\,;s)$ は $r \leqq \log\alpha$ と同値である. □

系 7.17 距離関数 $d_{\boldsymbol{H}}$ から定まる $\boldsymbol{H}$ の位相と, 距離関数 $d_{\boldsymbol{C}}$ から定まる $\boldsymbol{H}$ の位相は一致する.

証明 $d_{\boldsymbol{H}}$ から定まる $\boldsymbol{H}$ の位相を $\mathcal{O}_{\boldsymbol{H}}$, $d_{\boldsymbol{C}}$ から定まる $\boldsymbol{H}$ の位相を $\mathcal{O}'_{\boldsymbol{H}}$ とする. $O' \in \mathcal{O}'_{\boldsymbol{H}}$ ならば任意の $q \in O$ に対して $s > 0$ で $B_{\boldsymbol{C}}(q\,;s) \subset O$ を満たすものが存在する. 系 7.16 から $r > 0$ で $B_{\boldsymbol{H}}(q\,;r) \subset B_{\boldsymbol{C}}(q\,;s)$ を満たすものが存在するため, q は位相 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{H}}$ に関しても O の内点であり, $O \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{H}}$ が示される. また, $O \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{H}}$ ならば任意の $p \in O$ に対して $r > 0$ で $B_{\boldsymbol{H}}(p\,;r) \subset O$ を満たすものが存在する. 命題 7.14 から $p \in B_{\boldsymbol{C}}(\mathrm{Re}(p)+i\cosh r\,\mathrm{Im}(p)\,;\sinh r\,\mathrm{Im}(p)) = B_{\boldsymbol{H}}(p\,;r) \subset O$ だから, p は位相 $\mathcal{O}'_{\boldsymbol{H}}$ に関しても O の内点であるため, $O \in \mathcal{O}'_{\boldsymbol{H}}$ である. □

補題 7.18 $\boldsymbol{C}$ の相異なる 2 点 p, q と $|r-s| \leqq |p-q| \leqq r+s$ を満たす正の実数 r, s に対し, α_1, α_2, β_1, β_2 を

$$\alpha_1 = \frac{\mathrm{Re}(p+q)|p-q|^2 - \mathrm{Re}(p-q)(r^2-s^2) + \mathrm{Im}(p-q)\sqrt{((r+s)^2-|p-q|^2)(|p-q|^2-(r-s)^2)}}{2|p-q|^2}$$
$$\alpha_2 = \frac{\mathrm{Re}(p+q)|p-q|^2 - \mathrm{Re}(p-q)(r^2-s^2) - \mathrm{Im}(p-q)\sqrt{((r+s)^2-|p-q|^2)(|p-q|^2-(r-s)^2)}}{2|p-q|^2}$$
$$\beta_1 = \frac{\mathrm{Im}(p+q)|p-q|^2 - \mathrm{Im}(p-q)(r^2-s^2) - \mathrm{Re}(p-q)\sqrt{((r+s)^2-|p-q|^2)(|p-q|^2-(r-s)^2)}}{2|p-q|^2}$$
$$\beta_2 = \frac{\mathrm{Im}(p+q)|p-q|^2 - \mathrm{Im}(p-q)(r^2-s^2) + \mathrm{Re}(p-q)\sqrt{((r+s)^2-|p-q|^2)(|p-q|^2-(r-s)^2)}}{2|p-q|^2}$$

によって定めれば $C_{\boldsymbol{C}}(p\,;r) \cap C_{\boldsymbol{C}}(q\,;s) = \{\alpha_1+\beta_1 i, \alpha_2+\beta_2 i\}$ である.

証明 円周 $C_{\boldsymbol{C}}(p\,;r)$ と $C_{\boldsymbol{C}}(q\,;s)$ は 2 個以下の共有点をもち, $j = 1, 2$ に対し $|\alpha_j+\beta_j i-p|^2 = r^2$ と $|\alpha_j+\beta_j i-q|^2 = s^2$ が成り立つことが確かめられるため, 主張が成り立つ. □

命題 7.19 $\boldsymbol{H}$ の相異なる 2 点 p, q と正の実数 r, s に対し, $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r) \cap C_{\boldsymbol{H}}(q\,;s)$ の要素の個数は, $d_{\boldsymbol{H}}(p,q) < |r-s|$ または $d_{\boldsymbol{H}}(p,q) > r+s$ ならば 0 個, $d_{\boldsymbol{H}}(p,q) = |r-s|$ または $d_{\boldsymbol{H}}(p,q) = r+s$ ならば 1 個, $|r-s| < d_{\boldsymbol{H}}(p,q) < r+s$ ならば 2 個である. また, $|r-s| \leqq d_{\boldsymbol{H}}(p,q) \leqq r+s$ の場合, $a = \mathrm{Re}(p)$, $b = \mathrm{Im}(p)$, $c = \mathrm{Re}(q)$, $d = \mathrm{Im}(q)$ とおき, α_1, α_2, β_1, β_2 を

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{(a-c)(a^2+b^2-c^2-d^2) + 2(b\cosh r - d\cosh s)(bc\cosh r - ad\cosh s)}{2((a-c)^2+(b\cosh r-d\cosh s)^2)} \\
&\quad + \frac{(b\cosh r - d\cosh s)\sqrt{(2bd\cosh(r+s)-(a-c)^2-b^2-d^2)((a-c)^2+b^2+d^2-2bd\cosh(r-s))}}{2((a-c)^2+(b\cosh r-d\cosh s)^2)} \\
\alpha_2 &= \frac{(a-c)(a^2+b^2-c^2-d^2) + 2(b\cosh r - d\cosh s)(bc\cosh r - ad\cosh s)}{2((a-c)^2+(b\cosh r-d\cosh s)^2)} \\
&\quad - \frac{(b\cosh r - d\cosh s)\sqrt{(2bd\cosh(r+s)-(a-c)^2-b^2-d^2)((a-c)^2+b^2+d^2-2bd\cosh(r-s))}}{2((a-c)^2+(b\cosh r-d\cosh s)^2)} \\
\beta_1 &= \frac{b\cosh r((a-c)^2+b^2-d^2) + d\cosh s((a-c)^2-b^2+d^2)}{2((a-c)^2+(b\cosh r-d\cosh s)^2)} \\
&\quad - \frac{(a-c)\sqrt{(2bd\cosh(r+s)-(a-c)^2-b^2-d^2)((a-c)^2+b^2+d^2-2bd\cosh(r-s))}}{2((a-c)^2+(b\cosh r-d\cosh s)^2)} \\
\beta_2 &= \frac{b\cosh r((a-c)^2+b^2-d^2) + d\cosh s((a-c)^2-b^2+d^2)}{2((a-c)^2+(b\cosh r-d\cosh s)^2)} \\
&\quad + \frac{(a-c)\sqrt{(2bd\cosh(r+s)-(a-c)^2-b^2-d^2)((a-c)^2+b^2+d^2-2bd\cosh(r-s))}}{2((a-c)^2+(b\cosh r-d\cosh s)^2)}
\end{aligned}$$

によって定めれば $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r) \cap C_{\boldsymbol{H}}(q\,;s) = \{\alpha_1+\beta_1 i, \alpha_2+\beta_2 i\}$ である.

証明 命題 7.14 より

$$C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)\cap C_{\boldsymbol{H}}(q\,;s)=C_{\boldsymbol{C}}(a+(b\cosh r)i\,;b\sinh r)\cap C_{\boldsymbol{C}}(c+(d\cosh s)i\,;d\sinh s)$$

である. 従って, 条件

$$\begin{aligned}
&|(a+(b\cosh r)i)-(c+(d\cosh s)i)|<|b\sinh r-d\sinh s|\ \cdots(i)\\
&|(a+(b\cosh r)i)-(c+(d\cosh s)i)|=|b\sinh r-d\sinh s|\ \cdots(ii)\\
&|(a+(b\cosh r)i)-(c+(d\cosh s)i)|>|b\sinh r-d\sinh s|\ \cdots(iii)\\
&|(a+(b\cosh r)i)-(c+(d\cosh s)i)|<b\sinh r+d\sinh s\ \cdots(iv)\\
&|(a+(b\cosh r)i)-(c+(d\cosh s)i)|=b\sinh r+d\sinh s\ \cdots(v)\\
&|(a+(b\cosh r)i)-(c+(d\cosh s)i)|>b\sinh r+d\sinh s\ \cdots(vi)
\end{aligned}$$

を考えれば, $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)\cap C_{\boldsymbol{H}}(q\,;s)$ の要素の個数が 0, 1, 2 であることは, それぞれ「(i) または (vi)」,「(ii) または (v)」,「(iii) かつ (iv)」が成り立つことと同値である. 一方,

$$\begin{aligned}
|p-(\mathrm{Re}(q)+i\mathrm{Im}(q)\cosh(r-s))|^2-(\mathrm{Im}(q)\sinh(r-s))^2&=(a-c)^2+b^2+d^2-2bd\cosh(r-s)\\
&=|(a+(b\cosh r)i)-(c+(d\cosh s)i)|^2-(b\sinh r-d\sinh s)^2\\
|p-(\mathrm{Re}(q)+i\mathrm{Im}(q)\cosh(r+s))|^2-(\mathrm{Im}(q)\sinh(r+s))^2&=(a-c)^2+b^2+d^2-2bd\cosh(r+s)\\
&=|(a+(b\cosh r)i)-(c+(d\cosh s)i)|^2-(b\sinh r+d\sinh s)^2
\end{aligned}$$

より $d_{\boldsymbol{H}}(p,q)<|r-s|$, $d_{\boldsymbol{H}}(p,q)=|r-s|$, $d_{\boldsymbol{H}}(p,q)>|r-s|$, $d_{\boldsymbol{H}}(p,q)<r+s$, $d_{\boldsymbol{H}}(p,q)=r+s$, $d_{\boldsymbol{H}}(p,q)>r+s$ が成り立つことは, 順に (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi) が成り立つことと同値である. 後半の主張は命題 7.14 と補題 7.18 から示される. □

7.5 距離を保つ変換

補題 7.20 虚軸上の相異なる 2 点 p, q に対し, $\boldsymbol{H}$ の相異なる 2 点 z, w が $d_{\boldsymbol{H}}(z,p)=d_{\boldsymbol{H}}(w,p)$ かつ $d_{\boldsymbol{H}}(z,q)=d_{\boldsymbol{H}}(w,q)$ を満たせば, $w=-\bar{z}$ である.

証明 $d_{\boldsymbol{H}}(z,p)=r$, $d_{\boldsymbol{H}}(z,q)=s$ とおけば, 仮定から $z,w\in C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)\cap C_{\boldsymbol{H}}(q\,;s)$ である. 補題 7.14 から $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ と $C_{\boldsymbol{H}}(q\,;s)$ はともに虚軸上に中心をもつ円で, 相異なる 2 点 z, w を共有点にもつため, z と w は虚軸に関して対称である. 従って $w=-\bar{z}$ である. □

補題 7.21 次の条件 (i), (ii) を満たす $\boldsymbol{H}$ から $\boldsymbol{H}$ への写像 f は, $\boldsymbol{H}$ の恒等写像である.

(i) 任意の $z,w\in\boldsymbol{H}$ に対し $d_{\boldsymbol{H}}(f(z),f(w))=d_{\boldsymbol{H}}(z,w)$.

(ii) 虚軸上の相異なる 2 点 p, q と虚軸上にない点 u で $f(p)=p$, $f(q)=q$, $f(u)=u$ を満たすものがある.

証明 $f(v)\neq v$ を満たす $v\in\boldsymbol{H}$ が存在すると仮定する. 仮定から $d_{\boldsymbol{H}}(f(v),p)=d_{\boldsymbol{H}}(v,p)$, $d_{\boldsymbol{H}}(f(v),q)=d_{\boldsymbol{H}}(v,q)$ が成り立つため, 補題 7.20 から $f(v)=-\bar{v}$ である. このとき, $d_{\boldsymbol{H}}(u,v)=d_{\boldsymbol{H}}(f(u),f(v))=d_{\boldsymbol{H}}(u,-\bar{v})$ だから, $r=d_{\boldsymbol{H}}(u,v)$ とおけば $u\in C_{\boldsymbol{H}}(v\,;r)\cap C_{\boldsymbol{H}}(-\bar{v}\,;r)$ である. 補題 7.14 により, $C_{\boldsymbol{H}}(v\,;r)$ と $C_{\boldsymbol{H}}(-\bar{v}\,;r)$ は虚軸に関して対称な中心をもち, 半径が等しい円だから, これらの交点は虚軸上にある. このことは u が虚軸上にない点であるという仮定と矛盾するため, $f(v)\neq v$ を満たす $v\in\boldsymbol{H}$ は存在しない. 従って f は $\boldsymbol{H}$ の恒等写像である. □

$z\in\boldsymbol{H}$ を $-\bar{z}$ に写す $\boldsymbol{H}$ から $\boldsymbol{H}$ への写像を ι で表す.

定理 7.22 $\boldsymbol{H}$ から $\boldsymbol{H}$ への写像 f が任意の $z,w\in\boldsymbol{H}$ に対して $d_{\boldsymbol{H}}(f(z),f(w))=d_{\boldsymbol{H}}(z,w)$ を満たすならば, $f=\tau_A$ または $f=\tau_A\circ\iota$ を満たす $A\in SL_2(\boldsymbol{R})$ が存在する.

証明 仮定から $d_{\boldsymbol{H}}(f(i),f(ei))=d_{\boldsymbol{H}}(i,ei)$ だから, 命題 7.13 より $A_1\in SL_2(\boldsymbol{R})$ で, $\tau_{A_1}(f(i))=i$, $\tau_{A_1}(f(ei))=ei$ を満たすものが存在する. $g=\tau_{A_1}\circ f$ とおけば, $g(i)=i$, $g(ei)=ei$ で, g も距離を保つため,

$$d_{\boldsymbol{H}}(g(1+i),i)=d_{\boldsymbol{H}}(g(1+i),g(i))=d_{\boldsymbol{H}}(1+i,i),\quad d_{\boldsymbol{H}}(g(1+i),ei)=d_{\boldsymbol{H}}(g(1+i),g(ei))=d_{\boldsymbol{H}}(1+i,ei)$$

が成り立つ．$g(i+1)=i+1$ ならば補題 7.21 により，g は $\boldsymbol{H}$ の恒等写像だから，命題 7.3 により $f=\tau_{A_1}^{-1}=\tau_{A_1^{-1}}$ である．$g(i+1)\neq i+1$ ならば補題 7.20 により $g(i+1)=\iota(i+1)$ だから，$h=\iota^{-1}\circ g=\iota^{-1}\circ\tau_{A_1}\circ f$ とおけば，$h(i)=i$, $h(ei)=ei$, $h(i+1)=i+1$ で，命題 7.12 により h も距離を保つ．従って，補題 7.21 により，h は $\boldsymbol{H}$ の恒等写像だから，命題 7.3 により $f=\tau_{A_1}^{-1}\circ\iota=\tau_{A_1^{-1}}\circ\iota$ である． □

注意 7.23 $Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ とおけば $A\in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対して $\tau_A\circ\iota=\iota\circ\tau_{Q^{-1}AQ}$ が成り立つ．

7.6 上半平面の線分

補題 7.24 $\lambda\geqq 1$ に対して $z\in\boldsymbol{H}$ が $d_{\boldsymbol{H}}(i,z)+d_{\boldsymbol{H}}(z,\lambda i)=d_{\boldsymbol{H}}(i,\lambda i)$ を満たすための条件は $\mathrm{Re}(z)=0$ かつ $1\leqq\mathrm{Im}(z)\leqq\lambda$ である．

証明 $r=d_{\boldsymbol{H}}(i,z)$, $s=d_{\boldsymbol{H}}(z,\lambda i)$ とおく．$d_{\boldsymbol{H}}(i,\lambda i)=r+s$ ならば，$s=d_{\boldsymbol{H}}(i,\lambda i)-r=\log\lambda-r$ であり，命題 7.19 から $z=\dfrac{i(\lambda^2-1)}{2(\lambda\cosh s-\cosh r)}=ie^r$ が得られ，$r=d_{\boldsymbol{H}}(i,z)\leqq d_{\boldsymbol{H}}(i,\lambda i)=\log\lambda$ だから $1\leqq\mathrm{Im}(z)=e^r\leqq\lambda$ である．逆に $\mathrm{Re}(z)=0$ かつ $1\leqq\mathrm{Im}(z)\leqq\lambda$ ならば $d_{\boldsymbol{H}}(i,z)=\log\mathrm{Im}(z)$, $d_{\boldsymbol{H}}(z,\lambda i)=\log\dfrac{\lambda}{\mathrm{Im}(z)}$ だから $d_{\boldsymbol{H}}(i,z)+d_{\boldsymbol{H}}(z,\lambda i)=\log\lambda=d_{\boldsymbol{H}}(i,\lambda i)$ が成り立つ． □

曲線 $\ell_0:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{H}$ を $\ell_0(t)=ie^t$ で定義する．$s<t$ ならば

$$d_{\boldsymbol{H}}(\ell_0(s),\ell_0(t))=d_{\boldsymbol{H}}(ie^s,ie^t)=\log\frac{|ie^s+ie^t|+|ie^s-ie^t|}{|ie^s+ie^t|-|ie^s-ie^t|}=\log\frac{e^s+e^t-e^s+e^t}{e^s+e^t+e^s-e^t}=t-s$$

が成り立つため，ℓ_0 は距離空間 $(\boldsymbol{H},d_{\boldsymbol{H}})$ の線分である．$A\in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対し，命題 7.12 により，τ_A は距離を保つ写像だから，曲線 $\ell_A:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{H}$ を $\ell_A=\tau_A\circ\ell_0$ で定義すれば，注意 5.15 の (2) により ℓ_A も $(\boldsymbol{H},d_{\boldsymbol{H}})$ の線分であり，$s<t$ ならば $d_{\boldsymbol{H}}(\ell_A(s),\ell_A(t))=d_{\boldsymbol{H}}(\ell_0(s),\ell_0(t))=t-s$ が成り立つ．

$a\neq b$ を満たす実数 a,b に対し，$\boldsymbol{H}$ の部分集合 L_a, $L_{a,b}$ を次のように定める．

$$L_a=\{z\in\boldsymbol{H}\,|\,\mathrm{Re}(z)=a\},\qquad L_{a,b}=\left\{z\in\boldsymbol{H}\,\middle|\,\left|z-\frac{a+b}{2}\right|=\frac{|b-a|}{2}\right\}$$

すなわち，L_a は実軸に垂直な a を始点とする半直線であり，$L_{a,b}$ は a と b を直径の両端とする半円の弧である．とくに，L_0 は ℓ_0 の像であることに注意する．

命題 7.25 $\ell_A=\ell_B$ であるためには $A=B$ または $A=-B$ であることが必要十分である．

証明 $B^{-1}A=\begin{pmatrix}k & l\\ m & n\end{pmatrix}$ とおく．命題 7.3 から $\ell_A(t)=\ell_B(t)$ は $\tau_{B^{-1}A}(ie^t)=ie^t$ と同値で，これは $ike^t+l=ine^t-me^{2t}$ と同値である．この両辺の実部と虚部を比較すれば $k=n$ かつ $l=-me^{2t}$ で，これが任意の t で成り立つため $l=m=0$ である．$kn-lm=1$ より $k=n=\pm1$ だから $B^{-1}A=\pm E_2$, 故に $A=\pm B$ である． □

命題 7.26 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{R})$ とし，ℓ_A による $\boldsymbol{R}$ の像を $C(A)$ とする．

(1) $c=0$ の場合，$C(A)=\{z\in\boldsymbol{H}\,|\,\mathrm{Re}(z)=ab\}=L_{ab}$ である．

(2) $d=0$ の場合，$C(A)=\{z\in\boldsymbol{H}\,|\,\mathrm{Re}(z)=-ab\}=L_{-ab}$ である．

(3) $cd\neq0$ の場合，$C(A)=\left\{z\in\boldsymbol{H}\,\middle|\,\left|z-\dfrac{ad+bc}{2cd}\right|=\dfrac{1}{2|cd|}\right\}=L_{\frac{a}{c},\frac{b}{d}}$ である．

証明 (1) $ad=1$ より $d=\dfrac{1}{a}$ だから $\ell_A(t)=ab+a^2ie^t$ である．t が実数全体を動くとき，$ab+a^2ie^t$ は実部が ab で虚部が正である複素数全体を動くため，$C(A)=\{z\in\boldsymbol{H}\,|\,\mathrm{Re}(z)=ab\}$ である．

(2) $bc=-1$ より $c=-\dfrac{1}{b}$ だから $\ell_A(t)=-ab+b^2e^{-t}i$ である．t が実数全体を動くとき，$-ab+b^2e^{-t}i$ は実部が $-ab$ で虚部が正である複素数全体を動くため，$C(A)=\{z\in\boldsymbol{H}\,|\,\mathrm{Re}(z)=-ab\}$ である．

(3) $x(t)=\mathrm{Re}(\ell_A(t))$, $y(t)=\mathrm{Im}(\ell_A(t))$ とおけば, $\ell_A(t)=\dfrac{b+iae^t}{d+ice^t}$ より $x(t)=\dfrac{ace^{2t}+bd}{c^2e^{2t}+d^2}$, $y(t)=\dfrac{e^t}{c^2e^{2t}+d^2}$ である．このとき, $x(t)-\dfrac{ad+bc}{2cd}=\dfrac{c^2e^{2t}-d^2}{2cd(c^2e^{2t}+d^2)}$ だから $\left(x(t)-\dfrac{ad+bc}{2cd}\right)^2+y(t)^2=\dfrac{1}{4c^2d^2}$ が成り立ち, $\ell_A(t)\in\left\{z\in\boldsymbol{H}\,\middle|\,\left|z-\dfrac{ad+bc}{2cd}\right|=\dfrac{1}{2|cd|}\right\}$ であることがわかる．また, $x(t)=\dfrac{a}{c}-\dfrac{d}{c(c^2e^{2t}+d^2)}$ だから, t が実数全体を動くとき, $x(t)$ は $\dfrac{a}{c}$ と $\dfrac{b}{d}$ の間のすべての実数の値をとるため, $C(A)=\left\{z\in\boldsymbol{H}\,\middle|\,\left|z-\dfrac{ad+bc}{2cd}\right|=\dfrac{1}{2|cd|}\right\}$ である． □

系 7.27 (1) $A\in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対し, $C(A)$ は実軸に垂直な半直線であるか, 実軸上に中心をもつ半円である．従って, $A,B\in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対し $C(A)\neq C(B)$ ならば $C(A)\cap C(B)$ の要素の個数は 1 以下である．

(2) $a<b$, $r>0$ を満たす実数 a, b, r に対して行列 $A(a,b), B(a,r), T(a)\in SL_2(\boldsymbol{R})$ をそれぞれ

$$A(a,b)=\begin{pmatrix}\frac{b}{\sqrt{b-a}} & \frac{a}{\sqrt{b-a}}\\ \frac{1}{\sqrt{b-a}} & \frac{1}{\sqrt{b-a}}\end{pmatrix}\qquad B(a,r)=\begin{pmatrix}\frac{a+r}{2r} & a-r\\ \frac{1}{2r} & 1\end{pmatrix}\qquad T(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

によって定める．このとき, $C(A(a,b))=L_{a,b}$, $C(B(a,r))$ は実軸上の点 a を中心とし, 半径が r である半円であり, $C(T(a))=L_a$ である．

命題 7.28 $p,q\in\boldsymbol{H}$ $(p\neq q)$ に対し, $c>0$ と $\sigma(0)=p$, $\sigma(c)=q$ を満たす線分 $\sigma:[0,c]\to\boldsymbol{H}$ が存在する．

証明 命題 7.5 から, $A\in SL_2(\boldsymbol{R})$ と $c>0$ で $\tau_A(p)=i$, $\tau_A(q)=e^ci$ を満たすものがある．このとき $\tau_{A^{-1}}(i)=p$, $\tau_{A^{-1}}(e^ci)=q$ だから $\tau_{A^{-1}}\circ\ell_0(0)=p$, $\tau_{A^{-1}}\circ\ell_0(c)=q$ が成り立つため, $\tau_{A^{-1}}\circ\ell_0$ の定義域を $[0,c]$ に制限して得られる写像は, p と q を結ぶ線分である． □

$\boldsymbol{H}$ の相異なる 2 点 p, q に対し, $\boldsymbol{H}$ の部分集合 $C(p,q)$ を次のように定める．

- $\mathrm{Re}(p)=\mathrm{Re}(q)$ の場合, $C(p,q)=\{z\in\boldsymbol{H}\,|\,\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(p), \min\{\mathrm{Im}(p),\mathrm{Im}(q)\}\leqq\mathrm{Im}(z)\leqq\max\{\mathrm{Im}(p),\mathrm{Im}(q)\}\}$.
- $\mathrm{Re}(p)\neq\mathrm{Re}(q)$ の場合, 中心が実軸上にあり, p と q を通る円の p と q を結ぶ劣弧を $C(p,q)$ とする．

後者の場合, $C(p,q)$ は中心が $\dfrac{|p|^2-|q|^2}{2(\mathrm{Re}(p)-\mathrm{Re}(q))}$ で, 半径が $\dfrac{|p-q||p-\bar{q}|}{2|\mathrm{Re}(p)-\mathrm{Re}(q)|}$ の円の弧である．系 7.27 の (2) から, $p,q\in\boldsymbol{H}$ $(p\neq q)$ に対し, $C(p,q)\subset C(A)$ を満たす $A\in SL_2(\boldsymbol{R})$ がある．

命題 7.29 $\boldsymbol{H}$ の相異なる 2 点 p, q に対し, $z\in\boldsymbol{H}$ が $d_{\boldsymbol{H}}(p,z)+d_{\boldsymbol{H}}(z,q)=d_{\boldsymbol{H}}(p,q)$ を満たすためには $z\in C(p,q)$ であることが必要十分である．

証明 命題 7.5 から, $\tau_A(p)=i$, $\tau_A(q)=\lambda i$ を満たす $A\in SL_2(\boldsymbol{R})$ と $\lambda>1$ が存在する．従って命題 7.12 から $d_{\boldsymbol{H}}(p,z)+d_{\boldsymbol{H}}(z,q)=d_{\boldsymbol{H}}(p,q)$ は $d_{\boldsymbol{H}}(i,\tau_A(z))+d_{\boldsymbol{H}}(\tau_A(z),\lambda i)=d_{\boldsymbol{H}}(i,\lambda i)$ と同値であり, この等式は補題 7.24 によって $\tau_A(z)\in C(i,\lambda i)$ と同値である．$\tau_{A^{-1}}$ による $C(i,\lambda i)$ の像は命題 7.26 から p, q を両端とする実軸に垂直な線分であるか, または中心が実軸上にあり, p と q を通る円の p と q を結ぶ劣弧であるため, 主張が成り立つ． □

系 7.30 (1) $\sigma:[a,b]\to\boldsymbol{H}$ が線分ならば, σ の像は $C(\sigma(a),\sigma(b))$ に一致する．

(2) $\omega:J\to\boldsymbol{H}$ が線分で, $\omega(J)=C(\omega(a),\omega(b))$ $(a<b)$ であるとき, $t\leqq a$ かつ $t\in J$ ならば $\omega(t)=\omega(a)$ であり, $t\geqq b$ かつ $t\in J$ ならば $\omega(t)=\omega(b)$ である．

証明 (1) 仮定から任意の $t\in[a,b]$ に対して $d_{\boldsymbol{H}}(\sigma(a),\sigma(t))+d_{\boldsymbol{H}}(\sigma(t),\sigma(b))=d_{\boldsymbol{H}}(\sigma(a),\sigma(b))$ が成り立つため, 命題 7.29 から $\sigma(t)\in C(\sigma(a),\sigma(b))$ である．従って σ の像は $C(\sigma(a),\sigma(b))$ の両端の点を含む $C(\sigma(a),\sigma(b))$ の部分集合である．もし σ の像に含まれない $C(\sigma(a),\sigma(b))$ の点が存在すれば, σ の像が連結ではなくなるため, σ の連続性と矛盾する．故に σ の像は $C(\sigma(a),\sigma(b))$ に一致する．

(2) 仮定から $t\in J$ ならば $\omega(t)\in C(\omega(a),\omega(b))$ だから $d_{\boldsymbol{H}}(\omega(a),\omega(t))+d_{\boldsymbol{H}}(\omega(t),\omega(b))=d_{\boldsymbol{H}}(\omega(a),\omega(b))$ が成り立つ．$t\leqq a$ かつ $t\in J$ ならば $d_{\boldsymbol{H}}(\omega(t),\omega(a))+d_{\boldsymbol{H}}(\omega(a),\omega(b))=d_{\boldsymbol{H}}(\omega(t),\omega(b))$ が成り立つため, 初めの等式から $d_{\boldsymbol{H}}(\omega(t),\omega(a))=0$ が得られる．$t\geqq b$ かつ $t\in J$ ならば $d_{\boldsymbol{H}}(\omega(a),\omega(b))+d_{\boldsymbol{H}}(\omega(b),\omega(t))=d_{\boldsymbol{H}}(\omega(a),\omega(t))$ が成り立つため, 初めの等式から $d_{\boldsymbol{H}}(\omega(t),\omega(b))=0$ が得られる． □

L_0 は ℓ_0 の像であり, $C(A)$ は τ_A による L_0 の像だから, $C(A)$ は ℓ_A の像である.

命題 7.31 任意の $A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対し, $\ell_A : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{H}$ は直線である.

証明 線分 $\sigma : J \to \boldsymbol{H}$ の像が L_0 を含み, $c \in J$ で $\sigma(c) \notin L_0$ となるものが存在すると仮定する. L_0 の相異なる点 p, q をとれば, $\sigma(a) = p$, $\sigma(b) = q$ を満たす $a, b \in J$ が存在し, $a < b$ と仮定してよい. $\sigma(c) \notin L_0$ だから, 補題 7.29 から, $c < a < b$ または $a < b < c$ である. $c < a < b$ ならば, 補題 7.29 から, $p \in C(\sigma(c), q)$ である. q は虚軸上の点で, $\sigma(c)$ は虚軸上にないため, $C(\sigma(c), q)$ は実軸上に中心をもつ半円の弧であり, q が虚軸との唯一の共有点であるが, このことは $p \in C(\sigma(c), q) \cap L_0$ と矛盾する. 同様に $a < b < c$ ならば $q \in C(p, \sigma(c)) \cap L_0$ であるが, $C(p, \sigma(c))$ と虚軸との唯一の共有点は p であるため, 矛盾が生じる. 故に $\sigma : J \to \boldsymbol{H}$ の像が L_0 を含めば, $\sigma : J \to \boldsymbol{H}$ の像は L_0 に一致する. 線分 $\sigma : J \to \boldsymbol{H}$ の像が $C(A)$ を含めば, $\tau_{A^{-1}} = \tau_A^{-1}$ による $C(A)$ の像は L_0 だから $\tau_{A^{-1}} \circ \sigma$ の像は L_0 を含む. 従って $\tau_{A^{-1}} \circ \sigma$ の像は L_0 に一致するため, σ の像は $C(A)$ に一致する. □

上の命題から, 実軸に垂直な半直線と, 実軸上に中心をもつ半円は $\boldsymbol{H}$ の直線である. $\boldsymbol{H}$ の相異なる 2 点 p, q に対し, 命題 7.28 から, p と q を結ぶ線分が存在し, 系 7.30 の (1) から, p と q を結ぶ線分の像は $C(p, q)$ になるため, 距離空間 $(\boldsymbol{H}, d_{\boldsymbol{H}})$ において公理 7.1 の最初の公理が成り立つ. また, $C(p, q)$ を含む直線 $C(A)$ が存在することから, 2 番目の公理も成り立つ.

命題 7.32 $\sigma : I \to \boldsymbol{H}$ が直線ならば, σ の像は実軸上の点を始点とし実軸に垂直な半直線であるか, 実軸上の相異なる 2 点を直径の両端とする半円の弧である.

証明 $a < b$ を満たす $a, b \in I$ をとると, 系 7.30 の (1) より $\sigma([a, b]) = C(\sigma(a), \sigma(b))$ であり, $C(\sigma(a), \sigma(b)) \subset C(A)$ を満たす $A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ が存在する. $[a, b] \subset [c, d] \subset I$ ならば $\sigma([a, b]) \subset \sigma([c, d])$ だから $C(\sigma(a), \sigma(b)) \subset C(\sigma(c), \sigma(d))$ が成り立つが, 系 7.27 から $C(A)$ は実軸上の点を始点とし実軸に垂直な半直線であるか, 実軸上の相異なる 2 点を直径の両端とする半円の弧だから $C(\sigma(c), \sigma(d)) \subset C(A)$ である. 従って, $[a, b] \subset I$ を満たす任意の a, b に対して $C(\sigma(a), \sigma(b)) \subset C(A)$ であり, $\sigma(I) = \sigma\left(\bigcup_{[a,b] \subset I} [a, b]\right) = \bigcup_{[a,b] \subset I} \sigma([a, b]) \subset C(A) = \ell_A(\boldsymbol{R})$ が成り立つ. σ は直線だから, 上式から $\sigma(I) = C(A)$ となるため, 系 7.27 の (1) より σ の像は実軸上の点を始点とし実軸に垂直な半直線であるか, 実軸上の相異なる 2 点を直径の両端とする半円の弧である. □

命題 7.33 (1) $A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ が $\tau_A(i) = i$ を満たすことと $A = R(\theta)$ を満たす $0 \leqq \theta < 2\pi$ が存在することは同値である.

(2) $A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ が $C(A) = L_0$ を満たすことと $A = S(\lambda) R\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ を満たす $n = 0, 1, 2, 3$ と $\lambda > 0$ が存在することは同値である.

(3) $\tau_A(i) = i$ かつ $C(A) = L_0$ を満たす $A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ は E_2, $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $-E_2$, $-R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ のいずれかに限る.

証明 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\boldsymbol{R})$ とする.

(1) $\tau_A(i) = \dfrac{ai + b}{ci + d} = \dfrac{ac + bd + i}{c^2 + d^2}$ だから $\tau_A(i) = i$ ならば $c^2 + d^2 = 1$ かつ $ac + bd = 0$ である. 従って $d = \cos\theta$, $c = \sin\theta$ を満たす $0 \leqq \theta < 2\pi$ が存在する. このとき, $\begin{cases} a\cos\theta - b\sin\theta = 1 \\ a\sin\theta + b\cos\theta = 0 \end{cases}$ が成り立つため, $R(\theta)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ である. 故に $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = R(\theta)^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$ だから $A = R(\theta)$ である. $\tau_{R(\theta)}(i) = i$ は容易に確かめられる.

(2) n が 0 または 2 ならば $R\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \pm E_2$ だから $\tau_{R\left(\frac{\pi n}{2}\right)}$ は $\boldsymbol{H}$ の恒等写像であり, n が 1 または 3 ならば, 正の実数 t に対して $\tau_{R\left(\frac{\pi n}{2}\right)}(it) = \dfrac{i}{t}$ だから, $\tau_{R\left(\frac{\pi n}{2}\right)}$ による L_0 の像は L_0 である. また, $\tau_{S(\lambda)}(z) = \lambda z$ だから, $\tau_{S(\lambda)}$ による L_0 の像は L_0 である. 従って $A = S(\lambda) R\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ を満たす $n = 0, 1, 2, 3$ と $\lambda > 0$ が存在するならば $C(A) = \tau_{S(\lambda)} \circ \tau_{R\left(\frac{\pi n}{2}\right)}(L_0) = L_0$ である.

$A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ が $C(A) = L_0$ を満たすとする. $\tau_A(i) = \dfrac{ac + bd + i}{c^2 + d^2}, \tau_A(ei) = \dfrac{ace^2 + bd + ei}{c^2e^2 + d^2} \in L_0$ より

$ac+bd=0$, $ace^2+bd=0$ だから $ac=bd=0$ が成り立つ．故に $ad-bc=1$ に注意すれば「$b=c=0$ かつ $d=\dfrac{1}{a}$」または「$a=d=0$ かつ $c=-\dfrac{1}{b}$」である．前者の場合, $a>0$ ならば $A=S(a^2)R(0)$, $a<0$ ならば $A=S(a^2)R(\pi)$ であり, 後者の場合, $b>0$ ならば $A=S(b^2)\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, $b<0$ ならば $A=S(b^2)R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ である．

(3) $\tau_A(i)=i$ かつ $C(A)=L_0$ ならば (2) より $A=S(\lambda)R\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ $(n=0,1,2,3)$ の形であり, $i=\tau_A(i)=\tau_{S(\lambda)}\circ\tau_{R\left(\frac{\pi n}{2}\right)}(i)=\tau_{S(\lambda)}(i)=\lambda i$ だから $\lambda=1$ である． □

次の命題は簡単な計算で確かめられる．

命題 7.34 $a,b\in\boldsymbol{R}$ $(a<b)$, $\lambda>0$ とする．

(1) $\tau_{T(a)S(\lambda)}(i)=a+\lambda i$ かつ $C(T(a)S(\lambda))=L_a$ が成り立つ．

(2) $\tau_{A(a,b)S(\lambda)}(i)=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b-a}{2}\left(\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}+\dfrac{2\lambda i}{\lambda^2+1}\right)$ かつ $C(A(a,b)S(\lambda))=L_{a,b}$ が成り立つ．

命題 7.35 L, L' を実軸上の点を始点とし実軸に垂直な半直線であるか, 実軸上の相異なる 2 点を直径の両端とする半円の弧とする．$p\in L$, $q\in L'$ に対して, $A\in SL_2(\boldsymbol{R})$ で $\tau_A(p)=q$ かつ τ_A による L の像が L' であるものが存在する．

証明 命題 7.34 から $A_1,A_2\in SL_2(\boldsymbol{R})$ で $\tau_{A_1}(i)=p$, $\tau_{A_2}(i)=q$ かつ τ_{A_1} による L_0 の像が L, τ_{A_2} による L_0 の像が L' であるものが存在する．このとき命題 7.3 から $\tau_{A_1^{-1}}(p)=i$ かつ $\tau_{A_1^{-1}}$ による L の像が L_0 だから $A=A_2A_1^{-1}$ とおけば $\tau_A(p)=q$ かつ τ_A による L の像は L' である． □

注意 7.36 L を実軸上の点を始点とし実軸に垂直な半直線であるか, 実軸上の相異なる 2 点を直径の両端とする半円の弧とし, $p\in L$ とする．$A,B\in SL_2(\boldsymbol{R})$ が $C(A)=C(B)=L$ かつ $\tau_A(i)=\tau_B(i)=p$ を満たせば $C(A^{-1}B)=L_0$, $\tau_{A^{-1}B}(i)=i$ が成り立つため, 命題 7.33 の (3) によって $B=AR\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ を満たす $n=0,1,2,3$ が存在する．従って, $\tau_B=\tau_A$ または $\tau_B=\tau_A\circ\tau_{R\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ が成り立つため, $\ell_B=\ell_A$ であるか, 任意の $t\in\boldsymbol{R}$ に対して $\ell_B(t)=\ell_A(-t)$ である．

命題 7.37 L, L' を実軸上の点を始点とし実軸に垂直な半直線であるか, 実軸上の相異なる 2 点を直径の両端とする半円の弧とする．L と L' が一点で交わるとき, 距離を保つ $\boldsymbol{H}$ の変換 $f:\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}$ で $f(L)=L'$ かつ $f(L')=L$ を満たすものが存在する．

証明 $L=L_0$ であり, $L'=C(R(\theta))$ を満たす $0<\theta<\pi$ が存在する場合, $f=\tau_{R(\theta)}\circ\iota$ で f を定めれば, f は距離を保つ．$f(L)=\tau_{R(\theta)}(\iota(L_0))=\tau_{R(\theta)}(L_0)=C(R(\theta))=L'$ であり, 注意 7.23 から

$$f\circ f=\tau_{R(\theta)}\circ\iota\circ\tau_{R(\theta)}\circ\iota=\tau_{R(\theta)}\circ\iota\circ\iota\circ\tau_{Q^{-1}R(\theta)Q}=\tau_{R(\theta)}\circ\tau_{R(-\theta)}=\tau_{E_2}=id_{\boldsymbol{H}}$$

が成り立つため, $f(L')=f(f(L))=(f\circ f)(L)=L$ である．一般の場合, L と L' の交点を p とすれば, 命題 7.34 から, $\tau_A(i)=p$ かつ $\tau_A(L_0)=L$ を満たす $A\in SL_2(\boldsymbol{R})$ がある．$\tau_{A^{-1}}(p)=i$ だから, $\tau_{A^{-1}}(L')$ は i を含み, 実軸上の相異なる 2 点を直径の両端とする半円の弧である．従って $\tau_{A^{-1}}(L')=C(R(\theta))=\tau_{R(\theta)}(L_0)$ を満たす $0<\theta<\pi$ が存在する．そこで f を $f=\tau_A\circ\tau_{R(\theta)}\circ\iota\circ\tau_{A^{-1}}$ によって定めれば $f\circ f=id_{\boldsymbol{H}}$ であり, $f(L)=\tau_A(\tau_{R(\theta)}(\iota(\tau_{A^{-1}}(L))))=\tau_A(\tau_{R(\theta)}(\iota(L_0)))=\tau_A(\tau_{R(\theta)}(L_0))=\tau_A(\tau_{A^{-1}}(L'))=L'$, $f(L')=f(f(L))=(f\circ f)(L)=L$ である． □

$\boldsymbol{H}$ の異なる 2 点から等距離にある点全体の集合は次のように与えられる．

命題 7.38 $\boldsymbol{H}$ の相異なる 2 点 p, q に対し, $E(p,q)=\{z\in\boldsymbol{H}\,|\,d_{\boldsymbol{H}}(z,p)=d_{\boldsymbol{H}}(z,q)\}$ とおく．

(1) $\mathrm{Re}(p)=\mathrm{Re}(q)$ ならば $E(p,q)=\left\{z\in\boldsymbol{H}\,\middle|\,|z-\mathrm{Re}(p)|=\sqrt{\mathrm{Im}(p)\mathrm{Im}(q)}\right\}$ である．

(2) $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Im}(q)$ ならば $E(p,q)=\left\{z\in\boldsymbol{H}\,\middle|\,\mathrm{Re}(z)=\dfrac{\mathrm{Re}(p)+\mathrm{Re}(q)}{2}\right\}$ である．

(3) $p,q\in\boldsymbol{H}$ が $p=c+R\cos\alpha+(R\sin\alpha)i$, $q=c+R\cos\beta+(R\sin\beta)i$ $(c\in\boldsymbol{R},\ R>0,\ 0<\alpha,\beta<\pi,\ \alpha+\beta\neq\pi)$ と表される点のとき, $E(p,q)=\left\{z\in\boldsymbol{H}\,\middle|\,\left|z-\left(c+R\dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\right)\right|=\dfrac{R\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}}{\left|\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right|}\right\}$ である．

証明 (1) $\mathrm{Re}(p)=a, \mathrm{Im}(p)=b, \mathrm{Im}(q)=d$ とおく．$z\in E(p,q)$ であることは $p,q\in C_{\boldsymbol{H}}(z\,;r)$ を満たす $r>0$ が存在することと同値である．$z=x+yi$ $(x,y\in\boldsymbol{R})$ とおけば, $C_{\boldsymbol{H}}(z\,;r)$ は中心が $x+(y\cosh r)i$, 半径が $y\sinh r$ の円だから, $p,q\in C_{\boldsymbol{H}}(z\,;r)$ であるためには, $(a-x)^2+(b-y\cosh r)^2=y^2\sinh^2 r$ かつ $(a-x)^2+(d-y\cosh r)^2=y^2\sinh^2 r$ が成り立つことが必要十分である．このとき $y=\dfrac{b+d}{2\cosh r}$ かつ $(x-a)^2+y^2=bd$ が成り立つため, $z-a$ の絶対値は $\sqrt{bd}$ に等しい．逆に $|z-a|=\sqrt{bd}$ ならば $y\leqq|z-a|=\sqrt{bd}<\dfrac{b+d}{2}$ だから $\cosh r=\dfrac{b+d}{2y}$ を満たす $r>0$ が存在して $p,q\in C_{\boldsymbol{H}}(z\,;r)$ が成り立つ．

(2) $\mathrm{Im}(p)=b, \mathrm{Re}(p)=a, \mathrm{Re}(q)=c$ とおく．$z\in E(p,q)$ であることは $p,q\in C_{\boldsymbol{H}}(z\,;r)$ を満たす $r>0$ が存在することと同値である．$z=x+yi$ $(x,y\in\boldsymbol{R})$ とおけば, $C_{\boldsymbol{H}}(z\,;r)$ は中心が $x+(y\cosh r)i$, 半径が $y\sinh r$ の円だから, $p,q\in C_{\boldsymbol{H}}(z\,;r)$ であるためには, $(a-x)^2+(b-y\cosh r)^2=y^2\sinh^2 r$ かつ $(c-x)^2+(b-y\cosh r)^2=y^2\sinh^2 r$ が成り立つことが必要十分である．このとき $x=\dfrac{a+c}{2}$ が成り立つため, $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{a+c}{2}$ である．逆に $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{a+c}{2}$ ならば $\dfrac{1}{2b}\left(y+\dfrac{(a-c)^2+4b^2}{4y}\right)\geqq\dfrac{1}{2b}\sqrt{(a-c)^2+4b^2}>1$ だから $\cosh r=\dfrac{1}{2b}\left(y+\dfrac{(a-c)^2+4b^2}{4y}\right)$ を満たす $r>0$ が存在して $p,q\in C_{\boldsymbol{H}}(z\,;r)$ が成り立つ．

(3) $z\in E(p,q)$ であることは $p,q\in C_{\boldsymbol{H}}(z\,;r)$ を満たす $r>0$ が存在することと同値である．$z=x+yi$ $(x,y\in\boldsymbol{R})$ とおけば, $C_{\boldsymbol{H}}(z\,;r)$ は中心が $x+(y\cosh r)i$, 半径が $y\sinh r$ の円だから, $p,q\in C_{\boldsymbol{H}}(z\,;r)$ であるためには, $(c+R\cos\alpha-x)^2+(R\sin\alpha-y\cosh r)^2=y^2\sinh^2 r$ かつ $(c+R\cos\beta-x)^2+(R\sin\beta-y\cosh r)^2=y^2\sinh^2 r$ が成り立つことが必要十分である．このとき, 上の 2 つの式から $y\cosh r=-\dfrac{(x-c)(\cos\alpha-\cos\beta)}{\sin\alpha-\sin\beta}=\dfrac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-c)$ が得られ, これを用いて r を消去すれば $\left(x-c-R\dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\right)^2+y^2=\dfrac{R^2\sin\alpha\sin\beta}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$ が得られる．故に z は中心が $c+R\dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$, 半径が $\dfrac{R\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}}{\left|\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right|}$ の円周上にある．逆に z がこの円周上にあれば, $x=\mathrm{Re}(z)=c+R\dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}+\dfrac{R\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\cos\theta$, $y=\mathrm{Im}(z)=\dfrac{R\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\sin\theta$ (ただし $\alpha+\beta<\pi$ ならば $0<\theta<\pi$, $\alpha+\beta>\pi$ ならば $\pi<\theta<2\pi$) と表される．関数 $f:(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)\to\boldsymbol{R}$ を

$$f(\theta)=\frac{(x-c)\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{y\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}\cos\theta+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}\sin\theta}$$

で定めれば, $f'(\theta)=-\dfrac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\theta+\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}\right)}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}\sin^2\theta}$ である．$A=\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $B=\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ とおけば $\sin\alpha\sin\beta=B^2-A^2$ だから, $\alpha+\beta<\pi$ ならば f は区間 $\left(0,\pi-\cos^{-1}\frac{\sqrt{B^2-A^2}}{B}\right]$ で単調に減少し, $\left[\pi-\cos^{-1}\frac{\sqrt{B^2-A^2}}{B},\pi\right)$ で単調に増加するため, $\theta\in(0,\pi)$ ならば $f(\theta)\geqq f\left(\pi-\cos^{-1}\frac{\sqrt{B^2-A^2}}{B}\right)=\dfrac{\sqrt{1-A^2}}{\sqrt{B^2-A^2}}>1$ である．$\alpha+\beta>\pi$ ならば f は区間 $\left(\pi,\pi+\cos^{-1}\frac{\sqrt{B^2-A^2}}{B}\right]$ で単調に減少し, $\left[\pi+\cos^{-1}\frac{\sqrt{B^2-A^2}}{B},2\pi\right)$ で単調に増加するため, $\theta\in(\pi,2\pi)$ ならば $f(\theta)\geqq f\left(\pi+\cos^{-1}\frac{\sqrt{B^2-A^2}}{B}\right)=\dfrac{\sqrt{1-A^2}}{\sqrt{B^2-A^2}}>1$ である．故に, $z=x+yi$ が上記の円周上にあれば, $\cosh r=\dfrac{(x-c)\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{y\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$ を満たす $r>0$ が存在して $p,q\in C_{\boldsymbol{H}}(z\,;r)$ が成り立つ． □

注意 7.39 a を 0 でない実数, λ を正の実数とするとき, 上の結果から $E(i,\lambda^2 i)=\{z\in\boldsymbol{H}\,|\,|z|=\lambda\}$, $E(i,i+2a)=\{z\in\boldsymbol{H}\,|\,\mathrm{Re}(z)=a\}$ だから $E(i,\lambda^2 i)\cap E(i,i+2a)$ が空集合でないためには $|a|<\lambda$ であることが必要十分である．

7.7 曲線のなす角

定義 7.40 $\omega:I\to\boldsymbol{H}$, $\xi:J\to\boldsymbol{H}$ を $\boldsymbol{H}$ の曲線とする．

(1) $t\in I$ を $\mathrm{Re}(\omega(t))$ に対応させる関数を $\mathrm{Re}(\omega):I\to\boldsymbol{R}$ で表し, $t\in I$ を $\mathrm{Im}(\omega(t))$ に対応させる関数を

$\mathrm{Im}(\omega) : I \to (0,\infty)$ で表す．$\mathrm{Re}(\omega)$ と $\mathrm{Im}(\omega)$ が $a \in I$ で微分可能であるとき，ω は a で微分可能であるといい，$\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\omega)'(a)\\ \mathrm{Im}(\omega)'(a)\end{pmatrix}$ を $\omega(a)$ における ω の接ベクトルという．また，$\omega'(a) = \mathrm{Re}(\omega)'(a) + i\mathrm{Im}(\omega)'(a)$ とおく．

(2) $\omega(a) = \xi(b)$ かつ ω と ξ がそれぞれ $a \in I$, $b \in J$ で微分可能であり，$\omega'(a), \xi'(b) \neq 0$ であるとき，$\omega(a)$ における ω の接ベクトルと $\xi(b)$ における ξ の接ベクトルのなす角を，ω と ξ の a, b におけるなす角という．

(3) $\omega : I \to \boldsymbol{H}$, $\xi : J \to \boldsymbol{H}$ が $p \in \boldsymbol{H}$ で交わる直線の場合，$p = \omega(a) = \xi(b)$ とするとき，ω と ξ の a, b におけるなす角を θ とすれば，θ と $\pi - \theta$ の小さい方を ω と ξ のなす角という．

注意 7.41 (1) $\boldsymbol{H}$ の曲線 $\omega : I \to \boldsymbol{H}$ に対し，$I^c = \{t \in \boldsymbol{R} \,|\, -t \in I\}$ とおき，曲線 $\omega^c : I^c \to \boldsymbol{H}$ を $\omega^c(t) = \omega(-t)$ で定義する．ω が $a \in I$ で微分可能ならば ω^c は $-a$ で微分可能であり，$(\omega^c)'(-a) = -\omega'(a)$ が成り立つ．従って，$\boldsymbol{H}$ の曲線 $\omega : I \to \boldsymbol{H}$, $\xi : J \to \boldsymbol{H}$ が $\omega(a) = \xi(b)$ かつ ω と ξ がそれぞれ $a \in I$, $b \in J$ で微分可能であり，$\omega'(a), \xi'(b) \neq 0$ であるとき，ω と ξ の a, b におけるなす角を θ とすれば，ω^c と ξ の $-a$, b におけるなす角は $\pi - \theta$ に等しい．

(2) $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ の内積は $\mathrm{Re}(\overline{u+vi}(x+yi))$ に等しいため，ω と ξ の a, b におけるなす角を θ とおけば $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{Re}(\overline{\omega'(a)}\xi'(b))}{|\omega'(a)||\xi'(b)|}$ である．

$\boldsymbol{H}$ の 2 本の直線のなす角を次のように定義する．

定義 7.42 L, L' を実軸上の点を始点とし実軸に垂直な半直線であるか，実軸上の相異なる 2 点を直径の両端とする半円の弧とし，L と L' は交わっているとする．$C(A) = L$, $C(A') = L'$ を満たす $A, A' \in SL_2(\boldsymbol{R})$ を選び，$\ell_A(a) = \ell_{A'}(a')$ が L と L' の交点であるとき，ℓ_A と $\ell_{A'}$ の a, a' におけるなす角を θ とする．$\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ならば θ を L と L' のなす角といい，$\theta > \dfrac{\pi}{2}$ ならば $\pi - \theta$ を L と L' のなす角という．

$A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in SL_2(\boldsymbol{R})$ と $z \in \boldsymbol{H}$ に対し，$\tau'_A(z) = \dfrac{1}{|cz+d|^2}\begin{pmatrix}\mathrm{Re}((cz+d)^2) & \mathrm{Im}((cz+d)^2)\\ -\mathrm{Im}((cz+d)^2) & \mathrm{Re}((cz+d)^2)\end{pmatrix}$ とおく．とくに，$\lambda > 0$, $c \in \boldsymbol{R}$, $z \in \boldsymbol{H}$ に対し，$\tau'_{S(\lambda)}(z) = \tau'_{T(c)}(z) = E_2$ であり，$z \in L_0$ ならば $\tau_{R(\frac{\pi}{2})}(z) = \tau_{R(\frac{3\pi}{2})}(z) = E_2$ である．

補題 7.43 $\boldsymbol{H}$ の曲線 $\omega : I \to \boldsymbol{H}$ が $t \in I$ で微分可能ならば $A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対して次の等式が成り立つ．

$$\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\tau_A \circ \omega)'(t)\\ \mathrm{Im}(\tau_A \circ \omega)'(t)\end{pmatrix} = \tau'_A(\omega(t))\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\omega)'(t)\\ \mathrm{Im}(\omega)'(t)\end{pmatrix}$$

とくに $\omega = \ell_0$ の場合を考えれば，$\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\ell_A)'(t)\\ \mathrm{Im}(\ell_A)'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2cde^t}{c^2e^t+d^2e^{-t}}\\ \frac{d^2-c^2e^{2t}}{c^2e^t+d^2e^{-t}}\end{pmatrix}$ が得られる．

証明 $\mathrm{Re}(\omega) = u$, $\mathrm{Im}(\omega) = v$ とおくと，命題 7.2 から

$$\mathrm{Re}(\tau_A \circ \omega(t)) = \mathrm{Re}\left(\frac{a\omega(t)+b}{c\omega(t)+d}\right) = \frac{ac|\omega(t)|^2 + bd + (ad+bc)\mathrm{Re}(\omega(t))}{|c\omega(t)+d|^2} = \frac{(au(t)+b)(cu(t)+d) + acv(t)^2}{(cu(t)+d)^2 + c^2v(t)^2}$$
$$\mathrm{Im}(\tau_A \circ \omega(t)) = \mathrm{Im}\left(\frac{a\omega(t)+b}{c\omega(t)+d}\right) = \frac{\mathrm{Im}(\omega(t))}{|c\omega(t)+d|^2} = \frac{v(t)}{(cu(t)+d)^2 + c^2v(t)^2}$$

だから

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\tau_A \circ \omega)'(t)\\ \mathrm{Im}(\tau_A \circ \omega)'(t)\end{pmatrix} &= \frac{1}{((cu(t)+d)^2 + c^2v(t)^2)^2}\begin{pmatrix}(cu(t)+d)^2 - c^2v(t)^2 & 2c(cu(t)+d)v(t)\\ -2c(cu(t)+d)v(t) & (cu(t)+d)^2 - c^2v(t)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'(t)\\ v'(t)\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{|c\omega(t)+d|^2}\begin{pmatrix}\mathrm{Re}((c\omega(t)+d)^2) & \mathrm{Im}((c\omega(t)+d)^2)\\ -\mathrm{Im}((c\omega(t)+d)^2) & \mathrm{Re}((c\omega(t)+d)^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\omega)'(t)\\ \mathrm{Im}(\omega)'(t)\end{pmatrix} = \tau'_A(\omega(t))\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\omega)'(t)\\ \mathrm{Im}(\omega)'(t)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

補題 7.44 $A, B \in SL_2(\boldsymbol{R})$ と $z \in \boldsymbol{H}$ に対し，$\tau'_{AB}(z) = \tau'_A(\tau_B(z))\tau_B(z)$ が成り立つ．

証明 $t \in I$ で微分可能な $\boldsymbol{H}$ の曲線 $\omega : I \to \boldsymbol{H}$ に対して, 補題 7.43 より次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\tau'_{AB}(\omega(t))\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\omega)'(t)\\ \mathrm{Im}(\omega)'(t)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\tau_{AB}\circ\omega)'(t)\\ \mathrm{Im}(\tau_{AB}\circ\omega)'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\tau_A\circ\tau_B\circ\omega)'(t)\\ \mathrm{Im}(\tau_A\circ\tau_B\circ\omega)'(t)\end{pmatrix} = \tau'_A(\tau_B\circ\omega(t))\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\tau_B\circ\omega)'(t)\\ \mathrm{Im}(\tau_B\circ\omega)'(t)\end{pmatrix}\\ &= \tau'_A(\tau_B(\omega(t)))\tau'_B(\omega(t))\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\omega)'(t)\\ \mathrm{Im}(\omega)'(t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\omega_1(t) = \mathrm{Re}(z) + ie^t\mathrm{Im}(z)$, $\omega_2(t) = \mathrm{Re}(z) + e^{it}\mathrm{Im}(z)$ によって曲線 $\omega_1, \omega_2 : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{H}$ を定めれば, $\omega_1(0) = \omega_2(0) = z$ であり, $\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\omega_1)'(0)\\ \mathrm{Im}(\omega_1)'(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \mathrm{Im}(z)\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\omega_2)'(0)\\ \mathrm{Im}(\omega_2)'(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{Im}(z)\\ 0\end{pmatrix}$ が成り立つ. 従って, 上で得た等式で $\omega = \omega_1, \omega_2$, $t = 0$ の場合を考えれば, $\tau'_{AB}(z) = \tau'_A(\tau_B(z))\tau_B(z)$ が得られる. □

命題 7.45 $A, B, P, Q \in SL_2(\boldsymbol{R})$ が $C(A) = C(B)$, $C(P) = C(Q)$ を満たし, $a, b, p, q \in \boldsymbol{R}$ が $\ell_A(a) = \ell_P(p) = \ell_B(b) = \ell_Q(q)$ を満たすとする. ℓ_A と ℓ_P の a, p におけるなす角を θ, ℓ_B と ℓ_Q の a, p におけるなす角を φ とすれば, $\varphi = \theta$ または $\varphi = \pi - \theta$ である.

証明 $C(A) = C(B)$, $C(P) = C(Q)$ より, $C(A^{-1}B) = C(P^{-1}Q) = L_0$ だから, 命題 7.33 の (2) から $\lambda, \mu > 0$ と $k, l = 0, 1, 2, 3$ で $A^{-1}B = S(\lambda)R(\frac{\pi k}{2})$, $P^{-1}Q = S(\mu)R(\frac{\pi l}{2})$ を満たすものが存在する. 従って $\ell_B = \tau_B\circ\ell_0 = \tau_A\circ\tau_{S(\lambda)}\circ\tau_{R(\frac{\pi k}{2})}\circ\ell_0$, $\ell_Q = \tau_Q\circ\ell_0 = \tau_P\circ\tau_{S(\mu)}\circ\tau_{R(\frac{\pi l}{2})}\circ\ell_0$ が成り立つ.
$\tau_{R(\frac{\pi k}{2})}(ie^b) = \begin{cases} ie^b & k = 0, 2\\ ie^{-b} & k = 1, 3\end{cases}$, $\tau_{R(\frac{\pi l}{2})}(ie^q) = \begin{cases} ie^q & l = 0, 2\\ ie^{-b} & i = 1, 3\end{cases}$ に注意すれば, $\ell_A(a) = \ell_P(p) = \ell_B(b) = \ell_Q(q)$ から

$$\tau_A(ie^a) = \tau_B(ie^b) = \tau_A\Big(\tau_{S(\lambda)}\Big(\tau_{R(\frac{\pi k}{2})}(ie^b)\Big)\Big) = \begin{cases}\tau_A(i\lambda e^b) & k = 0, 2\\ \tau_A(i\lambda e^{-b}) & k = 1, 3\end{cases}$$

$$\tau_P(ie^p) = \tau_B(ie^q) = \tau_P\Big(\tau_{S(\mu)}\Big(\tau_{R(\frac{\pi l}{2})}(ie^q)\Big)\Big) = \begin{cases}\tau_P(i\mu e^q) & l = 0, 2\\ \tau_P(i\mu e^{-q}) & l = 1, 3\end{cases}$$

が得られるため, $k = 0, 2$ ならば $\lambda e^b = e^a$, $k = 1, 3$ ならば $\lambda e^{-b} = e^a$, $l = 0, 2$ ならば $\mu e^q = e^p$, $l = 1, 3$ ならば $\mu e^{-q} = e^p$ が成り立つ. 補題 7.43 から

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\ell_B)'(b)\\ \mathrm{Im}(\ell_B)'(b)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\mathrm{Re}\big(\tau_A\circ\tau_{S(\lambda)}\circ\tau_{R(\frac{\pi k}{2})}\circ\ell_0\big)'(b)\\ \mathrm{Im}\big(\tau_A\circ\tau_{S(\lambda)}\circ\tau_{R(\frac{\pi k}{2})}\circ\ell_0\big)'(b)\end{pmatrix} = \tau'_A\Big(\tau_{S(\lambda)}\circ\tau_{R(\frac{\pi k}{2})}(ie^b)\Big)\,\tau'_{S(\lambda)}\Big(\tau_{R(\frac{\pi k}{2})}(ie^b)\Big)\tau'_{R(\frac{\pi k}{2})}(ie^b)\begin{pmatrix}0\\ e^b\end{pmatrix}\\ &= \begin{cases}\tau'_A(i\lambda e^b)\left(\begin{smallmatrix}0\\ e^b\end{smallmatrix}\right) & k = 0, 2\\ \tau'_A(i\lambda e^{-b})\left(\begin{smallmatrix}0\\ -e^b\end{smallmatrix}\right) & k = 1, 3\end{cases} = (-1)^k e^{b-a}\tau'_A(ie^a)\begin{pmatrix}0\\ e^a\end{pmatrix} = (-1)^k e^{b-a}\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\ell_A)'(a)\\ \mathrm{Im}(\ell_A)'(a)\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\ell_Q)'(q)\\ \mathrm{Im}(\ell_Q)'(q)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\mathrm{Re}\big(\tau_P\circ\tau_{S(\mu)}\circ\tau_{R(\frac{\pi l}{2})}\circ\ell_0\big)'(q)\\ \mathrm{Im}\big(\tau_P\circ\tau_{S(\mu)}\circ\tau_{R(\frac{\pi l}{2})}\circ\ell_0\big)'(q)\end{pmatrix} = \tau'_P\Big(\tau_{S(\mu)}\circ\tau_{R(\frac{\pi l}{2})}(ie^q)\Big)\,\tau'_{S(\mu)}\Big(\tau_{R(\frac{\pi l}{2})}(ie^q)\Big)\,\tau'_{R(\frac{\pi l}{2})}(ie^q)\begin{pmatrix}0\\ e^q\end{pmatrix}\\ &= \begin{cases}\tau'_P(i\mu e^q)\left(\begin{smallmatrix}0\\ e^q\end{smallmatrix}\right) & l = 0, 2\\ \tau'_P(i\mu e^{-q})\left(\begin{smallmatrix}0\\ -e^q\end{smallmatrix}\right) & l = 1, 3\end{cases} = (-1)^l e^{q-p}\tau'_P(ie^p)\begin{pmatrix}0\\ e^p\end{pmatrix} = (-1)^l e^{q-p}\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\ell_P)'(p)\\ \mathrm{Im}(\ell_P)'(p)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

が得られるため, $\varphi = \theta$ または $\varphi = \pi - \theta$ が成り立つ. □

上の結果から, 定義 7.42 において, L と L' のなす角は $C(A) = L$, $C(B) = L'$ を満たす $A, B \in SL_2(\boldsymbol{R})$ の選び方に依存しない. $\tau'_A(z)$ は行列式の値が 1 である直交行列だから, 補題 7.43 から次の結果が得られる.

定理 7.46 $\boldsymbol{H}$ の曲線 $\omega : I \to \boldsymbol{H}$, $\xi : J \to \boldsymbol{H}$ がそれぞれ $p \in I$, $q \in J$ で微分可能であり, $\omega(p) = \xi(q)$ かつ $\omega'(p), \xi'(q) \neq 0$ であるとする. $A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対して $\boldsymbol{H}$ の曲線 $\tau_A \circ \omega : I \to \boldsymbol{H}$ と $\tau_A \circ \xi : J \to \boldsymbol{H}$ の p, q におけるなす角は ω と ξ の p, q におけるなす角に等しい.

命題 7.47 実数 a, b, c, d は $a < c < b < d$ を満たすとする.

(1) $\ell_{A(a,b)}\left(\dfrac{1}{2}\log\dfrac{c-a}{b-c}\right)=\ell_{T(c)}\left(\dfrac{1}{2}\log(b-c)(c-a)\right)=c+i\sqrt{(b-c)(c-a)}$ であり, 直線 $\ell_{A(a,b)}$ と $\ell_{T(c)}$ の $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{c-a}{b-c}$, $\dfrac{1}{2}\log(b-c)(c-a)$ におけるなす角を θ とすれば $\cos\theta=\dfrac{a+b-2c}{b-a}$ である.

(2) $\ell_{A(a,b)}\left(\dfrac{1}{2}\log\dfrac{(c-a)(d-a)}{(d-b)(b-c)}\right)=\ell_{A(c,d)}\left(\dfrac{1}{2}\log\dfrac{(c-a)(b-c)}{(d-b)(d-a)}\right)=\dfrac{cd-ab+i\sqrt{(d-b)(d-a)(b-c)(c-a)}}{c+d-a-b}$ であり, 直線 $\ell_{A(a,b)}$ と $\ell_{A(c,d)}$ の $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{(c-a)(d-a)}{(d-b)(b-c)}$, $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{(c-a)(b-c)}{(d-b)(d-a)}$ におけるなす角を θ とすれば $\cos\theta=\dfrac{(a+b)(c+d)-2(ab+cd)}{(d-c)(b-a)}$ である.

証明 補題 7.43 から $\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\ell_{A(a,b)})'(t)\\ \mathrm{Im}(\ell_{A(a,b)})'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2e^t}{e^t+e^{-t}}\\ \frac{1-e^{2t}}{e^t+e^{-t}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\ell_{T(c)})'(t)\\ \mathrm{Im}(\ell_{T(c)})'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ e^t\end{pmatrix}$ だから

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\ell_{A(a,b)})'\left(\frac{1}{2}\log\frac{c-a}{b-c}\right)\\ \mathrm{Im}(\ell_{A(a,b)})'\left(\frac{1}{2}\log\frac{c-a}{b-c}\right)\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\ell_{T(c)})'\left(\frac{1}{2}\log(b-c)(c-a)\right)\\ \mathrm{Im}(\ell_{T(c)})'\left(\frac{1}{2}\log(b-c)(c-a)\right)\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\ell_{A(a,b)})'\left(\frac{1}{2}\log\frac{(c-a)(d-a)}{(d-b)(b-c)}\right)\\ \mathrm{Im}(\ell_{A(a,b)})'\left(\frac{1}{2}\log\frac{(c-a)(d-a)}{(d-b)(b-c)}\right)\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\ell_{A(c,d)})'\left(\frac{1}{2}\log\frac{(c-a)(b-c)}{(d-b)(d-a)}\right)\\ \mathrm{Im}(\ell_{A(c,d)})'\left(\frac{1}{2}\log\frac{(c-a)(b-c)}{(d-b)(d-a)}\right)\end{pmatrix}$$

とおけば, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ はそれぞれ $\begin{pmatrix}\frac{2(c-a)}{b-a}\\ \frac{(a+b-2c)\sqrt{c-a}}{(b-a)\sqrt{b-c}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{(b-c)(c-a)}\end{pmatrix}$ で与えられるため, $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\dfrac{(c-a)(a+b-2c)}{b-a}$, $\|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{\dfrac{c-a}{b-c}}$, $\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{(b-c)(c-a)}$ だから $\dfrac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}=\dfrac{a+b-2c}{b-a}$ となって, (1) の結果が得られる. また, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ はそれぞれ $\begin{pmatrix}\frac{2(c-a)(d-a)}{(b-a)(c+d-a-b)}\\ \sqrt{\frac{(c-a)(d-a)}{(d-b)(b-c)}}\,\frac{(a+b)(c+d)-a^2-b^2-2cd}{(b-a)(c+d-a-b)}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{2(c-a)(b-c)}{(d-c)(c+d-a-b)}\\ \sqrt{\frac{(c-a)(b-c)}{(d-b)(d-a)}}\,\frac{c^2+d^2+2ab-(a+b)(c+d)}{(d-c)(c+d-a-b)}\end{pmatrix}$ で与えられる. 従って $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\dfrac{(c-a)((a+b)(c+d)-2(ab+cd))}{(d-c)(b-a)(d-b)}$, $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\dfrac{(d-a)(c-a)}{(d-b)(b-c)}}$, $\|\boldsymbol{y}\|=\sqrt{\dfrac{(c-a)(b-c)}{(d-b)(d-a)}}$ が成り立つため $\dfrac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}=\dfrac{(a+b)(c+d)-2(ab+cd)}{(d-c)(b-a)}$ となって, (2) の結果が得られる. □

実数 a, b, c, d が $a<c<b<d$ を満たすならば

$$a+b-2c+(b-a)=2(b-c)>0\qquad a+b-2c-(b-a)=-2(c-a)<0$$
$$(a+b)(c+d)-2(ab+cd)+(d-c)(b-a)=2(d-a)(b-c)>0$$
$$(a+b)(c+d)-2(ab+cd)-(d-c)(b-a)=-2(d-b)(c-a)<0$$

だから $-(b-a)<a+b-2c<b-a$, $-(d-c)(b-a)<(a+b)(c+d)-2(ab+cd)<(d-c)(b-a)$ である. 従って $\left|\dfrac{a+b-2c}{b-a}\right|<1$, $\left|\dfrac{(a+b)(c+d)-2(ab+cd)}{(d-c)(b-a)}\right|<1$ となるため, $0<\alpha,\beta<\dfrac{\pi}{2}$ を $\alpha=\dfrac{1}{2}\cos^{-1}\dfrac{a+b-2c}{b-a}$, $\beta=\dfrac{1}{2}\cos^{-1}\dfrac{(a+b)(c+d)-2(ab+cd)}{(d-c)(b-a)}$ で定めることができる. このとき, $\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{b-c}{b-a}}$, $\sin\alpha=\sqrt{\dfrac{c-a}{b-a}}$, $\cos\beta=\sqrt{\dfrac{(d-a)(b-c)}{(d-c)(b-a)}}$, $\sin\beta=\sqrt{\dfrac{(d-b)(c-a)}{(d-c)(b-a)}}$ であり, 以下の等式が成り立つ.

$$A(a,b)S\left(\sqrt{\frac{c-a}{b-c}}\right)R(\alpha)=\begin{pmatrix}\frac{(a+b)\sqrt[4]{(b-c)(c-a)}}{b-a} & \frac{2ab-ac-bc}{(b-a)\sqrt[4]{(b-c)(c-a)}}\\ \frac{2\sqrt[4]{(b-c)(c-a)}}{b-a} & \frac{a+b-2c}{(b-a)\sqrt[4]{(b-c)(c-a)}}\end{pmatrix}$$

$$A(a,b)S\left(\sqrt{\frac{(d-a)(c-a)}{(d-b)(b-c)}}\right)R(\beta)=\begin{pmatrix}\frac{(ad+bd-2ab)\sqrt[4]{(b-c)(c-a)}}{(b-a)\sqrt{d-c}\sqrt[4]{(d-b)(d-a)}} & -\frac{(ac+bc-2ab)\sqrt[4]{(d-b)(d-a)}}{(b-a)\sqrt{d-c}\sqrt[4]{(b-c)(c-a)}}\\ -\frac{(a+b-2d)\sqrt[4]{(b-c)(c-a)}}{(b-a)\sqrt{d-c}\sqrt[4]{(d-b)(d-a)}} & \frac{(a+b-2c)\sqrt[4]{(d-b)(d-a)}}{(b-a)\sqrt{d-c}\sqrt[4]{(b-c)(c-a)}}\end{pmatrix}$$

$$\tau_{A(a,b)}\tau_{S\left(\sqrt{\frac{c-a}{b-c}}\right)}(i)=c+i\sqrt{(b-c)(c-a)}$$

$$\tau_{A(a,b)}\tau_{S\left(\sqrt{\frac{(d-a)(c-a)}{(d-b)(b-c)}}\right)}(i)=\frac{cd-ab}{c+d-a-b}+i\frac{\sqrt{(d-b)(d-a)(b-c)(c-a)}}{c+d-a-b}$$

命題 7.48 $\ell_0(0)=\ell_{R(\theta)}(0)=i$ であり, 直線 ℓ_0 と $\ell_{R(\theta)}$ の 0, 0 におけるなす角は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ならば 2θ, $\dfrac{\pi}{2}<\theta \leqq \pi$ ならば $2\pi-2\theta$ である.

証明 補題 7.43 から $\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\ell_0)'(0)\\ \mathrm{Im}(\ell_0)'(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\ell_{R(\theta)})'(0)\\ \mathrm{Im}(\ell_{R(\theta)})'(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin 2\theta\\ \cos 2\theta\end{pmatrix}$ であり, これらのベクトルはともに長さが 1 で, 内積が $\cos 2\theta$ だから, 結果が得られる. □

上の結果から $0 \leqq \theta \leqq \pi$ に対し, 直線 $\ell_{R(\frac{\theta}{2})}$ と $\ell_{R(\pi-\frac{\theta}{2})}$ は ℓ_0 と i において角度が θ で交わり, $\ell_{R(\frac{\pi-\theta}{2})}$ と $\ell_{R(\frac{\pi+\theta}{2})}$ は ℓ_0 と i において角度が $\pi-\theta$ で交わる.

命題 7.49 $p \in \boldsymbol{H}$, $0 \leqq \theta < 2\pi$ に対し, $A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ は $\ell_A(0)=p$ を満たし, $\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\ell_A)'(0)\\ \mathrm{Im}(\ell_A)'(0)\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ と平行であるとする. $A_0=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Im}(p)}}\begin{pmatrix}\mathrm{Im}(p) & \mathrm{Re}(p)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\end{pmatrix}$ とおけば, A は A_0, $-A_0$, $A_0R\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $-A_0R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ のいずれかであり, いずれにしても ℓ_A の像は同じものである.

証明 $p=u+vi$, $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とおくと, 命題 7.2 の (1) より $\ell_A(0)=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{i}{c^2+d^2}$ だから $c^2+d^2=\dfrac{1}{v}$ かつ $ac+bd=\dfrac{u}{v}$ である. 従って $c=\dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{v}}$, $d=\dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{v}}$ を満たす $\dfrac{\theta}{2} \leqq \varphi < \dfrac{\theta}{2}+2\pi$ がある. 補題 7.43 から $\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\ell_A)'(0)\\ \mathrm{Im}(\ell_A)'(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2cd}{c^2+d^2}\\ \frac{d^2-c^2}{c^2+d^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v\sin 2\varphi\\ -v\cos 2\varphi\end{pmatrix}$ だから, 仮定から $\cos(2\varphi-\theta)=\cos\theta\cos 2\varphi+\sin\theta\sin 2\varphi=0$ が得られる. 従って $\varphi=\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi(2k+1)}{4}$ $(k=0,1,2,3)$ である. さらに, $\begin{cases}ac+bd=\frac{u}{v}\\ ad-bc=1\end{cases}$ を a, b に関する連立 1 次方程式とみなして解を求めれば, $a=\dfrac{1}{\sqrt{v}}(u\cos\varphi+v\sin\varphi)$, $b=\dfrac{1}{\sqrt{v}}(u\sin\varphi-v\cos\varphi)$ である. 以上から A は $\dfrac{1}{\sqrt{v}}\begin{pmatrix}u\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi(2k+1)}{4}\right)+v\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi(2k+1)}{4}\right) & u\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi(2k+1)}{4}\right)-v\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi(2k+1)}{4}\right)\\ \cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi(2k+1)}{4}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi(2k+1)}{4}\right)\end{pmatrix}$ $(k=0,1,2,3)$ のいずれかであり, $k=0,1,2,3$ に対し A はそれぞれ A_0, $-A_0R\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $-A_0$, $A_0R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ に等しい. また $\tau_{A_0}=\tau_{-A_0}$, $\tau_{A_0R(\frac{\pi}{2})}=\tau_{-A_0R(\frac{\pi}{2})}=\tau_{A_0}\circ\tau_{R(\frac{\pi}{2})}$ であり, $\tau_{R(\frac{\pi}{2})}$ による L_0 の像は L_0 だから, ℓ_{A_0}, ℓ_{-A_0}, $\ell_{A_0R(\frac{\pi}{2})}$, $\ell_{-A_0R(\frac{\pi}{2})}$ の像はすべて同じである. □

上の結果により, $p \in \boldsymbol{H}$ と零でない $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^2$ が与えられたとき, p を通り, p における接ベクトルが $\boldsymbol{v}$ に平行な直線はただ一つだけであることが分かる.

命題 7.50 L, L' を実軸上の点を始点とし実軸に垂直な半直線であるか, 実軸上の相異なる 2 点を直径の両端とする半円の弧とし, L と L' は点 p において交わっているとする. L' の p における接ベクトルを正の向きに θ だけ回転したベクトルが L の p における接ベクトルであるとき, $A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ で $C(A)=L$ かつ $C\left(AR\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=L'$ を満たすものが存在する.

証明 p を L と L' の交点とすれば, 命題 7.34 から $A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ で, $\tau_A(i)=p$ かつ $C(A)=L$ を満たすものが存在する. 補題 7.43 から, i における直線 $\ell_{R(\frac{\theta}{2})}$ の接ベクトルは $\begin{pmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$ だから, τ_A による像である直線 $\ell_{AR(\frac{\theta}{2})}$ の p における接ベクトルは $\tau_A'(p)\begin{pmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$ である. ここで, $\ell_{R(\frac{\theta}{2})}$ の像を K とする. 一方 p における直線 ℓ_A の接ベクトルは $\tau_A'(p)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ であり, L' をパラメータ表示する直線を $\omega : I \to \boldsymbol{H}$ とすれば, 仮定から ω の p における単位ベクトルである接ベクトルを正の向きに θ だけ回転したものは $\tau_A'(p)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ または $-\tau_A'(p)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ に一致する. 従って, 回転を

表す行列の積は交換可能であることから, ω の p における接ベクトルは $R(-\theta)\tau_A'(p)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \tau_A'(p)\begin{pmatrix}\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}$ であり, このベクトルは直線 $\ell_{AR(\frac{\theta}{2})}$ の p における接ベクトルだから, 命題 7.49 によって ω の像 L' は直線 $\ell_{AR(\frac{\theta}{2})}$ の像に一致して, L' は τ_A による K の像であることがわかる. □

定理 7.51 L, L', K, K' を実軸上の点を始点とし実軸に垂直な半直線であるか, 実軸上の相異なる 2 点を直径の両端とする半円の弧とし, L と L' は交わり, K と K' は交わっているとする. L と L' のなす角と, K と K' のなす角が等しいとき, $\boldsymbol{H}$ の距離を保つ変換 $f : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ で, L を K に写し, L' を K' に写すものが存在する.

証明 L と L' の交点を p とし, L と L' のなす角を θ とする. L' の p における接ベクトルを正の向きに θ だけ回転したベクトルが L の p における接ベクトルであるとき, 命題 7.50 によって $A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ で $C(A) = L$ かつ $C\bigl(AR(\frac{\theta}{2})\bigr) = L'$ を満たすものが存在する. 従って τ_A による L_0 の像は L であり, $C\bigl(R(\frac{\theta}{2})\bigr)$ の像は L' である. L' の p における接ベクトルを負の向きに θ だけ回転したベクトルが L の p における接ベクトルであるとき, 命題 7.50 によって $A' \in SL_2(\boldsymbol{R})$ で $C(A') = L'$ かつ $C\bigl(A'R(\frac{\theta}{2})\bigr) = L$ を満たすものが存在する. また命題 7.37 により, 距離を保つ $\boldsymbol{H}$ の変換 $g : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ で, $g(L) = L'$, $g(L') = L$ を満たすものが存在する. このとき, $g\circ\tau_{A'}$ による L_0 の像は L であり, $C\bigl(R(\frac{\theta}{2})\bigr)$ の像は L' である. 従って, $\boldsymbol{H}$ の距離を保つ変換 $f_1 : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ で, L_0 を L に写し, $C\bigl(R(\frac{\theta}{2})\bigr)$ を L' に写すものが存在する. 同様に, $\boldsymbol{H}$ の距離を保つ変換 $f_2 : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ で, L_0 を K に写し, $C\bigl(R(\frac{\theta}{2})\bigr)$ を K' に写すものが存在するため, $f = f_2\circ f_1^{-1}$ によって f を定めれば f は L を K に写し, L' を K' に写す. □

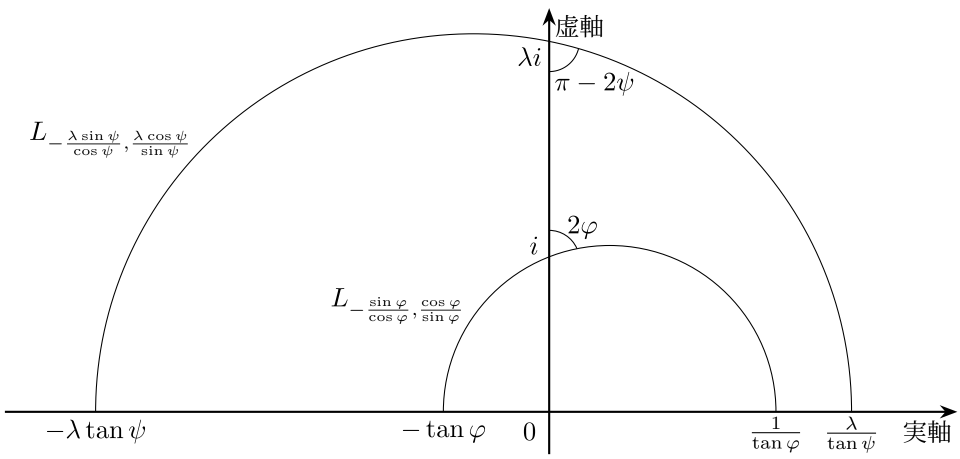
上の定理から, 4 番目の公理も成り立つことがわかる.

命題 7.52 $0 < \varphi, \psi < \dfrac{\pi}{2}$, $\lambda > 1$ に対し, $C(R(\varphi)) \cap C(S(\lambda)R(\psi)) \neq \emptyset$ であるためには, 次の不等式が成り立つことが必要十分である.

$$\left(\lambda - \frac{\tan\varphi}{\tan\psi}\right)\left(\lambda - \frac{\tan\psi}{\tan\varphi}\right) < 0$$

証明 $C(R(\varphi)) = L_{-\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}, \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}}$, $C(S(\lambda)R(\psi)) = L_{-\frac{\lambda\sin\psi}{\cos\psi}, \frac{\lambda\cos\psi}{\sin\psi}}$ だから $C(R(\varphi)) \cap C(S(\lambda)R(\psi)) \neq \emptyset$ であるためには「$-\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} < -\dfrac{\lambda\sin\psi}{\cos\psi}$ かつ $\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} < \dfrac{\lambda\cos\psi}{\sin\psi}$」 または「$-\dfrac{\lambda\sin\psi}{\cos\psi} < -\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ かつ $\dfrac{\lambda\cos\psi}{\sin\psi} < \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$」が成り立つことが必要十分である. 前者の条件は $\dfrac{\tan\psi}{\tan\varphi} < \lambda < \dfrac{\tan\varphi}{\tan\psi}$ と同値で, 後者の条件は $\dfrac{\tan\varphi}{\tan\psi} < \lambda < \dfrac{\tan\psi}{\tan\varphi}$ と同値である. □

$0 < \varphi < \psi < \dfrac{\pi}{2}$, $\lambda \geqq \dfrac{\tan\psi}{\tan\varphi}$ ならば命題 7.52 により, $C(R(\varphi)) \cap C(S(\lambda)R(\psi)) = \emptyset$ である. 一方, 命題 7.48 から i を始点として点 $\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ に向かう半直線と, i を始点として点 λi を通る半直線のなす角は 2φ であり, λi を始点として点 0 に向かう半直線と, λi を始点として点 $\dfrac{\lambda\cos\psi}{\sin\psi}$ に向かう半直線のなす角は $\pi - 2\psi$ である. $\varphi < \psi$ だから, $2\varphi + (\pi - 2\psi) < \pi$ となるため, 2 直線 $\ell_{R(\varphi)}$, $\ell_{S(\lambda)R(\psi)}$ と交わる直線 ℓ_0 が同じ側につくる内角の和は二直角より小さいが, 直線 $\ell_{R(\varphi)}$ と $\ell_{S(\lambda)R(\psi)}$ は交わらないため, 公理 7.1 の 5 番目の公理は成り立たない.



7.8　三角法

定理 7.53　A, B, C を $\boldsymbol{H}$ の同一直線上にない 3 点とするとき, 三角形 ABC に関して次の等式が成り立つ.

$$\frac{\sin\angle\mathrm{BAC}}{\sinh\mathrm{BC}}=\frac{\sin\angle\mathrm{ABC}}{\sinh\mathrm{AC}}=\frac{\sin\angle\mathrm{BCA}}{\sinh\mathrm{AB}}$$

$$\begin{aligned}
\cos\angle\mathrm{BAC}&=\frac{\cosh\mathrm{AC}\cosh\mathrm{AB}-\cosh\mathrm{BC}}{\sinh\mathrm{AC}\sinh\mathrm{AB}} & \cosh\mathrm{BC}&=\frac{\cos\angle\mathrm{ABC}\cos\angle\mathrm{BCA}+\cos\angle\mathrm{BAC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}\sin\angle\mathrm{BCA}}\\
\cos\angle\mathrm{ABC}&=\frac{\cosh\mathrm{AB}\cosh\mathrm{BC}-\cosh\mathrm{AC}}{\sinh\mathrm{AB}\sinh\mathrm{BC}} & \cosh\mathrm{AC}&=\frac{\cos\angle\mathrm{BCA}\cos\angle\mathrm{BAC}+\cos\angle\mathrm{ABC}}{\sin\angle\mathrm{BCA}\sin\angle\mathrm{BAC}}\\
\cos\angle\mathrm{BCA}&=\frac{\cosh\mathrm{BC}\cosh\mathrm{AC}-\cosh\mathrm{AB}}{\sinh\mathrm{BC}\sinh\mathrm{AC}} & \cosh\mathrm{AB}&=\frac{\cos\angle\mathrm{BAC}\cos\angle\mathrm{ABC}+\cos\angle\mathrm{BCA}}{\sin\angle\mathrm{BAC}\sin\angle\mathrm{ABC}}
\end{aligned}$$

証明　$\lambda=e^{d_{\boldsymbol{H}}(\mathrm{A},\mathrm{B})}$ とおくと, 距離を保つ $\boldsymbol{H}$ の変換 f で A を λi に写し, B を虚軸上の点 λi に写すものがあり, f は角度も保つため, A, B はそれぞれ i, λi であるとしてよい. また, 虚軸に関する対称移動も距離と角度を保つため, C の実部は正であると仮定してよい. A と C を結ぶ直線が実軸上の点 q', q $(q'<0<q)$ を直径の両端とする半円で, B と C を結ぶ直線が実軸上の点 p', p $(p'<0<p)$ を直径の両端とする半円であるとすれば, 命題 7.47 から, 直線 AC, 直線 BC はそれぞれ i, λi で虚軸と交わるため, 命題 7.47 から, $\sqrt{q(-q')}=1$, $\sqrt{p(-p')}=\lambda$ だから $q'=-\dfrac{1}{q}$, $p'=-\dfrac{\lambda^2}{p}$ である. 直線 AC と直線 BC は交わるため,「$-\dfrac{\lambda^2}{p}<-\dfrac{1}{q}<p<q$」または「$-\dfrac{1}{q}<-\dfrac{\lambda^2}{p}<q<p$」が成り立ち, 命題 7.47 から前者の場合は交点 C は $\dfrac{pq(\lambda^2-1)}{\lambda^2q-p+pq(q-p)}+i\dfrac{\sqrt{(q-p)(\lambda^2q-p)(pq+\lambda^2)(pq+1)}}{\lambda^2q-p+pq(q-p)}$ で与えられる. 後者の場合, C は $\dfrac{pq(1-\lambda^2)}{p-\lambda^2q+pq(p-q)}+i\dfrac{\sqrt{(p-q)(pq+1)(pq+\lambda^2)(p-\lambda^2q)}}{p-\lambda^2q+pq(p-q)}$ で与えられるが, $-\dfrac{1}{q}<-\dfrac{\lambda^2}{p}$ より $p>\lambda^2q$ となるため, $\lambda=e^{d_{\boldsymbol{H}}(\mathrm{A},\mathrm{B})}>1$ から C の実部は負になる. 故に $p<q$ である. さらに命題 7.47 から, 次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}
\cos\angle\mathrm{BAC}&=\frac{q^2-1}{q^2+1} & \cos\angle\mathrm{ABC}&=\frac{\lambda^2-p^2}{\lambda^2+p^2} & \cos\angle\mathrm{BCA}&=\frac{(p^2-\lambda^2)(q^2-1)+2pq(\lambda^2+1)}{(p^2+\lambda^2)(q^2+1)}\\
\sin\angle\mathrm{BAC}&=\frac{2q}{q^2+1} & \sin\angle\mathrm{ABC}&=\frac{2\lambda p}{\lambda^2+p^2} & \sin\angle\mathrm{BCA}&=\frac{2\sqrt{(q-p)(\lambda^2q-p)(pq+\lambda^2)(pq+1)}}{(p^2+\lambda^2)(q^2+1)}
\end{aligned}$$

$\mathrm{AB}=\log\lambda$ より, $\cosh\mathrm{AB}=\dfrac{\lambda^2+1}{2\lambda}$, $\sinh\mathrm{AB}=\dfrac{\lambda^2-1}{2\lambda}$ であり, $z\in\boldsymbol{H}$ と $y>0$ に対して

$$\cosh d_{\boldsymbol{H}}(z,yi)=\frac{|z|^2+y^2}{2y\mathrm{Im}(z)},\qquad \sinh d_{\boldsymbol{H}}(z,yi)=\frac{\sqrt{(|z|^2-y^2)^2+4y^2\mathrm{Re}(z)^2}}{2y\mathrm{Im}(z)}$$

が成り立つことから以下の等式が得られる.

$$\begin{aligned}
\cosh\mathrm{BC}&=\frac{\lambda^4q-\lambda^2(p^2q-2pq^2+2p-q)-p^2q}{2\lambda\sqrt{(q-p)(\lambda^2q-p)(pq+1)(pq+\lambda^2)}} & \sinh\mathrm{BC}&=\frac{q(\lambda^2-1)(\lambda^2+p^2)}{2\lambda\sqrt{(q-p)(\lambda^2q-p)(pq+1)(pq+\lambda^2)}}\\
\cosh\mathrm{AC}&=\frac{\lambda^2(pq^2-p+2q)-2p^2q+pq^2-p}{2\sqrt{(q-p)(\lambda^2q-p)(pq+1)(pq+\lambda^2)}} & \sinh\mathrm{AC}&=\frac{p(\lambda^2-1)(q^2+1)}{2\sqrt{(q-p)(\lambda^2q-p)(pq+1)(pq+\lambda^2)}}
\end{aligned}$$

従って次の「正弦定理」

$$\frac{\sin\angle\mathrm{BAC}}{\sinh\mathrm{BC}}=\frac{\sin\angle\mathrm{ABC}}{\sinh\mathrm{AC}}=\frac{\sin\angle\mathrm{BCA}}{\sinh\mathrm{AB}}=\frac{4\lambda\sqrt{(q-p)(pq+\lambda^2)(pq+1)(\lambda^2q-p)}}{(\lambda^2-1)(p^2+\lambda^2)(q^2+1)}$$

および以下の等式が成り立つ.

$$\cosh \mathrm{AC} \cosh \mathrm{AB} - \cosh \mathrm{BC} = \frac{p(q^2-1)(\lambda^2-1)^2}{4\lambda\sqrt{(q-p)(\lambda^2 q - p)(\lambda^2+pq)(pq+1)}}$$

$$\sinh \mathrm{AC} \sinh \mathrm{AB} = \frac{p(q^2+1)(\lambda^2-1)^2}{4\lambda\sqrt{(q-p)(\lambda^2 q - p)(pq+1)(pq+\lambda^2)}}$$

$$\cosh \mathrm{AB} \cosh \mathrm{BC} - \cosh \mathrm{AC} = \frac{q(\lambda^2-p^2)(\lambda^2-1)^2}{4\lambda^2\sqrt{(q-p)(\lambda^2+pq)(pq+1)(\lambda^2 q-p)}}$$

$$\sinh \mathrm{AB} \sinh \mathrm{BC} = \frac{q(\lambda^2+p^2)(\lambda^2-1)^2}{4\lambda^2\sqrt{(q-p)(\lambda^2 q-p)(pq+1)(pq+\lambda^2)}}$$

$$\cosh \mathrm{BC} \cosh \mathrm{AC} - \cosh \mathrm{AB} = \frac{pq(\lambda^2-1)^2((p^2-\lambda^2)(q^2-1)+2pq(\lambda^2+1))}{4\lambda(q-p)(\lambda^2+pq)(pq+1)(\lambda^2 q-p)}$$

$$\sinh \mathrm{BC} \sinh \mathrm{AC} = \frac{pq(\lambda^2-1)^2(p^2+\lambda^2)(q^2+1)}{4\lambda(q-p)(\lambda^2 q-p)(pq+1)(pq+\lambda^2)}$$

$$\cos\angle\mathrm{ABC}\cos\angle\mathrm{BCA} + \cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{2p(\lambda^4 q - \lambda^2(p^2q-2pq^2+2p-q)-p^2q)}{(\lambda^2+p^2)^2(q^2+1)}$$

$$\sin\angle\mathrm{ABC}\sin\angle\mathrm{BCA} = \frac{4\lambda p\sqrt{(q-p)(\lambda^2 q-p)(pq+\lambda^2)(pq+1)}}{(\lambda^2+p^2)^2(q^2+1)}$$

$$\cos\angle\mathrm{BCA}\cos\angle\mathrm{BAC} + \cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{2q(\lambda^2(pq^2-p+2q)-2p^2q+pq^2-p)}{(\lambda^2+p^2)(q^2+1)^2}$$

$$\sin\angle\mathrm{BCA}\sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{4q\sqrt{(q-p)(\lambda^2 q-p)(pq+\lambda^2)(pq+1)}}{(\lambda^2+p^2)(q^2+1)^2}$$

$$\cos\angle\mathrm{BAC}\cos\angle\mathrm{ABC} + \cos\angle\mathrm{BCA} = \frac{2pq(\lambda^2+1)}{(\lambda^2+p^2)(q^2+1)}$$

$$\sin\angle\mathrm{BAC}\sin\angle\mathrm{ABC} = \frac{4\lambda pq}{(\lambda^2+p^2)(q^2+1)}$$

故に, 次の「余弦定理」が成り立つ.

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{\cosh \mathrm{AC}\cosh \mathrm{AB} - \cosh \mathrm{BC}}{\sinh \mathrm{AC}\sinh \mathrm{AB}} \qquad \cosh \mathrm{BC} = \frac{\cos\angle\mathrm{ABC}\cos\angle\mathrm{BCA}+\cos\angle\mathrm{BAC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}\sin\angle\mathrm{BCA}}$$

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{\cosh \mathrm{AB}\cosh \mathrm{BC} - \cosh \mathrm{AC}}{\sinh \mathrm{AB}\sinh \mathrm{BC}} \qquad \cosh \mathrm{AC} = \frac{\cos\angle\mathrm{BCA}\cos\angle\mathrm{BAC}+\cos\angle\mathrm{ABC}}{\sin\angle\mathrm{BCA}\sin\angle\mathrm{BAC}}$$

$$\cos\angle\mathrm{BCA} = \frac{\cosh \mathrm{BC}\cosh \mathrm{AC} - \cosh \mathrm{AB}}{\sinh \mathrm{BC}\sinh \mathrm{AC}} \qquad \cosh \mathrm{AB} = \frac{\cos\angle\mathrm{BAC}\cos\angle\mathrm{ABC}+\cos\angle\mathrm{BCA}}{\sin\angle\mathrm{BAC}\sin\angle\mathrm{ABC}}$$

□

系 7.54 $\angle\mathrm{BCA} = \dfrac{\pi}{2}$ の場合, 以下の等式が成り立つ.

(1) $\sinh \mathrm{BC} = \sinh \mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{BAC}$ (2) $\sinh \mathrm{AC} = \sinh \mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{ABC}$ (3) $\cosh \mathrm{AB} = \cosh \mathrm{BC}\cosh \mathrm{AC}$
(4) $\cosh \mathrm{AB} = \cot\angle\mathrm{BAC}\cot\angle\mathrm{ABC}$ (5) $\cos\angle\mathrm{BAC} = \cosh \mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{ABC}$ (6) $\cos\angle\mathrm{ABC} = \cosh \mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{BAC}$
(7) $\tanh \mathrm{BC} = \tanh \mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{ABC}$ (8) $\tanh \mathrm{AC} = \tanh \mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{BAC}$ (9) $\tanh \mathrm{BC} = \sinh \mathrm{AC}\tan\angle\mathrm{BAC}$
(10) $\tanh \mathrm{AC} = \sinh \mathrm{BC}\tan\angle\mathrm{ABC}$

証明 $\sin\angle\mathrm{BCA} = 1$, $\cos\angle\mathrm{BCA} = 0$ だから定理 7.53 から, (1) から (6) はただちに得られる. また

$$\tanh \mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{ABC} \overset{(6)}{=} \frac{\sinh \mathrm{AB}\cosh \mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{BAC}}{\cosh \mathrm{AB}} \overset{(3)}{=} \frac{\sinh \mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{BAC}}{\cosh \mathrm{BC}} \overset{(1)}{=} \tanh \mathrm{BC}$$

$$\tanh \mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{BAC} \overset{(5)}{=} \frac{\sinh \mathrm{AB}\cosh \mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{ABC}}{\cosh \mathrm{AB}} \overset{(3)}{=} \frac{\sinh \mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{ABC}}{\cosh \mathrm{AC}} \overset{(2)}{=} \tanh \mathrm{AC}$$

より, (7) と (8) が得られる. (1) を (8) で辺々割れば $\dfrac{\sinh \mathrm{BC}\cosh \mathrm{AC}}{\sinh \mathrm{AC}} = \cosh \mathrm{AB}\tan\angle\mathrm{BAC}$ が得られ, (3) よりこの右辺は $\cosh \mathrm{BC}\cosh \mathrm{AC}\tan\angle\mathrm{BAC}$ に等しいため, $\dfrac{\sinh \mathrm{BC}}{\sinh \mathrm{AC}} = \cosh \mathrm{BC}\tan\angle\mathrm{BAC}$ が成り立ち, この両辺に

$\dfrac{\sinh \mathrm{AC}}{\cosh \mathrm{BC}}$ をかければ (9) が得られる．(2) を (7) で辺々割れば $\dfrac{\sinh \mathrm{AC} \cosh \mathrm{BC}}{\sinh \mathrm{BC}} = \cosh \mathrm{AB} \tan \angle \mathrm{ABC}$ が得られ，(3) よりこの右辺は $\cosh \mathrm{BC} \cosh \mathrm{AC} \tan \angle \mathrm{ABC}$ に等しいため，$\dfrac{\sinh \mathrm{AC}}{\sinh \mathrm{BC}} = \cosh \mathrm{AC} \tan \angle \mathrm{ABC}$ が成り立ち，この両辺に $\dfrac{\sinh \mathrm{BC}}{\cosh \mathrm{AC}}$ をかければ (10) が得られる． □

補題 7.55 $0 < i < k$ を満たす自然数 i, k に対し，$\dbinom{2k}{2i} > \dbinom{k}{i}$ が成り立つ．

証明 k による数学的帰納法で示す．$k = 2$ の場合，$\dbinom{4}{2} = 6 > 2 = \dbinom{2}{1}$ だから，主張は成り立つ．$j = 1, 2, \cdots, k-1$ に対して $\dbinom{2k}{2j} > \dbinom{k}{j}$ が成り立つと仮定する．$i = 1, 2, \cdots, k$ ならば $\dbinom{2k}{2i-1} > 0$ であり，帰納法の仮定から $\dbinom{2k}{2i} \geqq \dbinom{k}{i}$, $\dbinom{2k}{2(i-1)} \geqq \dbinom{k}{i-1}$ が成り立つため，

$$\begin{aligned}\binom{2(k+1)}{2i} &= \binom{2k+1}{2i} + \binom{2k+1}{2i-1} = \binom{2k}{2i} + 2\binom{2k}{2i-1} + \binom{2k}{2i-2} > \binom{2k}{2i} + \binom{2k}{2(i-1)} \\ &\geqq \binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} = \binom{k+1}{i}\end{aligned}$$

が得られる． □

補題 7.56 x, y が 0 でない実数ならば $\cosh x \cosh y > \cosh \sqrt{x^2 + y^2}$ が成り立つ．

証明 cosh のマクローリン展開と補題 7.55 から

$$\begin{aligned}\cosh x \cosh y - \cosh\sqrt{x^2+y^2} &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^{2j}}{(2j)!}\right) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2+y^2)^k}{(2k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} \frac{x^{2i}y^{2(k-i)}}{(2i)!(2(k-i))!} - \frac{(x^2+y^2)^k}{(2k)!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{2k}{2i} x^{2i}y^{2(k-i)} - \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^{2i}y^{2(k-i)}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \sum_{i=1}^{k-1} \left(\binom{2k}{2i} - \binom{k}{i}\right) x^{2i}y^{2(k-i)} > 0.\end{aligned}$$

□

命題 7.57 $\boldsymbol{H}$ の三角形 ABC において $\angle \mathrm{BCA} = \dfrac{\pi}{2}$ の場合，不等式 $\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2 < \mathrm{AB}^2$ が成り立つ．

証明 系 7.54 の (3) と補題 7.56 から $\cosh \mathrm{AB} = \cosh \mathrm{BC} \cosh \mathrm{AC} > \cosh\sqrt{\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2}$ が得られ，cosh は $(0, \infty)$ で狭義単調増加関数だから $\mathrm{AB} > \sqrt{\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2}$ が成り立つ． □

7.9 上半平面の曲線の長さ

補題 7.58 $z, w \in \boldsymbol{H}$ に対して次の不等式が成り立つ．

$$0 \leqq d_{\boldsymbol{H}}(z, w) - \frac{2|z-w|}{|z-\bar{w}|} \leqq \frac{|z-w|^3}{6\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)(\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(w))}$$

証明 $0 \leqq x < 1$ ならば $\log \dfrac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} = 2\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$ より，

$$0 \leqq \log\frac{1+x}{1-x} - 2x = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \leqq \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k+1} = \frac{2x^3}{3(1-x^2)}$$

である．$z, w \in \boldsymbol{H}$ ならば $|z-\bar{w}| > |z-w|$ だから，$x = \dfrac{|z-w|}{|z-\bar{w}|}$ とおけば，$0 \leqq x < 1$ が成り立つため，上式から

$$0 \leqq d_{\boldsymbol{H}}(z,w) - \frac{2|z-w|}{|z-\bar{w}|} \leqq \frac{2\frac{|z-w|^3}{|z-\bar{w}|^3}}{3\left(1-\frac{|z-w|^2}{|z-\bar{w}|^2}\right)} = \frac{2|z-w|^3}{3|z-\bar{w}|(|z-\bar{w}|^2-|z-w|^2)} = \frac{|z-w|^3}{6\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)|z-\bar{w}|}$$

が得られる．さらに，$|z-\bar{w}| = \sqrt{(\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Re}(w))^2+(\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(w))^2} \geqq \mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(w)$ だから，逆数を考えれば $\dfrac{1}{|z-\bar{w}|} \leqq \dfrac{1}{\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(w)}$ が得られるため，$\dfrac{|z-w|^3}{6\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)|z-\bar{w}|} \leqq \dfrac{|z-w|^3}{6\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)(\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(w))}$ である． □

命題 7.59 $r > m > 0$ に対して $D(m,r) = \{z \in \boldsymbol{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) \geqq m,\ |z| \leqq r\}$ とおく．$z, w \in D(m,r)$ ならば $\dfrac{1}{r}|z-w| \leqq d_{\boldsymbol{H}}(z,w) \leqq \dfrac{3m^2+r^2}{3m^3}|z-w|$ が成り立つ．

証明 $z, w \in D(m,r)$ ならば $|z-\bar{w}| \geqq \mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(w) \geqq 2m$ だから，逆数を考えれば $\dfrac{1}{|z-\bar{w}|} \leqq \dfrac{1}{2m}$ が得られる．また，三角不等式より $|z-w| \leqq |z|+|w| \leqq 2r$, $|z-\bar{w}| \leqq |z|+|\bar{w}| \leqq 2r$ が成り立つ．従って，補題 7.58 より，

$$\frac{1}{r}|z-w| \leqq \frac{2|z-w|}{|z-\bar{w}|} \leqq d_{\boldsymbol{H}}(z,w) \leqq |z-w|\left(\frac{2}{|z-\bar{w}|} + \frac{|z-w|^2}{6\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)(\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(w))}\right) \leqq \frac{3m^2+r^2}{3m^3}|z-w|$$

が得られる． □

系 7.60 連続関数である $\boldsymbol{H}$ の曲線が距離関数 $d_{\boldsymbol{H}}$ に関して長さを持つためには，距離関数 $d_{\boldsymbol{C}}$ に関して長さを持つことが必要十分である．

証明 2 以上の整数 n に対して $U_n = \left\{z \in \boldsymbol{C} \,\middle|\, \mathrm{Im}(z) > \dfrac{1}{n},\ |z| < n\right\}$ とおくと，$(U_n)_{n=2,3,\dots}$ は $\boldsymbol{H}$ の開被覆であり，命題 7.59 から，$z, w \in U_n$ ならば $d_{\boldsymbol{H}}(z,w) \leqq \dfrac{3n+n^5}{3}d_{\boldsymbol{C}}(z,w)$ と $d_{\boldsymbol{C}}(z,w) \leqq id_{\boldsymbol{H}}(z,w)$ が成り立つため，命題 5.10 により，結果が得られる． □

命題 5.7 と命題 7.12 から，次の結果が得られる．

命題 7.61 $\boldsymbol{H}$ の曲線 $\omega : [a,b] \to \boldsymbol{H}$ が長さをもつとき，$A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対して，曲線 $\tau_A \circ \omega : [a,b] \to \boldsymbol{H}$ の長さは ω の長さに等しい．

補題 7.62 $u, v, x, y \in \boldsymbol{R}$ に対し，$\left|\sqrt{u^2+v^2} - \sqrt{x^2+y^2}\right| \leqq \sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2}$ が成り立つ．

証明 $\left(\sqrt{u^2+v^2}\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 - |ux+vy|^2 = (uy-vx)^2 \geqq 0$ だから $\sqrt{u^2+v^2}\sqrt{x^2+y^2} \geqq |ux+vy| \geqq ux+vy$ である．故に上式から $\left(\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2}\right)^2 - \left|\sqrt{u^2+v^2} - \sqrt{x^2+y^2}\right|^2 = 2\left(\sqrt{u^2+v^2}\sqrt{x^2+y^2} - (ux+vy)\right) \geqq 0$ である． □

定理 7.63 $\boldsymbol{H}$ の曲線 $\omega : [a,b] \to \boldsymbol{H}$ に対し，$x(t) = \mathrm{Re}(\omega(t))$, $y(t) = \mathrm{Im}(\omega(t))$ によって定義される関数 $x, y : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が (a,b) の各点で微分可能で，導関数が連続であるとする．このとき $p \in (a,b)$ に対し，次の等式が成り立つ．

$$\lim_{h \to 0} \frac{L_\omega(a,p+h) - L_\omega(a,p)}{h} = \frac{\sqrt{x'(p)^2+y'(p)^2}}{y(p)}$$

証明 $c = |x'(p)|+|y'(p)|+1$ とおく．y はつねに正の値をとる連続関数だから，y の最小値を m とすれば，$m > 0$ である．仮定から，任意の $0 < \varepsilon \leqq \dfrac{4}{m}$ に対し，$\delta > 0$ で $(p-\delta, p+\delta) \subset (a,b)$ かつ

「$|t-p| < \delta$ ならば $|x(t)-x(p)| < \dfrac{\varepsilon m^2}{8c}$, $|x'(t)-x'(p)| < \dfrac{\varepsilon m}{4\sqrt{2}}$, $|y(t)-y(p)| < \dfrac{\varepsilon m^2}{8c}$, $|y'(t)-y'(p)| < \dfrac{\varepsilon m}{4\sqrt{2}}$」

を満たすものがある．また $0 < h < \delta$ である任意の h に対し，区間 $[p, p+h]$ の分割 $\Delta = \{t_j\}_{j=0,1,\dots,n}$ で，$0 \leqq L_\omega(p,p+h) - s(\omega,\Delta) < \dfrac{\varepsilon h}{4}$ を満たすものがある．平均値の定理から，$x(t_j) - x(t_{j-1}) = x'(c_j)(t_j - t_{j-1})$,

$y(t_j)-y(t_{j-1})=y'(d_j)(t_j-t_{j-1})$ を満たす $c_j, d_j \in (t_{j-1}, t_j)$ がある．このとき，$|c_j-p|, |d_j-p|<\delta$ だから $|x'(c_j)|<|x'(p)|+\frac{\varepsilon m}{8} \leqq |x'(p)|+\frac{1}{2}$, $|y'(d_j)|<|y'(p)|+\frac{\varepsilon m}{8} \leqq |y'(p)|+\frac{1}{2}$ が成り立つため，次の不等式を得る．

$$|\omega(t_j)-\omega(t_{j-1})|=\sqrt{x'(c_j)^2+y'(d_j)^2}(t_j-t_{j-1}) \leqq (|x'(c_j)|+|y'(d_j)|)(t_j-t_{j-1}) \leqq c(t_j-t_{j-1}) \quad \cdots (i)$$

$|t_j-t|, |t_{j-1}-t|<\delta$ より，$|x(t_j)-x(p)|<\frac{\varepsilon m^2}{8c}$, $|x(t_{j-1})-x(p)|<\frac{\varepsilon m^2}{8c}$, $|y(t_j)-y(p)|<\frac{\varepsilon m^2}{8c}$, $|y(t_{j-1})-y(p)|<\frac{\varepsilon m^2}{8c}$ が成り立つため，$|x(t_j)-x(t_{j-1})|<\frac{\varepsilon m^2}{4c}$, $|y(t_j)-y(t_{j-1})|<\frac{\varepsilon m^2}{4c}$ である．従って，次の不等式が得られる．

$$|\omega(t_j)-\omega(t_{j-1})|=\sqrt{(x(t_j)-x(t_{j-1}))^2+(y(t_j)-y(t_{j-1}))^2}<\frac{\varepsilon m^2}{2\sqrt{2}c} \quad \cdots (ii)$$

$|y(t_j)+y(t_{j-1})-2y(p)| \leqq |y(t_j)-y(p)|+|y(t_{j-1})-y(p)|<\frac{\varepsilon m^2}{4c}$ より $2y(p)-\frac{\varepsilon m^2}{4c}<y(t_j)+y(t_{j-1})<2y(p)+\frac{\varepsilon m^2}{4c}$ だから $\left|\omega(t_j)-\overline{\omega(t_{j-1})}\right|=\sqrt{(x(t_j)-x(t_{j-1}))^2+(y(t_j)+y(t_{j-1}))^2}$ について次の不等式が成り立つ．

$$2y(p)-\frac{\varepsilon m^2}{4c}<\left|\omega(t_j)-\overline{\omega(t_{j-1})}\right| \leqq \sqrt{\frac{\varepsilon^2 m^4}{16}+\left(2y(p)+\frac{\varepsilon m^2}{4c}\right)^2} \leqq 2y(p)+\frac{\varepsilon m^2}{2c}$$

上の不等式の各辺の逆数を考えれば，$\dfrac{1}{y(p)+\frac{\varepsilon m^2}{4c}}<\dfrac{2}{\left|\omega(t_j)-\overline{\omega(t_{j-1})}\right|}<\dfrac{1}{y(p)-\frac{\varepsilon m^2}{8c}}$ が得られ，$\varepsilon m \leqq 4 \leqq 4c$ より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y(p)+\frac{\varepsilon m^2}{4c}}&=\frac{1}{y(p)}-\frac{\varepsilon m^2}{y(p)(4cy(p)+\varepsilon m^2)}>\frac{1}{y(p)}-\frac{\varepsilon m^2}{4cy(p)^2} \geqq \frac{1}{y(p)}-\frac{\varepsilon}{4c}\\
\frac{1}{y(p)-\frac{\varepsilon m^2}{8c}}&=\frac{1}{y(p)}+\frac{\varepsilon m^2}{y(p)(8cy(p)-\varepsilon m^2)} \leqq \frac{1}{y(p)}+\frac{\varepsilon m^2}{m(8cm-\varepsilon m^2)} \leqq \frac{1}{y(p)}+\frac{\varepsilon}{4c}
\end{aligned}$$

が成り立つことから，$\left|\dfrac{2}{\left|\omega(t_j)-\overline{\omega(t_{j-1})}\right|}-\dfrac{1}{y(p)}\right|<\dfrac{\varepsilon}{4c}$ が得られる．故に (i) から次の不等式が成り立つ．

$$\left|\frac{2|\omega(t_j)-\omega(t_{j-1})|}{\left|\omega(t_j)-\overline{\omega(t_{j-1})}\right|}-\frac{|\omega(t_j)-\omega(t_{j-1})|}{y(p)}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{4}(t_j-t_{j-1}) \quad \cdots (iii)$$

$|\omega(t_j)-\omega(t_{j-1})|=\sqrt{(x(t_j)-x(t_{j-1}))^2+(y(t_j)-y(t_{j-1}))^2}=\sqrt{x'(c_j)^2+y'(d_j)^2}(t_j-t_{j-1})$ であることに注意すれば，補題 7.62 から，

$$\begin{aligned}
\left||\omega(t_j)-\omega(t_{j-1})|-\sqrt{x'(p)^2+y'(p)^2}(t_j-t_{j-1})\right|&=\left|\sqrt{x'(c_j)^2+y'(d_j)^2}-\sqrt{x'(p)^2+y'(p)^2}\right|(t_j-t_{j-1})\\
&\leqq \sqrt{(x'(c_j)-x'(p))^2+(y'(d_j)-y'(p))^2}(t_j-t_{j-1})\\
&\leqq \frac{\varepsilon m}{4}(t_j-t_{j-1})
\end{aligned}$$

が得られる．従って次の不等式が成り立つ．

$$\left|\frac{|\omega(t_j)-\omega(t_{j-1})|}{y(p)}-\frac{\sqrt{x'(p)^2+y'(p)^2}}{y(p)}(t_j-t_{j-1})\right| \leqq \frac{\varepsilon m}{4y(p)}(t_j-t_{j-1}) \leqq \frac{\varepsilon}{4}(t_j-t_{j-1}) \quad \cdots (iv)$$

補題 7.58, (i), (ii) と $y(t_j), y(t_{j-1}) \geqq m$ および $\varepsilon m \leqq 4$ から

$$\begin{aligned}
0 \leqq d_{\boldsymbol{H}}(\omega(t_j),\omega(t_{j-1}))-\frac{2|\omega(t_j)-\omega(t_{j-1})|}{\left|\omega(t_j)-\overline{\omega(t_{j-1})}\right|} &\leqq \frac{|\omega(t_j)-\omega(t_{j-1})|^3}{6y(t_j)y(t_{j-1})(y(t_j)+y(t_{j-1}))} \leqq \frac{|\omega(t_j)-\omega(t_{j-1})|^3}{12m^3}\\
&\leqq \frac{\varepsilon^2 m}{96c}(t_j-t_{j-1}) \leqq \frac{\varepsilon}{24c}(t_j-t_{j-1}) \leqq \frac{\varepsilon}{4}(t_j-t_{j-1}) \quad \cdots (v)
\end{aligned}$$

が成り立つ. (iii), (iv), (v) から

$$\left| d_{\boldsymbol{H}}(\omega(t_j), \omega(t_{j-1})) - \frac{\sqrt{x'(p)^2 + y'(p)^2}}{y(p)}(t_j - t_{j-1}) \right| \leqq \frac{3\varepsilon}{4}(t_j - t_{j-1}) \ \cdots (vi)$$

が得られ, $h = \sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1})$ に注意すれば

$$\begin{aligned}\left| s(\omega, \Delta) - h\frac{\sqrt{x'(p)^2 + y'(p)^2}}{y(p)} \right| &= \left| \sum_{j=1}^{n} \left(d_{\boldsymbol{H}}(\omega(t_j), \omega(t_{j-1})) - \frac{\sqrt{x'(p)^2 + y'(p)^2}}{y(p)}(t_j - t_{j-1}) \right) \right| \\ &\leqq \sum_{j=1}^{n} \left| d_{\boldsymbol{H}}(\omega(t_j), \omega(t_{j-1})) - \frac{\sqrt{x'(p)^2 + y'(p)^2}}{y(p)}(t_j - t_{j-1}) \right| \\ &\leqq \sum_{j=1}^{n} \frac{3\varepsilon}{4}(t_j - t_{j-1}) = \frac{3\varepsilon h}{4}\end{aligned}$$

である. 上式と $0 \leqq L_\omega(p, p+h) - s(\omega, \Delta) < \frac{\varepsilon h}{4}$ から $\left| L_\omega(t, t+h) - h\frac{\sqrt{x'(p)^2 + y'(p)^2}}{y(p)} \right| \leqq \varepsilon h$ が得られ, 命題 5.11 から $L_\omega(p, p+h) = L_\omega(a, p+h) - L_\omega(a, p)$ だから $\left| \frac{L_\omega(a, t+h) - L_\omega(a, p)}{h} - \frac{\sqrt{x'(p)^2 + y'(p)^2}}{y(p)} \right| \leqq \varepsilon$ が成り立つ. 故に $\lim_{h \to +0} \frac{L_\omega(a, t+h) - L_\omega(a, p)}{h} = \frac{\sqrt{x'(p)^2 + y'(p)^2}}{y(p)}$ である.

$-\delta < h < 0$ を満たす h に対し, $[p+h, p]$ の分割 $\Delta = \{t_j\}_{j=0,1,\ldots,n}$ で, $0 \leqq L_\omega(p+h, p) - s(\omega, \Delta) < \frac{\varepsilon h}{4}$ を満たすものがある. この場合も上の (iii), (iv), (v) と同じ不等式が成り立ち, (vi) が示されるため, $h = -\sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1})$ に注意すれば,

$$\begin{aligned}\left| s(\omega, \Delta) + h\frac{\sqrt{x'(p)^2 + y'(p)^2}}{y(p)} \right| &= \left| \sum_{j=1}^{n} \left(d_{\boldsymbol{H}}(\omega(t_j), \omega(t_{j-1})) - \frac{\sqrt{x'(p)^2 + y'(p)^2}}{y(p)}(t_j - t_{j-1}) \right) \right| \\ &\leqq \sum_{j=1}^{n} \left| d_{\boldsymbol{H}}(\omega(t_j), \omega(t_{j-1})) - \frac{\sqrt{x'(p)^2 + y'(p)^2}}{y(p)}(t_j - t_{j-1}) \right| \\ &\leqq \sum_{j=1}^{n} \frac{3\varepsilon}{4}(t_j - t_{j-1}) = -\frac{3\varepsilon h}{4}\end{aligned}$$

である. 上式と $0 \leqq L_\omega(p+h, p) - s(\omega, \Delta) < \frac{\varepsilon h}{4}$ から $\left| L_\omega(p+h, p) + h\frac{\sqrt{x'(p)^2 + y'(p)^2}}{y(p)} \right| \leqq \varepsilon h$ が得られ, 命題 5.11 から $L_\omega(p+h, p) = L_\omega(a, p) - L_\omega(a, p+h)$ だから $\left| \frac{L_\omega(a, t+h) - L_\omega(a, p)}{h} - \frac{\sqrt{x'(p)^2 + y'(p)^2}}{y(p)} \right| \leqq \varepsilon$ が成り立つ. 故に $\lim_{h \to -0} \frac{L_\omega(a, t+h) - L_\omega(a, p)}{h} = \frac{\sqrt{x'(p)^2 + y'(p)^2}}{y(p)}$ である. □

上の結果と命題 5.13 から, 次の結果が得られる.

系 7.64 $\boldsymbol{H}$ の曲線 $\omega : [a, b] \to \boldsymbol{H}$ に対し, $x(t) = \mathrm{Re}(\omega(t))$, $y(t) = \mathrm{Im}(\omega(t))$ によって定義される関数 $x, y : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ が連続関数であり, (a, b) の各点で微分可能で, 導関数が連続であるとする. このとき ω の長さ $L_\omega(a, b)$ は次の広義積分で与えられる.

$$\int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt$$

7.10 円弧の長さと中心角

命題 7.65 中心が p, 半径が r である $\boldsymbol{H}$ の円 $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ を $\omega(t)=\mathrm{Re}(p)+i\cosh r\mathrm{Im}(p)+\sinh r\mathrm{Im}(p)(\cos t+i\sin t)$ で与えられる曲線 $\omega:[-\pi,\pi]\to\boldsymbol{H}$ によってパラメータ表示をしたとき, $-\pi\leqq\alpha\leqq\beta\leqq\pi$ に対し, 区間 $[\alpha,\beta]$ に対応する $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ の弧の長さは

$$2\sinh r\left(\tan^{-1}\left(\cosh r\tan\frac{\beta}{2}+\sinh r\right)-\tan^{-1}\left(\cosh r\tan\frac{\alpha}{2}+\sinh r\right)\right)$$

によって与えられる. とくに, $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ の周囲の長さは $2\pi\sinh r$ である.

証明 系 7.64 から, 区間 $[\alpha,\beta]$ に対応する $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ の弧の長さは

$$\int_\alpha^\beta\frac{\sinh r}{\cosh r+\sinh r\sin t}\,dt=2\sinh r\left(\tan^{-1}\left(\cosh r\tan\frac{\beta}{2}+\sinh r\right)-\tan^{-1}\left(\cosh r\tan\frac{\alpha}{2}+\sinh r\right)\right)$$

によって与えられる. 従って $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ の周囲の長さは $2\pi\sinh r$ である. □

注意 7.66 $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y$ の値は, $xy<1$ ならば $\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$, $xy=1$ かつ $x>0$ ならば $\dfrac{\pi}{2}$, $xy=1$ かつ $x<0$ ならば $-\dfrac{\pi}{2}$, $xy>1$ かつ $x>0$ ならば $\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}+\pi$, $xy>1$ かつ $x<0$ ならば $\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}-\pi$ で与えられる. また, $-\pi\leqq\alpha\leqq\beta\leqq\pi$ のとき, $\left(\cosh r\tan\dfrac{\alpha}{2}+\sinh r\right)\left(\cosh r\tan\dfrac{\beta}{2}+\sinh r\right)+1$ の符号は $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\tanh r\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ の符号と一致するため, $\displaystyle\int_\alpha^\beta\frac{\sinh r}{\cosh r+\sinh r\sin t}\,dt$ の値は, 以下のように与えられる.

$\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\tanh r\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}>0$ ならば $2\sinh r\tan^{-1}\dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cosh r\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sinh r\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$

$\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\tanh r\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}=0$, $\cosh r\tan\dfrac{\beta}{2}+\sinh r>0$ ならば $\dfrac{\pi}{2}$

$\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\tanh r\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}=0$, $\cosh r\tan\dfrac{\beta}{2}+\sinh r<0$ ならば $-\dfrac{\pi}{2}$

$\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\tanh r\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}<0$, $\cosh r\tan\dfrac{\beta}{2}+\sinh r>0$ ならば $2\sinh r\tan^{-1}\dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cosh r\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sinh r\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}+\pi$

$\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\tanh r\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}<0$, $\cosh r\tan\dfrac{\beta}{2}+\sinh r<0$ ならば $2\sinh r\tan^{-1}\dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cosh r\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sinh r\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}-\pi$

命題 7.67 $\boldsymbol{H}$ 上の直線 ℓ と ℓ 上の点 p が与えられたとき, ℓ によって 2 つの部分に分けられる $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ の弧の長さは等しい.

証明 ℓ 上に p と異なる点 q をとれば, 命題 7.5 より $A\in SL_2(\boldsymbol{R})$ と $\lambda>1$ で, $\tau_A(p)=i$, $\tau_A(q)=\lambda i$ となるものがある. τ_A は $\boldsymbol{H}$ の直線を $\boldsymbol{H}$ の直線に写すため, ℓ は τ_A によって虚軸に写される. また, τ_A は距離を保つことから $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ は τ_A によって $C_{\boldsymbol{H}}(i\,;r)$ に写され, ℓ によって 2 つの部分に分けられる $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ の弧は虚軸によって 2 つの部分に分けられる $C_{\boldsymbol{H}}(i\,;r)$ の弧に対応する. 虚軸に関する対称移動は距離を保ち, この対称移動によって, 実部が 0 以上である複素数からなる $C_{\boldsymbol{H}}(i\,;r)$ の弧と, 実部が 0 以下である複素数からなる $C_{\boldsymbol{H}}(i\,;r)$ の弧は互いに移り合うため, これらの長さは等しい. □

系 7.68 $\boldsymbol{H}$ の直線 ℓ_1, ℓ_2 が p で交わっているとする. ℓ_1 と $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ の交点を A, B とし, ℓ_2 と $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ の交点を C, D とするとき, A から C までの $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ の劣弧の長さと B から D までの $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ の劣弧の長さは等しい.

証明 A から C までの $C_{\boldsymbol{H}}(p\ r)$ の劣弧の長さを l_1, B から C までの $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ の劣弧の長さを l_2, B から D までの $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ の劣弧の長さを l_3 とすれば, 命題 7.67 から $l_1+l_2=l_2+l_3$ が成り立つため, $l_1=l_3$ である. □

命題 7.69 $c\in\boldsymbol{R}$, $p\in\boldsymbol{H}$ に対し, $\mathrm{Re}(p)=c$ ならば曲線 $\ell_{c,p}:(0,\infty)\to\boldsymbol{H}$ を $\ell_{c,p}(t)=c+ti$ で定め, $\mathrm{Re}(p)\neq c$ ならば曲線 $\ell_{c,p}:(0,\pi)\to\boldsymbol{H}$ を $\ell_{c,p}(t)=\dfrac{|p|^2-c^2}{2(\mathrm{Re}(p)-c)}+\dfrac{|p-c|^2}{2|\mathrm{Re}(p)-c|}(\cos t+i\sin t)$ で定める. また

$\alpha = 2\tan^{-1}\dfrac{\mathrm{Re}(p)-c}{\mathrm{Im}(p)}$ とおく.

(1) $\mathrm{Re}(p) \neq c$ の場合, $\ell_{c,p}$ の像は実軸上の点 c, $\dfrac{|p|^2 - c\mathrm{Re}(p)}{\mathrm{Re}(p)-c}$ を直径の両端とする半円の弧である.

(2) $d \in \boldsymbol{R}$ が $(c-\mathrm{Re}(p))(d-\mathrm{Re}(p)) = -\mathrm{Im}(p)^2$ を満たせば, $\ell_{d,p}$ の像は $\ell_{c,p}$ の像と一致する.

(3) $\mathrm{Re}(p) > c$ ならば $\ell_{c,p}(\pi-\alpha) = p$, $\mathrm{Re}(p) < c$ ならば $\ell_{c,p}(\pi+\alpha) = p$ が成り立つ.

(4) $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ と $\ell_{c,p}$ との交点は, $\mathrm{Re}(p) = c$ ならば $c + ie^{\pm r}\mathrm{Im}(p)$ であり, $\mathrm{Re}(p) \neq c$ ならば以下の点である.

$$\begin{aligned}
&\frac{|p|^2-c^2}{2(\mathrm{Re}(p)-c)} + \frac{|p-c|^2}{2(\mathrm{Re}(p)-c)}\left(\frac{-\cos\alpha \pm \sin^2\alpha\cosh r\sinh r}{1+\sin^2\alpha\sinh^2 r} + i\frac{\sin\alpha\cosh r \pm \cos\alpha\sin\alpha\sinh r}{1+\sin^2\alpha\sinh^2 r}\right) \\
&= \mathrm{Re}(p) + i\mathrm{Im}(p)\cosh r + \mathrm{Im}(p)\sinh r\left(\frac{\sin\alpha(\cos\alpha\sinh r \pm \cosh r)}{1+\sin^2\alpha\sinh^2 r} + i\frac{\pm\cos\alpha - \sin^2\alpha\cosh r\sinh r}{1+\sin^2\alpha\sinh^2 r}\right)
\end{aligned}$$

証明 (1) $\ell_{c,p}$ の像は実軸上の点 $\dfrac{|p|^2-c^2}{2(\mathrm{Re}(p)-c)}$ を中心として, 半径が $\dfrac{|p-c|^2}{2|\mathrm{Re}(p)-c|}$ である半円の弧であることから, これは c, $\dfrac{|p|^2-c\mathrm{Re}(p)}{\mathrm{Re}(p)-c}$ を直径の両端とする半円の弧である.

(2) $d = \mathrm{Re}(p) - \dfrac{\mathrm{Im}(p)^2}{c-\mathrm{Re}(p)}$ より $\dfrac{|p|^2-d\mathrm{Re}(p)}{\mathrm{Re}(p)-d} = c$ が得られるため, (1) の結果から $\ell_{d,p}$ も c, $\dfrac{|p|^2-c\mathrm{Re}(p)}{\mathrm{Re}(p)-c}$ を直径の両端とする半円の弧である.

(3) $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\mathrm{Re}(p)-c}{\mathrm{Im}(p)}$ だから, $\cos\alpha = \dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} = -\dfrac{(\mathrm{Re}(p)-c)^2-\mathrm{Im}(p)^2}{|p-c|^2}$, $\sin\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2(\mathrm{Re}(p)-c)\mathrm{Im}(p)}{|p-c|^2}$ である. 従って, $\mathrm{Re}(p) > c$ ならば $\ell_{c,p}(\pi-\alpha) = p$, $\mathrm{Re}(p) < c$ ならば $\ell_{c,p}(\pi+\alpha) = p$ が成り立つ.

(4) $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ が $\omega(t) = \mathrm{Re}(p) + i\cosh r\mathrm{Im}(p) + \sinh r\mathrm{Im}(p)(\cos t + i\sin t)$ で与えられる曲線 ω の像であることから, 主張が示される. □

定理 7.70 $p \in \boldsymbol{H}$, $r > 0$ と p を通る $\boldsymbol{H}$ の 2 本の直線 ℓ_1, ℓ_2 が与えられているとき, $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ と ℓ_1 との交点を A, B とし, $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ と ℓ_2 との交点を C, D とする. p における ℓ_1 の接ベクトルで, A に向かうものと, p における ℓ_2 の接ベクトルで, C に向かうもののなす角を γ として, A から C までの $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ の劣弧の長さを $L(r)$ とすれば, $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\frac{L(r)}{\sinh r} = \gamma$ である.

証明 ℓ_2 が虚軸でない場合は, 命題 7.5 より $A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ と $\lambda > 1$ で, $\tau_A(p) = i$, $\tau_A(\mathrm{C}) = \lambda i$ となるものがある. τ_A は $\boldsymbol{H}$ の直線を $\boldsymbol{H}$ の直線に写すため, ℓ_2 は τ_A によって虚軸に写され, ℓ_1 は τ_A によって $\ell_{c,i}$ $(c \neq 0)$ の形の $\boldsymbol{H}$ の直線に写される. τ_A が距離を保つことから, τ_A によって $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ は $C_{\boldsymbol{H}}(i\,;r)$ に写され, A, B, C, D に対応する $C_{\boldsymbol{H}}(i\,;r)$ の点をそれぞれ A$'$, B$'$, C$'$, D$'$ とすれば, A から C までの $C_{\boldsymbol{H}}(p\,;r)$ の劣弧の長さは A$'$ から C$'$ までの $C_{\boldsymbol{H}}(i\,;r)$ の劣弧の長さに等しい. さらに, τ_A は $\boldsymbol{H}$ から $\boldsymbol{H}$ への正則写像だから, $\boldsymbol{H}$ 上の点 p を通る 2 つの曲線の p における接ベクトルのなす角を保つため, $p = i$ で ℓ_2 が虚軸の場合に主張を示せばよい. このとき C, D は $C_{\boldsymbol{H}}(i\,;r)$ と虚軸との交点だから $\mathrm{C} = ie^r$, $\mathrm{D} = ie^{-r}$ である. また, 命題 7.69 の (2) により $\ell_{c,i}$ と $\ell_{-\frac{1}{c},i}$ の像は一致するため, ℓ_1 は $\ell_{c,i}$ の形の直線で, $c < 0$ であると仮定してよい.

虚軸に関する対称移動も距離を保つため, A の実部は正であると仮定してよい. このとき $\alpha = -2\tan^{-1}c$ とおけば, $0 < \alpha \leqq \pi$ であり, $\cos\alpha = \dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1-c^2}{1+c^2}$, $\sin\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{-2c}{1+c^2}$ であり, $C_{\boldsymbol{H}}(i\,;r)$ と $\ell_{c,p}$ との

交点 A, B は命題 7.69 の (4) により, 以下で与えられる.

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= i\cosh r + \sinh r\left(\frac{\sin\alpha(\cos\alpha\sinh r + \cosh r)}{1+\sin^2\alpha\sinh^2 r} + i\frac{\cos\alpha - \sin^2\alpha\cosh r\sinh r}{1+\sin^2\alpha\sinh^2 r}\right)\\
&= i\cosh r + \sinh r\left(\frac{-2c((1-c^2)\sinh r + (1+c^2)\cosh r)}{(1+c^2)^2+4c^2\sinh^2 r} + i\frac{1-c^4-4c^2\cosh r\sinh r}{(1+c^2)^2+4c^2\sinh^2 r}\right)\\
\mathrm{B} &= i\cosh r + \sinh r\left(\frac{\sin\alpha(\cos\alpha\sinh r - \cosh r)}{1+\sin^2\alpha\sinh^2 r} + i\frac{-\cos\alpha - \sin^2\alpha\cosh r\sinh r}{1+\sin^2\alpha\sinh^2 r}\right)\\
&= i\cosh r + \sinh r\left(\frac{-2c((1-c^2)\sinh r - (1+c^2)\cosh r)}{(1+c^2)^2+4c^2\sinh^2 r} + i\frac{-1+c^4-4c^2\cosh r\sinh r}{(1+c^2)^2+4c^2\sinh^2 r}\right)
\end{aligned}$$

そこで $\cos\xi(r) = \dfrac{-2c((1-c^2)\sinh r + (1+c^2)\cosh r)}{(1+c^2)^2+4c^2\sinh^2 r}$, $\sin\xi(r) = \dfrac{1-c^4-4c^2\cosh r\sinh r}{(1+c^2)^2+4c^2\sinh^2 r}$ を満たす $\xi(r) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ をとれば, 次の等式が成り立つ.

$$\tan\frac{\xi(r)}{2} = \frac{2\sin\frac{\xi(r)}{2}\cos\frac{\xi(r)}{2}}{2\cos^2\frac{\xi(r)}{2}} = \frac{\sin\xi(r)}{1+\cos\xi(r)} = \frac{1-c^4-4c^2\cosh r\sinh r}{(1+c^2)^2+4c^2\sinh^2 r - 2c((1-c^2)\sinh r + (1+c^2)\cosh r)}$$

従って命題 7.65 により, A から C までの $C_{\boldsymbol{H}}(p;r)$ の劣弧の長さ $L(r)$ は,

$$L(r) = \int_{\xi(r)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sinh r}{\cosh r + \sinh r\sin t}\,dt = 2\sinh r\left(\tan^{-1}e^r - \tan^{-1}\left(\cosh r\tan\frac{\xi(r)}{2} + \sinh r\right)\right)$$

で与えられる. ここで,

$$\cosh r\tan\frac{\xi(r)}{2} + \sinh r = \frac{(1-c^4)\cosh r + (1-c^2)^2\sinh r - 2c(1-c^2)\sinh^2 r - 2c(1+c^2)\cosh r\sinh r}{(1+c^2)^2+4c^2\sinh^2 r - 2c((1-c^2)\sinh r + (1+c^2)\cosh r)}$$

だから $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\left(\cosh r\tan\frac{\xi(r)}{2} + \sinh r\right) = -\frac{1}{c}$ が成り立つ. 従って $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\frac{L(r)}{\sinh r} = 2\left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{c}\right) = -2\tan^{-1}c$ である. 一方, $i = \ell_{c,i}(\pi-\alpha)$ だから $\ell'_{c,i}(\pi-\alpha) = -1 + \dfrac{1-c^2}{2c}i$ は $\ell_{c,i}$ の i における接ベクトルで, B に向かうものだから, $\dfrac{-2c}{1+c^2} + \dfrac{1-c^2}{1+c^2}i$ が $\ell_{c,i}$ の i における長さが 1 の接ベクトルで, A に向かうものである. また i が虚軸の i における接ベクトルで C に向かうものだから, これらのなす角 γ について $\cos\gamma = \dfrac{1-c^2}{1+c^2} = \cos\alpha$ が成り立つ. 故に, $\gamma = \alpha = -2\tan^{-1}c = \displaystyle\lim_{r\to\infty}\frac{L(r)}{\sinh r}$ である. □

問題

(A) $\boldsymbol{R}$ の距離関数 d が次の条件 (i), (ii) を満たすとする.

(i) 任意の実数 x, y, z に対して $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ が成り立つ.

(ii) $x \leqq y \leqq z$ ならば $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$ が成り立つ.

(1) 関数 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = d(0,x)$ で定めるとき, 任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $f(-x) = f(x)$ であり, $x, y \geqq 0$ ならば $f(x+y) = f(x) + f(y)$ が成り立つことを示せ.

(2) $k = d(0,1)$ とおけば, 任意の $x, y \in \boldsymbol{R}$ に対して $d(x,y) = k|x-y|$ が成り立つことを示せ.

(B) $\boldsymbol{R}^3$ の単位球面 $S^2 = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \,|\, \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ の 2 点 A と B を通る直線とは, A と B を通る大円 (中心が原点 O である円) であると定義し, S^2 上の 3 点 A, B, C が与えられたとき, ∠ABC は, 三点 A, B, O を通る平面と, B, C, O を通る平面のなす角であると定義する. S^2 の面積が 4π であることを用いて以下の問いに答えよ.

(1) 原点を通る相異なる 2 つの平面 P と Q のなす角を α $\left(0 < \alpha \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とする. P, Q によって, S^2 は 4 つの部分集合に分けられるが, α を用いてこれらの部分集合の面積を表せ.

(2) 3 つの平面 P, Q, R の共通部分は原点だけであるとし, P と Q, Q と R, P と R のなす角をそれぞれ, α, β, γ $\left(0 < \alpha, \beta, \gamma \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とする. P, Q, R によって, S^2 は 8 つの部分集合に分けられるが, α, β, γ を用いてこれらの部分集合の面積を表せ.

(3) S^2 上の 3 点 A, B, C を頂点とする球面三角形の面積は $\angle\mathrm{ABC} + \angle\mathrm{CAB} + \angle\mathrm{BCA} - \pi$ であることを示せ.

(C) λ を 1 より大きい実数, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする. 距離空間 $(\boldsymbol{H}, d_{\boldsymbol{H}})$ において, 以下の問いに答えよ.

(1) i と $\cos\theta + i\sin\theta$ の距離 $d_{\boldsymbol{H}}(i, \cos\theta + i\sin\theta)$ を求めよ.

(2) λi と $\cos\theta + i\sin\theta$ の距離 $d_{\boldsymbol{H}}(\lambda i, \cos\theta + i\sin\theta)$ を求めよ.

(3) λi と $\cos\theta + i\sin\theta$ を結ぶ線分を斜辺とし, 頂点 i の角度が直角である直角三角形において, 等式

$$d_{\boldsymbol{H}}(i, \cos\theta + i\sin\theta)^2 + d_{\boldsymbol{H}}(i, \lambda i)^2 = d_{\boldsymbol{H}}(\lambda i, \cos\theta + i\sin\theta)^2$$

(ピタゴラスの定理) が成り立つかどうか, 理由を付けて答えよ.

(D) λ を 1 より大きい実数とする. 距離空間 $(\boldsymbol{H}, d_{\boldsymbol{H}})$ において, 以下の問いに答えよ.

(1) $d_{\boldsymbol{H}}(p, i) = d_{\boldsymbol{H}}(p, \lambda i) = \log\lambda$ かつ $\mathrm{Re}(p) > 0$ を満たす $\boldsymbol{H}$ の点 p を求めよ.

(2) i と λi を結ぶ線分と, i と p を結ぶ線分のなす角を求めよ.

(3) λi と i を結ぶ線分と, λi と p を結ぶ線分のなす角を求めよ.

(4) p と i を結ぶ線分と, p と λi を結ぶ線分のなす角を求めよ.

(5) i, λi, p を 3 つの頂点とする「正三角形」の内角の和を答えよ.