数学の視点　空間の数学

目次

1　ベクトルと計量とユークリッド幾何学

一般に, 集合 X, Y が与えられたとき, X の要素 x と Y の要素 y の対 (x,y) 全体からなる集合を $X \times Y$ で表し, X と Y の直積 (集合) という. $X \times Y$ の 2 つの要素 (x,y), (z,w) が $x = z$ かつ $y = w$ を満たすとき, またその時に限り (x,y) と (z,w) は等しいといい, $(x,y) = (z,w)$ で表す.

実数全体の集合を $\boldsymbol{R}$ で表し, n 個の実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を縦に並べた $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ という形の要素全体からなる集合を $\boldsymbol{R}^n$ で表す. $\boldsymbol{R}^n$ の 2 つの要素 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ がすべての $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $x_j = y_j$ を満たすとき, またその時に限り $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は等しいといい, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ で表す. この $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ と実数 r に対し $\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \\ \vdots \\ rx_n \end{pmatrix}$ をそれぞれ $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $r\boldsymbol{x}$ で表し, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の和, $r\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}$ の r 倍という.

直積の記号を用いると, $\boldsymbol{R}^n$ の足し算 (加法) は $\boldsymbol{R}^n$ の要素 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の対 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を $\boldsymbol{R}^n$ の要素 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ に対応させる $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}$ への写像であり, 実数倍は実数 r と $\boldsymbol{R}^n$ の要素 $\boldsymbol{x}$ の対 $(r, \boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{R}^n$ の要素 $r\boldsymbol{x}$ に対応させる $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^n$ への写像であると考えられる. このように, 集合 $\boldsymbol{R}^n$ に加法と実数倍を定義したものを n 次元数ベクトル空間という. とくに $\boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{R}^3$ をそれぞれ座標平面, 座標空間ともいう.

この数ベクトル空間の概念を数ベクトルの集まりでない一般の集合に拡張するために,「加法」と「実数倍」といった「演算」と呼ばれる写像に着目する. 集合 V (要素は関数の集合や多項式の集合など, 数や数ベクトルでなくてもよい) に対して, 2 種類の写像 $f : V \times V \to V$ と $g : \boldsymbol{R} \times V \to V$ を与え, $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $g(r, \boldsymbol{x}) = r\boldsymbol{x}$ とおくことによってそれぞれ加法, 実数倍と呼ばれる演算を定義する. このように一般化された「演算」を考えることで, 数ベクトル空間の概念が一般化される. そこで, ベクトル空間の定義を以下のように行う.

定義 1.1　集合 V に, 加法, 実数倍とよばれる次の 2 種類の演算

・ **加法**：V の 2 つの要素の対 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対して, V の要素 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ を対応させる演算.

・ **実数倍**：$\boldsymbol{R}$ の要素 r と V の要素 $\boldsymbol{x}$ の対 $(r, \boldsymbol{x})$ に対して, V の要素 $r\boldsymbol{x}$ を対応させる演算.

が定義されていて, 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$, $r, s \in \boldsymbol{R}$ に対して, 次の $(i) \sim (vii)$ が成り立つとき, V を $\boldsymbol{R}$ 上の**ベクトル空間**という. また, V の要素を**ベクトル**とよび, それに対して $\boldsymbol{R}$ の要素を**スカラー**ともいう.

(i) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ (**結合法則**).

(ii) V の要素 $\boldsymbol{0}$ で, すべての $\boldsymbol{x} \in V$ に対して, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ を満たすものがある.

(iii) 各 $\boldsymbol{x} \in V$ に対して, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{x}' \in V$ がある.

(iv) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ (**交換法則**).

(v) $(rs)\boldsymbol{x} = r(s\boldsymbol{x})$ (**結合法則**).

(vi) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

(vii) $r(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = r\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{y}$, 　$(r+s)\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{x}$ (**分配法則**).

条件 (ii) の $\boldsymbol{0}$ を V の零ベクトルといい, 条件 (iii) の $\boldsymbol{x}'$ を $-\boldsymbol{x}$ で表して $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{y})$ を $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ で表す.

注意 1.2　(1) $\boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{0}'$ がともに条件 (ii) を満たせば $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}'+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}'$ だから条件 (ii) を満たす $\boldsymbol{0}$ は 1 つしかない.

(2) $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\boldsymbol{x}'$ と $\boldsymbol{x}''$ がともに条件 (iii) を満たせば, 条件 (i), (ii) から $\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x}''+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}''+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = (\boldsymbol{x}''+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}+\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'$ だから各 $\boldsymbol{x} \in V$ に対して条件 (iii) を満たす $\boldsymbol{x}'$ は 1 つしかない.

(3) 条件 (ii), (vii) から $r\boldsymbol{0}+r\boldsymbol{0} = r(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}) = r\boldsymbol{0}$, $0\boldsymbol{x}+0\boldsymbol{x} = (0+0)\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x}$ だから条件 $(i) \sim (iii)$ より $r\boldsymbol{0} = r\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0} = r\boldsymbol{0}+(r\boldsymbol{0}+(-r\boldsymbol{0})) = (r\boldsymbol{0}+r\boldsymbol{0})+(-r\boldsymbol{0}) = r\boldsymbol{0}+(-r\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, $0\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{x}+(0\boldsymbol{x}+(-0\boldsymbol{x})) = (0\boldsymbol{x}+0\boldsymbol{x})+(-0\boldsymbol{x}) = 0\boldsymbol{x}+(-0\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ である. 従って $0\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ である.

(4) 条件 (iv), (vii) と (3) から $\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x} = (1+(-1))\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $(-1)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x}+1\boldsymbol{x} = ((-1)+1)\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ だから (2) によって $(-1)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{x}$ である.

定義 1.3　V, W を $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とする．V から W への写像 f が, V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ と 実数 r に対して, $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ と $f(r\boldsymbol{x}) = rf(\boldsymbol{x})$ を満たすとき, f を V から W への **1 次写像**または**線形写像**という．なお, $V = W$ のときは, f を V の **1 次変換**という．

高校では, 平面ベクトル, 空間ベクトルの内積と 2 つのベクトルのなす角との関係を学んだ．一般のベクトル空間では, ベクトルの長さや 2 つのベクトルのなす角を定義することはできないが, 加法と実数倍という演算を用いて一般のベクトル空間を定義したように, 内積を 2 つのベクトルの対に対して実数を対応させる演算として次のように抽象的に定義して, ベクトルの長さや直交, ベクトルのなす角という概念は内積を用いることによって定義する．

定義 1.4　V を $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とする．V の二つのベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して実数 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を対応させる演算 $(\ ,\ ) : V \times V \to \boldsymbol{R}$ が, 任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in V$, $r \in \boldsymbol{R}$ に対し次の (i)〜(iv) を満たすとき, $(\ ,\ )$ を V の**内積**という．内積が与えられているベクトル空間を**計量ベクトル空間**という．

(i) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$,　$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$
(ii) $(r\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},r\boldsymbol{y}) = r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$
(iii) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$
(iv) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \geqq 0$ であり, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 0$ となるのは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のときに限る．

注意 1.5　条件 (ii) から $(\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}) = (0\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}) = 0(\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}) = 0$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{x},0\boldsymbol{0}) = 0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0}) = 0$ である．

例 1.6　$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ の第 j 成分をそれぞれ x_j, y_j として, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ で定めれば $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は定義 1.4 の条件を全て満たすので $\boldsymbol{R}^n$ の内積である．これを $\boldsymbol{R}^n$ の標準的な内積といい, この内積が与えられた計量ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間という．$\boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{R}^3$ はユークリッド幾何学を展開する場である．

定義 1.7　V を $\boldsymbol{R}$ 上の計量ベクトル空間とするとき, V のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して, $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$ とおき, $\|\boldsymbol{x}\|$ を $\boldsymbol{x}$ の**長さ**という．長さが 1 であるベクトルを**単位ベクトル**という．

$t \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{x} \in V$ に対し, 定義 1.4 の (ii) から $\|t\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(t\boldsymbol{x},\,t\boldsymbol{x})} = \sqrt{t^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})} = \sqrt{t^2}\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})} = |t|\|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つ．とくに $\|-\boldsymbol{x}\| = \|(-1)\boldsymbol{x}\| = |-1|\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$ である．さらに定義 1.7 から $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ だから

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) && \text{定義 1.4 の } (i)\\
&= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) && \text{定義 1.4 の } (i)\\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 && \text{定義 1.4 の } (iii)
\end{aligned}
$$

が得られる．従って次の結果を得る．

命題 1.8　V を $\boldsymbol{R}$ 上の計量ベクトル空間, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を V のベクトルとすれば, 次の等式が成り立つ．

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2$$

上の等式の $\boldsymbol{y}$ を $-\boldsymbol{y}$ で置き換えると $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2$ だから, 次の結果が得られる．

系 1.9　V を $\boldsymbol{R}$ 上の計量ベクトル空間, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を V のベクトルとすれば, 以下の等式が成り立つ．

(1) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = 2\left(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2\right)$　　(2) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \dfrac{1}{4}\left(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\right)$

注意 1.10　V が座標平面 $\boldsymbol{R}^2$ または座標空間 $\boldsymbol{R}^3$ で, 原点 O を頂点の一つとする △OAB を考え, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ をそれぞれ点 A, B の位置ベクトルとする．ここで, $\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ とおけば, $\boldsymbol{x}$ は辺 AB の中点 M の位置ベクトルであり, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ だから $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{a}\| = \mathrm{OA}$, $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{b}\| = \mathrm{OB}$, $\|\boldsymbol{x}\| = \mathrm{OM}$, $\|\boldsymbol{y}\| = \mathrm{BM} = \mathrm{AM}$ が成り立つ．故に系 1.9 の (1) の等式は「中線定理」$\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 = 2\left(\mathrm{OM}^2 + \mathrm{AM}^2\right)$ を意味する．

定理 1.11　V を $\boldsymbol{R}$ 上の計量ベクトル空間とする．V のベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して, 次の不等式が成り立つ．

シュワルツの不等式 ： $|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \leqq \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|$　　　三角不等式 ： $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$

証明 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と実数 t に対し, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ の場合 $\|\boldsymbol{x}\| \neq 0$ だから命題 1.8 の等式の $\boldsymbol{x}$ を $t\boldsymbol{x}$ で置き換えれば右辺は

$$\|t\boldsymbol{x}\|^2 + 2(t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 = t^2\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2t(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2\left(t + \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\right)^2 + \frac{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$$

となり, 左辺 $\|t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2$ は任意の実数 t に対して 0 以上の実数だから, $t = -\dfrac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$ 代入すれば, $\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 \geqq |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2$ が得られる. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の場合, 注意 1.5 から $\|\boldsymbol{x}\|$ と $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ はともに 0 になり, この場合も $\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 \geqq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2$ が成り立つため, 両辺の正の平方根をとって $\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| \geqq |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|$ を得る. また, 命題 1.8 と $\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| \geqq |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|$ から

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 \leqq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| + \|\boldsymbol{y}\|^2 \leqq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2$$

が得られる. 従って $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ が成り立つ. □

シュワルツの不等式は $-\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| \leqq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ と書き直せる. $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ がともに零ベクトルでないならば, $\|\boldsymbol{x}\|$ と $\|\boldsymbol{y}\|$ は正の実数だから, 上の不等式の各辺を $\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ で割れば $-1 \leqq \dfrac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} \leqq 1$ が得られるため, $\dfrac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} = \cos\theta$ を満たす $0 \leqq \theta \leqq \pi$ が 1 通りに定まる. この θ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ **のなす角**と定義する. このように $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角 θ を定義すれば, 高校で $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を定義する式として学んだ

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\cos\theta \tag{1.1}$$

は実は, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角の方を定義する式であると考えられる. また, 命題 1.8 の等式から

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 - 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

が得られるが, この等式に (1.1) を代入すれば, 次の等式が得られる.

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 - 2\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|\cos\theta \tag{1.2}$$

とくに, V が座標平面 $\boldsymbol{R}^2$ または座標空間 $\boldsymbol{R}^3$ で, 原点 O を頂点の一つとする △OAB を考え, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ をそれぞれ点 A, B の位置ベクトルとすれば, $\|\boldsymbol{x}\| = \mathrm{OA}$, $\|\boldsymbol{y}\| = \mathrm{OB}$, $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = \mathrm{AB}$, $\theta = \angle\mathrm{AOB}$ だから, (1.2) は次の余弦定理を意味する.

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA}\,\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB}$$

定義 1.12 V を $\boldsymbol{R}$ 上の計量ベクトル空間とする.

(1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ が $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ を満たすとき $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は**直交する**という.

(2) V のベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の**距離** $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ で定める.

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ のとき $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が直交することと $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{2}$ であることは同値である.

定義 1.13 V を $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間, $\boldsymbol{a}$ を V のベクトルとする. V のベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$ に対応させる V から V への写像を, $\boldsymbol{a}$ **方向の平行移動**といい, $T_{\boldsymbol{a}}$ で表す.

定義 1.14 V, W を $\boldsymbol{R}$ 上の計量ベクトル空間, f を V から W への写像とする.

(1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成り立つとき, f は**内積を保つ**という.

(2) 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\|f(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つとき, f は**ベクトルの長さを保つ**という.

(3) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $d(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成り立つとき, f は**距離を保つ**という. とくに $V = W$ の場合, V から V への距離を保つ写像を V の**合同変換**という.

(4) 任意の単位ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $f(\boldsymbol{x})$, $f(\boldsymbol{y})$ は零ベクトルではなく, $\dfrac{(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))}{\|f(\boldsymbol{x})\|\,\|f(\boldsymbol{y})\|} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成り立つとき, f は**角度を保つ**という.

ベクトルの長さは内積を用いて定義されているため, 内積を保つ写像はベクトルの長さと角度を保ち, 系 1.9 の (2) から, 内積はベクトル空間の演算とベクトルの長さを用いて表されるため, ベクトルの長さを保つ 1 次写像は内積を保つ. また, ベクトルの間の距離はベクトル空間の演算とベクトルの長さを用いて定義されているため, ベクトルの長さを保つ 1 次写像は距離を保つ. さらに $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) - T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ だから, 平行移動は距離を保つ.

定理 1.15　内積を保つ写像は 1 次写像である.

証明　$f : V \to W$ が内積を保つ写像ならば, 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と $r \in \boldsymbol{R}$ に対して, 命題 1.8 と仮定から

$$\begin{aligned}
\|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\|^2 &= \|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|^2 + 2(f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), -f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})) + \|-f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\|^2 \\
&= \|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|^2 - 2(f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x})) - 2(f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{y})) + \|f(\boldsymbol{x})\|^2 \\
&\quad + 2(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) + \|f(\boldsymbol{y})\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - 2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - 2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - 2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = 0 \\
\|f(r\boldsymbol{x}) - rf(\boldsymbol{x})\|^2 &= \|f(r\boldsymbol{x})\|^2 - 2(f(r\boldsymbol{x}), rf(\boldsymbol{x})) + \|rf(\boldsymbol{x})\|^2 = \|f(r\boldsymbol{x})\|^2 - 2r(f(r\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x})) + r^2\|f(\boldsymbol{x})\|^2 \\
&= \|r\boldsymbol{x}\|^2 - 2r(r\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + |r|^2\|\boldsymbol{x}\|^2 = r^2\big(\|\boldsymbol{x}\|^2 - 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + \|\boldsymbol{x}\|^2\big) = 0
\end{aligned}$$

が得られるため, $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) = f(r\boldsymbol{x}) - rf(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ が成り立つ. 故に f は 1 次写像である. □

定理 1.16　V, W を $\boldsymbol{R}$ 上の計量ベクトル空間とする. V から W への写像 f が距離を保てば, f は内積を保つ写像と $f(\boldsymbol{0})$ 方向の平行移動の合成写像である.

証明　$\tilde{f}$ を f と $-f(\boldsymbol{0})$ 方向の平行移動との合成写像 $T_{-f(\boldsymbol{0})} \circ f$ とすれば, 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $\|\tilde{f}(\boldsymbol{x}) - \tilde{f}(\boldsymbol{y})\| = \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ である. $\|\tilde{f}(\boldsymbol{x}) - \tilde{f}(\boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ において $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ の場合を考えれば, $\tilde{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ だから任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\|\tilde{f}(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つ. 命題 1.8 から $\|\tilde{f}(\boldsymbol{x}) - \tilde{f}(\boldsymbol{y})\|^2 = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2$ の左辺は $\|\tilde{f}(\boldsymbol{x})\|^2 - 2(\tilde{f}(\boldsymbol{x}), \tilde{f}(\boldsymbol{y})) + \|\tilde{f}(\boldsymbol{y})\|^2$ に等しく, 右辺は $\|\boldsymbol{x}\|^2 - 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2$ に等しいため $(\tilde{f}(\boldsymbol{x}), \tilde{f}(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が得られる. 故に $\tilde{f}$ は内積を保ち $f = T_{f(\boldsymbol{0})} \circ \tilde{f}$ だから主張が成り立つ. □

課題その１

以下の各問題の数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{R}^3$ には例 1.6 で定めた標準的な内積が与えられているものとする.

(A) a, b, c, d を実数の定数として, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ に写す $\boldsymbol{R}^2$ の 1 次変換を f とする.

　(1) f が内積を保つ写像であるためには「$a = d$ かつ $b = -c$ かつ $a^2 + b^2 = 1$」または「$a = -d$ かつ $b = c$ かつ $a^2 + b^2 = 1$」のいずれか一方が成り立つことが必要十分であることを示せ.

　(2) f が角度を保つ写像であるためには「$a = d$ かつ $b = -c$ かつ $(a, b) \neq (0, 0)$」または「$a = -d$ かつ $b = c$ かつ $(a, b) \neq (0, 0)$」のいずれか一方が成り立つことが必要十分であることを示せ.

(B) $\boldsymbol{R}^2$ において $\triangle$ABC の頂点 B を通り AC に垂直な直線と直線 AC の交点を P, 頂点 C を通り AB に垂直な直線と直線 AB の交点を Q とし, BP と CQ との交点を H とする. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ およびこれらの内積を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を表し, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は直交することを示せ.

(C) A, B, C, D を同一平面上にない $\boldsymbol{R}^3$ の点とする. B, C, D を通る平面を G として A, C, D を通る平面を H とする. このとき, 次の 3 つの条件は同値であることを示せ.

　(i) $\big(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}\big) = 0$

　(ii) $\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BD}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BC}^2$

　(iii) A を通り G に垂直な直線と B を通り H に垂直な直線が交わる.

(D) A, B, C, D を同一平面上にない $\boldsymbol{R}^3$ の点とする. 四面体 ABCD の内部の点 P で $\angle\mathrm{PAB} = \angle\mathrm{PAC} = \angle\mathrm{PAD}$ かつ $\angle\mathrm{PBA} = \angle\mathrm{PBC} = \angle\mathrm{PBD}$ を満たすものが存在するためには $\mathrm{AC} + \mathrm{BD} = \mathrm{AD} + \mathrm{BC}$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

(E) 「中線定理」や「余弦定理」のように, ベクトルの長さや内積を用いることによって記述されるユークリッド幾何学 (初等幾何学) の定理で, 「中線定理」と「余弦定理」以外の例を述べて, ベクトルを用いた証明を与えよ.

2　距離と極限と位相

高校では,「関数の極限」や「数列の収束」を定義する際に「限りなく近づく」という直観に訴える表現を用いていたが, これは数学的に厳密な定義ではない. 本節では, 集合が与えられたとき, 2 つの要素に対してその間の距離を対応させる「距離関数」と呼ばれる関数を導入することによって, 極限や収束の概念が定義されることを示す.

定義 2.1　X を集合とする. 関数 $d : X \times X \to \boldsymbol{R}$ が次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすとき, d を X の距離関数という. 距離関数 d が定義された集合 X と距離関数 d の対 (X, d) を距離空間と呼ぶ.
(i) 任意の $x, y \in X$ に対し $d(x, y) \geqq 0$ であり, $d(x, y) = 0$ は $x = y$ と同値である.
(ii) 任意の $x, y \in X$ に対し, $d(y, x) = d(x, y)$ が成り立つ.
(iii) 任意の $x, y, z \in X$ に対し, $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式) が成り立つ.

例 2.2　V を $\boldsymbol{R}$ 上の計量ベクトル空間とする. 定義 1.12 の (2) で定義した $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in V \times V$ を $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ に対応させる関数 $d : V \times V \to \boldsymbol{R}$ は V の距離関数であることが以下のように確かめられる. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})} \geqq 0$, $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{0}\| = 0$ であり, $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ ならば $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = 0$ だから内積の定義 1.4 の (iv) から $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ すなわち $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ が成り立ち, 条件 (i) が満たされる. $d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| = \|(-1)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\| = |-1|\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ より条件 (ii) が満たされる. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ に対して定理 1.11 の三角不等式から $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\| = \|(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z})\| \leqq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\| = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が得られるため, 条件 (iii) も満たされる.

ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ には例 1.6 で定めた内積を用いて上のように定義される距離関数 d を与える.

距離空間において, 点列の収束は次のように定義される.

定義 2.3　(X, d) を距離空間, $p \in X$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の点列とする. 任意の正の実数 ε に対し, 自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $d(a_n, p) < \varepsilon$」を満たすものが存在するとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は p に収束するといい, このことを $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = p$ で表す.

注意 2.4　(1) 定義 2.3 をさらに言い換えると, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $p \in X$ に収束するということは, 任意の正の実数 ε に対して, $d(a_n, p) \geqq \varepsilon$ であるような自然数 n は有限個しかないということである. 従って, X の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $p \in X$ に収束しないということは, 正の実数 ε_0 で, 条件「$d(a_n, p) \geqq \varepsilon_0$ である自然数 n が無限に存在する.」を満たすものが存在することである.

(2) X の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し, 実数列 $\{d(a_n, p)\}_{n=1}^{\infty}$ を考えると, この数列は常に 0 以上の値をとり, 定義 2.3 から, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が p に収束するためには $\{d(a_n, p)\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束することが必要十分である.

定義 2.3 を使えば「はさみうちの原理」と呼ばれる次の命題が厳密に証明できる.

命題 2.5　$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ をともに収束する実数列とする. 実数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ がすべての自然数 n に対して $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ を満たし, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ である.

証明　任意の正の実数 ε に対し, 自然数 N_1, N_2 で「$n \geqq N_1$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$」,「$n \geqq N_2$ ならば $|b_n - \alpha| < \varepsilon$」を満たすものがある. 仮定からすべての自然数 n に対して $-|a_n - \alpha| \leqq a_n - \alpha \leqq c_n - \alpha \leqq b_n - \alpha \leqq |b_n - \alpha|$ が成り立つため, N_1, N_1 の大きい方を N とすると, $n \geqq N$ ならば $|c_n - \alpha| < \varepsilon$ である. 従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ である. □

距離空間の間の写像の極限は次のように定義される.

定義 2.6　(X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, f を X の部分集合 Z から Y の部分集合 W への写像, $p \in X$, $q \in Y$ とする. 任意の正の実数 ε に対し, 正の実数 δ で, 条件「$x \in Z$ かつ $0 < d_X(x, p) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), q) < \varepsilon$」を満たすものが存在するとき, 写像 f の p における極限は q であるといい, これを $\displaystyle\lim_{x\to p} f(x) = q$ で表す.

上の写像の極限の定義は, 点列の極限を用いて次のように言い換えることができる.

命題 2.7 (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, f を X の部分集合 Z から Y の部分集合 W への写像とし, $p \in X$, $q \in Y$ とする．このとき, $\lim_{x \to p} f(x) = q$ であることは, 条件「すべての自然数 n に対して $x_n \in Z$, $x_n \neq p$ かつ $\lim_{n \to \infty} x_n = p$」を満たす X の任意の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = q$ が成り立つことと同値である.

証明 f の p における極限が q であることを仮定し, X の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, 条件

$$\text{「すべての } n \in \boldsymbol{N} \text{ に対して } x_n \in Z,\, x_n \neq p \text{ かつ } \lim_{n \to \infty} x_n = p\text{」} \cdots (i)$$

を満たすとする．f についての仮定から, 任意の正の実数 ε に対して, 正の実数 δ で, 条件

$$\text{「} x \in Z \text{ かつ } 0 < d_X(x, p) < \delta \text{ ならば } d_Y(f(x), q) < \varepsilon \text{」} \cdots (ii)$$

を満たすものが存在する．また $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ についての仮定 (i) から, 上の δ に対し, 自然数 N で, 条件

$$\text{「} k \geqq N \text{ ならば } x_n \in Z,\, x_n \neq p \text{ かつ } d_X(x_n, p) < \delta \text{」}$$

を満たすものが存在する．従って $k \geqq N$ ならば, $x = x_n$ としたときに条件 (ii) の仮定が満たされて

$$\text{「} k \geqq N \text{ ならば } d_Y(f(x_n), q) < \varepsilon \text{」}$$

が成り立つため, $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = q$ である.

上で示した主張の逆の主張を示すために, 逆の主張の対偶である『f の p における極限が q でないならば, 条件「すべての $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_n \in Z$, $x_n \neq p$ かつ $\lim_{n \to \infty} x_n = p$」を満たす X の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = q$ が成り立たないものが存在する.』を示す.

f の p における極限が q でないとき, ある正の実数 ε_0 で, 次の条件を満たすものがある.

「任意の正の実数 δ に対して $f(x) \notin B_{d_Y}(q\,;\varepsilon_0)$ を満たす p と異なる $x \in B_{d_X}(p\,;\delta) \cap Z$ が存在する.」

従って, 任意の自然数 k に対して $f(x_n) \notin B_{d_Y}(q\,;\varepsilon_0)$ である p と異なる $x_n \in B_{d_X}\left(p\,;\frac{1}{k}\right) \cap Z$ が存在する．そこで X の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考えると, すべての $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $x_n \in Z$, $x_n \neq p$ であり, $0 < d_X(x_n, p) < \frac{1}{n}$ だから $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ (課題その 2 の問題 D) と命題 2.5 から, $\lim_{n \to \infty} d_X(x_n, p) = 0$ である．従って, 注意 2.4 の (2) により $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は p に収束する．ところが, 任意の自然数 k に対して $f(x_n) \notin B_{d_Y}(q\,;\varepsilon_0)$ だから, 注意 2.4 の (1) によって $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = q$ は成り立たないため, 上の主張が示された. □

集合 X に 2 つの距離関数 d, d' が与えられたとき, d と d' が異なる関数であっても, 例えば正の実数 k が存在して $d'(x, y) = kd(x, y)$ がすべての $x, y \in X$ に対して成り立つ場合のように, X 点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が距離関数 d のもとで収束することと, 距離関数 d' のもとで収束することが同値になることがある．これは, 点列の収束が距離関数そのものに直接依存するのではなく, 距離関数から定まる X の何らかの「構造」に依存することを示唆している．そこで, 以下の定義を行う.

定義 2.8 (X, d) を距離空間とし Y を X の部分集合とする.

(1) $p \in X$, $r > 0$ に対して $d(x, p) < r$ を満たす X の点 x 全体からなる集合とを中心 p, 半径 r の開球といい $B_d(p\,;r)$ で表す.

(2) Y の点 p に対し, $B_d(p\,;r) \subset Y$ を満たす $r > 0$ が存在するとき, p を Y の内点という.

(3) Y のすべての点が Y の内点であるとき, Y を (X, d) の開集合という.

(4) X の点 p に対し, X の部分集合 U で, p が U の内点になっているようなものを, p の近傍という．とくに, p を含む (X, d) の開集合を p の開近傍という.

注意 2.9 開球は開集合である． 実際, 任意の $q \in B_d(p\,;r)$ に対し,$d(q, p) < r$ だから, $r - d(q, p) > 0$ であり, $x \in B_d(q\,;r - d(q, p))$ ならば $d(x, q) < r - d(q, p)$ が成り立つため, 距離関数の定義の (iii) から $d(x, p) \leqq d(x, q) + d(q, p) < r$ である．従って $x \in B_d(p\,;r)$ が成り立ち, $B_d(q\,;r - d(q, p))$ は $B_d(p\,;r)$ に含まれるため, q は $B_d(p\,;r)$ の内点である．故に $B_d(p\,;r)$ のすべての点は $B_d(p\,;r)$ の内点だから $B_d(p\,;r)$ は開集合である.

開集合を用いれば, 定義 2.3 は以下のように言い換えられる.

定義 2.10 (X, d) を距離空間, $p \in X$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の点列とする．p を含む任意の開集合 U に対し, 自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $a_n \in U$」を満たすものが存在するとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は p に収束するといい, このことを $\lim_{n \to \infty} a_n = p$ で表す.

実際, p を中心とする開球は p を含む開集合で, $a_n \in B_d(p\,;\varepsilon)$ であることと $d(a_n, p) < \varepsilon$ であることは同値だから, 定義 2.10 の意味で点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が p に収束していれば, 定義 2.3 の意味でも点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は p に収束している. 逆に, 定義 2.3 の意味で点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が p に収束しているとする. p を含む任意の開集合 U に対し, p は U の内点であることから $B_d(p\,;\varepsilon) \subset U$ を満たす正の数 ε がある. 仮定から自然数 N で, 条件「$n \geqq N$ ならば $d(a_n, p) < \varepsilon$ すなわち $a_n \in B_d(p\,;\varepsilon)$」を満たすものが存在し, $B_d(p\,;\varepsilon) \subset U$ だから「$n \geqq N$ ならば $a_n \in U$」が成り立つ. 故に定義 2.10 の意味でも点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は p に収束するため, 定義 2.3 と定義 2.10 は同値な定義である.

また, 定義 2.6 は開集合を用いて以下のように言い換えられる.

定義 2.11 (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, f を X の部分集合 Z から Y の部分集合 W への写像, $p \in X$, $q \in Y$ とする. q を含む Y の任意の開集合 V に対し, p を含む X の開集合 U で, 条件「$x \in Z \cap U$ かつ $x \neq p$ ならば $f(x) \in V$」を満たすものが存在するとき, f の p における極限は q であるといい, これを $\lim\limits_{x \to p} f(x) = q$ で表す.

定義 2.11 の意味で写像 f の p における極限が q であるとき, 任意の正の実数 ε に対し, $B_{d_Y}(q\,;\varepsilon)$ は q を含む Y の開集合だから p を含む X の開集合 U で, 条件「$x \in Z \cap U$ かつ $x \neq p$ ならば $f(x) \in B_{d_Y}(q\,;\varepsilon)$」を満たすものが存在する. このとき p は U の内点であることから $B_d(p\,;\delta) \subset U$ を満たす正の実数 δ がある. 従って δ は条件「$x \in Z \cap B_{d_X}(p\,;\delta)$ かつ $x \neq p$ ならば $f(x) \in B_{d_Y}(q\,;\varepsilon)$」を満たし, $x \in Z \cap B_{d_X}(p\,;\delta)$ かつ $x \neq p$ であることと $x \in Z$ かつ $0 < d_X(x, p) < \delta$ であることは同値であり, $f(x) \in B_{d_Y}(q\,;\varepsilon)$ は $d_Y(f(x), q) < \varepsilon$ と同値だから, 定義 2.6 の意味でも写像 f の p における極限は q である. 逆に定義 2.6 の意味で写像 f の p における極限が q であるとする. q を含む Y の任意の開集合 V に対し, q は V の内点であることから $B_{d_Y}(q\,;\varepsilon) \subset V$ を満たす正の実数 ε がある. 従って仮定から, 正の実数 δ で条件「$x \in Z$ かつ $0 < d_X(x, p) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), q) < \varepsilon$」すなわち, 「$x \in Z \cap B_{d_X}(p\,;\delta)$ かつ $x \neq p$ ならば $f(x) \in B_{d_Y}(q\,;\varepsilon)$」を満たすものが存在する. $B_{d_X}(p\,;\delta)$ は p を含む開集合で, $B_{d_Y}(q\,;\varepsilon)$ は V に含まれるため, 定義 2.11 の意味でも写像 f の p における極限は q である. 以上から, 定義 2.6 と定義 2.11 は同値な定義である.

上でみたように定義 2.10 と定義 2.11 によって, 距離空間における点列の収束と, 写像の極限を定義することができるが, これらの定義では始めに与えた定義とは異なり, 距離関数の存在が完全に隠蔽されていて, 点列の収束や写像の極限は距離関数そのものより, 距離関数から定まる「開集合」と呼ばれる X の部分集合の集まりに依存していることがわかる.

そこで, 距離空間 (X, d) の開集合全体からなる集合を $\mathcal{O}_d$ で表す. 開集合は X の部分集合だから, それらの集まりである $\mathcal{O}_d$ は X の部分集合全体からなる集合の部分集合である. また $p \in X$ に対し, p に収束する X の点列全体からなる集合を $\mathrm{Seq}_p(X, d)$ で表すことにすれば X に 2 種類の距離関数 d, d' が与えられたとき, 次の定理が成り立つ.

定理 2.12 すべての $p \in X$ に対して $\mathrm{Seq}_p(X, d) \subset \mathrm{Seq}_p(X, d')$ であることと $\mathcal{O}_d \supset \mathcal{O}_{d'}$ であることは同値である. 従って, すべての $p \in X$ に対して $\mathrm{Seq}_p(X, d) = \mathrm{Seq}_p(X, d')$ であることと $\mathcal{O}_d = \mathcal{O}_{d'}$ であることは同値である.

証明 定義 2.10 から, $\mathcal{O}_d \supset \mathcal{O}_{d'}$ ならば, すべての $p \in X$ に対して $\mathrm{Seq}_p(X, d) \subset \mathrm{Seq}_p(X, d')$ であることがわかる. 逆に, すべての $p \in X$ に対して $\mathrm{Seq}_p(X, d) \subset \mathrm{Seq}_p(X, d')$ であるとして, $\mathcal{O}_d$ に属さない $\mathcal{O}_{d'}$ の要素 O が存在すると仮定すれば, $p \in O$ で, 距離関数 d に関して O の内点でないものが存在する. 従って, 任意の自然数 n に対して $B_d\big(p\,;\frac{1}{n}\big) \not\subset O$ が成り立つため, $a_n \in B_d\big(p\,;\frac{1}{n}\big)$ で, O に属さないものが存在する. このとき X の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は距離関数 d に関して p に収束するため, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{Seq}_p(X, d)$ だから, 仮定によって $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathrm{Seq}_p(X, d')$ でもある. 一方, $p \in O$ かつ $O \in \mathcal{O}_{d'}$ だから $B_{d'}(p\,;\varepsilon) \subset O$ を満たす $\varepsilon > 0$ が存在し, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は距離関数 d' に関して p に収束することから, $a_N \in B_{d'}(p\,;\varepsilon)$ となる自然数 N が存在する. ところが, すべての自然数 n に対して a_n は O に属さないため, $B_{d'}(p\,;\varepsilon) \subset O$ であることと矛盾が生じる. 故に $\mathcal{O}_d$ に属さない $\mathcal{O}_{d'}$ の要素は存在しない. すなわち $\mathcal{O}_d \supset \mathcal{O}_{d'}$ である. □

上の結果から, 距離空間 (X, d) の点列が収束するかどうかは, 距離関数 d から定まる開集合全体からなる集合 $\mathcal{O}_d$ にかかっている. この集合 $\mathcal{O}_d$ を「距離関数 d から定まる X の位相」という.

課題その２

(A) 関数 $d : \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ を $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ (ただし $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ の第 i 成分をそれぞれ x_i, y_i とする) で定めれば d は $\boldsymbol{R}^n$ の距離関数であることを示せ.

(B) $C[a,b]$ を $a \leqq x \leqq b$ を満たす実数 x 全体で定義された連続関数全体からなる集合とする. $f, g \in C[a,b]$ に対して, x を $|f(x) - g(x)|$ に対応させる関数を考えると, この関数は連続関数だから最大値・最小値の定理によって最大値が存在する. この最大値を $d(f,g)$ で表し, $(f,g) \in C[a,b] \times C[a,b]$ を実数 $d(f,g)$ に対応させる関数を $d : C[a,b] \times C[a,b] \to \boldsymbol{R}$ とすれば, d は $C[a,b]$ の距離関数であることを示せ.

(C) V を $\boldsymbol{R}$ 上の計量ベクトル空間とし, $r > 0$ に対して $\|\boldsymbol{x}\| = r$ を満たす V のベクトル全体からなる V の部分集合を $S(V;r)$ とする. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S(V;r)$ に対して, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角を $\theta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ とするとき, 関数 $d : S(V;r) \times S(V;r) \to \boldsymbol{R}$ を $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = r\theta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ で定義すれば, d は $S(V;r)$ の距離関数であることを示せ.

(D) 実数 x, y に対し $d(x,y) = |x - y|$ で定義される実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ の距離関数 d を考える. このとき距離空間 $(\boldsymbol{R}, d)$ において数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束することを点列の収束の定義 2.3 に従って証明せよ.

3　空間のつながり方とその測り方

頂点や辺, 面のつながり方を指定するデータとして「頂点の集合」と「頂点の集合の部分集合の集まり」を与えることによって, 多面体の概念を一般化する「単体的複体」の概念を以下のように定義する.

定義 3.1　V を集合とする. V の空集合ではない有限部分集合からなる集合 Σ が次の条件を満たすとき, V と Σ の対 (V,Σ) を単体的複体という. このとき, V の要素を頂点, Σ の要素を単体という.

(i) $v\in V$ ならば $\{v\}\in\Sigma$ である.　　(ii) $\sigma\in\Sigma$ かつ $\tau\subset\sigma$ ならば $\tau\in\Sigma$ である.

定義 3.2　$K=(V,\Sigma)$ を単体的複体とする.

(1) K の単体 $\sigma\in\Sigma$ の要素の数が $n+1$ であるとき, σ を n 次元単体といい, n を $\dim\sigma$ で表す.

(2) K の単体の中で次元が最大であるものが存在して, その値が n であるとき, K を n 次元単体的複体という.

定義 3.3　単体的複体 $K=(V,\Sigma)$ に対し, V から閉区間 $[0,1]$ への関数 p で条件

(i) $p(v)\neq 0$ である頂点 $v\in V$ 全体からなる集合は Σ に属する.　　(ii) $\sum\limits_{v\in V}p(v)=1$

を満たすもの全体からなる集合を $|K|$ とおく. $d:|K|\times|K|\to\boldsymbol{R}$ を $p,q\in|K|$ に対し, $d(p,q)=\sqrt{\sum\limits_{v\in V}(p(v)-q(v))^2}$ で定めれば d は $|K|$ の距離関数である. 距離空間 $(|K|,d)$ を K の幾何学的実現という.

例 3.4　(1) 0 以上の整数 n に対し, $[n]$ を 0 以上 n 以下の整数からなる集合 $\{0,1,2,\dots,n\}$ とし, $\Sigma(n)$ を空集合でない $[n]$ の部分集合全体からなる集合とするとき, 単体的複体 $([n],\Sigma(n))$ を標準的 n 単体といい, Δ_n で表す. Δ_n は n 次元単体的複体で, $|\Delta_n|$ は $[n]$ から $[0,1]$ への関数全体からなる集合である. j 番目の成分が 1 で他の成分は 0 である $\boldsymbol{R}^{n+1}$ のベクトルを $\boldsymbol{e}_i$ として写像 $\varphi:|\Delta_n|\to\boldsymbol{R}^{n+1}$ を $\varphi(p)=\sum\limits_{i=0}^{n}p(i)\boldsymbol{e}_{i+1}$ で定めれば, φ は距離を保つ写像で, 成分がすべて 0 以上で, すべての成分の和が 1 であるような $\boldsymbol{R}^{n+1}$ のベクトル全体からなる集合を T_n とすれば, φ の像は T_n に一致する. 従って,「図形」として $|\Delta_n|$ と T_n は同一視される. とくに, $|\Delta_0|$ は 1 つの点, $|\Delta_1|$ は線分, $|\Delta_2|$ は正三角形, $|\Delta_3|$ は正四面体とみなされる.

(2) Δ_n の $n-1$ 次元以下の単体全体からなる $\Sigma(n)$ の部分集合は $\Sigma(n)-\{[n]\}$ であり, $([n],\Sigma(n)-\{[n]\})$ は単体的複体で, これを $\partial\Delta_n$ で表す. $\partial\Delta_n$ は $n-1$ 次元単体的複体であり, $|\partial\Delta_n|$ は $|\Delta_n|$ の要素 p で, 少なくとも一つの $i\in[n]$ に対して $p(i)=0$ となるもの全体からなる $|\Delta_n|$ の部分集合である. T_n の点で, 少なくとも一つの成分が 0 であるもの全体からなる T_n の部分集合を ∂T_n で表せば, ∂T_n は T_n の「表面」である. $\partial\varphi:|\partial\Delta_n|\to\boldsymbol{R}^{n+1}$ を $\partial\varphi(p)=\sum\limits_{i=0}^{n}p(i)\boldsymbol{e}_{i+1}$ で定めれば, $\partial\varphi$ は距離を保つ写像で, $\partial\varphi$ の像は ∂T_n である. 従って,「図形」として $|\partial\Delta_n|$ と ∂T_n は同一視される. とくに, $|\partial\Delta_1|$ は線分の両端, $|\partial\Delta_2|$ は正三角形の周囲, $|\partial\Delta_3|$ は正四面体の表面とみなされる.

例 3.5　下の図 1 の長方形の上下の辺と左右の辺をそれぞれ矢印が重なるように貼り合わせれば, ドーナツ面 (2 次元トーラス) ができる. この長方形を図 2 のように三角形からなる面に分割して, 各頂点に 0 から 8 の番号を付ける.

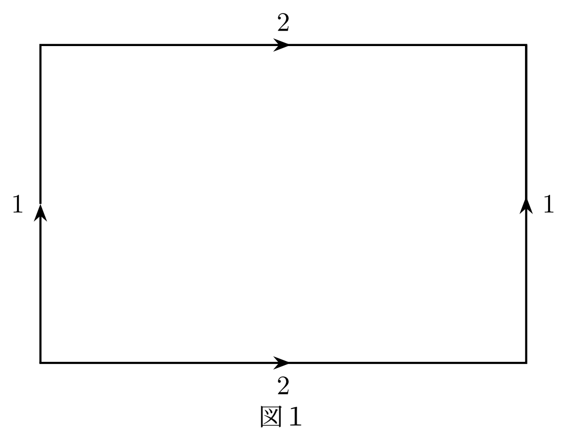

図 1

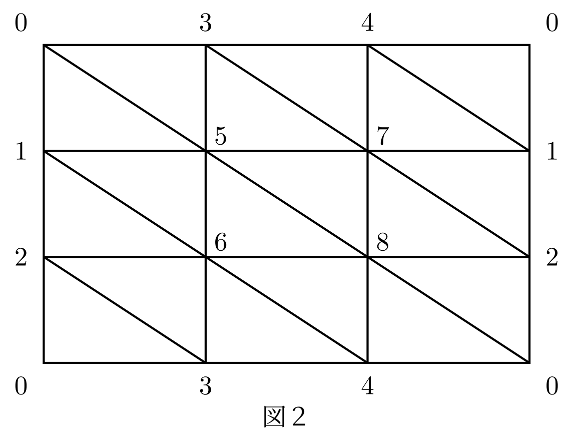

図 2

次に頂点の集合 $[8]=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ の部分集合を要素とする集合 Σ_T^0, Σ_T^1, Σ_T^2 を以下のように定める.

$$
\begin{aligned}
\Sigma_T^0 &= \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\},\{8\}\}\\
\Sigma_T^1 &= \{\{0,1\},\{1,2\},\{0,2\},\{0,3\},\{0,5\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,6\},\{2,3\},\{3,5\},\{5,6\},\{3,6\},\{3,4\},\{3,7\},\\
&\qquad \{5,7\},\{5,8\},\{6,8\},\{4,6\},\{4,7\},\{7,8\},\{4,8\},\{0,4\},\{1,4\},\{1,7\},\{2,7\},\{2,8\},\{0,8\}\}\\
\Sigma_T^2 &= \{\{0,3,5\},\{0,1,5\},\{1,5,6\},\{1,2,6\},\{2,3,6\},\{0,2,3\},\{3,4,7\},\{3,5,7\},\{5,7,8\},\\
&\qquad \{5,6,8\},\{4,6,8\},\{3,4,6\},\{0,1,4\},\{1,4,7\},\{1,2,7\},\{2,7,8\},\{0,2,8\},\{0,4,8\}\}
\end{aligned}
$$

このとき $T^2=([8],\Sigma_T^0\cup\Sigma_T^1\cup\Sigma_T^2)$ とおけば, T^2 はドーナツ面を表す単体的複体である.

例 3.6　下の図 3 の長方形の辺の点を対角線の交点に関して対称な点と貼りあわせてできる図形を射影平面と呼ぶ. この長方形を図 4 のように三角形からなる面に分割して, 各頂点に 0 から 9 の番号を付ける.

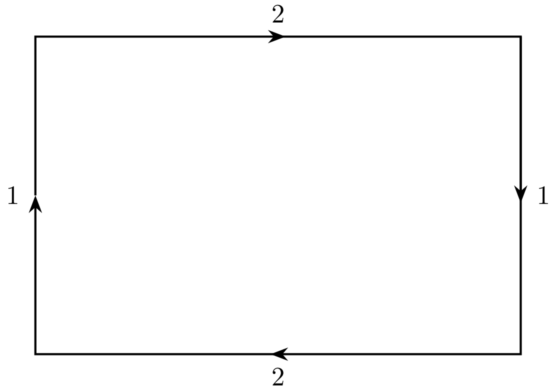

図 3

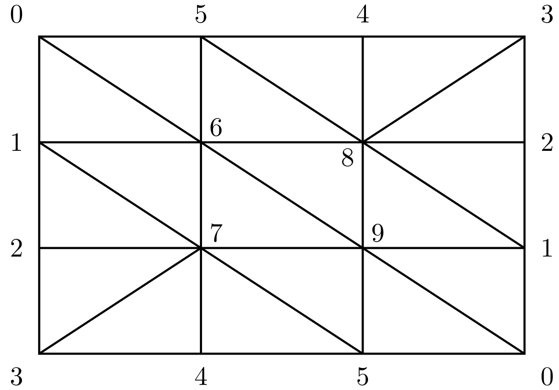

図 4

次に頂点の集合 $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ の部分集合を要素とする集合 Σ_P^0, Σ_P^1, Σ_P^2 を以下のように定める.

$$
\begin{aligned}
\Sigma_P^0 =& \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\},\{8\},\{9\}\}\\
\Sigma_P^1 =& \{\{0,1\},\{1,2\},\{2,3\},\{0,5\},\{0,6\},\{1,6\},\{1,7\},\{2,7\},\{3,7\},\{3,4\},\{5,6\},\{6,7\},\{4,7\},\{4,5\},\\
&\qquad \{5,8\},\{6,8\},\{6,9\},\{7,9\},\{5,7\},\{4,8\},\{8,9\},\{5,9\},\{3,8\},\{2,8\},\{1,8\},\{1,9\},\{0,9\}\}\\
\Sigma_P^2 =& \{\{0,5,6\},\{0,1,6\},\{1,6,7\},\{1,2,7\},\{2,3,7\},\{3,4,7\},\{4,5,8\},\{5,6,8\},\{6,8,9\},\\
&\qquad \{6,7,9\},\{5,7,9\},\{4,5,7\},\{3,4,8\},\{2,3,8\},\{1,2,8\},\{1,8,9\},\{0,1,9\},\{0,5,9\}\}
\end{aligned}
$$

このとき $P^2=([9],\Sigma_P^0\cup\Sigma_P^1\cup\Sigma_P^2)$ とおけば, P^2 は射影平面を表す単体的複体である.

例 3.7　下の図 5 の長方形の上下の辺はそのまま同じ向きに貼りあわせ, 左右の辺の点は対角線の交点に関して対称な点と貼りあわせてできる図形をクラインの壷と呼ぶ. この長方形を図 6 のように三角形からなる面に分割して, 各頂点に 0 から 8 の番号を付ける.

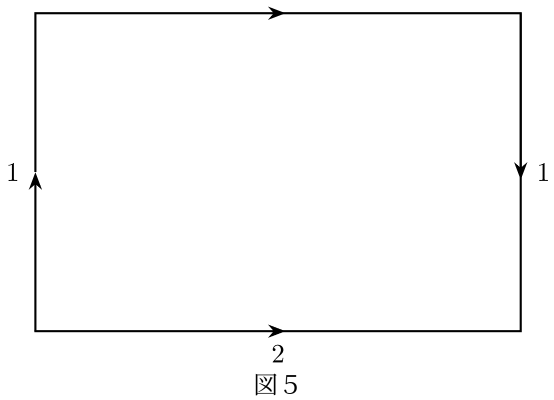

図 5

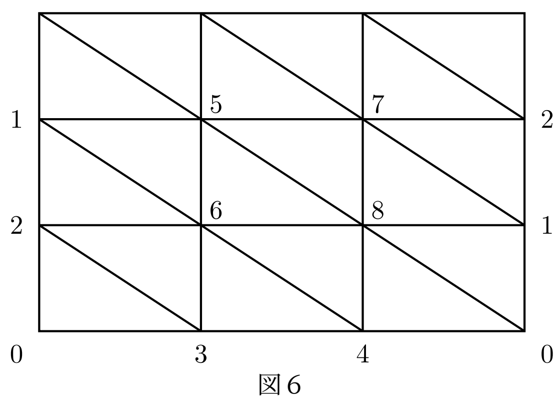

図 6

次に頂点の集合 $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ の部分集合を要素とする集合 Σ_K^0, Σ_K^1, Σ_K^2 を以下のように定める.

$$\begin{aligned}
\Sigma_K^0 &= \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\},\{8\}\}\\
\Sigma_K^1 &= \{\{0,1\},\{1,2\},\{0,2\},\{0,3\},\{0,5\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,6\},\{2,3\},\{3,5\},\{5,6\},\{3,6\},\{3,4\},\{3,7\},\\
&\qquad \{5,7\},\{5,8\},\{6,8\},\{4,6\},\{4,7\},\{7,8\},\{4,8\},\{0,4\},\{2,4\},\{2,7\},\{1,7\},\{1,8\},\{0,8\}\}\\
\Sigma_K^2 &= \{\{0,3,5\},\{0,1,5\},\{1,5,6\},\{1,2,6\},\{2,3,6\},\{0,2,3\},\{3,4,7\},\{3,5,7\},\{5,7,8\},\\
&\qquad \{5,6,8\},\{4,6,8\},\{3,4,6\},\{0,2,4\},\{2,4,7\},\{1,2,7\},\{1,7,8\},\{0,1,8\},\{0,4,8\}\}
\end{aligned}$$

このとき $K^2 = ([9], \Sigma_K^0 \cup \Sigma_K^1 \cup \Sigma_K^2)$ とおけば, K^2 はクラインの壷を表す単体的複体である. クラインの壷はメビウスの帯を 2 つ貼りあわせて得られる曲面でもある. 実際, 図 7 の長方形を 3 の線分で切り離し, B の部分を真下に平行移動して 2 の線分どうしを図 8 のように張りあわせれば, A の部分と, B と C を合わせた部分が, それぞれメビウスの帯になる. ただし, 射影平面とクラインの壷は 3 次元空間の中では作れないことが知られている.

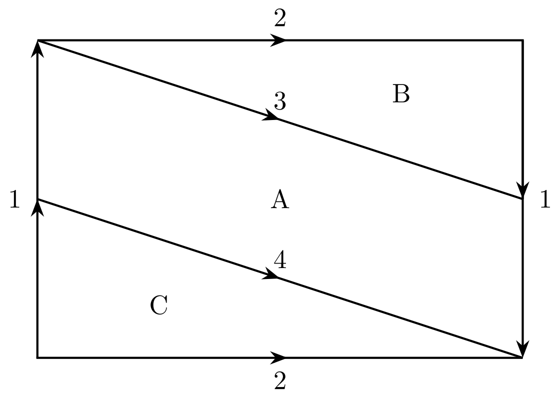

図 7

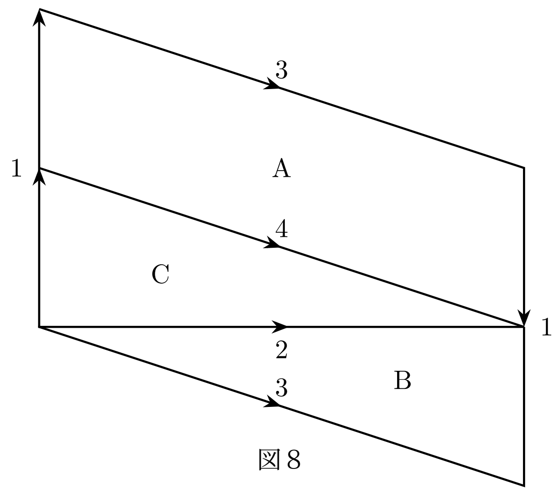

図 8

頂点の数が有限個である単体的複体を有限単体的複体という.

定義 3.8 $K = (V, \Sigma)$ を n 次元有限単体的複体とする. K の i 次元単体の個数を N_i とすると, $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i N_i$ を K のオイラー数といい, $\chi(K)$ で表す.

例 3.9 二つ以上の離れた部分に分かれていない漢字のオイラー数は以下のようになる.

	一	十	大	千	万	口	曰	年	日	百	月	目	自	田	面	黽	畱	婁	畢	亀
頂点の数	2	5	6	7	8	4	6	13	6	10	9	8	10	9	15	23	23	26	23	25
辺の数	1	4	5	6	7	4	6	13	7	11	10	10	12	12	19	28	29	32	30	33
オイラー数	1	1	1	1	1	0	0	0	-1	-1	-1	-2	-2	-3	-4	-5	-6	-6	-7	-8

例 3.10 (1) 標準的 n 単体の i 次元単体の個数は, $n+1$ 個の要素をもつ集合 $[n]$ の $i+1$ 個の要素からなる部分集合の個数だから ${}_{n+1}\mathrm{C}_{i+1}$ 個である. 従って $\chi(\Delta_n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i {}_{n+1}\mathrm{C}_{i+1}$ である. 二項定理 $(1+x)^{n+1} = 1 + \sum_{i=0}^{n} {}_{n+1}\mathrm{C}_{i+1} x^{i+1}$ において $x = -1$ を代入すれば $1 - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i {}_{n+1}\mathrm{C}_{i+1} = 0$ が得られるため, $\chi(\Delta_n) = 1$ であることがわかる.

(2) $\partial\Delta_n$ は Δ_n から n 次元単体 $[n]$ のみを除いて得られる単体的複体だから $\chi(\partial\Delta_n) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i {}_{n+1}\mathrm{C}_{i+1} = \chi(\Delta_n) - (-1)^n {}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1} = 1 - (-1)^n$ である.

例 3.11 T^2 と K^2 の頂点は 9 個, 1 次元単体は 27 個, 2 次元単体は 18 個だから, $\chi(T^2) = \chi(K^2) = 9 - 27 + 18 = 0$ である. 一方 P^2 の頂点は 10 個, 1 次元単体は 27 個, 2 次元単体は 18 個だから, $\chi(P^2) = 10 - 27 + 18 = 1$ である.

集合 X, Y に対して, $(X \cup Y) \times \{0,1\}$ の部分集合 $X \times \{0\}$ と $Y \times \{1\}$ の合併集合を $X \coprod Y$ で表す. このとき, $x \in X$ を $(x, 0)$ と同一視し, $y \in Y$ を $(y, 1)$ と同一視することにより, X と Y を $X \coprod Y$ の部分集合とみなす.

定義 3.12 $K=(V,\Sigma)$, $L=(W,T)$ を n 次元単体的複体, $\alpha=\{a_0,a_1,\dots,a_n\}$, $\beta=\{b_0,b_1,\dots,b_n\}$ をそれぞれ K, L の n 次元単体 とする．各 $i=0,1,\dots,n$ に対し, $V\coprod W$ の要素 a_i と b_i を同一視して得られる集合を $V\# W$ で表し, V, W を $V\# W$ の部分集合とみなす．また, $\Sigma\coprod T$ から α と β を取り除き, 要素の個数が n 個以下である α の部分集合 $\{a_{i_0},a_{i_1},\dots,a_{i_k}\}$ と β の部分集合 $\{b_{i_0},b_{i_1},\dots,b_{i_k}\}$ を同一視して得られる集合を $\Sigma\# T$ で表し, $\Sigma-\{\alpha\}$, $T-\{\beta\}$ を $\Sigma\# T$ の部分集合とみなす．このとき, $(V\# W,\Sigma\# T)$ は単体的複体であり, これを K と L の結合和と呼んで, $K\# L$ で表す．

例 3.13 (1) $\partial\Delta_2=(\{0,1,2\},\{\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}\})$ だから, $\partial\Delta_2$ から 1 次元単体 $\{1,2\}$ を取り除いて得られる結合和 $\partial\Delta_2\#\partial\Delta_2$ の頂点の集合は $\{(0,0),(1,0),(2,0),(0,1)\}$ ($(1,0)=(1,1)$, $(2,0)=(2,1)$) であり, 1 次元単体の集合は $\{\{(0,0),(1,0)\},\{(0,0),(2,0)\},\{(0,1),(1,0)\},\{(0,1),(2,0)\}\}$ となるため, $\partial\Delta_2\#\partial\Delta_2$ は四角形を表すことがわかる．

(2) 2 次元単体的複体 K に対して $K\#T^2$ は K に「取っ手」を取り付けた形になっている．

単体的複体の連結和のオイラー数については, 次の公式が成り立つ．

定理 3.14 n 次元有限単体的複体 K, L に対して等式 $\chi(K\#L)=\chi(K)+\chi(L)-(-1)^n-1$ が成り立つ．

証明 K, L の i 次元単体の個数をそれぞれ k_i, l_i とする．$0\leqq i\leqq n-1$ の場合, L の i 次元単体と同一視される K の i 次元単体の個数は $n+1$ 個の要素をもつ集合の $i+1$ 個の要素からなる部分集合の個数だから ${}_{n+1}\mathrm{C}_{i+1}$ 個である．従って, $K\#L$ の i 次元単体の個数は $k_i+l_i-{}_{n+1}\mathrm{C}_{i+1}$ である．また, $K\#L$ の n 次元単体の個数は k_n+l_n-2 である．故に例 3.10 の (1) で得た $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n+1}{i+1}=1$ を用いれば

$$\begin{aligned}\chi(K\#L)&=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\,(k_i+l_i-{}_{n+1}\mathrm{C}_{i+1})+(-1)^n(k_n+l_n-2)\\&=\sum_{i=0}^{n}(-1)^ik_i+\sum_{i=0}^{n}(-1)^il_i-\sum_{i=0}^{n}(-1)^i{}_{n+1}\mathrm{C}_{i+1}-(-1)^n=\chi(K)+\chi(L)-(-1)^n-1\end{aligned}$$

が得られる． □

上の結果と, $\chi(T^2)=0$, $\chi(P^2)=1$ から n による数学的帰納法によって次の結果が得られる．

系 3.15 2 次元有限単体的複体 K に対して $\chi(K\#T^2)=\chi(K)-2$, $\chi(K\#P^2)=\chi(K)-1$ が成り立つ．従って, n 個のドーナツ面の連結和を X_n で表し, n 個の射影平面の連結和を Y_n で表せば, $\chi(X_n)=2-2n$, $\chi(Y_n)=2-n$ が成り立つ．

課題その３

(A) 二つ以上の離れた部分に分かれていない漢字は例 3.9 の表にあるものの他に, 九, 才, 上, 下, 久, 木, 本, 生, 缶, 干, 止, 正, 夭, 矢, 走, 丘, 古, 舌, 右, 中, 凹, 凸, 虫, 克, 早, 東, 且, 免, 東, 里, 由, 甲, 申, 串, 曳, 用, 角, 亜 などがあるが, これらのオイラー数を求めよ．

(B) 二つ以上の離れた部分に分かれていなくて例 3.9 の表に無い漢字で, オイラー数が -4, -5, -6, -7, -8 であるものをできるだけたくさん見つけよ．

(C) 二つ以上の離れた部分に分かれていない漢字で, オイラー数が -9 以下になる漢字はあるか？

(D) Y_2 はクラインの壷になることを示せ．

4　曲った空間と非ユークリッド幾何学

ギリシャ時代の数学者ユーリッド (Euclid, B.C.330〜B.C.275 頃) は『原論』において幾何学を体系的に構築するために, 証明無しに議論の前提とする「公理」と呼ばれる以下の 5 つの命題を与えた.

公理 1. 与えられた 2 点 A, B に対して A と B を結ぶ線分を唯一つ引くことができる.
公理 2. 与えられた線分はどちら側にも限りなく伸ばすことができる.
公理 3. 平面上に 2 点 A, B が与えられたとき, A を中心とし B を通る円を唯一つ描くことができる.
公理 4. 直角はすべて相等しい.
公理 5. 二直線と交わる一つの直線が同じ側につくる内角の和が二直角より小さいならば, 二直線をその側に伸ばせばどこかで交わる.

公理 4 の「直角」とは「一直線上にもう一つの直線が立ってできる隣り合わせの二角が互いに等しいとき, いずれの角をも直角と呼ぶ.」と定義される. 公理 5 が「平行線の公理」と呼ばれるもので, 19 世紀に多くの数学者達が, 公理 1 から公理 4 を用いて証明できるのではないかと考え, その証明のために多大な努力を重ねた.

ところが, 座標平面において y 座標が正である点全体からなる「上半平面」に通常とは異なる距離関数を与えることによって得られる距離空間において, 公理 1〜4 は成り立つが公理 5 が成り立たない「非ユークリッド幾何学」と呼ばれる幾何学が展開される. このことは, 公理 5 が他の 4 つの公理からは証明できないことを意味する.

座標平面上の点 (x, y) に複素数 $x + yi$ を対応させることによって, 座標平面を複素数全体からなる集合 $\boldsymbol{C}$ と同一視する. また, 虚部が正の実数である複素数全体からなる $\boldsymbol{C}$ の部分集合を $\boldsymbol{H}$ で表す. このとき, y 座標が正である座標平面の点全体からなる「上半平面」は $\boldsymbol{H}$ に対応する.

1 より大きな実数 e を選んで $\log_e$ を $\log$ と略記する. 関数 $d_{\boldsymbol{H}} : \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{R}$ を

$$d_{\boldsymbol{H}}(z, w) = \log \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}$$

で定めて, $d_{\boldsymbol{H}}$ が $\boldsymbol{H}$ の距離関数であることを以下で確かめる.

複素数 z の実部を $\mathrm{Re}(z)$, 虚部を $\mathrm{Im}(z)$ で表す.

命題 4.1　$a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$, $z \in \boldsymbol{C}$ に対し, $ad - bc > 0$ かつ $\mathrm{Im}(z) > 0$ ならば $\mathrm{Im}\left(\dfrac{az + b}{cz + d}\right) > 0$ である.

証明　$\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$ であり, $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$ より $\bar{a} = a$, $\bar{b} = b$, $\bar{c} = c$, $\bar{d} = d$ だから次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{az + b}{cz + d} - \frac{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}}\right) = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d) - (a\bar{z} + b)(cz + d)}{2i|cz + d|^2} \\ &= \frac{ac|z|^2 + bc\bar{z} + adz + bd - ac|z|^2 - ad\bar{z} - bcz - bd}{2i|cz + d|^2} = \frac{(ad - bc)(z - \bar{z})}{2i|cz + d|^2} = \frac{(ad - bc)\mathrm{Im}(z)}{|cz + d|^2}\end{aligned}$$

故に $ad - bc > 0$ かつ $\mathrm{Im}(z) > 0$ ならば上式は正の実数になる. □

実数を成分とする 2 次正方行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で, $ad - bc = 1$ を満たすもの全体からなる集合を $SL_2(\boldsymbol{R})$ で表す. このとき, 命題 4.1 から, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\boldsymbol{R})$ と $z \in \boldsymbol{H}$ に対し, $\mathrm{Im}\left(\dfrac{az + b}{cz + d}\right) > 0$ だから 写像 $\tau_A : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ を $\tau_A(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ で定めることができる.

命題 4.2　$A, B \in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対し, $AB, A^{-1} \in SL_2(\boldsymbol{R})$ であり, $\tau_A \circ \tau_B = \tau_{AB}$, $\tau_A^{-1} = \tau_{A^{-1}}$ が成り立つ.

証明　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ ならば $AB = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ より次の等式が成り立つ.

$$(ap + br)(cq + ds) - (aq + bs)(cp + dr) = (ad - bc)(ps - qr) = 1, \quad da - (-b)(-c) = ad - bc = 1$$

$$(\tau_A\circ\tau_B)(z)=\tau_A(\tau_B(z))=\frac{a\tau_B(z)+b}{c\tau_B(z)+d}=\frac{a\frac{pz+q}{rz+s}+b}{c\frac{pz+q}{rz+s}+d}=\frac{(ap+br)z+aq+bs}{(cp+dr)z+cq+ds}=\tau_{AB}(z)$$

従って $AB, A^{-1}\in SL_2(\boldsymbol{R})$ と $\tau_A\circ\tau_B=\tau_{AB}$ が成り立つ．また 2 次単位行列 $E_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ に対し $\tau_{E_2}(z)=z$ だから τ_{E_2} は $\boldsymbol{H}$ の恒等写像である．故に $\tau_{A^{-1}}\circ\tau_A=\tau_{A^{-1}A}=\tau_{E_2}$ と $\tau_A\circ\tau_{A^{-1}}=\tau_{AA^{-1}}=\tau_{E_2}$ は $\boldsymbol{H}$ の恒等写像だから $\tau_{A^{-1}}$ は τ_A の逆写像 τ_A^{-1} に一致する． □

上の命題から $\tau_A:\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}$ は全単射である．次の補題は行列の積の定義から容易に確かめられる．

補題 4.3 $a\neq 0$ ならば $\begin{pmatrix}a&b\\c&\frac{bc+1}{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{c}{a}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&\frac{1}{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{b}{a}\\0&1\end{pmatrix}$ が成り立ち，$b\neq 0$ ならば $\begin{pmatrix}0&b\\-\frac{1}{b}&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{b}&0\\0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-bd\\0&1\end{pmatrix}$ が成り立つ．

命題 4.4 任意の $z,w\in\boldsymbol{H}$ と $A\in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対して次の等式が成り立つ．

$$d_{\boldsymbol{H}}(\tau_A(z),\tau_A(w))=d_{\boldsymbol{H}}(z,w)\qquad d_{\boldsymbol{H}}(-\bar{z},-\bar{w})=d_{\boldsymbol{H}}(z,w)$$

証明 補題 4.3 と命題 4.2 から，A が $\pm\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&c\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a&0\\0&\frac{1}{a}\end{pmatrix}$ の形の行列の場合に，任意の $z,w\in\boldsymbol{H}$ に対して $d_{\boldsymbol{H}}(\tau_A(z),\tau_A(w))=d_{\boldsymbol{H}}(z,w)$ が成り立てば，任意の $z,w\in\boldsymbol{H}$ と $A\in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対して 1 つ目の等式が成り立つ．

$A=\pm\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ の場合，$\tau_A(z)=-\dfrac{1}{z}$ であり，$\left|\dfrac{w}{\bar{w}}\right|=1$ であることに注意すれば，

$$\begin{aligned}d_{\boldsymbol{H}}(\tau_A(z),\tau_A(w))&=\log\frac{\left|-\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{w}}\right|+\left|-\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right|}{\left|-\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{w}}\right|-\left|-\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right|}=\log\frac{|zw|\left(\left|-\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{w}}\right|+\left|-\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right|\right)}{|zw|\left(\left|-\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{w}}\right|-\left|-\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right|\right)}=\log\frac{\left|\frac{zw}{\bar{w}}-w\right|+|z-w|}{\left|\frac{zw}{\bar{w}}-w\right|-|z-w|}\\&=\log\frac{\left|\frac{w}{\bar{w}}\right||z-\bar{w}|+|z-w|}{\left|\frac{w}{\bar{w}}\right||z-\bar{w}|-|z-w|}=\log\frac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|}=d_{\boldsymbol{H}}(z,w).\end{aligned}$$

$A=\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}$ の場合，$\tau_A(z)=z+b$ だから

$$d_{\boldsymbol{H}}(\tau_A(z),\tau_A(w))=\log\frac{|z+b-(\bar{w}+b)|+|z+b-(w+b)|}{|z+b-(\bar{w}+b)|-|z+b-(w+b)|}=\log\frac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|}=d_{\boldsymbol{H}}(z,w).$$

$A=\begin{pmatrix}a&0\\0&\frac{1}{a}\end{pmatrix}$ の場合，$\tau_A(z)=a^2z$ だから

$$d_{\boldsymbol{H}}(\tau_A(z),\tau_A(w))=\log\frac{|a^2z-a^2\bar{w}|+|a^2z-a^2w|}{|a^2z-a^2\bar{w}|-|a^2z-a^2w|}=\log\frac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|}=d_{\boldsymbol{H}}(z,w).$$

また，$d_{\boldsymbol{H}}(-\bar{z},-\bar{w})=\log\dfrac{|-\bar{z}+w|+|-\bar{z}+\bar{w}|}{|-\bar{z}+w|-|-\bar{z}+\bar{w}|}=\log\dfrac{|\bar{z}-w|+|\bar{z}-\bar{w}|}{|\bar{z}-w|-|\bar{z}-\bar{w}|}=\log\dfrac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|}=d_{\boldsymbol{H}}(z,w)$. □

命題 4.5 $\boldsymbol{H}$ の相異なる 2 点 z, w に対し，$\tau_A(z)=i$, $\tau_A(w)=\lambda i$ を満たす $A\in SL_2(\boldsymbol{R})$ と $\lambda>1$ が存在する．

証明 $z=u+vi$, $w=x+yi$ $(u,v,x,y\in\boldsymbol{R})$ とする．$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とおくと，$\tau_A(z)=i$, $\tau_A(w)=\lambda i$ が成り立つためには，$au+b+avi=-cv+(cu+d)i$ と $ax+b+ayi=-c\lambda y+(c\lambda x+d\lambda)i$ が成り立つことが必要十分である．これらの等式の実部と虚部を比較すれば，$au+b=-cv$, $av=cu+d$, $ax+b=-c\lambda y$, $ay=c\lambda x+d\lambda$ が得られる．1 つ目と 2 つ目の等式から $b=-au-cv$, $d=av-cu$ だから，これらを 3 つ目と 4 つ目の等式に代入すれば $a(x-u)-c(v-\lambda y)=0$, $a(y-\lambda v)+c\lambda(u-x)=0$ が得られる．これらを a, c を未知数とする斉次連立 1 次方程式とみなして，$a=c=0$ 以外の解をもつための条件は $-\lambda(u-x)^2+(v-\lambda y)(y-\lambda v)=0$ であ

る．これは λ を未知数とする 2 次方程式 $vy\lambda^2 - ((u-x)^2+v^2+y^2)\lambda + vy = 0$ であり, $z \neq w$ であることと, $z, w \in \boldsymbol{H}$ より $v, y > 0$ だから, この方程式の判別式 D は $D = ((u-x)^2+(v-y)^2)((u-x)^2+(v+y)^2) > 0$ である．解と係数の関係から, この 2 次方程式の 2 つの解は正の実数であり, その積は 1 だから, 大きい方の解は 1 より大きいため $\lambda = \dfrac{(u-x)^2+v^2+y^2+\sqrt{D}}{2vy}$ である．$x \neq u$ の場合, 上記の a, c を未知数とする斉次連立 1 次方程式の解は, k を任意の定数として $a = k(v-\lambda y)$, $c = k(x-u)$ で与えられる．このとき $b = k(\lambda uy - vx)$, $d = k(u^2+v^2-ux-\lambda vy)$ だから $ad - bc = k^2v((u-x)^2+(v-\lambda y)^2) > 0$ となるため $A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ であるためには $k = \pm\dfrac{1}{\sqrt{v((u-x)^2+(v-\lambda y)^2)}}$ であることが必要十分である．$x = u$ の場合, $v < y$ ならば $\lambda = \dfrac{y}{v}$ だから $c = 0$, $b = -au$, $d = av$ である．$A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ であるためには $a^2v = 1$ だから, $a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{v}}$, $b = \mp\dfrac{u}{\sqrt{v}}$, $d = \pm\sqrt{v}$ (複号同順) と定まる．$v > y$ ならば $\lambda = \dfrac{v}{y}$ だから $a = 0$, $b = -cv$, $d = -cu$ である．$A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ であるためには, $c^2v = 1$ だから, $c = \pm\dfrac{1}{\sqrt{v}}$, $b = \mp\sqrt{v}$, $d = \mp\dfrac{u}{\sqrt{v}}$ (複号同順) と定まる． □

命題 4.6　$d_{\boldsymbol{H}}$ は $\boldsymbol{H}$ の距離関数である．

証明　$|\bar{z} - w| = |\overline{\bar{z} - w}| = |z - \bar{w}|$ であることに注意すれば, $d_{\boldsymbol{H}}(z, w) = d_{\boldsymbol{H}}(w, z)$ が成り立つことがわかる．また, つねに $d_{\boldsymbol{H}}(z, w) \geqq 0$ であり, $d_{\boldsymbol{H}}(z, w) = 0$ になるのは $z = w$ の場合に限ることは, $d_{\boldsymbol{H}}$ の定義から直ちにわかる．$z_1, z_2, z_3 \in \boldsymbol{H}$ に対して $\tau_A(z_1) = i$, $\tau_A(z_3) = \lambda i$ を満たす $A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ と $\lambda > 1$ があるため, $\tau_A(z_2) = z$ とおけば, 命題 4.4 から, $d_{\boldsymbol{H}}(z_1, z_3) = d_{\boldsymbol{H}}(i, \lambda i) = \log\lambda$, $d_{\boldsymbol{H}}(z_1, z_2) = d_{\boldsymbol{H}}(i, z) = d_{\boldsymbol{H}}(z, i) = \log\dfrac{|z+i|+|z-i|}{|z+i|-|z-i|}$, $d_{\boldsymbol{H}}(z_2, z_3) = d_{\boldsymbol{H}}(z, \lambda i) = \log\dfrac{|z+\lambda i|+|z-\lambda i|}{|z+\lambda i|-|z-\lambda i|}$ である．故に三角不等式 $d_{\boldsymbol{H}}(z_1, z_3) \leqq d_{\boldsymbol{H}}(z_1, z_2) + d_{\boldsymbol{H}}(z_2, z_3)$ は

$$\log\lambda \leqq \log\frac{|z+i|+|z-i|}{|z+i|-|z-i|} + \log\frac{|z+\lambda i|+|z-\lambda i|}{|z+\lambda i|-|z-\lambda i|}$$

と同値であり, log が単調増加関数であることから, 上の不等式は

$$\lambda \leqq \frac{(|z+i|+|z-i|)(|z+\lambda i|+|z-\lambda i|)}{(|z+i|-|z-i|)(|z+\lambda i|-|z-\lambda i|)} \quad \cdots(*)$$

と同値である．さらに, $(*)$ の両辺に $(|z+i|^2-|z-i|^2)(|z+\lambda i|^2-|z-\lambda i|^2)$ をかけて得られる不等式

$$\lambda(|z+i|^2-|z-i|^2)(|z+\lambda i|^2-|z-\lambda i|^2) \leqq (|z+i|+|z-i|)^2(|z+\lambda i|+|z-\lambda i|)^2 \quad \cdots(**)$$

は $(*)$ と同値である．$u = \mathrm{Re}(z)$, $v = \mathrm{Im}(z)$ とおけば, $|z+i|^2 = u^2+(v+1)^2$, $|z-i|^2 = u^2+(v-1)^2$, $|z+\lambda i|^2 = u^2+(v+\lambda)^2$, $|z-\lambda i|^2 = u^2+(v-\lambda)^2$ より, $(**)$ の左辺は $16\lambda^2v^2$ であり,

$$\begin{aligned}
(|z+i|+|z-i|)^2 &= |z+i|^2+|z-i|^2+2|z+i||z-i| \\
&= 2\Big(u^2+v^2+1+\sqrt{(u^2+(v+1)^2)(u^2+(v-1)^2)}\Big) \\
&\geqq 2\Big(v^2+1+\sqrt{(v+1)^2(v-1)^2}\Big) = 2(v^2+1+|v^2-1|) = 4\max\{v^2, 1\} \geqq 4v^2 \\
(|z+\lambda i|+|z-\lambda i|)^2 &= |z+\lambda i|^2+|z-\lambda i|^2+2|z+\lambda i||z-\lambda i| \\
&= 2\Big(u^2+v^2+\lambda^2+\sqrt{(u^2+(v+\lambda)^2)(u^2+(v-\lambda)^2)}\Big) \\
&\geqq 2\Big(v^2+\lambda^2+\sqrt{(v+\lambda)^2(v-\lambda)^2}\Big) = 2(v^2+\lambda^2+|v^2-\lambda^2|) = 4\max\{v^2, \lambda^2\} \geqq 4\lambda^2
\end{aligned}$$

だから, $(**)$ の右辺は $16\lambda^2v^2$ 以上である．従って $(**)$ が成り立つため, $d_{\boldsymbol{H}}$ は三角不等式を満たす． □

上の命題の証明から, $(**)$ の等号が成り立つための条件は $u = 0$ かつ $1 \leqq v \leqq \lambda$ だから, 次の結果がわかる．

補題 4.7　$\lambda > 1$ に対して $z \in \boldsymbol{H}$ が $d_{\boldsymbol{H}}(i, z) + d_{\boldsymbol{H}}(z, \lambda i) = d_{\boldsymbol{H}}(i, \lambda i)$ を満たすための条件は $\mathrm{Re}(z) = 0$ かつ $1 \leqq \mathrm{Im}(z) \leqq \lambda$ である．

(X,d) を距離空間とするとき, $\boldsymbol{R}$ の区間から X への連続写像を X の曲線という. 距離関数を用いて, $\boldsymbol{R}$ の有限閉区間 $[a,b]$ を定義域とする X の曲線の長さを以下のように定義する.

定義 4.8 $\boldsymbol{R}$ の有限閉区間 $[a,b]$ に対し, $a=t_0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq \cdots \leqq t_n = b$ を満たす数列 $\Delta = \{t_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ を区間 $[a,b]$ の分割という. X の曲線 $\omega : [a,b] \to X$ と $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{t_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ に対して

$$s(\omega, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} d(\omega(t_i), \omega(t_{i-1}))$$

とおく. $[a,b]$ のあらゆる分割 Δ に対して $s(\omega,\Delta)$ の形で得られる実数全体からなる $\boldsymbol{R}$ の部分集合を S_ω とおく. $S_\omega \subset [0,M]$ を満たす実数 M が存在するとき, ω は長さを持つといい, $S_\omega \subset [0,M]$ を満たす実数 M のうち最小であるものを ω の長さと呼ぶ. (一般に $\boldsymbol{R}$ の部分集合 S に対して $S \subset (-\infty, M]$ を満たす実数 M が存在するとき, $S \subset (-\infty, M]$ を満たす M の中で最小のものがあることが知られている.)

命題 4.9 (X,d_X), (Y,d_Y) を距離空間, f を X から Y への連続写像, $\omega : [a,b] \to X$ を X の曲線とする.

(1) ω が長さをもち, 任意の $s,t \in [a,b]$ に対して $d_Y(f(\omega(s)), f(\omega(t))) \leqq d_X(\omega(s),\omega(t))$ が成り立つならば Y の曲線 $f \circ \omega : [a,b] \to Y$ も長さをもち, その長さは ω の長さを越えない.

(2) Y の曲線 $f\circ\omega : [a,b] \to Y$ が長さをもち, 任意の $s,t \in [a,b]$ に対して $d_X(\omega(s),\omega(t)) \leqq d_Y(f(\omega(s)), f(\omega(t)))$ が成り立つならば ω も長さをもち, その長さは $f\circ\omega$ の長さを越えない.

(3) 任意の $s,t \in [a,b]$ に対して $d_X(\omega(s),\omega(t)) = d_Y(f(\omega(s)), f(\omega(t)))$ が成り立つならば ω が長さをもつことと, $f\circ\omega$ が長さをもつことは同値であり, ω の長さと $f\circ\omega$ の長さは等しい.

証明 (1) ω の長さを L とする. 区間 $[a,b]$ の任意の分割 $\Delta = \{t_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ に対し,

$$s(f\circ\omega, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} d_Y(f(\omega(t_i)), f(\omega(t_{i-1}))) \leqq \sum_{i=1}^{n} d_X(\omega(t_i), \omega(t_{i-1})) \leqq L$$

だから, $S_{f\circ\omega}$ は上に有界であり, その上限は L を越えない.

(2) $f\circ\omega$ の長さを L' とする. 区間 $[a,b]$ の任意の分割 $\Delta = \{t_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ に対し,

$$s(\omega, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} d_X(\omega(t_i), \omega(t_{i-1})) \leqq \sum_{i=1}^{n} d_Y(f(\omega(t_i)), f(\omega(t_{i-1}))) \leqq L'$$

だから, S_ω は上に有界であり, その上限は L' を越えない.

(3) (1) と (2) から明らかである. □

定義 4.10 I を $\boldsymbol{R}$ の区間とする. 距離空間 (X,d) の曲線 $\sigma : I \to X$ が $s<t<u$ を満たす任意の $s,t,u \in I$ に対して等式 $d(\sigma(s),\sigma(u)) = d(\sigma(s),\sigma(t)) + d(\sigma(t),\sigma(u))$ を満たすとき, σ を線分という. 線分 $\sigma : I \to X$ が条件「線分 $\tau : J \to X$ が $\sigma(I) \subset \tau(J)$ を満たせば, $\sigma(I) = \tau(J)$ である.」を満たすとき, σ を直線という.

注意 4.11 (1) σ が線分で, $\sigma(s) = \sigma(u)$ を満たす $s<u$ が存在すれば, $t \in [s,u]$ に対して $\sigma(t) = \sigma(s)$ である.

(2) $f : X \to Y$ が距離を保つ写像で, σ が X の線分ならば $f\circ\sigma$ は Y の線分である.

命題 4.12 $p,q \in X$ に対し, $\sigma : [a,b] \to X$ を $\sigma(a) = p$ と $\sigma(b) = q$ を満たす曲線とする.

(1) σ が線分ならば, σ の長さは $d(p,q)$ であり, $\omega(a) = p$ と $\omega(b) = q$ を満たす X の曲線 $\omega : [a,b] \to X$ のうちで長さが最小のものである.

(2) σ が線分ではないならば, σ の長さは $d(p,q)$ より大きい.

証明 (1) $[a,b]$ の任意の分割 $\Delta = \{t_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ に対し, $s(\sigma,\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{n} d(\sigma(t_i), \sigma(t_{i-1})) = d(p,q)$ が成り立つことが線分の定義と n による数学的帰納法で示されるため σ の長さは $d(p,q)$ である. $\omega(c) = p$, $\omega(d) = q$ を満たす曲線 $\omega : [c,d] \to X$ が長さをもてば, $[c,d]$ の任意の分割 $\Delta = \{t_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ に対し, 三角不等式から $s(\omega,\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{n} d(\omega(t_i), \omega(t_{i-1})) \geqq d(p,q)$ だから, ω の長さは σ の長さを越えない.

(2) 仮定から $s < t < u$ である $s,t,u \in [a,b]$ で $d(\sigma(s),\sigma(u)) < d(\sigma(s),\sigma(t)) + d(\sigma(t),\sigma(u))$ を満たすものが存在する．$[a,b]$ の分割 $\Delta_0 = \{a,s,t,u,b\}$ を考えると

$$s(\sigma,\Delta_0) = d(p,\sigma(s))+d(\sigma(s),\sigma(t))+d(\sigma(t),\sigma(u))+d(\sigma(u),q) > d(p,\sigma(s))+d(\sigma(s),\sigma(u))+d(\sigma(u),q) \geqq d(p,q)$$

だから, σ の長さは $d(p,q)$ より大きい． □

$A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対し, 曲線 $\ell_A : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{H}$ を $\ell_A(t) = \tau_A(ie^t)$ で定義し, ℓ_A による $\boldsymbol{R}$ の像を $C(A)$ とする．

命題 4.13 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\boldsymbol{R})$ とする．

(1) $s < t$ ならば $d_{\boldsymbol{H}}(\ell_A(s),\ell_A(t)) = t-s$ が成り立つ．従って ℓ_A は線分である．

(2) $c = 0$ の場合, $C(A)$ は実部が ab である $\boldsymbol{H}$ の点全体からなる集合である．

(3) $d = 0$ の場合, $C(A)$ は実部が $-ab$ である $\boldsymbol{H}$ の点全体からなる集合である．

(4) $cd \neq 0$ の場合, $C(A)$ は $\left| z - \dfrac{ad+bc}{2cd} \right| = \dfrac{1}{2|cd|}$ を満たす $\boldsymbol{H}$ の点 z 全体からなる集合である．言い換えれば $C(A)$ は実軸上の点 $\dfrac{a}{c}$ と $\dfrac{b}{d}$ を直径の両端とする $\boldsymbol{H}$ に含まれる半円である．

証明 (1) 命題 4.4 と $d_{\boldsymbol{H}}$ の定義から $d_{\boldsymbol{H}}(\ell_A(s),\ell_A(t)) = d_{\boldsymbol{H}}(\tau_A(ie^s),\tau_A(ie^t)) = d_{\boldsymbol{H}}(ie^s,ie^t) = t-s$.

(2) $ad = 1$ より $d = \dfrac{1}{a}$ だから $\ell_A(t) = ab + ia^2e^t$ である．t が実数全体を動くとき, $ab+ia^2e^t$ は実部が ab で虚部が正である複素数全体を動くため, $C(A)$ は実部が ab である $\boldsymbol{H}$ の点全体からなる集合である．

(3) $bc = -1$ より $c = -\dfrac{1}{b}$ だから $\ell_A(t) = -ab + ib^2e^{-t}$ である．t が実数全体を動くとき, $-ab+ib^2e^{-t}$ は実部が $-ab$ で虚部が正である複素数全体を動くため, $C(A)$ は実部が $-ab$ である $\boldsymbol{H}$ の点全体からなる集合である．

(4) $\ell_A(t) = \dfrac{b+aie^t}{d+cie^t}$ の実部と虚部をそれぞれ $x(t)$, $y(t)$ とおけば, $x(t) = \dfrac{ace^{2t}+bd}{c^2e^{2t}+d^2}$, $y(t) = \dfrac{e^t}{c^2e^{2t}+d^2}$ である．このとき, $x(t) - \dfrac{ad+bc}{2cd} = \dfrac{c^2e^{2t}-d^2}{2cd(c^2e^{2t}+d^2)}$ だから $\left(x(t) - \dfrac{ad+bc}{2cd} \right)^2 + y(t)^2 = \dfrac{1}{4c^2d^2}$ が成り立つため $\left| \ell_A(t) - \dfrac{ad+bc}{2cd} \right| = \dfrac{1}{2|cd|}$ である．また, $x(t) = \dfrac{a}{c} - \dfrac{d}{c(c^2e^{2t}+d^2)}$ だから, t が実数全体を動くとき, $x(t)$ は $\dfrac{a}{c}$ と $\dfrac{b}{d}$ の間のすべての実数の値をとるため, $C(A)$ は $\left| z - \dfrac{ad+bc}{2cd} \right| = \dfrac{1}{2|cd|}$ を満たす $\boldsymbol{H}$ の点 z 全体からなる集合である．□

系 4.14 (1) $A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対し, $C(A)$ は実軸に垂直な半直線であるか, 実軸上に中心をもつ半円である．従って, $A, B \in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対し $C(A) \neq C(B)$ ならば $C(A) \cap C(B)$ の要素の個数は 1 以下である．

(2) $a < b$, $r > 0$ を満たす実数 a, b, r に対して行列 $A(a,b), B(a,r), T(a) \in SL_2(\boldsymbol{R})$ をそれぞれ

$$A(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{b-a}} & \frac{a}{\sqrt{b-a}} \\ \frac{1}{\sqrt{b-a}} & \frac{1}{\sqrt{b-a}} \end{pmatrix} \qquad B(a,r) = \begin{pmatrix} \frac{a+r}{2r} & a-r \\ \frac{1}{2r} & 1 \end{pmatrix} \qquad T(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

によって定める．このとき, $C(A(a,b))$ は実軸上の点 a, b を直径の両端とする半円, $C(B(a,r))$ は実軸上の点 a を中心とし, 半径が r である半円であり, $C(T(a))$ は実軸上の点 a を始点とし実軸に垂直な半直線である．

$L_{a,b} = C(A(a,b))$, $L_a = C(T(a))$ とおく．このとき, $A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対し, $C(A)$ は τ_A による L_0 の像である．

命題 4.15 $p, q \in \boldsymbol{H}$ $(p \neq q)$ に対し, $c > 0$ と $\sigma(0) = p$, $\sigma(c) = q$ を満たす線分 $\sigma : [0,c] \to \boldsymbol{H}$ が存在する．

証明 命題 4.5 から, $A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ と $c > 0$ で $\tau_A(p) = i$, $\tau_A(q) = e^ci$ を満たすものがある．このとき $\tau_{A^{-1}}(i) = p$, $\tau_{A^{-1}}(e^ci) = q$ だから $\ell_{A^{-1}}(0) = p$, $\ell_{A^{-1}}(c) = q$ が成り立つため, $\ell_{A^{-1}}$ の定義域を $[0,c]$ に制限して得られる写像は, p と q を結ぶ線分である． □

$\boldsymbol{H}$ の相異なる 2 点 p, q に対し, $\boldsymbol{H}$ の部分集合 $C(p,q)$ を次のように定める．

- $\mathrm{Re}(p) = \mathrm{Re}(q)$ の場合, $C(p,q)$ は p と q を両端とする虚軸に平行な「通常の線分」とする．
- $\mathrm{Re}(p) \neq \mathrm{Re}(q)$ の場合, 中心が実軸上にあり, p と q を通る円の p と q を両端とする劣弧を $C(p,q)$ とする．

系 4.14 の (2) から, $p, q \in \boldsymbol{H}$ $(p \neq q)$ に対し, $C(p,q) \subset C(A)$ を満たす $A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ がある．

命題 4.16 $\boldsymbol{H}$ の相異なる 2 点 p, q に対し, $z \in \boldsymbol{H}$ が $d_{\boldsymbol{H}}(p,z)+d_{\boldsymbol{H}}(z,q) = d_{\boldsymbol{H}}(p,q)$ を満たすためには $z \in C(p,q)$ であることが必要十分である.

証明 命題 4.5 から, $\tau_A(p) = i$, $\tau_A(q) = \lambda i$ を満たす $A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ と $\lambda > 1$ が存在する. 従って命題 4.4 から $d_{\boldsymbol{H}}(p,z) + d_{\boldsymbol{H}}(z,q) = d_{\boldsymbol{H}}(p,q)$ は $d_{\boldsymbol{H}}(i,\tau_A(z)) + d_{\boldsymbol{H}}(\tau_A(z),\lambda i) = d_{\boldsymbol{H}}(i,\lambda i)$ と同値であり, この等式は補題 4.7 によって $\tau_A(z) \in C(i,\lambda i)$ と同値である. $\tau_{A^{-1}}$ による $C(i,\lambda i)$ の像は命題 4.13 から p, q を両端とする実軸に垂直な線分であるか, または中心が実軸上にあり, p と q を通る円の p と q を結ぶ劣弧であるため, 主張が成り立つ. □

系 4.17 (1) $\sigma : [a,b] \to \boldsymbol{H}$ が線分ならば, σ の像は $C(\sigma(a),\sigma(b))$ に一致する.

(2) $\omega : J \to \boldsymbol{H}$ が線分で, $\omega(J) = C(\omega(a),\omega(b))$ $(a < b)$ であるとき, $t \leqq a$ かつ $t \in J$ ならば $\omega(t) = \omega(a)$ であり, $t \geqq b$ かつ $t \in J$ ならば $\omega(t) = \omega(b)$ である.

証明 (1) 仮定から任意の $t \in [a,b]$ に対して $d_{\boldsymbol{H}}(\sigma(a),\sigma(t)) + d_{\boldsymbol{H}}(\sigma(t),\sigma(b)) = d_{\boldsymbol{H}}(\sigma(a),\sigma(b))$ が成り立つため, 命題 4.16 から $\sigma(t) \in C(\sigma(a),\sigma(b))$ である. 従って σ の像は $C(\sigma(a),\sigma(b))$ の両端の点を含む $C(\sigma(a),\sigma(b))$ の部分集合である. もし σ の像に含まれない $C(\sigma(a),\sigma(b))$ の点が存在すれば, σ の像が連結ではなくなるため, σ の連続性と矛盾する. 故に σ の像は $C(\sigma(a),\sigma(b))$ に一致する.

(2) 仮定から $t \in J$ ならば $\omega(t) \in C(\omega(a),\omega(b))$ だから $d_{\boldsymbol{H}}(\omega(a),\omega(t)) + d_{\boldsymbol{H}}(\omega(t),\omega(b)) = d_{\boldsymbol{H}}(\omega(a),\omega(b))$ が成り立つ. $t \leqq a$ かつ $t \in J$ ならば $d_{\boldsymbol{H}}(\omega(t),\omega(a)) + d_{\boldsymbol{H}}(\omega(a),\omega(b)) = d_{\boldsymbol{H}}(\omega(t),\omega(b))$ が成り立つため, 始めの等式から $d_{\boldsymbol{H}}(\omega(t),\omega(a)) = 0$ が得られる. $t \geqq b$ かつ $t \in J$ ならば $d_{\boldsymbol{H}}(\omega(a),\omega(b)) + d_{\boldsymbol{H}}(\omega(b),\omega(t)) = d_{\boldsymbol{H}}(\omega(a),\omega(t))$ が成り立つため, 始めの等式から $d_{\boldsymbol{H}}(\omega(t),\omega(b)) = 0$ が得られる. □

命題 4.18 任意の $A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対し, $\ell_A : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{H}$ は直線である.

証明 線分 $\sigma : J \to \boldsymbol{H}$ の像が L_0 を含み, $c \in J$ で $\sigma(c) \notin L_0$ となるものが存在すると仮定する. L_0 の相異なる点 p, q をとれば, $\sigma(a) = p$, $\sigma(b) = q$ を満たす $a, b \in J$ が存在し, $a < b$ と仮定してよい. $\sigma(c) \notin L_0$ だから, 補題 4.16 から, $c < a < b$ または $a < b < c$ である. $c < a < b$ ならば, 補題 4.16 から, $p \in C(\sigma(c),q)$ である. q は虚軸上の点で, $\sigma(c)$ は虚軸上にないため, $C(\sigma(c),q)$ は実軸上に中心をもつ半円の弧であり, q が虚軸との唯一の共有点であるが, このことは $p \in C(\sigma(c),q) \cap L_0$ と矛盾する. 同様に $a < b < c$ ならば $q \in C(p,\sigma(c)) \cap L_0$ であるが, $C(p,\sigma(c))$ と虚軸との唯一の共有点は p であるため, 矛盾が生じる. 故に $\sigma : J \to \boldsymbol{H}$ の像が L_0 を含めば, $\sigma : J \to \boldsymbol{H}$ の像は L_0 に一致する. 線分 $\sigma : J \to \boldsymbol{H}$ の像が $C(A)$ を含めば, $\tau_{A^{-1}} = \tau_A^{-1}$ による $C(A)$ の像は L_0 だから $\tau_{A^{-1}} \circ \sigma$ の像は L_0 を含む. 従って $\tau_{A^{-1}} \circ \sigma$ の像は L_0 に一致するため, σ の像は $C(A)$ に一致する. □

上の命題から, 実軸に垂直な半直線と, 実軸上に中心をもつ半円は $\boldsymbol{H}$ の直線である. $\boldsymbol{H}$ の相異なる 2 点 p, q に対し, 命題 4.15 から, p と q を結ぶ線分が存在し, 命題 4.17 の (1) から, p と q を結ぶ線分の像は $C(p,q)$ になるため, 距離空間 $(\boldsymbol{H}, d_{\boldsymbol{H}})$ において本節の始めの公理 1 が成り立つ. また, $C(p,q)$ を含む直線 $C(A)$ が存在することから, 公理 2 も成り立つ.

$p \in \boldsymbol{H}$ と $r > 0$ に対し, $d_{\boldsymbol{H}}(z,p) = r$ を満たす $\boldsymbol{H}$ の点全体からなる集合を $S(p;r)$ で表し, $S(p;r)$ を中心が p, 半径 r の円という. $S(p;r)$ が p と異なる点 q を通る円であるためには $r = d_{\boldsymbol{H}}(p,q)$ であることが必要十分だから, 公理 3 が成り立つ.

実数 x に対して $\cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\sinh x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ とおく.

命題 4.19 $p \in \boldsymbol{H}$ と $r > 0$ に対し, $S(p;r)$ は $|z - (\mathrm{Re}(p) + i(\cosh r)\mathrm{Im}(p))| = (\sinh r)\mathrm{Im}(p)\}$ を満たす複素数 z 全体からなる集合, すなわち $S(p;r)$ は中心が $\mathrm{Re}(p) + i(\cosh r)\mathrm{Im}(p)$, 半径が $(\sinh r)\mathrm{Im}(p)$ の「通常の円」である.

証明 $z \in S(p;r)$ であるためには $(e^r + 1)|z - p| = (e^r - 1)|z - \bar{p}|$ が成り立つことが必要十分であり, $p = a + bi$, $z = x + yi$ $(a, b, x, y \in \boldsymbol{R})$ とおけば, 上式は $(x - a)^2 + (y - b\cosh r)^2 = b^2 \sinh^2 r$ と同値である. $(x - a)^2 + (y - b\cosh r)^2 = b^2 \sinh^2 r$ ならば $|y - b\cosh r| \leqq b\sinh r$ だから $y \geqq b(\cosh r - \sinh r) = be^{-r} > 0$ である. 故に $|z - (\mathrm{Re}(p) + i(\cosh r)\mathrm{Im}(p))| = (\sinh r)\mathrm{Im}(p)\}$ を満たす複素数 z はすべて $\boldsymbol{H}$ に含まれる. □

定義 4.20 $\omega : I \to \boldsymbol{H}$, $\xi : J \to \boldsymbol{H}$ を $\boldsymbol{H}$ の曲線とし, $a \in I$, $b \in J$ に対して $\omega(a) = \xi(b)$ であるとする.

(1) $t \in I$ を $\mathrm{Re}(\omega(t))$ に対応させる関数を $\mathrm{Re}(\omega) : I \to \boldsymbol{R}$ で表し, $t \in I$ を $\mathrm{Im}(\omega(t))$ に対応させる関数を $\mathrm{Im}(\omega) : I \to (0, \infty)$ で表す. $\mathrm{Re}(\omega)$ と $\mathrm{Im}(\omega)$ が a で微分可能であるとき, ω は a で微分可能であるといい, $\omega'(a) = \mathrm{Re}(\omega)'(a) + i\mathrm{Im}(\omega)'(a)$ とおく.

(2) ω と ξ がそれぞれ a, b で微分可能で $\omega'(a), \xi'(b) \neq 0$ の場合, $\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\omega)'(a)\\ \mathrm{Im}(\omega)'(a)\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\xi)'(b)\\ \mathrm{Im}(\xi)'(b)\end{pmatrix}$ のなす角を, ω と ξ の a, b におけるなす角という. また, $p = \omega(a) = \xi(b)$ とおき, ω と ξ の a, b におけるなす角を θ とすれば, θ と $\pi - \theta$ の小さい方を ω と ξ の p におけるなす角という.

注意 4.21 曲線 $\omega : I \to \boldsymbol{H}$ に対し, $-t \in I$ を満たす実数全体の集合を I^c とし, 曲線 $\omega^c : I^c \to \boldsymbol{H}$ を $\omega^c(t) = \omega(-t)$ で定める. ω が $a \in I$ で微分可能ならば ω^c は $-a$ で微分可能で, $(\omega^c)'(-a) = -\omega'(a)$ が成り立つ. 故に $\boldsymbol{H}$ の曲線 $\omega : I \to \boldsymbol{H}$, $\xi : J \to \boldsymbol{H}$ が $\omega(a) = \xi(b)$ かつ ω と ξ がそれぞれ $a \in I$, $b \in J$ で微分可能で, $\omega'(a), \xi'(b) \neq 0$ ならば, ω と ξ の a, b におけるなす角を θ とすれば, ω^c と ξ の $-a, b$ におけるなす角は $\pi - \theta$ に等しい.

補題 4.22 $\boldsymbol{H}$ の曲線 $\omega : I \to \boldsymbol{H}$ が $t \in I$ で微分可能ならば $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対して次の等式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\tau_A \circ \omega)'(t)\\ \mathrm{Im}(\tau_A \circ \omega)'(t)\end{pmatrix} = \frac{1}{|c\omega(t)+d|^2}\begin{pmatrix}\mathrm{Re}((c\omega(t)+d)^2) & \mathrm{Im}((c\omega(t)+d)^2)\\ -\mathrm{Im}((c\omega(t)+d)^2) & \mathrm{Re}((c\omega(t)+d)^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\omega)'(t)\\ \mathrm{Im}(\omega)'(t)\end{pmatrix}$$

とくに $\omega(t) = ie^t$ で定義される $\omega : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{H}$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\ell_A)'(t)\\ \mathrm{Im}(\ell_A)'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2cde^t}{c^2e^t+d^2e^{-t}}\\ \frac{d^2-c^2e^{2t}}{c^2e^t+d^2e^{-t}}\end{pmatrix}$ が得られる.

証明 $\mathrm{Re}(\omega) = u$, $\mathrm{Im}(\omega) = v$ とおくと, 命題 4.1 から

$$\mathrm{Re}(\tau_A \circ \omega(t)) = \mathrm{Re}\left(\frac{a\omega(t)+b}{c\omega(t)+d}\right) = \frac{ac|\omega(t)|^2 + bd + (ad+bc)\mathrm{Re}(\omega(t))}{|c\omega(t)+d|^2} = \frac{(au(t)+b)(cu(t)+d)+acv(t)^2}{(cu(t)+d)^2+c^2v(t)^2}$$

$$\mathrm{Im}(\tau_A \circ \omega(t)) = \mathrm{Im}\left(\frac{a\omega(t)+b}{c\omega(t)+d}\right) = \frac{\mathrm{Im}(\omega(t))}{|c\omega(t)+d|^2} = \frac{v(t)}{(cu(t)+d)^2+c^2v(t)^2}$$

だから等式

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\tau_A \circ \omega)'(t)\\ \mathrm{Im}(\tau_A \circ \omega)'(t)\end{pmatrix} &= \frac{1}{((cu(t)+d)^2+c^2v(t)^2)^2}\begin{pmatrix}(cu(t)+d)^2-c^2v(t)^2 & 2c(cu(t)+d)v(t)\\ -2c(cu(t)+d)v(t) & (cu(t)+d)^2-c^2v(t)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'(t)\\ v'(t)\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{|c\omega(t)+d|^2}\begin{pmatrix}\mathrm{Re}((c\omega(t)+d)^2) & \mathrm{Im}((c\omega(t)+d)^2)\\ -\mathrm{Im}((c\omega(t)+d)^2) & \mathrm{Re}((c\omega(t)+d)^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\omega)'(t)\\ \mathrm{Im}(\omega)'(t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

が得られる. □

$\alpha = \dfrac{\mathrm{Re}((c\omega(t)+d)^2)}{|c\omega(t)+d|^2}$, $\beta = -\dfrac{\mathrm{Im}((c\omega(t)+d)^2)}{|c\omega(t)+d|^2}$ とおけば $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ だから $\boldsymbol{R}^2$ のベクトルに $\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$ を左からかけて得られる $\boldsymbol{R}^2$ の 1 次変換は内積を保つ (課題その 1 の問題 (A) 参照) ため, ベクトルのなす角も保つ. 従って補題 4.22 より次の定理が得られる.

定理 4.23 $\boldsymbol{H}$ の曲線 $\omega : I \to \boldsymbol{H}$, $\xi : J \to \boldsymbol{H}$ がそれぞれ $p \in I$, $q \in J$ で微分可能であり, $\omega(p) = \xi(q)$ かつ $\omega'(p), \xi'(q) \neq 0$ であるとする. $A \in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対して $\boldsymbol{H}$ の曲線 $\tau_A \circ \omega : I \to \boldsymbol{H}$ と $\tau_A \circ \xi : J \to \boldsymbol{H}$ の p, q におけるなす角は ω と ξ の p, q におけるなす角に等しい.

命題 4.24 実数 a, b, c, d は $a < c < b < d$ を満たすとする.

(1) $\ell_{A(a,b)}\left(\dfrac{1}{2}\log\dfrac{c-a}{b-c}\right) = \ell_{T(c)}\left(\dfrac{1}{2}\log(b-c)(c-a)\right) = c + i\sqrt{(b-c)(c-a)}$ であり, 直線 $\ell_{A(a,b)}$ と $\ell_{T(c)}$ の $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{c-a}{b-c}$, $\dfrac{1}{2}\log(b-c)(c-a)$ におけるなす角を θ とすれば $\cos\theta = \dfrac{a+b-2c}{b-a}$ である.

(2) $\ell_{A(a,b)}\left(\dfrac{1}{2}\log\dfrac{(c-a)(d-a)}{(d-b)(b-c)}\right) = \ell_{A(c,d)}\left(\dfrac{1}{2}\log\dfrac{(c-a)(b-c)}{(d-b)(d-a)}\right) = \dfrac{cd-ab+i\sqrt{(d-b)(d-a)(b-c)(c-a)}}{c+d-a-b}$ であり, 直線 $\ell_{A(a,b)}$ と $\ell_{A(c,d)}$ の $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{(c-a)(d-a)}{(d-b)(b-c)}$, $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{(c-a)(b-c)}{(d-b)(d-a)}$ におけるなす角を θ とすれば $\cos\theta = \dfrac{(a+b)(c+d)-2(ab+cd)}{(d-c)(b-a)}$ である.

証明 補題 4.22 から $\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\ell_{A(a,b)})'(t)\\ \mathrm{Im}(\ell_{A(a,b)})'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2e^t}{e^t+e^{-t}}\\ \frac{1-e^{2t}}{e^t+e^{-t}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\ell_{T(c)})'(t)\\ \mathrm{Im}(\ell_{T(c)})'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ e^t\end{pmatrix}$ だから

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\ell_{A(a,b)})'\left(\frac{1}{2}\log\frac{c-a}{b-c}\right)\\ \mathrm{Im}(\ell_{A(a,b)})'\left(\frac{1}{2}\log\frac{c-a}{b-c}\right)\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\ell_{T(c)})'\left(\frac{1}{2}\log(b-c)(c-a)\right)\\ \mathrm{Im}(\ell_{T(c)})'\left(\frac{1}{2}\log(b-c)(c-a)\right)\end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\ell_{A(a,b)})'\left(\frac{1}{2}\log\frac{(c-a)(d-a)}{(d-b)(b-c)}\right)\\ \mathrm{Im}(\ell_{A(a,b)})'\left(\frac{1}{2}\log\frac{(c-a)(d-a)}{(d-b)(b-c)}\right)\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(\ell_{A(c,d)})'\left(\frac{1}{2}\log\frac{(c-a)(b-c)}{(d-b)(d-a)}\right)\\ \mathrm{Im}(\ell_{A(c,d)})'\left(\frac{1}{2}\log\frac{(c-a)(b-c)}{(d-b)(d-a)}\right)\end{pmatrix}$$

とおけば, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ はそれぞれ $\begin{pmatrix}\frac{2(c-a)}{b-a}\\ \frac{(a+b-2c)\sqrt{c-a}}{(b-a)\sqrt{b-c}}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{(b-c)(c-a)}\end{pmatrix}$ で与えられるため, $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\dfrac{(c-a)(a+b-2c)}{b-a}$, $\|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{\dfrac{c-a}{b-c}}$, $\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{(b-c)(c-a)}$ だから $\dfrac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}=\dfrac{a+b-2c}{b-a}$ となって, (1) の結果が得られる. また, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ はそれぞれ $\begin{pmatrix}\frac{2(c-a)(d-a)}{(b-a)(c+d-a-b)}\\ \sqrt{\frac{(c-a)(d-a)}{(d-b)(b-c)}}\frac{(a+b)(c+d)-a^2-b^2-2cd}{(b-a)(c+d-a-b)}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{2(c-a)(b-c)}{(d-c)(c+d-a-b)}\\ \sqrt{\frac{(c-a)(b-c)}{(d-b)(d-a)}}\frac{c^2+d^2+2ab-(a+b)(c+d)}{(d-c)(c+d-a-b)}\end{pmatrix}$ で与えられる. 従って $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\dfrac{(c-a)((a+b)(c+d)-2(ab+cd))}{(d-c)(b-a)(d-b)}$, $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\dfrac{(d-a)(c-a)}{(d-b)(b-c)}}$, $\|\boldsymbol{y}\|=\sqrt{\dfrac{(c-a)(b-c)}{(d-b)(d-a)}}$ が成り立つため $\dfrac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}=\dfrac{(a+b)(c+d)-2(ab+cd)}{(d-c)(b-a)}$ となって, (2) の結果が得られる. □

$\ell_{A(-3,2)}$ と $\ell_{T(0)}$ の交点を p, $\ell_{A(-3,2)}$ と $\ell_{A(1,3)}$ の交点を q とする. さらに 0 と p を結ぶ線分と -3 と p を結ぶ線分のなす角を φ, -3 と q を結ぶ線分と 1 と q を結ぶ線分のなす角を ψ とおけば, 命題 4.24 から $\cos(\pi-\varphi)=-\dfrac{1}{5}$ だから $\cos\varphi=\dfrac{1}{5}$ であり, $\cos\psi=\dfrac{1}{5}$ である. 従って $\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\psi<\dfrac{\pi}{2}$ だから $\varphi+\psi<\pi$ であるが, 直線 $\ell_{T(0)}$ と $\ell_{A(1,3)}$ は交わらないため, 公理 5 は成り立たない. また次の定理から, 公理 4 は成り立つことがわかる.

定理 4.25 $A,B,P,Q\in SL_2(\boldsymbol{R})$ とする. $\boldsymbol{H}$ の直線 ℓ_A と ℓ_B が直角に交わり, 直線 ℓ_P と ℓ_Q が直角に交わるとき, $T\in SL_2(\boldsymbol{R})$ で $\tau_T:\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}$ は $C(P)$ を $C(A)$ に写し, $C(Q)$ を $C(B)$ に写すものが存在する.

証明 虚軸に関する対称移動を $R:\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}$ とすれば R は $R(z)=-\bar{z}$ で与えられるが, 命題 4.4 から R は距離を保つ写像であり, R は虚軸を虚軸に, -1 と 1 を直径の両端とする $\boldsymbol{H}$ の半円 $L_{-1,1}=C(A(-1,1))$ を $L_{-1,1}$ に写すため, $\ell_{A(-1,1)}$ と ℓ_{E_2} は i において直角に交わる.

$T\in SL_2(\boldsymbol{R})$ で, $\tau_T:\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}$ は $C(A(-1,1))$ を $C(A)$ に写し, $C(E_2)$ を $C(B)$ に写すものが存在することを示せば, $S\in SL_2(\boldsymbol{R})$ で, $\tau_S:\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}$ は $C(A(-1,1))$ を $C(P)$ に写し, $C(E_2)$ を $C(Q)$ に写すものも存在するので, 命題 4.2 により $\tau_{TS^{-1}}=\tau_T\circ\tau_S^{-1}:\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}$ は $C(P)$ を $C(A)$ に写し, $C(Q)$ を $C(B)$ に写す.

系 4.14 より $C(A)$, $C(B)$ は $L_{a,b}$ または L_a の形をしていて, L_a の形の相異なる直線は交わらないため, 「$A=A(a,b)$, $B=T(c)$」または「$A=A(a,b)$, $B=A(c,d)$」$(a<c<b<d)$ と仮定してよい.

$A=A(a,b)$, $B=T(c)$ の場合, 仮定と命題 4.24 から $c=\dfrac{a+b}{2}$ である. $T=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{2}} & \frac{a+b}{\sqrt{2}\sqrt{b-a}}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b-a}}\end{pmatrix}$ とおけば $T\in SL_2(\boldsymbol{R})$, $TA(-1,1)=A(a,b)$ であり, 命題 4.13 から $C(T)=L_c=C(T(c))$ が成り立つため τ_T は $C(A(-1,1))$ を $C(A(a,b))$ に写し, $C(E_2)$ を $C(T(c))$ に写す.

$A=A(a,b)$, $B=A(c,d)$ の場合, $T=\begin{pmatrix}\frac{c\sqrt{d-b}}{\sqrt{(b-c)(d-c)}} & \frac{-d\sqrt{b-c}}{\sqrt{(d-b)(d-c)}}\\ \frac{\sqrt{d-b}}{\sqrt{(b-c)(d-c)}} & \frac{-\sqrt{b-c}}{\sqrt{(d-b)(d-c)}}\end{pmatrix}$ とおけば $T\in SL_2(\boldsymbol{R})$ であり, 命題 4.13 から τ_T は $C(E_2)$ を $C(T)=L_{c,d}=C(A(c,d))$ に写す. $TA(-1,1)=\begin{pmatrix}\frac{2cd-b(c+d)}{\sqrt{2(b-c)(d-b)(d-c)}} & \frac{-b\sqrt{d-c}}{\sqrt{2(b-c)(d-b)}}\\ \frac{c+d-2b}{\sqrt{2(b-c)(d-b)(d-c)}} & \frac{-\sqrt{d-c}}{\sqrt{2(b-c)(d-b)}}\end{pmatrix}$ だから $c+d-2b\neq 0$ ならば τ_T は $C(A(-1,1))$ を $C(TA(-1,1))=L_{\frac{2cd-b(c+d)}{c+d-2b},b}$ に写す. 一方, 仮定と命題 4.24 から $2(ab+cd)=(a+b)(c+d)$ だから $2cd-b(c+d)=a(c+d-2b)$ が成り立つので, $C(TA(-1,1))=L_{a,b}=C(A(a,b))$ である. もし, $c+d-2b=0$ ならば $2cd-b(c+d)=0$ となり, この等式に $b=\dfrac{c+d}{2}$ を代入すれば, $\dfrac{(c-d)^2}{2}=0$ が得られるため $c<d$ という仮定に矛盾する. 従って $c+d-2b\neq 0$ である. □

課題その４

(A) d を $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$ (ただし $i=1,2$ に対し x_i, y_i はそれぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の第 i 成分) で定義される $\boldsymbol{R}^2$ の距離関数とする. (課題その 2 の (A) 参照)

(1) I を区間とし, $\varphi,\psi : I\to\boldsymbol{R}$ が単調増加である連続関数ならば $\boldsymbol{\omega}(t)=(\varphi(t),\psi(t))$ で定義される $\boldsymbol{R}^2$ の曲線 $\boldsymbol{\omega}: I\to\boldsymbol{R}^2$ は, 距離空間 $(\boldsymbol{R}^2,d)$ における線分であることを示せ.

(2) $r>0$ に対し, 原点を中心とし, 半径が r の $(\boldsymbol{R}^2,d)$ における円周, すなわち $|x|+|y|=d((x,y),(0,0))=r$ を満たす $\boldsymbol{R}^2$ の点 (x,y) 全体からなる集合の周囲の長さを r の式で表せ.

(B) d を $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ で定義される $\boldsymbol{R}^2$ の通常の距離関数とし, 実数を成分とする 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が与えられているとする. 任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^2$ に対して $d(A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})=d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成り立つならば $a^2+c^2=1$ であり, $(a,b)=(d,-c)$ または $(a,b)=(-d,c)$ のいずれか一方が成り立つことを示せ.

(C) 実数 θ に対して $R(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおき, $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく. $\boldsymbol{R}^2$ の距離関数 $\tilde{d}$ が任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}^2$, $a>0$, $\theta\in\boldsymbol{R}$ に対して次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすとする.

(i) $\tilde{d}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=\tilde{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ (ii) $\tilde{d}(a\boldsymbol{x},a\boldsymbol{y})=a\tilde{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ (iii) $\tilde{d}(R(\theta)\boldsymbol{x},R(\theta)\boldsymbol{y})=\tilde{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$

(1) $\boldsymbol{R}^2$ の相異なるベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して, $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$ を原点を中心として時計回りに θ だけ回転させれば x 軸の正の部分と重なるとき, $R(-\theta)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|\boldsymbol{e}_1$ が成り立つことを示せ.

(2) $\tilde{d}$ が (i), (ii), (iii) を満たすことを用いて, $\tilde{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\tilde{d}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_1)\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|$ であることを示せ.

(D) 距離空間 $(\boldsymbol{H},d_{\boldsymbol{H}})$ において, 以下の問いに答えよ.

(1) i と $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$ の距離 $d_{\boldsymbol{H}}\left(i,\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)$ と, $2i$ と $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$ の距離 $d_{\boldsymbol{H}}\left(2i,\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)$ を求めよ.

(2) $2i$ と $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$ を結ぶ線分を斜辺とし, 頂点 i の角度が直角である直角三角形において, 等式

$$d_{\boldsymbol{H}}\left(i,\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^2+d_{\boldsymbol{H}}(i,2i)^2=d_{\boldsymbol{H}}\left(2i,\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^2$$

(ピタゴラスの定理) が成り立つかどうか, 理由を付けて答えよ.

(E) λ を 1 より大きい実数とする. 距離空間 $(\boldsymbol{H},d_{\boldsymbol{H}})$ において, 以下の問いに答えよ.

(1) $d_{\boldsymbol{H}}(p,i)=d_{\boldsymbol{H}}(p,\lambda i)=\log\lambda$ かつ $\mathrm{Re}(p)>0$ を満たす $\boldsymbol{H}$ の点 p を求めよ.

(2) i と λi を結ぶ線分と, i と p を結ぶ線分のなす角, λi と i を結ぶ線分と, λi と p を結ぶ線分のなす角および p と i を結ぶ線分と, p と λi を結ぶ線分のなす角をそれぞれ λ の式で表し, これらはすべて等しいことを示せ.

(3) 上で求めた角度と $\dfrac{\pi}{3}$ (60°) との大小を答えよ.