代数的位相幾何学の視点

概要

代数的位相幾何学を一言で説明すれば「代数学の手法を用いて位相空間を研究する幾何学の一分野」であるが, この講義では「不動点定理」と呼ばれる定理を題材に, 代数的位相幾何学の手法について解説する. 第 1 節では位相空間のホモロジー群を定義し, 第 2 節で位相空間のホモロジー群の性質を紹介する. 第 3 節では球面のホモロジー群を用いて, 同じ次元の球面の間の連続写像に対して「写像度」という概念を定義してその性質を紹介し, 第 4 節では写像度を用いて「不動点定理」,「代数学の基本定理」,「ハムサンドウィッチの定理」などの種々の結果が導かれることを示す.

§1. 位相空間のホモロジー群

Δ^n を $n+1$ 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の部分空間 $\{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^{n+1} | \, x_i \geqq 0, \, x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 1\}$ とし, Δ^n を標準的 n 単体という. 写像 $\varepsilon_i^{(n)} : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ $(n \geqq 1, \, i = 0, 1, \ldots, n)$ を

$$\varepsilon_i^{(n)}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = (x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{n-1})$$

で定義すると次が成り立つことは容易に確かめられる.

補題 1.1 整数 i, j が $0 \leqq j < i \leqq n+1$ を満たすとき, $\varepsilon_i^{(n+1)} \circ \varepsilon_j^{(n)} = \varepsilon_j^{(n+1)} \circ \varepsilon_{i-1}^{(n)}$ が成り立つ.

整数全体からなるアーベル群を $\boldsymbol{Z}$ で表す. 位相空間 X と負でない整数 n に対し, $S_n(X)$ を Δ^n から X への連続写像全体の集合とし, $S_n(X)$ で生成される自由アーベル群を $C_n(X)$ とする. すなわち

$$C_n(X) = \{c : S_n(X) \to \boldsymbol{Z} \,|\, c(\sigma) \neq 0 \text{ である } \sigma \in S_n(X) \text{ は有限個 }\}$$

であり, $c, c' \in C_n(X)$ に対して $c + c'$ は $\sigma \in S_n(X)$ を $c(\sigma) + c'(\sigma) \in \boldsymbol{Z}$ に写す $C_n(X)$ の要素であると定義する. $\sigma \in S_n(X)$ に対して $c_\sigma \in C_n(X)$ を $c_\sigma(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau = \sigma \\ 0 & \tau \neq \sigma \end{cases}$ で定義して, 写像 $\eta_n : S_n(X) \to C_n(X)$ を $\eta_n(\sigma) = c_\sigma$ で定義する. なお, X が空集合の場合, $C_n(\emptyset)$ は自明なアーベル群 $\{0\}$ であると定義する.

命題 1.2 η_n は単射であり, 任意の $c \in C_n(X)$ に対して $c = \sum_{\sigma \in I} x_\sigma c_\sigma$ を満たす $S_n(X)$ の有限部分集合 I と 0 でない整数 x_σ が 1 通りに定まる. すなわち $\eta_n(S_n(X))$ は $C_n(X)$ の基底である.

証明 η_n が単射であることは明らか. $c \in C_n(X)$ に対し, $I = c^{-1}(\boldsymbol{Z} - \{0\})$ とおけば I は $S_n(X)$ の有限部分集合である. 各 $\sigma \in I$ に対して $x_\sigma = c(\sigma)$ とおけば x_σ は 0 でない整数で, 任意の $\tau \in S_n(X)$ に対して $\left(\sum_{\sigma \in I} x_\sigma c_\sigma\right)(\tau) = \sum_{\sigma \in I} x_\sigma c_\sigma(\tau) = x_\tau = c(\tau)$ が成り立つため, $c = \sum_{\sigma \in I} x_\sigma c_\sigma$ である. $S_n(X)$ の有限部分集合 J と各 $\sigma \in J$ に対して 0 でない整数 y_σ が与えられていて $c = \sum_{\sigma \in J} y_\sigma c_\sigma$ が成り立つと仮定する. $\tau \in S_n(X)$ に対し

$$c(\tau) = \left(\sum_{\sigma \in J} y_\sigma c_\sigma\right)(\tau) = \sum_{\sigma \in J} y_\sigma c_\sigma(\tau) = \begin{cases} y_\tau & \tau \in J \\ 0 & \tau \notin J \end{cases}$$

が成り立つため, $\tau \in J$ ならば $c(\tau) \neq 0$ だから $\tau \in I$ であり, $\tau \notin J$ ならば $\tau \notin I$ である. 従って $J = I$ であり, 任意の $\tau \in I = J$ に対して $x_\tau = c(\tau) = y_\tau$ が成り立つため, 主張が示された. □

系 1.3 A をアーベル群とする. 写像 $f : S_n(X) \to A$ に対し, 準同型写像 $\bar{f} : C_n(X) \to A$ で $\bar{f} \circ \eta_n = f$ を満たすものがただ 1 つ存在する.

証明 $c \in C_n(X)$, $\sigma \in S_n(X) - c^{-1}(\boldsymbol{Z} - \{0\})$ ならば $c(\sigma) = 0$ であり, $c^{-1}(\boldsymbol{Z} - \{0\})$ は有限集合であることに注意して $\bar{f} : C_n(X) \to A$ を $\bar{f}(c) = \sum_{\sigma \in S_n(X)} c(\sigma) f(\sigma)$ で定義する. $c, c' \in C_n(X)$ に対して

$$\bar{f}(c+c') = \sum_{\sigma\in S_n(X)} (c+c')(\sigma)f(\sigma) = \sum_{\sigma\in S_n(X)} c(\sigma)f(\sigma) + \sum_{\sigma\in S_n(X)} c'(\sigma)f(\sigma) = \bar{f}(c)+\bar{f}(c')$$

だから $\bar{f}$ は準同型写像である．$\tau \in S_n(X)$ に対し，$(\bar{f}\circ\eta_n)(\tau) = \bar{f}(\eta_n(\tau)) = \bar{f}(c_\tau) = \sum_{\sigma\in S_n(X)} c_\tau(\sigma)f(\sigma) = f(\tau)$ だから $\bar{f}\circ\eta_n = f$ が成り立つ．命題 1.2 の証明から，任意の $c \in C_n(X)$ は $c = \sum_{\sigma\in c^{-1}(\boldsymbol{Z}-\{0\})} c(\sigma)c_\sigma = \sum_{\sigma\in S_n(X)} c(\sigma)\eta_n(\sigma)$ と表されるため，$\tilde{f} : C_n(X) \to A$ が $\tilde{f}\circ\eta_n = f$ を満たす準同型写像ならば

$$\tilde{f}(c) = \tilde{f}\left(\sum_{\sigma\in S_n(X)} c(\sigma)\eta_n(\sigma)\right) = \sum_{\sigma\in S_n(X)} c(\sigma)\tilde{f}(\eta_n(\sigma)) = \sum_{\sigma\in S_n(X)} c(\sigma)(\tilde{f}\circ\eta_n)(\sigma) = \sum_{\sigma\in S_n(X)} c(\sigma)f(\sigma) = \bar{f}(c)$$

が得られる．従って $\tilde{f} = \bar{f}$ である． □

正の整数 n に対して写像 $\hat{d}_n : S_n(X) \to C_{n-1}(X)$ を $\hat{d}_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\eta_{n-1}(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n)})$ で定めれば系 1.3 から $d_n\circ\eta_n = \hat{d}_n$ を満たす準同型写像 $d_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ がただ 1 つ定まる．負の整数 n に対して $C_n(X) = \{0\}$ と定め，0 以下の整数 n に対して $d_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ は零写像であるとする．以後，$\sigma \in S_n(X)$ と $\eta_n(\sigma) = c_\sigma$ を同一視して $S_n(X)$ を $C_n(X)$ の部分集合とみなすことがある．補題 1.1 と系 1.3 から次の結果が得られる．

命題 1.4　上で定義した準同型写像 $d_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ は $d_n\circ d_{n+1} = 0$ を満たす．

証明　$d_n\circ d_{n+1}\circ\eta_{n+1} = 0$ を示せば，補題 1.3 から $d_n\circ d_{n+1} = 0$ が得られる．$\sigma \in S_{n+1}(X)$ に対して命題 1.1 より

$$\begin{aligned}
(d_n\circ d_{n+1}\circ\eta_{n+1})(\sigma) &= d_n(\hat{d}_n(\sigma)) = d_n\left(\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\eta_n\big(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n+1)}\big)\right) = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i d_n\big(\eta_n\big(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n+1)}\big)\big) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\hat{d}_n\big(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n+1)}\big) = \sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{i+j}\eta_{n-1}\big(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n+1)}\circ\varepsilon_j^{(n)}\big) \\
&= \sum_{0\leqq j<i\leqq n+1}(-1)^{i+j}\eta_{n-1}\big(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n+1)}\circ\varepsilon_j^{(n)}\big) + \sum_{0\leqq i\leqq j\leqq n}(-1)^{i+j}\eta_{n-1}\big(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n+1)}\circ\varepsilon_j^{(n)}\big) \\
&= \sum_{0\leqq j<i\leqq n+1}(-1)^{i+j}\eta_{n-1}\big(\sigma\circ\varepsilon_j^{(n+1)}\circ\varepsilon_{i-1}^{(n)}\big) + \sum_{0\leqq i\leqq j\leqq n}(-1)^{i+j}\eta_{n-1}\big(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n+1)}\circ\varepsilon_j^{(n)}\big) \\
&= \sum_{0\leqq i<j\leqq n+1}(-1)^{i+j}\eta_{n-1}\big(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n+1)}\circ\varepsilon_{j-1}^{(n)}\big) + \sum_{0\leqq i\leqq j\leqq n}(-1)^{i+j}\eta_{n-1}\big(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n+1)}\circ\varepsilon_j^{(n)}\big) \\
&= \sum_{0\leqq i\leqq j\leqq n}(-1)^{i+j+1}\eta_{n-1}\big(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n+1)}\circ\varepsilon_j^{(n)}\big) + \sum_{0\leqq i\leqq j\leqq n}(-1)^{i+j}\eta_{n-1}\big(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n+1)}\circ\varepsilon_j^{(n)}\big) \\
&= \sum_{0\leqq i\leqq j\leqq n}((-1)^{i+j+1}+(-1)^{i+j})\eta_{n-1}\big(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n+1)}\circ\varepsilon_j^{(n)}\big) = 0
\end{aligned}$$

が成り立つため，$d_n\circ d_{n+1}\circ\eta_{n+1} = 0$ である． □

連続写像 $f : X \to Y$ と 0 以上の整数 n に対し，写像 $S_n(f) : S_n(X) \to S_n(Y)$ を $S_n(f)(\sigma) = f\circ\sigma$ で定義すれば系 1.3 により，準同型写像 $C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$ で $C_n(f)\circ\eta_n = \eta_n\circ S_n(f)$，すなわち次の図式が可換になるものがただ 1 つ定まる．

$$\begin{tikzcd}
S_n(X) \arrow[r, "S_n(f)"] \arrow[d, "\eta_n"] & S_n(Y) \arrow[d, "\eta_n"] \\
C_n(X) \arrow[r, "C_n(f)"] & C_n(Y)
\end{tikzcd}$$

命題 1.5　次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
C_n(X) \arrow[r, "C_n(f)"] \arrow[d, "d_n"] & C_n(Y) \arrow[d, "d_n"] \\
C_{n-1}(X) \arrow[r, "C_{n-1}(f)"] & C_{n-1}(Y)
\end{tikzcd}$$

証明 $d_n\circ\eta_n=\hat{d}_n$, $C_k(f)\circ\eta_k=\eta_k\circ S_k(f)$ $(k\geqq 0)$ より, 各 $\sigma\in S_n(X)$ に対して次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}(C_{n-1}(f)\circ d_n\circ\eta_n)(\sigma)&=C_{n-1}(f)(\hat{d}_n(\sigma))=C_{n-1}(f)\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\eta_{n-1}(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n)})\right)\\&=\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_{n-1}(f)(\eta_{n-1}(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n)}))=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\eta_{n-1}(S_{n-1}(f)(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n)}))\\&=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\eta_{n-1}(f\circ\sigma\circ\varepsilon_i^{(n)})=\hat{d}_n(f\circ\sigma)=(d_n\circ\eta_n)(S_n(f)(\sigma))\\&=(d_n\circ\eta_n\circ S_n(f))(\sigma)=(d_n\circ C_n(f)\circ\eta_n)(\sigma)\end{aligned}$$

従って $C_{n-1}(f)\circ d_n\circ\eta_n=d_n\circ C_n(f)\circ\eta_n$ だから, 系 1.3 により $C_{n-1}(f)\circ d_n=d_n\circ C_n(f)$ である. □

位相空間 X の部分空間 A に対し, 包含写像 $i:A\to X$ が定める写像 $S_n(i):S_n(A)\to S_n(X)$ は単射である. この写像によって $S_n(A)$ を $S_n(i)$ の像と同一視して, $S_n(A)$ を $S_n(X)$ の部分集合とみなす. さらに $S_n(X)$ を η_n によって $C_n(X)$ の部分集合とみなして, 単射 $C_n(i):C_n(A)\to C_n(X)$ により, $C_n(A)$ を $C_n(X)$ の部分群とみなす. $p_n:C_n(X)\to C_n(X)/C_n(A)$ を商写像とする. 命題 1.5 から下の図式の左側の長方形は可換だから, 右側の長方形が可換になるような準同型写像 $d_n:C_n(X)/C_n(A)\to C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)$ がただ 1 つ存在する.

$$\begin{tikzcd}
C_n(A) \arrow[r, "C_n(i)"] \arrow[d, "d_n"] & C_n(X) \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "d_n"] & C_n(X)/C_n(A) \arrow[d, dotted, "d_n"] \\
C_{n-1}(A) \arrow[r, "C_{n-1}(i)"] & C_{n-1}(X) \arrow[r, "p_{n-1}"] & C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)
\end{tikzcd}$$

命題 1.4 から合成写像 $C_{n+1}(X)\xrightarrow{d_{n+1}}C_n(X)\xrightarrow{d_n}C_{n-1}(X)$ は零写像であり, 上の図の左の長方形の可換性から下の図は可換である. 従って $d_n\circ d_{n+1}\circ p_{n+1}=0$ である.

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1}(X) \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "p_{n+1}"] & C_n(X) \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "p_n"] & C_{n-1}(X) \arrow[d, "p_{n-1}"] \\
C_{n+1}(X)/C_{n+1}(A) \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n(X)/C_n(A) \arrow[r, "d_n"] & C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)
\end{tikzcd}$$

さらに p_{n+1} は全射だから, 合成写像 $C_{n+1}(X)/C_{n+1}(A)\xrightarrow{d_{n+1}}C_n(X)/C_n(A)\xrightarrow{d_n}C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)$ も零写像である. そこで $C_n(X)/C_n(A)$ の部分群 $Z_n(X,A)$, $B_n(X,A)$ を

$$\begin{aligned}Z_n(X,A)&=\mathrm{Ker}(d_n:C_n(X)/C_n(A)\to C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A))\\B_n(X,A)&=\mathrm{Im}(d_{n+1}:C_{n+1}(X)/C_{n+1}(A)\to C_n(X)/C_n(A))\end{aligned}$$

で定めれば $B_n(X,A)\subset Z_n(X,A)$ である.

定義 1.6 位相空間 X とその部分空間 A に対し, X と A の対 (X,A) を位相空間対という. アーベル群 $Z_n(X,A)/B_n(X,A)$ を位相空間対 (X,A) の n 次元ホモロジー群といい, $H_n(X,A)$ で表す. とくに A が空集合の場合, $H_n(X,\emptyset)$ を $H_n(X)$ で表して, 位相空間 X の n 次元ホモロジー群という.

補題 1.7 連続写像 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ に対し, $S_n(g\circ f)=S_n(g)\circ S_n(f)$, $C_n(g\circ f)=C_n(g)\circ C_n(f)$ である.

証明 $\sigma\in S_n(X)$ に対し, $S_n(g\circ f)(\sigma)=(g\circ f)\circ\sigma=g\circ(f\circ\sigma)=S_n(g)(S_n(f)(\sigma))=(S_n(g)\circ S_n(f))(\sigma)$ だから $S_n(g\circ f)=S_n(g)\circ S_n(f)$ である. また, $C_n(f)$ の定義から次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}C_n(g\circ f)\circ\eta_n&=\eta_n\circ S_n(g\circ f)=\eta_n\circ(S_n(g)\circ S_n(f))=(\eta_n\circ S_n(g))\circ S_n(f)=(C_n(g)\circ\eta_n)\circ S_n(f)\\&=C_n(g)\circ(\eta_n\circ S_n(f))=C_n(g)\circ(C_n(f)\circ\eta_n)=(C_n(g)\circ C_n(f))\circ\eta_n\end{aligned}$$

ゆえに系 1.3 から $C_n(g\circ f)=C_n(g)\circ C_n(f)$ が得られる. □

X, Y を位相空間, A, B をそれぞれ X, Y の部分空間とする．連続写像 $f : X \to Y$ が $f(A) \subset B$ を満たすとき, f を位相空間対 (X, A) から (Y, B) への連続写像といい, $f : (X, A) \to (Y, B)$ で表す．このとき, f の定義域を A に制限して得られる写像を $f_A : A \to B$, $i_A : A \to X$ とし, $i_B : B \to Y$ を包含写像とすれば, $i_B \circ f_A = f \circ i_A$ だから, 補題 1.7 から次の図式の左側の長方形は可換である．従って, $q_n : C_n(Y) \to C_n(Y)/C_n(B)$ を商写像とすれば, 次の図式の右側の長方形が可換になるような準同型写像 $f_n : C_n(X)/C_n(A) \to C_n(Y)/C_n(B)$ がただ 1 つ存在する．

$$\begin{tikzcd}
C_n(A) \arrow[r, "C_n(i_A)"] \arrow[d, "C_n(f_A)"] & C_n(X) \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "C_n(f)"] & C_n(X)/C_n(A) \arrow[d, dotted, "f_n"] \\
C_n(B) \arrow[r, "C_n(i_B)"] & C_n(Y) \arrow[r, "q_n"] & C_n(Y)/C_n(B)
\end{tikzcd}$$

命題 1.8　次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
C_n(X)/C_n(A) \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A) \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
C_n(Y)/C_n(B) \arrow[r, "d_n"] & C_{n-1}(Y)/C_{n-1}(B)
\end{tikzcd}$$

証明　$d_n : C_n(X)/C_n(A) \to C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)$, $d_n : C_n(Y)/C_n(B) \to C_{n-1}(Y)/C_{n-1}(B)$ の定義より下の図式の上と下の台形は可換であり, $f_k : C_k(X)/C_k(A) \to C_k(Y)/C_k(B)$ $(k = n, n-1)$ の定義より下の図式の外側と内側の長方形は可換である．また命題 1.5 より下の図式の左側の台形も可換である．

$$\begin{tikzcd}
C_{n-1}(X) \arrow[rrr, "p_{n-1}"] \arrow[ddd, "C_{n-1}(f)"] & & & C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A) \arrow[ddd, "f_{n-1}"] \\
& C_n(X) \arrow[ul, "d_n"'] \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "C_n(f)"] & C_n(X)/C_n(A) \arrow[ur, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & \\
& C_n(Y) \arrow[dl, "d_n"] \arrow[r, "q_n"] & C_n(Y)/C_n(B) \arrow[dr, "d_n"] & \\
C_{n-1}(Y) \arrow[rrr, "q_{n-1}"] & & & C_{n-1}(Y)/C_{n-1}(B)
\end{tikzcd}$$

故に $f_{n-1} \circ d_n \circ p_n = f_{n-1} \circ p_{n-1} \circ d_n = q_{n-1} \circ C_{n-1}(f) \circ d_n = q_{n-1} \circ d_n \circ C_n(f) = d_n \circ q_n \circ C_n(f) = d_n \circ f_n \circ p_n$ であり, p_n は全射だから $f_{n-1} \circ d_n = d_n \circ f_n$ が得られる．　□

$x \in Z_n(X, A)$ ならば $d_n(x) = 0$ だから命題 1.8 より $d_n(f_n(x)) = f_{n-1}(d_n(x)) = f_{n-1}(0) = 0$ が成り立つ． 従って $f_n(x) \in Z_n(Y, B)$ だから準同型写像 $Z_n(f) : Z_n(X, A) \to Z_n(Y, B)$ を $Z_n(f)(x) = f_n(x)$ で定義できる． また, $x \in B_n(X, A)$ ならば $d_{n+1}(y) = x$ を満たす $y \in C_{n+1}(X)/C_{n+1}(A)$ が存在するため, 命題 1.8 より $f_n(x) = f_n(d_{n+1}(y)) = d_{n+1}(f_{n+1}(y))$ だから $f_n(x) \in B_n(Y, B)$ である． 従って準同型写像 $B_n(f) : B_n(X, A) \to B_n(Y, B)$ を $B_n(f)(x) = f_n(x)$ で定義できる．

$\iota_{X,A} : B_n(X, A) \to Z_n(X, A)$ を包含写像, $\pi_{X,A} : Z_n(X, A) \to H_n(X, A)$ を商写像とする．

定義 1.9　位相空間対の連続写像 $f : (X, A) \to (Y, B)$ に対し, 次の図式の右側の長方形が可換になるような準同型写像 $H_n(f) : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ がただ 1 つ存在する．$H_n(f)$ を f が誘導する写像といい, f_* で表すことがある．

$$\begin{tikzcd}
B_n(X, A) \arrow[r, "\iota_{X,A}"] \arrow[d, "B_n(f)"] & Z_n(X, A) \arrow[r, "\pi_{X,A}"] \arrow[d, "Z_n(f)"] & H_n(X, A) \arrow[d, dotted, "H_n(f)"] \\
B_n(Y, B) \arrow[r, "\iota_{Y,B}"] & Z_n(Y, B) \arrow[r, "\pi_{Y,B}"] & H_n(Y, B)
\end{tikzcd}$$

命題 1.10　位相空間対の連続写像 $f : (X, A) \to (Y, B)$, $g : (Y, B) \to (Z, C)$ に対し, $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$ が成り立つ．また, 恒等写像 $id_{(X,A)} : (X, A) \to (X, A)$ に対して $H_n(id_{(X,A)})$ は $H_n(X, A)$ の恒等写像である．

証明　$H_n(f)$, $H_n(g)$, $H_n(g\circ f)$ の定義から下の図式の上と下の台形と外側の長方形は可換であり, 補題 1.7 から下の図式の左側の三角形も可換である.

$$\begin{tikzcd}
Z_n(X,A) \arrow[rrr, "\pi_{X,A}"] \arrow[dr, "Z_n(f)"] \arrow[dd, "Z_n(g\circ f)"'] & & & H_n(X,A) \arrow[dl, "H_n(f)"'] \arrow[dd, "H_n(g\circ f)"] \\
& Z_n(Y,B) \arrow[r, "\pi_{Y,B}"] \arrow[dl, "Z_n(g)"'] & H_n(Y,B) \arrow[dr, "H_n(g)"] & \\
Z_n(Z,C) \arrow[rrr, "\pi_{Z,C}"] & & & H_n(Z,C)
\end{tikzcd}$$

従って $H_n(g)\circ H_n(f)\circ\pi_{X,A}=H_n(g)\circ\pi_{Y,B}\circ Z_n(f)=\pi_{Z,C}\circ Z_n(g)\circ Z_n(f)=\pi_{Z,C}\circ Z_n(g\circ f)=H_n(g\circ f)\circ\pi_{X,A}$ であり, $\pi_{X,A}$ は全射だから $H_n(g\circ f)=H_n(g)\circ H_n(f)$ が成り立つ. $H_n(id_{(X,A)})$ の定義から $H_n(id_{(X,A)})$ が $H_n(X,A)$ の恒等写像であることは明らかである. □

§2.　ホモロジー群の性質

定義 2.1　X, Y を位相空間, A, B をそれぞれ X, Y の部分空間とする.

(1) $f,g:(X,A)\to(Y,B)$ を位相空間対の連続写像とする. 位相空間対の連続写像

$$H:(X\times[0,1],A\times[0,1])\to(Y,B)$$

ですべての $x\in X$ に対して $H(x,0)=f(x)$, $H(x,1)=g(x)$ を満たすものが存在するとき, f と g はホモトピックであるといい, このことを $f\simeq g$ で表す. また, H を f から g へのホモトピーという.

(2) 位相空間対の連続写像 $f:(X,A)\to(Y,B)$ と $g:(Y,B)\to(X,A)$ で $g\circ f$ が X の恒等写像 id_X とホモトピックであり, $f\circ g$ が Y の恒等写像 id_Y とホモトピックであるものが存在するとき, 位相空間対 (X,A) と (Y,B) はホモトピー同値であるといい, このことを $(X,A)\simeq(Y,B)$ で表す. このとき f, g をホモトピー同値写像という. とくに $A=B=\emptyset$ の場合, X と Y はホモトピー同値であるという.

定理 2.2　位相空間対の 2 つの連続写像 $f,g:(X,A)\to(Y,B)$ がホモトピックならば, すべての $n\in\boldsymbol{Z}$ に対して $H_n(f)=H_n(g):H_n(X,A)\to H_n(Y,B)$ が成り立つ.

系 2.3　$f:(X,A)\to(Y,B)$ がホモトピー同値写像ならばすべての $n\in\boldsymbol{Z}$ に対して $H_n(f):H_n(X,A)\to H_n(Y,B)$ は同型写像である.

証明　仮定から位相空間対の連続写像 $g:(Y,B)\to(X,A)$ で $g\circ f\simeq id_X$ かつ $f\circ g\simeq id_Y$ となるものが存在する. 従って命題 2.2 から $H_n(g\circ f)=H_n(id_X)$ かつ $H_n(f\circ g)=H_n(id_Y)$ であり, 命題 1.10 より $H_n(g\circ f)=H_n(g)\circ H_n(f)$, $H_n(f\circ g)=H_n(f)\circ H_n(g)$ であり, $H_n(id_X)$, $H_n(id_Y)$ はそれぞれ $H_n(X,A)$, $H_n(Y,B)$ の恒等写像だから, $H_n(f)$ は同型写像で, $H_n(g)$ はその逆写像である. □

命題 2.4　X が弧状連結な位相空間ならば $H_0(X)$ は $\boldsymbol{Z}$ と同型である.

証明　$x\in X$ に対し, $1\in\Delta^0=\{1\}$ を x に写す $S_0(X)$ の要素を σ_x で表す. X は弧状連結で, Δ^1 は $[0,1]$ と同相だから任意の $x,y\in X$ に対して $\sigma\in S_1(X)$ で $\sigma(1,0)=x$, $\sigma(0,1)=y$ を満たすものがある. このとき $\sigma\circ\varepsilon_0^{(1)}=\sigma_y$, $\sigma\circ\varepsilon_1^{(1)}=\sigma_x$ だから $d_1(\eta_1(\sigma))=\eta_0(\sigma\circ\varepsilon_0^{(1)})-\eta_0(\sigma\circ\varepsilon_1^{(1)})=\eta_0(\sigma_y)-\eta_0(\sigma_x)$. 故に $\eta_0(\sigma_y)-\eta_0(\sigma_x)\in B_0(X,\emptyset)$ である. 一方 $C_0(X)=Z_0(X,\emptyset)$ は $\{\eta_0(\sigma_x)\,|\,x\in X\}$ を基底とする自由アーベル群である. 故に $Z_0(X,\emptyset)$ の $B_0(X,\emptyset)$ による商群 $H_0(X)$ はただつの要素 $\pi_{X,\emptyset}(\eta_0(\sigma_x))$ で生成される自由アーベル群だから $\boldsymbol{Z}$ と同型である. □

命題 2.5　X が一点だけからなる位相空間ならば $n\neq0$ に対して $H_n(X)=\{0\}$ である.

証明 $n \geqq 0$ に対し $S_n(X)$ は定値写像 $\nu_n : \Delta^n \to X$ だけからなる集合 $\{\nu_n\}$ だから $C_n(X)$ は 1 つの要素 $\eta_n(\nu_n)$ で生成される自由アーベル群である．$n \geqq 1$ ならば $i = 0, 1, \ldots, n$ に対して $\nu_n \circ \varepsilon_i^{(n)} = \nu_{n-1}$ だから $d_n(\eta_n(\nu_n)) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \eta_{n-1}(\nu_n \circ \varepsilon_i^{(n)}) = \begin{cases} \eta_{n-1}(\nu_{n-1}) & n \text{ は偶数} \\ 0 & n \text{ は奇数} \end{cases}$ が成り立つ．従って $d_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ は $n \geqq 1$ かつ n が偶数ならば同型写像であり, $n \geqq 1$ かつ n が奇数ならば零写像である．故に $n \geqq 1$ かつ n が偶数ならば $\operatorname{Ker} d_n = \{0\}$ だから $H_n(X) = \{0\}$ であり, $n \geqq 1$ かつ n が奇数ならば $\operatorname{Im} d_{n+1} = C_n(X)$ だからこの場合も $H_n(X) = \{0\}$ である． □

(X, A) を位相空間対とする．$x \in H_n(X, A)$ に対して $\pi_{X,A}(z) = x$ を満たす $z \in Z_n(X, A) \subset C_n(X)/C_n(A)$ を選び, さらに $p_n(c) = z$ を満たす $c \in C_n(X)$ を選ぶ．$d_n(z) = 0$ だから, $i : A \to X$ を包含写像とすれば次の図式の右上の長方形の可換性から $p_{n-1}(d_n(c)) = 0$ となるため, $a \in C_{n-1}(A)$ で $(C_{n-1}(i))(a) = d_n(c)$ を満たすものがある．さらに次の図式の左下の長方形の可換性から $(C_{n-2}(i))(d_{n-1}(a)) = d_{n-1}((C_{n-1}(i))(a)) = d_{n-1}(d_n(c)) = 0$ であり, $C_{n-2}(i)$ は単射だから $d_{n-1}(a) = 0$ が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
C_n(A) \arrow[r, "C_n(i)"] \arrow[d, "d_n"] & C_n(X) \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "d_n"] & C_n(X)/C_n(A) \arrow[d, "d_n"] \\
C_{n-1}(A) \arrow[r, "C_{n-1}(i)"] \arrow[d, "d_{n-1}"] & C_{n-1}(X) \arrow[r, "p_{n-1}"] \arrow[d, "d_{n-1}"] & C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A) \arrow[d, "d_{n-1}"] \\
C_{n-2}(A) \arrow[r, "C_{n-2}(i)"] & C_{n-2}(X) \arrow[r, "p_{n-2}"] & C_{n-2}(X)/C_{n-2}(A)
\end{tikzcd}$$

すなわち $a \in Z_{n-1}(A, \emptyset)$ だから商写像 $\pi_{A,\emptyset} : Z_{n-1}(A, \emptyset) \to H_n(A, \emptyset) = H_n(A)$ による像を $\partial_n(x)$ で表せば, $\partial_n(x)$ は $\pi_{X,A}(z) = x$ を満たす $z \in Z_n(X, A)$ と $p_n(c) = z$ を満たす $c \in C_n(X)$ の選び方に依存しないことが確かめられる．従って $x \in H_n(X, A)$ を $\partial_n(x)$ に対応させる写像 $\partial_n : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$ が定義され, ∂_n はアーベル群の準同型写像であることも確かめられる．この準同型写像に関して以下の命題 2.6, 命題 2.8 が成り立つ．

命題 2.6 位相空間対の連続写像 $f : (X, A) \to (Y, B)$ に対し, 次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
H_n(X, A) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_{n-1}(A) \arrow[d, "H_{n-1}(f_A)"] \\
H_n(Y, B) \arrow[r, "\partial_n"] & H_{n-1}(B)
\end{tikzcd}$$

定義 2.7 $f_i : G_i \to G_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ をアーベル群の準同型写像とする．$i = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して $\operatorname{Im} f_{i-1} = \operatorname{Ker} f_i$ が成り立つとき, 次の図式を完全列という．

$$G_0 \xrightarrow{f_0} G_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{i-2}} G_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} G_n$$

命題 2.8 位相空間対 (X, A) に対し, $i : A \to X$, $j : (X, \emptyset) \to (X, A)$ を包含写像とする．次の図式は完全列である．

$$\cdots \xrightarrow{H_{n+1}(j)} H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} \cdots$$

定義 2.9 $f : (X, A) \to (Y, B)$ を位相空間対の連続写像とする．f が X の部分空間 $X - A$ を Y の部分空間 $Y - B$ の上に同相に写すとき, f を相対同相写像という．(X, A) を位相空間対, U を A の部分集合とするとき, 包含写像 $X - U \to X$ から定まる位相空間対の連続写像 $(X - U, A - U) \to (X, A)$ は相対同相写像であるが, これを切除写像という．

切除写像に関して次の結果が示される．

定理 2.10 (X, A) を位相空間対とする．X の開集合 U が $\overline{U} \subset A$ を満たすとき, 切除写像 $j : (X - U, A - U) \to (X, A)$ が誘導する写像 $H_n(j) : H_n(X - U, A - U) \to H_n(X, A)$ はすべての $n \in \boldsymbol{Z}$ に対して同型写像である．

§3.　球面のホモロジー群と写像度

アーベル群 G と H の直積集合 $G \times H$ に加法を $(x,y)+(z,w)=(x+z,y+w)$ で定義して得られるアーベル群を G と H の直和といい, $G \oplus H$ で表す. また, アーベル群の準同型写像 $\varphi : G \to P$, $\psi : H \to Q$ に対して準同型写像 $\varphi \oplus \psi : G \oplus H \to P \oplus Q$ を $(\varphi \oplus \psi)(x,y) = (\varphi(x), \psi(y))$ で定義する. 前節の結果から次の結果が示される.

定理 3.1　Y, Z を位相空間 X の部分空間とし, $i : Y\cap Z \to Y$, $j : Y \cap Z \to Z$, $k : Y \to X$, $l : Z \to X$ を包含写像とする. $\iota_n : H_n(Y\cap Z) \to H_n(Y) \oplus H_n(Z)$, $\kappa_n : H_n(Y) \oplus H_n(Z) \to H_n(X)$ をそれぞれ次のように定義する.

$$\iota_n(x) = (H_n(i)(x), -H_n(j)(x)), \qquad \kappa_n(u,v) = H_n(k)(u) + H_n(l)(v)$$

$X = Y \cup Z$ であり, X の各点が Y の内点または Z の内点であるとき, 次の完全列がある.

$$\cdots \xrightarrow{\bar{\partial}_{n+1}} H_n(Y\cap Z) \xrightarrow{\iota_n} H_n(Y)\oplus H_n(Z) \xrightarrow{\kappa_n} H_n(X) \xrightarrow{\bar{\partial}_n} H_{n-1}(Y\cap Z) \xrightarrow{\iota_{n-1}} \cdots$$

さらに U, V が位相空間 W の部分空間で W の各点が U の内点または V の内点であり, 連続写像 $f : X \to W$ が $f(Y) \subset U$, $f(Z) \subset V$ を満たすとき, $f_Y : Y \to U$, $f_Z : Z \to V$, $f_{Y\cap Z} : Y \cap Z \to U \cap V$ を f から定まる写像とすれば, 次の図式は可換である.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\bar{\partial}_{n+1}"] & H_n(Y\cap Z) \arrow[r, "\iota_n"] \arrow[d, "H_n(f_{Y\cap Z})"] & H_n(Y)\oplus H_n(Z) \arrow[r, "\kappa_n"] \arrow[d, "H_n(f_Y)\oplus H_n(f_Z)"] & H_n(X) \arrow[r, "\bar{\partial}_n"] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_{n-1}(Y\cap Z) \arrow[r, "\iota_{n-1}"] \arrow[d, "H_{n-1}(f_{Y\cap Z})"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\bar{\partial}_{n+1}"] & H_n(U\cap V) \arrow[r, "\iota_n"] & H_n(U)\oplus H_n(V) \arrow[r, "\kappa_n"] & H_n(W) \arrow[r, "\bar{\partial}_n"] & H_{n-1}(U\cap V) \arrow[r, "\iota_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

注意 3.2　$\bar{\partial}_n : H_n(X) \to H_{n-1}(Y\cap Z)$ は次のように定義される準同型写像である. 定理 3.1 の包含写像 i, j, k, l から定まる写像 $C_n(i) : C_n(Y\cap Z) \to C_n(Y)$, $C_n(j) : C_n(Y\cap Z) \to C_n(Z)$, $C_n(k) : C_n(Y) \to C_n(X)$, $C_n(l) : C_n(Z) \to C_n(X)$ を包含写像とみなして $C_n(Y\cap Z)$, $C_n(Y)$, $C_n(Z)$ を $C_n(X)$ の部分群とみなす. $\alpha \in H_n(X)$ に対し, $c \in Z_n(X, \emptyset)$ で $\pi_{X,\emptyset}(c) = \alpha$ を満たすものを選ぶ. Y, Z が定理 3.1 の条件を満せば $a \in C_n(Y)$ と $b \in C_n(Z)$ で $a+b-c \in B_n(X,\emptyset)$ を満たすものが存在することが知られている. $d_n(c) = d_n(a+b-c) = 0$ だから $d_n(a)+d_n(b) = d_n(a+b-c) = 0$ が成り立つので $d_n(a) = -d_n(b) \in C_{n-1}(Z)$ である. 一方 $d_n(a) \in C_{n-1}(Y)$ だから $d_n(a) \in C_{n-1}(Y)\cap C_{n-1}(Z)$ である. ここで $S_{n-1}(Y)\cap S_{n-1}(Z) = S_{n-1}(Y\cap Z)$ から $C_{n-1}(Y)\cap C_{n-1}(Z) = C_{n-1}(Y\cap Z)$ が成り立つことが分かるので $d_n(a) \in C_{n-1}(Y\cap Z)$ であり, 命題 1.4 から $d_n(a) \in Z_{n-1}(Y\cap Z, \emptyset)$ である. そこで $\pi_{Y\cap Z,\emptyset}(d_n(a)) \in H_{n-1}(Y\cap Z,\emptyset)$ を $\bar{\partial}_n(\alpha)$ と定義する.

$\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^{n+1}$ に対し $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ とおく. $S^n = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1} | \, \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ とおき, S^n を n 次元球面という. $\boldsymbol{n} = (0,0,\ldots,0,1)$, $\boldsymbol{s} = (0,0,\ldots,-1) \in S^n$ とおき, $Y = S^n - \{\boldsymbol{n}\}$, $Z = S^n - \{\boldsymbol{s}\}$ とおけば Y と Z は S^n の開集合であり, $S^n = Y \cup Z$ が成り立つ.

補題 3.3　Y と Z はともに 1 点からなる位相空間とホモトピー同値であり, $Y \cap Z$ は S^{n-1} とホモトピー同値である.

証明　$r_{n+1} : \boldsymbol{R}^{n+1} - \{\boldsymbol{0}\} \to S^n$ を $r_{n+1}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}$ で定義すれば r_{n+1} は連続写像である. $\boldsymbol{x} \in Y$ と $\boldsymbol{s}$ が 1 次従属になるのは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{s}$ の場合だけだから, 任意の $t \in [0,1]$ に対して $t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{0}$ である. そこで $H : Y \times [0,1] \to Y$ を $H(\boldsymbol{x}, t) = r_{n+1}(t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{s})$ で定めれば H は連続写像であり, 任意の $\boldsymbol{x} \in Y$ に対して $H(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{s}$, $H(\boldsymbol{x}, 1) = \boldsymbol{x}$ が成り立つ. 従って $c : Y \to \{\boldsymbol{s}\}$ を定値写像, $i : \{\boldsymbol{s}\} \to Y$ 包含写像とすれば H は $i \circ c$ から Y の恒等写像へのホモトピーである. $c \circ i$ は $\{\boldsymbol{s}\}$ の恒等写像に一致するため, Y は 1 点からなる位相空間とホモトピー同値である. 同様に Z も 1 点からなる位相空間とホモトピー同値である.

$\rho : \boldsymbol{R}^{n+1} \to \boldsymbol{R}$ を $\rho(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ で定める. $\boldsymbol{x} \in Y \cap Z$ ならば $\rho(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ だから $f : Y\cap Z \to S^{n-1}$ を $f(\boldsymbol{x}) = r_n(\rho(\boldsymbol{x}))$ で定義できる. また $g : S^{n-1} \to Y \cap Z$ を $g(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, 0)$ で定めれば, f, g は連続写像であり, $f \circ g = id_{S^{n-1}}$ が成り立つ. $(1-t)g(f(\boldsymbol{x})) + t\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in Y \cap Z$

と $t \in [0,1]$ が存在すれば, $(1-t)g(f(\boldsymbol{x}))$ の第 $n+1$ 成分が 0 であることから $tx_n = 0$ である. $t=0$ ならば $g(f(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$ となり $g(f(\boldsymbol{x})) \in Y \cap Z$ と矛盾する. $x_n = 0$ ならば $\|\rho(\boldsymbol{x})\| = 1$ だから $g(f(\boldsymbol{x})) = g(\rho(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$ が成り立つため $(1-t)g(f(\boldsymbol{x}))+t\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ が得られて, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ と矛盾する. 故に $\boldsymbol{x} \in Y \cap Z$ ならば任意の $t \in [0,1]$ に対して $(1-t)g(f(\boldsymbol{x}))+t\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ である. そこで $G : (Y\cap Z)\times[0,1] \to Y\cap Z$ を $G(\boldsymbol{x},t) = r_{n+1}((1-t)g(f(\boldsymbol{x}))+t\boldsymbol{x})$ で定義すれば G は連続写像であり, 任意の $\boldsymbol{x} \in Y \cap Z$ に対して $G(\boldsymbol{x},0) = r_{n+1}(g(f(\boldsymbol{x}))) = (g\circ f)(\boldsymbol{x})$, $G(\boldsymbol{x},1) = r_{n+1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ が成り立つため G は $g\circ f$ から $Y \cap Z$ の恒等写像へのホモトピーである. □

定理 3.4 $n \geqq 1$ ならば $H_n(S^n)$ と $H_0(S^n)$ は $\boldsymbol{Z}$ と同型であり, $H_0(S^0)$ は $\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}$ と同型である. $i \neq n$ かつ $i \neq 0$ ならば $H_i(S^n) = \{0\}$ である.

証明 上で定義した S^n の開集合 Y, Z に対して定理 3.1 を用いると次の完全列が得られる.

$$\cdots \xrightarrow{\iota_i} H_i(Y)\oplus H_i(Z) \xrightarrow{\kappa_i} H_i(S^n) \xrightarrow{\bar\partial_i} H_{i-1}(Y\cap Z) \xrightarrow{\iota_{i-1}} H_{i-1}(Y)\oplus H_{i-1}(Z) \xrightarrow{\bar\partial_{i-1}} \cdots$$

補題 3.3, 系 2.3, 命題 2.5 から $i \neq 0$ ならば $H_i(Y) = H_i(Z) = \{0\}$ だから, 上の完全列より $i \geqq 2$ ならば $0 \to H_i(S^n) \xrightarrow{\bar\partial_i} H_{i-1}(Y\cap Z) \to 0$ は完全列である. 故に $\bar\partial_i : H_i(S^n) \to H_{i-1}(Y\cap Z)$ は同型写像であり, 補題 3.3 と系 2.3 から $H_{i-1}(Y\cap Z)$ は $H_{i-1}(S^{n-1})$ と同型だから $i \geqq 2$ ならば $H_i(S^n)$ と $H_{i-1}(S^{n-1})$ は同型である.

命題 2.4 から $H_0(Y)$ と $H_0(Z)$ は $\boldsymbol{Z}$ と同型であり, S^{n-1} とホモトピー同値である $Y\cap Z$ は $n \geqq 2$ の場合に弧状連結だから, $H_0(Y\cap Z)$ も $\boldsymbol{Z}$ と同型である. $x \in Y\cap Z$ を 1 つ選べば $\iota_0 : H_0(Y\cap Z) \to H_0(Y)\oplus H_0(Z)$ は $H_0(Y\cap Z)$ の生成元 $\pi_{Y\cap Z,\emptyset}(\eta_0(\sigma_x))$ を零でない $H_0(Y)\oplus H_0(Z)$ の要素 $(\pi_{Y,\emptyset}(\eta_0(i\circ\sigma_x)), -\pi_{Z,\emptyset}(\eta_0(j\circ\sigma_x)))$ に写すため ι_0 は単射である. $0 \to H_1(S^n) \xrightarrow{\bar\partial_1} H_0(Y\cap Z) \xrightarrow{\iota_0} H_0(Y)\oplus H_0(Z)$ は完全列だから $\operatorname{Im}\bar\partial_1 = \operatorname{Ker}\iota_0 = \{0\}$ である. 従って $\operatorname{Ker}\bar\partial_1 = H_1(S^n)$ であるが, $\bar\partial_1$ は単射だから, $n \geqq 2$ ならば $H_1(S^n) = \{0\}$ である.

$n=1$ の場合, $U = \{(x_0,x_1)\in S^1 \,|\, x_0 > 0\}$, $V = \{(x_0,x_1)\in S^1 \,|\, x_0 < 0\}$ とおけば $Y\cap Z = U\cup V$, $U\cap V = \emptyset$ であり, U, V はともに弧状連結である. $x = (1,0)$, $y = (-1,0)$ とおくと $x \in U$, $y \in V$ であり, $Y\cap Z$ は $Y\cap Z$ の開集合 U, V の交わらない合併集合だから, 連続写像 $\omega : [0,1] \to Y\cap Z$ で $\omega(0) = x$, $\omega(1) = y$ を満たすものは $[0,1]$ の連結性により存在しない. 従って $\sigma_x, \sigma_y \in S_0(Y\cap Z)$ とみなせば $\eta_0(\sigma_x) - \eta_0(\sigma_y) \notin B_0(Y\cap Z,\emptyset)$ である. $u \in U$, $v \in V$ ならば U, V が弧状連結であることから $\sigma \in S_1(U)$, $\tau \in S_1(V)$ で $d_1(\eta_1(\sigma)) = \eta_0(\sigma_u) - \eta_0(\sigma_x)$, $d_1(\eta_1(\tau)) = \eta_0(\sigma_v) - \eta_0(\sigma_y)$ を満たすものが存在するため $H_0(Y\cap Z) = Z_0(Y\cap Z,\emptyset)/B_0(Y\cap Z,\emptyset)$ は $\pi_{Y\cap Z,\emptyset}(\eta_0(\sigma_x))$ と $\pi_{Y\cap Z,\emptyset}(\eta_0(\sigma_y))$ で生成される自由アーベル群である. $\iota_0(\pi_{Y\cap Z,\emptyset}(\eta_0(\sigma_x))) = (\pi_{Y,\emptyset}(\eta_0(i\circ\sigma_x)), -\pi_{Z,\emptyset}(\eta_0(j\circ\sigma_y)))$, $\iota_0(\pi_{Y\cap Z,\emptyset}(\eta_0(\sigma_y))) = (\pi_{Y,\emptyset}(\eta_0(i\circ\sigma_y)), -\pi_{Z,\emptyset}(\eta_0(j\circ\sigma_y)))$ であり, Y と Z は弧状連結だから $\sigma' \in S_1(Y)$, $\sigma'' \in S_1(Z)$ で $d_1(\eta_1(\sigma')) = \eta_0(i\circ\sigma_x) - \eta_0(i\circ\sigma_y)$, $d_1(\eta_1(\sigma'')) = \eta_0(j\circ\sigma_x) - \eta_0(j\circ\sigma_y)$ を満たすものが存在するため, 上式から $\iota_0(\pi_{Y\cap Z,\emptyset}(\eta_0(\sigma_x))) = \iota_0(\pi_{Y\cap Z,\emptyset}(\eta_0(\sigma_y)))$ である. 故に $\operatorname{Ker}\iota_0$ は $\pi_{Y\cap Z,\emptyset}(\eta_0(\sigma_x)) - \pi_{Y\cap Z,\emptyset}(\eta_0(\sigma_y))$ で生成される $H_0(Y\cap Z)$ の $\boldsymbol{Z}$ と同型な部分群である. $0 \to H_1(S^1) \xrightarrow{\bar\partial_1} H_0(Y\cap Z) \xrightarrow{\iota_0} H_0(Y)\oplus H_0(Z)$ は完全列だから, $\bar\partial_1$ は $\operatorname{Ker}\iota_0$ への同型写像を与えるため, $H_1(S^1)$ は $\boldsymbol{Z}$ と同型である. $H_0(Y\cap Z)$ は $\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}$ と同型で, 補題 3.3 より $Y\cap Z$ は S^0 とホモトピー同値だから $H_0(S^0)$ は $\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}$ と同型である.

$\alpha_i, \beta_i : \Delta^i \to S^0$ をそれぞれ 1, -1 への定値写像とすれば $C_i(S^0)$ は $\eta_i(\alpha_i)$, $\eta_i(\beta_i)$ で生成される自由アーベル群である. 命題 2.5 の証明と同様にして $d_i : C_i(S^0) \to C_{i-1}(S^0)$ は i が正の偶数ならば同型写像であり, i が奇数ならば零写像であることが示されるため, $i \neq 0$ ならば $H_n(S^0) = \{0\}$ である.

以上から $1 \leqq i < n$ ならば $H_i(S^n)$ は $H_1(S^{n-i+1})$ と同型だから $H_i(S^n) = \{0\}$ である. $H_n(S^n)$ は $H_1(S^1)$ と同型だから $H_n(S^n)$ は $\boldsymbol{Z}$ と同型である. $i > n$ ならば $H_i(S^n)$ は $H_{i-n}(S^0)$ と同型だから $H_i(S^n) = \{0\}$ である.□

S^1 を絶対値が 1 である複素数全体の集合とみなし, $H_1(S^1)$ の生成元について調べる. 自然数 n と $k = 1,2,\ldots,n$ に対し $\sigma_{n,k}, \tau_{n,k} \in S_1(S^1)$, $\tilde\sigma_{n,k} \in S_2(S^1)$ を以下で定める.

$$\sigma_{n,k}(x_0,x_1) = \cos\left(\frac{2\pi(x_0+k-1)}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi(x_0+k-1)}{n}\right), \quad \tau_{n,k}(x_0,x_1) = \cos\left(\frac{2\pi k x_0}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k x_0}{n}\right)$$

$$\tilde{\sigma}_{n,k}(x_0,x_1,x_2)=\cos\left(\frac{2\pi(kx_0+(k-1)x_1)}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi(kx_0+(k-1)x_1)}{n}\right)$$

また, $\tau_{n,0}\in S_1(S^1)$ を Δ^1 から 1 への定値写像, $\tilde{\sigma}_0\in S_2(S^1)$ を Δ^2 から 1 への定値写像とする.

補題 3.5 (1) $c_n\in C_1(S^1)$ を $c_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\eta_1(\sigma_{n,k})$ で定めれば $c_n\in Z_1(S^1,\emptyset)$ である.

(2) $\tilde{c}_n\in C_2(S^1)$ を $\tilde{c}_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\eta_2(\tilde{\sigma}_{n,k})-\eta_2(\tilde{\sigma}_0)$ で定めれば $d_2(\tilde{c}_n)=c_n-c_1$ である.

(3) $\gamma\in H_1(S^1)$ を $\gamma=\pi_{S^1,\emptyset}(c_1)$ で定めれば $\pi_{S^1,\emptyset}(c_n)=\gamma$ がすべての自然数 n に対して成り立つ.

(4) γ は $H_1(S^1)$ の生成元である

証明 (1) 等式 $\big(\sigma_{n,k}\circ\varepsilon_1^{(1)}\big)(1)=\sigma_{n,k}(1,0)=\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)=\sigma_{n,k+1}(0,1)=\big(\sigma_{n,k+1}\circ\varepsilon_0^{(1)}\big)(1)$ が $k=1,2,\dots,n-1$ に対して成り立ち, $\big(\sigma_{n,n}\circ\varepsilon_1^{(1)}\big)(1)=\sigma_{n,n}(1,0)=1=\sigma_{n,1}(0,1)=\big(\sigma_{n,1}\circ\varepsilon_0^{(1)}\big)(1)$ だから

$$\begin{aligned}d_1(c_n)&=\sum_{k=1}^{n}d_1(\eta_1(\sigma_{n,k}))=\sum_{k=1}^{n}\Big(\eta_0\big(\sigma_{n,k}\circ\varepsilon_0^{(1)}\big)-\eta_0\big(\sigma_{n,k}\circ\varepsilon_1^{(1)}\big)\Big)\\&=\sum_{k=1}^{n}\eta_0\big(\sigma_{n,k}\circ\varepsilon_0^{(1)}\big)-\sum_{k=1}^{n-1}\eta_0\big(\sigma_{n,k+1}\circ\varepsilon_0^{(1)}\big)-\eta_0\big(\sigma_{n,1}\circ\varepsilon_0^{(1)}\big)=\sum_{k=2}^{n}\eta_0\big(\sigma_{n,k}\circ\varepsilon_0^{(1)}\big)-\sum_{k=2}^{n}\eta_0\big(\sigma_{n,k}\circ\varepsilon_0^{(1)}\big)=0\end{aligned}$$

が成り立つため, $c_n\in Z_1(S^1,\emptyset)$ である.

(2) $\tilde{\sigma}_0\circ\varepsilon_0^{(2)}=\tilde{\sigma}_0\circ\varepsilon_1^{(2)}=\tilde{\sigma}_0\circ\varepsilon_2^{(2)}=\tau_{n,0}$ だから $d_2(\eta_2(\tilde{\sigma}_0))=\eta_1(\tau_{n,0})$ である. $k=1,2,\dots,n$ に対して等式

$$\begin{aligned}\big(\tilde{\sigma}_{n,k}\circ\varepsilon_0^{(2)}\big)(x_0,x_1)&=\tilde{\sigma}_{n,k}(0,x_0,x_1)=\cos\left(\frac{2\pi(k-1)x_0}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi(k-1)x_0}{n}\right)=\tau_{n,k-1}(x_0,x_1)\\\big(\tilde{\sigma}_{n,k}\circ\varepsilon_1^{(2)}\big)(x_0,x_1)&=\tilde{\sigma}_{n,k}(x_0,0,x_1)=\cos\left(\frac{2\pi kx_0}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi kx_0}{n}\right)=\tau_{n,k}(x_0,x_1)\\\big(\tilde{\sigma}_{n,k}\circ\varepsilon_2^{(2)}\big)(x_0,x_1)&=\tilde{\sigma}_{n,k}(x_0,x_1,0)=\cos\left(\frac{2\pi(x_0+k-1)}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi(x_0+k-1)}{n}\right)=\sigma_{n,k}(x_0,x_1)\end{aligned}$$

が成り立つため $d_2(\eta_2(\tilde{\sigma}_{n,k}))=\eta_1(\tau_{n,k-1})-\eta_1(\tau_{n,k})+\eta_1(\sigma_{n,k})$ が得られる. $\eta_1(\tau_{n,n})=\eta_1(\sigma_{1,1})=c_1$ であることに注意すれば $d_2(\tilde{c}_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}d_2(\eta_2(\tilde{\sigma}_{n,k}))-d_2(\eta_2(\tilde{\sigma}_0))=-c_1+c_n$ が成り立つ.

(3) 上の結果から $c_n-c_1\in B_1(S^1,\emptyset)$ だから, 主張が成り立つ.

(4) (3) より $\pi_{S^1,\emptyset}(c_2)=\gamma$ であり c_2 の定義から $c_2=\eta_1(\sigma_{2,2})+\eta_1(\sigma_{2,1})$ であるが, $\sigma_{2,1}:\Delta^1\to S^1$ の像は $S^1-\{\boldsymbol{s}\}=Z$ に含まれ, $\sigma_{2,2}:\Delta^1\to S^1$ の像は $S^1-\{\boldsymbol{n}\}=Y$ に含まれるため, $\eta_1(\sigma_{2,1})\in C_1(Z)$, $\eta_1(\sigma_{2,2})\in C_1(Y)$ とみなすことができる. 注意 3.2 から $d_1(\eta_1(\sigma_{2,2}))=\eta_0\big(\sigma_{2,2}\circ\varepsilon_0^{(1)}\big)-\eta_0\big(\sigma_{2,2}\circ\varepsilon_1^{(1)}\big)=\eta_0(\sigma_{-1})-\eta_0(\sigma_1)$ を $Z_0(Y\cap Z)$ の要素とみなしたとき, $\pi_{Y\cap Z,\emptyset}(\eta_0(\sigma_{-1})-\eta_0(\sigma_1))$ が $\bar{\partial}_1:H_1(S^1)\to H_0(Y\cap Z)$ の像である. 一方定理 3.4 の証明から $\bar{\partial}_1$ は $\pi_{Y\cap Z,\emptyset}(\eta_0(\sigma_{-1})-\eta_0(\sigma_1))$ で生成される $\boldsymbol{Z}$ と同型な $H_0(Y\cap Z)$ の部分群 $\operatorname{Ker}\iota_0$ への同型写像を与えるため, γ は $H_1(S^1)$ の生成元である. □

定義 3.6 n を自然数とし, γ_n を $H_n(S^n)$ の生成元とする. 定理 3.4 から連続写像 $f:S^n\to S^n$ に対して $H_n(f)(\gamma_n)=d\gamma_n$ を満たす整数 d が 1 通りに定まるが, この d を f の写像度といい, $\deg(f)$ で表す.

注意 3.7 $n\geqq 1$ ならば $H_n(S^n)$ は $\boldsymbol{Z}$ と同型だから $H_n(S^n)$ は 2 つの生成元を持ち γ_n が $H_n(S^n)$ の生成元ならば, もう 1 つの生成元は $-\gamma_n$ である. $H_n(f)(\gamma_n)=d\gamma_n$ ならば $H_n(f)(-\gamma_n)=d(-\gamma_n)$ だから f の写像度は $H_n(S^n)$ の生成元の選び方に依存しない.

命題 3.8 (1) 連続写像 $f,g:S^n\to S^n$ に対し, $\deg(g\circ f)=\deg(g)\deg(f)$ が成り立つ.

(2) $f,g:S^n\to S^n$ がホモトピックな連続写像ならば $\deg(f)=\deg(g)$ である.

(3) 定値写像の写像度は 0 であり, 恒等写像の写像度は 1 である.

証明 (1) $H_n(f)(\gamma_n)=\deg(f)\gamma_n$, $H_n(g)(\gamma_n)=\deg(g)\gamma_n$, $H_n(g\circ f)(\gamma_n)=\deg(g\circ f)\gamma_n$ であり, 命題 1.10 から

$$\begin{aligned}H_n(g\circ f)(\gamma_n)&=(H_n(g)\circ H_n(f))(\gamma_n)=H_n(g)(H_n(f)(\gamma_n))=H_n(g)(\deg(f)\gamma_n)\\&=\deg(f)H_n(g)(\gamma_n)=\deg(f)\deg(g)\gamma_n\end{aligned}$$

が成り立つため $\deg(g\circ f)=\deg(g)\deg(f)$ である.

(2) 定理 2.2 より $H_n(f)=H_n(g)$ だから $\deg(f)\gamma_n=\deg(g)\gamma_n$ である. 故に $\deg(f)=\deg(g)$ である.

(3) $c:S^n\to S^n$ を定値写像とし, c の像を $\{\boldsymbol{p}\}$ とする. $\kappa:S^n\to\{\boldsymbol{p}\}$ を定値写像, $\iota:\{\boldsymbol{p}\}\to S^n$ を包含写像とすれば $c=\iota\circ\kappa$ であり, $H_n(\kappa)(\gamma_n)\in H_n(\{\boldsymbol{p}\})$ が成り立つ. 命題 2.5 より $H_n(\{\boldsymbol{p}\})=\{0\}$ だから $H_n(\kappa)(\gamma_n)=0$ である. 故に命題 1.10 より $H_n(c)(\gamma_n)=H_n(\iota\circ\kappa)(\gamma_n)=(H_n(\iota)\circ H_n(\kappa))(\gamma_n)=H_n(\iota)(H_n(\kappa)(\gamma_n))=0$ だから $\deg(c)=0$ である. 命題 1.10 から $H_n(id_{S^n})$ は $H_n(S^n)$ の恒等写像だから $H_n(id_{S^n})(\gamma_n)=\gamma_n$ である. 従って $\deg(id_{S^n})=1$ である. □

命題 3.9 $T:S^n\to S^n$ を $T(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{x}$ で定義される写像とすれば $\deg(T)=(-1)^{n+1}$ である.

証明 $i=1,2,\dots,n+1$ に対して $\tau_i^n:S^n\to S^n$ を $\tau_i^n(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})=(x_1,\dots,x_{i-1},-x_i,x_{i+1},\dots,x_{n+1})$ で定義すれば, $T=\tau_1^n\circ\tau_2^n\circ\cdots\circ\tau_{n+1}^n$ だから $\deg(\tau_i^n)=-1$ であることを示せば, 命題 3.8 の (1) から $\deg(T)=(-1)^{n+1}$ が得られる. $H_i:S^n\times[0,1]\to S^n$ を以下のように定めれば, H_i は τ_i^n から τ_1^n へのホモトピーである.

$$H_i((x_1,x_2,\dots,x_{n+1}),t)=(x_1\cos(\pi t)+x_i\sin(\pi t),x_2,\dots,x_{i-1},x_1\sin(\pi t)-x_i\cos(\pi t),x_{i+1},\dots,x_{n+1})$$

従って命題 3.8 の (2) から $\deg(\tau_i^n)=\deg(\tau_1^n)$ だから $\deg(\tau_1^n)=-1$ を示せばよい.

S^n の開集合 Y, Z を補題 3.3 の上で定めたものとすれば $\tau_1^n(Y)\subset Y$, $\tau_1^n(Z)\subset Z$ だから定理 3.1 より下の図式の左側の長方形は可換である. また $g:S^{n-1}\to Y\cap Z$ を補題 3.3 の証明で与えたホモトピー同値写像とすれば $(\tau_1^n)_{Y\cap Z}\circ g=g\circ\tau_1^{n-1}$ だから命題 1.10 によって下の図の右側の長方形も可換である.

$$\begin{array}{ccccc}H_n(S^n)&\xrightarrow{\bar\partial_n}&H_{n-1}(Y\cap Z)&\xleftarrow{H_{n-1}(g)}&H_{n-1}(S^{n-1})\\\downarrow{\scriptstyle H_n(\tau_1^n)}&&\downarrow{\scriptstyle H_{n-1}((\tau_1^n)_{Y\cap Z})}&&\downarrow{\scriptstyle H_{n-1}(\tau_1^{n-1})}\\H_n(S^n)&\xrightarrow{\bar\partial_n}&H_{n-1}(Y\cap Z)&\xleftarrow{H_{n-1}(g)}&H_{n-1}(S^{n-1})\end{array}$$

$n\geqq 2$ ならば $\bar\partial_n:H_n(S^n)\to H_{n-1}(Y\cap Z)$ は同型写像であり, $H_{n-1}(g):H_{n-1}(S^{n-1})\to H_{n-1}(Y\cap Z)$ も同型写像だから, 上図の可換性から $\deg(\tau_1^n)=\deg(\tau_1^{n-1})$ が $n\geqq 2$ に対して成り立つ. 故に $\deg(\tau_1^n)=\deg(\tau_1^1)$ である.

$x,y\in S^1$ を $x=(1,0)$, $y=(-1,0)$ で定めれば, 定理 3.4 の証明でみたように $\iota_0:H_0(Y\cap Z)\to H_0(Y)\oplus H_0(Z)$ の核は $\pi_{Y\cap Z,\emptyset}(\eta_0(\sigma_x))-\pi_{Y\cap Z,\emptyset}(\eta_0(\sigma_y))$ で生成される $H_0(Y\cap Z)$ の $\boldsymbol{Z}$ と同型な部分群である. $\tau_1^1(x)=y$, $\tau_1^1(y)=x$ だから $\tau_1^1\circ\sigma_x=\sigma_y$, $\tau_1^1\circ\sigma_y=\sigma_x$ である. 従って $\gamma=\pi_{Y\cap Z,\emptyset}(\eta_0(\sigma_x))-\pi_{Y\cap Z,\emptyset}(\eta_0(\sigma_y))$ とおけば $H_0((\tau_1^1)_{Y\cap Z})(\gamma)=\pi_{Y\cap Z,\emptyset}(\eta_0(\tau_1^1\circ\sigma_x))-\pi_{Y\cap Z,\emptyset}(\eta_0(\tau_1^1\circ\sigma_y)))=\pi_{Y\cap Z,\emptyset}(\eta_0(\sigma_y))-\pi_{Y\cap Z,\emptyset}(\eta_0(\sigma_x))=-\gamma$ だから $\tilde\partial_1:H_1(S^1)\to\operatorname{Ker}\iota_0$ を単射 $\bar\partial_1:H_1(S^1)\to H_0(Y\cap Z)$ から定まる同型写像とすれば下の図式は可換である. 故に $H_1(\tau_1^1):H_1(S^1)\to H_1(S^1)$ は -1 倍する写像だから $\deg(\tau_1^1)=-1$ である.

$$\begin{array}{ccccccc}H_1(S^1)&\xrightarrow{\tilde\partial_1}&\operatorname{Ker}\iota_0&\xrightarrow{\text{包含写像}}&H_0(Y\cap Z)&\xrightarrow{\iota_0}&H_0(Y)\oplus H_0(Z)\\\downarrow{\scriptstyle H_1(\tau_1^1)}&&\downarrow{\scriptstyle -1\text{ 倍}}&&\downarrow{\scriptstyle H_0((\tau_1^1)_{Y\cap Z})}&&\downarrow{\scriptstyle H_0((\tau_1^1)_Y)\oplus H_0((\tau_1^1)_Z)}\\H_1(S^1)&\xrightarrow{\tilde\partial_1}&\operatorname{Ker}\iota_0&\xrightarrow{\text{包含写像}}&H_0(Y\cap Z)&\xrightarrow{\iota_0}&H_0(Y)\oplus H_0(Z)\end{array}$$

従って $\deg(\tau_1^n)=\deg(\tau_1^1)=-1$ が得られ, 主張が示された. □

命題 3.10 整数 n に対し, $\rho_n:S^1\to S^1$ を $\rho_n(z)=z^n$ で定めれば $\deg(\rho_n)=n$ である.

証明 ρ_0 はつねに値が 1 である定値写像だから命題 3.8 の (3) より $\deg(\rho_0)=0$ である. n が自然数の場合, 補題 3.5 の $\sigma_{n,k}\in C_1(S^1)$ を考えれば, $\rho_n\circ\sigma_{n,k}=\sigma_{1,1}$ だから $C_1(\rho_n)(c_n)=\sum_{k=1}^{n}\eta_1(\rho_n\circ\sigma_{n,k})=n\eta_1(\sigma_{1,1})=nc_1$ が成り立つため, 補題 3.5 の (3) から $H_1(\rho_n)(\gamma)=n\gamma$ である. 補題 3.5 の (4) から γ は $H_1(S^1)$ の生成元だから

$\deg(\rho_n) = n$ である. n が負の整数の場合, 命題 3.9 の証明で定めた写像 $\tau_2^1 : S^1 \to S^1$ を考えれば $z \in S^1$ に対して $\tau_2^1(z) = \bar{z} = z^{-1}$ だから $\tau_2^1 \circ \rho_{-n} = \rho_n$ が成り立ち, 命題 3.9 の証明から $\deg(\tau_2^1) = \deg(\tau_1^1) = -1$ である. 故に命題 3.8 の (1) と上で示したことから $\deg(\rho_n) = \deg(\tau_2^1 \circ \rho_{-n}) = \deg(\tau_2^1)\deg(\rho_{-n}) = (-1)(-n) = n$ である. □

命題 3.11 n が偶数で, 連続写像 $f : S^n \to S^n$ がすべての $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対し $f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ を満たすならば $\deg(f) = 0$ である.

証明 $T : S^n \to S^n$ を命題 3.9 の写像とすれば, 仮定から $f \circ T = f$ である. 従って命題 3.8 の (1) と命題 3.9 から $\deg(f) = \deg(f \circ T) = \deg(f)\deg(T) = (-1)^{n+1}\deg(f) = -\deg(f)$ だから $\deg(f) = 0$ である. □

実射影空間 $\boldsymbol{R}P^n$ のホモロジー群を調べることによって, 命題 3.11 と類似した次の定理が示される.

定理 3.12 n が奇数で, 連続写像 $f : S^n \to S^n$ がすべての $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対し $f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ を満たすならば $\deg(f)$ は偶数である.

さらに可換環 R に対して「R を係数とする位相空間 X のコホモロジー環 $H^*(X; R)$」の概念を定義し, 標数 2 の素体 $\boldsymbol{F}_2$ を係数とする $\boldsymbol{R}P^n$ のコホモロジー環 $H^*(\boldsymbol{R}P^n; \boldsymbol{F}_2)$ の構造を調べることによって次の定理が示される.

定理 3.13 連続写像 $f : S^n \to S^n$ がすべての $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対し $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ を満たせば, $\deg(f)$ は奇数である.

§4. 応用例

写像 $f, g : X \to Y$ に対し, $f(x) = g(x)$ を満たす $x \in X$ を f と g の一致点という. また $Y = X$ の場合, f と X の恒等写像との一致点を f の不動点という.

定理 4.1 連続写像 $f, g : S^n \to S^n$ が $\deg(f) \neq (-1)^{n+1}\deg(g)$ を満たせば, f と g の一致点が存在する. とくに $\deg(f) \neq (-1)^{n+1}$ ならば f の不動点が存在し, $\deg(f) \neq 0$ ならば, f は全射である.

証明 任意の $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対して $f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})$ ならば $\deg(f) = (-1)^{n+1}\deg(g)$ が成り立つことを示せばよい. $(1-t)f(\boldsymbol{x}) = tg(\boldsymbol{x})$ を満たす $t \in [0,1]$ と $\boldsymbol{x} \in S^n$ があれば, $\|f(\boldsymbol{x})\| = \|g(\boldsymbol{x})\| = 1$ だから $t = \dfrac{1}{2}$ となり, $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$ が得られて仮定に反する. 故に任意の $t \in [0,1]$ に対して $(1-t)f(\boldsymbol{x}) \neq tg(\boldsymbol{x})$ だから, 連続写像 $F : S^n \times [0,1] \to S^n$ を $F(\boldsymbol{x}, t) = \dfrac{(1-t)f(\boldsymbol{x}) - tg(\boldsymbol{x})}{\|(1-t)f(\boldsymbol{x}) - tg(\boldsymbol{x})\|}$ で定義できる. $F(\boldsymbol{x}, 0) = f(\boldsymbol{x})$, $F(\boldsymbol{x}, 1) = -g(\boldsymbol{x})$ だから命題 3.8 の (2), (1) と命題 3.9 より $\deg(f) = \deg(-g) = \deg(T \circ g) = \deg(T)\deg(g) = (-1)^{n+1}\deg(g)$ を得る. とくに g が S^n の恒等写像ならば, 命題 3.8 の (3) より $\deg(g) = 1$ だから $\deg(f) \neq (-1)^{n+1}$ ならば, f の不動点が存在する. 任意の $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対し, $g : S^n \to S^n$ を $\boldsymbol{x}$ への定値写像とすると, 命題 3.8 の (3) より $\deg(g) = 0$ だから $\deg(f) \neq 0$ ならば $f(\boldsymbol{x}_0) = g(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{x}_0 \in S^n$ がある. 従って f は全射である. □

$\boldsymbol{R}^n$ の原点を中心とする単位円板 $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \,|\, \|\boldsymbol{x}\| \leqq 1\}$ を D^n で表す. 次の定理を Brouwer の一致点定理といい, その後半の特別の場合を Brouwer の不動点定理という.

定理 4.2 n を 2 以上の整数とする. 連続写像 $f : D^n \to D^n$ は $f(S^{n-1}) \subset S^{n-1}$ を満たすとし, $\tilde{f} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ を $\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ で定める. $\deg(\tilde{f}) \neq 0$ ならば f は任意の連続写像 $g : D^n \to D^n$ と一致点をもつ. とくに, D^n から D^n への連続写像はつねに不動点をもつ.

証明 任意の $\boldsymbol{x} \in D^n$ に対して, $f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})$ が成り立つと仮定する. 各 $\boldsymbol{x} \in D^n$ に対し, $g(\boldsymbol{x})$ を始点として $f(\boldsymbol{x})$ を通る半直線と S^{n-1} との交点を $h(\boldsymbol{x})$ とする. ここで

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})}{\|f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})\|}, \quad s(\boldsymbol{x}) = -(f(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{x})) + \sqrt{1 - \|f(\boldsymbol{x})\|^2 + (f(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{x}))^2}$$

とおけば, $h(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + s(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x})$ となり, $h : D^n \to S^{n-1}$ は連続である．また, $\boldsymbol{x} \in S^{n-1}$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \in S^{n-1}$ だから $h(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ である．$F : S^{n-1} \times [0,1] \to S^{n-1}$ を $F(\boldsymbol{x}, t) = h(t\boldsymbol{x})$ で定める．このとき, $\boldsymbol{x} \in S^{n-1}$ を $F(\boldsymbol{x}, 0)$ に対応させる写像は $h(\boldsymbol{0})$ への定値写像で, $F(\boldsymbol{x}, 1) = h(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ となるため, $\tilde{f} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ は定値写像にホモトピックである．命題 3.8 の (2), (3) により, 仮定と矛盾が生じる． □

系 4.3 連続写像 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ の像が有界ならば f の不動点が存在する．

証明 $D^n(r) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n | \, \|\boldsymbol{x}\| \leqq r\}$ とおくと仮定により $f(\boldsymbol{R}^n) \subset D^n(r)$ となる $r > 0$ がある．定理 4.2 から $\bar{f}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ で定義される写像 $\bar{f} : D^n(r) \to D^n(r)$ に対して $\bar{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ が存在する．. □

定理 4.4 (代数学の基本定理) 複素数を係数とする n 次代数方程式 $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ は, $r = \max\{1, |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|\}$ とおくと, 絶対値が r 以下である複素数の解を少なくとも一つもつ．

証明 2 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^2$ を複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ と同一視することにより $D^2 = \{z \in \boldsymbol{C} \, | \, |z| \leqq 1\}$ とみなす．$f : D^2 \to D^2$ を $f(z) = z^n$ で定義すれば, f は連続で $f(S^1) \subset S^1$ を満たす．一方, $|z| \leqq r$ ならば次の不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| &\leqq |a_{n-1}||z^{n-1}| + \cdots + |a_1||z| + |a_0| \leqq |a_{n-1}|r^{n-1} + \cdots + |a_1|r + |a_0| \\ &= r^{n-1}\Big(|a_{n-1}| + \cdots + \frac{|a_1|}{r^{n-2}} + \frac{|a_0|}{r^{n-1}}\Big) \leqq r^{n-1}(|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|) \leqq r^n\end{aligned}$$

故に連続写像 $g : D^2 \to D^2$ が $g(z) = -\dfrac{1}{r^n}(a_{n-1}(rz)^{n-1} + \cdots + a_1(rz) + a_0)$ で定義できる．$z \in S^1$ を $f(z)$ に対応させる写像 $\tilde{f} : S^1 \to S^1$ は命題 3.10 の写像 ρ_n に一致するため, 命題 3.10 から $\deg(\tilde{f}) = n \neq 0$ だから定理 4.2 により $z_0 \in D^2$ で $f(z_0) = g(z_0)$ を満たす $z_0 \in D^2$ が存在する．このとき $(rz_0)^n = -(a_{n-1}(rz_0)^{n-1} + \cdots + a_1(rz_0) + a_0)$ だから rz_0 は与えられた方程式の解である． □

定理 4.5 (Frobenius の定理) 各成分が負でない実数であるような正則行列は正の実数の固有値をもつ．

証明 $A = (a_{ij})$ を各成分が負でない実数であるような n 次正則行列とし, $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ を A から定まる一次変換とする．A の各成分は負でないから, $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$) とすれば, $x_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ならば $y_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ である．また A は正則行列だから $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ である．そこで, $N = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S^{n-1} | \, x_i \geqq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$ とおき, $g : N \to N$ を $g(\boldsymbol{x}) = \dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\|f(\boldsymbol{x})\|}$ で定める．N は D^{n-1} と同相だから定理 4.2 により, $g(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ を満たす $\boldsymbol{v} \in N$ がある．このとき $f(\boldsymbol{v}) = \|f(\boldsymbol{v})\|\boldsymbol{v}$ が成り立つため, $\|f(\boldsymbol{v})\|$ は A の正の固有値である． □

定義 4.6 (1) $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対し, $\boldsymbol{R}^{n+1}$ のベクトルで $\boldsymbol{x}$ と直交するものを $\boldsymbol{x}$ における S^n の接ベクトルという．

(2) 写像 $v : S^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ で, 各 $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対して $v(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}$ における S^n の接ベクトルになるものを S^n の接ベクトル場といい, v が連続であれば連続な接ベクトル場という．また $v(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x} \in S^n$ を v の零点または特異点という．

$v : S^{2m-1} \to \boldsymbol{R}^{2m}$ を $v(x_1, x_2, \ldots, x_{2m}) = (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2m}, x_{2m-1})$ で定めれば, v は零点をもたない S^{2m-1} の接ベクトル場である．従って奇数次元の球面上には零点をもたない接ベクトル場がある．

定理 4.7 偶数次元の球面上の連続な接ベクトル場は必ず零点をもつ．

証明 S^{2m} 上に零点をもたない連続な接ベクトル場 $v : S^{2m} \to \boldsymbol{R}^{2m+1}$ が存在すると仮定する．$f : S^{2m} \to S^{2m}$ を $f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{v(\boldsymbol{x})}{\|v(\boldsymbol{x})\|}$ で定義すれば, 各 $\boldsymbol{x} \in S^{2m}$ に対し, $\boldsymbol{x}$ と $f(\boldsymbol{x})$ は直交するため, すべての $\boldsymbol{x} \in S^{2m}$ に対して $f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x}$ である．従って定理 4.1 から $\deg(f) = (-1)^{2m+1} = -1$ である．一方 $H : S^{2m} \times [0,1] \to S^{2m}$ を

$H(\boldsymbol{x},t)=\cos\dfrac{\pi t}{2}f(\boldsymbol{x})+\sin\dfrac{\pi t}{2}\boldsymbol{x}$ で定めれば, 任意の $\boldsymbol{x}\in S^{2m}$ に対して $H(\boldsymbol{x},0)=f(\boldsymbol{x})$, $H(\boldsymbol{x},1)=\boldsymbol{x}$ が成り立つ. 従って, f は S^{2m} の恒等写像にホモトピックになり, $\deg(f)=1$ が得られて矛盾が生じる. □

定義 4.8 群 G の積を与える写像を $\mu:G\times G\to G$ $(\mu(g,h)=gh)$, 逆元を対応させる写像を $\iota:G\to G$ $(\iota(g)=g^{-1})$ とする. G に位相が与えられていて, $G\times G$ には直積位相を与えたとき, μ と ι がともに連続写像であるとき, G を位相群という.

定義 4.9 (1) X を位相空間, G を位相群とする. 連続写像 $\alpha:G\times X\to X$ が次の条件 (i), (ii) を満たすとき, α を G の X への作用という. さらに (iii) が成り立つとき G の X 上への作用は自由であるという.

(i) e を G の単位元とするとき, 任意の $x\in X$ に対して $\alpha(e,x)=x$.

(ii) 任意の $g,h\in G$ と $x\in X$ に対して $\alpha(gh,x)=\alpha(g,\alpha(h,x))$.

(iii) $\alpha(g,x)=x$ となる $x\in X$ があれば $g=e$ である.

(2) $\boldsymbol{R}$ を加法に関して位相群とみなしたとき, $\boldsymbol{R}$ の位相空間 X への作用 $\varphi:\boldsymbol{R}\times X\to X$ を X 上の力学系という. すべての $t\in\boldsymbol{R}$ に対して $\varphi(t,x_0)=x_0$ を満たすような X の点 x_0 を力学系 φ の特異点という.

注意 4.10 (1) G が有限群の場合は, G に離散位相を与えることによって, G を位相群とみなす.

(2) $g\in G$ に対して写像 $\alpha_g:X\to X$ を $\alpha_g(x)=\alpha(g,x)$ で定めれば, α_g は連続で, $\alpha_e=id_X$, $\alpha_{gh}=\alpha_g\circ\alpha_h$ が成り立つため, $\alpha_g\circ\alpha_{g^{-1}}=\alpha_{g^{-1}}\circ\alpha_g=id_X$ だから $\alpha_g^{-1}=\alpha_{g^{-1}}$ である. 従って α_g は同相写像である.

定理 4.11 群 G の偶数次元球面 S^{2m} 上への自由な作用があれば, G の位数は 1 か 2 である.

証明 $\alpha:G\times S^{2m}\to S^{2m}$ を G の S^{2m} 上への自由な作用とする. $g\in G$ が単位元でなければ写像 $g:S^{2m}\to S^{2m}$ $\boldsymbol{x}\mapsto\alpha(g,\boldsymbol{x})$ は不動点をもたないため定理 4.1 から $\deg(g)=(-1)^{2m+1}=-1$ である. 従って $g,h\in G$ $g,h\neq e$ とすれば $\deg(gh)=\deg(g)\deg(h)=1$ だから $gh=e$ である. とくに $g^2=e$ だから $g=g^2h=h$ となって G の単位元以外の要素はただ 1 つである. □

補題 4.12 X をコンパクトな位相空間, φ を X 上の力学系とする. $t\in\boldsymbol{R}$ に対して $\varphi_t(x)=\varphi(t,x)$ で定義される写像 $\varphi_t:X\to X$ がすべての $t\in\boldsymbol{R}$ に対して不動点を持つならば, φ の特異点が存在する.

証明 整数 n に対して $F_n=\{x\in X\,|\,\varphi_{2^{-n}}(x)=x\}$ とおけば, F_n は閉集合で, 仮定から F_n は空集合ではない. $\varphi_{2^{-n-1}}\circ\varphi_{2^{-n-1}}=\varphi_{2^{-n}}$ だから $F_n\supset F_{n+1}$ が成り立つため, $(F_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}$ の任意の有限個の共通部分は空でない. 従って X のコンパクト性から $\bigcap\limits_{n\in\boldsymbol{Z}}F_n\neq\emptyset$ である. そこで $x_0\in\bigcap\limits_{n\in\boldsymbol{Z}}F_n$ をとると, x_0 は φ の特異点であることを示す. まず $\varphi_{s+t}=\varphi_s\circ\varphi_t$ から任意の $m\in\boldsymbol{Z}$ に対して F_n の各点は $\varphi_{m2^{-n}}$ の不動点であるため, $A=\{m2^{-n}\,|\,m,n\in\boldsymbol{Z}\}$ とおけば任意の $t\in A$ に対して x_0 は φ_t の不動点である. A は $\boldsymbol{R}$ の稠密な部分集合で, $A\times\{x_0\}\subset\varphi^{-1}(x_0)$ だから, この両辺の閉包を考えると $\boldsymbol{R}\times\{x_0\}\subset\varphi^{-1}(x_0)$ である. 従って任意の $t\in\boldsymbol{R}$ に対して $\varphi(t,x_0)=x_0$ である. □

定理 4.13 (1) D^n 上のどのような力学系も少なくとも 1 つの特異点をもつ.

(2) 偶数次元球面上のどのような力学系も少なくとも 1 つの特異点をもつ.

証明 (1) φ を D^n 上の力学系とすれば, Brouwer の不動点定理により, すべての $t\in\boldsymbol{R}$ に対して $\varphi_t:D^n\to D^n$ は不動点をもつため, 補題 4.12 により φ は特異点をもつ.

(2) φ を S^{2m} 上の力学系とすれば, すべての $t\in\boldsymbol{R}$ に対して φ_t は恒等写像にホモトピックだから $\deg(\varphi_t)=1$ である. 定理 4.1 から $\varphi_t:S^{2m}\to S^{2m}$ は不動点をもつため, 補題 4.12 により φ は特異点をもつ. □

定理 4.14 n が偶数で, 連続写像 $f:S^n\to S^n$ 写像度が 0 でなければ $f(-\boldsymbol{x})=-f(\boldsymbol{x})$ となる点 $\boldsymbol{x}\in S^n$ が存在する.

証明 $T:S^n\to S^n$ を命題 3.9 の写像とする. $\deg(T\circ f)=\deg(T)\deg(f)=(-1)^{n+1}\deg(f)\neq 0$ であり,

$\deg(f\circ T)=\deg(T)\deg(f)=\deg(T\circ f)\neq-\deg(T\circ f)=(-1)^{n+1}\deg(T\circ f)$ である．故に定理 4.1 から $T\circ f$ と $f\circ T$ は一致点をもつ． □

定理 4.15 $f:S^n\to S^n$ を連続写像とする．n と $\deg(f)$ がともに奇数ならば $f(-\boldsymbol{x})=-f(\boldsymbol{x})$ となる点 $\boldsymbol{x}\in S^n$ が存在する．

証明 すべての $\boldsymbol{x}\in S^n$ に対して, $f(-\boldsymbol{x})\neq-f(\boldsymbol{x})$ であると仮定して $g:S^n\to S^n$ を $g(\boldsymbol{x})=\dfrac{f(\boldsymbol{x})+f(-\boldsymbol{x})}{\|f(\boldsymbol{x})+f(-\boldsymbol{x})\|}$ で定める．このとき任意の $\boldsymbol{x}\in S^n$ と $t\in[0,1]$ に対して, $(1-t)f(\boldsymbol{x})+tg(\boldsymbol{x})\neq 0$ が成り立つ．実際 $(1-t)f(\boldsymbol{x})+tg(\boldsymbol{x})=0$ とすると $(1-t)f(\boldsymbol{x})=-tg(\boldsymbol{x})$ で $\|f(\boldsymbol{x})\|=\|g(\boldsymbol{x})\|=1$ だから $1-t=t$ すなわち $t=\dfrac{1}{2}$ である．従って $f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})=0$ だから $k=\|f(\boldsymbol{x})+f(-\boldsymbol{x})\|$ とおくと $-kf(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})+f(-\boldsymbol{x})$ である．$-f(-\boldsymbol{x})=(k+1)f(\boldsymbol{x})$ の両辺のベクトルの長さを考えると $k=0$ すなわち $f(-\boldsymbol{x})=-f(\boldsymbol{x})$ となって仮定に反する．そこで $H:S^n\times[0,1]\to S^n$ を $H(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{(1-t)f(\boldsymbol{x})+tg(\boldsymbol{x})}{\|(1-t)f(\boldsymbol{x})+tg(\boldsymbol{x})\|}$ で定義すると $H(\boldsymbol{x},0)=f(\boldsymbol{x})$, $H(\boldsymbol{x},1)=g(\boldsymbol{x})$ だから f は g にホモトピックである．従って $\deg(f)=\deg(g)$ となる．すべての $\boldsymbol{x}\in S^n$ に対して $g(-\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x})$ が成り立つことに注意すれば, 定理 3.12 から n が奇数の場合は $\deg(f)=\deg(g)$ は偶数になる． □

S^n の点 $\boldsymbol{x}$ に対して S^n の点 $-\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}$ の対心点という．次の定理は Borsuk の対心点定理または Borsuk-Ulam の定理と呼ばれ, 証明に定理 3.13 を用いる．

定理 4.16 $f:S^n\to\boldsymbol{R}^n$ を連続写像とするとき, $f(-\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})$ を満たす $\boldsymbol{x}\in S^n$ が存在する．

証明 $h:D^n\to S^n$ を $h(\boldsymbol{x})=\left(\boldsymbol{x},\sqrt{1-\|\boldsymbol{x}\|^2}\right)$ で定める．すべての $\boldsymbol{x}\in S^n$ に対して, $f(-\boldsymbol{x})\neq f(\boldsymbol{x})$ と仮定すれば, $G:D^n\to S^{n-1}$ を $G(\boldsymbol{x})=\dfrac{f(h(\boldsymbol{x}))-f(-h(\boldsymbol{x}))}{\|f(h(\boldsymbol{x}))-f(-h(\boldsymbol{x}))\|}$ で定義できる．$g:S^{n-1}\to S^{n-1}$ を G の S^{n-1} への制限, $c:S^{n-1}\to S^{n-1}$ を $G(\boldsymbol{0})$ への定値写像とし, $H:S^{n-1}\times[0,1]\to S^{n-1}$ を $H(\boldsymbol{x},t)=G(t\boldsymbol{x})$ で定めれば, H は c から g へのホモトピーである．従って命題 3.8 の (2), (3) から $\deg(g)=0$ である．一方すべての $\boldsymbol{x}\in S^{n-1}$ に対して, $g(-\boldsymbol{x})=-g(\boldsymbol{x})$ が成り立つため, 定理 3.13 から $\deg(g)$ は奇数であり, 矛盾が生じる． □

次の定理は $n=2$ の場合は中間値の定理を用いれば示されるが, 一般の n に対しては, 定理 4.16 を用いて示される．

定理 4.17 (ハムサンドウィッチの定理) $\boldsymbol{R}^n$ の中に n 個の有界な可測集合 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ が任意に与えられたとき, $\boldsymbol{R}^n$ の超平面 P で, 次のようなものが存在する．各 j に対し, P で分割される A_j の 2 つの部分の測度は等しい．

証明 $\boldsymbol{R}^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1})\in\boldsymbol{R}^{n+1}|\,x_{n+1}=0\}$ とみなし, $\boldsymbol{n}=(0,0,\ldots,0,1)\in\boldsymbol{R}^{n+1}$ とおく．各 $\boldsymbol{x}\in S^n$ に対し, $\boldsymbol{x}$ に垂直で $\boldsymbol{n}$ を含む $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の超平面を $Q_{\boldsymbol{x}}$ とする．$\boldsymbol{n}\notin\boldsymbol{R}^n$ だから $Q_{\boldsymbol{x}}$ は $\boldsymbol{R}^n$ に一致しない．そこで, $Q_{\boldsymbol{x}}$ に関して $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}$ と同じ側にある A_j の測度を $u_j(\boldsymbol{x})$ で表す．このとき各 $u_j:S^n\to\boldsymbol{R}$ は連続だから, $f(\boldsymbol{x})=(u_1(\boldsymbol{x}),u_2(\boldsymbol{x}),\ldots,u_n(\boldsymbol{x}))$ で定義される連続写像 $f:S^n\to\boldsymbol{R}^n$ に対して定理 4.16 を用いると, $u_j(\boldsymbol{p})=u_j(-\boldsymbol{p})$ $(j=1,2,\ldots,n)$ を満たす $\boldsymbol{p}\in S^n$ が存在する．各 $\boldsymbol{x}\in S^n$ に対して $Q_{\boldsymbol{x}}=Q_{-\boldsymbol{x}}$ で, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}$ と $-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}$ は $Q_{\boldsymbol{x}}$ に関して反対側にあるため A_j の測度を v_j とすれば $u_j(\boldsymbol{x})+u_j(-\boldsymbol{x})=v_j$ が成り立つ．従って $u_j(\boldsymbol{p})=u_j(-\boldsymbol{p})=\dfrac{v_j}{2}$ であり, $Q_{\boldsymbol{p}}$ は $\boldsymbol{R}^n$ と平行でないため, $Q_{\boldsymbol{p}}$ と $\boldsymbol{R}^n$ の交わりを P とすればよい． □

次の定理も定理 4.16 の応用の一つである．

定理 4.18 (Lusternik-Schnirelmann の定理) S^n の空でない $n+1$ 個の閉集合 $F_1,F_2,\ldots,F_{n+1}$ が, $S^n=\bigcup_{i=1}^{n+1}F_i$ を満たせば, $F_1,F_2,\ldots,F_{n+1}$ のなかの少なくとも 1 つは互いに対心点である 2 点を含む．

証明 $\bigcap_{i=1}^{n+1}F_i\neq\emptyset$ のときは, $\boldsymbol{x}\in\bigcap_{i=1}^{n+1}F_i$ をとれば, $-\boldsymbol{x}\in F_i$ であるような F_i が求めるものである．従って, $\bigcap_{i=1}^{n+1}F_i=\emptyset$ と仮定してよい．$f_i:S^n\to\boldsymbol{R}$ $(i=1,2,\ldots,n+1)$ を $f_i(\boldsymbol{x})=\inf\{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|\,|\,\boldsymbol{y}\in F_i\}$ で定めれば f_i は連続である．

また F_i は閉集合だから $\boldsymbol{x} \in F_i$ であるためには $f_i(\boldsymbol{x}) = 0$ であることが必要十分であり, 上の仮定から, すべての $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対して $\sum_{i=1}^{n+1} f_i(\boldsymbol{x}) \neq 0$ である. そこで, 関数 $s : S^n \to \boldsymbol{R}$ を $s(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(\boldsymbol{x})$ で定め, 写像 $f : S^n \to \boldsymbol{R}^n$ を $f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{f_1(\boldsymbol{x})}{s(\boldsymbol{x})}, \frac{f_2(\boldsymbol{x})}{s(\boldsymbol{x})}, \dots, \frac{f_n(\boldsymbol{x})}{s(\boldsymbol{x})}\right)$ で定めると, 定理 4.16 から $f(\boldsymbol{x}) = f(-\boldsymbol{x})$ を満たす $\boldsymbol{x} \in S^n$ が存在する. このような $\boldsymbol{x}$ を含む F_i をとれば $f_i(\boldsymbol{x}) = 0$ だから, $i < n+1$ ならば $\frac{f_i(-\boldsymbol{x})}{s(-\boldsymbol{x})} = \frac{f_i(\boldsymbol{x})}{s(\boldsymbol{x})} = 0$ より $f_i(-\boldsymbol{x}) = 0$ で, $i = n+1$ ならば $\frac{f_{n+1}(-\boldsymbol{x})}{s(-\boldsymbol{x})} = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(-\boldsymbol{x})}{s(-\boldsymbol{x})} = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(\boldsymbol{x})}{s(\boldsymbol{x})} = \frac{f_{n+1}(\boldsymbol{x})}{s(\boldsymbol{x})} = 0$ より, $f_{n+1}(-\boldsymbol{x}) = 0$ である. いずれにしても $-\boldsymbol{x} \in F_i$ が成り立つ. □

§5. 課題

以下の問題のうち 1 題を選んで解答せよ.

問題 5.1 補題 1.1 を証明せよ.

問題 5.2 $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ を連続写像とし, 合成写像 $g \circ f : X \to X$ は X の恒等写像 id_X とホモトピックであるとする. Y が弧状連結ならば, X も弧状連結であることを示せ.

問題 5.3 n を自然数とする.

(1) n 次元円板 D^n は 1 点からなる位相空間とホモトピー同値であることを示せ.

(2) 連続写像 $f : D^n \to S^{n-1}$ で, すべての $\boldsymbol{x} \in S^{n-1}$ に対して, $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ を満たすものは存在しないことを示せ. (ヒント：$n \geqq 2$ の場合は包含写像 $i : S^{n-1} \to D^n$ を考えて命題 3.8 を用いる.)

問題 5.4 中間値の定理を用いて, $n = 2$ の場合に定理 4.17 の別証明を与えよ.

参考文献

[1] 中岡　稔, 位相幾何学 (ホモロジー論), 共立出版, 1970.

[2] 中岡　稔, 不動点定理とその周辺, 岩波書店, 1977.

[3] Spanier, Edwin H., *Algebraic Topology*, Springer Verlag, 1966.