代数的位相幾何学の視点

山口　睦

概要

代数的位相幾何学を一言で説明すれば「代数学の手法を用いて位相空間を研究する幾何学の一分野」であるが, この講義では「不動点定理」と呼ばれる定理を題材に, 代数的位相幾何学の手法について解説する.

第1節では位相空間のホモロジー群を定義し, 第2節で位相空間のホモロジー群の性質を紹介する. 第3節では球面のホモロジー群を用いて, 同じ次元の球面の間の連続写像に対して「写像度」という概念を定義してその性質を紹介し, 第4節では写像度を用いて「不動点定理」,「代数学の基本定理」,「ハムサンドウィッチの定理」などの種々の結果が導かれることを示す.

§1 位相空間のホモロジー群

Δ^n を$n+1$次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の部分空間

$$\{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid x_i \geqq 0, x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 1\}$$

とし, Δ^n を標準的n単体という. 写像 $\varepsilon_i^{(n)}: \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ $(n \geqq 1,\ i = 0, 1, \dots, n)$ を

$$\varepsilon_i^{(n)}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$$

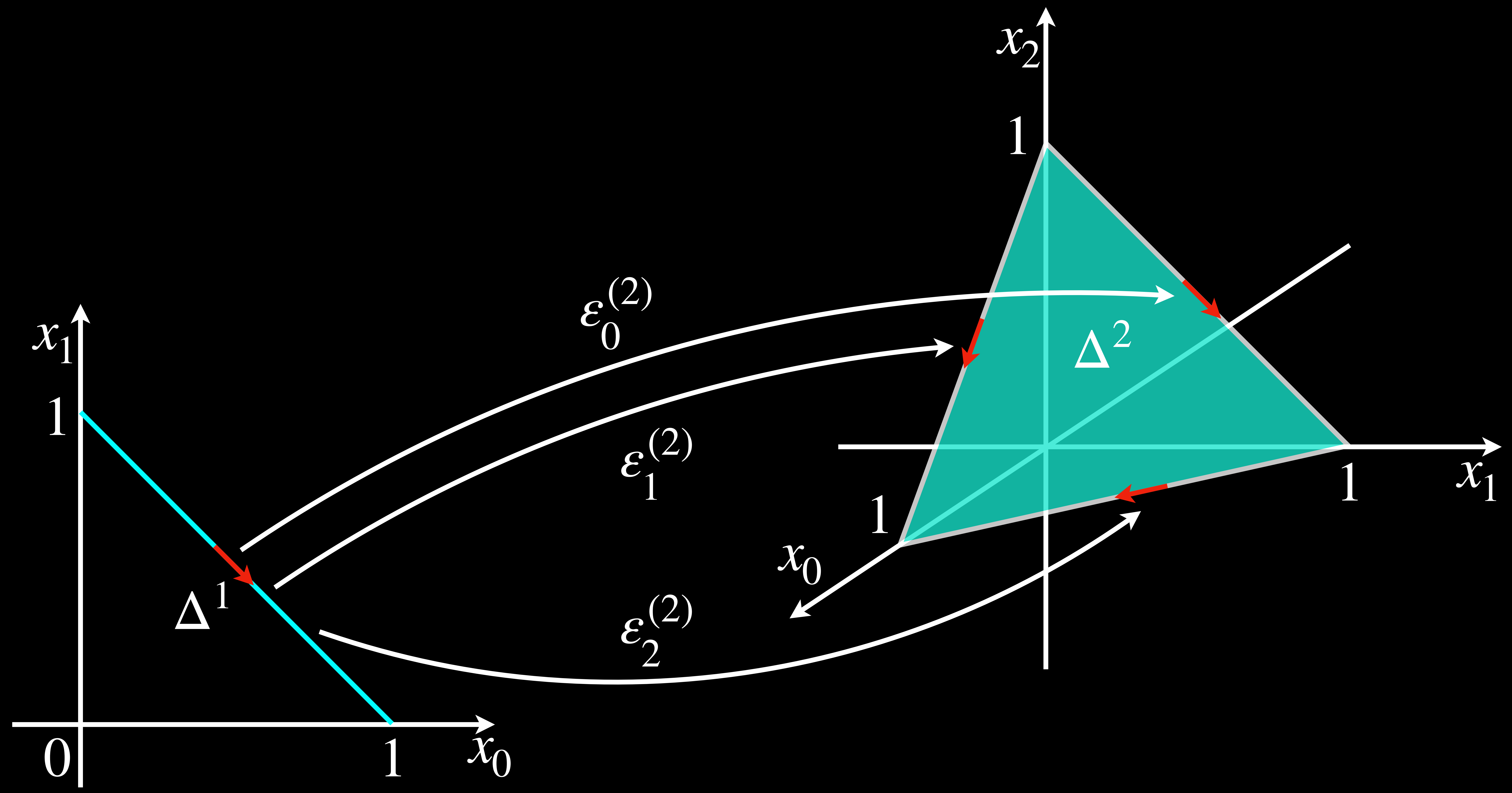
で定義すると次が成り立つことは容易に確かめられる

補題 1.1

整数 i, j が $0 \leqq j < i \leqq n+1$ を満たすとき, 次の等式が成り立つ.

$$\varepsilon_i^{(n+1)} \circ \varepsilon_j^{(n)} = \varepsilon_j^{(n+1)} \circ \varepsilon_{i-1}^{(n)}$$

以後, 整数全体からなるアーベル群を $\boldsymbol{Z}$ で表す.



x_1
1
Δ^1
0
1
x_0
$\varepsilon_0^{(2)}$
$\varepsilon_1^{(2)}$
$\varepsilon_2^{(2)}$
x_2
1
Δ^2
1
x_1
1
x_0

位相空間 X と負でない整数 n に対し, $S_n(X)$ を Δ^n から X への連続写像全体の集合とし, $S_n(X)$ で生成される自由アーベル群を $C_n(X)$ とする. すなわち

$$C_n(X)=\{c : S_n(X)\to \mathbf{Z} \mid c(\sigma)\neq 0 \text{ である } \sigma\in S_n(X) \text{ は有限個}\}$$

であり, $c, c'\in C_n(X)$ に対して $c+c'$ は $\sigma\in S_n(X)$ を $c(\sigma)+c'(\sigma)\in \mathbf{Z}$ に写す $C_n(X)$ の要素であると定義する. $\sigma\in S_n(X)$ に対して $c_\sigma\in C_n(X)$ を

$$c_\sigma(\tau)=\begin{cases} 1 & \tau=\sigma \\ 0 & \tau\neq\sigma \end{cases}$$

で定義して, 写像 $\eta_n : S_n(X)\to C_n(X)$ を $\eta_n(\sigma)=c_\sigma$ で定義する.

なお, X が空集合の場合, $C_n(\emptyset)$ は自明なアーベル群 $\{0\}$ であると定義する.

命題 1.2

η_n は単射であり, 任意の $c\in C_n(X)$ に対して $c=\sum_{\sigma\in I} x_\sigma c_\sigma$ を満たす $S_n(X)$ の有限部分集合 I と 0 でない整数 x_σ が1通りに定まる. すなわち $\eta_n(S_n(X))$ は $C_n(X)$ の基底である.

系 1.3
A をアーベル群とする. 写像 $f\colon S_n(X)\to A$ に対し, 準同型写像 $\bar{f}\colon C_n(X)\to A$ で $\bar{f}\circ\eta_n=f$ を満たすものがただ1つ存在する.

正の整数nに対して写像 $\hat{d}_n : S_n(X)\to C_{n-1}(X)$ を $\hat{d}_n(\sigma)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\eta_{n-1}\left(\sigma\circ\varepsilon_i^{(n)}\right)$ で定めれば系1.3から $d_n\circ\eta_n=\hat{d}_n$ を満たす準同型写像 $d_n : C_n(X)\to C_{n-1}(X)$ がただ1つ定まる. 負の整数nに対して $C_n(X)=\{0\}$ と定め, 0以下の整数nに対して $d_n : C_n(X)\to C_{n-1}(X)$ は零写像であるとする.

以後, $\sigma\in S_n(X)$ と $\eta_n(\sigma)=c_\sigma$ を同一視して $S_n(X)$ を $C_n(X)$ の部分集合とみなすことがある. 補題1.1と系1.3から次の結果が得られる.

命題 1.4
上で定義した準同型写像 $d_n : C_n(X)\to C_{n-1}(X)$ は $d_n\circ d_{n+1}=0$ を満たす.

連続写像 $f:X\to Y$ と0以上の整数 n に対し, 写像 $S_n(f):S_n(X)\to S_n(Y)$ を $S_n(f)(\sigma)=f\circ\sigma$ で定義すれば系1.3により, 準同型写像 $C_n(f):C_n(X)\to C_n(Y)$ で $C_n(f)\circ\eta_n=\eta_n\circ S_n(f)$, すなわち次の図式が可換になるものがただ1つ定まる.

$$\begin{tikzcd} S_n(X) \arrow[r, "S_n(f)"] \arrow[d, "\eta_n"] & S_n(Y) \arrow[d, "\eta_n"] \\ C_n(X) \arrow[r, "C_n(f)"] & C_n(Y) \end{tikzcd}$$

命題 1.5

次の図式は可換である.

$$\begin{tikzcd} C_n(X) \arrow[r, "C_n(f)"] \arrow[d, "d_n"] & C_n(Y) \arrow[d, "d_n"] \\ C_{n-1}(X) \arrow[r, "C_{n-1}(f)"] & C_{n-1}(Y) \end{tikzcd}$$

位相空間 X の部分空間 A に対し, 包含写像 $i:A\to X$ が定める写像 $S_n(i):S_n(A)\to S_n(X)$ は単射である. この写像によって $S_n(A)$ を $S_n(i)$ の像と同一視して, $S_n(A)$ を $S_n(X)$ の部分集合とみなす. さらに $S_n(X)$ を η_n によって $C_n(X)$ の部分集合とみなして, 単射 $C_n(i):C_n(A)\to C_n(X)$ により, $C_n(A)$ を $C_n(X)$ の部分群とみなす.

$p_n:C_n(X)\to C_n(X)/C_n(A)$ を商写像とする. 命題1.5から図式

$$\begin{tikzcd}
C_n(A) \arrow[r, "C_n(i)"] \arrow[d, "d_n"] & C_n(X) \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "d_n"] & C_n(X)/C_n(A) \arrow[d, dotted, "d_n"] \\
C_{n-1}(A) \arrow[r, "C_{n-1}(i)"] & C_{n-1}(X) \arrow[r, "p_{n-1}"] & C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)
\end{tikzcd}$$

の左側の長方形は可換だから, 右側の長方形が可換になるような準同型写像 $d_n:C_n(X)/C_n(A)\to C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)$ がただ1つ存在する.

命題1.4から合成写像 $C_{n+1}(X) \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X)$ は零写像で, 前ページの図の左の長方形の可換性から下の図は可換である. 従って $d_n \circ d_{n+1} \circ p_{n+1} = 0$ である.

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1}(X) \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "p_{n+1}"] & C_n(X) \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "p_n"] & C_{n-1}(X) \arrow[d, "p_{n-1}"] \\
C_{n+1}(X)/C_{n+1}(A) \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n(X)/C_n(A) \arrow[r, "d_n"] & C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)
\end{tikzcd}$$

さらに p_{n+1} は全射だから, 合成写像

$$C_{n+1}(X)/C_{n+1}(A) \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(X)/C_n(A) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)$$

も零写像である. そこで $C_n(X)/C_n(A)$ の部分群 $Z_n(X,A)$, $B_n(X,A)$ を

$$Z_n(X,A) = \operatorname{Ker}(d_n : C_n(X)/C_n(A) \to C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A))$$
$$B_n(X,A) = \operatorname{Im}(d_{n+1} : C_{n+1}(X)/C_{n+1}(A) \to C_n(X)/C_n(A))$$

で定めれば $B_n(X,A) \subset Z_n(X,A)$ である.

定義 1.6
位相空間 X とその部分空間 A に対し, X と A の対 (X, A) を位相空間対という.
アーベル群 $Z_n(X, A)/B_n(X, A)$ を位相空間対 (X, A) の n 次元ホモロジー群といい,
$H_n(X, A)$ で表す. とくに A が空集合の場合, $H_n(X, \varnothing)$ を $H_n(X)$ で表して,
位相空間 X の n 次元ホモロジー群という.

補題 1.7
連続写像 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ に対し, 次の等式が成り立つ.

$$S_n(g \circ f) = S_n(g) \circ S_n(f), \quad C_n(g \circ f) = C_n(g) \circ C_n(f)$$

X, Y を位相空間, A, B をそれぞれ X, Y の部分空間とする. 連続写像 $f: X \to Y$ が
$f(A) \subset B$ を満たすとき, f を位相空間対 (X, A) から (Y, B) への連続写像といい,
$f: (X, A) \to (Y, B)$ で表す.

位相空間対の連続写像 $f:(X,A)\to(Y,B)$ に対し, f の定義域を A に制限して得られる写像を $f_A:A\to B$ とし, $i_A:A\to X$, $i_B:B\to Y$ を包含写像とすれば, $i_B\circ f_A=f\circ i_A$ だから, 補題1.7から次の図式の左側の長方形は可換である. 従って $q_n:C_n(Y)\to C_n(Y)/C_n(B)$ を商写像とすれば, 次の図式の右側の長方形が可換になるような準同型写像 $f_n:C_n(X)/C_n(A)\to C_n(Y)/C_n(B)$ がただ1つ存在する.

$$\begin{array}{ccccc}
C_n(A) & \xrightarrow{C_n(i_A)} & C_n(X) & \xrightarrow{p_n} & C_n(X)/C_n(A) \\
\downarrow{\scriptstyle C_n(f_A)} & & \downarrow{\scriptstyle C_n(f)} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} \\
C_n(B) & \xrightarrow{C_n(i_B)} & C_n(Y) & \xrightarrow{q_n} & C_n(Y)/C_n(B)
\end{array}$$

命題 1.18

次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc}
C_n(X)/C_n(A) & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A) \\
\downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} \\
C_n(Y)/C_n(B) & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1}(Y)/C_{n-1}(B)
\end{array}$$

$x \in Z_n(X, A)$ ならば $d_n(x) = 0$ だから命題1.8より $d_n(f_n(x)) = f_{n-1}(d_n(x)) = f_{n-1}(0) = 0$ である. 従って $f_n(x) \in Z_n(Y, B)$ だから準同型写像 $Z_n(f) : Z_n(X, A) \to Z_n(Y, B)$ を $Z_n(f)(x) = f_n(x)$ で定義できる.

また, $x \in B_n(X, A)$ ならば $d_{n+1}(y) = x$ を満たす $y \in C_{n+1}(X)/C_{n+1}(A)$ が存在する.
命題1.8より $f_n(x) = f_n(d_{n+1}(y)) = d_{n+1}(f_{n+1}(y))$ だから $f_n(x) \in B_n(Y, B)$ である.
従って準同型写像 $B_n(f) : B_n(X, A) \to B_n(Y, B)$ を $B_n(f)(x) = f_n(x)$ で定義できる.
$\iota_{X,A} : B_n(X, A) \to Z_n(X, A)$ を包含写像, $\pi_{X,A} : Z_n(X, A) \to H_n(X, A)$ を商写像とする.

定義 1.9

位相空間対の連続写像 $f:(X,A)\to(Y,B)$ に対し, 次の図式の右側の長方形が可換になるような準同型写像 $H_n(f):H_n(X,A)\to H_n(Y,B)$ がただ1つ存在する. $H_n(f)$ を f が誘導する写像といい, $H_n(f)$ を f_* で表すことがある.

$$\begin{tikzcd}
B_n(X,A) \arrow[r, "\iota_{X,A}"] \arrow[d, "B_n(f)"] & Z_n(X,A) \arrow[r, "\pi_{X,A}"] \arrow[d, "Z_n(f)"] & H_n(X,A) \arrow[d, dotted, "H_n(f)"] \\
B_n(Y,B) \arrow[r, "\iota_{Y,B}"] & Z_n(Y,B) \arrow[r, "\pi_{Y,B}"] & H_n(Y,B)
\end{tikzcd}$$

命題 1.10

位相空間対の連続写像 $f:(X,A)\to(Y,B)$, $g:(Y,B)\to(Z,C)$ に対し,

$$H_n(g\circ f)=H_n(g)\circ H_n(f)$$

が成り立つ. また, 恒等写像 $id_{(X,A)}:(X,A)\to(X,A)$ に対して $H_n(id_{(X,A)})$ は $H_n(X,A)$ の恒等写像である.

§2 ホモロジー群の性質

定義 2.1

X, Y を位相空間, A, B をそれぞれ X, Y の部分空間とする.

(1) $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ を位相空間対の連続写像とする. 位相空間対の連続写像

$$H : (X \times [0,1], A \times [0,1]) \to (Y, B)$$

で, すべての $x \in X$ に対して $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ を満たすものが存在するとき, f と g はホモトピックであるといい, このことを $f \simeq g$ で表す.
また, H を f から g へのホモトピーという.

(2) 位相空間対の連続写像 $f : (X, A) \to (Y, B)$ と $g : (Y, B) \to (X, A)$ で $g \circ f$ が X の恒等写像 id_X とホモトピックであり, $f \circ g$ が Y の恒等写像 id_Y とホモトピックであるものが存在するとき, 位相空間対 (X, A) と (Y, B) はホモトピー同値であるといい, このことを $(X, A) \simeq (Y, B)$ で表す. このとき f, g をホモトピー同値写像という. とくに $A = B = \emptyset$ の場合, X と Y はホモトピー同値であるという.

定理 2.2
位相空間対の2つの連続写像 $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ がホモトピックならば, すべての整数 n に対して $H_n(f) = H_n(g) : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ が成り立つ.

系 2.3
$f : (X, A) \to (Y, B)$ がホモトピー同値写像ならばすべての整数 n に対して
$H_n(f) : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ は同型写像である.

命題 2.4
X が弧状連結な位相空間ならば $H_0(X)$ は $\mathbf{Z}$ と同型である.

命題 2.5
X が一点だけからなる位相空間ならば $n \neq 0$ に対して $H_n(X) = \{0\}$ である.

以下で (X, A) を位相空間対とする.

$x \in H_n(X,A)$ に対して $\pi_{X,A}(z) = x$ を満たす $z \in Z_n(X,A) \subset C_n(X)/C_n(A)$ を選び，さらに $p_n(c) = z$ を満たす $c \in C_n(X)$ を選ぶ．$d_n(z) = 0$ だから，$i : A \to X$ を包含写像とすれば，次の図式の右上の長方形の可換性から $p_{n-1}(d_n(c)) = 0$ となるため，$a \in C_{n-1}(A)$ で $(C_{n-1}(i))(a) = d_n(c)$ を満たすものがある．さらに次の図式の左下の長方形の可換性から $(C_{n-2}(i))(d_{n-1}(a)) = d_{n-1}((C_{n-1}(i))(a)) = d_{n-1}(d_n(c)) = 0$ であり，$C_{n-2}(i)$ は単射だから $d_{n-1}(a) = 0$ が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
C_n(A) \arrow[r, "C_n(i)"] \arrow[d, "d_n"] & C_n(X) \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "d_n"] & C_n(X)/C_n(A) \arrow[d, "d_n"] \\
C_{n-1}(A) \arrow[r, "C_{n-1}(i)"] \arrow[d, "d_{n-1}"] & C_{n-1}(X) \arrow[r, "p_{n-1}"] \arrow[d, "d_{n-1}"] & C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A) \arrow[d, "d_{n-1}"] \\
C_{n-2}(A) \arrow[r, "C_{n-2}(i)"] & C_{n-2}(X) \arrow[r, "p_{n-2}"] & C_{n-2}(X)/C_{n-2}(A)
\end{tikzcd}
$$

すなわち $a \in Z_{n-1}(A, \varnothing)$ だから商写像 $\pi_{A,\varnothing}: Z_{n-1}(A, \varnothing) \to H_n(A, \varnothing) = H_n(A)$ による像を $\partial_n(x)$ で表せば, $\partial_n(x)$ は $\pi_{X,A}(z) = x$ を満たす $z \in Z_n(X, A)$ と $p_n(c) = z$ を満たす $c \in C_n(X)$ の選び方に依存しないことが確かめられる. 従って $x \in H_n(X, A)$ を $\partial_n(x)$ に対応させる写像 $\partial_n: H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$ が定義され, ∂_n はアーベル群の準同型写像であることも確かめられる. この準同型写像に関して次の命題2.6, 命題2.8が成り立つ.

命題 2.6

位相空間対の連続写像 $f: (X, A) \to (Y, B)$ に対し, 次の図式は可換である.

$$\begin{tikzcd} H_n(X, A) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_{n-1}(A) \arrow[d, "H_n(f_A)"] \\ H_n(Y, B) \arrow[r, "\partial_n"] & H_{n-1}(B) \end{tikzcd}$$

定義 2.7

$f_i : G_i \to G_{i+1}$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ をアーベル群の準同型写像とする. $i=1,2,\ldots,n-1$ に対して $\mathrm{Im}\, f_{i-1} = \mathrm{Ker}\, f_i$ が成り立つとき, 次の図式を**完全列**という.

$$G_0 \xrightarrow{f_0} G_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{i-2}} G_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} G_n$$

命題 2.8

位相空間対 (X, A) に対し, $i : A \to X$, $j : (X, \emptyset) \to (X, A)$ を包含写像とする. 次の図式は完全列である.

$$\cdots \xrightarrow{H_{n+1}(j)} H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} \cdots$$

定義 2.9

$f:(X,A)\to(Y,B)$ を位相空間対の連続写像とする. f が X の部分空間 $X-A$ を Y の部分空間 $Y-B$ の上に同相に写すとき, f を**相対同相写像**という.

(X,A) を位相空間対, U を A の部分集合とするとき, 包含写像 $X-U\to X$ から定まる位相空間対の連続写像 $(X-U,A-U)\to(X,A)$ は相対同相写像であるが, これを**切除写像**という.

切除写像に関して次の結果が示される.

定理 2.10

(X,A) を位相空間対とする. X の開集合 U が $\overline{U}\subset A$ を満たすとき, 切除写像 $j:(X-U,A-U)\to(X,A)$ が誘導する写像 $H_n(j):H_n(X-U,A-U)\to H_n(X,A)$ はすべての整数 n に対して同型写像である.

§3 球面のホモロジー群と写像度

アーベル群 G と H の直積集合 $G\times H$ に加法を $(x, y)+(z, w)=(x+z, y+w)$ で定義して得られるアーベル群を G と H の直和といい, $G\oplus H$ で表す. また, アーベル群の準同型写像 $\varphi:G\to P$, $\psi:H\to Q$ に対して準同型写像 $\varphi\oplus\psi:G\oplus H\to P\oplus Q$ を $(\varphi\oplus\psi)(x, y)=(\varphi(x), \psi(y))$ で定義する. 前節の結果から次の結果が示される.

定理 3.1

Y, Z を位相空間 X の部分空間とし, $i\colon Y\cap Z\to Y$, $j\colon Y\cap Z\to Z$, $k\colon Y\to X$, $l\colon Z\to X$ を包含写像とする. $\iota_n\colon H_n(Y\cap Z)\to H_n(Y)\oplus H_n(Z)$, $\kappa_n\colon H_n(Y)\oplus H_n(Z)\to H_n(X)$ をそれぞれ $\iota_n(x)=(H_n(i)(x), -H_n(j)(x))$, $\kappa_n(u,v)=H_n(k)(u)+H_n(l)(v)$ で定義する. X の各点が Y の内点または Z の内点であるとき, 次の完全列がある.

$$\cdots\xrightarrow{\bar\partial_{n+1}}H_n(Y\cap Z)\xrightarrow{\iota_n}H_n(Y)\oplus H_n(Z)\xrightarrow{\kappa_n}H_n(X)\xrightarrow{\bar\partial_n}H_{n-1}(Y\cap Z)\xrightarrow{\iota_{n-1}}\cdots$$

さらに U, V が位相空間 W の部分空間で W の各点が U の内点または V の内点であり, 連続写像 $f\colon X\to W$ が $f(Y)\subset U$, $f(Z)\subset V$ を満たすとき, $f_Y\colon Y\to U$, $f_Z\colon Z\to V$, $f_{Y\cap Z}\colon Y\cap Z\to U\cap V$ を f から定まる写像とすれば, 次の図式は可換である.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\bar\partial_{n+1}"] & H_n(Y\cap Z) \arrow[r, "\iota_n"] \arrow[d, "H_n(f_{Y\cap Z})"] & H_n(Y)\oplus H_n(Z) \arrow[r, "\kappa_n"] \arrow[d, "H_n(f_Y)\oplus H_n(f_Z)"] & H_n(X) \arrow[r, "\bar\partial_n"] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_{n-1}(Y\cap Z) \arrow[r, "\iota_{n-1}"] \arrow[d, "H_{n-1}(f_{Y\cap Z})"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\bar\partial_{n+1}"] & H_n(U\cap V) \arrow[r, "\iota_n"] & H_n(U)\oplus H_n(V) \arrow[r, "\kappa_n"] & H_n(W) \arrow[r, "\bar\partial_n"] & H_{n-1}(U\cap V) \arrow[r, "\iota_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

注意 3.2

$\bar{\partial}_n : H_n(X) \to H_{n-1}(Y \cap Z)$ は次のように定義される準同型写像である.

定理3.1の包含写像 i, j, k, l から定まる写像 $C_n(i) : C_n(Y \cap Z) \to C_n(Y)$, $C_n(j) : C_n(Y \cap Z) \to C_n(Z)$, $C_n(k) : C_n(Y) \to C_n(X)$, $C_n(l) : C_n(Z) \to C_n(X)$ を包含写像とみなして $C_n(Y \cap Z)$, $C_n(Y)$, $C_n(Z)$ を $C_n(X)$ の部分群とみなす.

$\alpha \in H_n(X)$ に対し, $c \in Z_n(X, \emptyset)$ で $\pi_{X,\emptyset}(c) = \alpha$ を満たすものを選ぶ.

Y, Z が定理3.1の条件を満せば $a \in C_n(Y)$ と $b \in C_n(Z)$ で $a + b - c \in B_n(X, \emptyset)$ を満たすものが存在することが知られている.

$d_n(c) = d_n(a + b - c) = 0$ だから $d_n(a) + d_n(b) = d_n(a + b - c) = 0$ が成り立つので $d_n(a) = -d_n(b) \in C_{n-1}(Z)$ である. 一方 $d_n(a) \in C_{n-1}(Y)$ だから $d_n(a) \in C_{n-1}(Y) \cap C_{n-1}(Z)$ である. ここで $S_{n-1}(Y) \cap S_{n-1}(Z) = S_{n-1}(Y \cap Z)$ から $C_{n-1}(Y) \cap C_{n-1}(Z) = C_{n-1}(Y \cap Z)$ が成り立つことが分かるので $d_n(a) \in C_{n-1}(Y \cap Z)$ であり, 命題1.4から $d_n(a) \in Z_{n-1}(Y \cap Z, \emptyset)$ である.

そこで $\pi_{Y \cap Z, \emptyset}(d_n(a)) \in H_{n-1}(Y \cap Z, \emptyset)$ を $\bar{\partial}_n(\alpha)$ と定義する.

$S^n=\{(x_0,x_1,\ldots,x_n)\in\boldsymbol{R}^{n+1}\mid x_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2=1\}$ とおき, S^n をn次元球面という.

$\boldsymbol{n}=(0,0,\ldots,0,1)$, $\boldsymbol{s}=(0,0,\ldots,-1)\in S^n$ とおき, $Y=S^n-\{\boldsymbol{n}\}$, $Z=S^n-\{\boldsymbol{s}\}$ とおけば

Y と Z は S^n の開集合であり, $S^n=Y\cup Z$ が成り立つ.

補題 3.3

Y と Z はともに1点からなる位相空間とホモトピー同値であり, $Y\cap Z$ は S^{n-1} とホモトピー同値である.

定理 3.4

$n\geqq 1$ ならば $H_n(S^n)$ と $H_0(S^n)$ は $\boldsymbol{Z}$ と同型であり, $H_0(S^0)$ は $\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}$ と同型である.

$i\neq n$ かつ $i\neq 0$ ならば $H_i(S^n)=\{0\}$ である.

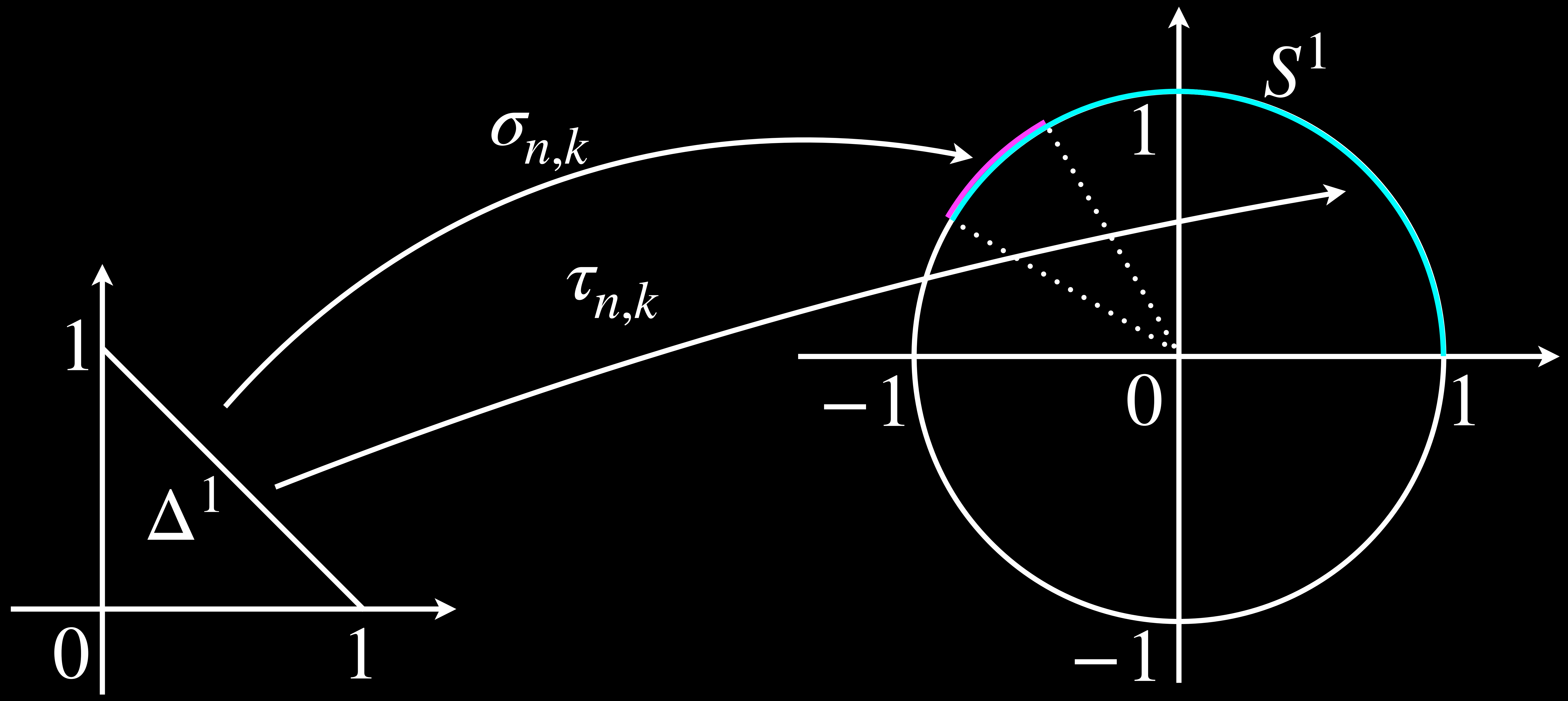
S^1 を絶対値が1である複素数全体の集合とみなし, 以下で $H_1(S^1)$ の生成元について調べる.

自然数nと $k=1,2,\ldots,n$ に対し $\sigma_{n,k}, \tau_{n,k} \in S_1(S^1)$, $\tilde{\sigma}_{n,k} \in S_2(S^1)$ を以下で定める.

$$\sigma_{n,k}(x_0, x_1) = \cos\left(\frac{2\pi(x_0 + k - 1)}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi(x_0 + k - 1)}{n}\right)$$

$$\tau_{n,k}(x_0, x_1) = \cos\left(\frac{2\pi k x_0}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k x_0}{n}\right)$$

$$\tilde{\sigma}_{n,k}(x_0, x_1, x_2) = \cos\left(\frac{2\pi(k x_0 + (k-1)x_1)}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi(k x_0 + (k-1)x_1)}{n}\right)$$



また, $\tau_{n,0}\in S_1(S^1)$ を Δ^1 から1への定値写像, $\tilde{\sigma}_0\in S_2(S^1)$ を Δ^2 から1への定値写像とする.

補題 3.5

(1) $c_n\in C_1(S^1)$ を $c_n=\sum_{k=1}^{n}\eta_1(\sigma_{n,k})$ で定めれば $c_n\in Z_1(S^1,\emptyset)$ である.

(2) $\tilde{c}_n\in C_2(S^1)$ を $\tilde{c}_n=\sum_{k=1}^{n}\eta_2(\tilde{\sigma}_{n,k})-\eta_2(\tilde{\sigma}_0)$ で定めれば $d_2(\tilde{c}_n)=c_n-c_1$ である.

(3) $\gamma\in H_1(S^1)$ を $\gamma=\pi_{S^1,\emptyset}(c_1)$ で定めれば $\pi_{S^1,\emptyset}(c_n)=\gamma$ がすべての自然数 n に対して成り立つ.

(4) γ は $H_1(S^1)$ の生成元である

定義 3.6 (写像度の定義)
nを自然数とし, γ_n を $H_n(S^n)$ の生成元とする. 定理3.4から連続写像 $f\colon S^n \to S^n$ に対して $H_n(f)(\gamma_n) = d\gamma_n$ を満たす整数dが1通りに定まるが, このdをfの写像度といい, $\deg(f)$ で表す.

注意 3.7
$n \geqq 1$ ならば $H_n(S^n)$ は $\mathbf{Z}$ と同型だから $H_n(S^n)$ は2つの生成元を持ち, γ_n が $H_n(S^n)$ の生成元ならば, もう1つの生成元は $-\gamma_n$ である. $H_n(f)(\gamma_n) = d\gamma_n$ ならば $H_n(f)(-\gamma_n) = d(-\gamma_n)$ だからfの写像度は$H_n(S^n)$の生成元の選び方に依存しない.

以下の4つの命題は, これまでに紹介した結果と写像度の定義から容易に示される.

命題 3.8

(1) 連続写像 $f, g : S^n \to S^n$ に対し, $\deg(g \circ f) = \deg(g)\deg(f)$ が成り立つ.

(2) $f, g : S^n \to S^n$ がホモトピックな連続写像ならば $\deg(f) = \deg(g)$ である.

(3) 定値写像の写像度は 0 であり, 恒等写像の写像度は 1 である.

命題 3.9

$T : S^n \to S^n$ を $T(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$ で定義される写像とすれば $\deg(T) = (-1)^{n+1}$ である.

命題 3.10

整数 n に対し, $\rho_n : S^1 \to S^1$ を $\rho_n(z) = z^n$ で定めれば $\deg(\rho_n) = n$ である.

命題 3.11

n が偶数で, 連続写像 $f : S^n \to S^n$ がすべての $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対し $f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ を満たすならば $\deg(f) = 0$ である.

実射影空間 $\boldsymbol{R}P^n$ のホモロジー群を調べることによって, 命題3.11と類似した次の定理が示される.

定理 3.12
nが奇数で, 連続写像 $f: S^n \to S^n$ がすべての $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対し $f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ を満たすならば $\deg(f)$ は偶数である.

さらに可換環 R に対して「R を係数とする位相空間 X のコホモロジー環 $H^*(X; R)$」の概念を定義し, 標数 2 の素体 $\boldsymbol{F}_2$ を係数とする実射影空間 $\boldsymbol{R}P^n$ のコホモロジー環 $H^*(\boldsymbol{R}P^n; \boldsymbol{F}_2)$ の構造を調べることによって次の定理が示される.

定理 3.13
連続写像 $f: S^n \to S^n$ がすべての $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対し $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ を満たせば, $\deg(f)$ は奇数である.

§4 応用例

写像 $f, g: X \to Y$ に対し, $f(x) = g(x)$ を満たす $x \in X$ を f と g の一致点という.
また $Y = X$ の場合, f と X の恒等写像との一致点を f の不動点という.

定理 4.1
連続写像 $f, g: S^n \to S^n$ が $\deg(f) \neq (-1)^{n+1}\deg(g)$ を満たせば, f と g の一致点が存在する. とくに $\deg(f) \neq (-1)^{n+1}$ ならば f の不動点が存在し, $\deg(f) \neq 0$ ならば, f は全射である.

$\boldsymbol{R}^n$ の原点を中心とする単位円板 $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqq 1\}$ を D^n で表す. 次の定理を Brouwer の一致点定理といい, 後半の特別の場合を Brouwer の不動点定理という.

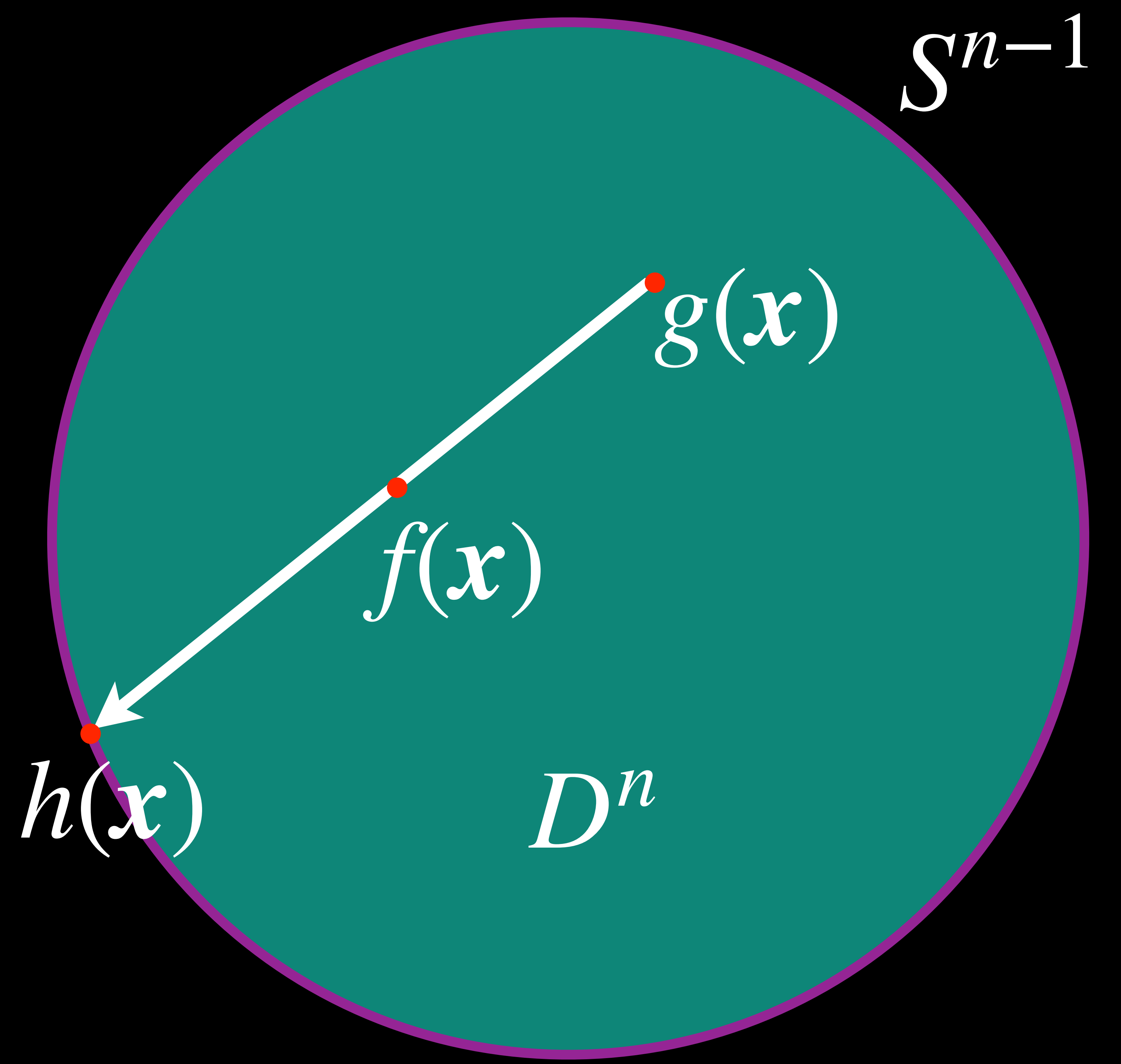
定理 4.2
連続写像 $f: D^n \to D^n$ は $f(S^{n-1}) \subset S^{n-1}$ を満たすとし, $\tilde{f}: S^{n-1} \to S^{n-1}$ を $\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ で定める. $n \geqq 2$ であり, $\deg(\tilde{f}) \neq 0$ ならば f は任意の連続写像 $g: D^n \to D^n$ と一致点をもつ. とくに, D^n から D^n への連続写像はつねに不動点をもつ.

証明

任意の $\boldsymbol{x}\in D^n$ に対して, $f(\boldsymbol{x})\neq g(\boldsymbol{x})$ が成り立つと仮定する. 各 $\boldsymbol{x}\in D^n$ に対し, $g(\boldsymbol{x})$ を始点として $f(\boldsymbol{x})$ を通る半直線と S^{n-1} との交点を $h(\boldsymbol{x})$ とする. ここで

$$u(\boldsymbol{x})=\frac{f(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x})}{\|f(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x})\|}$$

$$s(\boldsymbol{x})=-(f(\boldsymbol{x}),u(\boldsymbol{x}))+\sqrt{1-\|f(\boldsymbol{x})\|^2+(f(\boldsymbol{x}),u(\boldsymbol{x}))^2}$$



とおけば, $h(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})+s(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x})$ となり, $h:D^n\to S^{n-1}$ は連続である. また, $\boldsymbol{x}\in S^{n-1}$ ならば $f(\boldsymbol{x})\in S^{n-1}$ だから $h(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})$ である.

$F:S^{n-1}\times[0,1]\to S^{n-1}$ を $F(\boldsymbol{x},t)=h(t\boldsymbol{x})$ で定める.

このとき $\boldsymbol{x}\in S^{n-1}$ を $F(\boldsymbol{x},0)$ に対応させる写像は $h(\boldsymbol{0})$ への定値写像で,

$F(\boldsymbol{x},1)=h(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})$ となるため, $\tilde{f}:S^{n-1}\to S^{n-1}$ は定値写像にホモトピックである.

命題3.8の(2), (3)により, 仮定と矛盾が生じる.

系 4.3
連続写像 $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ の像が有界ならば f の不動点が存在する.

次の定理の証明では, 2次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^2$ を複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ と同一視することによって $D^2=\{z\in\boldsymbol{C} \mid |z|\leqq 1\}$ とみなす.

定理 4.8 (代数学の基本定理)
複素数を係数とする n 次代数方程式 $z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$ は,

$$r=\max\{1, |a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|\}$$

とおくと, 絶対値が r 以下である複素数の解を少なくとも一つもつ.

証明

$f:D^2\to D^2$ を $f(z)=z^n$ で定義すれば, f は連続で $f(S^1)\subset S^1$ を満たす.

一方, $|z|\leqq r$ ならば次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}|a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0| &\leqq |a_{n-1}||z^{n-1}|+\cdots+|a_1||z|+|a_0|\\ &\leqq |a_{n-1}|r^{n-1}+\cdots+|a_1|r+|a_0|\\ &= r^{n-1}\left(|a_{n-1}|+\cdots+\frac{|a_1|}{r^{n-2}}+\frac{|a_0|}{r^{n-1}}\right)\\ &\leqq r^{n-1}(|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|)\leqq r^n\end{aligned}$$

故に連続写像 $g:D^2\to D^2$ が $g(z)=-\frac{1}{r^n}(a_{n-1}(rz)^{n-1}+\cdots+a_1(rz)+a_0)$ で定義できる.

$z\in S^1$ を $f(z)$ に対応させる写像 $\tilde{f}:S^1\to S^1$ は命題3.10の写像 ρ_n に一致するため,

命題3.10から $\deg(\tilde{f})=n\neq 0$ だから定理4.2により $z_0\in D^2$ で $f(z_0)=g(z_0)$ を満たす

$z_0\in D^2$ が存在する. このとき $(rz_0)^n=-(a_{n-1}(rz_0)^{n-1}+\cdots+a_1(rz_0)+a_0)$ だから

rz_0 は与えられた方程式の解である.

定理 4.5 (Frobenius の定理)
各成分が負でない実数であるような正則行列は正の実数の固有値をもつ.

定義 4.6
(1) $\boldsymbol{x}\in S^n$ に対し, $\boldsymbol{R}^{n+1}$ のベクトルで $\boldsymbol{x}$ と直交するものを $\boldsymbol{x}$ における S^n の接ベクトルという.
(2) 写像 $v:S^n\to\boldsymbol{R}^{n+1}$ で, 各 $\boldsymbol{x}\in S^n$ に対して $v(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}$ における S^n の接ベクトルになるものを S^n の接ベクトル場といい, v が連続であれば連続な接ベクトル場という. また $v(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x}\in S^n$ を v の零点または特異点という.

$v:S^{2m-1}\to\boldsymbol{R}^{2m}$ を $v(x_1,x_2,\ldots,x_{2m})=(-x_2,x_1,\ldots,-x_{2m},x_{2m-1})$ で定めれば,
v は零点をもたない S^{2m-1} の接ベクトル場である.

従って奇数次元の球面上には零点をもたない接ベクトル場がある.

定理 4.8
偶数次元の球面上の連続な接ベクトル場は必ず零点をもつ.

定義 4.8
群 G の積を与える写像を $\mu: G\times G\to G$ $(\mu(g,h)=gh)$, 逆元を対応させる写像を $\iota: G\to G$ $(\iota(g)=g^{-1})$ とする. G に位相が与えられていて, $G\times G$ には直積位相を与えたとき, μ と ι がともに連続写像であるとき, G を**位相群**という.

定義 4.9
(1) X を位相空間, G を位相群とする. 連続写像 $\alpha: G\times X\to X$ が次の条件 (i), (ii) を満たすとき, α を G の X への**作用**という. さらに (iii) が成り立つとき G の X 上への作用は**自由**であるという.

(i) e を G の単位元とするとき, 任意の $x\in X$ に対して $\alpha(e,x)=x$.
(ii) 任意の $g,h\in G$ と $x\in X$ に対して $\alpha(gh,x)=\alpha(g,\alpha(h,x))$.
(iii) $\alpha(g,x)=x$ となる $x\in X$ があれば $g=e$ である.

(2) $\boldsymbol{R}$ を加法に関して位相群とみなし, $\boldsymbol{R}$ の位相空間 X への作用 $\varphi: \boldsymbol{R}\times X\to X$ を X 上の**力学系**という. すべての $t\in\boldsymbol{R}$ に対して $\varphi(t,x_0)=x_0$ を満たすような X の点 x_0 を力学系 φ の**特異点**という.

注意 4.10

(1) Gが有限群の場合は, Gに離散位相を与えることによって, Gを位相群とみなす.

(2) $g\in G$に対して写像 $\alpha_g : X\to X$を$\alpha_g(x)=\alpha(g,x)$で定めれば, α_g は連続で,
$\alpha_e=id_X$, $\alpha_{gh}=\alpha_g\circ\alpha_h$ が成り立つため, $\alpha_g\circ\alpha_{g^{-1}}=\alpha_{g^{-1}}\circ\alpha_g=id_X$ だから
$\alpha_g^{-1}=\alpha_{g^{-1}}$ である. 従って α_g は同相写像である.

定理 4.11

群Gの偶数次元球面上への自由な作用があれば, Gの位数は1か2である.

補題 4.12

Xをコンパクトな位相空間, φをX上の力学系とする. $t\in\boldsymbol{R}$に対して$\varphi_t(x)=\varphi(t,x)$で定義される写像 $\varphi_t : X\to X$ がすべての $t\in\boldsymbol{R}$ に対して不動点を持つならば, φ の特異点が存在する.

定理 4.13

(1) D^n 上のどのような力学系も少なくとも1つの特異点をもつ.

(2) 偶数次元球面上のどのような力学系も少なくとも1つの特異点をもつ.

定理 4.14
nが偶数で, 連続写像 $f\colon S^n \to S^n$ 写像度が0でなければ $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ となる点 $\boldsymbol{x} \in S^n$ が存在する.

定理3.12を用いれば次の定理が示される.

定理 4.15
$f\colon S^n \to S^n$ を連続写像とする. nと$\deg(f)$がともに奇数ならば $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ となる点 $\boldsymbol{x} \in S^n$ が存在する.

S^n の点 $\boldsymbol{x}$ に対して S^n の点 $-\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}$ の対心点という.
次の定理はBorsukの対心点定理またはBorsuk-Ulamの定理と呼ばれ, 定理3.13を用いて示される.

定理 4.16
$f\colon S^n \to \boldsymbol{R}^n$ を連続写像とするとき, $f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ を満たす $\boldsymbol{x} \in S^n$ が存在する.

次の定理4.17は $n=2$ の場合は中間値の定理の簡単な応用として得られるが, 一般の n に対しては, 定理4.16を用いて示される.

定理 4.17 (ハムサンドウィッチの定理)

$\boldsymbol{R}^n$ の中に n 個の有界な可測集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ が任意に与えられたとき, $\boldsymbol{R}^n$ の超平面 P で, 次のようなものが存在する.

各 j に対し, P で分割される A_j の2つの部分の測度は等しい.

次の定理も定理4.16の応用例の一つである.

定理 4.18 (Lusternik-Schnirelmann の定理)

S^n の空でない $n+1$ 個の閉集合 $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$ が, $S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} F_i$ を満たせば, $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$のなかの少なくとも1つは互いに対心点である2点を含む.

§5 課題

以下の問題のうち1題を選んで解答せよ.

問題 5.1 補題1.1を証明せよ.

問題 5.2 $f:X\to Y$, $g:Y\to X$ を連続写像とし, 合成写像 $g\circ f:X\to X$ は X の恒等写像 id_X とホモトピックであるとする. Y が弧状連結ならば, X も弧状連結であることを示せ.

問題 5.3 n を自然数とする.

(1) n 次元円板 D^n は1点からなる位相空間とホモトピー同値であることを示せ.

(2) 連続写像 $f:D^n\to S^{n-1}$ で, すべての $\boldsymbol{x}\in S^{n-1}$ に対して, $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$ を満たすものは存在しないことを示せ.
(ヒント：$n\geqq 2$ の場合は包含写像 $i:S^{n-1}\to D^n$ を考えて命題3.8を用いる.)

問題 5.4 中間値の定理を用いて, $n=2$ の場合に定理4.17の別証明を与えよ.

参考文献

[1] 中岡 稔, 位相幾何学(ホモロジー論), 共立出版, 1970.

[2] 中岡 稔, 不動点定理とその周辺, 岩波書店, 1977.

[3] Spanier, Edwin H., Algebraic Topology, Springer Verlag, 1966.