1　行列の基本変形と連立１次方程式

1.1　連立１次方程式

　この章では, 以下のような複数個の未知数 (x, y, z など) を含み, 未知数に関して１次式で表される方程式の解について調べる.

$$(1)\cdots\begin{cases}2x+3y-4z=3\\-x+y=-2\\3x+2y-4z=5\end{cases}\qquad (2)\cdots\begin{cases}x+2y-z+w=0\\2x-2y-3z-3w=-3\\-x-y+2z+4w=-2\end{cases}$$

例 1.1 上の *(2)* の方程式の解を求めてみる. *2* 番目, *3* 番目の式をそれぞれ, *2* 番目の式から *1* 番目の式の両辺を倍したものを辺々引いた式, *3* 番目の式と *1* 番目の式を辺々加えた式で置き換えると,

$$\begin{cases}x+2y-z+w=0\\-6y-z-5w=-3\\y+z+5w=-2\end{cases}$$

となって, 新しく得られた方程式の *2* 番目と *3* 番目の式は未知数 x を含まない. 逆に, 新しい方程式の *2* 番目, *3* 番目の式をそれぞれ, *2* 番目の式と *1* 番目の式の両辺を *2* 倍したものを辺々加えた式, *3* 番目の式から *1* 番目の式を辺々引いた式で置き換えれば元の方程式が得られるため, 新しい方程式は元の方程式 *(2)* と同じ解をもつことが分る. 次に, 新しい方程式の *1* 番目, *2* 番目の式をそれぞれ, *1* 番目の式から *3* 番目の式の両辺を *2* 倍したものを辺々引いた式, *2* 番目の式と *3* 番目の式の両辺を *6* 倍したものを辺々引いた式で置き換えると,

$$\begin{cases}x-3z-11w=4\\5z+25w=-15\\y+z+5w=-2\end{cases}$$

となり, 上と同様の理由で, この連立方程式は上の連立方程式と同じ解をもつ. さらに, この連立方程式の *2* 番目の式と *3* 番目の式を入れ替え, 新しい *3* 番目の式の両辺を *5* で割ると,

$$\begin{cases}x-3z-11w=4\\y+z+5w=-2\\z+5w=-3\end{cases}$$

となる. 最後に, *1* 番目, *2* 番目の式をそれぞれ, *1* 番目の式と *3* 番目の式の両辺を *3* 倍したものを辺々加えた式, *2* 番目の式から *3* 番目の式を辺々引いた式で置き換えれば

$$\begin{cases}x+4w=-5\\y=1\\z+5w=-3\end{cases}$$

が得られ, これは元の方程式と同じ解をもつ. このとき, w に任意の値 t を与えたとき, x, y, z は $x=-4t-5$, $y=-1$, $z=-5t-3$ として, ただ１通りに定まるため, 元の連立方程式の解は,

$$\begin{cases}x=-4t-5\\y=1\\z=-5t-3\\w=t\end{cases}\qquad (t\ \text{は任意定数})$$

によって与えられる.

問 1.2 *(1)* の解を求めよ.

始めに与えた (1), (2) のような (括弧でくくられた) 式の組を連立１次方程式というが, 一般には n 個の未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ と m 個の方程式からなり, 次のような形をしたものである.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで, 以下のような未知数の係数からなる $m \times n$ 行列 A を連立１次方程式 (1.1) の**係数行列**という. また, 未知数からなる n 次元列ベクトルを $\boldsymbol{x}$, (1.1) の各方程式の右辺の定数からなる m 次元列ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とおく.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A の右側に $\boldsymbol{b}$ を付け加えて得られる $m \times (n+1)$ 行列 $\hat{A} = (A, \boldsymbol{b})$ を (1.1) の**拡大係数行列**という.

方程式 (1.1) は行列とベクトルを用いれば１つの式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ で表されるため, (1.1) の解を求めることは, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす n 次元列ベクトル x を求めることに他ならない. このことを線型写像の言葉を用いて言い直すと, $f_A : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義される線型写像とすれば, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{K}^m$ に対して f_A により $\boldsymbol{b}$ に写されるベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ を求めることである.

とくに $n = m$ の場合, 係数行列 A が正則であり, 逆行列 A^{-1} がなんらかの方法で求められたならば, $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ として解がただ１通りに定まる.

さて, (1.1) に対して, 例 2.1 で行った次の３つの操作を考える.

(1) 第 i 式を, 第 j 式 $(j \neq i)$ の両辺を c 倍したものを第 i 式に辺々加えた式で置き換える.

(2) 第 i 式を, 第 i 式の両辺に 0 でない数 c を掛けた式で置き換える.

(3) 第 i 式と第 j 式を入れ替える.

これらの操作を (1.1) に対して行って得られる新しい連立１次方程式は, 元の連立方程式と (解をもつかどうかも含めて) 同じ解をもつ. 実際, (1.1) に対して (1) の操作を行って得られた方程式の第 i 式を, 第 j 式 $(j \neq i)$ の両辺を c 倍したものを第 i 式から辺々引いた式で置き換えると元の (1.1) が得られ, (1.1) に対して (2) の操作を行って得られた方程式の第 i 式を, 第 i 式の両辺を c で割った式で置き換えると元の (1.1) が得られるからである.

従って, このような操作を繰り返して得られる連立方程式が「簡単な形」になるようにすれば, (1.1) の解の様子が分ることになる. 次節で, これらの操作を拡大係数行列の行に対する操作として考えることにより「簡単な形」の意味をはっきりさせ, そのような形にできることを示す.

1.2 行列の基本変形

上記の操作 (1), (2), (3) を行列の言葉に翻訳し, 次のような定義を行う.

定義 1.3 行列について, 次の 3 種類の変形を行に関する基本変形という.

(1) ある行をスカラー倍したものを他の行に加える.

(2) ある行を *0* でないスカラー倍をする.

(3) 2 つの行を入れ替える.

上の定義の (1), (2), (3) における「行」の文字を「列」に置き換えれば, 列に関する基本変形の定義になる.
行列が与えられたとき, その (p,q)-成分が 0 でないならば, (1) の操作を繰り返すことによって, (p,q)-成分以外の第 q 列, あるいは第 p 行の成分をすべて 0 にする操作に名前を与えることにする.

定義 1.4 $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対し, $a_{pq} \neq 0$ のとき, 各 i $(1 \leqq i \leqq m,\ i \neq p\ )$ について, 第 p 行を $-a_{iq}/a_{pq}$ 倍したものを第 i 行 (第 j 列) に加えることによって, (p,q)-成分以外の第 q 列の成分をすべて *0* にすることを, (p,q)-成分に関して第 q 列を掃き出すという. また, 各 j $(1 \leqq j \leqq n,\ j \neq q)$ について, 第 q 列を $-a_{pj}/a_{pq}$ 倍したものを第 j 列に加えることによって, (p,q)-成分以外の第 p 行の成分をすべて *0* にすることを, (p,q)-成分に関して第 p 行を掃き出すという.

$$\begin{pmatrix} & a_{1p} & \\ & \vdots & \\ & a_{p-1\,q} & \\ & a_{pq} & \\ & a_{p+1\,q} & \\ & \vdots & \\ & a_{mq} & \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \\ & a_{pq} & \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \\ a_{p1} & \cdots & a_{p\,q-1} & a_{pq} & a_{p\,q+1} & \cdots & a_{pn} \\ \\ \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{pq} & 0 & \cdots & 0 \\ \\ \end{pmatrix}$$

例 1.5 例えば, 4×5 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & -2 & 0 \\ 5 & -4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

を *(2,2)*-成分に関して第 *2* 列, 第 *2* 行を掃き出したものはそれぞれ, 下のようになる.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & -2 & 0 \\ 13 & 0 & 15 & -3 & 2 \\ -5 & 0 & -11 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & -4 & 15 & -3 & 2 \\ -5 & 3 & -11 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

定義 1.6 $c \in \boldsymbol{K}$, $1 \leqq i, j \leqq n$ *($i \neq j$)* とするとき, 次の３種類の型の n 次正方行列 $P_n(i,j;c)$, $Q_n(i;c)$, $R(i,j)$ を n 次基本行列という. *(ただし, $Q_n(i;c)$ については $c \neq 0$ とする.)*

$$P_n(i,j;c) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & c \\ & & \ddots & \\ \huge 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q_n(i;c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \huge 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & c & & \\ & & & & 1 & \\ \huge 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_n(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \huge 0 & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ \huge 0 & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

すなわち, これらは n 次単位行列 E_n に基本変形を行って得られる行列であり, $P_n(i,j;c)$ は E_n の第 i 行に第 j 行を c 倍したものを加えて得られる行列, $Q_n(i;c)$ は E_n の第 i 行を c 倍した行列, $R_n(i,j)$ は E_n の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列に他ならない.

命題 1.7 $m \times n$ 行列 A に対し, $P_m(i,j;c)A$ は A の第 j 行を c 倍したものを第 i 行に加えて得られる行列, $Q_m(i;c)A$ は A の第 i 行を c 倍して得られる行列, $R_m(i,j)A$ は A の第 i 行と第 j 行を入れ替えて得られる行列である. また, $AP_n(i,j;c)$ は A の第 i 列を c 倍したものを第 j 列に加えて得られる行列, $AQ_n(i;c)$ は A の第 i 列を c 倍して得られる行列, $AR_n(i,j)$ は A の第 i 列と第 j 列を入れ替えて得られる行列である.

上の命題の証明は易しいので, 読者に任せる. この命題により, 行列の行, 列に関する基本変形は基本行列を左右から掛けることと同じであることがわかる.

演習 1.8 基本行列に関して等式 $P_n(i,j;c)P_n(i,j;d) = P_n(i,j;c{+}d)$, $Q_n(i;c)Q_n(i;d) = Q_n(i;cd)$, $R_n(i,j)^2 = E_n$ が成り立つことを示せ. 従って, $P_n(i,j;c)^{-1} = P_n(i,j;-c)$, $Q_n(i;c)^{-1} = Q_n(i;\frac{1}{c})$, $R_n(i,j)^{-1} = R_n(i,j)$ であり, 基本行列は正則行列である.

注意 1.9 基本行列に関して以下の等式が成り立つことに注意する.
${}^tP_n(i,j;c) = P_n(j,i;c)$, ${}^tQ_n(i;c) = Q_n(i;c)$, ${}^tR_n(i,j) = R_n(j,i) = R_n(i,j)$ *(*従って, 基本行列の転置行列も基本行列である.*)*
$\left(\begin{smallmatrix} P_n(i,j;c) & O \\ O & E_m \end{smallmatrix}\right) = P_{m+n}(i,j;c)$, $\left(\begin{smallmatrix} E_m & O \\ O & P_n(i,j;c) \end{smallmatrix}\right) = P_{m+n}(i{+}m, j{+}m;c)$, $\left(\begin{smallmatrix} Q_n(i;c) & O \\ O & E_m \end{smallmatrix}\right) = Q_{m+n}(i;c)$, $\left(\begin{smallmatrix} E_m & O \\ O & Q_n(i;c) \end{smallmatrix}\right) = Q_{m+n}(i+m;c)$, $\left(\begin{smallmatrix} R_n(i,j) & O \\ O & E_m \end{smallmatrix}\right) = R_{m+n}(i,j;c)$, $\left(\begin{smallmatrix} E_m & O \\ O & R_n(i,j) \end{smallmatrix}\right) = R_{m+n}(i+m, j+m;c)$.

次は, 行列の基本変形に関する基本定理というべきものである.

定理 1.10 $m \times n$ 行列 A は行に関する基本変形を行うことにより, 次の条件 *(1)〜(3)* を満たす行列 $B = (b_{ij})$ にできる. 言い換えれば, m 次基本行列 $P_1, P_2, \ldots, P_l$ で, $P_lP_{l-1}\cdots P_1A = ((1),(2),(3)$ を満たす行列*)* となるものがある.

(1) 整数 r $(0 \leqq r \leqq m)$ で「上から第 r 行目までの B の行はどれも零ではなく, 第 $r+1$ 行目以下の行はすべて零である」を満たすものがある.

(2) $i \leqq r$ ならば $b_{i1} = \cdots = b_{i\,j(i)-1} = 0$, $b_{i\,j(i)} = 1$ となるような $1 \leqq j(i) \leqq n$ があって, さらに B の第 $j(i)$ 列は $\boldsymbol{K}^n$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ になる.

(3) $1 \leqq j(1) < j(2) < \cdots < j(r) \leqq n$ である.

(1) の条件は「B のある行から上の行はすべて零でなく, その行より下の行はすべて零になっている.」ことを言っており, (2) は「B の零でない行の零でない成分の先頭は 1 であり, その上下の成分はすべて零である」ことを言っている. さらに (3) は「B の零でない行の零でない成分の先頭は下の行ほど右側にずれている」ことを表している. また, (3) から $r \leqq n$ であることに注意する. 従って B は次のような形の行列である.

$$\begin{pmatrix}
1 & \cdots\cdots\cdots & 0 & \cdots & 0 & & 0 & \\
 & & & & \vdots & & \vdots & \\
 & & 1 & \cdots & 0 & & 0 & \\
 & & & & 1 & \cdots\cdots\cdots & 0 & \\
 & \text{\Large 0} & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & \cdots\cdots \\
 & & & & & & &
\end{pmatrix}$$

(1.10) の証明をする前に, 第 1 節の始めに与えた (1),(2) の連立 1 次方程式の拡大係数行列を行に関する基本変形をして (1.10) の条件を満たすようにしてみる.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1)-成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2)-成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 5 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行}\div 5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1)-成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2)-成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -11 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 25 & -15 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -11 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 25 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 3 行}\div 5}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -11 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3)-成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

(例 2.1 と比較せよ)

(1.10) **の証明** A が零行列の場合は, A 自身がすでに (1), (2), (3) の条件を満たす ($r = 0$ の場合になる) から $A \neq O$ と仮定し, A の行の数 m による帰納法で証明する. $m = 1$ の場合は $A = (0, \ldots, 0, a_j, \ldots, a_n)$ ($a_j \neq 0$) とすると, $a_j^{-1}A = (0, \ldots, 0, 1, *, \ldots, *)$ は $r = 1$, $j(1) = j$ に対して (1), (2), (3) の条件を満たすため, 主張は成り立つ.

行の数が $m - 1$ の行列に対して主張が成り立つと仮定する. $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ の零でない最初の列を第 $j(1)$ 列として $a_{i_1 j(1)} \neq 0$ とし, 次のように基本変形をする.

$$A = \begin{pmatrix} & a_{1j(1)} & \cdots \\ & \vdots & \cdots \\ & a_{i_1-1j(1)} & \cdots \\ \text{\Large 0} & a_{i_1j(1)} & \cdots \\ & a_{i_1+1j(1)} & \cdots \\ & \vdots & \cdots \\ & a_{mj(1)} & \cdots \end{pmatrix} \xrightarrow{(i_1, j(1))\text{-成分に関して第 } j(1) \text{ 列の掃き出し}} \begin{pmatrix} & 0 & \cdots \\ & \vdots & \cdots \\ & 0 & \cdots \\ \text{\Large 0} & a_{i_1j(1)} & \cdots \\ & 0 & \cdots \\ & \vdots & \cdots \\ & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 } i_1 \text{ 行} \div a_{i_1j(1)}} \begin{pmatrix} & 0 & \cdots \\ & \vdots & \cdots \\ & 0 & \cdots \\ \text{\Large 0} & 1 & \cdots \\ & 0 & \cdots \\ & \vdots & \cdots \\ & 0 & \cdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行と第 } i_1 \text{ 行の入れ替え}} \left(\begin{array}{cc|ccc} & \multicolumn{1}{c}{1} & * & \cdots & * \\ \cline{3-5} & 0 & & & \\ & \vdots & & & \\ \text{\Large 0} & \vdots & & A_1 & \\ & \vdots & & & \\ & 0 & & & \end{array}\right)$$

上の最後に得られた行列を B_1 とし, A_1 を B_1 の第 1 行より下の行と, 第 $j(1)$ 列より右の列からなる $(m-1) \times (n - j(1))$-行列とするとき, 帰納法の仮定から A_1 を行に関して基本変形をして, 条件 (1), (2), (3) を満たすような行列 A_2 にできる. B_1 の第 2 行目以下は第 $j(1) + 1$ 列より左の成分がすべて 0 だから, B_1 の第 2 行目以下の行に関して基本変形を繰り返してもこれらの成分は 0 のままで, A_1 の行に関する基本変形を繰り返すことになる. 従って, B_1 は第 2 行目以下の行に関する基本変形を行うことにより

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} & \multicolumn{1}{c}{1} & * & \cdots & * \\ \cline{3-5} & 0 & & & \\ \text{\Large 0} & \vdots & & A_2 & \\ & 0 & & & \end{array}\right)$$

という形の行列 (B_2 とする) にできる. A_2 が整数 r' と整数列 $j'(1), \ldots, j'(r')$ に対して条件 (1), (2), (3) を満たすとし $r = r' + 1$, $j(i) = j'(i-1) + j(1)$ $(2 \leqq j \leqq r)$ とおくと, B_2 の $(1, j(i))$-成分が $i = 2, 3, \ldots, r$ に対して 0 であるとは限らないことを除けば B_2 は整数 r と整数列 $j(1), \ldots, j(r)$ に対して条件 (1), (2), (3) を満たすことに注意する. そこで $i = 2, \ldots, r$ に対して, この順に第 i 行に適当な数を掛けたものを第 1 行に加えてゆくことにより, $(1, j(i))$-成分が 0 になるように B_2 を行に関して基本変形していけば, 最終的に得られる行列が整数 r と整数列 $j(1), \ldots, j(r)$ に対して条件 (1), (2), (3) を満たす. 故に, 行の数が m である行列に対しても主張が成り立つことがわかる.

列に関する基本変形についても同様の定理が成り立つ.

定理 1.11 *$m \times n$ 行列 A は列に関する基本変形を行うことにより, 次の条件 (1)〜(3) を満たす行列 $B = (b_{ij})$ にできる. 言い換えれば, n 次基本行列 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ で, $AQ_1Q_2 \cdots Q_k = ((1), (2), (3)$ を満たす行列$)$ となるものがある.*

(1) 整数 r *$(0 \leqq r \leqq n)$* で「左から第 r 列目までの B の列はどれも零ではなく, 第 $r+1$ 列目以下の列はすべて零である」を満たすものがある.

(2) $j \leqq r$ ならば $b_{1j} = \cdots = b_{i(j)-1\,j} = 0$, $b_{i(j)\,j} = 1$ となるような $1 \leqq i(j) \leqq m$ があって, さらに B の第 $i(j)$ 行は $\boldsymbol{K}^m$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_j$ の転置 ${}^t\boldsymbol{e}_j$ になる.

(3) $1 \leqq i(1) < i(2) < \cdots < i(r) \leqq m$ である.

$m \times n$ 行列で,

$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

という形のものを $F_{mn}(r)$ で表すことにする.

(1.10) を用いれば以下のことが示される.

定理 1.12 $m \times n$ 行列 A は行と列に関する基本変形を行うことにより, $F_{mn}(r)$ という形にできる. すなわち, m 次基本行列の積の形で表される行列 X と n 次基本行列の積の形で表される行列 Y で, $XAY = F_{mn}(r)$ となるものがある.

証明 まず, 行に関して基本変形を行って, 基本行列の積の形で表される行列 X で, XA が (1.10) の 3 つの条件を満たすようなものをとる. 次に, 第 $j(i)$ 列 $(i = 1, 2, \ldots, r)$ が第 i 列にくるように XA の列の入れ替えを行う. すなわち, $R_n(p, q)$ の積の形の行列 Y_1 で, XAY_1 の第 i 列が $\boldsymbol{e}_i$ になるようなものがある. さらに, 各 $i = 1, 2, \ldots, r$ に対し, 第 (i, i)-成分に関して XAY_1 の第 i 行を掃き出せば, $F_{mn}(r)$ という形になる. □

系 1.12.1 A を n 次正方行列としたとき, 次の 3 つの命題は同値である.

i) A は基本行列の積である.

ii) A は正則行列である.

iii) A に行に関する基本変形を行なって *(1.10)* の 3 つの条件を満たすようにした場合, それらの条件における r は n に等しい.

証明 $i) \Rightarrow ii)$; 基本行列は正則行列であり, 正則行列の積は正則だから基本行列の積は正則行列である.

$ii) \Rightarrow iii)$; (1.12) から, n 次基本行列の積の形で表される行列 X, Y で $XAY = F_{nn}(r)$ という形になるものが取れる. 上のことから X, Y は正則だから, A が正則行列ならば XAY も正則である. このとき, もし $r < n$ ならば $XAY\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}$ となるため $\boldsymbol{e}_n \neq \boldsymbol{0}$ だから XAY が正則であることに矛盾する. 従って $r = n$ である.

$iii) \Rightarrow i)$; まず, n 次正方行列が $r = n$ に対して (1.10) の 3 つの条件を満たせば, それは単位行列に他ならないことに注意する. A を行に関して基本変形を行って, 基本行列の積の形で表される行列 X で, XA が (1.10) の 3 つの条件を満たすようなものをとったとき, $r = n$ ならば XA は単位行列になる. $X = P_l P_{l-1} \cdots P_1$ ($P_1, P_2, \ldots, P_l$ は基本行列) とすると $P_l P_{l-1} \cdots P_1 A = E_n$ だから $A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_l^{-1}$ である. (1.9) の 1) により, 基本行列の逆行列は基本行列だから A は基本行列の積である. □

上の結果から, 基本変形を行えば与えられた正方行列が正則かどうか判断できることがわかるが, 次のようにすれば, 正則な場合にはその逆行列を同時に求めることができる.

逆行列の求め方 2.13. A を n 次正方行列とするとき, A の右側に n 次単位行列 E_n を並べて得られる $n \times 2n$ 行列 (A, E_n) を行に関して基本変形を行ない, $X(A, E_n) = (XA, X)$ の左半分 XA が (1.10) の 3 つの条件を満たすようにする. このとき, XA が単位行列になっていれば A は正則であり, 上の証明からわかるように X は A の逆行列である.

$$(A, E_n) = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & & \text{\Large 0} \\ A & & \ddots & \\ & \text{\Large 0} & & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & \text{\Large 0} & \\ & \ddots & & X \\ \text{\Large 0} & & 1 & \end{array}\right)$$

また, このとき $X = P_l P_{l-1} \cdots P_1$ ($P_1, P_2, \ldots, P_l$ は基本行列) とすると $A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_l^{-1}$ で, 基本行列の逆行列は (1.9) の 1) からただちにわかるため, A を基本行列の積の形で表すことができる.

例 1.13 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列を求める.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 }1\text{ 列の掃き出し}]{(1,1)\text{-成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 }2\text{ 列の掃き出し}]{(2,2)\text{-成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 }3\text{ 列の掃き出し}]{(3,3)\text{-成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 }4\text{ 列の掃き出し}]{(4,4)\text{-成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

従って, 与えられた行列の逆行列は $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ である.

問 1.14 行列 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ (a は定数) が逆行列をもつための条件は $a \neq 1, -2$ であることを示し, このとき, この行列の逆行列を求めよ.

1.3 連立１次方程式の解法

2.1 節で与えた連立 1 次方程式 (1.1) の拡大係数行列 $\bar{A} = (A, \boldsymbol{b})$ を行に関して基本変形をして, $(B, \boldsymbol{b}')$ ($B = (b_{ij})$ は (1.10) の条件を満たす) という形にする. このとき, $(B, \boldsymbol{b}')$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式は元の連立 1 次方程式 (1.1) と同じ解をもつため, 以下でこの新しい連立 1 次方程式について調べる. (これが 2.1 節の最後で述べた「簡単な形」である.)

$\boldsymbol{b}'$ の第 i 成分を b'_i とすると, B が (1.10) の条件を満たすことから, $(B, \boldsymbol{b}')$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式の i 番目の式は $i \leqq r$ ならば

$$x_{j(i)} + b_{i\,j(i)+1} x_{j(i)+1} + \cdots + b_{in} x_n = b'_i \quad \cdots (i)$$

であり, $r < i \leqq m$ ならば $0 = b'_i$ となる. 従って, もし $b'_{r+1}, b'_{r+2}, \ldots, b'_m$ のうちに 0 でないものがあれば, 新しい連立方程式は解をもたないため, 元の連立方程式 (1.1) も解をもたない.

$b'_{r+1} = b'_{r+2} = \cdots = b'_m = 0$ のときは $i = 1, 2, \ldots, r$ に対して上の (i) を満たす $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の組が新しい連立方程式の解になる. B の第 $j(i)$ 列は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ だから, $b_{k\,j(i)} \neq 0$ となるのは $k = i$ の場合だけで, $b_{i\,j(i)} = 1$ である. このことは, 新しい連立方程式の中で未知数 $x_{j(i)}$ の係数が 0 以外になって現れるのは i 番目の式 (i) だけであり, (i) の左辺の 2 項目以降の $x_{j(k)}$ という形の未知数の係数は 0 であることを意味する. そこで $\{1, 2, \ldots, n\}$

から $\{j(1), j(2), \ldots, j(r)\}$ を除いて得られる集合を $\{\kappa(1), \kappa(2), \ldots, \kappa(n-r)\}$ $(\kappa(1) < \kappa(2) < \cdots < \kappa(n-r))$ とし, 各 i に対して $\kappa(l) > j(i)$ を満たす最小の l を ν_i で表せば, (i) は

$$x_{j(i)} + b_{i\kappa(\nu_i)} x_{\kappa(\nu_i)} + \cdots + b_{i\kappa(j)} x_{\kappa(j)} + \cdots + b_{i\kappa(n-r)} x_{\kappa(n-r)} = b'_i$$

となる (ただし, $\kappa(l) > j(i)$ となる l がない場合は上式は $x_{j(i)} = b'_i$ となる.). 従って, 未知数 $x_{\kappa(1)}, x_{\kappa(2)}, \ldots, x_{\kappa(n-r)}$ の値を任意に与えたとき, $x_{j(1)}, x_{j(2)}, \ldots, x_{j(r)}$ の値を

$$x_{j(i)} = b'_i - b_{i\kappa(\nu_i)} x_{\kappa(\nu_i)} - \cdots - b_{i\kappa(j)} x_{\kappa(j)} - \cdots - b_{i\kappa(n-r)} x_{\kappa(n-r)}$$

によって定めれば $(B, \boldsymbol{b}')$ を拡大係数行列とする連立１次方程式の解が得られる.

以上をまとめると, 以下のようになる.

定理 1.15 連立１次方程式 *(1.1)* は次の手順で解が求まる.

I. $\bar{A} = (A, \boldsymbol{b})$ に対し, 行に関する基本変形により, $(PA, P\boldsymbol{b})$ *(*ただし, P は m 次基本行列の積, PA は *(1.10)* の３つの条件を満たす行列*)* という形に変形する*.*

II. $PA = (b_{ij})$ とし, $P\boldsymbol{b}$ の第 i 成分を b'_i とすれば, $b'_i \neq 0$ となる $i > r$ があれば *(1.1)* は解をもたない*.*

III. $b'_{r+1} = b'_{r+2} = \cdots = b'_m = 0$ の場合, $\{1, 2, \ldots, n\}$ から $\{j(1), j(2), \ldots, j(r)\}$ を除いて得られる集合を $\{k(1), k(2), \ldots, k(n-r)\}$ *(*$k(1) < k(2) < \cdots < k(n-r)$*)* とし, 各 i に対して $\kappa(l) > j(i)$ を満たす最小の l を ν_i で表すと, *(1.1)* の解は $t_1, t_2, \ldots, t_{n-r}$ を $\boldsymbol{K}$ の任意の要素とすると,

$$\begin{cases} x_{k(i)} = t_i & (1 \leqq i \leqq n-r) \\ x_{j(i)} = b'_i - \sum\limits_{s=\nu_i}^{n-r} b_{i\,k(s)} t_s & (1 \leqq i \leqq r) \end{cases}$$

*(*ただし, $\kappa(l) > j(i)$ を満たす l がないような $1 \leqq i \leqq r$ については $x_{j(i)} = b'_i$ とする*.)* によって与えられる*.*

上で得た解をベクトルを用いて表す. $\boldsymbol{c}_p \in \boldsymbol{K}^n$ $(p = 1, 2, \ldots, n-r)$ を第 q 成分 c_{pq} が

$$c_{pq} = \begin{cases} 1 & q = k(p) \\ 0 & q = k(i),\ i \neq p \\ -b_{i\,k(p)} & q = j(i),\ 1 \leqq i \leqq r \end{cases}$$

で与えられる n 次元列ベクトルであるとし, $\boldsymbol{c}_0$ を第 q 成分 c_{0q} が

$$c_{0q} = \begin{cases} 0 & q = k(i),\ 1 \leqq i \leqq n-r \\ b'_i & q = j(i),\ 1 \leqq i \leqq r \end{cases}$$

で与えられる n 次元列ベクトルであると すると, (1.15) から (1.1) の解のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $t_1, t_2, \ldots, t_{n-r}$ を $\boldsymbol{K}$ の任意の要素として

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_0 + t_1 \boldsymbol{c}_1 + t_2 \boldsymbol{c}_2 + \cdots + t_p \boldsymbol{c}_p + \cdots + t_{n-r} \boldsymbol{c}_{n-r}$$

の形で与えられる.

注意 1.16 *1) (1.15)* の *III* の状況の下で, $\boldsymbol{K}^{n-r}$ のベクトル $\boldsymbol{t} = (t_i)$ に対して $\boldsymbol{K}^n$ のベクトル $\boldsymbol{c}_0 + \sum\limits_{i=1}^{n-r} t_i \boldsymbol{c}_i$ を対応させる写像は $\boldsymbol{K}^{n-r}$ から *(1.1)* の解全体からなる集合の上への１対１の写像であることに注意する. このことを文学的に表現すると, *(1.1)* の解は $(n-r)$-次元の「自由度」をもつといえる. とくに, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ならばこの対応は, $\boldsymbol{c}_p$ を第 p-列にもつ $n \times (n-r)$ 行列で定まる, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体の集合の上への１対１の線型写像である.

2) $n > r$ のとき, *(1.1)* の解が存在すればそれは *2* 個以上あり, さらに $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ならば, *(1.1)* は零ベクトルでない解 *(*例えば上で定義した $\boldsymbol{c}_1$*)* をもつ.

3) $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ で, $n = 3$ の場合, *(1.1)* が解をもてば, 解全体からなる集合は, $r = 3$ ならばただ 1 つのベクトル $\boldsymbol{c}_0$ からなり, $r = 2$ ならば $\boldsymbol{c}_0$ を通り $\boldsymbol{c}_1$ を方向ベクトルとする直線であり, $r = 1$ ならば $\boldsymbol{c}_0$ を通り $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$ で張られる平面である.

(1.15) の応用として以下の定理を示す.

定理 1.17 $f : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ を $m \times n$ 行列 A で表される線型写像とする. A に行に関する基本変形を行い, 行列 XA *(*X は基本行列の積*)* が整数 r に対して *(1.10)* の 3 つの条件を満たすとする.

(1) f は $\boldsymbol{K}^m$ の上への写像 $\Leftrightarrow r = m$

(2) f は 1 対 1 写像 $\Leftrightarrow r = n$

(3) f は 1 対 1 かつ $\boldsymbol{K}^m$ の上への写像 $\Leftrightarrow r = m = n$

証明 (1) ($\Rightarrow$) $r < m$ と仮定して矛盾を導く. X は正則行列だから仮定から $A\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x}) = X^{-1}\boldsymbol{e}_m$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ がある. このとき, $XA\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_m$ であるが, 背理法の仮定により XA の第 m 行は零ベクトルだから左辺の第 m 成分は 0 になる. ところが右辺の第 m 成分は 1 だから矛盾が生じる.

($\Leftarrow$) (1.15) から $r = m$ ならば任意の $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{K}^m$ に対して連立 1 次方程式 (1.1) は解をもつ. すなわち, 任意の $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{K}^m$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ があるため f は $\boldsymbol{K}^m$ の上への写像である.

(2) ($\Rightarrow$) $r < n$ と仮定して矛盾を導く. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ に対する連立 1 次方程式 (1.1) を考えると, 上で注意したように, これは零ベクトルでない解 $\boldsymbol{x}$ をもつため, $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ である. 一方 $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ だから, f が 1 対 1 写像であることと矛盾する.

($\Leftarrow$) $r = n$ ならば (1.15) から, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{K}^m$ に対し $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ があったとしても唯 1 つに限るため f は 1 対 1 写像である.

(3) (1) と (2) から明らか. □

定理 1.18 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \boldsymbol{K}^m$ に対し, $n > m$ ならば $x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ を満たす $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{K}$ で $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ を満たすようなものがある.

証明 $\boldsymbol{v}_j$ の第 i 成分を a_{ij} とすれば, $x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ が成り立つことは, $x_1, \ldots, x_n$ が $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ とした場合の連立 1 次方程式 (1.1) の解であることと同じである. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ であり $n > m \leqq r$ だから (1.1) は零ベクトルでない解をもつため主張が成立する. □

1.4 行列の階数

この節では行列 A に対して, (1.10) の条件を満たすように基本変形を行った場合に現れる整数 r の意味について考える.

$m \times n$ 行列 A が与えられたとき, A が定める線型写像を $f : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ $(f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x})$ とする. このとき, $\boldsymbol{b} = (b_i) \in \boldsymbol{K}^m$ が f の像に属することは, 連立 1 次方程式 (1.1) が解をもつことに他ならないことを思い出そう.

例の如く, 拡大係数行列 $\bar{A} = (A, \boldsymbol{b})$ に対して行に関する基本変形を行い $(PA, P\boldsymbol{b})$ (ただし, P は m 次基本行列の積, PA は (1.10) の 3 つの条件を満たす行列) という形に変形する. $P = (p_{ij})$ とすると, $P\boldsymbol{b}$ の第 i 成分 b'_i は $b'_i = p_{i1}b_1 + p_{i2}b_2 + \cdots + p_{ij}b_j + \cdots + p_{im}b_m$ で与えられるため, 前節の結果から, $p_{i1}b_1 + p_{i2}b_2 + \cdots + p_{ij}b_j + \cdots + p_{im}b_m = 0$ が $i = r+1, r+2, \ldots, m$ に対して成り立つことが $\boldsymbol{b}$ が f の像に属するための条件である. すなわち f の像は

$$\{\boldsymbol{b} = (b_i) \in \boldsymbol{K}^m |\, p_{i1}b_1 + p_{i2}b_2 + \cdots + p_{ij}b_j + \cdots + p_{im}b_m = 0,\ i = r+1, r+2, \ldots, m\}$$

で与えられる. 別の言い方をすると, f の像は $y_1, y_2, \dots, y_m$ に関する連立１次方程式

$$\begin{cases} p_{r+1\,1}y_1 + p_{r+1\,2}y_2 + \cdots + p_{r+1\,j}y_j + \cdots + p_{r+1\,m}y_m = 0 \\ \cdots \\ p_{i1}y_1 + p_{i2}y_2 + \cdots + p_{ij}y_j + \cdots + p_{im}y_m = 0 \\ \cdots \\ p_{m1}y_1 + p_{m2}y_2 + \cdots + p_{mj}y_j + \cdots + p_{mm}y_m = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

の解全体からなる集合である. 従って, f の像がどのような形になるのか調べるために前節の結果を適用するのであるが, ここでは P は基本行列の積だから正則行列であるという特別な事情がある.

系 1.18.1 Q を連立方程式 *(1.2)* の係数行列とするとき, Q から定まる線型写像 $f_Q : \boldsymbol{K}^m \to \boldsymbol{K}^{m-r}$ は $\boldsymbol{K}^{m-r}$ の上への写像である.

証明 $\boldsymbol{K}^{m-r}$ の任意のベクトル $\boldsymbol{v} = (v_i)$ に対して第 i 成分が $1 \leqq i \leqq r$ なら 0, $r+1 \leqq i \leqq m$ なら v_{i-r} あるような m 次元ベクトル $\binom{\boldsymbol{0}}{\boldsymbol{v}}$ を考えると, P が正則であることから $\boldsymbol{y} = P^{-1}\binom{\boldsymbol{0}}{\boldsymbol{v}}$ とおくと, $P\boldsymbol{y} = \binom{\boldsymbol{0}}{\boldsymbol{v}}$ が成り立つ. この両辺の第 $r+1$ 成分以下の成分からなる $m-r$ 次元ベクトルを比較すると, Q は P の第 $r+1$ 行目以下の行からなる $(m-r) \times r$-行列だから, $f_Q(\boldsymbol{y}) = Q\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}$ が得られる. 従って f_Q は $\boldsymbol{K}^{m-r}$ の上への写像である. □

上の結果と (1.17) の (1) により, (1.2) の係数行列を基本変形して整数 $m-r$ に対して (1.10) の条件を満たすようになる. そこで, (1.16) の 1) において $A = Q$ の場合を考えれば, $\boldsymbol{K}^r$ から (1.2) の解全体の集合 ($= f$ の像) の上への１対１の線型写像があることが分る. 従って, 次のことが示された.

命題 1.19 A を $m \times n$ 行列, A が定める線型写像を $f : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ $(f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x})$ とする. 行に関して基本変形を行い, A を *(1.10)* の３つの条件を満たす行列に変形したとき, それらの条件における整数 r に対し, 線型写像 $g : \boldsymbol{K}^r \to \boldsymbol{K}^m$ で f の像の上への１対１写像になるものがある.

A' をもう１つの $m \times n$ 行列, A' が定める線型写像を $f' : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ としたとき, f' の像と f の像が一致していると仮定する. A' を行に関して基本変形をして, A' が r' という値に対して (1.10) の３つの条件を満たす行列に変形されたとき (1.19) により, 線型写像 $g' : \boldsymbol{K}^{r'} \to \boldsymbol{K}^m$ で f' の像の上への１対１写像になるものがある. この状況の下で, 次を示す.

命題 1.20 １対１上への線型写像 $h : \boldsymbol{K}^{r'} \to \boldsymbol{K}^r$ がある.

証明 各 $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}^{r'}$ に対して, $g'(\boldsymbol{u}) \in (f'$ の像 $) = (f$ の像 $) = (g$ の像$)$ であり g は１対１だから $g(\boldsymbol{v}) = g'(\boldsymbol{u})$ を満たす $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}^r$ はただ１つ定まる. そこで写像 $h : \boldsymbol{K}^{r'} \to \boldsymbol{K}^r$ を $h(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$ で定めることができる.

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in \boldsymbol{K}^{r'}$ と $\lambda \in \boldsymbol{K}$ に対し, $g(\boldsymbol{v}) = g'(\boldsymbol{u})$, $g(\boldsymbol{v}') = g'(\boldsymbol{u}')$ を満たす $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in \boldsymbol{K}^r$ をとれば, g, g' は線型写像だから $g(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') = g'(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}')$, $g(\lambda\boldsymbol{v}) = g'(\lambda\boldsymbol{u})$ が成り立つ. 従って, h の定義から $h(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}') = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}' = h(\boldsymbol{v})+h(\boldsymbol{v}')$, $h(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{v} = \lambda h(\boldsymbol{u})$ となるため h は線型写像である.

$h(\boldsymbol{u}) = h(\boldsymbol{u}')$ と仮定し, $\boldsymbol{v} = h(\boldsymbol{u}) = h(\boldsymbol{u}')$ とおけば, h の定義から $\boldsymbol{v}$ は $g(\boldsymbol{v}) = g'(\boldsymbol{u}) = g'(\boldsymbol{u}')$ を満たす. g' は１対１だから $g'(\boldsymbol{u}) = g'(\boldsymbol{u}')$ より $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'$ が得られるため h は１対１である.

任意の $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}^r$ に対して, $g(\boldsymbol{v})$ は $(f$ の像 $) = (f'$ の像 $) = (g'$ の像$)$ に属するため $g'(\boldsymbol{u}) = g(\boldsymbol{v})$ を満たす $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}^{r'}$ がある. このとき h の定義から $h(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$ となるため, h は $\boldsymbol{K}^r$ の上への写像である. □

上の結果と (1.17) の 3) により $r = r'$ が得られるから, 次の定理が示せた.

定理 1.21 A, A' を２つの $m \times n$ 行列とし, これらが定める線型写像の像は一致しているとする. A, A' を行に関して基本変形して, *(1.10)* の３つの条件を満たす行列に変形したとき, それらの条件における整数 r の値は同じである.

とくに, 上で $A = A'$ の場合を考えると, A を行に関して基本変形して, (1.10) の 3 つの条件を満たす行列に変形したとき, それらの条件における整数 r の値は基本変形のやり方に依存しないことがわかる. そこで, 次の定義をする.

定義 1.22 *$m \times n$ 行列 A に対し, 行に関して基本変形して, (1.10) の 3 つの条件を満たす行列に変形したとき, それらの条件における整数 r の値を行列 A の階数と呼び, $\mathrm{rank}\, A$ で表す.*

(1.21) から, 行列の階数は, その行列が定める線型写像の像にのみ依存する.

定理 1.23 *A を $m \times n$ 行列, X, Y をそれぞれ m 次正則行列, n 次正則行列とすれば, $\mathrm{rank}\, XA = \mathrm{rank}\, AY = \mathrm{rank}\, A$ である.*

証明 X は正則行列だから (1.12.1) により, $X = Q_1 Q_2 \cdots Q_k$ ($Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ は基本行列) と表される. 基本行列 $P_1, P_2, \ldots, P_l$ で $P_l P_{l-1} \cdots P_1 A$ が (1.10) の 3 つの条件を満たすようなものをとると, (1.8) により Q_i^{-1} ($i = 1, 2, \ldots, k$) も基本行列だから, 等式

$$P_l P_{l-1} \cdots P_1 Q_k^{-1} Q_{k-1}^{-1} \cdots Q_1^{-1} XA = P_l P_{l-1} \cdots P_1 A$$

は XA を行に関して基本変形すれば $r = \mathrm{rank}\, A$ に対して (1.10) の 3 つの条件を満たすようにできることを意味する. 従って, $\mathrm{rank}\, XA = \mathrm{rank}\, A$ である.

$f : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$, $g : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n$ をそれぞれ A, Y が定める線型写像とすれば, 合成写像 $f \circ g : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ は AY が定める線型写像であり, Y が正則行列であることから g は 1 対 1 上への写像である. g が $\boldsymbol{K}^n$ の上への写像であることから (f の像) = ($f \circ g$ の像) が成り立つことが容易に示されるため, (1.21) により $\mathrm{rank}\, AY = \mathrm{rank}\, A$ である. □

定理 1.24 *A を $m \times n$ 行列とするとき, $\mathrm{rank}\, {}^t\!A = \mathrm{rank}\, A$.*

証明 (1.12) から $XAY = F_{mn}(r)$ という形になる正則行列 X, Y があり, 右辺の行列は (1.10) の条件を満たすから階数は r である. 故に, (1.23) から $\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, XA = \mathrm{rank}\, XAY = r$ である. 両辺の転置行列をとると, ${}^tY {}^tA {}^tX = {}^t(XAY) = F_{nm}(r)$ で, ${}^tX$, ${}^tY$ はともに正則行列の転置行列だから正則である. 再び (1.23) から $\mathrm{rank}\, {}^tA = \mathrm{rank}\, {}^tY {}^tA = \mathrm{rank}\, {}^tY {}^tA {}^tX = r = \mathrm{rank}\, A$ が得られる. □

演習問題

1. 以下の連立一次方程式の解を求めよ. (a, b, c は定数)

$$1)\ \begin{cases} 2x + 3y - 4z - w = 1 \\ x + y - z + 2w = 2 \\ y - 2z - 5w = c \end{cases} , \quad 2)\ \begin{cases} x - 2y + z + w = 3 \\ 2x + y - 3z = -1 \\ -x - y + 2z + 2w = 0 \\ -2x + 2y - 3w = c \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x - 2y + z - w = 2 \\ 2x + y + 3z = -1 \\ -x - y - 2z + 2w = 0 \\ -2x + 2y - 2z - w = c \end{cases} , \quad 4)\ \begin{cases} 11x + 12y + 13z + 14u + 15v = a \\ 6x + 7y + 8z + 9u + 10v = 0 \\ x + 2y + 3z + 4u + 5v = 0 \\ x + 4y + 9z + 16u + 25v = b \end{cases}$$

2. $f : \boldsymbol{K}^4 \to \boldsymbol{K}^4$, $g : \boldsymbol{K}^4 \to \boldsymbol{K}^4$ をそれぞれ次の行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

により表される線型写像とするとき, $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} g$, $\operatorname{Ker} g$ を求めよ.

3. $f : \boldsymbol{K}^3 \to \boldsymbol{K}^3$, $g : \boldsymbol{K}^4 \to \boldsymbol{K}^4$, $h : \boldsymbol{K}^4 \to \boldsymbol{K}^4$ をそれぞれ行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ a & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -c & c-2 \\ -1 & -1 & 1 & -c+2 \\ -2 & c-3 & 2 & 2 \\ c+1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

により表される線型写像とするとき $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} g$, $\operatorname{Ker} g$, $\operatorname{Im} h$, $\operatorname{Ker} h$ を求めよ.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & 11 & -1 \\ 2 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

5. 以下で与えられる行列について次の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 17 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -2 & 6 \\ 4 & -9 & -7 & 17 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & -1 & -16 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -5 & 2 \\ -18 & -13 & -10 & 2 \\ -2 & 0 & -8 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1) A, B, C を基本行列の積で表せ.
2) A, B, C の逆行列を求めよ.

6. $\boldsymbol{C}^3$ のベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} i \\ i-1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2i+1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ i+1 \\ i \end{pmatrix}$ の複素数係数の 1 次結合で表せ.

7. 1) $Q_n(i;-1)R_n(i,j)$ を $P_n(k,l;c)$ の形の基本行列の積で表せ.
2) m が 2 以上の整数で, $m \times n$ 行列 A の (p,q)-成分が 0 でないとする. 整数 $1 \leqq p' \leqq m$ に対し, $p' \neq p$ または $p' = p < m$ ならば $P_m(k,l;c)$ (k は p, p', m のいずれか) の形の基本行列の積を A の左から掛けることにより, 第 q 列が基本ベクトル $\boldsymbol{e}_{p'}$ になるようにできることを示せ.

8. $m \times n$ 行列 A の階数が r のとき以下のことを示せ.
1) $r < m$ ならば $P(i,j;c)$ の形の m 次基本行列の積で表される行列 P で, PA が (1.10) の 3 つの条件満たす行列になるようなものがある.
2) $r = m$ ならば $P(i,j;c)$ の形の m 次基本行列の積で表される行列 P と $d \in \boldsymbol{K}$ ($d \neq 0$) で, $Q(m;d)PA$ が上の条件 (1), (2), (3) を満たすようなものがある.

2　2次形式

n 個の変数 $x_1, \ldots, x_n$ に関する2次の同次多項式 $P(x_1, \ldots, x_n)$ は一般に $\sum_{1 \leqq i \leqq j \leqq n} c_{ij}x_ix_j$ の形に表され, 係数 c_{ij} がすべて実数の場合, 変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に実数値を代入することにより, $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は n 変数の実数値関数 $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ とみなされる. このような関数の符号について, 次の場合5つの場合が考えられる

1) $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ ならば $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ である.

2) $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ ならば $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$ である.

3) すべての $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{R}$ に対し, $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqq 0$ であり,
　$P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ となる $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ がある.

4) すべての $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{R}$ に対し, $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq 0$ であり,
　$P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ となる $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ がある.

5) $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) > 0$ となる $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \boldsymbol{R}$ と $P(b_1, b_2, \ldots, b_n) < 0$ となる $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \boldsymbol{R}$ がある.

この節では, 実数係数の2次の同次多項式 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が与えられたときに, 上のいずれの場合にあてはまるかを判定する方法について考える.

$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が $\sum_{1 \leqq i \leqq j \leqq n} c_{ij}x_ix_j$ という形で与えられたとき, $\boldsymbol{x}$ を変数 x_j を第 j 成分にもつ n 次元列ベクトルとし, $A = (a_{ij})$ は $a_{ij} = \begin{cases} c_{ii} & i = j \\ \frac{c_{ij}}{2} & i < j \\ \frac{c_{ji}}{2} & i > j \end{cases}$ で与えられる n 次正方行列とする. このとき, $i \leqq j$ ならば $a_{ij} = a_{ji} = \frac{c_{ij}}{2}$ だから A は対称行列であり, $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ が成り立つことが容易に確かめられる.

例のごとく $\boldsymbol{K}$ は $\boldsymbol{R}$ か $\boldsymbol{C}$ を表すものとする.

定義 2.1 *$\boldsymbol{x}$ を変数 x_j を第 j 成分にもつ n 次元列ベクトルとする. $\boldsymbol{K}$ の要素を成分にもつ n 次対称行列 A に対し, n 個の変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関する多項式 ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を, A を係数行列とする $\boldsymbol{K}$ 上の2次形式という.*

上の定義自体は $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ の場合にも意味をもち, 2次形式論は現在も研究が行われて分野であるが, この節では上で述べた「符号の問題」に主眼をおくため, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ のときにも符号が論じられるように次のように修正する.

定義 2.2 *$\boldsymbol{K}$ の要素を成分にもつ n 次エルミート行列 A に対し, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ を $\boldsymbol{x}^*A\boldsymbol{x}$ に対応させる $\boldsymbol{K}^n$ で定義された関数を, A を係数行列とする ($\boldsymbol{K}$ 上の) エルミート形式といい, $A[\boldsymbol{x}]$ で表す.*

A が n 次エルミート行列ならば, 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ に対して $\overline{\boldsymbol{x}^*A\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}^*A\boldsymbol{x})^* = \boldsymbol{x}^*A^*(\boldsymbol{x}^*)^* = \boldsymbol{x}^*A\boldsymbol{x}$ だからエルミート形式 $A[\boldsymbol{x}]$ は実数値をとる関数である. とくに $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ の場合は A は対称行列となり, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ ならば $\boldsymbol{x}^* = {}^t\boldsymbol{x}$ だから $\boldsymbol{R}$ 上ではエルミート形式と2次形式は同じものになる.

命題 2.3 *A, B をともに $\boldsymbol{K}$ の要素を成分にもつ n 次エルミート行列とする. すべての $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ に対して $\boldsymbol{x}^*A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*B\boldsymbol{x}$ が成り立てば, $A = B$ である.*

証明 A, B の (p, q)-成分をそれぞれ a_{pq}, b_{pq} とする. 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}$ に対して, 仮定から $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^*A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^*B(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ である. このとき (左辺)$= \boldsymbol{x}^*A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^*A\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}^*A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^*A\boldsymbol{y}$, (右辺)$= \boldsymbol{x}^*B\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^*B\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}^*B\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^*B\boldsymbol{y}$ だから, 再び仮定から $\boldsymbol{x}^*A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^*A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*B\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^*B\boldsymbol{x}$ を得る. とくに $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{K}^n$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_p$, $\boldsymbol{e}_q$ とすると, 上式から $a_{pq} + a_{qp} = b_{pq} + b_{qp}$ が得られ, さらに A, B はエルミート行列だから $a_{pq} + \bar{a}_{pq} = b_{pq} + \bar{b}_{pq}$ である. 従って, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ の場合は $2a_{pq} = 2b_{pq}$ となるため $A = B$ である. $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ の場合, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_p$, $\boldsymbol{y} = i\boldsymbol{e}_q$ を上式に

代入すれば, $ia_{pq} - ia_{qp} = ib_{pq} - ib_{qp}$ を得るため, $a_{pq} - \bar{a}_{pq} = b_{pq} - \bar{b}_{pq}$ である．これと上の式から $a_{pq} = b_{pq}$ がわかる． □

上の結果は, エルミート形式とエルミート行列は 1 対 1 に対応することを意味する．

$\boldsymbol{K}$ 上のエルミート形式 $A[\boldsymbol{x}]$ と $\boldsymbol{K}$ の要素を成分にもつ n 次正則行列 P が与えられたとする．$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ とおいて変数を $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{y}$ に変換する (すなわち, P の列ベクトルを基本ベクトルとする $\boldsymbol{K}^n$ の新しい座標系を考える) と $A[\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{x}^*A\boldsymbol{x} = (P\boldsymbol{y})^*A(P\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^*(P^*AP)\boldsymbol{y} = (P^*AP)[\boldsymbol{y}]$ である．このとき P^*AP もエルミート行列であることに注意する．そこで, 次のように定義をする．

定義 2.4 *2 つの $\boldsymbol{K}$ 上のエルミート形式 $A[\boldsymbol{x}]$ と $B[\boldsymbol{x}]$ が同値であるとは, $B = P^*AP$ を満たす $\boldsymbol{K}$ の要素を成分にもつ正則行列が存在することである．*

命題 2.5 *2 つの $\boldsymbol{K}$ 上のエルミート形式が上の意味で同値であるという関係は, いわゆる同値関係である．すなわち, 次のことが成り立つ．*

(1) $A[\boldsymbol{x}]$ と $A[\boldsymbol{x}]$ は同値である．

(2) $A[\boldsymbol{x}]$ と $B[\boldsymbol{x}]$ が同値ならば $B[\boldsymbol{x}]$ と $A[\boldsymbol{x}]$ は同値である．

(3) $A[\boldsymbol{x}]$ と $B[\boldsymbol{x}]$ が同値で $B[\boldsymbol{x}]$ と $C[\boldsymbol{x}]$ が同値ならば $A[\boldsymbol{x}]$ と $C[\boldsymbol{x}]$ は同値である．

証明 $A = E_n^*AE_n$ だから (1) が成り立ち, $B = P^*AP$ ならば $A = (P^{-1})^*BP^{-1}$ だから (2) が成り立つ．また, $B = P^*AP$ かつ $C = Q^*BQ$ ならば $C = (PQ)^*A(PQ)$ だから (3) が成り立つ． □

以後この節では, とくに断らない限り $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ 等は $x_j, y_j, z_j \in \boldsymbol{K}$ を第 j 成分にもつ n 次元列ベクトルを表すものとする．

エルミート行列 A の固有値はすべて実数 (問 7.15) であり, A を対角化するユニタリー行列 P が存在することは第 7 章で学んだ．そこで, $P^*AP = P^{-1}AP$ の (j,j)-成分を λ_j とし, A を係数行列とするエルミート形式 $A[\boldsymbol{x}]$ において, $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ と変数を変換すれば, 上でみたように $A[\boldsymbol{x}] = (P^*AP)[\boldsymbol{y}] = \lambda_1 y_1\bar{y}_1 + \lambda_2 y_2\bar{y}_2 + \cdots + \lambda_n y_n\bar{y}_n = \lambda_1|y_1|^2 + \lambda_2|y_2|^2 + \cdots + \lambda_n|y_n|^2$ である．もし, A の成分がすべて実数ならば P は直交行列にとれることに注意する (系 7.15)．

P の列を適当に入れ換えることにより, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p > 0$, $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{p+q} < 0$, $\lambda_{p+q+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ ($p + q = \operatorname{rank} P^{-1}AP = \operatorname{rank} A$) となっているとしてよい．$Q$ を (j,j)-成分が $1 \leqq j \leqq p$ ならば $\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}$, $p+1 \leqq j \leqq p+q$ ならば $\frac{1}{\sqrt{-\lambda_j}}$, $p+q+1 \leqq j \leqq n$ ならば 1 である対角行列とすると, Q は正則な実行列である．$\boldsymbol{y} = Q\boldsymbol{z}$ とおいて再度変数変換すると, $(P^*AP)[\boldsymbol{y}] = (Q^*P^*APQ)[\boldsymbol{z}] = ((PQ)^*A(PQ))[\boldsymbol{z}] = |z_1|^2 + \cdots + |z_p|^2 - |z_{p+1}|^2 - \cdots - |z_{p+q}|^2$ となる．従って, 次のことが示された．

命題 2.6 *$\boldsymbol{K}$ 上のエルミート形式 $A[\boldsymbol{x}]$ は $|x_1|^2 + \cdots + |x_p|^2 - |x_{p+1}|^2 - \cdots - |x_{p+q}|^2$ という形のエルミート形式と同値である．ここで, p は A の正の固有値の個数, q は負の固有値の個数である．*

整数の組 (p,q) は次に述べる意味で一意的である．

定理 2.7 *(Sylvester の慣性法則) エルミート形式 $|x_1|^2 + \cdots + |x_p|^2 - |x_{p+1}|^2 - \cdots - |x_{p+q}|^2$ と $|x_1|^2 + \cdots + |x_s|^2 - |x_{s+1}|^2 - \cdots - |x_{s+t}|^2$ が同値ならば $p = s$ かつ $q = t$ である．*

証明 $D_{p,q}$ により, (j,j)-成分が $1 \leqq j \leqq p$ ならば 1, $p+1 \leqq j \leqq p+q$ ならば -1, $p+q+1 \leqq j \leqq n$ ならば 0 である n 次対角行列を表すことにすれば, $D_{p,q}[\boldsymbol{x}] = |x_1|^2 + \cdots + |x_p|^2 - |x_{p+1}|^2 - \cdots - |x_{p+q}|^2$ である．仮定から n 次正則行列 P で, $P^*D_{p,q}P = D_{s,t}$ を満たすものがある．まず, この両辺の階数を比較して $p + q = s + t$ を得る．

$p < s$ と仮定して矛盾を導く．P の (j,k)-成分を a_{jk} とすれば, $p < s$ だから $\sum_{k=1}^{s} a_{jk}y_k = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ を満たす $(0, 0, \ldots, 0)$ とは異なる $(y_1, y_2, \ldots, y_s)$ がある．さらに $y_{s+1} = \cdots = y_n = 0$ とおき, $x_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}y_k$ によって $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を定めれば, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ の定め方から $x_1 = \cdots = x_p = 0$ である．このように定めた x_j, y_j を第 j 成分にもつ列ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ とすれば, $\boldsymbol{y}^* D_{s,t} \boldsymbol{y} = |y_1|^2 + \cdots + |y_s|^2 > 0$, $\boldsymbol{x}^* D_{p,q} \boldsymbol{x} = -|x_{p+1}|^2 - \cdots - |x_{p+q}|^2 \leqq 0$ が成り立つ．ところが, $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ だから $\boldsymbol{x}^* D_{p,q} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^* P^* D_{p,q} P \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^* D_{s,t} \boldsymbol{y}$ となるため矛盾が生じる．$(P^{-1})^* D_{s,t} P^{-1} = D_{p,q}$ だから, 上と同じ議論で $s < p$ からも矛盾が導かれる． □

定義 2.8 上の定理と *(2.4), (2.6)* により, エルミート形式 $A[\boldsymbol{x}]$ が与えられたとき, それと同値であるような $|x_1|^2 + \cdots + |x_p|^2 - |x_{p+1}|^2 - \cdots - |x_{p+q}|^2$ という形のエルミート形式はただ *1* 通りに定まる．このとき, 整数の対 (p, q) を $A[\boldsymbol{x}]$ *(*あるいは A*)* の符号数という．

この定義から, 2 つのエルミート形式が同値であるための必要十分条件は, それらの符号数が一致することであるといえる．

ここで, この節のはじめに提起した符号の問題について考えてみる．
エルミート形式 $A[\boldsymbol{x}]$ に関し, 次のいずれか 1 つが成り立つ．

1) $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $A[\boldsymbol{x}] > 0$ である．

2) $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $A[\boldsymbol{x}] < 0$ である．

3) すべての $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し, $A[\boldsymbol{x}] \geqq 0$ であり, $A[\boldsymbol{a}] = 0$ となる $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ がある．

4) すべての $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し, $A[\boldsymbol{x}] \leqq 0$ であり, $A[\boldsymbol{a}] = 0$ となる $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ がある．

5) $A[\boldsymbol{a}] > 0$ となる $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{K}^n$ と $A[\boldsymbol{b}] < 0$ となる $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{K}^n$ がある．

$A[\boldsymbol{x}]$ と $B[\boldsymbol{x}]$ が同値なエルミート形式であるとする．正則行列 P で, $A[P\boldsymbol{y}] = B[\boldsymbol{y}]$ がすべての $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^n$ に対して成立するようなものがあるため, $A[\boldsymbol{x}]$ は $\boldsymbol{K}^n$ 上で定義された実数値関数としては, P でされる 1 対 1 上への線型写像 $T_P : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n$ と $B[\boldsymbol{x}] : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{R}$ 合成したものである．従って, $A[\boldsymbol{x}]$ と $B[\boldsymbol{x}]$ は上記の 5 つのうちの同じ場合に属する．ここで $A[\boldsymbol{x}]$ の符号数が (p, q) であるとすれば, $A[\boldsymbol{x}]$ は $D_{p,q}[\boldsymbol{x}] = |x_1|^2 + \cdots + |x_p|^2 - |x_{p+1}|^2 - \cdots - |x_{p+q}|^2$ と同値になるため, 次のことがわかる．

命題 2.9 $A[\boldsymbol{x}]$ が符号数 (p, q) のエルミート形式ならば上の *5* つの場合はそれぞれ順に以下の場合と同値である*; 1)* $p = n$ かつ $q = 0$. *2)* $p = 0$ かつ $q = n$. *3)* $p < n$ かつ $q = 0$. *4)* $p = 0$ かつ $q < n$. *5)* $p \neq 0$ かつ $q \neq 0$.

この結果から, 与えられたエルミート形式の符号数を調べることにより, そのエルミート形式がどのような符号をとるか判別できるので, 次に符号数の求め方について考えてみる．
エルミート形式 $A[\boldsymbol{x}]$ の符号数が (p, q) であるとすれば (2.6) から p は A の正の固有値の個数, q は負の固有値の個数であるが, A が 5 次以上のエルミート行列ならば A の固有値の符号を判定するためのアルゴリズムがないので, この事実を用いて $A[\boldsymbol{x}]$ の符号数を求めるのはほとんど不可能なことである (運まかせ!).

問 2.10 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b-ci \\ b+ci & d \end{smallmatrix}\right)$ *(*$a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$*)* とするとき, エルミート形式 $A[\boldsymbol{x}]$ の符号数を調べよ．

補題 2.11 n 次複素正方行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とすれば $\mathrm{tr}\, A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$, $\det\, A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ である．

証明 A の固有多項式は $\det(xE_n - A) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)$ と因数分解されるため, この両辺の $n - 1$ 次の係数を比較すると, $\mathrm{tr}\, A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ がわかる．また, $x = 0$ を代入すれば $\det(-A) = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ が得られるため $\det\, A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ である． □

A が n 次エルミート行列, $A[\boldsymbol{x}]$ の符号数が $(n,0)$ ならば A の固有値はすべて正だから上の結果から $\det A>0$ であることがわかる. さらに A_l $(l=1,2,\dots,n)$ を A の (j,k)-成分をそのまま (j,k)-成分とする l 次正方行列とすると A_l も明らかにエルミート行列である.

定理 2.12 $A[\boldsymbol{x}]$ の符号数が $(n,0)$ であるためには $\det A_l>0$ が $l=1,2,\dots,n$ に対して成り立つことが必要十分である.

証明 v_j を第 j 成分にもつ l 次元列ベクトル $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{K}^l$ に対して, $1\leqq j\leqq l$ ならば v_j, $l+1\leqq j\leqq n$ ならば 0 を第 j 成分にもつ n 次元列ベクトルを $\tilde{\boldsymbol{v}}$ で表すことにする. このとき, $A_l[\boldsymbol{v}]=A[\tilde{\boldsymbol{v}}]$ が成り立つことに注意する. $A[\boldsymbol{x}]$ の符号数が $(n,0)$ であるとする. このとき $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ ならば $\tilde{\boldsymbol{v}}\neq\boldsymbol{0}$ だから $A_l[\boldsymbol{v}]=A[\tilde{\boldsymbol{v}}]>0$ である. 従って $A_l[\boldsymbol{v}]$ の符号数は $(l,0)$ となるため, 上で述べたことから $\det A_l>0$ が成り立つ.

$\det A_l>0$ が $l=1,2,\dots,n$ に対して成り立てば $A[\boldsymbol{x}]$ の符号数が $(n,0)$ であることを n による帰納法で示す. $n=1$ の場合は主張は明らかである. $n-1$ の場合に主張が成り立つとすれば, 仮定から $n-1$ 次エルミート形式 $A_{n-1}[\boldsymbol{v}]$ の符号数は $(n-1,0)$ になるため, $n-1$ 次正則行列 Q で $Q^*A_{n-1}Q=E_{n-1}$ となるものがある. $A=\begin{pmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a}^* & a_{nn}\end{pmatrix}$, とすると, $\begin{pmatrix} Q & \boldsymbol{0}^* \\ \boldsymbol{0} & 1\end{pmatrix}^* A\begin{pmatrix} Q & \boldsymbol{0}^* \\ \boldsymbol{0} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_{n-1} & Q\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a}^*Q & a_{nn}\end{pmatrix}$ だから $P=\begin{pmatrix} Q & \boldsymbol{0}^* \\ \boldsymbol{0} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & -Q^*\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{0}^* & 1\end{pmatrix}$ とおけば $P^*AP=\begin{pmatrix} E_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^* & c\end{pmatrix}$ (ただし $c=a_{nn}-\boldsymbol{a}^*QQ^*\boldsymbol{a}$) となる. このとき, Q が正則であることと仮定から $c=\det P^*AP=|\det P|^2\det A=|\det Q|^2\det A_n>0$. 従って, $A[\boldsymbol{x}]$ は $|x_1|^2+\cdots+|x_{n-1}|^2+c|x_n|^2$ $(c>0)$ という形のエルミート形式と同値になるため, $A[\boldsymbol{x}]$ の符号数は $(n,0)$ である. □

$A[\boldsymbol{x}]$ の符号数が $(0,n)$ であるためには $(-A)[\boldsymbol{x}]$ の符号数が $(n,0)$ であることが必要十分だから, 上の結果からただちに次のことがわかる.

系 2.12.1 $A[\boldsymbol{x}]$ の符号数が $(0,n)$ であるためには $(-1)^l\det A_l>0$ が $l=1,2,\dots,n$ に対して成り立つことが必要十分である.

定義 2.13 $\boldsymbol{K}$ 上の n 次のエルミート形式 $A[\boldsymbol{x}]$ の符号数が $(n,0)$ であるとき, A を正値エルミート行列という. とくに $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ の場合は A を正値対称行列という.

(2.12) により, A が正値エルミート行列になるための条件が行列式を用いて明確に述べられたことになる. 第 4 章で学んだように, 行列式の値は計算可能だから, 与えられた n 次エルミート形式の符号数が $(n,0)$ (あるいは $(0,n)$) かどうかの判定は (2.12) によって一応は可能になった. しかし, この判定法では符号数が $(n,0)$ または $(0,n)$ かどうかしか判定できないだけでなく, 実質 $n-1$ 個の行列式の値を求めなければならないため n が大きくなると計算量が膨大になるという欠点がある. そこで, 次に述べるように $|\cdots|^2$ の項を作るよう与えられたエルミート形式を変形してゆくのが実用的な方法である. ($\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ の場合は,「平方完成」をしてゆくやり方に他ならない.)

n 次エルミート形式 $A[\boldsymbol{x}]$ が与えられたとし, A の (j,k)-成分を a_{jk} とする.
(1) $a_{ll}\neq 0$ となる l がある場合, $a_{jl}=\bar{a}_{lj}$ であることに注意すると,
$A[\boldsymbol{x}]=\sum\limits_{j,k=1}^{n}a_{jk}\bar{x}_jx_k=a_{ll}(\bar{x}_l+\sum\limits_{j\neq l}\frac{\bar{a}_{lj}}{a_{ll}}\bar{x}_j)(x_l+\sum\limits_{k\neq l}\frac{a_{lk}}{a_{ll}}x_k)+\sum\limits_{j,k\neq l}(a_{jk}-\frac{\bar{a}_{lj}a_{lk}}{a_{ll}})\bar{x}_jx_k$ である. そこで, $x_l=y_l-\sum\limits_{k\neq l}\frac{a_{lk}}{a_{ll}}y_k$, $x_k=y_k$ $(k\neq l)$ と変数変換し, $b_{jk}=a_{jk}-\frac{\bar{a}_{lj}a_{lk}}{a_{ll}}$ $(j,k\neq l)$ とおけば (上式)$=a_{ll}|y_l|^2+\sum\limits_{j,k\neq l}b_{jk}\bar{y}_jy_k$ となる. 従って, $A[\boldsymbol{x}]$ の符号数を知ることは $n-1$ 次エルミート形式 $B[\boldsymbol{y}]=\sum\limits_{j,k\neq l}b_{jk}\bar{y}_jy_k$ の符号数を知ることに帰着する. すなわち $B[\boldsymbol{y}]$ の符号数が (p,q) であるとすれば, $A[\boldsymbol{x}]$ の符号数は $a_{ll}>0$ なら $(p+1,q)$, $a_{ll}<0$ なら $(p,q+1)$ である.
(2) $a_{11}=\cdots=a_{nn}=0$ であり, a_{lm} が 0 でも純虚数でもないような l,m がある場合. $x_l=y_l-y_m$, $x_m=y_l+y_m$, $x_j=y_j$ $(j\neq l,m)$ と変数変換すれば, $A[\boldsymbol{x}]=(a_{lm}+\bar{a}_{lm})|y_l|^2+\cdots$ となり, $|y_l|^2$ の係数は 0 でないため, 上の (1) の場合に帰着する. (言うまでもないが $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ の場合は, $a_{11}=\cdots=a_{nn}=0$ ならば $A=O$ でない限り, このような l,m は必ず存在する.)

(3) $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$, $a_{11}=\cdots=a_{nn}=0$ であり, a_{jk} がすべて 0 か純虚数である場合. a_{lm} が 0 でないような l, m をとり, $x_l=iy_l-iy_m$, $x_m=y_l+y_m$, $x_j=y_j$ $(j\neq l,m)$ と変数変換すれば, $A[\boldsymbol{x}]=i(-a_{lm}+\bar{a}_{lm})|y_l|^2+\cdots$ となり, $|y_l|^2$ の係数は 0 でないため, これも上の (1) の場合に帰着する.

上の手順を繰り返すことにより, $A[\boldsymbol{x}]$ は最終的に $c_1|x_1|^2+c_2|x_2|^2+\cdots+c_n|x_n|^2$ の形のエルミート形式に変形されるが, $c_1,c_2,\ldots,c_n$ のうちの正の数の個数を p, 負の数の個数を q とすれば (2.7) から (p,q) が $A[\boldsymbol{x}]$ の符号数になる.

問 2.14 以下のエルミート形式の符号数を求めよ. ただし, *1)* から *4)* では $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$, *5)* では $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$ とする.

1) $x_1^2-2x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2+8x_2x_3-4x_1x_3$　*2)* $6x_1^2+3x_2^2+6x_3^2-x_1x_2+x_2x_3-2x_1x_3$

3) $2x_1^2-x_2^2+2x_3^2-x_1x_2+x_2x_3-2x_1x_3$　*4)* $x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3+6x_1x_4+8x_2x_4+10x_3x_4$

5) $i\bar{x}_1x_2-i\bar{x}_2x_1$

3　行列の指数写像

この節の目的は, 微分積分学で学んだ実数変数の指数関数 e^x を行列変数の指数関数に一般化して, 実数変数の指数関数と類似の性質をもつことを示すことである. さらにその応用として, 正則行列が正値エルミート行列とユニタリー行列の積に一意的に表されることを証明する.

まず, 複素数列の収束を定義する.

定義 3.1 複素数列 $z_0,z_1,\ldots,z_l,\ldots$ が複素数 w に収束するとは, どんな正の数 $\varepsilon>0$ に対しても "$l\geqq N$ ならば $|z_l-w|<\varepsilon$"を満たすような自然数 N がとれることである. このことを $\lim_{l\to\infty}z_l=w$ で表す.

次の命題は $z=x+yi\in\boldsymbol{C}$ $(x,y\in\boldsymbol{R})$ ならば $|x|,|y|\leqq|z|\leqq|x|+|y|$ であることから容易に導かれる.

命題 3.2 $z_l=x_l+y_li, w=u+vi\in\boldsymbol{C}$ *(*$x_l,y_l,u,v\in\boldsymbol{R}$*)* とするとき, $\lim_{l\to\infty}z_l=w$ であるためには, $\lim_{l\to\infty}x_l=u$ と $\lim_{l\to\infty}z_l=v$ が成り立つことが必要十分である.

定義 3.3 複素数列 $z_0,z_1,\ldots,z_l,\ldots$ が *Cauchy* 列であるとは, どんな正の数 $\varepsilon>0$ に対しても "$k,l\geqq N$ ならば $|z_l-z_k|<\varepsilon$ "を満たすような自然数 N がとれることである.

$z_0,z_1,\ldots,z_l,\ldots$ が w に収束する複素数列ならば, 任意の $\varepsilon>0$ に対して "$l\geqq N$ ならば $|z_l-w|<\frac{\varepsilon}{2}$ "を満たすような自然数 N がとれるから "$k,l\geqq N$ ならば $|z_l-z_k|\leqq|z_l-w|+|w-z_k|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$"である. 従って, 収束する複素数列は Cauchy 列である. 実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ においては, この逆も成り立つ. すなわち,

定理 3.4 実数列 $x_0,x_1,\ldots,x_l,\ldots$ が *Cauchy* 列ならば収束する.

証明は解析学の教科書を参照せよ. この定理は $\boldsymbol{R}$ がもつ基本的な性質の一つである.

複素数列 $z_0,z_1,\ldots,z_l,\ldots$ が Cauchy 列であるとき $z_l=x_l+y_li$ $(x_l,y_l\in\boldsymbol{R})$ とすると, $|x_l-x_k|,|y_l-y_k|\leqq|z_l-z_k|$ だから実数列 $x_0,x_1,\ldots,x_l,\ldots$, $y_0,y_1,\ldots,y_l,\ldots$ はともに Cauchy 列になるため, (3.4) と (3.2) から次のことがわかる.

系 3.4.1 複素数列 $z_0,z_1,\ldots,z_l,\ldots$ が *Cauchy* 列ならば収束する.

さらに (3.4) を用いれば次のことが示される.

系 3.4.2 単調増加する実数列 $x_0,x_1,\ldots,x_l,\ldots$ が上に有界 *(*すなわち, 実数の定数 M ですべての l に対して $x_l\leqq M$ が成り立つようなものがある*)* ならば収束する.

証明 $x_0, x_1, \ldots, x_l, \ldots$ が Cauchy 列でないと仮定すれば, ある $c > 0$ で, どのような整数 N に対しても $l > k \geqq N$ かつ $x_l - x_k \geqq c$ を満たすような整数の対 (k, l) がある. そこで, まず $x_{l_1} - x_{l_0} \geqq c$ を満たすような負でない整数 $l_0 < l_1$ を選び, 帰納的に整数列 $l_0 < l_1 < \cdots < l_{2i-1}$ で $x_{l_{2j+1}} - x_{l_{2j}} \geqq c$ $(j = 0, 1, \ldots, i-1)$ を満たすものがとれたと仮定する. $x_{l_{2i+1}} - x_{l_{2i}} \geqq c$ かつ $l_{2i+1} > l_{2i} > l_{2i-1}$ を満たすような整数がとれるから $x_0, x_1, \ldots, x_l, \ldots$ の部分列 $x_{l_0}, x_{l_1}, \ldots, x_{l_i}, \ldots$ で $x_{l_{2j+1}} - x_{l_{2j}} \geqq c$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ を満たすものがとれる. このとき, $x_{l_{2i+1}} = x_{l_0} + \sum_{j=0}^{2i}(x_{l_{j+1}} - x_{l_j}) \geqq x_{l_0} + \sum_{j=0}^{i}(x_{l_{2j+1}} - x_{l_{2j}}) \geqq x_{l_0} + (i+1)c$ となるため, i が大きくなれば $x_{l_{2i+1}}$ はいくらでも大きくなるため, $x_0, x_1, \ldots, x_l, \ldots$ が上に有界であることと矛盾する. 従って $x_0, x_1, \ldots, x_l, \ldots$ は Cauchy 列であるため, この数列は収束する. □

注意 3.5 *単調増加する実数列 $x_0, x_1, \ldots, x_l, \ldots$ が Cauchy 列ならば上に有界である. 実際, 任意の整数 i に対して $k > l \geqq N_i$ ならば $x_k - x_l < 2^{-i}$ を満たすような正の整数 N_i がとれるため, 整数列 $l_0, l_1, l_2, \ldots$ を帰納的に $l_0 = N_0$, $l_{i+1} = l_i + N_{i+1}$ で定めれば, $l_0 < l_1 < \cdots < l_i < \cdots$ かつ $l_i \geqq N_i$ であり, $x_{l_{i+1}} - x_{l_i} < 2^{-i}$ が成り立つ. 従って任意の i に対して $x_{l_i} = x_{l_0} + \sum_{j=0}^{i-1}(x_{l_{j+1}} - x_{l_j}) < x_{l_0} + \sum_{j=0}^{i-1} 2^{-j} < x_{l_0} + 2$ となり, 任意の l に対して $l \leqq l_i$ となる i があるため $x_l \leqq x_{l_i} < x_{l_0} + 2$ である.*

$M(m, n; \boldsymbol{C})$ を複素数成分の $m \times n$ 行列全体のなす $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間とする. このとき $A, B \in M(m, n; \boldsymbol{C})$ に対して A と B の内積 (A, B) を $(A, B) = \operatorname{tr}(AB^*)$ で定める.

問 3.6 *上の定義が確かに $M(m, n; \boldsymbol{C})$ の内積になっていることを示せ.*

第 7 章でしたように, 行列 A の長さ $\|A\|$ を $\|A\| = \sqrt{(A, A)}$ により定めると以下のことが成り立つ.

命題 3.7 *$A, B \in M(m, n; \boldsymbol{C})$, $C \in M(n, k; \boldsymbol{C})$, $\lambda \in \boldsymbol{C}$ とする.*

1) $\|A + B\| \leqq \|A\| + \|B\|$.

2) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$.

3) $\|A\| \geqq 0$ であり, $\|A\| = 0$ となるのは $A = O$ の場合に限る.

4) $\|AC\| \leqq \|A\| \cdot \|C\|$.

5) $\|A^*\| = \|{}^t A\| = \|\bar{A}\| = \|A\|$.

6) $A = (a_{ij})$ とすると, 任意の $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq n$ に対し, $|a_{ij}| \leqq \|A\| \leqq \sum_{1 \leqq p \leqq m, 1 \leqq q \leqq n} |a_{pq}|$.

証明 1) は第 3 部の第 1 章の問 1.2 の (2) そのものであり, 2), 3) は内積の性質からただちにわかる. 5), 6) は $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ から明らかである. 4) を示す. 第 3 部の第 1 章の例 1.1 の (1) で与えた $\boldsymbol{C}^n$ における内積を考えると, C の第 j 列を $\boldsymbol{c}_j$ とすれば, AC の第 j 列は $A\boldsymbol{c}_j$ だから $\|AC\|^2 = \sum_{i,j} |(AC \text{ の } (i,j)\text{-成分})|^2 = \sum_{j=1}^{k} \|A\boldsymbol{c}_j\|^2$ である. また, A の第 i 行を $\boldsymbol{a}'_i$ とすれば, $A\boldsymbol{c}_j$ の第 i 成分は $({}^t\boldsymbol{a}'_i, \bar{\boldsymbol{c}}_j)$ と表されることから, Schwartz の不等式 (第 3 部の第 1 章の問 1.2 の (1)) を用いると, $\|A\boldsymbol{c}_j\|^2 = \sum_{i=1}^{m} |({}^t\boldsymbol{a}'_i, \bar{\boldsymbol{c}}_j)|^2 \leqq \sum_{i=1}^{m} \|{}^t\boldsymbol{a}'_i\|^2 \|\bar{\boldsymbol{c}}_j\|^2 = \|A\|^2 \|\boldsymbol{c}_j\|^2$ である. 従って上の等式より $\|AC\| \leqq \sum_{j=1}^{k} \|A\|^2 \|\boldsymbol{c}_j\|^2 = \|A\|^2 \sum_{j=1}^{k} \|\boldsymbol{c}_j\|^2 = \|A\| \cdot \|C\|$ が得られる. □

定義 3.8 *$m \times n$ 行列の列 $A_0, A_1, \ldots, A_l, \ldots$ が $B \in M(m, n; \boldsymbol{C})$ に収束するとは, どんな正の数 $\varepsilon > 0$ に対しても "$l \geqq N$ ならば $\|A_l - B\| < \varepsilon$"を満たすような自然数 N がとれることである. このことを $\lim_{l \to \infty} A_l = B$ で表す.*

命題 3.9 $A_l = (a_{ij}^{(l)}), B = (b_{ij}) \in M(m,n;\boldsymbol{C})$ とするとき, $\lim_{l\to\infty} A_l = B$ であるためには, すべての $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$ について $\lim_{l\to\infty} a_{ij}^{(l)} = b_{ij}$ が成り立つことが必要十分である.

証明 $\lim_{l\to\infty} A_l = B$ とすれば, (3.7) の 6) を用いると, 任意の i, j と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, "$l \geqq N$ ならば $|a_{ij}^{(l)} - b_{ij}| \leqq \|A_l - B\| < \varepsilon$"が成り立つような自然数 N があるため $\lim_{l\to\infty} a_{ij}^{(l)} = b_{ij}$ である.

逆にすべての $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$ について $\lim_{l\to\infty} a_{ij}^{(l)} = b_{ij}$ とすると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N_{ij} で "$l \geqq N_{ij}$ ならば $|a_{ij}^{(l)} - b_{ij}| < \frac{\varepsilon}{mn}$"を満たすものがあるため N を N_{ij} $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$ のうちで最大のものとすると (3.7) の 6) から $l \geqq N$ ならば $\|A_l - B\| < \varepsilon$ が成り立つ. 従って $\lim_{l\to\infty} A_l = B$ である. □

行列の列に対しても同様に Cauchy 列という概念が定義できる.

定義 3.10 $m\times n$ 行列の列 $A_0, A_1, \ldots, A_l, \ldots$ が *Cauchy* 列であるとは, どんな正の数 $\varepsilon > 0$ に対しても "$k, l \geqq N$ ならば $\|A_l - A_k\| < \varepsilon$"を満たすような自然数 N がとれることである.

定理 3.11 行列の列 $A_0, A_1, \ldots, A_l, \ldots$ が収束するための必要十分条件は *Cauchy* 列であることである.

証明 $A_0, A_1, \ldots, A_l, \ldots$ が収束すれば Cauchy 列であることは (3.7) の 1) を用いれば (3.3) の直後と同様の議論で示される. 逆に, $A_0, A_1, \ldots, A_l, \ldots$ が Cauchy 列ならば (3.7) の 6) から, 各成分からなる複素数列は Cauchy 列であることがわかるため, (3.4.1) により, これらは収束する. 従って, (3.9) から $A_0, A_1, \ldots, A_l, \ldots$ は収束する.□

次に行列からなる級数について考える.

定義 3.12 $m \times n$ 行列の列 $A_0, A_1, \ldots, A_l, \ldots$ に対し, $S_l = \sum_{k=0}^{l} A_k$ とおくとき, $\lim_{l\to\infty} S_l = S$ が存在すれば, 行列級数 $A_0 + A_1 + \cdots + A_l + \cdots$ は S に収束するといい, S を $\sum_{l=0}^{\infty} A_l$ で表す.

命題 3.13 $m \times n$ 行列の列 $A_0, A_1, \ldots, A_l, \ldots$ に対し, $s_l = \sum_{k=0}^{l} \|A_k\|$ とおくとき, 単調増加数列 $s_0, s_1, \ldots, s_l, \ldots$ が上に有界ならば, 行列級数 $A_0 + A_1 + \cdots + A_l + \cdots$ は収束する.

証明 $S_l = \sum_{k=0}^{l} A_k$ とおくと, $l \leqq m$ ならば (3.7) の 1) から $\|S_m - S_l\| = \|\sum_{k=l+1}^{l} A_k\| \leqq \sum_{k=l+1}^{l} \|A_k\| = s_m - s_l$. 仮定と (3.4.2) (の証明) から $s_0, s_1, \ldots, s_k, \ldots$ は Cauchy 列である. 従って, 上式から $S_0, S_1, \ldots, S_k, \ldots$ は $m \times n$ 行列の Cauchy 列であることがわかるため (3.11) により, この行列の列は収束する. □

定義 3.14 $m \times n$ 行列の列 $A_0, A_1, \ldots, A_l, \ldots$ が上の命題の仮定を満たすとき, 行列級数 $A_0 + A_1 + \cdots + A_l + \cdots$ は絶対収束するという.

(3.4), (3.4.2) およびそのあとの注意により, (3.13) において $s_0.s_1, \ldots, s_l, \ldots$ が上に有界であること, Cauchy 列であること, 収束することはすべて同値であることに注意する.

命題 3.15 $A_0, A_1, \ldots, A_l, \ldots,\ B_0, B_1, \ldots, B_l, \ldots$ をそれぞれ $m \times n$, $n \times p$ 行列の列とし, 行列級数 $A_0 + A_1 + \cdots + A_l + \cdots$, $B_0 + B_1 + \cdots + B_l + \cdots$ はともに絶対収束すると仮定する. $C_l = \sum_{k=0}^{l} A_k B_{l-k}$ とおくとき, 行列級数 $C_0 + C_1 + \cdots + C_l + \cdots$ は $(\sum_{l=0}^{\infty} A_l)(\sum_{l=0}^{\infty} B_l)$ に絶対収束する.

証明 $a_i = \sum_{l=0}^{i} \|A_l\|$, $b_i = \sum_{l=0}^{i} \|B_l\|$, $c_i = \sum_{l=0}^{i} \|C_l\|$ とおくと, 仮定から定数 α, β で, すべての i に対して $a_i \leqq \alpha$, $b_i \leqq \beta$ が成り立つようなものがとれる. このとき (3.7) の 1), 4) から $c_i \leqq \sum_{l=0}^{i} \sum_{k=0}^{l} \|A_k\| {\cdot} \|B_{l-k}\| \leqq a_i b_i \leqq \alpha\beta$ となるため $c_0, c_1, \ldots, c_i, \ldots$ は上に有界である. 故に, 行列級数 $C_0 + C_1 + \cdots + C_l + \cdots$ は絶対収束する.

とくに, $d_l = \sum_{k=0}^{l} \|A_k\|\cdot\|B_{l-k}\|$, $e_i = \sum_{l=0}^{i} d_l$ とおくと, 上の議論の $m = n = p = 1$ の場合を適用すれば, 単調増加数列 $e_0, e_1, \ldots, e_i, \ldots$ は上に有界であるため Cauchy 列であることに注意する.

$S = \sum_{l=0}^{\infty} A_l$, $T = \sum_{l=0}^{\infty} B_l$, $S_i = \sum_{l=0}^{i} A_l$, $T_i = \sum_{l=0}^{i} B_l$, $R_i = \sum_{l=0}^{i} C_l$ とおくと, $\|S_iT_i - P_i\| = \|\sum_{\substack{u,v \leqq i \\ u+v>i}} A_uB_v\| \leqq \sum_{\substack{u,v \leqq i \\ u+v>i}} \|A_u\|\cdot\|B_v\| = \sum_{l=i+1}^{2i} d_l = e_{2i} - e_i$. このことと, $ST - R_i = (S - S_i)T + S_i(T - T_i) + S_iT_i - R_i$ に注意すれば, $\|ST - R_i\| \leqq \|S - S_i\|\cdot\|T\| + \|S_i\|\cdot\|T - T_i\| + e_{2i} - e_i$ が得られる. $i \to \infty$ のとき, $\|S - S_i\|$, $\|T - T_i\| \to 0$, $\|S_i\| \to \|S\|$ であり, $e_0, e_1, \ldots, e_i, \ldots$ は Cauchy 列になっているため $e_{2i} - e_i$ も 0 に収束する. 従って上の不等式から $\lim_{i\to\infty} R_i = ST$ がわかる. □

複素数の集合においても (3.13), (3.15) と同様の命題が成り立つ. 証明は上と全く同様に行える.

命題 3.16 複素数列 $z_0, z_1, \ldots, z_l, \ldots$ に対し, $s_l = \sum_{k=0}^{l} |z_k|$ とおくとき, $s_0.s_1, \ldots, s_l, \ldots$ が上に有界ならば, 複素級数 $z_0 + z_1 + \cdots + z_l + \cdots$ は収束する. このときこの複素級数は絶対収束するという.

命題 3.17 $z_0, z_1, \ldots, z_l, \ldots$, $w_0, w_1, \ldots, w_l, \ldots$ を複素数列とし, 複素級数 $z_0 + z_1 + \cdots + z_l + \cdots$, $w_0 + w_1 + \cdots + w_l + \cdots$ はともに絶対収束すると仮定する. $v_l = \sum_{k=0}^{l} z_k w_{l-k}$ とおくとき, 行列級数 $v_0 + v_1 + \cdots + v_l + \cdots$ は $(\sum_{l=0}^{\infty} z_l)(\sum_{l=0}^{\infty} w_l)$ に絶対収束する.

補題 3.18 x のべき級数 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_lx^l + \cdots$ は $a_l \geqq 0$ $(l = 0, 1, \ldots)$ を満たし, $|x| < R$ $(x \in \boldsymbol{R})$ の範囲で収束すると仮定する. A が $\|A\| < R$ を満たす n 次複素正方行列ならば, 行列級数 $f(A) = a_0E_n + a_1A + \cdots + a_lA^l + \cdots$ は絶対収束する.

証明 $s_l = \sum_{k=0}^{l} \|a_kA^k\|$ とおけば $s_l \leqq a_0\|E_n\| + \sum_{k=1}^{l} a_k\|A\|^k = \sqrt{n}a_0 + \sum_{k=1}^{l} a_k\|A\|^k \leqq (\sqrt{n} - 1)a_0 + f(\|A\|)$ となるため $s_0, s_1, s_2, \ldots$ は上に有界である. □

とくに $f(x)$ が e^x の $x = 0$ における Taylor 展開 $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$ の場合に上の補題を用いて次のように行列の指数写像を定義する.

定義 3.19 $M(n; \boldsymbol{C}) = M(n, n; \boldsymbol{C})$ とおくことにする. 写像 $\exp : M(n; \boldsymbol{C}) \to M(n; \boldsymbol{C})$ を

$$\exp A = E_n + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots$$

で定義する. この写像を行列の指数写像という.

注意 3.20 複素数 z に対して複素級数 $1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^k}{k!} + \cdots$ が絶対収束することが *(3.18)* と同様にして示される. そこで, $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^k}{k!} + \cdots$ とおき, $\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{C}$ への複素関数 $z \mapsto e^z$ を指数関数という. とくに, $z = xi$ $(x \in \boldsymbol{R})$ の場合, $\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!}$ と $\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!}$ がそれぞれ $\cos x$, $\sin x$ に絶対収束することから $e^{xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$ の項の並ぶ順序を変えて $e^{xi} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} + i \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!} = \cos x + i \sin x$ が成り立つことが, *(3.15)* と同様にして示される. このことから, e^{xi} $(x \in \boldsymbol{R})$ は常に絶対値 *1* の複素数であり, 逆に絶対値 *1* の複素数は e^{xi} $(x \in \boldsymbol{R})$ の形にかけることがわかる.

命題 3.21 指数写像 $\exp : M(n; \boldsymbol{C}) \to M(n; \boldsymbol{C})$ は次の性質をもつ.

1) $\exp O = E_n$

2) $AB = BA$ ならば $\exp(A + B) = (\exp A)(\exp B)$.

3) $\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$ 従って, exp は常に正則行列を値にとる.

4) $\exp {}^tA = {}^t(\exp A)$, $\exp \overline{A} = \overline{\exp A}$, $\exp(A^*) = (\exp A)^*$

5) P が n 次正則行列ならば $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}(\exp A)P$.

6) A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とすれば $\exp A$ の固有値は $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}$ となる.

証明 1) は定義から明らかである.

2) $AB = BA$ だから「二項定理」により, $\sum_{k=0}^{l} \frac{A^k}{k!}\frac{B^{l-k}}{(l-k)!} = \frac{1}{l!}\sum_{k=0}^{l} \frac{l!}{k!(l-k)!}A^kB^{l-k} = \frac{1}{l!}(A+B)^l$ となるため (3.15) を $A_k = \frac{A^k}{k!}$, $B_k = \frac{B^k}{k!}$ の場合に適用すれば結果が得られる.

3) 2) で $B = -A$ とすれば 1) から $(\exp A)(\exp(-A)) = \exp O = E_n$. 故に $\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$ が得られる.

4) これらは定義から明らかである.

5) $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ であることに注意すればよい.

6) 正則行列 P で,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となるものがとれる. このとき, $(P^{-1}AP)^k$ の (i,i)-成分が λ_i^k であることに注意すれば 5) から $P^{-1}(\exp A)P$ は (i,i)-成分が e^{λ_i} であるような上半三角行列であることがわかるため主張が示される. □

(3.17) を用いれば, 上の 2) と同様に複素数の指数関数に対して $e^{z+w} = e^ze^w$ が成り立つことが示される. 従って, 複素数の指数関数に対しても「指数法則」が成り立つといえる.

命題 3.22 $\det \exp A = e^{\mathrm{tr}\, A}$

証明 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とすれば (3.21) の 6) から $\exp A$ の固有値は $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$ となるため (2.11) と「指数法則」から $\det \exp A = e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}\cdots e^{\lambda_n} = e^{\mathrm{tr}\, A}$. □

$A \in M(n; \boldsymbol{C})$ が $A^* = -A$ を満たすとき n 次歪エルミート行列という. n 次歪エルミート行列全体のなす $M(n; \boldsymbol{C})$ の部分集合を $SH(n)$ で表すことにする. また, n 次ユニタリー行列全体のなす $M(n; \boldsymbol{C})$ の部分集合を $U(n)$ で表し, $SH_0(n) = \{A \in SH(n) | \mathrm{tr}\, A = 0\}$, $SU(n) = \{A \in U(n) | \det A = 1\}$ とおく.

明らかにユニタリー行列は正規行列だから第 3 部第 1 章で学んだようにユニタリー行列で対角化される. この事実を用いると次のことが示される.

命題 3.23 exp は $SH(n)$ を $U(n)$ の上に写し, $SH_0(n)$ を $SU(n)$ の上に写す.

証明 $A \in SH(n)$ とすると, $A^* = -A$ だから (3.21) の 2), 4) から $(\exp A)^* = \exp A^* = \exp(-A) = (\exp A)^{-1}$ となるため $\exp A \in U(n)$ である. さらに $\mathrm{tr}\, A = 0$ ならば (3.22) から $\det \exp A = e^0 = 1$ だから $\exp A \in SU(n)$ である. 従って exp は $SH(n)$ を $U(n)$ に写し, $SH_0(n)$ を $SU(n)$ に写すことがわかる. 任意の $U \in U(n)$ に対して, $P^{-1}UP$ が対角行列になるようなユニタリー行列 P をとると $P^{-1}UP$ もユニタリー行列であることから各対角成分は絶対値が 1 である複素数である. (3.19) の後の注意で述べたことから $P^{-1}UP$ の (j,j)-成分を e^{x_ji} $(x_j \in \boldsymbol{R})$ とおくことができる. B を (j,j)-成分が x_ji であるような対角行列とすれば, $B \in SH(n)$ であり, $\exp B = P^{-1}UP$ となる. 従って, (3.21) の 5) から $\exp(PBP^{-1}) = U$ が得られる. $P^{-1} = P^*$ と $B^* = -B$ から $PBP^{-1} \in SH(n)$ がわかるため, exp は $SH(n)$ を $U(n)$ の上に写す. また, $U \in SU(n)$ ならば対角行列 $P^{-1}UP$ の行列式は 1 だから, 対角成分の積は 1 である. 従って, 上記の実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は $x_n = -x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}$ が成り立つように選ぶことができる. このとき, $\mathrm{tr}\, PBP^{-1} = \mathrm{tr}\, B = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ だから $PBP^{-1} \in SH_0(n)$ である.□

$SH(1)$ は純虚数全体の集合, $U(1)$ は絶対値 1 の複素数全体の集合とみなせるため, $SH(n)$, $U(n)$ はそれぞれこれらの一般化と考えれば, 上の定理は複素変数の指数関数が純虚数全体の集合を絶対値 1 の複素数全体の集合の上に写すという事実を一般化している.

$H(n)$, $S(n)$ でそれぞれ n 次エルミート行列全体, n 次実対称行列全体を表し, $H(n)^+$, $S^+(n)$ でそれぞれ n 次正値エルミート行列全体, n 次実正値対称行列全体を表すことにする. $H(1) = S(1)$ は実数全体の集合, $H^+(1) = S^+(1)$ は正の実数全体の集合とみなせるため, $H(n)$, $S(n)$ は実数全体の集合, $H^+(n)$, $S^+(n)$ は正の実数全体の集合を一般化したものであると考えられる. これは一見こじつけの感じがしないでもないが, このような見方をすれば, 次の定理は実変数の指数関数が実数全体の集合から正の実数全体の集合の上への 1 対 1 写像を与えているという事実を一般化するものであると解釈される.

定理 3.24 exp は $H(n)$, $S(n)$ をそれぞれ $H^+(n)$, $S^+(n)$ の上に *1* 対 *1* に写す.

証明 A を任意のエルミート行列とすれば, (3.21) の 4) から $\exp A$ もエルミート行列になり, さらに, A の固有値はすべて実数だから (3.21) の 6) により, $\exp A$ の固有値はすべて正の実数である. 従って, $\exp A$ は正値エルミート行列になるため, exp は $H(n)$ を $H^+(n)$ の中に写すことがわかる.

C を任意の正値エルミート行列とすれば, $P^{-1}CP$ が対角行列になるようなユニタリー行列 P をとると $P^{-1}CP$ も正値エルミート行列であることから各対角成分は正の実数である. 従って, $P^{-1}CP$ の (j,j)-成分を e^{x_j} $(x_j \in \boldsymbol{R})$ とおくことができる. B を (j,j)-成分が x_j であるような対角行列とすれば, $B \in H(n)$ であり, $\exp B = P^{-1}CP$ となる. 従って, (3.21) の 5) から $\exp(PBP^{-1}) = C$ が得られる. $P^{-1} = P^*$ と $B^* = B$ から $PBP^{-1} \in H(n)$ がわかるため, exp は $H(n)$ を $H^+(n)$ の上に写す.

$A, B \in H(n)$ に対して, A, B を対角化するユニタリー行列 P, Q をとる. $P^{-1}AP, Q^{-1}BQ$ の (j,j)-成分をそれぞれ λ_j, μ_j とすれば, これらはすべて実数だから P, Q の列を適当に入れ換えることにより, $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_n$, $\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \cdots \leqq \mu_n$ と仮定してよい. (3.21) の 6) により, $\exp A$, $\exp B$ の固有値はそれぞれ $e^{\lambda_1} \leqq e^{\lambda_2} \leqq \cdots \leqq e^{\lambda_n}$, $e^{\mu_1} \leqq e^{\mu_2} \leqq \cdots \leqq e^{\mu_n}$ となるため, $\exp A = \exp B$ と仮定すれば, $e^{\lambda_j} = e^{\mu_j}$ が $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して成り立つことがわかる. 従って, $\lambda_j = \mu_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ だから $P^{-1}AP = Q^{-1}BQ$ である. そこで $D = P^{-1}AP = Q^{-1}BQ$, $U = Q^{-1}P$ とおくと, $U(\exp D) = Q^{-1}(\exp A)P = Q^{-1}(\exp B)P = (\exp D)U$ となるため, U の (j,k)-成分を u_{jk} として, 両辺の成分を比較すれば, $e^{\lambda_k}u_{jk} = e^{\lambda_j}u_{jk}$ が得られる. この式から $\lambda_k \neq \lambda_j$ ならば $u_{jk} = 0$ がわかるため, $\lambda_k u_{jk} = \lambda_j u_{jk}$ が成り立つが, これは $UD = DU$ であることを意味する. 従って, $Q^{-1}BQ = D = UDU^{-1} = (Q^{-1}P)(P^{-1}AP)(P^{-1}Q) = Q^{-1}AQ$ だから $A = B$ が得られ, exp が 1 対 1 写像であることがわかる.

$H(n)$, $H^+(n)$ の中で, 成分がすべて実数の行列の全体がそれぞれ $S(n)$, $S^+(n)$ であり, exp は実行列を実行列に写すため, 上で示したことから exp は $S(n)$ を $S^+(n)$ の中に写す 1 対 1 写像である. C を任意の正値対称行列とすれば, $P^{-1}CP$ が対角行列になるような直交行列 P がとれるから, 上と同じ議論で $\exp A = C$ を満たす $A \in S(n)$ の示せる. 従って, exp は $S(n)$ を $S^+(n)$ の上に写す. □

補題 3.25 上の定理における $\exp : H(n) \to H^+(n)$ の逆写像を $\log : H^+(n) \to H(n)$ で表せば $H \in H^+(n)$ と自然数 k に対し, $\log H^k = k \log H$ が成り立つ.

証明 (3.21) の 2) から $\exp(k \log H) = (\exp(\log H))^k = H^k = \exp(\log H^k)$ であり, $\exp : H(n) \to H^+(n)$ は 1 対 1 だから結果が得られる. □

1 次複素正則行列全体の集合は 0 でない複素数全体の集合とみなせるため, n 次複素正則行列を 0 でない複素数の一般化とみなせば, 次の定理は 0 でない複素数が正の実数と絶対値 1 の複素数の積に一意的に表されるという事実を一般化していると考えられる.

定理 3.26 A を n 次複素正則行列とすると, $A = HU$ を満たす正値エルミート行列 H とユニタリー行列 U がただ *1* 組存在する. また, A を n 次実正則行列とすると, $A = HU$ を満たす正値対称行列 H と直交行列 U がただ *1* 組存在する.

証明 $C = AA^*$ とおくと, C は正値エルミート行列である. 実際, $C^* = C$ となることは明らかで, $\boldsymbol{x}$ を任意の n 次元複素ベクトルとすれば, C が定めるエルミート形式は ${}^t\boldsymbol{x}C\bar{\boldsymbol{x}} = {}^t\boldsymbol{x}AA^*\bar{\boldsymbol{x}} = {}^t({}^tA\boldsymbol{x})\overline{{}^tA\boldsymbol{x}} = \|{}^tA\boldsymbol{x}\|$

となるため, 常に 0 以上の値をとり, ${}^tA\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の場合に限って 0 である. A は正則だから ${}^tA\boldsymbol{x} = 0$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ であるため, C が正値エルミート行列であることがわかる. $H = \exp(\frac{1}{2}\log(AA^*))$, $U = H^{-1}A$ とおくと, $H^2 = \exp(\log(AA^*)) = AA^*$, $A = HU$ である. $(H^{-1})^* = H^{-1}$ であることに注意すれば, $U^*U = A^*H^{-1}H^{-1}A = A^*(H^2)^{-1}A = A^*(AA^*)^{-1}A = A^*(A^*)^{-1}A^{-1}A = E_n$ から U がユニタリー行列であることがわかる.

$A = GP$ (G は正値エルミート行列, U はユニタリー行列) であるとすれば, $AA^* = GPP^*G^* = G^2$ から $H = \exp(\frac{1}{2}\log(AA^*)) = \exp(\frac{1}{2}\log G^2) = \exp(\log G) = G$ が得られる. 従って, $A = HU = HP$ となるため, $P = G$ もいえる.

A が n 次実正則行列の場合は, (3.24) の後半の主張により, log は $S^+(n)$ を $S(n)$ に写すため, A に対して上と同様に定めた H は正値対称行列である. $U = H^{-1}A$ は実行列で, 上の結果からユニタリー行列だから直交行列である. □

ここで, 実正規行列の「標準化」について触れることにする.

A を n 次実正規行列とし, λ を A の固有値, $\boldsymbol{w}$ を λ に対する A の固有ベクトルとする. $A\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{w}$ の両辺の共役なベクトルを考えると, $\overline{A} = A$ だから $A\bar{\boldsymbol{w}} = \bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{w}}$ が得られえる. 従って, $\bar{\lambda}$ は A の固有値で, $\bar{\boldsymbol{w}}$ は $\bar{\lambda}$ に対する固有ベクトルである.

写像 $c : \boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^n$ を $c(\boldsymbol{x}) = \bar{\boldsymbol{x}}$ で定める. $\boldsymbol{C}^n$ を $\boldsymbol{R}$ 上の $2n$ 次元ベクトル空間とみなせば, c は線型写像であり, $(c(\boldsymbol{x}), c(\boldsymbol{y})) = \overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$ が任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{C}^n$ について成り立つから c は 直交するベクトルを直交するベクトルに写す. さらに $c \circ c$ は $\boldsymbol{C}^n$ の恒等写像であることから, c は同型写像である. V_λ を λ に対する A の固有空間とすれば上の議論から c は V_λ を $V_{\bar{\lambda}}$ の上に 1 対 1 に写す. 従って, $\boldsymbol{w}_1^\lambda, \boldsymbol{w}_2^\lambda, \ldots, \boldsymbol{w}_{k(\lambda)}^\lambda$ を V_λ の正規直交基底とすれば, $\bar{\boldsymbol{w}}_1^\lambda, \bar{\boldsymbol{w}}_2^\lambda, \ldots, \bar{\boldsymbol{w}}_{k(\lambda)}^\lambda$ は $V_{\bar{\lambda}}$ の正規直交基底である.

λ が虚数の固有値の場合, $\lambda \neq \bar{\lambda}$ だから V_λ と $V_{\bar{\lambda}}$ は定理 7.16 により直交するため, $W_\lambda = V_\lambda + V_{\bar{\lambda}}$ とおくと $\boldsymbol{w}_1^\lambda, \ldots, \boldsymbol{w}_{k(\lambda)}^\lambda, \bar{\boldsymbol{w}}_1^\lambda, \ldots, \bar{\boldsymbol{w}}_{k(\lambda)}^\lambda$ は W_λ の正規直交基底である. $\boldsymbol{R}^n$ を実数成分のベクトルからなる $\boldsymbol{C}^n$ の $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間としての部分空間とみなし, $\boldsymbol{u}_j^\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{w}_j^\lambda + \bar{\boldsymbol{w}}_j^\lambda)$, $\boldsymbol{v}_j^\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\boldsymbol{w}_j^\lambda - \bar{\boldsymbol{w}}_j^\lambda)$ とおくと, これらは $\boldsymbol{R}^n$ に含まれ, $\boldsymbol{u}_1^\lambda, \boldsymbol{v}_1^\lambda, \boldsymbol{u}_2^\lambda, \boldsymbol{v}_2^\lambda, \ldots, \boldsymbol{u}_{k(\lambda)}^\lambda, \boldsymbol{v}_{k(\lambda)}^\lambda$ は W_λ の正規直交基底になることが容易に確かめられる.

λ が実数の固有値の場合, $\boldsymbol{w}$ に関する斉次連立 1 次方程式 $(\lambda E_n - A)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ は実数係数だから, この解空間の基底は $\boldsymbol{R}^n$ の中からとれる. それらを正規直交化しても実ベクトルであることは変わりないため $\boldsymbol{w}_1^\lambda, \boldsymbol{w}_2^\lambda, \ldots, \boldsymbol{w}_{k(\lambda)}^\lambda$ は $\boldsymbol{R}^n$ に含まれる V_λ の正規直交基底であるとしてよい.

A の相異なる実数の固有値を $\mu_1, \ldots \mu_r$ とし, 相異なる虚数の固有値は $\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \cdots, \lambda_s, \bar{\lambda}_s$ という形で与えられる. このとき, $\boldsymbol{C}^n$ は A の固有空間の直和になることから, $\boldsymbol{C}^n = W_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_s} \oplus V_{\mu_1} \oplus \cdots \oplus V_{\mu_r}$ であり, 部分空間 $V_{\mu_1}, \ldots, V_{\mu_r}, W_{\lambda_1}, \ldots, W_{\lambda_s}$ は互いに直交する. そこで, 上で構成した固有ベクトルを順に並べて

$$\boldsymbol{u}_1^{\lambda_1}, \boldsymbol{v}_1^{\lambda_1}, \ldots, \boldsymbol{u}_{k(\lambda_1)}^{\lambda_1}, \boldsymbol{v}_{k(\lambda_1)}^{\lambda_1}, \ldots, \boldsymbol{u}_1^{\lambda_s}, \boldsymbol{v}_1^{\lambda_s}, \ldots, \boldsymbol{u}_{k(\lambda_s)}^{\lambda_s}, \boldsymbol{v}_{k(\lambda_s)}^{\lambda_s}, \boldsymbol{w}_1^{\mu_1}, \ldots, \boldsymbol{w}_{k(\mu_1)}^{\mu_1}, \ldots, \boldsymbol{w}_1^{\mu_r}, \ldots, \boldsymbol{w}_{k(\mu_r)}^{\mu_r}$$

を考えると, これらは $\boldsymbol{C}^n$ の正規直交系になるから, この順にこれらのベクトルを行ベクトルにもつ行列を P とすれば, P は直交行列である.

$\lambda_l = a_l + b_l i$ $(a_l, b_l \in \boldsymbol{R})$ とおくと, $A\boldsymbol{u}_j^{\lambda_l} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A\boldsymbol{w}_j^{\lambda_l} + A\bar{\boldsymbol{w}}_j^{\lambda_l}) = \frac{1}{\sqrt{2}}((a_l + b_l i)\boldsymbol{w}_j^{\lambda_l} + (a_l - b_l i)\bar{\boldsymbol{w}}_j^{\lambda_l}) = a_l\boldsymbol{u}_j^{\lambda_l} - b_l\boldsymbol{v}_j^{\lambda_l}$, $A\boldsymbol{v}_j^{\lambda_l} = \frac{1}{\sqrt{2}i}(A\boldsymbol{w}_j^{\lambda_l} - A\bar{\boldsymbol{w}}_j^{\lambda_l}) = \frac{1}{\sqrt{2}i}((a_l + b_l i)\boldsymbol{w}_j^{\lambda_l} - (a_l - b_l i)\bar{\boldsymbol{w}}_j^{\lambda_l}) = b_l\boldsymbol{u}_j^{\lambda_l} + a_l\boldsymbol{v}_j^{\lambda_l}$ であり, $A\boldsymbol{w}_j^{\mu_l} = \mu_l\boldsymbol{w}_j^{\mu_l}$ だから $C_l = \begin{pmatrix} a_l & -b_l \\ b_l & a_l \end{pmatrix}$ とおくと,

$$P^{-1}AP = \overbrace{C_1 \oplus \cdots \oplus C_1}^{k(\lambda_1)\text{ 個}} \oplus \cdots \oplus \overbrace{C_s \oplus \cdots \oplus C_s}^{k(\lambda_s)\text{ 個}} \oplus \mu_1 E_{k(\mu_1)} \oplus \cdots \oplus \mu_r E_{k(\mu_r)}$$

という形になる. 従って, 次の定理が示された.

定理 3.27 A を n 次実正規行列とするとき, 直交行列 P で $P^{-1}AP$ が 対角線上に $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ の形の行列と, 対角行列が並ぶようになるものがある.

$\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k\theta^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k\theta^{2k} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -(-1)^k\theta^{2k+1} \\ (-1)^k\theta^{2k+1} & 0 \end{pmatrix}$ が成り立つことと, $\cos\theta$, $\sin\theta$ のテイラー展開から次のことが示される.

補題 3.28 θ を実数とするとき, $\exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

実 n 次正方行列 A が ${}^tA = -A$ を満たすとき n 次歪対称行列という. n 次歪対称行列全体のなす $M(n;\boldsymbol{R})$ の部分集合を $AS(n)$ で表し, 行列式が 1 の n 次直交行列全体のなす $M(n;\boldsymbol{R})$ の部分集合を $SO(n)$ で表すことにする. (3.27), (3.28) を用いると (3.23) と類似の結果が成り立つ.

命題 3.29 exp は $AS(n)$ を $SO(n)$ の上に写す.

証明 $A \in AS(n)$ とする. $AS(n) \subset SH_0(n)$ だから (3.23) により, $\exp A$ は行列式 1 のユニタリー行列である. しかも, A は実行列だから $\exp A$ も実行列であるため, $\exp A \in SO(n)$ であることがわかる.

任意の $U \in SO(n)$ に対して, $P^{-1}UP$ が (3.27) の形の行列になるような直交行列 P をとると $P^{-1}UP$ も直交行列であることから対角線上に並ぶ $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の形の行列は $a^2 + b^2 = 1$ を満たし, 対角行列になっている部分の成分は 1 か -1 に等しい. さらに, U の行列式が 1 であることから, $P^{-1}UP$ の対角成分に並ぶ -1 の個数は偶数である. $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおくと, $R(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ に注意すれば, U の固有値 ± 1 に対する固有ベクトルからなる P の列ベクトルを適当に入れ換えることにより, $P^{-1}UP = R(\theta_1) \oplus \cdots \oplus R(\theta_m) \oplus E_{n-2m}$ という形にできる. そこで $B = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_1 \\ \theta_1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} 0 & -\theta_m \\ \theta_m & 0 \end{pmatrix} \oplus O_{n-2m}$ とおくと, $B \in AS(n)$ であり, (3.28) から $\exp B = P^{-1}UP$ となることがわかる. 従って, (3.21) の 5) から $\exp(PBP^{-1}) = U$ が得られる. $P^{-1} = {}^tP$ と ${}^tB = -B$ から $PBP^{-1} \in AS(n)$ がわかるため, exp は $AS(n)$ を $U(n)$ の上に写す. □

4 代数学の基本定理

この節では, 定理 7.13 の証明を与える.

X, Y を $\boldsymbol{C}$ の部分集合とするとき, 写像 $f: X \to Y$ が $a \in X$ で連続であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ で "$|z-a| < \delta$ かつ $z \in X$ ならば $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$"を満たすものがとれることをいう.

次の命題は, 連続写像がもつ基本的な性質である.

命題 4.1 X, Y, Z を $\boldsymbol{C}$ の部分集合とする.

1) $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ *がともに連続写像ならば, 合成写像* $g \circ f: X \to Z$ *も連続である.*

2) $f: X \to Y$ *を写像とする.* $z \in X$ *に対し,* $f(z) = f_1(z) + f_2(z)i$ $(f_1(z), f_2(z) \in \boldsymbol{R})$ *とおくことにより実数値関数* $f_j: X \to \boldsymbol{R}$ $(j = 1, 2)$ *が定まるが,* f *が連続であるためには,* f_1, f_2 *がともに連続であることが必要十分である.*

3) $f, g: X \to \boldsymbol{C}$ *を連続関数,* $c \in \boldsymbol{C}$ *とすると,* $f+g, cf, fg: X \to \boldsymbol{C}$ *はすべて連続である. また, すべての* $z \in X$ *に対して* $g(z) \neq 0$ *ならば* $\frac{f}{g}: X \to \boldsymbol{C}$ *も連続である. 但し,* $f+g$, cf, fg, $\frac{f}{g}$ *はそれぞれ* $(f+g)(z) = f(z) + g(z)$, $(cf)(z) = cf(z)$, $(fg)(z) = f(z)g(z)$, $(\frac{f}{g})(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ *で定義される写像である.*

4) $f: X \to Y$ *が連続であるとする.* X *に含まれる複素数列* $z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots$ *が* $a \in X$ *に収束すれば,* $f(z_0), f(z_1), \ldots, f(z_n), \ldots$ *は* $f(a) \in Y$ *に収束する.*

証明 1) $a \in X$, $\varepsilon > 0$ を任意にとる. g が $f(a)$ で連続であることから, $\delta' > 0$ で "$|w - f(a)| < \delta'$ かつ $w \in Y$ ならば $|g(w) - g(f(a))| < \varepsilon$"を満たすものがとれる. f が a で連続であることから, 上の δ' に対して $\delta > 0$ で "$|z-a| < \delta$ かつ $z \in X$ ならば $|f(z) - f(a)| < \delta'$"を満たすものがとれる. 従って, "$|z-a| < \delta$ かつ $z \in X$ ならば $|g(f(z)) - g(f(a))| < \varepsilon$" が成り立つため, 合成写像 $g \circ f: X \to Z$ は連続である.

2) f が連続であるとすると, $a \in X$, $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ で "$|z-a| < \delta$ かつ $z \in X$ ならば $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$" を満たすものがとれて $|f_j(z) - f_j(a)| \leqq |f(z) - f(a)|$ $(j = 1, 2)$ が成り立つから "$|z-a| < \delta$ かつ $z \in X$ ならば $|f_j(z) - f_j(a)| < \varepsilon$"である. 従って, f_1, f_2 は連続である. 逆に f_1, f_2 は連続であるすると, $a \in X$, $\varepsilon > 0$ に対

し, $\delta_j > 0$ で "$|z-a| < \delta_j$ かつ $z \in X$ ならば $|f_j(z) - f_j(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$"$(j = 1,2)$ を満たすものがとれる. $\delta > 0$ を $\delta \leqq \delta_1, \delta_2$ であるように選べば, $|f(z) - f(a)| \leqq 2\max\{|f_1(z) - f_1(a)|, |f_2(z) - f_2(a)|\}$ が成り立つから "$|z-a| < \delta$ かつ $z \in X$ ならば $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$"である. 従って, f は連続である.

3) $a \in X, \varepsilon > 0$ を任意にとる.

$\delta_1, \delta_2 > 0$ で "$|z-a| < \delta_1$ かつ $z \in X$ ならば $|f(z) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2+2|g(a)|}$","$|z-a| < \delta_2$ かつ $z \in X$ ならば $|g(z) - g(a)| < 1$ かつ $|g(z) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2+2|f(a)|}$" を満たすものがとれる. $\delta > 0$ を $\delta \leqq \delta_1, \delta_2$ であるように選び, $|z-a| < \delta$ かつ $z \in X$ とすると, $|(f+g)(z)-(f+g)(a)| = |f(z)-f(a)+g(z)-g(a)| \leqq |f(z)-f(a)|+|g(z)-g(a)| < \frac{\varepsilon}{2+2|g(a)|} + \frac{\varepsilon}{2+2|f(a)|} < \varepsilon$ であり, また $|g(z)| \leqq |g(z) - g(a)| + |g(a)| < 1 + |g(a)|$ であることに注意すれば, $|(fg)(z) - (fg)(a)| = |f(z)g(z) - f(a)g(z) + f(a)g(z) - f(a)g(a)| \leqq |f(z) - f(a)||g(z)| + |f(a)||g(z) - g(a)| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + |f(a)|\frac{\varepsilon}{2+2|f(a)|} < \varepsilon$ が成り立つため $f+g$, fg はともに連続である. とくに g がつねに値 c をとる定数値関数の場合を考えれば, cf も連続であることがわかる.

すべての $z \in X$ に対して $g(z) \neq 0$ とする. とくに $g(a) \neq 0$ だから $\delta_1, \delta_2 > 0$ で "$|z-a| < \delta_1$ かつ $z \in X$ ならば $|f(z) - f(a)| < \frac{\varepsilon|g(a)|^2}{4+4|g(a)|}$","$|z-a| < \delta_2$ かつ $z \in X$ ならば $|g(z) - g(a)| < \frac{g(a)}{2}$ かつ $|g(z) - g(a)| < \frac{\varepsilon|g(a)|^2}{4+4|f(a)|}$"を満たすものがとれる. $\delta > 0$ を $\delta \leqq \delta_1, \delta_2$ であるように選び, $|z-a| < \delta$ かつ $z \in X$ とすると, $|g(a)| \leqq |g(a) - g(z)| + |g(z)| < \frac{g(a)}{2} + |g(z)|$ から $|g(z)| > \frac{g(a)}{2}$ が得られることに注意すれば, $|(\frac{f}{g})(z) - (\frac{f}{g})(a)| = \frac{|f(z)g(a)-f(a)g(a)-f(a)g(z)+f(a)g(a)|}{|g(z)g(a)|} \leqq \frac{2|f(z)-f(a)||g(a)|+2|f(a)||g(z)-g(a)|}{|g(a)|^2} < \frac{\varepsilon|g(a)|}{2+2|g(a)|} + \frac{\varepsilon|f(a)|}{2+2|f(a)|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ となる. 従って $\frac{f}{g} : X \to \boldsymbol{C}$ は連続である.

4) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ で "$|z-a| < \delta$ かつ $z \in X$ ならば $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$"を満たすものがとれ, さらに "$n \geqq N$ ならば $|z_n - a| < \delta$"を満たす自然数 N がとれるから, $n \geqq N$ ならば $|f(z_n) - f(a)| < \varepsilon$ である. これは $f(z_0), f(z_1), \ldots, f(z_n), \ldots$ が $f(a)$ に収束することを意味する. □

補題 4.2 $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ と $y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ を収束する実数列とする. すべての n について $x_n \leqq y_n$ ならば $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ である.

証明は読者にまかせる.

実数 a, b $(a \leqq b)$ に対し, (a,b), $[a,b]$ によりそれぞれ開区間 $\{x \in \boldsymbol{R} | \, a < x < b\}$, 閉区間 $\{x \in \boldsymbol{R} | \, a \leqq x \leqq b\}$ を表すことにする. 連続関数については, 次の結果は重要である.

定理 4.3 *(中間値の定理)* $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ が連続ならば $f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の値 y に対し, $f(c) = y$ となる $c \in [a,b]$ が存在する.

証明 $p, q \in [a,b]$ に対して y が $f(p)$ と $f(q)$ の間にあるとき, y は $f(p)$ と $f(\frac{p+q}{2})$ の間か $f(\frac{p+q}{2})$ と $f(q)$ の間にあることに注意する. そこで, $u(p,q)$ を前者の場合は $u(p,q) = \frac{3p+q}{4}$, 後者の場合は $u(p,q) = \frac{p+3q}{4}$ により定める. このとき, $|u(p,q) - \frac{p+q}{2}| = \frac{|q-p|}{4}$ であり, y は $f(u(p,q) - \frac{|q-p|}{4})$ と $f(u(p,q) + \frac{|q-p|}{4})$ の間にあることに注意する.

実数列 $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ を以下のように定める. $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$ として, 帰納的に $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ $(n \geqq 3)$ が次の条件を満たすように定まったと仮定する.

(1) $i = 0, 1, \ldots, n-2$ に対して $|x_{i+1} - x_i| = \frac{b-a}{2^i}$.

(2) $i = 2, \ldots, n-1$ に対して y は $f(x_i - \frac{b-a}{2^{i-1}})$ と $f(x_i + \frac{b-a}{2^{i-1}})$ の間にある.

$x_n = u(x_{n-1} - \frac{b-a}{2^{n-2}}, x_{n-1} + \frac{b-a}{2^{n-2}})$ で x_n を定めれば, 上で述べたことから $|x_n - x_{n-1}| = \frac{b-a}{2^{n-1}}$ であり, y は $f(x_n - \frac{b-a}{2^{n-1}})$ と $f(x_n + \frac{b-a}{2^{n-1}})$ の間にある. このように定めた数列は Cauchy 列である. 実際, $|x_{n+k} - x_n| \leqq \sum\limits_{i=0}^{k-1} |x_{n+i+1} - x_{n+i}| = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \frac{b-a}{2^{n+i}} < \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{b-a}{2^{n+i}} = \frac{b-a}{2^{n-1}}$ が成り立つ. (3.4) からこの数列は収束して, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ とおくと, $x_0, x_1, \ldots$ の定め方から, これらはすべて $[a,b]$ に属するため (4.2) から $c \in [a,b]$ である.

$f(c) = y$ が成り立つことをみる. $(y - f(x_n - \frac{b-a}{2^{n-1}}))(y - f(x_n + \frac{b-a}{2^{n-1}})) \leqq 0$ がすべての n について成り立ち, $n \to \infty$ のとき $x_n - \frac{b-a}{2^{n-1}}, x_n + \frac{b-a}{2^{n-1}} \to c$ だから (4.1) の 4) と (4.2) から $(y - f(c))^2 \leqq 0$ が得られる. 従って, $f(c) = y$ である. □

中間値の定理から次の結果がただちに得られる.

補題 4.4 $f:[a,b]\to \boldsymbol{R}$ が連続で, すべての $x\in[a,b]$ に対して $f(x)$ が整数ならば, f は定数値関数である.

定理 4.5 $x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots$ を閉区間 $[a,b]$ に含まれる実数列とすれば, 収束する部分列を含む.

証明 実数列 $p_0,p_1,\ldots,p_j,\ldots$ を以下のように定める. $p_0=a$, $p_1=b$, $p_2=\frac{a+b}{2}$ として, 帰納的に $p_0,p_1,\ldots,p_{j-1}$ $(j\geqq 3)$ が次の条件を満たすように定まったと仮定する.

(1) $i=0,1,\ldots,j-2$ に対して $|p_{i+1}-p_i|=\frac{b-a}{2^i}$.

(2) $i=2,\ldots,j-1$ に対して $x_n\in[p_i-\frac{b-a}{2^{i-1}},p_i+\frac{b-a}{2^{i-1}}]$ となる n は無限個存在する.

$[p_{j-1}-\frac{b-a}{2^{j-2}},p_{j-1}]$ または $[p_{j-1},p_{j-1}+\frac{b-a}{2^{j-2}}]$ は無限個の n に対して x_n を含むため, 前者が含む場合は $p_j=p_{j-1}-\frac{b-a}{2^{j-1}}$, そうでない場合は $p_j=p_{j-1}+\frac{b-a}{2^{j-1}}$ により p_j を定める. このとき, $|p_j-p_{j-1}|=\frac{b-a}{2^{j-1}}$ であり, $x_n\in[p_j-\frac{b-a}{2^{j-1}},p_j+\frac{b-a}{2^{j-1}}]$ となる n は無限個存在する.

$n_0=0$, $n_1=1$ とし, 整数列 $n_0<n_1<\cdots<n_{j-1}$ が $x_{n_i}\in[p_{i+1}-\frac{b-a}{2^i},p_{i+1}+\frac{b-a}{2^i}]$ $(i=1,2,\ldots,j-1)$ を満たすように選べたとする. p_{j+1} の定め方から $x_n\in[p_{j+1}-2^{-j}(b-a),p_{j+1}+2^{-j}(b-a)]$ となる n は無限個あるため, $x_{n_j}\in[p_{j+1}-\frac{b-a}{2^j},p_{j+1}+\frac{b-a}{2^j}]$ を満たす n_{j-1} より大きな n_j はある. このように定めた部分列 $x_{n_0},x_{n_1},\ldots$ は Cauchy 列である. 実際 $|x_{n_j}-p_{j+1}|\leqq\frac{b-a}{2^j}$ と $|p_{i+1}-p_i|=\frac{b-a}{2^i}$ から $|x_{n_{j+k}}-x_{n_j}|=|x_{n_{j+k}}-p_{j+k+1}+\sum\limits_{l=1}^{k}(p_{j+l+1}-p_{j+l})+p_{j+1}-x_{n_j}|\leqq|x_{n_{j+k}}-p_{j+k+1}|+\sum\limits_{l=1}^{k}|p_{j+l+1}-p_{j+l}|+|p_{j+1}-x_{n_j}|\leqq\frac{b-a}{2^{j+k}}+\sum\limits_{l=1}^{k}\frac{b-a}{2^{j+1}}+\frac{b-a}{2^j}=\frac{b-a}{2^{j-1}}$ である. 従って, (3.4) から結果が得られる. □

S^1 で絶対値 1 の複素数全体の集合, D^2 で絶対値 1 以下の複素数全体の集合を表すことにする.

定理 4.6 $f:D^2\to\boldsymbol{C}$ を連続関数とする. 任意の $\varepsilon>0$ に対し "$|z-w|<\delta$ ならば $|f(z)-f(w)|<\varepsilon$"が成り立つような $\delta>0$ がある.

証明 背理法で証明する. 主張を否定すれば, ある $\varepsilon>0$ で 次のようなものがある; $\delta>0$ をどのように選んでも "$|z-w|<\delta$ かつ $|f(z)-f(w)|\geqq\varepsilon$"が成り立つような $z,w\in D^2$ がある. $\delta=2^{-n}$ に対して "$|z_n-w_n|<2^{-n}$ かつ $|f(z_n)-f(w_n)|\geqq\varepsilon$"が成り立つような $z_n,w_n\in D^2$ を選んでおく. $z_n=x_n+y_ni$, $w_n=u_n+v_ni$ $(x_n,y_n,u_n,v_n\in\boldsymbol{R})$ とおけば, $z_n,w_n\in D^2$ から x_n, y_n, u_n, v_n はすべて $[-1,1]$ の点列である. (4.5) からこれらは収束する部分列を含むため, x_{n_k}, y_{n_k}, u_{n_k}, v_{n_k} がすべて収束するように整数列 $n_0<n_1<\cdots<n_k<\cdots$ がとれる. 従って, z_{n_k}, w_{n_k} は収束し, $p=\lim\limits_{k\to\infty}z_{n_k}$, $q=\lim\limits_{k\to\infty}w_{n_k}$ とおくと $|z_{n_k}|,|w_{n_k}|\leqq 1$ だから (4.2) から $|p|,|q|\leqq 1$ すなわち $p,q\in D^2$ である. $|z_{n_k}-w_{n_k}|<2^{-n_k}$ がすべての k について成り立つため, (4.2) から $|p-q|\leqq 0$ すなわち $p=q$ である. f は連続だから (4.1) の 4) により, $\lim\limits_{k\to\infty}f(z_{n_k})=\lim\limits_{k\to\infty}f(w_{n_k})=f(p)$ が得られるが, $|f(z_{n_k})-f(w_{n_k})|\geqq\varepsilon$ において, $k\to\infty$ とすれば $0\geqq\varepsilon>0$ となって矛盾が生じる. □

写像 $e:\boldsymbol{R}\to S^1$ を $e(t)=\cos 2\pi t+i\sin 2\pi t$ で定義し, $l:S^1-\{-1\}\to(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ を

$$l(x+iy)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\cos^{-1}x & y\geqq 0\\ -\frac{1}{2\pi}\cos^{-1}x & y\leqq 0\end{cases}$$

$(x,y\in\boldsymbol{R},\ x^2+y^2=1)$ で定めると次の補題は容易に示される.

補題 4.7 *1)* e, l *は連続であり,* $e(l(z))=z$ $(z\in S^1-\{-1\})$, $l(e(t))=t$ $(t\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$.
2) $s,t\in\boldsymbol{R}$ *に対し,* $e(s+t)=e(s)e(t)$.
3) $e(t)=e(s)$ *であることと,* $t-s$ *が整数であることは同値である.*

補題 4.8 $f:D^2\to S^1$ を連続写像とすると, 連続写像 $\tilde{f}:D^2\to\boldsymbol{R}$ で, $e\circ\tilde{f}=f$ を満たすものが存在する.

証明 f は連続だから (4.6) により "$|z-w|<\delta$ ならば $|f(z)-f(w)|<2$"を満たすような $\delta>0$ がある. $N>\frac{1}{\delta}$ である整数 N をとれば, 任意の $j=1,2,\ldots,N$ と $z\in D^2$ に対して, $\frac{j}{N}z\in D^2$ であることに注意すると $|\frac{j}{N}z-\frac{j-1}{N}z|=\frac{|z|}{N}<\delta$ だから $|f(\frac{j}{N}z)-f(\frac{j-1}{N}z)|<2$ である. 一般に $z,w\in S^1$ が $|z-w|<2$ を満たすことと $\frac{z}{w}\neq -1$ であることは同値だから, $g_j(z)=f(\frac{j}{N}z)f(\frac{j-1}{N}z)^{-1}$ とおくと, g_j は D^2 から $S^1-\{-1\}$ への写像であり, $g_j(0)=1$ となる. このとき, $f(z)=f(0)g_1(z)g_2(z)\cdots g_N(z)$ がすべての $z\in D^2$ に対して成り立つ. そこで, $f(0)=e(t_0)$ を満たす実数 t_0 を選び, $\tilde{f}$ を $\tilde{f}(z)=t_0+\sum_{j=1}^{N} l(g_j(z))$ で定めると, (4.7) の 1), 2) を用いて

$$e(\tilde{f}(z))=e(t_0+\sum_{j=1}^{N} l(g_j(z)))=e(t_0)e(l(g_1(z)))\cdots e(l(g_N(z)))=f(0)g_1(z)\cdots g_N(z)=f(z).$$ □

補題 4.9 *n が 0 でない整数ならば, 連続写像 $\tilde{f}:D^2\to \boldsymbol{R}$ で $e(\tilde{f}(z))=z^n$ $(z\in S^1)$ を満たすものは存在しない.*

証明 連続写像 $\tilde{f}:D^2\to \boldsymbol{R}$ で $e(\tilde{f}(z))=z^n$ $(z\in S^1)$ を満たすものが存在したと仮定する. 任意の $s\in[0,1]$ に対して, (4.7) の 2) より, $e(\tilde{f}(e(s)))=e(s)^n=e(ns)$, だから $g(s)=\tilde{f}(e(s))-ns$, により関数 $g:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ を定めれば, 連続であり, (4.7) の 3) からつねに整数を値にとる. (4.3) により g は一定の整数値をとる定数値関数だから, $g(0)=c$ とおけば, すべての $s\in[0,1]$ に対して $\tilde{f}(e(s))=ns+c$ である. ところが $e(0)=e(1)=1$ から $c=\tilde{f}(0)=\tilde{f}(1)=n+c$ となり, $n=0$ が導かれるため, 矛盾が生じる. □

補題 4.10 *n が 0 でない整数ならば, 連続写像 $f:D^2\to S^1$ で $f(z)=z^n$ $(z\in S^1)$ を満たすものは存在しない.*

証明 連続写像 $f:D^2\to S^1$ で $f(z)=z^n$ $(z\in S^1)$ を満たすものが存在したと仮定すれば, (4.8) から, 連続写像 $\tilde{f}:D^2\to\boldsymbol{R}$ で, $e\circ\tilde{f}=f$ を満たすものが存在するが, これは (4.9) に矛盾する. □

補題 4.11 *n が 0 でない整数ならば, 任意の連続写像 $g:D^2\to D^2$ に対して $g(z)=z^n$ を満たす $z\in D^2$ が存在する.*

証明 すべての $z\in D^2$ に対して, $g(z)\neq z^n$ が成り立つと仮定すれば, 各 $z\in D^2$ に対し, $g(z)$ を始点として z^n を通る半直線がただ1つ定まり, この半直線と S^1 との交点を $f(z)$ とする. $z=x+yi, w=u+vi\in\boldsymbol{C}$ $(x,y,u,v\in\boldsymbol{R})$ に対して z と w の「内積」$xu+yv$ を (z,w) で表し, $u(z)=\frac{z^n-g(z)}{|z^n-g(z)|}$, $s(z)=-(z^n,u(z))+\sqrt{1-|z^n|^2+(z^n,u(z))^2}$ とおけば, $f(z)$ は $f(z)=z^n+s(z)u(z)$ で与えられるため, $f:D^2\to S^1$ は連続である. また, $z\in S^1$ ならば $z^n\in S^1$ だから $f(z)=z^n$ である. これは (4.10) と矛盾する. □

定理 4.12 *(代数学の基本定理) 複素数を係数とする n 次代数方程式 $z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$ は $r=\max\{1,|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|\}$ とおくと, 絶対値が r 以下である複素数の解を少なくとも一つもつ.*

証明 $|z|\leqq r$ ならば, $|a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0|\leqq|a_{n-1}||z^{n-1}|+\cdots+|a_1||z|+|a_0|\leqq|a_{n-1}|r^{n-1}+\cdots+|a_1|r+|a_0|=r^{n-1}(|a_{n-1}|+\cdots+\frac{|a_1|}{r^{n-2}}+\frac{|a_0|}{r^{n-1}})\leqq r^{n-1}(|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|)\leqq r^n$ だから, 写像 $g:D^2\to\boldsymbol{C}$ を $g(z)=-\frac{1}{r^n}(a_{n-1}(rz)^{n-1}+\cdots+a_1(rz)+a_0)$ で定義すれば, g は連続であり, 任意の $z\in D^2$ に対して $|g(z)|\leqq 1$ である. 従って, g は D^2 から D^2 への連続写像とみなせるため, (4.11) から $g(z_0)=z_0^n$ を満たす $z_0\in D^2$ がある. このとき $(rz_0)^n=-(a_{n-1}(rz_0)^{n-1}+\cdots+a_1(rz_0)+a_0)$ だから rz_0 は与えられた方程式の解である. □

系 4.12.1 *複素数を係数とする n 次多項式 $a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ $(a_n\neq 0)$ は1次式の積 $a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$ の形に因数分解される.*

証明 n による帰納法で示す. $n=1$ のときは, 主張は明らかである. $n-1$ の場合に主張が成り立つと仮定する. n 次方程式 $a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$ は少なくとも 1 つの解をもつため, 解の 1 つを α_n とすれば, 因数定理により, n 次多項式 $a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ は $z-\alpha_n$ で割り切れる. すなわち, $a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=(a_nz^{n-1}+a'_{n-2}z^{n-2}+\cdots+a'_1z+a'_0)(z-\alpha_n)$ の形に因数分解されるため, $n-1$ 次多項式 $a_nz^{n-1}+a'_{n-2}z^{n-2}+\cdots+a'_1z+a'_0$ に帰納法の仮定を適用すればよい. □

系 4.12.2 実数を係数とする n 次多項式 $a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$ $(a_n \neq 0)$ は実数の範囲で１次式と２次式の積 $a_n(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_r)(z^2+\beta_1z+\gamma_1)\cdots(z^2+\beta_sz+\gamma_s)$ $(n = r+2s,\ \beta_j^2 - 4\gamma_j < 0)$ の形に因数分解される.

証明 上の結果から $a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0 = a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$ と因数分解される. 係数が実数であることから $a_n\bar{\alpha}_j^n + a_{n-1}\bar{\alpha}_j^{n-1} + \cdots + a_1\bar{\alpha}_j + a_0 = \overline{a_n\alpha_j^n + a_{n-1}\alpha_j^{n-1} + \cdots + a_1\alpha_j + a_0} = \bar{0} = 0$ となるため, $\bar{\alpha}_j$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ は $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ のいずれかに等しい. 従って, $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ が実数であるとして, $\alpha_{r+2j} = \bar{\alpha}_{r+2j-1} \notin \boldsymbol{R}$ と仮定してよい. このとき, $\beta_j = -\alpha_{r+2j-1} - \alpha_{r+2j}$, $\gamma_j = \alpha_{r+2j-1}\alpha_{r+2j}$ とおけば $(z-\alpha_{r+2j-1})(z-\alpha_{r+2j}) = z^2 + \beta_jz + \gamma_j$ $(\beta_j^2 - 4\gamma_j < 0)$ だから主張が成り立つ. □

5 双対空間

この節の目的は, 双対空間や双対写像という概念を導入することにより, 転置行列が単に行列の行と列を入れ換えたものであるという以上の意味をもつことを示し, 与えられた行列の転置行列の階数は元の行列の階数に等しいという事実の別の証明を与えることである.

V, W を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とするとき, $\mathrm{Hom}(V,W)$ により, V から W への線型写像全体の集合を表す. $f,g \in \mathrm{Hom}(V,W)$, $r \in \boldsymbol{K}$ に対し, 写像 $f+g, rf : V \to W$ を $(f+g)(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v})$, $(rf)(\boldsymbol{v}) = rf(\boldsymbol{v})$ で定めるとき, これらがともに線型写像になることが容易に確かめられる. このように定めた線型写像の加法とスカラー倍により, $\mathrm{Hom}(V,W)$ は $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間になる.

$f : V \to V'$, $g : W \to W'$ を線型写像とする. $\varphi,\psi \in \mathrm{Hom}(V',W)$, $r \in \boldsymbol{K}$ に対し, $(\varphi+\psi)\circ f = \varphi\circ f + \psi\circ f$, $(r\varphi)\circ f = r(\varphi\circ f)$ が成り立つことから, φ を $\varphi\circ f$ に対応させる写像 $\mathrm{Hom}(V',W) \to \mathrm{Hom}(V,W)$ は線型写像である. この写像を f^* で表すことにする.

また, $\xi,\zeta \in \mathrm{Hom}(V,W)$, $r \in \boldsymbol{K}$ に対し, $g\circ(\xi+\zeta) = g\circ\xi + g\circ\zeta$, $g\circ(r\xi) = r(g\circ\xi)$ が成り立つことから, ξ を $g\circ\xi$ に対応させる写像 $\mathrm{Hom}(V,W) \to \mathrm{Hom}(V,W')$ も線型写像であり, この写像を g_* で表すことにする.

命題 5.1 $f : V \to V'$, $f' : V' \to V''$, $g : W \to W'$, $g' : W' \to W''$ を線型写像とする.

1) $(f'\circ f)^* = f^*\circ f'^* : \mathrm{Hom}(V'',W) \to \mathrm{Hom}(V,W)$, $(g'\circ g)_* = g'_*\circ g_* : \mathrm{Hom}(V,W) \to \mathrm{Hom}(V,W'')$

2) 1_V, 1_W をそれぞれ V, W の恒等写像とすれば $(1_V)^*$, $(1_W)_*$ はともに $\mathrm{Hom}(V,W)$ の恒等写像である.

3) $V'' = V$, $W'' = W$ で, f, g がそれぞれ f', g' を逆写像とする同型写像の場合, $f^* : \mathrm{Hom}(V',W) \to \mathrm{Hom}(V,W)$, $g^* : \mathrm{Hom}(V,W) \to \mathrm{Hom}(V,W')$ はそれぞれ, f'^*, g'^* を逆写像とする同型写像である.

証明 1), 2) は上の定義から明らかである. 3) は $f'\circ f = 1_V$, $f\circ f' = 1_{V'}$, $g'\circ g = 1_W$, $g\circ g' = 1_{W'}$ の両辺に 1), 2) の結果を用いればよい. □

補題 5.2 V, V' を有限次元ベクトル空間とする.

1) $f : V \to V'$ が *1* 対 *1* 写像ならば $p\circ f$ が V の恒等写像になるような線型写像 $p : V' \to V$ がある.

2) $f : V \to V'$ が上への写像ならば $f\circ s$ が V' の恒等写像になるような線型写像 $s : V' \to V$ がある.

証明 1) V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ を選ぶと f が１対１であることから定理 5.6 から $\{f(\boldsymbol{v}_1),f(\boldsymbol{v}_2),\ldots,f(\boldsymbol{v}_n)\}$ は V' の１次独立なベクトルになるため, V' の基底で $\{f(\boldsymbol{v}_1),f(\boldsymbol{v}_2),$
$\ldots,f(\boldsymbol{v}_n),\boldsymbol{v}'_1,\ldots,\boldsymbol{v}'_k\}$ の形のものがとれる. このとき, $p(f(\boldsymbol{v}_j)) = \boldsymbol{v}_j$ $(j = 1,2,\ldots,n)$, $p(\boldsymbol{v}'_j) = \boldsymbol{0}$ $(j = 1,2,\ldots,k)$ を満たす線型写像 $p : V' \to V$ がある. V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ の上で $p\circ f$ と V の恒等写像の値は一致するため, $p\circ f$ は V の恒等写像 である.

2) V' の基底 $\{\boldsymbol{v}'_1,\boldsymbol{v}'_2,\ldots,\boldsymbol{v}'_m\}$ を選ぶと f が上への写像であることから, 各 $j = 1,2,\ldots,m$ に対して $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{v}'_j$ を満たす $\boldsymbol{v} \in V$ がとれる. 定理 5.6 から $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m\}$ は一次独立だから V の基底で $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_m,\boldsymbol{v}_{m+1},\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ の形のものがとれる. このとき, $s(\boldsymbol{v}'_j) = \boldsymbol{v}_j$ $(j = 1,2,\ldots,m)$ を満たす線型写像 $s : V' \to V$ がある. V' の基底 $\{\boldsymbol{v}'_1,\boldsymbol{v}'_2,\ldots,\boldsymbol{v}'_m\}$ の上で $f\circ s$ と V' の恒等写像の値は一致するため, $f\circ s$ は V' の恒等写像 である. □

命題 5.3 $f: V \to V'$, $g: W \to W'$ を線型写像とする.

1) f が上への写像ならば $f^*: \mathrm{Hom}(V', W) \to \mathrm{Hom}(V, W)$ は 1 対 1 写像である.

2) g が 1 対 1 写像ならば $g_*: \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(V, W')$ は 1 対 1 写像である.

3) V, V' が有限次元ベクトル空間であるとき, f が 1 対 1 写像ならば f^* は上への写像である.

4) W, W' が有限次元ベクトル空間であるとき, g が上への写像ならば g_* は上への写像である.

証明 1) $\varphi \in \mathrm{Hom}(V', W)$ に対して $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ が零写像であるとする. f は上への写像だから, 任意の $\boldsymbol{x} \in V'$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = bx$ を満たす $\boldsymbol{v} \in V$ がある. 従って, $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(f(\boldsymbol{v})) = \varphi \circ f(\boldsymbol{v}) = 0$ となるため φ は零写像である.

2) $\xi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ に対して $g_*(\xi) = g \circ \xi$ が零写像であるとする. 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $g(\xi(\boldsymbol{v})) = g \circ \xi(\boldsymbol{v}) = 0$ であり, g は 1 対 1 だから $\xi(\boldsymbol{v}) = 0$ が得られる. ξ も零写像となって, 主張が示される.

3) (5.2) から $p \circ f$ が V の恒等写像 1_V になるような線型写像 $p: V' \to V$ がある任意の線型写像 $\psi: V \to W$ に対して $f^*(\psi \circ p) = \psi \circ p \circ f = \psi \circ 1_V = \psi$ だから f^* は上への写像である.

4) (5.2) から $g: W \to W'$ が上への写像ならば $g \circ s$ が W' の恒等写像になるような線型写像 $s: W' \to W$ がある. 任意の線型写像 $\zeta: V \to W'$ に対して $g_*(s \circ \zeta) = g \circ s \circ \zeta = 1_{W'} \circ \zeta = \zeta$ だから g_* は上への写像である. □

定義 5.4 スカラー $\boldsymbol{K}$ 自身を $\boldsymbol{K}$ 上の 1 次元ベクトル空間とみなす. $V^* = \mathrm{Hom}(V, \boldsymbol{K})$ とおいて, これを V の双対空間という. また, 線型写像 $f: V \to W$ に対して, $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ で定まる写像 $f^*: W^* \to V^*$ を f の双対写像という.

ベクトル空間 V, W に対し, $V \times W$ により V と W の直積集合 $\{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) | \, \boldsymbol{v} \in V, \ \boldsymbol{w} \in W\}$ を表すことにする.

定義 5.5 V, W, Z を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする. 写像 $F: V \times W \to Z$ が任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V$, $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in W$, $r \in \boldsymbol{K}$ に対して $F(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}) = F(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + F(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{w})$, $F(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}') = F(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + F(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}')$, $F(r\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = F(\boldsymbol{v}, r\boldsymbol{w}) = rF(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ を満たすとき, F を双線型写像という.

双線型写像 $F: V \times W \to Z$ が与えられたとする. $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $F_{\boldsymbol{v}}: W \to Z$ を $F_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w}) = F(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ で定めると, $F_{\boldsymbol{v}}$ は線型写像である. そこで, 各 $\boldsymbol{v} \in V$ を $F_{\boldsymbol{v}}$ に対応させる写像 $F^r: V \to \mathrm{Hom}(W, Z)$ を考えると, これも線型写像になることが確かめられる. 同様に, $\boldsymbol{w} \in W$ に対して $F_{\boldsymbol{w}}: V \to Z$ を $F_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ で定めると, $F_{\boldsymbol{w}}$ は線型写像であり, 各 $\boldsymbol{w} \in W$ を $F_{\boldsymbol{w}}$ に対応させる写像 $F^l: W \to \mathrm{Hom}(V, Z)$ を考えると, 線型写像である.

次の命題は F^r, F^l の定義から明らかである.

命題 5.6 $F: V \times W \to Z$ を双線型写像とする.

1) $F^r: V \to \mathrm{Hom}(W, Z)$ が 1 対 1 写像であるための必要十分条件は, "すべての $\boldsymbol{w} \in W$ に対して, $F(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ となる $\boldsymbol{v} \in V$ は $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ だけである."が成り立つことである.

2) $F^l: W \to \mathrm{Hom}(V, Z)$ が 1 対 1 写像であるための必要十分条件は, "すべての $\boldsymbol{v} \in V$ に対して, $F(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ となる $\boldsymbol{w} \in W$ は $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ だけである."が成り立つことである.

定義 5.7 双線型写像 $F: V \times W \to Z$ が非退化であるとは, すべての $\boldsymbol{w} \in W$ に対して, $F(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ となる $\boldsymbol{v} \in V$ は $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ だけであり, すべての $\boldsymbol{v} \in V$ に対して, $F(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ となる $\boldsymbol{w} \in W$ は $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ だけであることをいう.

V は $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を基底にもつベクトル空間であるとする. 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して線型写像 $\boldsymbol{v}_i^*: V \to \boldsymbol{K}$ で $\boldsymbol{v}_i^*(\boldsymbol{v}_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$ を満たすものがただ 1 通りに定まる.

命題 5.8 $\{\boldsymbol{v}_1^*, \boldsymbol{v}_2^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*\}$ は V^* の基底である. 従って, とくに $\dim V^* = \dim V = n$ である.

証明　$\lambda_1\boldsymbol{v}_1^* + \lambda_2\boldsymbol{v}_2^* + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{v}_n^* = \boldsymbol{0}$ とすると, $(\lambda_1\boldsymbol{v}_1^* + \lambda_2\boldsymbol{v}_2^* + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{v}_n^*)(\boldsymbol{v}_j) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ である. (左辺)$= \lambda_1\boldsymbol{v}_1^*(\boldsymbol{v}_j) + \lambda_2\boldsymbol{v}_2^*(\boldsymbol{v}_j) + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{v}_n^*(\boldsymbol{v}_j) = \lambda_j$ だから, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ となり, $\{\boldsymbol{v}_1^*, \boldsymbol{v}_2^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*\}$ は 1 次独立である. 任意の $f \in V^*$ に対して, $f = f(\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1^* + f(\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_2^* + \cdots + f(\boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{v}_n^*$ が成り立つ. 実際 $(f(\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1^* + f(\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_2^* + \cdots + f(\boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{v}_n^*)(\boldsymbol{v}_j) = f(\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1^*(\boldsymbol{v}_j) + f(\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_2^*(\boldsymbol{v}_j) + \cdots + f(\boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{v}_n^*(\boldsymbol{v}_j) = f(\boldsymbol{v}_j)$ で基底の各ベクトルに対して上式の両辺の値は等しくなる. 従って, $\{\boldsymbol{v}_1^*, \boldsymbol{v}_2^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*\}$ は V^* を生成する. □

上のような基底 $\{\boldsymbol{v}_1^*, \boldsymbol{v}_2^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*\}$ を $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ の双対基底という.

命題 5.9 *$P_V : V \times V^* \to \boldsymbol{K}$ を $P_V(\boldsymbol{v}, f) = f(\boldsymbol{v})$ で定めれば P_V は双線型写像であり, V が有限次元ならば非退化である.*

証明は読者にまかせる. なお, 上で V が有限次元であるという仮定は必要ではないことが知られている.

命題 5.10 *$F : V \times W \to \boldsymbol{K}$ を非退化な双線型写像とする.*
1) V か W の一方が有限次元ならば他方もそうである.
2) 1) の仮定のもとで, $F^r : V \to W^*$, $F^l : W \to V^*$ は同型写像である.

証明　1) V が有限次元ならば, (5.8) により V^* も有限次元で, (5.6) から $F^l : W \to V^*$ は 1 対 1 写像だから W も有限次元である. W が有限次元の場合も同様にして V が有限次元であることがいえる.

2) F が非退化であることから, (5.6) により $F^r : V \to W^*$, $F^l : W \to V^*$ はともに 1 対 1 写像である. 従って, $\dim V \leqq \dim W^* = \dim W \leqq \dim V^* = \dim V$ となるため, $\dim V = \dim W^*$, $\dim W = \dim V^*$ が得られる. F^r, F^l は次元が等しいベクトル空間の間の 1 対 1 写像だから同型写像である. □

系 5.10.1 *V が有限次元ならば $P_V^r : V \to (V^*)^*$ は同型写像である.*

(5.9) の後で注意したことから, V が有限次元ではないときは, P_V^r は 1 対 1 写像ではあるが, 上への写像ではない.

補題 5.11 *$F : V \times W \to \boldsymbol{K}$ を双線型写像とすると, $(F^r)^* \circ P_W^r = F^l$, $(F^l)^* \circ P_V^r = F^r$ が成り立つ.*

証明　任意の $\boldsymbol{w} \in W$ に対し, $(F^r)^* \circ P_W^r(\boldsymbol{w}) = (F^r)^*(P_{W\boldsymbol{w}}) = P_{W\boldsymbol{w}} \circ F^r$. さらに, $\boldsymbol{v} \in V$ ならば $P_{W\boldsymbol{w}} \circ F^r(\boldsymbol{v}) = P_{W\boldsymbol{w}}(F_{\boldsymbol{v}}) = F_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w}) = F(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = F_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v})$ だから $P_{W\boldsymbol{w}} \circ F^r = F_{\boldsymbol{w}} = F^l(\boldsymbol{w})$. 従って, $(F^r)^* \circ P_W^r(\boldsymbol{w}) = F^l(\boldsymbol{w})$ である. 2 つ目の等式も同様に示せる. □

次の命題は, (5.10) の逆を示すものである.

命題 5.12 *V, W を有限次元ベクトル空間, $F : V \times W \to \boldsymbol{K}$ を双線型写像とする. $F^r : V \to W^*$ または $F^l : W \to V^*$ が同型写像ならば F は非退化である.*

証明　$F^r : V \to W^*$ が同型写像であると仮定する. (5.1) により $(F^r)^* : (W^*)^* \to V^*$ は同型写像だから (5.10.1) から, 合成写像 $(F^r)^* \circ P_W^r : W \to V^*$ も同型写像である. 一方 (5.11) により $(F^r)^* \circ P_W^r = F^l$ が成り立つため, とくに F^l は 1 対 1 写像である. 従って, (5.6) から F は非退化である. $F^l : W \to V^*$ が同型写像の場合も同様である. □

V, W を有限次元ベクトル空間 $f : V \to W$ を線型写像とするとき, 双線型写像 $F : \mathrm{Im}\, f^* \times \mathrm{Im}\, f \to \boldsymbol{K}$ (ただし $f^* : W^* \to V^*$ は f の双対写像) を次のようにして定める. 任意の $(\varphi, \boldsymbol{w}) \in \mathrm{Im}\, f^* \times \mathrm{Im}\, f$ に対して, $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ を満たす $\boldsymbol{v} \in V$ を選び, $F(\varphi, \boldsymbol{w}) = \varphi(\boldsymbol{v})$ とする. もし, $f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}') = \boldsymbol{w}$ ならば $\varphi \in \mathrm{Im}\, f^*$ より $\psi \circ f = f^*(\psi) = \varphi$ となる $\psi \in W^*$ があるため, $\varphi(\boldsymbol{v}') = \psi \circ f(\boldsymbol{v}') = \psi \circ f(\boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{v})$ となるため, F の定義は $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ を満たす $\boldsymbol{v} \in V$ の選び方に依存しない. このとき, F が双線型写像であることは容易に確かめられる.

命題 5.13 *V, W が有限次元ならば, 上で定義した F は非退化である.*

証明 $\varphi \in \operatorname{Im} f^*$ を任意に固定して, すべての $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Im} f$ に対して $F(\varphi, \boldsymbol{w}) = 0$ であると仮定する. このときすべての $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $F(\varphi, f(\boldsymbol{v})) = 0$ であるが, F の定義から, この左辺は $\varphi(\boldsymbol{v}) = P_V(\boldsymbol{v}, \varphi)$ に等しい. (5.9) により, P_V は非退化だから φ は零写像である.

$\boldsymbol{w} \in \operatorname{Im} f$ を任意に固定して, $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ を満たす $\boldsymbol{v} \in V$ を選んでおく. すべての $\varphi \in \operatorname{Im} f^*$ に対して $F(\varphi, \boldsymbol{w}) = 0$ であると仮定すると, すべての $\psi \in W^*$ に対して $F(f^*(\psi), \boldsymbol{w}) = 0$ であるが, F の定義から, この左辺は $\psi \circ f(\boldsymbol{v}) = P_W(f(\boldsymbol{v}), \psi) = P_W(\boldsymbol{w}, \psi)$ に等しい. (5.9) により, P_W は非退化だから ψ は零写像である. □

(5.10), (5.13) から $\operatorname{Im} f^*$ は $\operatorname{Im} f$ の双対空間と同型で, さらに (5.9) から $\dim \operatorname{Im} f^*$ と $\dim \operatorname{Im} f$ は等しい. 従って, 次の定理が示せた.

定理 5.14 $f : V \to W$ を有限次元ベクトル空間の間の線型写像とするとき, 双対写像 f^* の像は, f の像の双対空間と同型であり. $\operatorname{rank} f^* = \operatorname{rank} f$ が成り立つ.

$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ をベクトル空間 V, W の基底とし, $\{\boldsymbol{v}_1^*, \boldsymbol{v}_2^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*\}$, $\{\boldsymbol{w}_1^*, \boldsymbol{w}_2^*, \ldots, \boldsymbol{w}_m^*\}$ をこれらの基底の双対基底とする.

線型写像 $f : V \to W$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ に関する表現行列を $A = (a_{ij})$ とする. このとき, $f^* : W^* \to V^*$ の $\{\boldsymbol{w}_1^*, \boldsymbol{w}_2^*, \ldots, \boldsymbol{w}_m^*\}$, $\{\boldsymbol{v}_1^*, \boldsymbol{v}_2^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*\}$ に関する表現行列を求めてみよう. $f^*(\boldsymbol{w}_j^*) = b_{1j}\boldsymbol{v}_1^* + b_{2j}\boldsymbol{v}_2^* + \cdots + b_{nj}\boldsymbol{v}_n^*$ とおくと, $f(\boldsymbol{v}_i) = a_{1i}\boldsymbol{w}_1 + a_{2i}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{ni}\boldsymbol{w}_m$ だから, この左辺は $\boldsymbol{v}_i$ を $(f^*(\boldsymbol{w}_j^*))(\boldsymbol{v}_i) = (\boldsymbol{w}_j^* \circ f)(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_j^*(f(\boldsymbol{v}_i)) = \boldsymbol{w}_j^*(a_{1i}\boldsymbol{w}_1 + a_{2i}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{ni}\boldsymbol{w}_m) = a_{1i}\boldsymbol{w}_j^*(\boldsymbol{w}_1) + a_{2i}\boldsymbol{w}_j^*(\boldsymbol{w}_2) + \cdots + a_{ni}\boldsymbol{w}_j^*(\boldsymbol{w}_m) = a_{ji}$ に写す. 一方右辺は $(b_{1j}\boldsymbol{v}_1^* + b_{2j}\boldsymbol{v}_2^* + \cdots + b_{nj}\boldsymbol{v}_n^*)(\boldsymbol{v}_i) = b_{1j}\boldsymbol{v}_1^*(\boldsymbol{v}_i) + b_{2j}\boldsymbol{v}_2^*(\boldsymbol{v}_i) + \cdots + b_{nj}\boldsymbol{v}_n^*(\boldsymbol{v}_i) = b_{ij}$ に写るため, $b_{ij} = a_{ji}$ である. 従って, 次の命題が示された.

命題 5.15 線型写像 $f : V \to W$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ に関する表現行列を A とし, これらの基底の双対基底 $\{\boldsymbol{v}_1^*, \boldsymbol{v}_2^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*\}$, $\{\boldsymbol{w}_1^*, \boldsymbol{w}_2^*, \ldots, \boldsymbol{w}_m^*\}$ に関する f^* の表現行列は A の転置行列に一致する.

この結果と (5.14) から $\operatorname{rank} {}^tA = \operatorname{rank} A$ が再び示されたことになる.

演習 5.16 V, W はそれぞれ $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ を基底とするベクトル空間とし, $\{\boldsymbol{v}_1^*, \boldsymbol{v}_2^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*\}$, $\{\boldsymbol{w}_1^*, \boldsymbol{w}_2^*, \ldots, \boldsymbol{w}_m^*\}$ をこれらの基底の双対基底とする. 双線型写像 $F : V \times W \to \boldsymbol{K}$ に対し, $F(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_j)$ を (i, j)-成分にもつ $n \times m$ 行列を G とするとき, 以下の問に答えよ.

1) $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$, $\{\boldsymbol{v}_1^*, \boldsymbol{v}_2^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*\}$ に関する $F^l : W \to V^*$ の表現行列は G であり, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{w}_1^*, \boldsymbol{w}_2^*, \ldots, \boldsymbol{w}_m^*\}$ に関する $F^r : V \to W^*$ の表現行列は ${}^tG$ であることを示せ.

2) F が非退化であるためには, $m = n$ であり, G が正則行列であることが必要十分であることを示せ.

演習 5.17 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V の *2* 組の基底とし, $\{\boldsymbol{u}_1^*, \boldsymbol{u}_2^*, \ldots, \boldsymbol{u}_n^*\}$, $\{\boldsymbol{v}_1^*, \boldsymbol{v}_2^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*\}$ をそれぞれの双対基底とする. $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ から $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ への基底の変換行列を P とするとき, $\{\boldsymbol{u}_1^*, \boldsymbol{u}_2^*, \ldots, \boldsymbol{u}_n^*\}$ から $\{\boldsymbol{v}_1^*, \boldsymbol{v}_2^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*\}$ への基底の変換行列は ${}^tP^{-1}$ であることを示せ.

6 外積と行列式

この節では, まず「商空間」,「自由ベクトル空間」という概念を定義して準備をした後,「n 次外積巾」と呼ばれる概念を導入する. これを用いることにより, 行列式を定義して基本的な性質を示す.

V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間, W をその部分空間とする. 各 $\boldsymbol{v} \in V$ に対し, $S(\boldsymbol{v})$ を $S(\boldsymbol{v}) = \{\boldsymbol{v}' \in V \,|\, \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v} \in W\}$ で定められる V の部分集合とする.

命題 6.1 *1)* $\boldsymbol{v} \in W$ ならば $S(\boldsymbol{v}) = W$ であり, とくに $S(\boldsymbol{0}) = W$ である.

2) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し, $\boldsymbol{v} \in S(\boldsymbol{v})$ である.

3) $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対し, $S(\boldsymbol{v}) = S(\boldsymbol{w})$ であるためには $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in W$ であることが必要十分である.

4) $S(\boldsymbol{v}) \neq S(\boldsymbol{w})$ ならば $S(\boldsymbol{v}) \cap S(\boldsymbol{w})$ は空集合である.

証明 1) $\boldsymbol{v}' \in V$ に対して $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v})$ だから, $\boldsymbol{v} \in W$ ならば $\boldsymbol{v}' \in W$ であるためには $\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v} \in W$, すなわち $\boldsymbol{v}' \in S(\boldsymbol{v})$ であることが必要十分である.

2) $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \in W$ だから $\boldsymbol{v} \in S(\boldsymbol{v})$.

3) $S(\boldsymbol{v}) = S(\boldsymbol{w})$ とすると 2) より $\boldsymbol{v} \in S(\boldsymbol{v}) = S(\boldsymbol{w})$ だから $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in W$ である. 逆に $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in W$ と仮定すると, $\boldsymbol{v}' \in V$ に対して, $\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})$, $\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})$ だから $\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v} \in W$ であるためには $\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{w} \in W$ であることが必要十分である. すなわち, $\boldsymbol{v}' \in S(\boldsymbol{v})$ であるためには $\boldsymbol{v}' \in S(\boldsymbol{w})$ であることが必要十分である.

4) もし $\boldsymbol{v}' \in S(\boldsymbol{v}) \cap S(\boldsymbol{w})$ となる $\boldsymbol{v}'$ があれば, $\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v} \in W$ かつ $\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{w} \in W$ が成り立つため $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}) \in W$ が得られる. 従って, 3) により $S(\boldsymbol{v}) = S(\boldsymbol{w})$ となる. □

$S(\boldsymbol{v})$ の形の V の部分集合全体よりなる集合を V/W で表し, V/W に $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間としての構造を次のように定める; $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V/W$, $r \in \boldsymbol{K}$ に対して $\boldsymbol{x} = S(\boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{y} = S(\boldsymbol{w})$ となる $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ を選び, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = S(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$, $r\boldsymbol{x} = S(r\boldsymbol{v})$ により加法, スカラー倍を定める. $\boldsymbol{x} = S(\boldsymbol{v}) = S(\boldsymbol{v}')$, $\boldsymbol{y} = S(\boldsymbol{w}) = S(\boldsymbol{w}')$ とすると, 上の命題から $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}' \in W$ だから $(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{w}') = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') + (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}') \in W$, $r\boldsymbol{v} - r\boldsymbol{v}' = r(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') \in W$ である. 再び上の命題を用いると $S(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = S(\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{w}')$, $S(r\boldsymbol{v}) = S(r\boldsymbol{v}')$ が得られるため, 上の $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, $r\boldsymbol{x}$ の定義は $\boldsymbol{x} = S(\boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{y} = S(\boldsymbol{w})$ となる $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ の選び方に依存しない.

問 6.2 上の定義により, 確かに V/W は $S(\boldsymbol{0}) = W$ を零ベクトルとする $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間になっていることを示せ.

写像 $p : V \to V/W$ を $p(\boldsymbol{v}) = S(\boldsymbol{v})$ で定めると, V/W の要素はすべて $S(\boldsymbol{v})$ という形をしていることから p は上への写像であり, V/W の加法とスカラー倍の定義からただちに p は線型写像であることがわかる.

上のように定めたベクトル空間 V/W を V の部分空間 W による商ベクトル空間と呼び, 線型写像 p を商写像という.

命題 6.3 *$\operatorname{Ker} p = W$ である.*

証明 p の定義から $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} p$ であるためには $S(\boldsymbol{v}) = S(\boldsymbol{0})$ であることが必要十分である. さらに (6.1) から $S(\boldsymbol{v}) = S(\boldsymbol{0})$ は $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{0} \in W$ と同値である. □

次の命題は重要である.

命題 6.4 *$f : V \to U$ を線型写像とする. $\operatorname{Ker} f$ が W を含めば, 線型写像 $\bar{f} : V/W \to U$ で $\bar{f} \circ p = f$ を満たすものがただ 1 つ存在する.*

証明 線型写像 $\bar{f} : V/W \to U$ を次のように定義する; $\boldsymbol{x} \in V/W$ に対して $\boldsymbol{x} = S(\boldsymbol{v})$ となる $\boldsymbol{v} \in V$ を選び, $\bar{f}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{v})$ と定める. $\boldsymbol{x} = S(\boldsymbol{v}) = S(\boldsymbol{v}')$ とすると $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' \in W$ だから, 仮定により $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' \in \operatorname{Ker} f$ である. 従って, $f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}')$ となるため $\bar{f}(\boldsymbol{x})$ の定義は $\boldsymbol{x} = S(\boldsymbol{v})$ となる $\boldsymbol{v}$ の選び方に依存しない. このように定めた写像 $\bar{f}$ が線型写像になることは, V/W の加法とスカラー倍の定義から容易に確かめられる. 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して, $\bar{f}$ の定義から $\bar{f} \circ p(\boldsymbol{v}) = \bar{f}(p(\boldsymbol{v})) = \bar{f}(S(\boldsymbol{v})) = f(\boldsymbol{v})$ となるため $\bar{f} \circ p = f$ である. また, $f' : V/W \to U$ も $f' \circ p = f$ を満たせば, 任意の $\boldsymbol{x} \in V/W$ に対して $\boldsymbol{x} = S(\boldsymbol{v})$ となる $\boldsymbol{v} \in V$ を選ぶと $f'(\boldsymbol{x}) = f'(S(\boldsymbol{v})) = f'(p(\boldsymbol{v})) = f' \circ p(\boldsymbol{v}) = \bar{f} \circ p(\boldsymbol{v}) = \bar{f}(p(\boldsymbol{v})) = \bar{f}(S(\boldsymbol{v})) = \bar{f}(\boldsymbol{x})$ だから $f' = \bar{f}$ である. □

V を必ずしも有限次元ではないベクトル空間とするとき, V の基底は次のように定義される.

定義 6.5 *V の部分集合 B が次の 2 つの条件を満たすとき, B を V の基底という.*

1) B から相異なる有限個のベクトルを選べば, それらはつねに 1 次独立である.

2) V の任意のベクトルは B の有限個のベクトルの 1 次結合で表される.

必ずしも有限次元ではないベクトル空間にも, 上の意味での基底が存在することが知られているが, この事実は本書では用いないし, 証明には線型代数以外の知識が必要なので, ここでは証明は与えない.

集合 S に対し, S を基底とする $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 $F(S)$ を以下できちんと構成するが, 大ざっぱにいって $F(S)$ は有限個の S の要素の形式的な 1 次結合 $r_1s_1+r_2s_2+\cdots+r_ks_k$ 全体からなる集合のようなもので, 定義 5.1 の (i) から (iiiv) が成り立つようにしたものである.

$F(S)$ の**構成**: $F(S)$ は写像 $\boldsymbol{v}:S\to\boldsymbol{K}$ で $\boldsymbol{v}(s)\neq 0$ となる $s\in S$ は有限個しかないもの全体からなる集合であり, $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in F(S)$ と $r\in\boldsymbol{K}$ に対して和 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$, スカラー倍 $r\boldsymbol{v}$ はそれぞれ $(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})(s)=\boldsymbol{v}(s)+\boldsymbol{w}(s)$, $(r\boldsymbol{v})(s)=r\boldsymbol{v}(s)$ で定義される写像である. $\boldsymbol{v}(s)\neq 0$ または $\boldsymbol{w}(s)\neq 0$ を満たす $s\in S$ は有限個しかないため, $(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})(s)\neq 0$, $(r\boldsymbol{v})(s)\neq 0$ を満たす s は有限個である. 従って, $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w},r\boldsymbol{v}\in F(S)$ である. また, S のすべての要素を 0 に写す写像は $F(S)$ に属するが, これを $\boldsymbol{0}$ で表すことにする. このように定めた加法とスカラー倍により $F(S)$ が $\boldsymbol{0}$ を零ベクトルとする $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間になることが容易に確かめられる.

$s\in S$ に対し, $\boldsymbol{e}_s:S\to\boldsymbol{K}$ を $\boldsymbol{e}_s(t)=\begin{cases}1 & s=t\\ 0 & s\neq t\end{cases}$ で定めると $\boldsymbol{e}_s\in F(S)$ であるが次の命題が成り立つ.

命題 6.6 *1)* $\boldsymbol{v}\in F(S)$ *に対し,* $\boldsymbol{v}(s)\neq 0$ *を満たす* $s\in S$ *の全体を* $\{s_1,s_2,\dots,s_k\}$ *(*$s_1,s_2,\dots,s_k$ *は相異なる) とすると* $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(s_1)\boldsymbol{e}_{s_1}+\boldsymbol{v}(s_2)\boldsymbol{e}_{s_2}+\cdots+\boldsymbol{v}(s_k)\boldsymbol{e}_{s_k}$ *である.*

2) $s_1,s_2,\dots,s_k$ *が相異なる* S *の要素ならば* $\boldsymbol{e}_{s_1},\boldsymbol{e}_{s_2},\dots,\boldsymbol{e}_{s_k}$ *は 1 次独立である.*

証明 1) $t\in S$ に対し, $t\neq s_1,s_2,\dots,s_k$ ならば $\boldsymbol{v}(t)=0=\boldsymbol{e}_{s_i}(t)$ $(i=1,2,\dots,k)$ だから $(\boldsymbol{v}(s_1)\boldsymbol{e}_{s_1}+\boldsymbol{v}(s_2)\boldsymbol{e}_{s_2}+\cdots+\boldsymbol{v}(s_k)\boldsymbol{e}_{s_k})(t)=\boldsymbol{v}(s_1)\boldsymbol{e}_{s_1}(t)+\boldsymbol{v}(s_2)\boldsymbol{e}_{s_2}(t)+\cdots+\boldsymbol{v}(s_k)\boldsymbol{e}_{s_k}(t)=0=\boldsymbol{v}(t)$ であり, $t=s_i$ ならば $(\boldsymbol{v}(s_1)\boldsymbol{e}_{s_1}+\boldsymbol{v}(s_2)\boldsymbol{e}_{s_2}+\cdots+\boldsymbol{v}(s_k)\boldsymbol{e}_{s_k})(t)=\boldsymbol{v}(s_1)\boldsymbol{e}_{s_1}(s_i)+\boldsymbol{v}(s_2)\boldsymbol{e}_{s_2}(s_i)+\cdots+\boldsymbol{v}(s_k)\boldsymbol{e}_{s_k}(s_i)=\boldsymbol{v}(s_i)=\boldsymbol{v}(t)$ である. 従って任意の $t\in S$ に対して $(\boldsymbol{v}(s_1)\boldsymbol{e}_{s_1}+\boldsymbol{v}(s_2)\boldsymbol{e}_{s_2}+\cdots+\boldsymbol{v}(s_k))(t)=\boldsymbol{v}(t)$ だから $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(s_1)\boldsymbol{e}_{s_1}+\boldsymbol{v}(s_2)\boldsymbol{e}_{s_2}+\cdots+\boldsymbol{v}(s_k)\boldsymbol{e}_{s_k}$ である.

2) $r_1\boldsymbol{e}_{s_1}+r_2\boldsymbol{e}_{s_2}+\cdots+r_k\boldsymbol{e}_{s_k}=\boldsymbol{0}$ $(r_1,r_2,\dots,r_k\in\boldsymbol{K})$ とすると, 各 $i=1,2,\dots,k$ に対して $(r_1\boldsymbol{e}_{s_1}+r_2\boldsymbol{e}_{s_2}+\cdots+r_k\boldsymbol{e}_{s_k})(s_i)=\boldsymbol{0}(s_i)=0$ であるが, この左辺は $r_1\boldsymbol{e}_{s_1}(s_i)+r_2\boldsymbol{e}_{s_2}(s_i)+\cdots+r_k\boldsymbol{e}_{s_k}(s_i)=r_i$ に等しいため, $r_1=r_2=\cdots=r_k=0$ である. □

上の結果により, $F(S)$ は $\{e_s|\,s\in S\}$ を基底とするベクトル空間である. 写像 $\iota:S\to F(S)$ を $\iota(s)=\boldsymbol{e}_s$ で定めれば, ι は明らかに 1 対 1 写像である.

命題 6.7 V *を* $\boldsymbol{K}$ *上のベクトル空間とし,* $\mathrm{Map}(S,V)$ *で* S *から* V *への写像全体からなる集合を表す. 写像* $\rho:\mathrm{Hom}(F(S),V)\to\mathrm{Map}(S,V)$ *を* $\rho(f)=f\circ\iota$ *で定めれば* ρ *は 1 対 1 上への写像である.*

証明 $\rho(f)=\rho(g)$ $(f,g\in\mathrm{Hom}(F(S),V))$ とすると, 任意の $s\in S$ に対して, $f(\boldsymbol{e}_s)=g(\boldsymbol{e}_s)$ である. 任意の $\boldsymbol{v}\in F(S)$ は上の命題から $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(s_1)\boldsymbol{e}_{s_1}+\boldsymbol{v}(s_2)\boldsymbol{e}_{s_2}+\cdots+\boldsymbol{v}(s_k)\boldsymbol{e}_{s_k}$ の形に表されるため, $f(\boldsymbol{v})=f(\boldsymbol{v}(s_1)\boldsymbol{e}_{s_1}+\boldsymbol{v}(s_2)\boldsymbol{e}_{s_2}+\cdots+\boldsymbol{v}(s_k)\boldsymbol{e}_{s_k})=\boldsymbol{v}(s_1)f(\boldsymbol{e}_{s_1})+\boldsymbol{v}(s_2)f(\boldsymbol{e}_{s_2})+\cdots+\boldsymbol{v}(s_k)f(\boldsymbol{e}_{s_k})=\boldsymbol{v}(s_1)g(\boldsymbol{e}_{s_1})+\boldsymbol{v}(s_2)g(\boldsymbol{e}_{s_2})+\cdots+\boldsymbol{v}(s_k)g(\boldsymbol{e}_{s_k})=g(\boldsymbol{v}(s_1)\boldsymbol{e}_{s_1}+\boldsymbol{v}(s_2)\boldsymbol{e}_{s_2}+\cdots+\boldsymbol{v}(s_k)\boldsymbol{e}_{s_k})=g(\boldsymbol{v})$ だから $f=g$ である.

また, 写像 $\varphi:S\to V$ が与えられたとき, $f:F(S)\to V$ を $f(\boldsymbol{v})=\sum\limits_{s\in S}\boldsymbol{v}(s)\boldsymbol{e}_s$ で定める. ここで, 和の記号 $\sum\limits_{s\in S}$ は S の要素全体にわたる和を表すが, $\boldsymbol{v}\neq 0$ を満たす $s\in S$ は有限個しかないため右辺は有限個のベクトルの和である. すなわち, $\boldsymbol{v}(s)\neq 0$ を満たす $s\in S$ の全体を $\{s_1,s_2,\dots,s_k\}$ $(s_1,s_2,\dots,s_k$ は相異なる) とすれば $f(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}(s_1)\varphi(s_1)+\boldsymbol{v}(s_2)\varphi(s_2)+\cdots+\boldsymbol{v}(s_k)\varphi(s_k)$ ($\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ のときは $f(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ と定める) という意味である. このとき, f は線型写像である. 実際 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in F(S)$, $r\in\boldsymbol{K}$ に対し, $f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\sum\limits_{s\in S}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})(s)\boldsymbol{e}_s=\sum\limits_{s\in S}(\boldsymbol{v}(s)+\boldsymbol{w}(s))\boldsymbol{e}_s=\sum\limits_{s\in S}(\boldsymbol{v}(s)\boldsymbol{e}_s+\boldsymbol{w}(s)\boldsymbol{e}_s)=\sum\limits_{s\in S}\boldsymbol{v}(s)\boldsymbol{e}_s+\sum\limits_{s\in S}\boldsymbol{w}(s)\boldsymbol{e}_s=f(\boldsymbol{v})+f(\boldsymbol{w})$, $f(r\boldsymbol{v})=\sum\limits_{s\in S}(r\boldsymbol{v})(s)\boldsymbol{e}_s=\sum\limits_{s\in S}r\boldsymbol{v}(s)\boldsymbol{e}_s=r\sum\limits_{s\in S}\boldsymbol{v}(s)\boldsymbol{e}_s=rf(\boldsymbol{v})$. さらに, 任意の $s\in S$ に対して $\boldsymbol{e}_s(t)\neq 0$ となる $t\in S$ は $t=s$ だけで, $\boldsymbol{e}_s(s)=1$ だから $f\circ\iota(s)=f(\boldsymbol{e}_s)=\varphi(s)$ である. 従って, $\rho(f)=f\circ\iota=\varphi$ が成り立つ. □

ι により s と $\boldsymbol{e}_s$ を同一視して, $r_1\boldsymbol{e}_{s_1}+r_2\boldsymbol{e}_{s_2}+\cdots+r_k\boldsymbol{e}_{s_k}$ を $r_1s_1+r_2s_2+\cdots+r_ks_k$ で表せば $F(S)$ は S を基底とするベクトル空間であるといえる. すなわち $F(S)$ の任意のベクトルは $r_1s_1+r_2s_2+\cdots+r_ks_k$ $(s_1,s_2,\ldots,s_k\in S)$ の形に表せ, $s_1,s_2,\ldots,s_k$ が相異なる S の要素ならば, これらは1次独立である.

定義 6.8 集合 S に対し, $F(S)$ を S で生成される自由ベクトル空間という.

ここでいう「自由」とは S の要素から「自由に」1次結合をつくって得られるベクトル空間で, S の要素の間を束縛するような関係式がないというぐらいの意味である.

V^n により, ベクトル空間 V の n 個の直積集合 $\{(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n)|\,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n\in V\}$ を表す.

定義 6.9 *W をベクトル空間とするとき, $\mathrm{Alt}_n(V;W)$ により, 次の 3 つの条件を満たす写像 $F:V^n\to W$ 全体の集合を表す. このような写像 F を V から W への n 重交代線型写像という.*

1) $F(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{v}_i',\ldots,\boldsymbol{v}_n)=F(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_i,\ldots,\boldsymbol{v}_n)+F(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_i',\ldots,\boldsymbol{v}_n)$

2) $F(\boldsymbol{v}_1,\ldots,r\boldsymbol{v}_i,\ldots,\boldsymbol{v}_n)=rF(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_i,\ldots,\boldsymbol{v}_n)$

3) $\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_j$ となる $i<j$ があれば, $F(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n)=\boldsymbol{0}$

命題 6.10 *写像 $F:V^n\to W$ が上の 1) の条件を満たせば 3) の条件は次の $3'$) と同値である.*

$3'$) *$i<j$ のとき* $F(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\overset{i}{\check{\boldsymbol{v}}_j},\ldots,\overset{j}{\check{\boldsymbol{v}}_i},\ldots,\boldsymbol{v}_n)=-F(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\overset{i}{\check{\boldsymbol{v}}_i},\ldots,\overset{j}{\check{\boldsymbol{v}}_j},\ldots,\boldsymbol{v}_n)$

証明 3) が成り立てば $F(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_i\overset{i}{+}\boldsymbol{v}_j,\ldots,\boldsymbol{v}_i\overset{j}{+}\boldsymbol{v}_j,\ldots,\boldsymbol{v}_n)=\boldsymbol{0}$ である. 1), 3) を用いると, (左辺) は $F(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\overset{i}{\check{\boldsymbol{v}}_i},\ldots,\boldsymbol{v}_i\overset{j}{+}\boldsymbol{v}_j,\ldots,\boldsymbol{v}_n)+F(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\overset{i}{\check{\boldsymbol{v}}_j},\ldots,\boldsymbol{v}_i\overset{j}{+}\boldsymbol{v}_j,\ldots,\boldsymbol{v}_n)=F(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\overset{i}{\check{\boldsymbol{v}}_i},\ldots,\overset{j}{\check{\boldsymbol{v}}_i},\ldots,\boldsymbol{v}_n)+$ $F(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\overset{i}{\check{\boldsymbol{v}}_i},\ldots,\overset{j}{\check{\boldsymbol{v}}_j},\ldots,\boldsymbol{v}_n)+F(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\overset{i}{\check{\boldsymbol{v}}_j},\ldots,\overset{j}{\check{\boldsymbol{v}}_i},\ldots,\boldsymbol{v}_n)+F(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\overset{i}{\check{\boldsymbol{v}}_j},\ldots,\overset{j}{\check{\boldsymbol{v}}_j},\ldots,\boldsymbol{v}_n)=$ $F(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\overset{i}{\check{\boldsymbol{v}}_i},\ldots,\overset{j}{\check{\boldsymbol{v}}_j},\ldots,\boldsymbol{v}_n)+F(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\overset{i}{\check{\boldsymbol{v}}_j},\ldots,\overset{j}{\check{\boldsymbol{v}}_i},\ldots,\boldsymbol{v}_n)$ だから $3'$) が成り立つ. $3'$) を仮定すると, $\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_j$ $(i<j)$ ならば $F(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\overset{i}{\check{\boldsymbol{v}}_i},\ldots,\overset{j}{\check{\boldsymbol{v}}_j},\ldots,\boldsymbol{v}_n)=-F(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\overset{i}{\check{\boldsymbol{v}}_j},\ldots,\overset{j}{\check{\boldsymbol{v}}_i},\ldots,\boldsymbol{v}_n)=-F(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\overset{i}{\check{\boldsymbol{v}}_i},\ldots,\overset{j}{\check{\boldsymbol{v}}_j},\ldots,\boldsymbol{v}_n)$ だから $2F(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n)=\boldsymbol{0}$ となり, $F(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n)=\boldsymbol{0}$ が得られる. $\square$

命題 6.11 *$F\in\mathrm{Alt}_n(V;W)$ とする. $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n\in V$ が1次従属ならば*

$$F(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n)=\boldsymbol{0}.$$

証明 $\boldsymbol{v}_i=\sum_{j\neq i}r_j\boldsymbol{v}_j$ の形に表される $\boldsymbol{v}_i$ があるから

$$F(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_i,\ldots,\boldsymbol{v}_n)=F(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\sum_{j\neq i}r_j\boldsymbol{v}_j,\ldots,\boldsymbol{v}_n)=\sum_{j\neq i}r_jF(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\overset{i}{\check{\boldsymbol{v}}_j},\ldots,\boldsymbol{v}_n)=\boldsymbol{0}.$$

$\square$

さて, $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 U と写像 $\eta:V^n\to U$ について, 次の性質 $(*)$ を考える.

$(*)$ 任意のベクトル空間 W に対し, 対応 $f\mapsto f\circ\eta$ によって定められる写像 $\mathrm{Hom}(U,W)\to\mathrm{Alt}_n(V;W)$ は1対1上への写像である.

ベクトル空間 U と写像 $\eta:V^n\to U$ が上の性質をもてば, U の恒等写像 $1_U\in\mathrm{Hom}(U,U)$ は $\eta=1_U\circ\eta\in\mathrm{Alt}_n(V;U)$ に対応するため, η 自身は n 重交代線型写像である.

命題 6.12 *$\eta_1:V_1^n\to U_1$, $\eta_2:V_2^n\to U_2$ がともに性質 $(*)$ をもつとする. 線型写像 $f:V_1\to V_2$ に対し, 線型写像 $\hat{f}:U_1\to U_2$ で, 任意の $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n)\in V_1^n$ に対して $\hat{f}\circ\eta_1(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n)=\eta_2(f(\boldsymbol{v}_1),f(\boldsymbol{v}_2),\ldots,f(\boldsymbol{v}_n))$ を満たすものがただ 1 つある.*

証明 $F : V_1^n \to U_2$ を $F(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \eta_2(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n))$ で定めれば, η_2 が n 重交代線型写像だから F もそうである. η_1 が性質 $(*)$ をもつことから $\hat{f}\circ\eta_1 = F$ を満たす線型写像 $\hat{f} : U_1 \to U_2$ がただ 1 つある. □

命題 6.13 $\eta_1 : V_1^n \to U_1$, $\eta_2 : V_2^n \to U_2$, $\eta_3 : V_3^n \to U_3$ が性質 $(*)$ をもつとし, $f : V_1 \to V_2$, $g : V_2 \to V_3$ を線型写像とする.

1) $\widehat{g\circ f} = \hat{g}\circ\hat{f} : U_1 \to U_3$ *が成り立つ.*

2) 1_{V_1} *を* V_1 *の恒等写像とするとき,* $\hat{1}_{V_1} : U_1 \to U_1$ *は* U_1 *の恒等写像* 1_{U_1} *に一致する.*

3) f *が同型写像ならば* $\hat{f}$ *も同型写像である.*

証明 1) 任意の $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \in V_1^n$ に対して $(\hat{g}\circ\hat{f})\circ\eta_1(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \hat{g}\circ\eta_2(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)) =$ $\eta_3(g\circ f(\boldsymbol{v}_1)), \ldots, g\circ f(\boldsymbol{v}_n))) = \widehat{g\circ f}\circ\eta_1(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ が成り立つため (6.12) から $\widehat{g\circ f} = \hat{g}\circ\hat{f}$ である.

2) 任意の $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \in V_1^n$ に対して $1_{U_1}\circ\eta_1(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \eta_1(1_{V_1}(\boldsymbol{v}_1), \ldots, 1_{V_1}(\boldsymbol{v}_n)) = \hat{1}_{V_1}\circ\eta_1(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ だから $\hat{1}_{V_1} = 1_{U_1}$ である.

3) $g : V_2 \to V_1$ を f の逆写像とすれば, $g\circ f = 1_{V_1}$, $f\circ g = 1_{V_2}$ だから 1), 2) から $\hat{g}\circ\hat{f} = \widehat{g\circ f} = \hat{1}_{V_1} = 1_{U_1}$, $\hat{f}\circ\hat{g} = \widehat{f\circ g} = \hat{1}_{V_2} = 1_{U_2}$. 従って, $\hat{f}$ は同型写像で $\hat{g}$ はその逆写像である. □

ベクトル空間 V に対してベクトル空間 U と線型写像 $\eta : V^n \to U$ で, 性質 $(*)$ をもつものを構成する. V^n で生成される自由ベクトル空間 $F(V^n)$ を考え,

$$\iota(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}'_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) - \iota(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) - \iota(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$$
$$\iota(\boldsymbol{v}_1, \ldots, r\boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) - r\iota(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$$
$$\iota(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \quad (\text{ただし } \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_j)$$

という形の $F(V^n)$ のベクトル全体で生成される部分空間を R とする. U を R による $F(V^n)$ の商空間 $F(V^n)/R$ とし, η を $\iota : V^n \to F(V^n)$ と商写像 $p : F(V^n) \to F(V^n)/R$ の合成写像とする.

このように定義した U と η が性質 $(*)$ を満たすことをみるためにベクトル空間 W を任意にとる. $F \in \mathrm{Alt}_n(V; W)$ に対し, $F \in \mathrm{Map}(V^n, W)$ とみなして (6.7) を用いると, 線型写像 $\bar{f} : F(V^n) \to W$ で $\bar{f}\circ\iota = F$ を満たすものがただ 1 つある. $F \in \mathrm{Alt}_n(V; W)$ だから $\bar{f}(\iota(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}'_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) - \iota(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) - \iota(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n))$
$= \bar{f}\circ\iota(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}'_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) - \bar{f}\circ\iota(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) - \bar{f}\circ\iota(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$
$= F(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}'_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) - F(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) - F(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{0}$,
$\bar{f}(\iota(\boldsymbol{v}_1, \ldots, r\boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) - r\iota(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n))$
$= \bar{f}\circ\iota(\boldsymbol{v}_1, \ldots, r\boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) - r\bar{f}\circ\iota(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$
$= F(\boldsymbol{v}_1, \ldots, r\boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) - rF(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{0}$,
$\bar{f}(\iota(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_n)) = \bar{f}\circ\iota(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = F(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{0}$ (ただし $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_j$) である. 従って, $\bar{f}$ は R を生成するベクトルを零ベクトルに写すため $\mathrm{Ker}\,\bar{f}$ は R を含む. (6.4) を商写像 $p : F(V^n) \to F(V^n)/R$ と $\bar{f}$ に対して用いると, 線型写像 $f : U = F(V^n)/R \to W$ で $f\circ p = \bar{f}$ を満たすものがただ 1 つあることがわかる. このとき, $f\circ\eta = f\circ p\circ\iota = \bar{f}\circ\iota = F$ である. また, 線型写像 $f, g : U \to W$ が $f\circ\eta = g\circ\eta = F$ を満たすとすれば, $(f\circ p)\circ\iota = (g\circ p)\circ\iota$ だから (6.7) により $f\circ p = g\circ p$ であり, p は上への写像だから (5.3) の 1) から $f = g$ が得られる. 以上から U と η は性質 $(*)$ を満たす.

以後, このように構成した U を $E_n(V)$ で表し, V の n 重外積巾といい, 上の η を η_V^n と表すことにする.

注意 6.14 $n = 1$ の場合, $\mathrm{Alt}_1(V; W) = \mathrm{Hom}(V, W)$ だから V の恒等写像 1_V は性質 $(*)$ をもつ. 従って, *(6.13)* の *3)* を $V_1 = V_2 = V$, $U_1 = V$, $U_2 = E_1(V)$, $f = \eta_1 = 1_V$, $\eta_2 = \eta_V^1$ に対して適用すれば, $\hat{f} = \eta_V^1$ となるため $\eta_V^1 : V \to E_1(V)$ は同型写像である. また $n = 0$ の場合, 便宜上 $V^0 = \boldsymbol{K}$, $\mathrm{Alt}_0(V; W) = \mathrm{Hom}(\boldsymbol{K}, W)$ と定め, $E_0(V) = \boldsymbol{K}$, $\eta_V^0 : V^0 \to E_0(V)$ は $\boldsymbol{K}$ の恒等写像 $1_{\boldsymbol{K}}$ であるとすれば, η_V^0 は明らかに性質 $(*)$ をもつ.

命題 6.15 *1)* $E_n(V)$ *は* η_V^n *の像により生成される.*

2) $n > \dim V$ *ならば* $E_n(V)$ *は零ベクトルだけからなるベクトル空間である.*

証明 1) 商写像 $p: F(V^n) \to F(V^n)/R = E_n(V)$ は上への写像だから, 任意の $\boldsymbol{x} \in E_n(V)$ に対して $p(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{y} \in F(V^n)$ がとれる. (6.6) から $\boldsymbol{y}$ は $\iota: V^n \to F(V^n)$ の像の１次結合で表され, p は線型写像だから $\boldsymbol{x}$ は η_V^n の像の１次結合で表されることになる.

2) $n > \dim V$ ならば V の n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ はつねに１次従属である. はじめに述べたように, η_V^n 自身は n 重交代線型写像写像だから (6.11) により, $\eta_V^n(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \mathbf{0}$ である. 従って, 1) から $E_n(V)$ は零ベクトル以外のベクトルは含みえない. □

定義 6.16 *2*つの $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V, W に対し, 直積集合 $V \times W$ に加法, スカラー倍を $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$, $r(v_1, w_1) = (rv_1, rw_2)$ で定義して得られる $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間を $V \oplus W$ で表し, V と W の直和という.

注意 6.17 写像 $i_1 : V \to V \oplus W$, $i_2 : W \to V \oplus W$ を $i_1(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \mathbf{0})$, $i_2(\boldsymbol{w}) = (\mathbf{0}, \boldsymbol{w})$ で定めれば $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}, \mathbf{0}) + (\mathbf{0}, \boldsymbol{w})$ と "$(\boldsymbol{v}, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, \boldsymbol{w})$ ならば $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ かつ $\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$" が成り立つため, $V \oplus W$ は定義 *6.5* の意味で $\operatorname{Im} i_1$ と $\operatorname{Im} i_2$ の直和である. さらに i_1, i_2 は *1* 対 *1* の線型写像だから V と $\operatorname{Im} i_1$, W と $\operatorname{Im} i_2$ はそれぞれ同型である. これらのことから $V \oplus W$ も V と W の直和と呼んでもさしつかえないと考えられる.

命題 6.18 V, W はそれぞれ $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ を基底にもつベクトル空間であるとすると, $\{(\boldsymbol{v}_1, \mathbf{0}), (\boldsymbol{v}_2, \mathbf{0}), \ldots, (\boldsymbol{v}_n, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, \boldsymbol{w}_1), (\mathbf{0}, \boldsymbol{w}_2), \ldots, (\mathbf{0}, \boldsymbol{w}_m)\}$ は $V \oplus W$ の基底である. 従って, $\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$.

証明は容易なので読者にまかせる.

命題 6.19 写像 $\eta: (V \oplus \boldsymbol{K})^n \to E_n(V) \oplus E_{n-1}(V)$ *(*$n \geqq 1$*)* を

$$\eta((\boldsymbol{v}_1, r_1), \ldots, (\boldsymbol{v}_n, r_n)) = (\eta_V^n(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n), \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} r_j \eta_V^{n-1}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{j-1}, \boldsymbol{v}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n))$$

($n = 1$ のとき $\eta_V^0() = 1$ とする*)* で定めれば, η は性質 $(*)$ をもつ.

証明 ベクトル空間 W と $F \in \operatorname{Alt}_n(V \oplus \boldsymbol{K}; W)$ に対し, $F_1 : V^n \to W$, $F_2 : V^{n-1} \to W$ を

$$F_1(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = F((\boldsymbol{v}_1, 0), \ldots, (\boldsymbol{v}_n, 0)), \quad F_2(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{n-1}) = F((\mathbf{0}, 1), (\boldsymbol{w}_1, 0), \ldots, (\boldsymbol{w}_{n-1}, 0))$$

で定めれば, $F_1 \in \operatorname{Alt}_n(V; W)$, $F_2 \in \operatorname{Alt}_{n-1}(V; W)$ である. 従って, 線型写像 $f_1 : E_n(V) \to W$, $f_2 : E_{n-1}(V) \to W$ で $f_1 \circ \eta_V^n = F_1$, $f_2 \circ \eta_V^{n-1} = F_2$ を満たすものが１つずつ存在する. そこで, $f : E_n(V) \oplus E_{n-1}(V) \to W$ を $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f_1(\boldsymbol{x}) + f_2(\boldsymbol{y})$ で定めると, f は明らかに線型写像である. F が (6.9) の条件および (6.10) の条件 3′) を満たすため, $F((\boldsymbol{v}_1, r_1), (\boldsymbol{v}_2, r_2), \ldots, (\boldsymbol{v}_n, r_n)) = F((\boldsymbol{v}_1, 0) + r_1(\mathbf{0}, 1), (\boldsymbol{v}_2, 0) + r_2(\mathbf{0}, 1), \ldots, (\boldsymbol{v}_n, 0) + r_n(\mathbf{0}, 1))$
$= F((\boldsymbol{v}_1, 0), (\boldsymbol{v}_2, 0), \ldots, (\boldsymbol{v}_n, 0)) + \sum_{j=1}^{n} r_j F((\boldsymbol{v}_1, 0), \ldots, (\boldsymbol{v}_{j-1}, 0), (\mathbf{0}, 1), (\boldsymbol{v}_{j+1}, 0), \ldots, (\boldsymbol{v}_n, 0))$
$= F((\boldsymbol{v}_1, 0), \ldots, (\boldsymbol{v}_n, 0)) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} r_j F((\mathbf{0}, 1), (\boldsymbol{v}_1, 0), \ldots, (\boldsymbol{v}_{j-1}, 0), (\boldsymbol{v}_{j+1}, 0), \ldots, (\boldsymbol{v}_n, 0))$
となり, さらに F_1, F_2, f および η の定義から, この値は
$F_1(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} r_j F_2(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{j-1}, \boldsymbol{v}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$
$= f_1(\eta_V^n(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} r_j f_2(\eta_V^{n-1}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{j-1}, \boldsymbol{v}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n))$
$= f(\eta_V^n(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n), \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} r_j \eta_V^{n-1}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{j-1}, \boldsymbol{v}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n))$
$= f \circ \eta((\boldsymbol{v}_1, r_1), (\boldsymbol{v}_2, r_2), \ldots, (\boldsymbol{v}_n, r_n))$ に等しくなる. 従って, $F = f \circ \eta$ が成り立つ.

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ に対し, η の定義から $\eta((\boldsymbol{v}_1, 0), \ldots, (\boldsymbol{v}_n, 0)) = (\eta_V^n(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n), \mathbf{0})$ である. また, $\mathbf{0}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}$ は１次従属だから (6.11) により $\eta_V^n(\mathbf{0}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}) = \mathbf{0}$ であることに注意すると, $\eta((\mathbf{0}, 1), (\boldsymbol{v}_1, 0), \ldots, (\boldsymbol{v}_{n-1}, 0))$ $= (\mathbf{0}, \eta_V^{n-1}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}))$ が得られる. これら２つの等式と, $E_n(V)$, $E_{n-1}(V)$ はそれぞれ η_V^n, η_V^{n-1} の像で生成

されることから $E_n(V)\oplus E_{n-1}(V)$ は η の像で生成される．従って, 線型写像 $f,g:E_n(V)\oplus E_{n-1}(V)\to W$ が $f\circ\eta=g\circ\eta=F$ を満たせば $f=g$ である． □

上の結果と, $V_1=V_2=V\oplus\boldsymbol{K}$, $U_1=E_n(V\oplus\boldsymbol{K})$, $U_2=E_n(V)\oplus E_{n-1}(V)$, $\eta_1=\eta^n_{V\oplus\boldsymbol{K}}$, $\eta_2=\eta$, $f=(V\oplus\boldsymbol{K}$ の恒等写像) として (6.13) の 3) を用いると次のことがわかる．

系 6.19.1 $E_n(V\oplus\boldsymbol{K})$ と $E_n(V)\oplus E_{n-1}(V)$ は同型である．

負でない整数 m, n に対し「二項係数」$\binom{m}{n}$ を $n\leqq m$ ならば $\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}$, $n>m$ ならば $\binom{m}{n}=0$ (ただし $0!=1$ と約束する) で定義する．このとき, $\binom{m}{n}+\binom{m}{n-1}=\binom{m+1}{n}$ が成り立つことが容易に確かめられる．

定理 6.20 $\dim V=m$ ならば $\dim E_n(V)=\binom{m}{n}$ である．

証明 V の次元による帰納法で証明する．$\dim V=0$ の場合は $E_n(V)=\begin{cases}\boldsymbol{K} & n=0\\ \{\boldsymbol{0}\} & n>0\end{cases}$ だから主張が成り立つ．$\dim V\leqq m$ の場合に主張が成り立つと仮定する．$\dim V=m+1$ として V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_{m+1}\}$ を 1 組選び, $W=\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_m\rangle$ とおくと W は $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_m\}$ を基底とする m 次元部分空間である．写像 $f:W\oplus\boldsymbol{K}\to V$ を $f(\boldsymbol{w},r)=\boldsymbol{w}+r\boldsymbol{v}_{m+1}$ で定めると, (6.18) から f は基底を基底に写すため, 同型写像である．従って, (6.13) から $\hat{f}:E_n(W\oplus\boldsymbol{K})\to E_n(V)$ は同型写像である．さらに, (6.19.1), (6.18) および帰納法の仮定から $\dim E_n(V)=\dim E_n(W\oplus\boldsymbol{K})=\dim E_n(W)\oplus E_{n-1}(W)=\dim E_n(W)+\dim E_{n-1}(W)=\binom{m}{n}+\binom{m}{n-1}=\binom{m+1}{n}$ が得られる． □

$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n\in V$ に対し, $\eta^n_V(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n)=\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{v}_2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n$ とおくことにする．このとき, η^n_V が n 重交代線型写像であることから次の関係式が成り立つ．

1) $\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{v}'_i)\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_i\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n+\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}'_i\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n$

2) $\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge(r\boldsymbol{v}_i)\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n=r\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_i\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n$

3) $\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_j$ となる $i<j$ があれば, $\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{0}$

3′) $i<j$ のとき $\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\overset{i}{\check{\boldsymbol{v}}_j}\wedge\cdots\wedge\overset{j}{\check{\boldsymbol{v}}_i}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n=-\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\overset{i}{\check{\boldsymbol{v}}_i}\wedge\cdots\wedge\overset{j}{\check{\boldsymbol{v}}_j}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n$

命題 6.21 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_m\}$ が V の基底で, $n\leqq m$ ならば $\{\boldsymbol{v}_{i_1}\wedge\boldsymbol{v}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_{i_n}|1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_n\leqq m\}$ は $E_n(V)$ の基底である．

証明 $E_n(V)$ は $\boldsymbol{w}_1\wedge\boldsymbol{w}_2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{w}_n$ の形のベクトルで生成されるが, $\boldsymbol{w}_j=\sum_{i=1}^m a_{ij}\boldsymbol{v}_i$ とすれば, 上の関係式 1), 2) から $\boldsymbol{w}_1\wedge\boldsymbol{w}_2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{w}_n=(\sum_{i=1}^m a_{i1}\boldsymbol{v}_i)\wedge(\sum_{i=1}^m a_{i2}\boldsymbol{v}_i)\wedge\cdots\wedge(\sum_{i=1}^m a_{in}\boldsymbol{v}_i)=\sum_{1\leqq i_1,\dots,i_n\leqq m} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}\boldsymbol{v}_{i_1}\wedge\boldsymbol{v}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_{i_n}$ となる．さらに 3) の関係式から $i_1,\dots,i_n$ の中に同じものがあれば $\boldsymbol{v}_{i_1}\wedge\boldsymbol{v}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_{i_n}=\boldsymbol{0}$ であり, $i_1,\dots,i_n$ が相異なれば $i_1,\dots,i_n$ を小さい順に左から並べ直したものを $i'_1,\dots,i'_n$ とすれば 3′) により $\boldsymbol{v}_{i_1}\wedge\boldsymbol{v}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_{i_n}=\pm\boldsymbol{v}_{i'_1}\wedge\boldsymbol{v}_{i'_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_{i'_n}$ である．以上から $\{\boldsymbol{v}_{i_1}\wedge\boldsymbol{v}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_{i_n}|1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_n\leqq m\}$ は $E_n(V)$ を生成することがわかる．この集合の要素の個数は m 個のものから n 個選ぶ組合わせの数 $\binom{m}{n}$ 以下であり, 一方, (6.19.1) から dim $E_n(V)=\binom{m}{n}$ だから, この集合は 1 次独立である．従って, $\{\boldsymbol{v}_{i_1}\wedge\boldsymbol{v}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_{i_n}|1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_n\leqq m\}$ は $E_n(V)$ の基底である． □

以後, V は $\boldsymbol{K}$ 上の有限次元ベクトル空間であるとする．

定義 6.22 $f:V\to V$ を線型写像とするとき、*(6.12)* から線型写像 $\hat{f}:E_n(V)\to E_n(V)$ で, 任意の $(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n)\in V^n$ に対して $\hat{f}\circ\eta^n_V(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n)=\eta^n_V(f(\boldsymbol{v}_1),\dots,f(\boldsymbol{v}_n))$ を満たすものがただ *1* つあるが, $n=\dim V$ の場合, $\dim E_n(V)=\binom{n}{n}=1$ だから, $d\in\boldsymbol{K}$ で, すべての $\boldsymbol{x}\in E_n(V)$ について $\hat{f}(\boldsymbol{x})=d\boldsymbol{x}$ が成り立つようなものが, ただ *1* つ定まる．この値 d を f の行列式と呼び, $\det f$ で表すことにする．とくに $V=\boldsymbol{K}^n$ で f が n 次正方行列 A から定まる線型写像 *(*$f(\boldsymbol{v})=A\boldsymbol{v}$ *)* の場合, $\det f$ を $\det A$ で表して A の行列式という．

命題 6.23 *1)* $f, g : V \to V$ を線型写像とするとき, $\det(g \circ f) = (\det g)(\det f)$.
2) $1_V : V \to V$ を V の恒等写像とするとき, $\det 1_V = 1$.

証明 1) (6.13) の 1) から, 任意の $\boldsymbol{x} \in E_n(V)$ について $\det(g \circ f)\boldsymbol{x} = \widehat{g \circ f}(\boldsymbol{x}) = \hat{g} \circ \hat{f}(\boldsymbol{x}) = \hat{g}((\det f)\boldsymbol{x}) = (\det g)(\det f)\boldsymbol{x}$ となるため $\det(g \circ f) = (\det g)(\det f)$ である.
2) 上と同様に (6.13) の 2) から, $(\det 1_V)\boldsymbol{x} = \hat{1}_V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ が得られるため, $\det 1_V = 1$. □

系 6.23.1 *1)* A, B を n 次正方行列とするとき, $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.
2) $\det E_n = 1$.

命題 6.24 線型写像 $f : V \to V$ が同型写像であるためには $\det f \neq 0$ であることが必要十分である.

証明 $f : V \to V$ が同型写像ならば f^{-1} を逆写像とすれば, $f \circ f^{-1} = 1_V$ だから (6.23) から $(\det f)(\det f^{-1}) = \det(f \circ f^{-1}) = \det 1_V = 1$ となるため $\det f \neq 0$ である. V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を 1 組選ぶ. f が同型写像でないならば $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は 1 次従属だから (6.11) から

$$\hat{f}(\eta_V^n(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)) = \eta_V^n(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)) = \boldsymbol{0}$$

である. 一方, (6.21) から $\eta_V^n(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_n$ は $E_n(V)$ の基底になるため, $\det f = 0$ である. □

系 6.24.1 n 次正方行列 A が正則であるためには $\det A \neq 0$ であることが必要十分である. 従って A の *2* つの列で等しいものがあれば $\det A = 0$ である.

補題 6.25 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ をベクトル空間 V の基底とし, $1 \leqq i \leqq n$ を *1* つ固定する.
1) $f, g : V \to V$ は線型写像で, $j \neq i$ ならば $f(\boldsymbol{e}_j) = g(\boldsymbol{e}_j)$ が成り立つとき, $h : V \to V$ を $h(\boldsymbol{e}_j) = \begin{cases} f(\boldsymbol{e}_j) & j \neq i \\ f(\boldsymbol{e}_i) + g(\boldsymbol{e}_i) & j = i \end{cases}$ で定まる線型写像とすれば $\det h = \det f + \det g$ である.
2) 線型写像 $f : V \to V$ と $r \in \boldsymbol{K}$ に対して, $h : V \to V$ を $h(\boldsymbol{e}_j) = \begin{cases} f(\boldsymbol{e}_j) & j \neq i \\ rf(\boldsymbol{e}_i) & j = i \end{cases}$ で定まる線型写像とすれば $\det h = r \det f$ である.

証明 1) $(\det h)\eta_V^n(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = \hat{h}(\eta_V^n(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{e}_n)) = \eta_V^n(h(\boldsymbol{e}_1), \ldots, h(\boldsymbol{e}_i), \ldots, h(\boldsymbol{e}_n))$
$= \eta_V^n(f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_i) + g(\boldsymbol{e}_i), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)) = \eta_V^n(f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_i), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)) + \eta_V^n(f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, g(\boldsymbol{e}_i), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n))$
$= \eta_V^n(f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_i), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)) + \eta_V^n(g(\boldsymbol{e}_1), \ldots, g(\boldsymbol{e}_i), \ldots, g(\boldsymbol{e}_n))$
$= \hat{f}(\eta_V^n(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{e}_n)) + \hat{g}(\eta_V^n(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{e}_n))$
$= (\det f)\eta_V^n(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{e}_n) + (\det g)\eta_V^n(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = (\det f + \det g)\eta_V^n(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ であり $\eta_V^n(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ は $E_n(V)$ の基底になるため, $\det h = \det f + \det g$ である.
2) $(\det h)\eta_V^n(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = \hat{h}(\eta_V^n(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{e}_n)) = \eta_V^n(h(\boldsymbol{e}_1), \ldots, h(\boldsymbol{e}_i), \ldots, h(\boldsymbol{e}_n))$
$= \eta_V^n(f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, rf(\boldsymbol{e}_i), \ldots, h(\boldsymbol{e}_n)) = r\eta_V^n(f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_i), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)) = r\hat{f}(\eta_V^n(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{e}_n))$
$= r(\det f)\eta_V^n(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ だから, 上と同じ理由で $\det h = r \det f$ である. □

系 6.25.1 *1)* $\det(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_i', \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \det(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) + \det(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i', \ldots, \boldsymbol{v}_n)$
2) $\det(\boldsymbol{v}_1, \ldots, r\boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = r \det(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$