1　3次方程式

1.1　3次方程式の解の公式

x の 3 次式 $P(x) = x^3 - s_1x^2 + s_2x - s_3$ に対し,

$$y = x - \frac{s_1}{3}, \qquad t_2 = s_2 - \frac{s_1^2}{3}, \qquad t_3 = \frac{2s_1^3}{27} - \frac{s_1s_2}{3} + s_3, \qquad Q(y) = y^3 + t_2y - t_3$$

とおくと, $Q(y) = P(y + \frac{s_1}{3})$ だから $P(x) = 0$ の解を求めるには, $Q(y) = 0$ の解を求めればよい. $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおけば,

$$y^3 - 3uvy - u^3 - v^3 = (y - u - v)(y - u\omega - v\omega^2)(y - u\omega^2 - v\omega)$$

だから, $u^3 + v^3 = t_3$ と $uv = -\frac{t_2}{3}$ が成り立つような (u, v) の組を 1 組見つければ, $u + v$, $u\omega + v\omega^2$, $u\omega^2 + v\omega$ が $Q(y) = 0$ の 3 つの解になる. u^3, v^3 は 2 次方程式 $X^2 - t_3X - \frac{t_2^3}{27} = 0$ の 2 つの解だから, $D = t_3^2 + \frac{4t_2^3}{27}$ とおけば,

$$u^3 = \frac{1}{2}(t_3 + \sqrt{D}), \quad v^3 = \frac{1}{2}(t_3 - \sqrt{D}), \quad D = \frac{1}{27}(4s_1^3s_3 - s_1^2s_2^2 - 18s_1s_2s_3 + 4s_2^3 + 27s_3^2)$$

である. この D を 3 次式 $P(x)$ の判別式という. そこで $\frac{1}{2}(t_3 + \sqrt{D})$, $\frac{1}{2}(t_3 - \sqrt{D})$ の 3 乗根の 1 つをそれぞれ η, ζ' とする. $(\eta\zeta')^3 = -\frac{t_2^3}{27}$ だから $\omega^e\eta\zeta' = -\frac{t_2}{3}$ となる $e \in \{0, 1, 2\}$ が選べて, $\zeta = \omega^e\zeta'$ とおくと $Q(y) = 0$ の 3 つの解は, $\eta + \zeta$, $\eta\omega + \zeta\omega^2$, $\eta\omega^2 + \zeta\omega$ で与えられる. 従って, $P(x) = 0$ の 3 つの解 α, β, γ は

$$\alpha = \eta + \zeta + \frac{s_1}{3}, \qquad \beta = \eta\omega + \zeta\omega^2 + \frac{s_1}{3}, \qquad \gamma = \eta\omega^2 + \zeta\omega + \frac{s_1}{3}$$

で与えられる. さらに, このとき解と係数の関係から $(\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\alpha - \gamma)^2 = -27D$ だから, $P(x) = 0$ が重解をもつための必要十分条件は $D = 0$ が成り立つことである.

1.2　重解をもつ3次方程式

$t_2 \neq 0$ ならば $Q\left(-\frac{3t_3}{t_2}\right) = -\frac{27t_3}{t_2^3}D$, $Q\left(\frac{3t_3}{2t_2}\right) = \frac{27t_3}{8t_2^3}D$, $Q'\left(\frac{3t_3}{2t_2}\right) = \frac{27}{4t_2^2}D$ が成り立つことは容易に確かめられる. 従って,

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{-s_1^3 + 4s_1s_2 - 9s_3}{3s_2 - s_1^2}\right) &= -\frac{27(2s_3 - 9s_1s_2 + 27s_3)}{(3s_2 - s_1^2)^3}D \\
P\left(\frac{9s_3 - s_1s_2}{2(3s_2 - s_1^2)}\right) &= \frac{27(2s_3 - 9s_1s_2 + 27s_3)}{8(3s_2 - s_1^2)^3}D \\
P'\left(\frac{9s_3 + s_1s_2}{2(3s_2 - s_1^2)}\right) &= -\frac{3^6}{4(3s_2 - s_1^2)^3}D
\end{aligned}$$

が成り立つことに注意する.

$D = 0$ の場合, $t_2 \neq 0$ すなわち $s_1^2 \neq 3s_2$ ならば上の等式から $P(x) = 0$ は重解 $\frac{9s_3 - s_1s_2}{2(3s_2 - s_1^2)}$ と解 $\frac{-s_1^3 + 4s_1s_2 - 9s_3}{3s_2 - s_1^2}$ をもつ. $D = t_2 = 0$ の場合, この条件は $t_2 = t_3 = 0$ と同値であり, さらにこれは $s_2 = \frac{s_1^2}{3}$ かつ $s_3 = \frac{s_1^3}{27}$ と同値である. このとき $x = \frac{s_1}{3}$ が $P(x) = 0$ の三重解であり, 逆に $P(x) = 0$ が三重解 α をもてば解と係数の関係から $s_1 = 3\alpha$, $s_2 = 3\alpha^2$, $s_3 = \alpha^3$ が成り立つため, $s_2 = \frac{s_1^2}{3}$ かつ $s_3 = \frac{s_1^3}{27}$ である. 以上をまとめると,

定理 1.1 *3 次方程式 $x^3 - s_1x^2 + s_2x - s_3 = 0$ が重解をもつためには $4s_1^3s_3 - s_1^2s_2^2 - 18s_1s_2s_3 + 4s_2^3 + 27s_3^2 = 0$ が成り立つことが必要十分であり, $s_1^2 \neq 3s_2$ ならば $\frac{9s_3 - s_1s_2}{2(3s_2 - s_1^2)}$ が重解, $\frac{-s_1^3 + 4s_1s_2 - 9s_3}{3s_2 - s_1^2}$ がもう一つの解である. また, 三重解をもつためには $s_2 = \frac{s_1^2}{3}$ かつ $s_3 = \frac{s_1^3}{27}$ が成り立つことが必要十分であり, $\frac{s_1}{3}$ が三重解である.*

1.3 実係数 3 次方程式

s_1, s_2, s_3 がすべて実数の場合に $P(x)=0$ の実数解について調べる．

$D \geqq 0$ の場合, η, ζ をそれぞれ $\frac{1}{2}(t_3+\sqrt{D})$, $\frac{1}{2}(t_3-\sqrt{D})$ の実数の 3 乗根とすると $\eta\zeta$ と $-\frac{t_2}{3}$ はともに実数だから $\eta\zeta=-\frac{t_2}{3}$ が成り立つ．このとき α は $P(x)=0$ の実数解で, $\gamma=\bar{\beta}$ であり, $\beta-\gamma=(\eta-\zeta)\sqrt{3}i$ だから β と γ も実数になるのは $D=0$ の場合に限る．従って $D>0$ ならば, $P(x)=0$ は 1 つの実数解と 2 つの虚数解をもち, 実数解の符号は s_3 の符号と一致する．

$D=0$ の場合の解の様子は前節で述べたとおりであるが, 解はいずれも係数の分数式で表されるため, すべて実数である．

$D<0$ の場合, $\frac{1}{2}(t_3+\sqrt{D})$ と $\frac{1}{2}(t_3-\sqrt{D})$ は互いに共役な虚数だから η を $\frac{1}{2}(t_3+\sqrt{D})$ の 3 乗根の 1 つとすれば, $\frac{1}{2}(t_3-\sqrt{D})$ の 3 乗根の 1 つは $\bar{\eta}$ で与えられ, $\eta\bar{\eta}$ は実数の $-\frac{t_2^3}{27}$ の 3 乗根だから $\eta\bar{\eta}=-\frac{t_2}{3}$ である．従って $\zeta=\bar{\eta}$ と選べるため, $P(x)=0$ の 3 つの解はすべて実数になる．

次に $D<0$ の場合に $P(x)=0$ の解の符号を調べる．$s_3=0$ ならば, $D=\frac{1}{27}s_2^2(-s_1^2+4s_2)<0$ だから $s_2\neq 0$ かつ $s_1^2-4s_2>0$ である．0 と $x^2-s_1x+s_2=0$ の解が $P(x)=0$ の解になるため, $s_2<0$ ならば $P(x)=0$ は 0 の他に正の解と負の解をもち, $s_1>0$ かつ $s_2>0$ ならば $P(x)=0$ は 0 の他に 2 つの正の解をもち, $s_1<0$ かつ $s_2>0$ ならば $P(x)=0$ は 0 の他に 2 つの負の解をもつ．

$s_3\neq 0$ とする．$P'(x)=3x^2-2s_1x+s_2$ だから $\mu=\frac{1}{3}(s_1-\sqrt{-3t_2})$, $\nu=\frac{1}{3}(s_1+\sqrt{-3t_2})$ とおけば, $P(x)=0$ の解は区間 $(-\infty,\mu)$, (μ,ν), $(\nu,+\infty)$ にそれぞれ 1 つずつ実数解をもつ．従って $s_2\leqq 0$ ならば $P(x)=0$ は正の解と負の解をもち, $s_1<0$ かつ $s_2>0$ ならば $P(x)=0$ の 2 つの解は負で, $s_1>0$ かつ $s_2>0$ ならば $P(x)=0$ の 2 つの解は正である．さらに s_3 の符号を考えると, $P(x)=0$ の解の符号は以下の様になる．($D<0$ ならば $s_1=0$ かつ $s_2>0$ という場合はありえないことに注意する.)

s_1,s_2 の条件	s_3 の符号	正の解の個数	負の解の個数
$s_1>0$ かつ $s_2>0$	$s_3>0$	3	0
$s_1>0$ または $s_2\leqq 0$	$s_3<0$	2	1
$s_1<0$ または $s_2\leqq 0$	$s_3>0$	1	2
$s_1<0$ かつ $s_2>0$	$s_3<0$	0	3

2 4 次方程式

2.1 4 次方程式の解の公式

x の 4 次式 $P(x)=x^4-\sigma_1x^3+\sigma_2x^2-\sigma_3x+\sigma_4$ に対し,

$$y=x-\frac{\sigma_1}{4},\quad \tau_2=\sigma_2-\frac{3\sigma_1^2}{8},\quad \tau_3=\sigma_3+\frac{\sigma_1^3}{8}-\frac{\sigma_1\sigma_2}{2},\quad \tau_4=\sigma_4-\frac{3\sigma_1^4}{256}+\frac{\sigma_1^2\sigma_2}{16}-\frac{\sigma_1\sigma_3}{4},\quad Q(y)=y^4+\tau_2y^2-\tau_3y+\tau_4$$

とおくと, $Q(y)=P(y+\frac{\sigma_1}{4})$ だから $P(x)=0$ の解を求めるには, $Q(y)=0$ の解を求めればよい．

$$\begin{aligned}(y-u-v-w)&(y-u+v+w)(y+u-v+w)(y+u+v-w)\\ &=y^4-2(u^2+v^2+w^2)y^2-8uvwy+(u^2+v^2+w^2)^2-4(u^2v^2+v^2w^2+u^2w^2)\end{aligned}$$

だから $u^2+v^2+w^2=-\frac{\tau_2}{2}$, $uvw=\frac{\tau_3}{8}$, $u^2v^2+v^2w^2+u^2w^2=\frac{\tau_2^2}{16}-\frac{\tau_4}{4}$ が成り立つような (u,v,w) の組を 1 組見つければ, $u+v+w$, $u-v-w$, $-u+v-w$, $-u-v+w$ が $Q(y)=0$ の 4 つの解になる．

$$s_1=-\frac{\tau_2}{2},\quad s_2=\frac{\tau_2^2}{16}-\frac{\tau_4}{4},\quad s_3=\frac{\tau_3^2}{64},\quad R(X)=X^3-s_1X^2+s_2X-s_3$$

とおくと, u^2, v^2, w^2 は 3 次方程式 $R(X)=0$ の 3 つの解である.

$$t_2 = s_2 - \frac{s_1^2}{3}, \qquad t_3 = \frac{2s_1^3}{27} - \frac{s_1 s_2}{3} + s_3, \qquad D = t_3^2 + \frac{4t_2^3}{27}$$

とおき, $\frac{1}{2}(t_3+\sqrt{D})$, $\frac{1}{2}(t_3-\sqrt{D})$ の 3 乗根 η, ζ で $\eta\zeta = -\frac{t_2}{3}$ を満たすものをとれば, 前節の結果から $u^2 = \eta+\zeta+\frac{s_1}{3}$, $v^2 = \eta\omega + \zeta\omega^2 + \frac{s_1}{3}$, $w^2 = \eta\omega^2 + \zeta\omega + \frac{s_1}{3}$ である. そこで, $\eta+\zeta+\frac{s_1}{3}$, $\eta\omega+\zeta\omega^2+\frac{s_1}{3}$, $\eta\omega^2+\zeta\omega+\frac{s_1}{3}$ の平方根 κ, λ, ξ を $\kappa\lambda\xi = \frac{\tau_3}{8}$ が成り立つようにとれば, $P(x)=0$ の 4 つの解 α, β γ, δ は $\alpha = \kappa+\lambda+\xi+\frac{\sigma_1}{4}$, $\beta = \kappa-\lambda-\xi+\frac{\sigma_1}{4}$, $\gamma = -\kappa+\lambda-\xi+\frac{\sigma_1}{4}$, $\delta = -\kappa-\lambda+\xi+\frac{\sigma_1}{4}$ で与えられる.

解と係数の関係より, $(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2(\beta-\delta)^2(\delta-\gamma)^2 = -110592D$ が成り立つため, $P(x)=0$ が重解をもつための必要十分条件は $D=0$ である.

s_1, s_2, s_3 を σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 を用いて表せば,

$$s_1 = \frac{1}{16}(3\sigma_1^2 - 8\sigma_2), \qquad s_2 = \frac{1}{256}(3\sigma_1^4 - 16\sigma_1^2\sigma_2 + 16\sigma_1\sigma_3 + 16\sigma_2^2 - 64\sigma_4),$$

$$s_3 = \frac{1}{4096}(\sigma_1^6 - 8\sigma_1^4\sigma_2 + 16\sigma_1^3\sigma_3 + 16\sigma_1^2\sigma_2^2 - 64\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 64\sigma_3^2)$$

となる. また t_2, t_3, D を τ_2, τ_3, τ_4 および σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 を用いて表せば以下の様になる.

$$\begin{aligned}
t_2 &= \tfrac{1}{48}(-\tau_2^2 - 12\tau_4) = \tfrac{1}{48}(3\sigma_1\sigma_3 - \sigma_2^2 - 12\sigma_4) \\
t_3 &= \tfrac{1}{1728}(2\tau_2^3 - 72\tau_2\tau_4 + 27\tau_3^2) = \tfrac{1}{1728}(27\sigma_1^2\sigma_4 - 9\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_2^3 - 72\sigma_2\sigma_4 + 27\sigma_3^2) \\
D &= \tfrac{1}{110592}(-16\tau_2^4\tau_4 + 4\tau_2^3\tau_3^2 + 128\tau_2^2\tau_4^2 - 144\tau_2\tau_3^2\tau_4 + 27\tau_3^4 - 256\tau_4^3) \\
&= \tfrac{1}{110592}(27\sigma_1^4\sigma_4^2 - 18\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3\sigma_4 + 4\sigma_1^3\sigma_3^3 + 4\sigma_1^2\sigma_2^3\sigma_4 - \sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^2 - 144\sigma_1^2\sigma_2\sigma_4^2 + 6\sigma_1^2\sigma_3^2\sigma_4 + 80\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3\sigma_4 \\
&\qquad -18\sigma_1\sigma_2\sigma_3^3 + 192\sigma_1\sigma_3\sigma_4^2 - 16\sigma_2^4\sigma_4 + 4\sigma_2^3\sigma_3^2 + 128\sigma_2^2\sigma_4^2 - 144\sigma_2\sigma_3^2\sigma_4 + 27\sigma_3^4 - 256\sigma_4^3)
\end{aligned}$$

2.2 重解をもつ 4 次方程式

$D=0$ の場合の $P(x)=0$ は重解をもつが, この重解を係数の有理式で表すことを考える. このとき $P(x)$ と $P(x)$ の微分 $P'(x) = 4x^3 - 3\sigma_1 x^2 + 2\sigma_2 x + \sigma_3$ の最大次数の共通の因数を $d(x)$ とすれば $d(x)$ の次数は 1 以上である. $P(x) = (\frac{1}{4}x - \frac{\sigma_1}{16})P'(x) + r_1(x)$, $r_1(x) = (-\frac{3}{16}\sigma_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_2)x^2 + (\frac{1}{8}\sigma_1\sigma_2 - \frac{3}{4}\sigma_3)x - \frac{1}{16}\sigma_1\sigma_3 + \sigma_4$ であり, $r_1(x)$ は $d(x)$ で割りきれる.

(1) $r_1(x)=0$ すなわち $\sigma_2 = \frac{3}{8}\sigma_1^2$, $\sigma_3 = \frac{1}{16}\sigma_1^3$, $\sigma_4 = \frac{1}{256}\sigma_1^4$ が成り立つ場合 $P(x) = (x - \frac{\sigma_1}{4})^4$ となるため $P(x)=0$ は四重解 $\frac{\sigma_1}{4}$ をもつ.

(2) $r_1(x) \neq 0$ の場合, $\sigma_2 \neq \frac{3}{8}\sigma_1^2$ または「$\sigma_2 = \frac{3}{8}\sigma_1^2$ かつ $\sigma_3 \neq \frac{1}{16}\sigma_1^3$」が成り立つ.

(2–1) $\sigma_2 \neq \frac{3}{8}\sigma_1^2$ の場合,

$$P'(x) = \left(\tfrac{-64}{-8\sigma_2+3\sigma_1^2}x + \tfrac{16(-32\sigma_1\sigma_2+9\sigma_1^3+48\sigma_3)}{(-8\sigma_2+3\sigma_1^2)^2}\right) r_1(x) + r_2(x)$$

$$r_2(x) = \tfrac{32(4\sigma_2^3-\sigma_1^2\sigma_2^2-16\sigma_2\sigma_4-14\sigma_3\sigma_1\sigma_2+6\sigma_1^2\sigma_4+3\sigma_3\sigma_1^3+18\sigma_3^2)}{(-8\sigma_2+3\sigma_1^2)^2}x - \tfrac{16(-3\sigma_1\sigma_3^2+4\sigma_2^2\sigma_3+9\sigma_4\sigma_1^3-\sigma_1^2\sigma_3\sigma_2-32\sigma_4\sigma_1\sigma_2+48\sigma_4\sigma_3)}{(-8\sigma_2+3\sigma_1^2)^2}$$

であり, $r_2(x)=0$ ならば x の 2 次式 $r_1(x)$ が $P(x)$ と $P'(x)$ の最大公約数である. この場合は 4 次式 $P(x)$ は 4 次式 $r_1(x)^2$ で割りきれるため

$$P(x) = \left(x^2 + \frac{2\sigma_1\sigma_2 - 12\sigma_3}{-3\sigma_1^2 + 8\sigma_2}x + \frac{-\sigma_1\sigma_3 + 16\sigma_4}{-3\sigma_1^2 + 8\sigma_2}\right)^2$$

という形になる.

$r_2(x) \neq 0$ の場合, $r_2(x)$ は 1 次以上の多項式 $d(x)$ で割り切れることから x の 1 次式 $r_2(x)$ が $P(x)$ と $P'(x)$

の最大公約数である. 従って,

$$x=\frac{-3\sigma_1\sigma_3^2+4\sigma_2^2\sigma_3+9\sigma_4\sigma_1^3-\sigma_1^2\sigma_3\sigma_2-32\sigma_4\sigma_1\sigma_2+48\sigma_4\sigma_3}{2(4\sigma_2^3-\sigma_1^2\sigma_2^2-16\sigma_2\sigma_4-14\sigma_3\sigma_1\sigma_2+6\sigma_1^2\sigma_4+3\sigma_3\sigma_1^3+18\sigma_3^2)}\ \cdots\ (*)$$

が $P(x)=0$ のただ 1 つの重解で $P(x)$ は次のように因数分解される.

$$P(x)=\left(x-\tfrac{-3\sigma_1\sigma_3^2+4\sigma_2^2\sigma_3+9\sigma_4\sigma_1^3-\sigma_1^2\sigma_3\sigma_2-32\sigma_4\sigma_1\sigma_2+48\sigma_4\sigma_3}{2(4\sigma_2^3-\sigma_1^2\sigma_2^2-16\sigma_2\sigma_4-14\sigma_3\sigma_1\sigma_2+6\sigma_1^2\sigma_4+3\sigma_3\sigma_1^3+18\sigma_3^2)}\right)^2(x^2-Ax+B)\ \cdots\ (**).$$

ここで $A=-4\sigma_2^3\sigma_1+\sigma_2^2\sigma_1^3-16\sigma_4\sigma_1\sigma_2+13\sigma_1^2\sigma_3\sigma_2+3\sigma_4\sigma_1^3-3\sigma_1^4\sigma_3-21\sigma_1\sigma_3^2+4\sigma_2^2\sigma_3+48\sigma_4\sigma_3$,
$B=\frac{1}{4}(-108\sigma_1^7\sigma_3\sigma_4-320\sigma_1^4\sigma_2^3\sigma_4-449\sigma_3^2\sigma_1^4\sigma_2^2+354\sigma_2\sigma_3^3\sigma_1^3+36\sigma_2^2\sigma_1^6\sigma_4-512\sigma_2^5\sigma_3\sigma_1+888\sigma_1^2\sigma_2^3\sigma_3^2+48\sigma_2\sigma_3^2\sigma_1^6+240\sigma_2^4\sigma_3\sigma_1^3-240\sigma_2\sigma_1^4\sigma_4^2-1152\sigma_2^2\sigma_4\sigma_3^2-2376\sigma_3^3\sigma_1\sigma_2^2+256\sigma_2^2\sigma_4^2\sigma_1^2+36\sigma_1^5\sigma_3^3-28\sigma_1^5\sigma_2^3\sigma_3+832\sigma_2^4\sigma_1^2\sigma_4-1314\sigma_1^4\sigma_3^2\sigma_4-4320\sigma_1\sigma_3^3\sigma_4+1440\sigma_4^2\sigma_1^3\sigma_3+512\sigma_2^3\sigma_4\sigma_3\sigma_1-2408\sigma_2^2\sigma_4\sigma_3\sigma_1^3+1002\sigma_2\sigma_1^5\sigma_4\sigma_3+5952\sigma_2\sigma_1^2\sigma_4\sigma_3^2-6144\sigma_4^2\sigma_1\sigma_2\sigma_3-32\sigma_2^6\sigma_1^2-512\sigma_2^5\sigma_4+624\sigma_2^4\sigma_3^2+4\sigma_1^4\sigma_2^5+1024\sigma_2^3\sigma_4^2+1296\sigma_2\sigma_3^4+243\sigma_1^2\sigma_3^4+27\sigma_4^2\sigma_1^6+6912\sigma_4^2\sigma_3^2+64\sigma_2^7)$.

(2–2) $\sigma_2=\frac{3}{8}\sigma_1^2$ かつ $\sigma_3\neq\frac{1}{16}\sigma_1^3$ が成り立つ場合. 一般に ($\sigma_2=\frac{3}{8}\sigma_1^2$ が成り立ってもそうでなくても)

$$\begin{aligned}\bar{r}_2(x)\ &=\ 32(4\sigma_2^3-\sigma_1^2\sigma_2^2-16\sigma_2\sigma_4-14\sigma_3\sigma_1\sigma_2+6\sigma_1^2\sigma_4+3\sigma_3\sigma_1^3+18\sigma_3^2)x\\ &\quad -16(-3\sigma_1\sigma_3^2+4\sigma_2^2\sigma_3+9\sigma_4\sigma_1^3-\sigma_1^2\sigma_3\sigma_2-32\sigma_4\sigma_1\sigma_2+48\sigma_4\sigma_3)\end{aligned}$$

とおけば、$\sigma_2\neq\frac{3}{8}\sigma_1^2$ ならば $r_2(x)=\frac{1}{(-8\sigma_2+3\sigma_1^2)^2}\bar{r}_2(x)$ であり、$\sigma_2=\frac{3}{8}\sigma_1^2$ ならば $\bar{r}_2(x)=\frac{9}{4}(\sigma_1^3-16\sigma_3)^2x-3(\sigma_1\sigma_3-16\sigma_4)(\sigma_1^3-16\sigma_3)$, $r_1(x)=\frac{3}{64}(\sigma_1^3-16\sigma_3)x-\frac{1}{16}(\sigma_1\sigma_3-16\sigma_4)$ だから $\bar{r}_2(x)=48(\sigma_1^3-16\sigma_3)r_1(x)$ である. 従って $\bar{r}_2(x)$ は $r_1(x)$ の 0 でない定数倍になるため, この場合も $P(x)=0$ は $(*)$ で与えられる値を重解にもち $P(x)$ は $(**)$ のように因数分解される.

定理 2.1 $D=0$ の場合 $P(x)=x^4-\sigma_1x^3+\sigma_2x^2-\sigma_3x+\sigma_4$ は以下のように因数分解される.

(i) $\sigma_2=\frac{3}{8}\sigma_1^2$, $\sigma_3=\frac{1}{16}\sigma_1^3$, $\sigma_4=\frac{1}{256}\sigma_1^4$ が成り立つ場合 $P(x)=(x-\frac{\sigma_1}{4})^4$.

(ii) $\sigma_2\neq\frac{3}{8}\sigma_1^2$, $4\sigma_2^3-\sigma_1^2\sigma_2^2-16\sigma_2\sigma_4-14\sigma_3\sigma_1\sigma_2+6\sigma_1^2\sigma_4+3\sigma_3\sigma_1^3+18\sigma_3^2=-3\sigma_1\sigma_3^2+4\sigma_2^2\sigma_3+9\sigma_4\sigma_1^3-\sigma_1^2\sigma_3\sigma_2-32\sigma_4\sigma_1\sigma_2+48\sigma_4\sigma_3=0$ が成り立つ場合 $P(x)=\left(x^2+\frac{2\sigma_1\sigma_2-12\sigma_3}{-3\sigma_1^2+8\sigma_2}x+\frac{-\sigma_1\sigma_3+16\sigma_4}{-3\sigma_1^2+8\sigma_2}\right)^2$.

(iii) $\sigma_2\neq\frac{3}{8}\sigma_1^2$ または $\sigma_3\neq\frac{1}{16}\sigma_1^3$ であり, $4\sigma_2^3-\sigma_1^2\sigma_2^2-16\sigma_2\sigma_4-14\sigma_3\sigma_1\sigma_2+6\sigma_1^2\sigma_4+3\sigma_3\sigma_1^3+18\sigma_3^2\neq 0$ が成り立つ場合 $P(x)=\left(x-\frac{-3\sigma_1\sigma_3^2+4\sigma_2^2\sigma_3+9\sigma_4\sigma_1^3-\sigma_1^2\sigma_3\sigma_2-32\sigma_4\sigma_1\sigma_2+48\sigma_4\sigma_3}{2(4\sigma_2^3-\sigma_1^2\sigma_2^2-16\sigma_2\sigma_4-14\sigma_3\sigma_1\sigma_2+6\sigma_1^2\sigma_4+3\sigma_3\sigma_1^3+18\sigma_3^2)}\right)^2(x^2-Ax+B)$.
ただし, $A=-4\sigma_2^3\sigma_1+\sigma_2^2\sigma_1^3-16\sigma_4\sigma_1\sigma_2+13\sigma_1^2\sigma_3\sigma_2+3\sigma_4\sigma_1^3-3\sigma_1^4\sigma_3-21\sigma_1\sigma_3^2+4\sigma_2^2\sigma_3+48\sigma_4\sigma_3$,
$B=\frac{1}{4}(-108\sigma_1^7\sigma_3\sigma_4-320\sigma_1^4\sigma_2^3\sigma_4-449\sigma_3^2\sigma_1^4\sigma_2^2+354\sigma_2\sigma_3^3\sigma_1^3+36\sigma_2^2\sigma_1^6\sigma_4-512\sigma_2^5\sigma_3\sigma_1+888\sigma_1^2\sigma_2^3\sigma_3^2+48\sigma_2\sigma_3^2\sigma_1^6+240\sigma_2^4\sigma_3\sigma_1^3-240\sigma_2\sigma_1^4\sigma_4^2-1152\sigma_2^2\sigma_4\sigma_3^2-2376\sigma_3^3\sigma_1\sigma_2^2+256\sigma_2^2\sigma_4^2\sigma_1^2+36\sigma_1^5\sigma_3^3-28\sigma_1^5\sigma_2^3\sigma_3+832\sigma_2^4\sigma_1^2\sigma_4-1314\sigma_1^4\sigma_3^2\sigma_4-4320\sigma_1\sigma_3^3\sigma_4+1440\sigma_4^2\sigma_1^3\sigma_3+512\sigma_2^3\sigma_4\sigma_3\sigma_1-2408\sigma_2^2\sigma_4\sigma_3\sigma_1^3+1002\sigma_2\sigma_1^5\sigma_4\sigma_3+5952\sigma_2\sigma_1^2\sigma_4\sigma_3^2-6144\sigma_4^2\sigma_1\sigma_2\sigma_3-32\sigma_2^6\sigma_1^2-512\sigma_2^5\sigma_4+624\sigma_2^4\sigma_3^2+4\sigma_1^4\sigma_2^5+1024\sigma_2^3\sigma_4^2+1296\sigma_2\sigma_3^4+243\sigma_1^2\sigma_3^4+27\sigma_4^2\sigma_1^6+6912\sigma_4^2\sigma_3^2+64\sigma_2^7)$.

2.3 実係数 4 次方程式

σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 がすべて実数の場合に $P(x)=0$ の解について調べる. このとき $s_3=\frac{\tau_3^2}{64}\geqq 0$ であることに注意する.

$D>0$ の場合, $R(X)=0$ は 1 つの負でない実数解と 2 つの互いに共役な虚数解をもつ. これらの平方根 κ, λ, ξ は, κ が τ_3 と同符号の実数で $\xi=\bar{\lambda}$ となるように選べるから, $\alpha=\kappa+\lambda+\xi+\frac{\sigma_1}{4}$ と $\beta=\kappa-\lambda-\xi+\frac{\sigma_1}{4}$ は相異なる実数解で, $\gamma=-\kappa+\lambda-\xi+\frac{\sigma_1}{4}$ と $\delta=-\kappa-\lambda+\xi+\frac{\sigma_1}{4}$ は共役な虚数解である.

$D<0$ の場合, $R(X)=0$ は 3 つの相異なる実数解をもつが, これらの符号により, 以下の場合にわかれる.

i) $s_1, s_2 > 0$ の場合：$R(X)=0$ の解はすべて負でないため, $P(x)=0$ の解はすべて実数である.

ii) $s_3 > 0$ であり, $s_1 < 0$ または $s_2 \leqq 0$ の場合：$R(X)=0$ は 1 つの正の解と 2 つの相異なる負の解をもつため, κ は実数 λ, ξ は絶対値が相異なる純虚数としてよい. このとき, $\alpha = \kappa+\lambda+\xi+\frac{\sigma_1}{4}$, $\beta=\kappa-\lambda-\xi+\frac{\sigma_1}{4}$, $\gamma=-\kappa+\lambda-\xi+\frac{\sigma_1}{4}$, $\delta=-\kappa-\lambda+\xi+\frac{\sigma_1}{4}$ はすべて虚数になる.

iii) $s_3 = 0$ であり, $s_1 < 0$ または $s_2 \leqq 0$ の場合：$D<0$ だから必然的に $s_2 \neq 0$ である. $s_2 < 0$ ならば, $R(X)=0$ の 0 以外に正の解と負の解をもつため, $\kappa = 0$, λ は実数, ξ は純虚数としてよい. このことから $P(x)=0$ の解はすべて虚数であることがわかる. また, $s_1 < 0$ かつ $s_2 > 0$ ならば, $R(X)=0$ の 0 以外に 2 つの相異なる負の解をもつため, $\kappa=0$, λ と ξ は絶対値が相異なる純虚数としてよい. 従って *ii*) の場合と同じ理由により, $P(x)=0$ の解はすべて虚数である.

以上から, $D<0$ の場合は, $s_1, s_2 > 0$ ならば $P(x)=0$ の解はすべて実数になり, $s_1 < 0$ または $s_2 \leqq 0$ ならば $P(x)=0$ の解はすべて虚数になる.

$D=0$ の場合, $t_2 = 0$ ならば $R(X)=0$ は 3 重解 $\frac{s_1}{3}$ をもち, $s_2 = \frac{s_1^3}{3}$, $\frac{\tau_3^2}{64} = s_3 = \frac{s_1^3}{27} \geqq 0$ が成り立つため, $s_1 \geqq 0$ である. $\kappa=\lambda=\xi=\frac{\tau_3^{\frac{1}{3}}}{2}$ が成り立つようにできるため, $s_1 > 0$ ならば $P(x)=0$ は $\alpha = 3\kappa+\frac{\sigma_1}{4}$ と 3 重解 $\beta = -\kappa+\frac{\sigma_1}{4}$ をもち, $s_1 = 0$ ならば $P(x)=0$ は 4 重解 $\frac{\sigma_1}{4}$ をもつ.

$t_2 \neq 0$ とすると $D=0$ から $t_2 = s_2 - \frac{s_1^2}{3} < 0$ である. $27s_3^2 - 2(9s_1s_2 - 2s_1^3)s_3 + 4s_2^3 - s_1^2s_2^2 = 27D = 0$ だから $\varphi(U) = 3U^2 - 2s_1(9s_2 - 2s_1^2)U + 9s_2^2(4s_2 - s_1^2)$ とおくと, $\varphi(9s_3) = 0$ である. $s_1^3 - 4s_1s_2 + 9s_3 < 0$ ならば $s_2 = s_3 = 0$ になることを示す. まず $0 \leqq 9s_3 < 4s_1s_2 - s_1^3$ から $s_1 \neq 0$ で, s_1 と $4s_2 - s_1^2$ は同符号である. もし $s_2 \neq 0$ ならば $\varphi(0) = 9s_2^2(4s_2 - s_1^2)$, $\varphi(4s_1s_2 - s_1^3) = 9t_2^2(4s_2 - s_1^2)$ だから $\varphi(0)$, $\varphi(4s_1s_2 - s_1^3)$ はいずれも s_1 と同符号である. 従って, $s_1 < 0$ ならば これらはともに負になって U の二次方程式 $\varphi(U)=0$ は区間 $[0, 4s_1s_2 - s_1^3)$ に解をもたない. これは $9s_3 \in [0, 4s_1s_2 - s_1^3)$, $\varphi(9s_3) = 0$ と矛盾する. また, $s_1 > 0$ ならば $\frac{s_1}{3}(9s_2 - 2s_1^2) - (4s_1s_2 - s_1^3) = -s_1t_2$ だから放物線 $V = \varphi(U)$ の軸は区間 $[0, 4s_1s_2 - s_1^3]$ の中にないため, $\varphi(0) > 0$, $\varphi(4s_1s_2 - s_1^3) > 0$ より, この場合も二次方程式 $\varphi(U)=0$ は区間 $[0, 4s_1s_2 - s_1^3)$ に解をもたない. 故に $s_2 = 0$ であり, s_1 と $4s_2 - s_1^2 = -s_1^2$ が同符号であることから $s_1 < 0$ である. このとき $\varphi(U) = U(3U + 4s_1^3)$ の解で, 区間 $[0, -s_1^3)$ に含まれるものは 0 しかないため, $9s_3 = 0$ である.

$t_2 \neq 0$ のとき, $R(X)=0$ は相異なる解 $\frac{-s_1^3+4s_1s_2-9s_3}{3s_2-s_1^2}$, $\frac{9s_3-s_1s_2}{2(3s_2-s_1^2)}$ をもち, 後者は 2 重解だからこれらの平方根 κ, λ を $\kappa\lambda^2 = \frac{\tau_3}{8}$ が成り立つように選べば, $P(x)=0$ の解は $\alpha = \kappa+2\lambda+\frac{\sigma_1}{4}$, $\beta = \kappa-2\lambda+\frac{\sigma_1}{4}$, $\gamma=\delta=-\kappa+\frac{\sigma_1}{4}$ で与えられる.

i) $4s_1s_2 - s_1^3 \leqq 9s_3 < s_1s_2$ の場合：κ, λ は絶対値が異なる実数で, $\lambda \neq 0$ であるため, $P(x)=0$ は 3 つの相異なる実数解をもち, 1 組の重解をもつ.

ii) $4s_1s_2 - s_1^3 \leqq 9s_3 = s_1s_2$ の場合：もし $4s_1s_2 - s_1^3 = 9s_3 = s_1s_2$ ならば, $3s_2 - s_1^2 = 3t_2 \neq 0$ より, $s_1 = 0$ となるため, $s_3 = 0$, $t_3 = 0$ が得られ, $4t_2^3 = 27(D - t_3^2) = 0$ となって, $t_2 \neq 0$ と矛盾する. 従って $4s_1s_2 - s_1^3 < 9s_3$ となり, κ は 0 でない実数で, $\lambda = 0$ だから $P(x)=0$ は 2 つの相異なる実数解をもち, これらは重解である.

iii) $9s_3 \geqq 4s_1s_2 - s_1^3$ かつ $9s_3 > s_1s_2$ の場合：κ は実数, λ は純虚数だから $P(x)=0$ は実数の重解を 1 つもち, 2 つの虚数解をもつ.

iv) $9s_3 < 4s_1s_2 - s_1^3$ の場合：κ は純虚数で, $s_2 = s_3 = 0$ だから $\lambda = 0$ となるため, $P(x)=0$ は 2 組の虚数の 2 重解をもつ.

2.4　4 次関数の最小値

σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 がすべて実数の場合に $P(x) = x^4 - \sigma_1x^3 + \sigma_2x^2 - \sigma_3x + \sigma_4$ の最小値について考える. 前と同様に $y = x - \frac{\sigma_1}{4}$ とおいて, τ_2, τ_3, τ_4 を定め, $Q(y) = P(y + \frac{\sigma_1}{4})$ を満たす y の 4 次式 $Q(y) = y^4 + \tau_2y^2 - \tau_3y + \tau_4$ を考える.

$\tau_3 = 0$ の場合, $\tau_2 \leqq 0$ ならば, $Q(y) = (y^2 + \frac{\tau_2}{2})^2 + \tau_4 - \frac{\tau_2^2}{4}$ だから, $Q(y)$ は $y = \pm\sqrt{-\frac{\tau_2}{2}}$ のときに最小値 $\tau_4 - \frac{\tau_2^2}{4}$ をとり, $\tau_2 > 0$ ならば, $y = 0$ のときに最小値 τ_4 をとる.

以下 $\tau_3 \neq 0$ の場合を考える. もし実数 p, q, r で, $q > 0$ かつ $Q(y) = (y^2 - p^2)^2 + q(y - p)^2 + r$ を満たすものがとれれば, $Q(y) \geqq r$ であり, $y = p$ の場合に限り $Q(y) = r$ となるため, $Q(y)$ は $y = p$ のときに最小値 r をとる. このような p, q, r が満たすべき関係式は $q = 2p^2 + \tau_2$, $2pq = \tau_3$, $r = \tau_4 - 3p^4 - \tau_2 p^2$ である. 1 番目と 2 番目の式から p は $Q'(y) = 4y^3 + 2\tau_2 y - \tau_3 = 0$ の実数解である. $\tau_3 > 0$ の場合, $Q'(0) < 0$ だから, $Q'(y) = 0$ は少なくとも 1 つの正の解をもち, (1.2) の結果により, 他に実数解があったとしてもそれらは負であることがわかる. 同様に $\tau_3 < 0$ の場合, $Q'(0) > 0$ だから, $Q'(y) = 0$ は少なくとも 1 つの負の解をもち, (1.2) の結果により, 他に実数解があったとしてもそれらは正であることがわかる. 従って, $Q'(y) = 0$ は τ_3 と同符号の実数解をただ 1 つもち, それを p として $q = 2p^2 + \tau_2$, $r = \tau_4 - 3p^4 - \tau_2 p^2$ により q, r を定めれば, $2pq = \tau_3$ だから $q > 0$ となって, $Q(y)$ は $y = p$ で最小値をとる.

以上をまとめると, $P(x) = x^4 - \sigma_1 x^3 + \sigma_2 x^2 - \sigma_3 x + \sigma_4$ の最小値について次のことがわかる.

$\sigma_3 = \frac{\sigma_1\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1^3}{8}$ の場合, $\sigma_2 \leqq \frac{3\sigma_1^2}{8}$ ならば, $x = \frac{1}{4}(\sigma_1 \pm \sqrt{8\sigma_2 - 3\sigma_1^2})$ のときに最小値 $\sigma_4 - \frac{3\sigma_1^4}{64} + \frac{\sigma_1^2\sigma_2}{4} - \frac{\sigma_1\sigma_3}{4} - \frac{\sigma_2^2}{4}$ をとり, $\sigma_2 > \frac{3\sigma_1^2}{8}$ ならば, $x = \frac{\sigma_1}{4}$ のときに最小値 $\sigma_4 - \frac{3\sigma_1^4}{256} + \frac{\sigma_1^2\sigma_2}{16} - \frac{\sigma_1\sigma_3}{4}$ をとる.

$\sigma_3 \neq \frac{\sigma_1\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1^3}{8}$ の場合, $P'(x) = 0$ は実数解 μ で $\mu - \frac{\sigma_1}{4}$ と $\sigma_3 + \frac{\sigma_1^3}{8} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{2}$ が同符号になるようなものをただ 1 つもち, $P(x)$ は $x = \mu$ のみで, 最小値 $\sigma_4 - 3\mu^4 + 2\sigma_1\mu^3 - \sigma_2\mu^2 = (\frac{\sigma_2}{2} - \frac{3\sigma_1^2}{16})\mu^2 + (\frac{\sigma_1\sigma_2}{8} - \frac{3\sigma_3}{4})\mu + \sigma_4 - \frac{\sigma_1\sigma_3}{16}$ をとる.