1. 次の行列の積を計算せよ (ただし, a は定数とする).

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

2. a を定数とし, n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ を $a_{i\,i+1} = 1$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$, $a_{n1} = a \in \boldsymbol{K}$, $a_{ij} = 0$ $(j - i \neq 1, 1-n)$ で与えられるものとするとき $A^n = aE_n$ であることを示せ.

3. N を 3 次正方行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき N^n を求め, $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n = (aE_3 + N)^n$ を求めよ.

4. $N = (a_{ij})$ を $a_{ij} = \begin{cases} 1 & j - i = 1 \\ 0 & j - i \neq 1 \end{cases}$ であるような n 次正方行列とするとき N^k を求め, $(aE_n + N)^k$ を求めよ.

解答　$0 \leqq k \leqq n-1$ のとき $N^k = (a_{ij}^{(k)})$ とおくと, $a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1 & j - i = k \\ 0 & j - i \neq k \end{cases}$ であり, $k \geqq n$ ならば $N^k = O$ である.
$(aE_n)N = N(aE_n) = aN$ で, aE_n と N は交換可能だから “二項定理” が使えて, $(aE_n + N)^k = \sum\limits_{l=1}^{k} \binom{k}{l} a^{k-l} N^l$ ($\binom{k}{l}$ は二項係数 $\frac{k!}{l!(k-l)!}$) より, $(aE_n + N)^k$ の (i,j)-成分を $b_{ij}^{(k)}$ とおくと, $b_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \binom{k}{l} a^{k-l} & j - i = l \\ 0 & j < i \end{cases}$ である.

5. A を $A^2 = 2\alpha A - \alpha^2 E_n$ $(\alpha \in \boldsymbol{C})$ を満たす n 次正方行列とする. このとき次の問に答えよ.

1) $A^r = a_r A + b_r E_n$ の形に表せることを示し, a_{r+1}, b_{r+1} を a_r, b_r の式で表せ.

2) 数列 $\{a_r\}$, $\{b_r\}$ の一般項を求めることにより, A^r を求めよ.

解答　1) r による数学的帰納法で示す. $r = 0, 1, 2$ のとき主張は明らかである. r のとき主張が成り立つとして, $A^r = a_r A + b_r E_n$ の両辺に左から A をかけると, $A^{r+1} = a_r A^2 + b_r A = a_r(2\alpha A - \alpha^2 E_n) + b_r A = (2\alpha a_r + b_r)A - \alpha^2 a_r E_n$ だから $r+1$ のときも主張が成り立ち, $a_{r+1} = 2\alpha a_r + b_r$, $b_{r+1} = -\alpha^2 a_r$ である.

2) 上の結果から $a_{r+2} = 2\alpha a_{r+1} + b_{r+1} = 2\alpha a_{r+1} - \alpha^2 a_r$. 従って, $a_{r+2} - \alpha a_{r+1} = \alpha(a_{r+1} - \alpha a_r)$ だから数列 $\{a_{r+1} - \alpha a_r\}$ は初項 $a_1 - a_0 = 1$ 公比 α の等比数列である. 故に $a_{r+1} - \alpha a_r = \alpha^r$ で, この両辺を α^{r+1} で割ると ($\alpha \neq 0$ とする), $\frac{a_{r+1}}{\alpha^{r+1}} - \frac{a_r}{\alpha^r} = \frac{1}{\alpha}$ だから数列 $\{\frac{a_r}{\alpha^r}\}$ は初項 $a_0 = 0$ 公差 $\frac{1}{\alpha}$ の等差数列である. 従って, $a_r = r\alpha^{r-1}$, $b_r = -\alpha^2 a_{r-1} = (1-r)\alpha^r$. $\alpha = 0$ の場合は明らかに $a_1 = 1$, $a_r = 0$ $(r \neq 1)$ $b_0 = 1$, $b_r = 0$ $(r \neq 0)$ であり, 上の場合に含まれる. 以上から, $A^r = r\alpha^{r-1}A + (1-r)\alpha^r E_n$.

6. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し, $\mathrm{tr}A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ とおき, A のトレースと呼ぶ. このとき, n 次正方行列 A, B とスカラー r に対し, 次の等式を証明せよ.

1) $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B$, $\mathrm{tr}(rA) = r\mathrm{tr}A$.

2) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}A$ (P は n 次正則行列).

7. $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対して, A の行と列を入れ替えてできる $n \times m$ 行列を A の転置行列といい, ${}^tA$ で表す. (すなわち ${}^tA$ は a_{ji} を (i,j)-成分にもつ行列である.)

1) A, B をそれぞれ $m \times n$, $n \times l$ 行列とするとき, ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ が成り立つことを示せ.

2) P が n 次正則行列であるとき, ${}^tP$ も正則で, $({}^tP)^{-1} = {}^t(P^{-1})$ が成り立つことを示せ.

3) $f : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ を線型写像とし, f を 表す $m \times n$ 行列を $A \in M(m, n; \boldsymbol{K})$ とし, 各 $w \in \boldsymbol{K}^m$ に対し, $1 \times m$

行列 ${}^t w$ から定まる線型写像を $\varphi_w : \boldsymbol{K}^m \to \boldsymbol{K}$ で表す．さらに, 合成写像 $\varphi_w \circ f : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}$ を表す $1 \times n$ 行列を A_w で表すと, ${}^t A_w = {}^t A w$ が成り立つことを示せ．従って, $f^*(w) = {}^t A_w$ で定められる写像 $f^* : \boldsymbol{K}^m \to \boldsymbol{K}^n$ は A の転置行列 ${}^t A$ から定まる線型写像である．

8. $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ を次で与えられる 4 次正方行列とする．

$$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -E_4$, $\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}$ が成り立つことを示せ．

2) $A = aE_4 + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}$ $(a, b, c, d \in \boldsymbol{R})$ に対し, $\overline{A} = aE_4 - b\boldsymbol{i} - c\boldsymbol{j} - d\boldsymbol{k}$, $|A| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ とおくと, $A\overline{A} = \overline{A}A = |A|^2 E_4$ となることを示せ．

3) $\boldsymbol{H}$ を $E_4, \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ で生成される $M(4; \boldsymbol{R})$ の部分空間とする．$\boldsymbol{H}$ は行列の積について閉じていることを示し, $A \in \boldsymbol{H}$ が零行列でなければ A は正則行列であることを示せ．

4) $X^2 + 1 = O$ を満たす $X \in \boldsymbol{H}$ をすべて求めよ．

9. 次のような線型写像 $f, g, h : \boldsymbol{K}^3 \to \boldsymbol{K}^2$ を表す行列を求めよ．

1) f はベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ に写す．

2) g はベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ 写す．

3) h はベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ 写す．

10. 次のような線型写像 $f, g : \boldsymbol{K}^4 \to \boldsymbol{K}^3$ を表す行列を求めよ．

1) f は $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ を満たす．

2) g は $g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $g\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $g\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ を満たす．

11. 以下の連立 1 次方程式の解を求めよ．(a, b, c は定数)

$$1)\ \begin{cases} 2x + 3y - 4z - w = 1 \\ x + y - z + 2w = 2 \\ y - 2z - 5w = c \end{cases}, \quad 2)\ \begin{cases} x - 2y + z + w = 3 \\ 2x + y - 3z = -1 \\ -x - y + 2z + 2w = 0 \\ -2x + 2y - 3w = c \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x - 2y + z - w = 2 \\ 2x + y + 3z = -1 \\ -x - y - 2z + 2w = 0 \\ -2x + 2y - 2z - w = c \end{cases}, \quad 4)\ \begin{cases} 11x + 12y + 13z + 14u + 15v = a \\ 6x + 7y + 8z + 9u + 10v = 0 \\ x + 2y + 3z + 4u + 5v = 0 \\ x + 4y + 9z + 16u + 25v = b \end{cases}$$

解答　1) $c \neq -3$ の場合は解なし．$c=-3$ の場合, $x=-s-3t+5$, $y=2s+5t-3$, $z=s$, $w=t$ $(s,t \in \boldsymbol{K})$ が解である．

2) $c \neq -2$ の場合は解なし．$c=-2$ の場合, $x=s+\frac{1}{3}$, $y=s-\frac{5}{3}$, $z=s$, $w=-\frac{2}{3}$ $(s \in \boldsymbol{K})$ が解である．

3) $c \neq 1$ の場合は解なし．$c=1$ の場合, $x=-\frac{15}{2}s-\frac{7}{2}$, $y=-\frac{3}{2}s-\frac{3}{2}$, $z=\frac{11}{2}s+\frac{5}{2}$, $w=s$ $(s \in \boldsymbol{K})$ が解である．

4) $a \neq 0$ の場合は解なし．$a=0$ の場合, $x=-s-3t+\frac{b}{2}$, $y=3s+8t-b$, $z=-3s-6t+\frac{b}{2}$, $u=s$, $v=t$ $(s,t \in \boldsymbol{K})$ が解である．

12. 次の連立 1 次方程式の解を求めよ (a, b は定数).

1) $\begin{cases} x+y-z=6 \\ 2x+4y+6z=-2 \\ -3x-2y+z=5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y-3z-2w=3 \\ x+3y+z-w=2 \\ 2x+5y-2z-3w=5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+3y-4z-w=1 \\ x+y-z+2w=2 \\ y-2z-5w=a \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-2y+z+w=3 \\ 2x+y-3z=-1 \\ -x-y+2z+2w=0 \\ -2x+2y-3w=a \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 11x+12y+13z+14u+15v=a \\ 6x+7y+8z+9u+10v=0 \\ x+2y+3z+4u+5v=0 \\ x+4y+9z+16u+25v=b \end{cases}$

13. a, p, q, r, s を定数とし, 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x-y+z+w=p \\ 2x-3y+z-w=q \\ -x-y-2z-2w=r \\ 2x-5y+aw=s \end{cases}$ を考える．

1) 上の方程式がただ 1 組の解をもつための条件を求めよ．

2) 上の方程式が 2 組以上の解をもつための条件を求めよ．

14. $\boldsymbol{C}^3$ のベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} i \\ i-1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2i+1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ i+1 \\ i \end{pmatrix}$ の複素数係数の 1 次結合で表せ．

解答　一般に $q \in \boldsymbol{K}^n$ と $\boldsymbol{K}^n$ の m 個のベクトル $p_1, p_2, \ldots, p_m$ に対して $x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_mp_m=q$ を満たす $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \boldsymbol{K}$ を求めることは, $P=(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ とおくと, $Px=q$ を満たす $\boldsymbol{K}^m$ のベクトル x を求めることに他ならないため, 行列 (P,q) を行に関して基本変形する．

$$\begin{pmatrix} i & 2i+1 & 0 & 1 \\ i-1 & 0 & i+1 & 0 \\ 0 & -i & i & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-i+3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-i+1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3i-1}{2} \end{pmatrix}$$

となるため,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-i+3}{2}\begin{pmatrix} i \\ i-1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-i+1}{2}\begin{pmatrix} 2i+1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{-3i-1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ i+1 \\ i \end{pmatrix}.$$

15. 以下で与えられる行列について次の問に答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 17 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & -5 & -2 & 6 \\ 4 & -9 & -7 & 17 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & -1 & -16 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -5 & -2 & -5 & 2 \\ -18 & -13 & -10 & 2 \\ -2 & 0 & -8 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1) A, B, C を基本行列の積で表せ．

2) A, B, C の逆行列を求めよ.

解答　列に関する掃き出しを行う前に, 各列の数字の絶対値が小さくなるように基本変形をする.

1) $P_3(2,3;-3)P_3(1,3;-5)P_3(3,2;-4)P_3(1,2;1)P_3(3,1;-2)P_3(2,1;1)A = E_3$ より,
$A = P_3(2,1;-1)P_3(3,1;2)P_3(1,2;-1)P_3(3,2;4)P_3(1,3;5)P_3(2,3;3)$.
$P_4(3,4;-3)P_4(2,4;-14)P_4(1,4;-41)Q_4(4;-1)P_4(4,3;3)P_4(2,3;4)P_4(1,3;11)P_4(4,2;1)$
$P_4(3,2;-3)P_4(1,2;3)R_4(2,3)P_4(4,1;2)P_4(3,1;-2)P_4(2,1;-4)R_4(1,3)B = E_4$ より,
$B = R_4(1,3)P_4(2,1;4)P_4(3,1;2)P_4(4,1;-2)R_4(2,3)P_4(1,2;-3)P_4(3,2;3)P_4(4,2;-1)$
$P_4(1,3;-11)P_4(2,3;-4)P_4(4,3;-3)Q_4(4;-1)P_4(1,4;41)P_4(2,4;14)P_4(3,4;3)$.
$P_4(2,4;1)P_4(4,3;-3)P_4(2,3;-5)P_4(1,3;1)Q_4(3;-1)P_4(3,4;-3)P_4(4,3;4)P_4(4,2;-5)$
$P_4(3,2;-2)P_4(1,2;-1)Q_4(2;-1)R_4(2,4)P_4(4,1;-2)P_4(3,1;2)P_4(2,1;18)P_4(1,4;3)C = E_4$
より, $C = P_4(1,4;-3)P_4(2,1;-18)P_4(3,1;-2)P_4(4,1;2)R_4(2,4)Q_4(2;-1)P_4(1,2;1)P_4(3,2;2)$
$P_4(4,2;5)P_4(4,3;-4)P_4(3,4;3)Q_4(3;-1)P_4(1,3;-1)P_4(2,3;5)P_4(4,3;3)P_4(2,4;-1)$.

2) A^{-1}, B^{-1}, C^{-1} はそれぞれ以下の様になる.

$$\begin{pmatrix} 32 & 21 & -5 \\ 19 & 13 & -3 \\ -6 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -358 & 134 & 263 & 41 \\ -123 & 46 & 90 & 14 \\ -27 & 10 & 20 & 3 \\ 8 & -3 & -6 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 11 & 41 \\ -2 & -5 & -18 & -68 \\ 2 & 3 & 11 & 43 \\ 6 & 10 & 37 & 142 \end{pmatrix}$$

16. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し, 次のことを示せ.

1) 任意の $c \in \boldsymbol{K}$ と $1 \leqq i, j \leqq n$ $(i \neq j)$ に対して $P_n(i,j;c)A = AP_n(i,j;c)$ が成り立てば $A = rE_n$ $(r \in \boldsymbol{K})$ の形である.

2) 任意の $c \in \boldsymbol{K}$ $(c \neq 0)$ と $1 \leqq i \leqq n$ に対して $Q_n(i;c)A = AQ_n(i;c)$ が成り立てば, $i \neq j$ ならば $a_{ij} = 0$ である.

3) 任意の $1 \leqq i, j \leqq n$ $(i \neq j)$ に対して $R_n(i,j)A = AR_n(i,j)$ が成り立てば, $a_{11} = a$, $a_{12} = b$ とおくと, $a_{ii} = a$ $(1 \leqq i \leqq n)$, $a_{ij} = b$ $(i \neq j)$ である.

解答　E_{ij} を (i,j)-成分だけが 1 で, 他の成分はすべて 0 であるような n 次 正方行列とする. すなわち, $E_{ij} = (e_{pq})$, $e_{pq} = \begin{cases} 1 & (p,q) = (i,j) \\ 0 & (p,q) \neq (i,j) \end{cases}$. このとき $E_{ij}A$, AE_{ij} の (p,q)-成分はそれぞれ $\sum_{l=1}^{n} e_{pl}a_{lq} = \begin{cases} a_{jq} & p = i \\ 0 & p \neq i \end{cases}$, $\sum_{l=1}^{n} a_{pl}e_{lq} = \begin{cases} a_{pi} & q = j \\ 0 & q \neq j \end{cases}$ となることに注意する.

1) $P_n(i,j;c)A = AP_n(i,j;c)$, $P_n(i,j;c) = E_n + cE_{ij}$ だから $(E_n + cE_{ij})A = A(E_n + cE_{ij})$ である. $c \neq 0$ とすれば, 任意の $1 \leqq i, j \leqq n$ $(i \neq j)$ に対して $E_{ij}A = AE_{ij}$ が成り立つ. 任意の $1 \leqq j, q \leqq n$ に対して, j と異なる i を選んで, $E_{ij}A = AE_{ij}$ の両辺の (i,q)-成分を比較すれば, 上の計算から $a_{jj} = a_{ii}$, $a_{jq} = 0$ $(j \neq q)$ が得られる. そこで, $r = a_{11}$ とおくと, $r = a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$ であり, $j \neq q$ ならば $a_{jq} = 0$ だから $A = rE_n$ となる.

2) $Q_n(i;c) = E_n + (c-1)E_{ii}$ だから $Q_n(i;c)A = AQ_n(i;c)$ より, $(E_n + (c-1)E_{ii})A = A(E_n + (c-1)E_{ii})$. $c \neq 1$ とすれば, 任意の $1 \leqq i \leqq n$ に対して $E_{ii}A = AE_{ii}$ が成り 立つ. 任意の $1 \leqq i, q \leqq n$ に対して, $E_{ii}A = AE_{ii}$ の両辺の (i,q)-成分を 比較すれば, 上の計算から $a_{iq} = 0$ $(i \neq q)$ が得られる.

3) $R_n(i,j)A$, $AR_n(i,j)$ はそれぞれ, A の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列, A の第 i 列と第 j 列を入れ替えた行列だから $R_n(i,j)A = AR_n(i,j)$ の 第 i 行を比較すれば, $a_{jk} = a_{ik}$ $(k \neq i,j)$, $a_{ji} = a_{ij}$, $a_{jj} = a_{ii}$ が得られる. 従って, $a_{12} = b$ とおくと, 1 番目と 2 番目の式から $b = a_{12} = a_{k2} = a_{2k} = a_{ik}$ $(k \neq 2, i)$, $b = a_{12} = a_{i2}$ $(i \neq 2)$ となり, $a_{11} = a$ とおくと, 3 番目の式から $a_{ii} = a$ $(1 \leqq i \leqq n)$ がわかる.

17. $m \times n$ 行列 A の階数が r のとき以下のことを示せ.

1) $r < m$ ならば $P_m(i,j;c)$ の形の m 次基本行列の積で表される行列 P で, PA が以下の条件 (1), (2), (3) を満たす行列 (b_{ij}) になるようなものが ある.

(1) $i > \operatorname{rank} A$ ならば $b_{ij} = 0$.

(2) $i \leqq \operatorname{rank} A$ ならば $b_{i1} = \cdots = b_{i\,j(i)-1} = 0$, $b_{i\,j(i)} = 1$ となるような $1 \leqq j(i) \leqq n$ があって, さらに B の第 $j(i)$ 列は $\boldsymbol{K}^n$ の基本ベクトル e_i になる.

(3) $i < \operatorname{rank} A$ ならば $j(i) < j(i+1)$ である.

2) $r = m$ ならば $P_m(i,j;c)$ の形の m 次基本行列の積で表される行列 P と $d \in \boldsymbol{K}$ $(d \neq 0)$ で, $Q_m(m;d)PA$ が上の条件 (1), (2), (3) を 満たすようなものがある.

解答 $P_m(i,j;c)$ の形の基本行列の積で表される行列のことをここでは「P-行列」と 呼ぶことにする. $M = (x_{ij})$ を $m \times n$ 行列とする. $x_{pq} \neq 0$ ならば (p,q)-成分をかなめとして第 q 列を掃き出す操作は P-行列を左からかけることによって行えることに注意する. $x_{pq} \neq 0$, $x_{iq} = 0$ $(i \neq p)$ の場合, $p' \neq p$ ならば $P_m(p,p';-x_{pq})P_m(p',p;\frac{1}{x_{pq}})M$ の第 q 列は $\boldsymbol{K}^m$ の基本ベクトル $e_{p'}$ になり, $p \neq m$ ならば $P_m(m,p;1)P_m(p,m;-1)P_m(m,p;1)P_m(p,m;x_{pq})P_m(m,p;\frac{-1}{x_{pq}})M$ の第 q 列は e_p になることが容易に確かめられる. 従って, $x_{pq} \neq 0$ ならば P-行列を左から M にかけることによって $p' \neq p$ または $p' = p \neq m$ ならば, 第 q 列が $e_{p'}$ であるような行列にできる. A が零行列の場合は 1) 2) の主張は明らかだから $A \neq O$ (従って, $r \geqq 1$) の 場合を考え, k $(0 \leqq k < r)$ に関して帰納的に次のことを仮定する. 「P-行列 P_k と自然数の列 $1 \leqq j(1) < j(2) < \cdots < j(k) \leqq n$ で, $P_kA = (a'_{ij})$ とすると, $1 \leqq i \leqq k$ ならば, $a'_{i1} = \cdots = a'_{i\,j(i)-1} = 0$, $a'_{i\,j(i)} = 1$, P_kA の第 $j(i)$ 列は e_i になり, $i > k$ ならば $a'_{i1} = \cdots = a'_{i\,j(k)} = 0$ が成り立つものが ある.」($k = 0$ の場合は $P_0 = E_m$, $j(0) = 0$ とする.) A' を P_kA の第 k 行より下の行と, 第 $j(k)$ 列より右の列からなる $(m-k) \times (n-j(k))$-行列とするとき, $\operatorname{rank} P_kA = \operatorname{rank} A = r > k$ だから A' は 零行列でない. A' の 0 でない最初の列を第 $j(k+1) - j(k)$ 列として $a'_{p\,j(k+1)} \neq 0$ と する. $k+1 < m$ ならば, P-行列 P' で, $P'P_kA$ の第 $j(k+1)$ 列が e_{k+1} になる ようなものがあり, $P_{k+1} = P'P_k$ とおけば, $P_{k+1}A$ は $k+1$ に対して上の 仮定を満たす. $k+1 = m$ ならば, 必然的に $r = m$ であり, $Q_m(m;\frac{1}{a'_{m,j(m)}})P_kA$ は 1) の 3 つの条件を満たす. 以上の操作を $k+1 = r$ となるまで繰り返すことにより, $r < m$ ならば P_rA が, $r = m$ ならば $Q_m(m;d)P_{m-1}A$ が 1) の 3 つの条件を満たすような P-行列 P_r, P_{r-1} と $d \neq 0$ の存在がわかる.

18. 行列式の値が 1 である n 次正方行列は $P_n(i,j;c)$ の形の基本行列の積で 表されることを示せ.

解答 階数 n の n 次正方行列で前問の 3 つの条件を満たすものは単位行列に限ることに注意する. A が $\det\ A = 1$ であるような n 次正方行列ならば, $\operatorname{rank} A = n$ だから上で示したことから $Q_m(m;d)PA$ が単位行列になるような P-行列 P と $d \neq 0$ がある. 従って, $A = P^{-1}Q_n(n;\frac{1}{d})$ であるが, この両辺の行列式を考えれば $d = 1$ で あることがわかる. P-行列の逆行列は明らかに P-行列だから主張が成り立つ.

19. 次の行列の行列式の値を求めよ.

$$1)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \\ 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 8 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad 3)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$4)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -c & c-2 \\ -1 & -1 & 1 & -c+2 \\ -2 & c-3 & 2 & 2 \\ c+1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad 5)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{pmatrix}$$

解答 1) 48 2) -3375 3) 152 4) $-c(c-1)^2(c-3)$ 5) $(d-c)(ac+bc+ad+bd-a^2-b^2-2cd)$

20. 次の行列の行列式の値を求めよ.

1) $\det\begin{pmatrix}2&3&4\\4&9&16\\8&27&64\end{pmatrix}$ 2) $\det\begin{pmatrix}1&-2&3\\-2&4&9\\4&-8&6\end{pmatrix}$ 3) $\det\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&4&9\\4&8&6\end{pmatrix}$ 4) $\det\begin{pmatrix}1&2&4\\3&9&27\\-1&1&-1\end{pmatrix}$

5) $\det\begin{pmatrix}1&0&0&2\\-1&3&1&0\\-1&1&1&-4\\2&5&2&0\end{pmatrix}$ 6) $\det\begin{pmatrix}1&2&4&8\\8&1&2&4\\4&8&1&2\\2&4&8&1\end{pmatrix}$ 7) $\det\begin{pmatrix}2&1&5&1\\1&1&-3&-4\\3&6&-2&1\\2&2&2&3\end{pmatrix}$

8) $\det\begin{pmatrix}1&-2&2&2\\2&0&-1&0\\4&-3&-1&-5\\1&1&3&-1\end{pmatrix}$ 9) $\det\begin{pmatrix}1&0&-2&3\\-1&1&2&-2\\0&-1&3&-1\\1&2&-2&4\end{pmatrix}$ 10) $\det\begin{pmatrix}1&0&2&-3\\-1&1&-2&2\\0&-1&3&-1\\1&2&-2&-4\end{pmatrix}$

11) $\det\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\1&2&2&0&0\\0&1&1&1&1\\0&a&b&c&d\\0&a^2&b^2&c^2&d^2\end{pmatrix}$ 12) $\det\begin{pmatrix}1&c&b&a&0\\1&a+2c&a+2b&0&a\\1&b+2c&0&2a+b&b\\1&0&2b+c&2a+c&c\\0&1&1&1&1\end{pmatrix}$

13) $\det\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\c&a+2c&b+2c&0&1\\b&a+2b&0&2b+c&1\\a&0&2a+b&2a+c&1\\0&a&b&c&1\end{pmatrix}$ 14) $\det\begin{pmatrix}0&a&b&c&1\\a&0&a+b+p&a+c+q&1\\b&a+b+r&0&b+c+s&1\\c&a+c+t&b+c+u&0&1\\1&1&1&1&0\end{pmatrix}$

21. k を奇数とし r は負でない実数とするとき $A^k = rE_n$ を満たす n 次実正方行列 A の行列式の値を求めよ.

解答　$A^k = rE_n$ より, $(\det A)^k = \det rE_n = r^n$. k は奇数で, $\det A$ は実数だから $\det A = r^{\frac{n}{k}}$.

22. 次の行列の行列式の値を求めよ.

1) $\begin{pmatrix}x_0&x_1&x_2&\dots&x_{n-1}&x_n\\x_1&x_0&x_2&\dots&x_{n-1}&x_n\\x_1&x_2&x_0&&x_{n-1}&x_n\\\vdots&\vdots&&\ddots&&\vdots\\x_1&x_2&x_3&&x_0&x_n\\x_1&x_2&x_3&\dots&x_n&x_0\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}x&-1&&&&\\&x&-1&&\text{\Large 0}&\\&&x&\ddots&&\\&\text{\Large 0}&&\ddots&-1&\\&&&&x&-1\\a_0&a_1&a_2&\dots&a_{n-2}&x+a_{n-1}\end{pmatrix}$

解答　1) $(x_0+x_1+\cdots+x_n)(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)$　　2) $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

23. 変数 x を成分にもつ 2 次正方行列 $\begin{pmatrix}x&x^2-1\\1&x\end{pmatrix}$ を A とする.

1) $T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x)$, $U_n(x)=\frac{\sin(n\cos^{-1}x)}{\sin(\cos^{-1}x)}$ $(n=1,2,3,\dots)$ とおき, $\boldsymbol{v}_n=\begin{pmatrix}T_n(x)\\U_n(x)\end{pmatrix}$ とすれば, $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_{n+1}=A\boldsymbol{v}_n$ が成り立つことを示せ.

2) z, w に関する連立 1 次方程式 $(tE_2-A)\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}=0$ が $z=w=0$ 以外に解をもつような t の値を 2 つ求めよ.

3) 上で求めた 2 つの t の値を α, β とするとき, $(\alpha E_2-A)\boldsymbol{p}=0$, $(\beta E_2-A)\boldsymbol{q}=0$ をみたす 0 でないベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ を 1 つずつ求めよ.

4) $\boldsymbol{p}$ を第 1 列, $\boldsymbol{q}$ を第 2 列にもつ行列を P とすれば, $P^{-1}AP = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{smallmatrix}\right)$ であることを確かめ, $\boldsymbol{v}_n = A^{n-1}v_1 = (P\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{smallmatrix}\right)P^{-1})^{n-1}v_1 = P\left(\begin{smallmatrix}\alpha^{n-1} & 0\\ 0 & \beta^{n-1}\end{smallmatrix}\right)P^{-1}\boldsymbol{v}_1$ を計算することにより, 次の等式を示せ. ただし, 実数 r に対し $[r]$ は r 以下の最大の整数を表す.

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k}x^{n-2k}(x^2-1)^k, \qquad U_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n}{2k+1}x^{n-1-2k}(x^2-1)^k$$

($\theta = \cos^{-1}x$ とおくと, $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$, $\sin n\theta = U_n(\cos\theta)\sin\theta$ だから, cos, sin の n 倍角公式が得られる.)

解答　1) $\boldsymbol{v}_1 = \left(\begin{smallmatrix}x\\ 1\end{smallmatrix}\right)$ は明らか. $\theta = \cos^{-1}x$ とおけば, $x = \cos\theta$ より, $xT_n(x) + (x^2-1)U_n(x) = \cos\theta\cos(n\theta) + (\cos^2\theta - 1)\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = \cos\theta\cos(n\theta) - \sin\theta\sin(n\theta) = \cos((n+1)\theta) = T_{n+1}(x)$, $T_n(x) + xU_n(x) = \cos(n\theta) + \cos\theta\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = \frac{\cos(n\theta)\sin\theta + \cos\theta\sin(n\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} = U_{n+1}(x)$. 従って, $A\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{v}_{n+1}$ がわかる.

2) $\det(tE_2 - A) = 0$ となるように t を定めればよいので, $\det(tE_2 - A) = t^2 - 2xt + 1$ から $t = x \pm \sqrt{x^2-1}$.

3) $\alpha = x - \sqrt{x^2-1}$, $\beta = x + \sqrt{x^2-1}$ とすると, $p = \left(\begin{smallmatrix}\sqrt{x^2-1}\\ -1\end{smallmatrix}\right)$, $q = \left(\begin{smallmatrix}\sqrt{x^2-1}\\ 1\end{smallmatrix}\right)$ とすればよい.

4) $P = \left(\begin{smallmatrix}\sqrt{x^2-1} & \sqrt{x^2-1}\\ -1 & 1\end{smallmatrix}\right)$ だから, $P^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(\begin{smallmatrix}1 & -\sqrt{x^2-1}\\ 1 & \sqrt{x^2-1}\end{smallmatrix}\right)$. これより $P^{-1}AP = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{smallmatrix}\right)$ が確かめられる. $\boldsymbol{v}_n = A^{n-1}\boldsymbol{v}_1 = (P\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{smallmatrix}\right)P^{-1})^{n-1}v_1 = P\left(\begin{smallmatrix}\alpha^{n-1} & 0\\ 0 & \beta^{n-1}\end{smallmatrix}\right)P^{-1}\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(\begin{smallmatrix}\sqrt{x^2-1} & \sqrt{x^2-1}\\ -1 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\alpha^{n-1} & 0\\ 0 & \beta^{n-1}\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & -\sqrt{x^2-1}\\ 1 & \sqrt{x^2-1}\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}x\\ 1\end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(\begin{smallmatrix}\alpha^n\sqrt{x^2-1}+\beta^n\sqrt{x^2-1}\\ -\alpha^n+\beta^n\end{smallmatrix}\right)$ だから $T_n(x) = \frac{1}{2}(\alpha^n + \beta^n) = \frac{1}{2}((x-\sqrt{x^2-1})^n + (x+\sqrt{x^2-1})^n) = \frac{1}{2}(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i x^{n-i}(x^2-1)^{\frac{i}{2}} + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}(x^2-1)^{\frac{i}{2}}) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k}x^{n-2k}(x^2-1)^k$, $U_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}(-\alpha^n + \beta^n) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}(-(x-\sqrt{x^2-1})^n + (x+\sqrt{x^2-1})^n) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}(-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i x^{n-i}(x^2-1)^{\frac{i}{2}} + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}(x^2-1)^{\frac{i}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}(\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n}{2k+1}x^{n-2k-1}(x^2-1)^{\frac{2k+1}{2}}) = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n}{2k+1}x^{n-2k-1}(x^2-1)^k$.

24. k を整数とする. 正の整数を成分にもつ n 次正方行列で, 行列式の値が k であるような行列の例を挙げよ.

解答　$T = (t_{ij})$ を $t_{ij} = \begin{cases}1 & i \leqq j\\ 0 & i > j\end{cases}$ で与えられる上半三角行列とすると, ${}^tTT$ の (i,j)-成分は, $\sum_{l=1}^{n} t_{li}t_{lj} = \begin{cases}i & i \leqq j\\ j & i > j\end{cases}$ である. 従って, とくに ${}^tTT$ の各成分は正の整数である. k が正の整数の場合, $A = {}^tT(T + (k-1)E_{11})$ とおくと, ${}^tT$, $T + (k-1)E_{11}$ はともに三角行列であることから $\det{}^tT = 1$, $\det(T + (k-1)E_{11}) = k$ は明らかで, $\det A = (\det{}^tT)(\det(T + (k-1)E_{11})) = k$ である. 一方 $(k-1){}^tTE_{11}$ の各成分は負でない整数だから $A = {}^tTT + (k-1){}^tTE_{11}$ の各成分は正の整数である. また, A の第 1 列と第 2 列を入れ替えた行列を B とすれば, B は正の整数を成分にもち, 行列式の値が負の整数 $-k$ であるような行列の例になっている. また, すべての成分が 1 である n 次正方行列は正の整数を成分にもち, 行列式の値 が 0 であるような行列の例になっている

25. 以下の $\boldsymbol{K}^4$ の 4 つのベクトルにより生成される $\boldsymbol{K}^4$ の部分空間の次元を求めよ.

1) $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$　　2) $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\5\\3\end{pmatrix}$　　4) $\begin{pmatrix}-6\\6\\-3\\-12\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\-10\\5\\20\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-4\\2\\8\end{pmatrix}$

解答　与えられたベクトルを列ベクトルにもつ行列を列に関して基本変形する.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 7\\ 2 & 1 & 3 & 0\\ -2 & -1 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 & 4 \\ 6 & -2 & -10 & -4 \\ -3 & 1 & -10 & -4 \\ -12 & 4 & 20 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるため, 1) は $\{e_1 + 2e_4, e_2, e_3\}$ を基底にもつ 3 次元部分空間,
2) は $\{e_1, e_2 - e_3, e_4\}$ を基底にもつ 3 次元部分空間,
3) は $\{e_1 - e_2 + 4e_4, e_3 - e_4\}$ を基底にもつ 2 次元部分空間,
4) は $\{e_1 - e_2 + \frac{1}{2}e_3 + 2e_4\}$ を基底にもつ 1 次元部分空間である.

26. 以下の $\boldsymbol{K}^4$ の 4 つのベクトルにより生成される $\boldsymbol{K}^4$ の部分空間の次元を求めよ.

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad 3)\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

27. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とし, $f, g : \boldsymbol{K}^4 \to \boldsymbol{K}^4$ をそれぞれ $f(x) = Ax$, $g(x) = Bx$ で与えられる線型写像とするとき, $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Im} g$ の基底を求めよ.

28. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の階数を求め, これらの行列により表される線型写像 $f, g : \boldsymbol{K}^4 \to \boldsymbol{K}^4$ の像 $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Im} g$ の基底をそれぞれ一組ずつ求めよ.

29. $f : \boldsymbol{K}^4 \to \boldsymbol{K}^4$, $g : \boldsymbol{K}^4 \to \boldsymbol{K}^4$ をそれぞれ次の行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

により表される線型写像とするとき, $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} g$, $\operatorname{Ker} g$ の 基底を求めよ.

解答　$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ -s \\ \frac{1}{2}(s+t) \end{pmatrix} \middle| s, t \in \boldsymbol{K} \right\}$, $\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ s+2t \\ -t \end{pmatrix} \middle| s, t \in \boldsymbol{K} \right\}$ より,

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ がそれぞれ $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ の基底である.

$\operatorname{Ker} g = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ s-2t \\ s \end{pmatrix} \middle| s, t \in \boldsymbol{K} \right\}$, $\operatorname{Im} g = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ s+2t \\ -t \end{pmatrix} \middle| s, t \in \boldsymbol{K} \right\}$ より,

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\0\end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\}$$ がそれぞれ $\mathrm{Ker}\, g$, $\mathrm{Im}\, g$ の基底である.

30. $f, g : \boldsymbol{K}^4 \to \boldsymbol{K}^4$ をそれぞれ, 行列 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & -1 & -1 & 2\\1 & -2 & -1 & 4\\0 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\-1 & 2 & 1 & 0\\-1 & 4 & 2 & -1\\1 & -2 & -1 & 0\end{pmatrix}$ により表される線型写像とするとき, $\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Im}\, g$, $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Ker}\, g$ の基底を求めよ.

31. a を定数とする. 線型写像 $f, g : \boldsymbol{K}^4 \to \boldsymbol{K}^4$ は $f(e_1) = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\2\end{pmatrix}$, $f(e_1 - e_2) = \begin{pmatrix}0\\-2\\-1\\-3\end{pmatrix}$, $f(-e_1 + e_3) = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$,
$f(e_1 - e_3 + e_4) = \begin{pmatrix}-1\\3\\2\\2-a\end{pmatrix}$, $g(e_1) = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}$, $g(e_1 + e_2) = \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$, $g(e_1 - e_3) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}$, $g(e_1 - e_3 - e_4) = \begin{pmatrix}-1\\2\\3\\2-a\end{pmatrix}$
を満たすとするとき, f, g を表す行列を求め, さらに $\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Im}\, g$, $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Ker}\, g$ を 求めよ.

32. $f : \boldsymbol{K}^3 \to \boldsymbol{K}^3$, $g : \boldsymbol{K}^4 \to \boldsymbol{K}^4$, $h : \boldsymbol{K}^4 \to \boldsymbol{K}^4$ をそれぞれ行列

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & a\\1 & 0 & -1\\a & -1 & -1\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}1 & b & 0 & 0\\0 & 1 & b & 0\\0 & 0 & 1 & b\\1 & 3 & 3 & 1\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix}1 & 1 & -c & c-2\\-1 & -1 & 1 & -c+2\\-2 & c-3 & 2 & 2\\c+1 & 2 & -2 & -2\end{pmatrix}$$

により表される線型写像とするとき $\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Im}\, g$, $\mathrm{Ker}\, g$, $\mathrm{Im}\, h$, $\mathrm{Ker}\, h$ の基底を求めよ.

解答　1) $a \neq 0$ の場合, $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$, $\mathrm{Im}\, f = \boldsymbol{K}^3$ より, $\mathrm{Ker}\, f$ の基底は存在せず, $\mathrm{Im}\, f$ の基底は例えば $\{e_1, e_2, e_3\}$ がある.

$a = 0$ の場合, $\mathrm{Ker}\, f = \left\{\begin{pmatrix}s\\-s\\s\end{pmatrix} \middle| s \in \boldsymbol{K}\right\}$, $\mathrm{Im}\, f = \left\{\begin{pmatrix}p\\p+r\\r\end{pmatrix} \middle| p, r \in \boldsymbol{K}\right\}$ より,

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$ がそれぞれ $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ の基底である.

2) $b \neq 1$ の場合, $\mathrm{Ker}\, g = \{0\}$, $\mathrm{Im}\, g = \boldsymbol{K}^4$ より, $\mathrm{Ker}\, g$ の基底は存在せず, $\mathrm{Im}\, g$ の基底は例えば $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ がある.

$b = 1$ の場合, $\mathrm{Ker}\, g = \left\{\begin{pmatrix}-s\\s\\-s\\s\end{pmatrix} \middle| s \in \boldsymbol{K}\right\}$, $\mathrm{Im}\, g = \left\{\begin{pmatrix}p\\q\\r\\p+2q+r\end{pmatrix} \middle| p, q, r \in \boldsymbol{K}\right\}$ より,

$$\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$ がそれぞれ $\mathrm{Ker}\, g$, $\mathrm{Im}\, g$ の基底である.

3) $c \neq 1, 2$ の場合, $\mathrm{Ker}\, h = \{0\}$, $\mathrm{Im}\, h = \boldsymbol{K}^4$ より, $\mathrm{Ker}\, h$ の基底は存在せず, $\mathrm{Im}\, h$ の基底は例えば $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ がある.

$c=1$ の場合, $\operatorname{Ker} h = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \\ s+t-u \end{pmatrix} \middle| s,t,u \in \boldsymbol{K} \right\}$, $\operatorname{Im} h = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ -p \\ -2p \\ -2p \end{pmatrix} \middle| p \in \boldsymbol{K} \right\}$ より,

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ がそれぞれ $\operatorname{Ker} h$, $\operatorname{Im} h$ の基底である.

$c=2$ の場合, $\operatorname{Ker} h = \left\{ \begin{pmatrix} 2s \\ -2s \\ 0 \\ s \end{pmatrix} \middle| s \in \boldsymbol{K} \right\}$, $\operatorname{Im} h = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ 7p+2q+r \end{pmatrix} \middle| p,q,r \in \boldsymbol{K} \right\}$ より,

$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ がそれぞれ $\operatorname{Ker} h$, $\operatorname{Im} h$ の基底である.

33. $\boldsymbol{K}^4$ の 5 つのベクトル $p_1 \sim p_4$, q が以下の様に与えられているとする.

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad p_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

$f_i : \boldsymbol{K}^4 \to \boldsymbol{K}^4$ $(i=1,2,3,4)$ は

$$f_1(p_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_1(p_2) = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_1(p_3) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f_1(p_4) = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2(p_1) = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f_2(p_2) = \begin{pmatrix} -10 \\ 7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2(p_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f_2(p_4) = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_3(p_1) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_3(p_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_3(p_3) = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_3(p_4) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_4(p_1) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f_4(p_2) = \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f_4(p_3) = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f_4(p_4) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

を満たす線型写像とする.

1) f_i $(i=1,2,3,4)$ を表す行列を A_i とするとき, A_i を求めよ.

2) 各 i に対し, $f_i(x) = q$ となる $x \in \boldsymbol{K}^4$ が存在するための a,b,c,d に関する条件を求め, このとき $f_i(x) = q$ を満たす x を求めよ.

3) 各 i に対し, $\operatorname{Im} f_i$, $\operatorname{Ker} f_i$ を求めよ.

解答　一般に $p_1, p_2, \ldots, p_k$ を $\boldsymbol{K}^n$ のベクトル, $b_1, b_2, \ldots, b_k$ を $\boldsymbol{K}^m$ のベクトルとし, $f: \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ を線型写像とする. f を表す行列を A とし, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$, $P = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$ とおくと, $f(p_j) = b_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ が成り立つためには, $AP = B$ が成り立つことが必要十分である.

1) $B_i = (f_i(p_1), f_i(p_2), f_i(p_3), f_i(p_4))$ とすれば, 上の事実から $A_iP = B_i$ が成り立つため, P の逆行列が求まれば $A_i = B_iP^{-1}$ として A_i が求まる. P の逆行列を求めるには

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 11 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の行に関する基本変形を行い,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 61 & -17 & -8 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -16 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるため

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 61 & -17 & -8 & -9 \\ -16 & 6 & 2 & 1 \\ -7 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である. 従って, A_1, A_2, A_3, A_4 は以下の様になる.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 189 & -66 & -24 & -15 \\ 63 & -22 & -8 & -5 \\ -63 & 22 & 8 & 5 \\ 63 & -22 & -8 & -5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -77 & 13 & 11 & 18 \\ 367 & -99 & -48 & -56 \\ -215 & 59 & 28 & 32 \\ 101 & -29 & -13 & -14 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 432 & -123 & -57 & -61 \\ -55 & 13 & 8 & 10 \\ -11 & 5 & 1 & 0 \\ 70 & -21 & -9 & -9 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 199 & -35 & -27 & -47 \\ 536 & -144 & -70 & -84 \\ -254 & 66 & 33 & 42 \\ 137 & -33 & -18 & -25 \end{pmatrix}$$

2) $v = f_1(p_1)$ とおくと, $f_1(p_2) = -v$, $f_1(p_3) = 2v$, $f_1(p_4) = 3v$ より $\mathrm{Im}\, f_1$ は v で生成される. 従って, $f_1(x) = q$ となる x が存在することは $q = rv$ となる $r \in \boldsymbol{K}$ が存在 することと同値である. 故に, 求める条件は $\frac{a}{3} = b = -c = d$ である. $q = rv$ のとき $f_1(x) = q$ となる x は

$$x = \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \\ \frac{63s}{5} - \frac{22t}{5} - \frac{8u}{5} - \frac{r}{5} \end{pmatrix} \quad (s, t, u \in \boldsymbol{K})$$

で与えられる.

連立 1 次方程式 $A_2x = q$ の解を求めるために行列 (A_2, q) の基本変形を以下の様に 行う.

$$\begin{pmatrix} -77 & 13 & 11 & 18 & a \\ 367 & -99 & -48 & -56 & b \\ -215 & 59 & 28 & 32 & c \\ 101 & -29 & -13 & -14 & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -77 & 13 & 11 & 18 & a \\ -18 & -34 & 7 & 34 & 5a+b \\ -13 & 1 & 2 & 4 & c+2d \\ 101 & -29 & -13 & -14 & d \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix}1&7&-1&-6&a-6c-12d\\-5&-35&5&30&5a+b-c-2d\\-13&1&2&4&c+2d\\-3&-21&3&18&8c+17d\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&7&-1&-6&a-6c-12d\\0&0&0&0&10a+b-31c-62d\\0&92&-11&-74&13a-77c-154d\\0&0&0&0&3a-10c-19d\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&7&-1&-6&a-6c-12d\\0&1&-\frac{11}{92}&-\frac{37}{46}&\frac{13a}{92}-\frac{77c}{92}-\frac{77d}{46}\\0&0&0&0&10a+b-31c-62d\\0&0&0&0&3a-10c-19d\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{15}{92}&-\frac{17}{46}&\frac{a}{92}-\frac{13c}{92}-\frac{13d}{46}\\0&1&-\frac{11}{92}&-\frac{37}{46}&\frac{13a}{92}-\frac{77c}{92}-\frac{77d}{46}\\0&0&0&0&10a+b-31c-62d\\0&0&0&0&3a-10c-19d\end{pmatrix}$$

従って $f_2(x)=q$ となる x が存在するためには $10a+b-31c-62d=3a-10c-19d=0$ が 成り立つことが必要十分である．このとき $a=\frac{10c}{3}+\frac{19d}{3}$, $b=-\frac{7c}{3}-\frac{4d}{3}$ であり, $f_2(x)=q$ となる x は

$$x=\begin{pmatrix}15s+17t-\frac{29}{276}c-\frac{59}{276}d\\11s+37t-\frac{101}{276}c-\frac{215}{276}d\\92s\\46t\end{pmatrix}\quad(s,t\in\boldsymbol{K})\ で与えられる.$$

(A_3,q) も同様に, いきなり第 1 列の掃き出しを行うと分数の計算が大変なので, “ユークリッドの互除法”のように, まず第 1 列の数字の絶対値が小さくなるように 基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{3}&\frac{8b}{3}+\frac{17c}{3}+3d\\0&1&0&-\frac{7}{9}&\frac{29b}{9}+\frac{65c}{9}+\frac{11d}{3}\\0&0&1&\frac{2}{9}&\frac{119b}{9}+\frac{245c}{9}+\frac{44d}{3}\\0&0&0&0&a-2b-8c-9d\end{pmatrix}$$

となるため, $f_3(x)=q$ となる x が存在するためには $a=2b+8c+9d$ が成り立つ ことが必要十分であり, $f_3(x)=q$ となる x は

$$x=\begin{pmatrix}3s+\frac{8}{3}b-\frac{17}{3}c+3d\\7s+\frac{29}{9}b-\frac{65}{3}c+\frac{11}{3}d\\-2s+\frac{119}{9}b-\frac{245}{9}c+\frac{44}{3}d\\9s\end{pmatrix}\quad(s\in\boldsymbol{K})\ で与えられる.$$

(A_4,q) も上と同様の方針で基本変形して,

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&\frac{1}{128}(57a-15b-193c-381d)\\0&1&0&0&\frac{1}{128}(113a-9b-249c-661d)\\0&0&1&0&\frac{1}{32}(15a-41b-167c-171d)\\0&0&0&1&\frac{1}{16}(5a+3b-31c-91d)\end{pmatrix}$$

となるため, 任意の $a,b,c,d\in\boldsymbol{K}$ に対して $f_4(x)=q$ となる x が存在する．$f_4(x)=q$ となる x は

$$x=\begin{pmatrix}\frac{1}{128}(57a-15b-193c-381d)\\\frac{1}{128}(113a-9b-249c-661d)\\\frac{1}{32}(15a-41b-167c-171d)\\\frac{1}{16}(5a+3b-31c-91d)\end{pmatrix}\ で与えられる.$$

3) 上の結果から $\operatorname{Im}f_4=\boldsymbol{K}^4$, $\operatorname{Ker}f_4=\{0\}$ であり,

$$\operatorname{Im}f_1=\left\{\begin{pmatrix}3s\\s\\-s\\s\end{pmatrix}\middle|\,s\in\boldsymbol{K}\right\},\quad\operatorname{Ker}f_1=\left\{\begin{pmatrix}s\\t\\u\\\frac{63s}{5}-\frac{22t}{5}-\frac{8u}{5}\end{pmatrix}\middle|\,s,t,u\in\boldsymbol{K}\right\}$$

$$\mathrm{Im}\, f_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{10s}{3} + \frac{19t}{3} \\ -\frac{7s}{3} - \frac{4t}{3} \\ s \\ t \end{pmatrix} \middle| s, t \in \boldsymbol{K} \right\}, \quad \mathrm{Ker}\, f_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 15s + 17t \\ 11s + 37t \\ 92s \\ 46t \end{pmatrix} \middle| s, t \in \boldsymbol{K} \right\}$$

$$\mathrm{Im}\, f_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 2s + 8t + 9u \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} \middle| s, t, u \in \boldsymbol{K} \right\}, \quad \mathrm{Ker}\, f_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 3s \\ 7s \\ -2s \\ 9s \end{pmatrix} \middle| s \in \boldsymbol{K} \right\}$$

34. $f : \boldsymbol{K}^3 \to \boldsymbol{K}^3$ を行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ a & -1 & -1 \end{pmatrix}$ により表される線型写像とするとき次の問に答えよ.

1) $\det A$ を求めよ.

2) $\mathrm{rank} A$ を求めよ.

3) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とするとき, 方程式 $Ax = b$ の解を求めよ.

4) $\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を求めよ.

35. $f : \boldsymbol{K}^4 \to \boldsymbol{K}^4$ を行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ により表される線型写像とするとき次の問に 答えよ.

1) $\det A$ を求めよ.

2) $\mathrm{rank} A$ を求めよ.

3) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とするとき, $\det A = 0$ の場合に方程式 $Ax = b$ の解を求めよ.

4) $\det A = 0$ の場合, $\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を求めよ.

36. $f : \boldsymbol{K}^4 \to \boldsymbol{K}^4$ を行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 \\ -1 & -1 & 1 & -a+2 \\ -2 & a-3 & 2 & 2 \\ a+1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ により表される線型写像とする.

1) $\det A$ を求めよ.

2) $\mathrm{rank} A$ を求めよ.

3) $\det A = 0$ の場合, 方程式 $Ax = b$ ($x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$) の解を求めよ.

4) $\det A = 0$ の場合, $\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を求めよ.

37. $\alpha, a_0, a_1, \ldots, a_n \in \boldsymbol{K}$ とし, $f : \boldsymbol{K}^{n+1} \to \boldsymbol{K}^{n+1}$ を下の行列 A で表される線型写像とする.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & & & & \\ & 1 & -\alpha & & \text{\huge 0} & \\ & & 1 & \ddots & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & -\alpha & \\ & & & & 1 & -\alpha \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

1) 数列 $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$ を帰納的に $p_1 = a_n$, $p_{j+1} = \alpha p_j + a_{n-j}$ $(1 \leqq j \leqq n)$ により定めて $R_j = R_{n+1}(n+1, j; -p_j)$ とおくとき, $R_n R_{n-1} \cdots R_2 R_1 A$ を計算せよ.

2) $F(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ を X の多項式とすると, $F(\alpha) \neq 0$ ならば $\operatorname{rank} f = n+1$, $F(\alpha) = 0$ ならば $\operatorname{rank} f = n$ である ことを示せ.

3) $\operatorname{rank} f = n+1$ のとき, 数列 $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$ を用いて A の逆行列を 表せ.

4) $\operatorname{rank} f = n$ のとき, $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$ を求めよ.

解答　1) 与えられた行列 A を $a_0, a_1, \ldots, a_n$ を変数とする行列とみなして, $A = A(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ とおき, $R_k R_{k-1} \cdots R_2 R_1 A = A(a_0, a_1, \ldots, a_{n-k-1}, p_{k+1}, 0, \ldots, 0)$ を k による帰納法で示す. $R_1 A$ は $A(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ の第 1 行を $-p_1 = -a_n$ 倍したものを第 $n+1$ 行に加えたものだから $R_1 A = A(a_0, \ldots, a_{n-2}, \alpha p_1 + a_{n-1}, 0) = A(a_0, \ldots, a_{n-2}, p_2, 0)$ が成り立ち, $k = 1$ のとき主張は正しい. $R_{k-1} \cdots R_2 R_1 A = A(a_0, \ldots, a_{n-k}, p_k, 0, \ldots, 0)$ が成り立つと仮定し, この両辺に R_k を左からかけると, $R_k A(a_0, \ldots, a_{n-k}, p_k, 0, \ldots, 0)$ は $A(a_0, \ldots, a_{n-k}, p_k, 0, \ldots, 0)$ の第 k 行を $-p_k$ 倍したものを第 $n+1$ 行に加えたものだから $R_k A(a_0, \ldots, a_{n-k}, p_k, 0, \ldots, 0) = A(a_0, \ldots, a_{n-k-1}, \alpha p_k + a_{n-k}, 0, \ldots, 0) = A(a_0, \ldots, a_{n-k-1}, p_{k+1}, 0, \ldots, 0)$ が 成り立ち, k のときも主張は正しい. 従って, $k = n$ の場合を考えると, $R_n R_{n-1} \cdots R_2 R_1 A = A(p_{n+1}, 0, \ldots, 0)$ である.

次に $p_k = \sum_{i=1}^{k} a_{i+n-k} \alpha^{i-1}$ が成り立つことを k による 帰納法で示す. $k = 1$ のときは $p_1 = a_n$ だから上式は成り立つ. $p_k = \sum_{i=1}^{k} a_{i+n-k} \alpha^{i-1}$ と仮定すると, $p_{k+1} = \alpha p_k + a_{n-k} = \sum_{i=1}^{k} a_{i+n-k} \alpha^i + a_{n-k} = \sum_{i=0}^{k} a_{i+n-k} \alpha^i = \sum_{i=1}^{k+1} a_{i+n-k-1} \alpha^i$ だから $k+1$ のときも上式は成り立つ. とくに $k = n+1$ の場合, $p_{n+1} = \sum_{i=1}^{k} a_{i+n-k} \alpha^{i-1} = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0$ である.

2) $\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} R_n R_{n-1} \cdots R_2 R_1 A$ であり, 1) の結果より, $p_{n+1} = F(\alpha)$ だから $F(\alpha) \neq 0$ ならば $\operatorname{rank} f = n+1$, $F(\alpha) = 0$ ならば $\operatorname{rank} f = n$ である.

3) $P = (R_n R_{n-1} \cdots R_2 R_1 A)^{-1}$ とおき, P の (i,j)-成分を x_{ij} とすれば, 1) の結果から $x_{ij} - \alpha x_{i+1j} = \delta_{ij}$ $(1 \leqq i \leqq n)$, $p_{n+1} x_{n+1j} = \delta_{n+1j}$ (ただし, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$) である. 仮定から $p_{n+1} = F(\alpha) \neq 0$ だから $j \neq n+1$ ならば $x_{n+1j} = 0$ である. 従って, $x_{ij} = \begin{cases} \alpha^{j-i} & 1 \leqq i \leqq j \\ 0 & j < i \leqq n+1 \end{cases}$ $(j \neq n+1)$ であり, $x_{in+1} = \frac{\alpha^{n+1-i}}{p_{n+1}}$ $(1 \leqq i \leqq n+1)$ となる. $P R_n R_{n-1} \cdots R_2 R_1 A = E_{n+1}$ だから $A^{-1} = P R_1 R_2 \cdots R_n$ である. 従って, A^{-1} の第 j 列 $(j \neq n+1)$ は P の第 j 列に P の第 $n+1$ 列を $-p_j$ 倍したものを加えたものになり, A^{-1} の第 $n+1$ 列は P の第 $n+1$ 列に等しい. A^{-1} の (i,j)-成分を a'_{ij} とすれば, 以下のように与えられる.

$$a'_{ij} = \begin{cases} \alpha^{j-i} - \frac{\alpha^{n-i+1} p_j}{p_{n+1}} & i \leqq j < n+1 \\ -\frac{\alpha^{n-i+1} p_j}{p_{n+1}} & j < i \leqq n+1 \\ \frac{\alpha^{n-i+1}}{p_{n+1}} & j = n+1 \end{cases}$$

4) $R_1, \ldots, R_n$ は正則だから, $\operatorname{Ker} f = \{x \in \boldsymbol{K}^{n+1} | \, Ax = 0\} = \{x \in \boldsymbol{K}^{n+1} | \, R_n \cdots R_1 A x = 0\}$ である. 仮定 $\operatorname{rank} f = n$ より $p_{n+1} = 0$ だから, 1) の結果から $\operatorname{Ker} f$ は $\boldsymbol{K}^{n+1}$ の基本ベクトル e_{n+1} のスカラー倍の全体 $\{x \in \boldsymbol{K}^{n+1} | \, x = t e_{n+1} \ (t \in \boldsymbol{K})\}$ である. $y \in \boldsymbol{K}^{n+1}$ に対し, $x \in \boldsymbol{K}^{n+1}$ に関する方程式 $Ax = y$ を考え, この両辺

に左から $R_nR_{n-1}\cdots R_2R_1$ をかけて, $R_nR_{n-1}\cdots R_2R_1Ax = R_nR_{n-1}\cdots R_2R_1y$ の両辺の各成分を比較する. x, y の第 i 成分をそれぞれ x_i, y_i とすれば, 1) の結果と $p_{n+1}=0$ から $x_i - \alpha x_{i+1} = y_i$ $(i \leqq n)$, $y_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i = 0$ が得られる. 従って, 方程式 $Ax=y$ が解をもつ, すなわち $y \in \operatorname{Im} f$ であるための条件は $y_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i = 0$ が成り立つことである. 故に, $\operatorname{Im} f = \{y \in \boldsymbol{K}^n \,|\, y_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} p_i y_i = 0\}$.

38. $f : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n$ を線型写像とし, $x \in \boldsymbol{K}^n$ と自然数 k に対して, $f^{k-1}(x) \neq 0$ かつ $f^k(x) = 0$ が成り立っているとする.
このとき, k 個のベクトル $x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{k-1}(x)$ は 1 次独立であること を示せ.
ここで f^m は f の m 回の合成写像 $\overbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}^{m\,個}$ を表す.

39. $f : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n$ は $f\circ f = f$ を満たす線型写像, $1_n : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n$ を $\boldsymbol{K}^n$ の恒等写像とする.
1) $\operatorname{Im} f = \{x \in \boldsymbol{K}^n \,|\, f(x) = x\}$ を示せ.
2) $\operatorname{Ker}(1_n - f) = \operatorname{Im} f$, $\operatorname{Im}(1_n - f) = \operatorname{Ker} f$ を示せ.
3) $\boldsymbol{K}^n = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$ を示せ.

40. f_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の 1 次式 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$ とし, $A = (a_{ij})$ をこれらの係数から なる $m \times n$ 行列とする. $V = \{x \in \boldsymbol{K}^n \,|\, f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_m(x) = 0\}$ とおくとき, V は $\boldsymbol{K}^n$ の $n - \operatorname{rank} A$ 次元部分空間であることを示せ.

41. A を n 次正方行列とするとき, $A^2 = O$ ならば $\operatorname{rank} A \leqq \frac{n}{2}$ である ことを示せ.
また n が偶数の場合, $A^2 = O$ であり $\operatorname{rank} A = \frac{n}{2}$ を満たす行列 A の 例を挙げよ.

42. 線型写像 $f : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n$ で $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ を満たすものがあるとき n は 偶数であることを示せ.
さらにこのとき, $\boldsymbol{K}^n$ の基底 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ で, $f(v_{2i-1}) = v_{2i}$, $f(v_{2i}) = 0$ $(1 \leqq i \leqq \frac{n}{2})$ を満たすものがとれることを示せ.

43. $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \boldsymbol{K}^n$, $f : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ を線型写像とするとき, f が 1 対 1 写像ならば
$\dim\langle v_1, v_2, \ldots, v_k\rangle = \dim\langle f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_k)\rangle$ であることを示せ.

44. V を $\boldsymbol{K}$ 上の n 次元ベクトル空間, $f : V \to V$ を線型写像とする. $f\circ f = 0$ ならば V の基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ で, この基底に関する 行列表示 $A = (a_{ij})$ が $1 \leqq i \leqq \operatorname{rank} f$ ならば $a_{2i-1\,2i} = 1$ で あり, その他の ij 成分は 0 であるようなものがとれることを示せ. さらに $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ ならば $n = 2\operatorname{rank} f$ であることを示せ.

45. 1) V, W をそれぞれ n 次元, m 次元複素ベクトル空間とし, $f : V \to W$ を 線型写像とする. V の基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, W の基底 $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ に 関する f の行列表示を $A + iB$ $(A, B \in M(m, n; \boldsymbol{R}))$ とすれば $V_{\boldsymbol{R}}$, $W_{\boldsymbol{R}}$ の基底 $\{v_1, \ldots, v_n, iv_1, \ldots, iv_n\}$, $\{w_1, \ldots, w_n, iw_1, \ldots, iw_m\}$ 関する $f_{\boldsymbol{R}} = f : V_{\boldsymbol{R}} \to W_{\boldsymbol{R}}$ の行列表示は $\left(\begin{smallmatrix} A & -B \\ B & A \end{smallmatrix}\right)$ となることを示せ.
2) $R : M(m, n; \boldsymbol{C}) \to M(2m, 2n; \boldsymbol{R})$ を $R(A + iB) = \left(\begin{smallmatrix} A & -B \\ B & A \end{smallmatrix}\right)$ で定めれば R は線型写像で, $P \in M(l, m; \boldsymbol{C})$, $Q \in M(m, n; \boldsymbol{C})$ に対して, $R(PQ) = R(P)R(Q)$ が成り立つことを示せ. また, $m = n$ の場合, $\operatorname{tr} R(P) = 2\operatorname{Re}(\operatorname{tr} P)$, $\det R(P) = |\det P|^2$ を示せ.

46. 1) V_{n-1} を複素数を係数にもち x を変数とする $n-1$ 次以下の多項式全体から なるベクトル空間とする. $a_1, a_2, \ldots, a_r$ を相異なる複素数とし, $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$ を満たす $m_1, m_2, \ldots, m_r \geqq 1$ に対して $f(x) = (x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2}\ldots(x - a_r)^{m_r}$, $f_{jk}(x) = \frac{f(x)}{(x - a_j)^k}$ $(1 \leqq k \leqq m_j,\ 1 \leqq j \leqq r)$ とおくとき $\{f_{jk}(x) | 1 \leqq k \leqq m_j,\ 1 \leqq j \leqq r\}$ は V_{n-1} の基底になることを示せ.
2) 任意の $p(x) \in V_{n-1}$ に対して

$$\frac{p(x)}{f(x)} = \sum_{1 \leqq k \leqq m_j, 1 \leqq j \leqq r} \frac{A_{jk}}{(x - a_j)^k}$$

を満たす複素数 A_{jk} $(1 \leqq k \leqq m_j,\ 1 \leqq j \leqq r)$ がひととおりに 定まることを示せ.

47. 1) W_{n-1} を実数を係数にもち x を変数とする $n-1$ 次以下の多項式全体から なるベクトル空間とする. $a_1, a_2, \ldots, a_r$ を相異なる実数, $(b_1, c_1), (b_2, c_2), \ldots, (b_s, c_s)$ を 相異なる実数の順序対とし, 各 j について $b_j^2 - 4c_j < 0$ が成り立つとする. $m_1 + m_2 + \cdots + m_r + 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_s) = n$ を満たす $m_1, m_2, \ldots, m_r, n_1, n_2, \ldots, n_s \geqq 1$ に対して $f(x) = (x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\ldots(x-a_r)^{m_r}(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}(x^2+b_2x+c_2)^{n_2}\ldots(x^2+b_sx+c_s)^{n_s}$, $f_{jk}(x) = \frac{f(x)}{(x-a_j)^k}$ $(1 \leqq k \leqq m_j,\ 1 \leqq j \leqq r)$, $g_{jk}(x) = \frac{f(x)}{(x^2+b_jx+c_j)^k}$ $(1 \leqq k \leqq n_j,\ 1 \leqq j \leqq s)$, $h_{jk}(x) = \frac{xf(x)}{(x^2+b_jx+c_j)^k}$ $(1 \leqq k \leqq n_j,\ 1 \leqq j \leqq s)$ とおくとき $\{f_{jk}(x) | 1 \leqq k \leqq m_j,\ 1 \leqq j \leqq r\} \cup \{g_{jk}(x), h_{jk}(x) | 1 \leqq k \leqq n_j,\ 1 \leqq j \leqq s\}$ は W_{n-1} の基底になることを示せ.

2) 任意の $p(x) \in W_{n-1}$ に対して

$$\frac{p(x)}{f(x)} = \sum_{1 \leqq k \leqq m_j, 1 \leqq j \leqq r} \frac{A_{jk}}{(x-a_j)^k} + \sum_{1 \leqq k \leqq n_j, 1 \leqq j \leqq s} \frac{B_{jk}x + C_{jk}}{(x^2+b_jx+c_j)^k}$$

を満たす実数 A_{jk} $(1 \leqq k \leqq m_j,\ 1 \leqq j \leqq r)$, B_{jk}, C_{jk} $(1 \leqq k \leqq n_j,\ 1 \leqq j \leqq s)$ がひととおりに定まることを 示せ.

48. $F : \boldsymbol{K}^n \times \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n$ を 2 重線型写像 (双線型写像) とする. $F(e_i, e_j) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{ij} e_k$ とおくとき以下の問に答えよ.

1) F が交代 2 重線型写像であるためには $a_k^{ii} = 0$, $a_k^{ji} = -a_k^{ij}$ が 任意の $1 \leqq i, j, k \leqq n$ に対して成り立つことが必要十分であることを示せ.

2) F が交代 2 重線型写像ならば, $x, y \in \boldsymbol{K}^n$ に対し, x, y の第 j 成分をそれぞれ x_j, y_j とすれば $F(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n}(\sum\limits_{i<j} a_k^{ij}(x_iy_j - x_jy_i))e_k$ が成り立つことを示せ.

3) 任意の $x, y, z \in \boldsymbol{K}^n$ に対して $F(F(x,y),z) = F(x, F(y,z))$ が成り立つため には任意の $1 \leqq i, j, k, l \leqq n$ に対して $\sum\limits_{m=1}^{n} a_m^{ij} a_l^{mk} = \sum\limits_{m=1}^{n} a_m^{jk} a_l^{im}$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

4) $n = 3$ の場合, F が交代 2 重線型写像で $a_3^{12} = a_1^{23} = a_2^{31} = 1$, $a_1^{12} = a_2^{12} = a_2^{23} = a_3^{23} = a_1^{31} = a_3^{31} = 0$ の場合, $x, y, z \in \boldsymbol{K}^3$ に対し, $(F(x,y), z)$ は x, y, z をこの順に列ベクトルにもつ 行列の行列式に等しいことを示せ. ここで (x,y) は $\boldsymbol{K}^3$ の x と y の内積 $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ を表す.

49. $\boldsymbol{R}^3$ の標準的な内積 $(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ を考える. 以下に与える $\boldsymbol{R}^3$ の 3 つのベクトルをこの内積に関して正規直交化せよ.

1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

50. $\boldsymbol{R}^3$ の原点を通る平面 $ax + by + cz = 0$ を P とする.

1) $\boldsymbol{R}^3$ の各点 p を P に下した垂線の足に対応させる写像を表す行列を求めよ.

2) P に関する対称移動を表す行列を求めよ.

51. $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{R}^3$ の零でないベクトルとし, v を 方向ベクトルとして原点を通る $\boldsymbol{R}^3$ の直線 を ℓ とする.

1) $\boldsymbol{R}^3$ の各点 p を ℓ に下した垂線の足に対応させる写像を表す行列を 求めよ.

2) ℓ に関する対称移動を表す行列を求めよ.

52. $A = (a_{jk})$ を $m \times n$ 行列とし, $M = \sum\limits_{j,k} |a_{jk}|^2$ と おけば, 任意の $x \in \boldsymbol{C}^n$ に対し, $\|Ax\| \leqq M\|x\|$ が 成り立つことを示せ. (ヒント. A の第 j 行を a_j とすると Ax の第 j 成分は内積 $({}^t a_j, \bar{x})$ で与えられることに注意し, Schwartz の不等式を用いる.)

解答　A の第 j 行を a_j とすると Ax の第 j 成分は内積 $({}^t a_j, \bar{x})$ で与えられるから, Schwartz の不等式を用いると, $|({}^t a_j, \bar{x})| \leqq \|{}^t a_j\|\|\bar{x}\| = \|{}^t a_j\|\|x\|$. 従って, $\|Ax\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{m} |({}^t a_j, \bar{x})|^2 \leqq \sum\limits_{j=1}^{m} \|{}^t a_j\|^2\|x\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{m}(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2)\|x\|^2 = M^2\|x\|^2$ だから結果が得られる.

53. 1) 三角行列 A がユニタリ行列ならば, 対角成分の絶対値がすべて 1 であるような 対角行列であることを示せ.

2) 正則行列 P, Q が $P^*P = Q^*Q$ を満たせば, QP^{-1} はユニタリ行列で あることを示せ.

解答　1) A の (j,k)-成分を a_{jk} とすれば, 仮定から $j > k$ ならば $a_{jk} = 0$ で ある. 従って, $A^*A = E_n$ の両辺の (j,k)-成分を比較して, $j \neq k$ ならば $\sum_{l=1}^{m_{jk}} \bar{a}_{lj} a_{lk} = 0$ (m_{jk} は j と k の 小さい方) $j = k$ ならば $\sum_{l=1}^{j} |a_{lj}|^2 = 1$ となる. とくに $j = 1$ の場合は $k \neq 1$ ならば $a_{1k} = 0$ であり, $|a_{11}| = 1$ が 得られる. 帰納的に $j \leqq r$ ならば, $a_{jk} = 0$ $(k \neq j)$, $|a_{jj}| = 1$ が成り立つと 仮定する. $k \neq r+1$ とすれば, $\sum_{l=1}^{m_{r+1k}} \bar{a}_{lr+1} a_{lk} = 0$ であり, また $\sum_{l=1}^{r+1} |a_{lr+1}|^2 = 1$ が成り立つ. 帰納法の仮定から $l \leqq r$ ならば $a_{lr+1} = 0$ だから $k > r+1$ ならば $m_{r+1k} = r+1$ であることに注意すると, $\bar{a}_{r+1r+1} a_{r+1k} = 0$ $(k > r+1)$ と $|a_{r+1r+1}| = 1$ を得る. 一方, $k < r+1$ ならば $a_{r+1k} = 0$ だから上のことから, $j \leqq r+1$ ならば, $a_{jk} = 0$ $(k \neq j)$, $|a_{jj}| = 1$ が成り立ち, 帰納的に主張が示される.

2) $P^*P = Q^*Q$ の両辺に右から P^{-1}, 左から $(P^*)^{-1}$ をかけると, $E = (P^*)^{-1}Q^*QP^{-1}$. $(P^*)^{-1} = (P^{-1})^*$, $(AB)^* = B^*A^*$ が成り立つため, $(P^*)^{-1}Q^*QP^{-1} = (P^{-1})^*Q^*QP^{-1} = (QP^{-1})^*QP^{-1}$. 従って $(QP^{-1})^*QP^{-1}$ は単位行列に等しいため, QP^{-1} はユニタリ行列 である.

54. V を $\boldsymbol{K}$ 上の n 次元ベクトル空間, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ を V の基底と する.

1) 任意の $(g_{jk}) \in M(n; \boldsymbol{K})$ に対して, 次の性質 (1), (2) をもつ 写像 $B : V \times V \to \boldsymbol{K}$ で, $B(v_j, v_k) = g_{jk}$ $(1 \leqq j, k \leqq n)$ を 満たすものがただ 1 つだけ存在することを示せ.

(1) $B(v + v', w) = B(v, w) + B(v', w), \quad B(v, w + w') = B(v, w) + B(v, w')$

(2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w), \quad B(v, \lambda w) = \bar{\lambda} B(v, w)$

2) 任意の n 次エルミット行列 (g_{jk}) に対して, 上の (1), (2) と次の (3) を 満たす写像 $B : V \times V \to \boldsymbol{K}$ で, $B(v_j, v_k) = g_{jk}$ $(1 \leqq j, k \leqq n)$ を満たすものがただ 1 つだけ存在することを示せ.

(3) $B(w, v) = \overline{B(v, w)}$

55. V を $\boldsymbol{K}$ 上の n 次元ベクトル空間, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ を V の基底と する. $\boldsymbol{K}$ の要素を成分にもつ n 次正則行列 P に対し, $P^*P = (g_{jk})$ とすれば, 前問から $B_P(v_j, v_k) = g_{jk}$ を満たし, 演習問題 54 の性質 (1), (2) をもつ 写像 $B_P : V \times V \to \boldsymbol{K}$ がただ 1 つ存在するが, これは V の内積になることを 示せ.

56. G を n 次元計量ベクトル空間 V のある基底に関する内積の行列表示とする とき, $G = P^*P$ を満たす三角行列 P で, 対角成分が正の実数であるようなものが 存在することを示せ.

57. V を $\boldsymbol{K}$ 上の n 次元ベクトル空間, $I(V)$ を V の内積全体からなる集合, T_n^+ を $\boldsymbol{K}$ の要素を成分にもち, 対角成分が正の実数であるような n 次 三角行列全体の集合とする. V の基底 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ を 1 組定め, $P \in T_n^+$ に対して $B_P : V \times V \to \boldsymbol{K}$ を演習問題 55 の写像とする. 写像 $\beta : T_n^+ \to I(V)$ を $\beta(P) = B_P$ で定めれば, β は 1 対 1 上への 写像であることを示せ.

58. 線型写像 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ をそれぞれ } p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

にうつす. このとき, 次の問に答えよ.

1) p, q, r をそれぞれ u, v, w の 1 次結合で表せ.

2) 基底 $\{u, v, w\}$ に関する f の行列表示を求めよ.

3) f の固有値を求め, f の固有ベクトルを u, v, w の 1 次結合で表せ.

解答　1) $p = u - v$, $q = v - w$, $r = -u - v + 2w$　　2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $(= A$ とおく$)$

3) f の固有値は f の行列表示 A の固有値だから上の結果から 0, 1, 3. また, これらに対する固有ベクトルはそれ

ぞれ $k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $k\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $k\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ $(k \neq 0)$ となるため, f の固有値 $0, 1, 3$ に 対する固有ベクトルは順に $k(u+v+w)$, $k(u-v)$, $k(u+v-2w)$ となる.

59. 以下の行列について, 対角化可能であれば対角化をし, そうでなければその理由を 述べよ.

1) $\begin{pmatrix}0&4&6\\1&0&3\\-1&-2&-5\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}0&-5&-7\\-1&-1&-4\\1&3&6\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}6&6&5\\1&5&2\\-8&-12&-8\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}0&1&3\\4&0&6\\-2&-1&-5\end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix}-1&-1&-4\\-5&0&-7\\3&1&6\end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix}4&2&1\\-4&-2&-2\\2&2&3\end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\7&7&3\\-5&-4&-1\end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix}-5&5&-1\\-2&1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix}1&-2&-1\\4&7&2\\-2&-2&2\end{pmatrix}$

60. 次の行列の固有値と固有ベクトルを求め, 対角化可能ならば対角化 せよ.

1) $\begin{pmatrix}3&8&12\\2&3&6\\-2&-4&-7\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}4&-1&-2\\2&1&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}1&3&2\\-5&17&10\\7&-21&-12\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}4&1&1\\2&4&1\\0&1&4\end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix}4&-4&2\\2&-2&1\\-4&4&-2\end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix}-6&-2&-6\\4&3&3\\8&2&8\end{pmatrix}$

解答　$k \neq 0$, $(l, m) \neq (0, 0)$ とする.

1) 固有値 1, 固有ベクトル $k\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$; 固有値 -1, 固有ベクトル $l\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$;
対角化する行列 $\begin{pmatrix}-2&-2&-3\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

2) 固有値 1, 固有ベクトル $k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; 固有値 2, 固有ベクトル $k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$;
固有値 3, 固有ベクトル $k\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; 対角化する行列 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

3) 固有値 2, 固有ベクトル $l\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$; 対角化不可能

4) 固有値 3, 固有ベクトル $k\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$; 固有値 6, 固有ベクトル $k\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$; 対角化不可能

5) 固有値 0, 固有ベクトル $l\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$; 対角化不可能

6) 固有値 1, 固有ベクトル $k\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$; 固有値 2, 固有ベクトル $l\begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$;

対角化する行列 $\begin{pmatrix}-2&1&0\\1&-4&-3\\-2&0&1\end{pmatrix}$

61. 1) 行列 $A=\begin{pmatrix}-3a+9&-2&-a+2\\-3a+1&0&-a\\9a-18&6&3a-3\end{pmatrix}$ の固有値を求めよ.

2) $a=0$ のとき, 上の行列 A を対角化する正則行列 P を求めよ.

解答　固有値は 1, 2, 3 で, これらに対する固有ベクトルは順に $\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\\-6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a-6\\a-2\\-3a+16\end{pmatrix}$ であり, $P=\begin{pmatrix}1&2&a-6\\1&1&a-2\\-3&-6&-3a+16\end{pmatrix}$.

62. 1) 行列 $A=\begin{pmatrix}-6a+5&6&-2a+3\\-3a+6&5&-a+3\\18a-18&-18&6a-10\end{pmatrix}$ の固有値を求めよ.

2) $a=0$ のとき, 上の行列 A を対角化する正則行列 P を求めよ.

3) $a\neq 0$ のとき, A は対角化不可能であることを示せ.

解答　固有多項式は $(t+1)^2(t-2)$ で, 固有値は -1 と 2. 2 に対する固有ベクトルは $k\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ $(k\neq 0)$, -1 に対する固有ベクトルは $a=0$ の場合は $l\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ $((l,m)\neq(0,0))$, $a\neq 0$ の場合は $k\begin{pmatrix}2\\1\\-6\end{pmatrix}$ $(k\neq 0)$ となる. 従って $a=0$ の場合, $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\-3&-2&-2\end{pmatrix}$ は A を 対角化し, $a\neq 0$ の場合は A の固有ベクトルからなる基底が存在しないため A は対角化不可能.

63. 以下の行列はそれぞれ次のいずれの場合にあてはまるか答え, その理由も述べよ.

(a) ユニタリー行列で対角化可能　(b) ユニタリー行列では対角化できないが, 対角化可能　(c) 対角化不可能

1) $\begin{pmatrix}1&3&4\\3&8&5\\4&5&9\end{pmatrix}$　2) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$　3) $\begin{pmatrix}8&2&8\\3&3&4\\-6&-2&-6\end{pmatrix}$　4) $\begin{pmatrix}4&0&-5\\0&2&0\\5&0&4\end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$　6) $\begin{pmatrix}3&4&3\\-2&-6&-6\\2&8&8\end{pmatrix}$　7) $\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　8) $\begin{pmatrix}2&3&4\\3&-1&5\\4&5&7\end{pmatrix}$

解答　1) と 8) は対称行列だから (a). 4) と 5) は正規行列になっているためこれらも (a).

3) は固有値 1, 2 をもち, これらに対する固有ベクトルはそれぞれ, $k\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $l\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}$ の形になり,

固有ベクトルからなる $\boldsymbol{K}^3$ の基底 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれるため, この行列は対角化可能である. しかし, 相異なる固有値に対する固有ベクトル (たとえば $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$) は 直交しないため, ユニタリー行列では対角化不可能である. 6) は固有値 1, 2 をもち, これらに対する固有ベクトルはそれぞれ, $k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $l\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の形になり, 固有ベクトルからなる $\boldsymbol{K}^3$ の基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれるため, この行列は対角化可能である. しかし, 相異なる固有値に対する固有ベクトル (たとえば $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$) は 直交しないため, ユニタリー行列では対角化不可能である. 従って, 3) と 6) は (b) の場合にあてはまる.

2) は固有値 1, 2 をもち, これらに対する固有ベクトルはそれぞれ, $k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $l\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の形になるが, $\boldsymbol{K}^3$ を生成しないため, 対角化不可能. 7) は固有値 1, 3 をもち, これらに対する固有ベクトルはそれぞれ, $k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $l\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の形になるが, $\boldsymbol{K}^3$ を生成しないため, 対角化不可能. 従って, 2) と 7) は (c) の場合にあてはまる.

64. 次の対称行列を対角化する直交行列を求めよ. ただし 8) では $a \neq 0$ とする.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} a-1 & a & a \\ a & a-1 & a \\ a & a & a-1 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ 10) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 11) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ 12) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

解答　$k \neq 0$, $(l, m) \neq (0, 0)$ とする.

1) 固有値 0, 固有ベクトル $k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 固有値 3, 固有ベクトル $l\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

対角化する直交行列 $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2) 固有値 5, 固有ベクトル $k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; 固有値 0, 固有ベクトル $l\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

対角化する直交行列 $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) 固有値 -3, 固有ベクトル $k\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$; 固有値 3, 固有ベクトル $l\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$;

対角化する直交行列 $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2}\\-1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\\2 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$

4) 固有値 -2, 固有ベクトル $k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$; 固有値 4, 固有ベクトル $l\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$;

対角化する直交行列 $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3} & \sqrt{2}\\1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2}\\2 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$

5) 固有値 2, 固有ベクトル $k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; 固有値 -1, 固有 ベクトル $l\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$;

対角化する直交行列 $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1\\\sqrt{2} & 0 & -2\\\sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$

6) 固有値 -1, 固有ベクトル $k\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$; 固有値 1, 固有ベクトル $l\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$;

対角化する直交行列 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & \sqrt{2} & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

7) 固有値 -6, 固有ベクトル $k\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$; 固有値 3, 固有ベクトル $l\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$;

対角化する直交行列 $\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\sqrt{5} & 3 & 4\\\sqrt{5} & -6 & 2\\-2\sqrt{5} & 0 & 5\end{pmatrix}$

8) 固有値 $3a-1$, 固有ベクトル $k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; 固有値 -1, 固有ベクトル $l\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$;

対角化する直交行列 $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1\\\sqrt{2} & 0 & 2\\\sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$

65. 次の 2 次形式を変数の直交変換により $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2$ の形に せよ.

1) $xy+xz+xu+yz+yu+zu$ 2) $x^2+4y^2+z^2+4u^2+4xy+2xz+4xu+4yz+8yu+4zu$

解答 1) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\1/2 & -1/\sqrt{2} & 0 & 0\\1/2 & 0 & -1/\sqrt{2} & 0\\1/2 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\u'\end{pmatrix}$ により, $3{x'}^2-{y'}^2-{z'}^2-{u'}^2$

2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{15} \\ 2/\sqrt{10} & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{15} \\ 1/\sqrt{10} & 0 & -5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{15} \\ 2/\sqrt{10} & 0 & 0 & -3/\sqrt{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ u' \end{pmatrix}$ により, $10x'^2$

66. 次の 2 次形式の符号数を求めよ.

1) $3x^2 + 3y^2 + 2xy + 4xz - 4yz$　　2) $xy + yz + zx$

3) $-x^2 - 2y^2 - z^2 - 4xy + 6xz + 2yz$　　4) $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4xy - 2xz + 2yz$

解答　1) $3x^2 + 3y^2 + 2xy + 4xz - 4yz = (x, y, z) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ だから 6 の 4) の結果から, 与えられた 2 次形式の 符号数は $(2, 1)$ である.

2) $2xy + 2yz + 2zx = (x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ だから 6 の 5) の結果と, $xy + yz + zx$ と $2xy + 2yz + 2zx$ の符号数は 一致することから, 与えられた 2 次形式の符号数は $(1, 2)$ である.

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおき, A の固有多項式を $f(t)$ とする. このとき $-x^2 - 2y^2 - z^2 - 4xy + 6xz + 2yz = {}^t vAv$ であり, $f(t) = \det(tE_3 - A) = t^3 + 4t^2 - 8t - 9$, $f'(t) = 3t^2 + 8t - 8$ より, f は負の数で正の極大値をとり, 正の数で負の極大値をとる. このことと, $f(0) = -9 < 0$ から $f(t) = 0$ は負の解 2 つと正の解 1 つをもつため 符号数は $(1, 2)$ である.

4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおき, A の固有多項式を $f(t)$ とする. このとき $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4xy - 2xz + 2yz = {}^t vAv$ であり, $f(t) = \det(tE_3 - A) = t^3 - 9t^2 + 20t + 1$, $f'(t) = 3t^2 - 18t + 20$ より, f は正の数で 正の極大値と負の極大値をとる. このことと, $f(0) = 1 > 0$ から $f(t) = 0$ は負の解 1 つと正の解 2 つをもつため 符号数は $(2, 1)$ である.

67. 次の 2 次形式の符号数を求めよ.

1) $x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 4xy + 8yz - 4xz$　2) $x^2 - 2y^2 - z^2 + 6xy - 2xz - 2yz$　3) $x^2 - y^2 - 2z^2 - 2xy + 6xz - 2yz$

4) $2x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy - 8yz + 4zx$　5) $6x^2 + 3y^2 + 6z^2 - xy + yz - 2xz$　6) $xy - 2xz + 4yz - 6xw + 8yw - 10zw$

7) $2x^2 - y^2 + 2z^2 - xy + yz - 2xz$　8) $xy + 2xz + 4yz + 6xw + 8yw + 10zw$

68. 次の 2 次形式の符号数を求めよ.

1) $x^2 - y^2 + z^2 - 2w^2 + 2xy - 2yz + 4xz - 6xw + 8yw - 4zw$

2) $2xy - 2yz + 4xz - 6xw + 8yw - 4zw$

解答　1) $x^2 - y^2 + z^2 - 2w^2 + 2xy - 2yz + 4xz - 6xw + 8yw - 4zw = (x + y + 2z - 3w)^2 - 2y^2 - 3z^2 - 11w^2 - 6yz + 14yw + 8zw = (x + y + 2z - 3w)^2 - 2(y + \frac{3}{2}z - \frac{7}{2}w)^2 + \frac{3}{2}z^2 + \frac{27}{2}w^2 - \frac{5}{2}zw = (x + y + 2z - 3w)^2 - 2(y + \frac{3}{2}z - \frac{7}{2}w)^2 + \frac{3}{2}(z - \frac{5}{6}w)^2 + \frac{897}{72}w^2$ より符号数は (3,1).

2) $x = u + v$, $y = u - v$ とおくと, $2xy - 2yz + 4xz - 6xw + 8yw - 4zw = 2u^2 - 2v^2 + 2uz + 6vz + 2uw - 14vw - 4zw = 2(u + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}w)^2 - 2v^2 + 6vz - 14vw - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}w^2 - \frac{9}{2}zw = 2(u + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}w)^2 - 2(v - \frac{3}{2}z + \frac{7}{2}w)^2 + 4z^2 + 24w^2 - 15zw = 2(u + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}w)^2 - 2(v - \frac{3}{2}z + \frac{7}{2}w)^2 + 4(z - \frac{15}{8}w)^2 + \frac{159}{16}w^2$ より符号数は (3,1).

69. 対称行列 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ の 符号数は a の値によってどのようにかわるか？

解答　$a>1$ のとき $(4,0)$, $a=1$ のとき $(1,0)$, $-3<a<1$ のとき $(1,3)$, $a=3$ のとき $(0,3)$, $a<-3$ のとき $(0,4)$.

70. $B=\begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ (b_1,b_2,b_3 は実数で, $b\neq 0$), $c=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$ とする. このとき以下の問に答えよ.

1) B の固有値は 0, ci, $-ci$ であることを示せ.

2) u を ci に対する長さ 1 の固有ベクトルとし, $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(u+\bar{u})$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}i}(u-\bar{u})$, $z=\frac{1}{c}b$ とおけば, x, y の各成分は実数で, x,y,z は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底であることを示せ.

3) Bx, By, Bz を, x, y, z の 1 次結合で表せ.

4) P を x, y, z をそれぞれ第 1 列, 第 2 列, 第 3 列にもつ行列とする とき, $P^{-1}BP$ を求めよ.

解答　1) B の固有多項式は $\det(tE_3-B)=t^3+c^2t=t(t+ci)(t-ci)$ だから固有値は 0, ci, $-ci$.

2) 複素行列 $A=(a_{jk})\in M(m,n;\boldsymbol{C})$ に対し $\overline{A}=(\bar{a}_{jk})$ と すれば, $A,B\in M(m,n;\boldsymbol{C})$, $C\in M(n,l;\boldsymbol{C})$, $\lambda\in\boldsymbol{C}$ に対して $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$, $\overline{AC}=\overline{A}\,\overline{C}$, $\overline{\lambda A}=\bar{\lambda}\overline{A}$ が成り立ち, $A\in M(m,n;\boldsymbol{R})$ であるためには $\overline{A}=A$ であることが必要十分である.

$Bu=ciu$ の両辺の共役を考えると $B\bar{u}=-ci\bar{u}$ だから $\bar{u}$ は $-ci$ に対する長さ 1 の固有ベクトルである. 従って, $\bar{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}+\bar{\bar{u}})=x$, $\bar{y}=-\frac{1}{\sqrt{2}i}(\bar{u}-\bar{\bar{u}})=y$ より $x,y\in\boldsymbol{R}^3$. $Bb=0$ だから b は B の固有値 0 に対する固有ベクトルである. z, u, $\bar{u}$ は長さが 1 であり, 正規行列 B の相異なる固有値 0, ci, $-ci$ に対する固有ベクトルであるため互いに直交する. このことから $(z,x)=(z,y)=0$ は明らかで, $(x,y)=-\frac{1}{2i}(u+\bar{u},u-\bar{u})=-\frac{1}{2i}((u,u)-(\bar{u},\bar{u}))=0$, $(x,x)=\frac{1}{2}(u+\bar{u},u+\bar{u})=\frac{1}{2}((u,u)+(\bar{u},\bar{u}))=1$, $(y,y)=\frac{1}{2}(u-\bar{u},u-\bar{u})=\frac{1}{2}((u,u)+(\bar{u},\bar{u}))=1$. 故に x,y,z は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底である.

3) $Bx=B(\frac{1}{\sqrt{2}}(u+\bar{u}))=\frac{1}{\sqrt{2}}(Bu+B\bar{u})=\frac{1}{\sqrt{2}}(ciu-ci\bar{u})=\frac{ci}{\sqrt{2}}(u-\bar{u})=-cy$,
$By=B(\frac{1}{\sqrt{2}i}(u-\bar{u}))=\frac{1}{\sqrt{2}i}(Bu-B\bar{u})=\frac{1}{\sqrt{2}i}(ciu+ci\bar{u})=\frac{c}{\sqrt{2}}(u-\bar{u})=cx$, $\quad Bz=0$.

4) 3) の結果から $P^{-1}BP=\begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

71. 1) 直交行列 P の実数の固有値は 1 または -1 であることを示し, P の固有方程式が -1 を s 重根にもてば $\det P=(-1)^s$ であることを証明 せよ.

2) 対称行列ではない直交行列は虚数の固有値をもつことを示せ.

3) 行列式が 1 である奇数次の直交行列は固有値 1 をもつことを示せ.

解答　1) 直交行列 P はユニタリー行列だから固有値の絶対値は 1 である. 従って実数の固有値は 1 または -1 である. P の固有多項式の係数は実数だから
$\det(tE_n-P)=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_r)(t-\mu_1)(t-\mu_2)\cdots(t-\mu_l)(t-\bar{\mu}_1)(t-\bar{\mu}_2)\cdots(t-\bar{\mu}_l)$ (ただし $r+2l=n$, $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_l\in\boldsymbol{R}$, $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_l\in\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R}$) のように因数分解される. $\det P=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_l\mu_1\mu_2\ldots\mu_l\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2\cdots\bar{\mu}_l=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_l|\mu_1|^2|\mu_2|^2\cdots|\mu_l|^2$ であり, $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_s=-1$, $\lambda_{s+1}=\lambda_{s+2}=\cdots=\lambda_r=1$ とすれば $|\mu_1|=|\mu_2|=\cdots=|\mu_l|=1$ より, $\det P=(-1)^s$ である.

2) 直交行列は正規行列だから, すべての固有値が実数であれば対称行列になるため, 対称行列ではない直交行列は虚数の固有値をもつ.

3) P を行列式が 1 である奇数次の直交行列とすると, P の固有多項式は奇数次の 実係数多項式だから奇数個の実数解をもつ. すなわち実数である P の固有値は奇数個であり $\det P=1$ だから 1) の 結果より -1 の重複度は偶数である. P の実数の固有値は 1 か -1 に限るため P は 1 を固有値にもつ.

72. A を行列式が 1 である 3 次直交行列で, 対称行列ではないとする.

1) A の固有値 1 に対する固有ベクトルを方向ベクトルとして原点を通る直線を ℓ とすれば, A は ℓ を軸に回転する線型写像を表すことを示せ.

2) 行列式が 1 の直交行列 P で, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるものがあることを示し, θ は $0 < \theta < \pi$ の範囲で 直交行列 P の選び方によらずに一通りに定まることを示せ. この θ を A の回転角と呼ぶ.

3) $\cos\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}A - 1)$ であることを示せ.

4) $\frac{1}{2}(A - {}^tA) = \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ とおけば b は ℓ に平行なベクトル で, $\sin\theta = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$ となることを示せ.

解答　A の 1 以外の固有値は問題 8 の結果から絶対値 1 の一組の共役な虚数 だから $\cos\theta + i\sin\theta$, $\cos\theta - i\sin\theta$ $(0 < \theta < \pi)$ であるとしてよい. 1 に対する長さ 1 の実数を成分にもつ固有ベクトルを v, $\cos\theta + i\sin\theta$ に対する長さ 1 の固有ベクトルを u とすれば, $\bar{u}$ は $\cos\theta - i\sin\theta$ に対する長さ 1 の固有ベクトルであり, $\{u, \bar{u}, v\}$ は $\boldsymbol{C}^3$ の正規直交系になる. 問題 7 と同様に $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + \bar{u})$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}i}(u - \bar{u})$, $z = v$ とおけば, x, y の各成分 は実数で, x, y, z は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底である. $Au = (\cos\theta + i\sin\theta)u$, $A\bar{u} = (\cos\theta - i\sin\theta)\bar{u}$ から, $Ax = \cos\theta x - \sin\theta y$, $Ay = \sin\theta x + \cos\theta y$ が 得られる. 従って, P を x, y, z をそれぞれ第 1 列, 第 2 列, 第 3 列にもつ行列と すると き, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つ.

このとき, $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}(P^{-1}AP) = 2\cos\theta + 1$ から $\cos\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}A - 1)$ が得られるため, θ は $0 < \theta < \pi$ の範囲で直交行列 P の選び方に よらずに一通りに定まることがわかる.

p を $\boldsymbol{R}^3$ の任意のベクトルとすれば, x, y, z は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底 だから $p = (p, x)x + (p, y)y + (p, z)z$ と表される. 従って, $Ap = (p, x)Ax + (p, y)Ay + (p, z)Az = ((p, x)\cos\theta + (p, y)\sin\theta)x + (-(p, x)\sin\theta + (p, y)\cos\theta)y + (p, z)z$ より, p, Ap から ℓ に 下した垂線の足はともに $(p, z)z$ となって一致し, p, Ap から ℓ に下した 垂線の長さは $\|p - (p, z)z\| = \sqrt{(p, x)^2 + (p, y)^2}$, $\|Ap - (p, z)z\| = \sqrt{((p, x)\cos\theta + (p, y)\sin\theta)^2 + (-(p, x)\sin\theta + (p, y)\cos\theta)^2} = \sqrt{(p, x)^2 + (p, y)^2}$ で, これらも一致 する. さらに, これらの垂線のなす角度を φ $(0 \leqq \varphi \leqq \pi)$ とすれば, $\cos\varphi = \frac{(p-(p,z)z, Ap-(p,z)z)}{\|Ap-(p,z)z\|\,\|p-(p,z)z\|} = \cos\theta$ より, $\varphi = \theta$ であり, p の位置によらず一定である. 故に, A は ℓ を軸に回転する線型写像を表す.

$A^2u = (\cos\theta + i\sin\theta)^2u = (\cos 2\theta + i\sin 2\theta)u$, $A^2\bar{u} = (\cos\theta - i\sin\theta)^2\bar{u} = (\cos 2\theta - i\sin 2\theta)\bar{u}$, $A^2v = v$ より, A^2 の固有値は $\cos 2\theta + i\sin 2\theta$, $\cos 2\theta - i\sin 2\theta$, 1 であり, $0 < \theta < \pi$ だから 1 に対する A^2 の固有空間は v で生成される 1 次元の部分空間である. $\frac{1}{2}(A - {}^tA)b = 0$ で, ${}^tA = A^{-1}$ だから $A^2b = b$ となるため, b は A^2 の固有値 1 に対する固有ベクトルである. 従って $b = rz$ となる $r \in \boldsymbol{R}$ が存在するため, b は ℓ に平行である.

$B = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$, $c = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$ とおくと, $P^{-1}{}^tAP = P^{-1}A^{-1}P = (P^{-1}AP)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから $P^{-1}BP = \frac{1}{2}(P^{-1}AP - P^{-1}{}^tAP) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が成り立つ. 故に $P^{-1}BP$ の固有値は 0, $\sin\theta i$, $-\sin\theta i$ であり, 一方, B の固有値は 0, ci, $-ci$ である. $P^{-1}BP$ の固有方程式は B の固有方程式と同じであるため, $\sin\theta > 0$ だから $c = \sin\theta$ を得る.

73. ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ のまわりの $\frac{\pi}{3}$ の回転の行列を 求めよ.

解答　$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を直交化して 正規直交系 $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ を得る. 求める行列を A とすれば, A は v_1 を動かさず, v_2, v_3 を含む平面を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転するから, $Av_1 = v_1$, $Av_2 = \cos\frac{\pi}{3}v_2 + \sin\frac{\pi}{3}v_3 =$

$\frac{1}{2}v_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_3$, $Av_3 = -\sin\frac{\pi}{3}v_2 + \cos\frac{\pi}{3}v_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$ である. v_1, v_2, v_3 をこの順に列ベクトルにもつ行列を P とすれば, P は直交行列で あり, $AP = (Av_1, Av_2, Av_3) = (v_1, \frac{1}{2}v_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_3, -\frac{\sqrt{3}}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3) = P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ より, $A = P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}{}^tP = \frac{1}{18}\begin{pmatrix}10 & 2-6\sqrt{3} & 2+6\sqrt{3}\\ 2+6\sqrt{3} & 13 & 4-3\sqrt{3}\\ 2-6\sqrt{3} & 4-3\sqrt{3} & 13\end{pmatrix}$

74. 以下の行列は回転を表すことを示し, その回転軸と回転角を求めよ.

1) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4 & -8 & 1\\ 4 & 1 & -8\\ 7 & 4 & 4\end{pmatrix}$ 2) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & -3 & \sqrt{6}\\ 3 & 1 & \sqrt{6}\\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2\end{pmatrix}$ 3) $\frac{1}{15}\begin{pmatrix}5 & 10 & 10\\ -14 & 5 & 2\\ -2 & -10 & 11\end{pmatrix}$ 4) $\frac{1}{17}\begin{pmatrix}-9 & 8 & 12\\ 8 & -9 & 12\\ 12 & 12 & 1\end{pmatrix}$

解答　1) 回転軸 $\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$, 回転角 $\frac{\pi}{2}$　　2) 回転軸 $\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{6}\\ 3\end{pmatrix}$, 回転角 $\cos^{-1}\frac{1}{4}$

3) 回転軸 $\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$, 回転角 $\cos^{-1}\frac{1}{5}$　　4) 回転軸 $\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$, 回転角 π

75. $(A-\lambda E_n)^n = O$, $(A-\lambda E_n)^{n-1} \neq O$ を満たす n 次正方行列 A の Jordan 標準形は $J(\lambda, n)$ となることを示せ.

76. $A \in M(n; \boldsymbol{K})$ の固有方程式の解はすべて $\boldsymbol{K}$ に属するとし, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ を A の相異なる固有値とする. $n-1$ 次以下の 0 でない任意の x の多項式 $f(x)$ に対して $f(A) \neq O$ であるとき A の固有多項式を $(x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\dots(x-\lambda_d)^{m_d}$ とすれば A の Jordan 標準形は

$$\begin{pmatrix}J(\lambda_1, m_1) & & & \text{\huge 0}\\ & J(\lambda_2, m_2) & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & J(\lambda_d, m_d)\end{pmatrix}$$

となることを示せ.

77. $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \boldsymbol{K}$ に対し, $A \in M(n; \boldsymbol{K})$ を

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & \text{\huge 0} & \\ & & 0 & \ddots & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & 1 & \\ & & & & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1}\end{pmatrix}$$

で定める.

1) $\boldsymbol{e}_n, A\boldsymbol{e}_n, A^2\boldsymbol{e}_n, \dots, A^{n-1}\boldsymbol{e}_n$ は 1 次独立であることを示せ.
2) $n-1$ 次以下の 0 でない任意の x の多項式 $f(x)$ に対して $f(A) \neq O$ であることを示せ.
3) A の固有方程式の解がすべて $\boldsymbol{K}$ に属するとき, A の Jordan 標準形を求めよ.

解答　1) $i = 0, 1, \dots, n-1$ に対し, $A^i\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_{n-i} + \sum_{j=n-i+1}^{n} b_j\boldsymbol{e}_j$ という形になることを示せば, $A^{i-1}\boldsymbol{e}_n$ を第 i 行とする n 次正方行列は対角成分がすべて 1 の下半三角行列になるため $\boldsymbol{e}_n, A\boldsymbol{e}_n, A^2\boldsymbol{e}_n, \dots, A^{n-1}\boldsymbol{e}_n$ は 1 次独立であ

る．まず, $i=0$ のときは上の主張は明らかである．$A^{i-1}\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{e}_{n-i+1}+\sum_{j=n-i+2}^{n}b_j\boldsymbol{e}_j$ と仮定すれば．$A\boldsymbol{e}_1=-a_0\boldsymbol{e}_n$, $A\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{e}_{i-1}-a_{i-1}\boldsymbol{e}_n$ $(i=2,3,\dots,n)$ だから $i<n$ ならば $A^i\boldsymbol{e}_n=A(\boldsymbol{e}_{n-i+1}+\sum_{j=n-i+2}^{n}b_j\boldsymbol{e}_j)=A\boldsymbol{e}_{n-i+1}+\sum_{j=n-i+2}^{n}b_jA\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_{n-i}-a_{n-i}\boldsymbol{e}_n+\sum_{j=n-i+2}^{n}b_j(\boldsymbol{e}_{j-1}-a_{j-1}\boldsymbol{e}_n)=\boldsymbol{e}_{n-i}+\sum_{j=n-i+1}^{n-1}b_{j+1}\boldsymbol{e}_j-(\sum_{j=n-i+2}^{n}b_ja_{j-1}-a_{n-i})\boldsymbol{e}_n$ となるため, 数学的帰納法により主張が示される．

2) $f(x)=\sum_{i=0}^{n-1}c_ix^i$ として $f(A)=O$ と仮定すれば, $\sum_{i=0}^{n-1}c_iA^i\boldsymbol{e}_n=f(A)\boldsymbol{e}_n=\mathbf{0}$ となるため, 1) で示したことにより $c_0=c_1=\cdots=c_{n-1}=0$ である．

3) 2) で示したことから A の固有多項式が A の最小多項式である．また, 線形代数 A-I 演習問題 15 の 8) から A の固有多項式は $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\cdots+a_1x+a_0$ である．従って, この多項式が $(x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots(x-\lambda_d)^{m_d}$ $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_d\in\boldsymbol{K}$ は相異なる) と因数分解されたとすれば,「新しい視点からの線形代数」(石井, 木坂, 高橋, 山口著, 培風館) p.157 問題 8.8 の結果から A の Jordan 標準形は

$$\begin{pmatrix} J(\lambda_1,m_1) & & & \text{\huge 0} \\ & J(\lambda_2,m_2) & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & J(\lambda_d,m_d) \end{pmatrix}$$

となる．