1　ベクトル空間と一次写像

1.1　ベクトル空間の定義と例

$\boldsymbol{K}$ は実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ または複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ を表すものとする.

定義 1.1.1 集合 V に対し, 写像 $\alpha : V \times V \to V$, $\mu : \boldsymbol{K} \times V \to V$ が定義されていて, α による $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の像を $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, μ による $(r, \boldsymbol{x})$ の像を $r\boldsymbol{x}$ で表すとき, 次の条件が満たされるとする.

(1) 結合法則 ： 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$, $r, s \in \boldsymbol{K}$ に対して $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$, $(rs)\boldsymbol{x} = r(s\boldsymbol{x})$ が成り立つ.

(2) 単位元の存在 ： V の要素 $\boldsymbol{0}$ で, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ となるものがある. また, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ である.

(3) 逆元の存在 ： 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $\boldsymbol{x}' \in V$ で, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たすものがある. このような $\boldsymbol{x}'$ を $-\boldsymbol{x}$ で表す.

(4) 交換法則 ： 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対し $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ が成り立つ.

(5) 分配法則 ： 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $r, s \in \boldsymbol{K}$ に対して $r(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = r\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{y}$, $(r+s)\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{x}$ が成り立つ.

このとき, V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 *(*$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ の場合は実ベクトル空間, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ の場合は複素ベクトル空間ともいう*)*, V の要素をベクトル, $\boldsymbol{K}$ の要素をスカラーと呼び, 写像 α を加法, μ をスカラー倍という.

例 1.1.2 *1)* n 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^n$ は成分ごとの加法とスカラー倍により $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間である.

2) $\boldsymbol{K}^n$ の部分集合 W が条件 "$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$, $r \in \boldsymbol{K} \Rightarrow \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, r\boldsymbol{x} \in W$" を満たすとき, W は $\boldsymbol{K}^n$ の加法とスカラー倍により $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間である.

3) A を $\boldsymbol{K}^n$ の要素を成分とする $m \times n$ 行列とし, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{K}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ 全体よりなる集合を W とすれば, W は *2)* の条件を満たすため, $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間である.

4) $x_1, \ldots, x_n$ を変数とし, $\boldsymbol{K}$ を係数にもつ n 変数の多項式全体の集合を $\boldsymbol{K}[x_1, \ldots, x_n]$ で表せば, 多項式の和と定数倍により, $\boldsymbol{K}[x_1, \ldots, x_n]$ は $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間である.

5) 実数の閉区間 $[a, b]$ *(*$a < b$*)* で定義された実数値をとる連続関数全体の集合を $C[a, b]$ 表せば, $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(rf)(x) = rf(x)$ *(*$f, g \in C[a, b]$, $r \in \boldsymbol{R}$*)* で定義される関数の和 $f+g$ と定数倍 rf により, $C[a, b]$ は $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間である.

定義 1.1.3 V の部分集合 W が条件 "$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W, r \in \boldsymbol{K} \Rightarrow \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, r\boldsymbol{x} \in W$"を満たすとき, W を V の部分空間という. このとき W は V の加法とスカラー倍により $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間である.

例 1.1.4 *1)* $\boldsymbol{R}^2$ において, 原点を通る直線は $\boldsymbol{R}^2$ の部分空間であり, $\boldsymbol{R}^3$ において原点を通る直線や平面は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間である.

2) r を自然数とするとき, *(1.1.2)* の *5)* の例におけるベクトル空間 $C[a, b]$ の部分集合 D_r を, 開区間 (a, b) において r 回微分可能な $C[a, b]$ の要素の全体とすると, D_r は $C[a, b]$ の部分空間である. また, 開区間 (a, b) において何回でも微分可能な $C[a, b]$ の要素の全体 $\displaystyle\bigcap_{r \geqq 1} D_r$ も $C[a, b]$ の部分空間である.

定義 1.1.5 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする.

1) V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に対し $\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{v}_n$ *(*$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \boldsymbol{K}$*)* の形のベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の１次結合という.

2) S を V の部分集合とするとき, S の有限個の要素の１次結合になるベクトル全体の集合を $\langle S \rangle$ で表せば, これは V の部分空間であり, S で生成される *(*張られる*)* V の部分空間という. とくに $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ の場合, $\langle S \rangle$ を $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ で表す.

1.2　ベクトルの１次独立性

定義 1.2.1 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする.

V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が条件 "$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ ならば $\lambda_i = 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$"を満たすとき $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は１次独立であるといい, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が１次独立でないとき, これらは１次従属であるという.

注意 1.2.2 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ が１次従属ならば, これらにベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ を付け加えた $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ も１次従属である. また $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ のうちに零ベクトルがあれば, これらは１次従属である.

命題 1.2.3 ベクトル空間 V の n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の１次結合として表される $n+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{n+1}$ は１次従属である.

証明 n に関する帰納法で示す.
$n = 1$ の場合, $\boldsymbol{w}_1 = a_{11}\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{w}_2 = a_{12}\boldsymbol{v}_1$ となる $a_{11}, a_{12} \in V$ があるため, a_{11}, a_{12} の少なくとも一方が 0 でなければ $a_{12}\boldsymbol{w}_1 + (-a_{11})\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{0}$ だから $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ は１次従属である. $a_{11} = a_{12} = 0$ ならば $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{0}$ となり, この場合も $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ は１次従属である.
$n = k-1$ のとき主張が成り立つとし, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{k+1}$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の１次結合

$$\boldsymbol{w}_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ji}\boldsymbol{v}_j \quad \cdots\cdots(*)$$

として表されるとする. $a_{ki} \neq 0$ となる i がなければ $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ は $k-1$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}$ の１次結合として表されるため, 帰納法の仮定により１次従属であり, 上の注意から $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{k+1}$ も１次従属である.
$a_{ki} \neq 0$ となる i がある場合, $\boldsymbol{w}_i$ の添数を付け直すことにより, $a_{k\,k+1} \neq 0$ と仮定してよい. このとき $(*)$ より $\boldsymbol{v}_k = \frac{1}{a_{k\,k+1}}(\boldsymbol{w}_{k+1} - \sum\limits_{j=1}^{k-1} a_{j\,k+1}\boldsymbol{v}_j)$ だから $(*)$ に代入して, $\boldsymbol{w}_i - \frac{a_{ki}}{a_{k\,k+1}}\boldsymbol{w}_{k+1} = \frac{1}{a_{k\,k+1}} \sum\limits_{j=1}^{k-1} (a_{ji}a_{k\,k+1} - a_{ki}a_{j\,k+1})\boldsymbol{v}_j$ を得る. k 個のベクトル $\boldsymbol{w}_i - \frac{a_{ki}}{a_{k\,k+1}}\boldsymbol{w}_{k+1}$ $(1 \leqq i \leqq k)$ は $k-1$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}$ の１次結合として表されるため, 帰納法の仮定により１次従属である. $\sum\limits_{i=1}^{k} r_i(\boldsymbol{w}_i - \frac{a_{ki}}{a_{k\,k+1}}\boldsymbol{w}_{k+1}) = \boldsymbol{0}$ で $r_1, r_2, \ldots, r_k$ のいずれかは 0 でないとし, $r_{k+1} = -\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{r_i a_{ki}}{a_{k\,k+1}}$ とおくと, $\sum\limits_{i=1}^{k+1} r_i \boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{0}$ となるため $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{k+1}$ は１次従属である. □

1.3　ベクトル空間の基底と次元

定義 1.3.1 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする.

1) V の部分集合 S が V を生成し (すなわち $V = \langle S \rangle$), S の任意の有限個のベクトルが１次独立であるとき, S を V の基底という.

2) V において n 個の１次独立なベクトルが存在し, $n+1$ 個のベクトルはつねに１次従属であるとき, V の次元は n であるといい, $\dim V = n$ と表す.

定理 1.3.2 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m \in V$ は１次独立なベクトル, $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_l \in V$ は V を生成するとする. $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_l$ のうちから次の条件を満たすようなベクトル $\boldsymbol{y}_{i_1}, \boldsymbol{y}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{y}_{i_s}$ を選べば, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_{i_1}, \boldsymbol{y}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{y}_{i_s}$ が V の基底になる.
「$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_{i_1}, \boldsymbol{y}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{y}_{i_s}$ は１次独立であり, これらのベクトルにどの $\boldsymbol{y}_j$ $(1 \leqq j \leqq l)$ を付け加えても１次従属になる.」
従って, $\dim V = m + s$ であり, とくに $m = 0$ の場合を考えると V の次元はベクトル $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_l$ から選んでできる１次独立になるベクトルの最大の個数に等しくなるため $\dim V \leqq l$ である.

系 1.3.2.1 V が n 個のベクトルで生成されれば $\dim V \leqq n$ である．このとき V は 有限個のベクトルからなる基底をもち，その個数はつねに $\dim V$ 個である．

定理 1.3.3 ベクトル空間には基底が存在する．

定理 1.3.4 $\dim V$ が有限で，$\dim V$ 個の要素をもつ V の部分集合 S が１次独立であるか，または V を生成すれば S は V の基底になる．

定理 1.3.5 W が有限次元ベクトル空間 V の部分空間ならば $\dim W \leqq \dim V$ であり，等号が成立するのは $W = V$ の場合に限る．

命題 1.3.6 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間，V_1, V_2 を V の部分空間とする．
1) $V_1 \cap V_2$, $V_1 + V_2 = \{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} | \boldsymbol{x} \in V_1,\ \boldsymbol{y} \in V_2\}$ も V の部分空間である．
2) V_1, V_2 がともに有限次元ならば $\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$ が成り立つ．

1.4 １次写像

定義 1.4.1 V, W を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする．写像 $f : V \to W$ が任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と $r \in \boldsymbol{K}$ に対して，$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$, $f(r\boldsymbol{x}) = rf(\boldsymbol{x})$ をみたすとき f を１次写像という．V から W への１次写像全体の集合を $\mathrm{Hom}(V, W)$ により表す．

命題 1.4.2 *1)* $\mathrm{Hom}(V, W)$ に加法，スカラー倍を $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $r \in \boldsymbol{K}$ に対し，$(f+g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})$, $(rf)(\boldsymbol{x}) = rf(\boldsymbol{x})$ で定義すれば，確かに $f+g, rf \in \mathrm{Hom}(V, W)$ であり，これにより $\mathrm{Hom}(V, W)$ は $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間になる．
2) V, W, Z を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間，$f : V \to W$, $g : W \to Z$ を１次写像とするとき合成 $g \circ f : V \to Z$ も１次写像である．また，f の逆写像 $f^{-1} : W \to V$ が存在すれば，f^{-1} も１次写像である．
3) $f, f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $g, g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}(W, Z)$, $r \in \boldsymbol{K}$ に対し，次の等式が成り立つ．
$(g_1+g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f, \quad g \circ (f_1+f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2, \quad (rg) \circ f = r(g \circ f) = g \circ (rf)$.

命題 1.4.3 V, W を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間，$f : V \to W$ を１次写像とし，U, Z をそれぞれ V, W の部分空間とすれば，$f(U)$, $f^{-1}(Z)$ はそれぞれ W, V の部分空間である．

定義 1.4.4 $f : V \to W$ を１次写像とする．*1)* 上の命題から $f(V)$, $f^{-1}(\boldsymbol{0})$ はそれぞれ W, V の部分空間であるが，$f(V)$ を f の像，$f^{-1}(\boldsymbol{0})$ を f の核と呼んで，$\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Ker}\, f$ で表す．
2) f が逆写像をもつとき，f を同型写像という．

命題 1.4.5 $f : V \to W$ を１次写像，$\boldsymbol{q} \in \mathrm{Im}\, f$ とするとき，$f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{q}$ となる $\boldsymbol{p} \in V$ を１つ取れば，$f^{-1}(\boldsymbol{q}) = \{\boldsymbol{x} \in V | \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}\, f\}$ である．

定理 1.4.6 S をベクトル空間 V の基底，$\mathrm{Map}(S, W)$ を S からベクトル空間 W への写像全体の集合とすると，１次写像 $f : V \to W$ に対して，f の S への制限 $f|_S$ を対応させる写像 $\mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Map}(S, W)$ は１対１上への写像である．

定理 1.4.7 $f : V \to W$ を１次写像，I, J をそれぞれ $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ の基底とする．各 $w \in J$ に対し，$f(\boldsymbol{v}_w) = w$ となる $\boldsymbol{v}_w \in V$ を１つずつ選んで，$S = I \cup \{\boldsymbol{v}_w | w \in J\}$ とおくと S は V の基底になる．従って，V が有限次元ならば $\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim V$ が成り立つ．

命題 1.4.8 V を n 次元ベクトル空間 $f : V \to W$ を１次写像とし，$r = \dim \mathrm{Im}\, f$ とおく．V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ で，$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)$ が１次独立であり，$f(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{0}$ *(*$m+1 \leqq i \leqq n$*)* を満たすならば $m = r$ であり，$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_r)$, $\boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ はそれぞれ $\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Ker}\, f$ の基底になる．

命題 1.4.9 $f : V \to W$ を１次写像とする.

1) $f \circ g \circ f = f$ を満たす１次写像 $g : W \to V$ がある.

2) f が１対１写像 $\Leftrightarrow$ $g \circ f = 1_V$ を満たす１次写像 $g : W \to V$ がある.

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in V$ が１次独立ならば $f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \ldots, f(\boldsymbol{x}_k) \in W$ は１次独立.

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{0}\}$.

3) f が上への写像 $\Leftrightarrow$ $f \circ g = 1_W$ を満たす１次写像 $g : W \to V$ がある.

$\Leftrightarrow$ $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \rangle = V$ ならば $\langle f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \ldots, f(\boldsymbol{x}_k) \rangle = W$.

$\Leftrightarrow$ $\langle f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \ldots, f(\boldsymbol{x}_k) \rangle = W$ となる $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \boldsymbol{K}^n$ が存在する.

4) f が１対１かつ上への写像 $\Leftrightarrow$ f は同型写像 $\Leftrightarrow$ f は V の基底を W の基底に写す.

5) V, W が有限次元の場合, f が１対１写像ならば $\dim V \leqq \dim W$ であり, f が上への写像ならば $\dim V \geqq \dim W$ である. また, $\dim V = \dim W$ のとき f が１対１写像または上への写像ならば同型写像である.

定義 1.4.10 *1)* $V_1, V_2, \ldots, V_n$ を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする. 直積 $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ に加法, スカラー倍を $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) + (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n) = (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{y}_n)$, $r(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = (r\boldsymbol{x}_1, r\boldsymbol{x}_2, \ldots, r\boldsymbol{x}_n)$ で定めれば $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ はベクトル空間になる. このベクトル空間を $V_1, V_2, \ldots, V_n$ の直和といい, $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$ で表す.

2) $V_1, V_2, \ldots, V_n$ を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V の部分空間とする. 写像 $f : V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n \to V$, $f(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_n$ が同型写像であるとき V は $V_1, V_2, \ldots, V_n$ の直和であるという.

3) $V_1, V_2, \ldots, V_n$, $W_1, W_2, \ldots, W_n$ を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間, $f_i : V_i \to W_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ を１次写像とする. $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$ を $(f_1(\boldsymbol{x}_1), f_2(\boldsymbol{x}_2), \ldots, f_n(\boldsymbol{x}_n)) \in W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$ に対応させる１次写像を $f_1 \oplus f_2 \oplus \cdots \oplus f_n$ で表し, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ の直和という.

命題 1.4.11 *1)* $V_1, V_2, \ldots, V_n$ を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とし, 写像 $p_s : V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n \to V_s$, $i_s : V_s \to V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$ を $p_s(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}_s$, $i_s(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{0}, \overset{s}{\breve{\boldsymbol{x}}}, \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{0})$ で定めればこれらは１次写像で, $\rho_s = i_s \circ p_s$ とおくと, $s \neq t$ ならば $\rho_s \circ \rho_t = 0$ であり, $\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n = 1_{V_1 \oplus \cdots \oplus V_n}$ が成り立つ.

2) n 個の１次写像 $f_s : V \to V$ が $s \neq t$ ならば $f_s \circ f_t = 0$ かつ, $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = 1_V$ を満たせば V は部分空間 $\mathrm{Im}\, f_1, \mathrm{Im}\, f_2, \ldots, \mathrm{Im}\, f_n$ の直和になる.

3) V が部分空間 V_1, V_2 の直和になるためには $V = V_1 + V_2$ と $V_1 \cap V_2 = 0$ が成り立つことが必要十分である. さらに V の次元が有限であるとき, この条件は $V = V_1 + V_2$ かつ $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$ が成り立つことと同値である.

4) １次写像 $p : V \to V$ が $p \circ p = p$ を満たせば $\mathrm{Im}(1_V - p) = \mathrm{Ker}\, p$ であり, V は $\mathrm{Im}\, p$ と $\mathrm{Ker}\, p$ の直和になる.

2　一次写像と行列

2.1　１次写像の表現行列

以後, ベクトル空間はすべて有限次元であるとする.

V を $\boldsymbol{K}$ 上の n 次元ベクトル空間とするとき, $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ を V の１つの基底とすれば, (1.4.6) から $\varphi(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{x}_j$ $(1 \leqq j \leqq n)$ を満たす１次写像 $\varphi : \boldsymbol{K}^n \to V$ がただ１つ定まり, (1.4.7) の 4) から, これは同型写像である.

定義 2.1.1 *1)* V, W を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とし, $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$, $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m\}$ をそれぞれ, V, W の基底とする. １次写像 $f : V \to W$ に対し, $f(\boldsymbol{x}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \boldsymbol{y}_i$ $(a_{ij} \in \boldsymbol{K})$ とすれば, $m \times n$ 行列 (a_{ij}) を f の基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$, $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m\}$ に関する表現行列という. とくに $V = W$, $\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{y}_j$ $(1 \leqq j \leqq n)$ の場合, n 次正方行列 (a_{ij}) を f の基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ に関する表現行列という.

2) $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$, $\{\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2, \ldots, \boldsymbol{x}'_n\}$ を V の基底とし, $\boldsymbol{x}'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{x}_i$ *(*$a_{ij} \in \boldsymbol{K}$*)* とすれば, n 次正方行列 (a_{ij}) を 基底の変換 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\} \to \{\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2, \ldots, \boldsymbol{x}'_n\}$ の行列という.

命題 2.1.2 *1)* $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$, $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m\}$ をそれぞれ, $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V, W の基底とし, $\varphi : \boldsymbol{K}^n \to V$, $\psi : \boldsymbol{K}^m \to W$ をそれぞれ $\varphi(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{x}_j$ *(*$1 \leqq j \leqq n$*)*, $\psi(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{y}_i$ *(*$1 \leqq i \leqq m$*)* を満たす同型写像とする. １次写像 $f : V \to W$ に対し, $\psi^{-1}\circ f\circ\varphi : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ を表す行列は f の基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$, $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m\}$ に関する表現行列に一致する.

2) $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$, $\{\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2, \ldots, \boldsymbol{x}'_n\}$ を V の基底, $\varphi, \varphi' : \boldsymbol{K}^n \to V$ をそれぞれ $\varphi(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{x}_j$, $\varphi'(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{x}'_j$ *(*$1 \leqq j \leqq n$*)* を満たす同型写像とする. このとき同型写像 $\varphi^{-1}\circ\varphi' : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n$ を表す行列は基底の変換 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\} \to \{\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2, \ldots, \boldsymbol{x}'_n\}$ の行列に一致する. 従って, 基底の変換 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\} \to \{\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2, \ldots, \boldsymbol{x}'_n\}$ の行列は V の恒等写像 1_V の基底 $\{\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2, \ldots, \boldsymbol{x}'_n\}$, $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ に関する表現行列に他ならない.

命題 2.1.3 １次写像 $f : V \to W$ に対し, $r = \dim \operatorname{Im} f$ とおくと, V, W の基底で, それらによる f の表現行列が $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{0})$ *(*$\boldsymbol{e}_j$ は $\boldsymbol{K}^m$ *(*$m = \dim W$*)* の基本ベクトル*)* となるものが存在する.

命題 2.1.4 $f : V \to W$, $g : W \to Z$ を１次写像とし, $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$, $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m\}$, $\{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l\}$ をそれぞれ, V, W, Z の基底とする.

1) $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$, $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m\}$ に関する f, f', $f + f'$, rf *(*$r \in \boldsymbol{K}$*)* の表現行列を $M(f)$, $M(f')$, $M(f + f')$, $M(rf)$ とし, $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m\}$, $\{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l\}$ に関する g の表現行列を $M(g)$, $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$, $\{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l\}$ に関する $g\circ f$ の表現行列を $M(g\circ f)$ とすれば, $M(f + f') = M(f) + M(f')$, $M(rf) = rM(f)$, $M(g\circ f) = M(g)M(f)$ が成り立つ.

2) $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ に関する V の恒等写像 1_V の表現行列は単位行列 E_n である.

3) f が同型写像ならば *1)* の $M(f)$ は正則行列であり, $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n\}$, $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ に関する f^{-1} の表現行列を $M(f^{-1})$ とすれば $M(f^{-1}) = M(f)^{-1}$ である.

注意 2.1.5 $f : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ を数ベクトル空間の間の１次写像とすれば, $\boldsymbol{K}^n$, $\boldsymbol{K}^m$ の基本ベクトル $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_m\}$ に関する表現行列を A とすれば, A は $f(\boldsymbol{e}_j)$ を第 j 列にもつ $m \times n$ 行列であり, $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ *(*$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$*)* が成り立つ.

命題 2.1.6 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$, $\{\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2, \ldots, \boldsymbol{x}'_n\}$ を V の基底, $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m\}$, $\{\boldsymbol{y}'_1, \boldsymbol{y}'_2, \ldots, \boldsymbol{y}'_m\}$ を W の基底とし, $f : V \to W$ を１次写像とする. f の $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$, $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m\}$ に関する表現行列を A, $\{\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2, \ldots, \boldsymbol{x}'_n\}$, $\{\boldsymbol{y}'_1, \boldsymbol{y}'_2, \ldots, \boldsymbol{y}'_m\}$ に関する表現行列を B, V の基底の変換 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\} \to \{\boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2, \ldots, \boldsymbol{x}'_n\}$ の行列を P, W の基底の変換 $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m\} \to \{\boldsymbol{y}'_1, \boldsymbol{y}'_2, \ldots, \boldsymbol{y}'_m\}$ の行列を Q とすれば $B = Q^{-1}AP$ である. とくに $V = W$, $\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{y}_j$, $\boldsymbol{x}'_j = \boldsymbol{y}'_j$ *(*$1 \leqq j \leqq n$*)* ならば $B = P^{-1}AP$ である.

2.2 １次写像の階数

定義 2.2.1 $f : V \to W$ を１次写像とするとき, $\dim \operatorname{Im} f$ を f の階数と呼び, $\operatorname{rank} f$ で表す.

命題 2.2.2 $f : V \to W$ を１次写像とし, V は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ によって生成されるとすると, $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_k)$ から選んでできる１次独立になるベクトルの最大の個数は $\operatorname{rank} f$ に一致する.

命題 2.2.3 $f, f' : V \to W$, $g : W \to Z$ を１次写像とする.

1) f が１対１写像 $\Leftrightarrow \operatorname{rank} f = \dim V$, f が上への写像 $\Leftrightarrow \operatorname{rank} f = \dim W$.

2) $\operatorname{rank} f + \operatorname{rank} g - m \leqq \operatorname{rank}(g\circ f) \leqq \min\{\operatorname{rank} f, \operatorname{rank} g\}$. ただし $\min\{a, b\}$ は a, b のうちの小さいほうの数を表す.

3) $|\operatorname{rank} f - \operatorname{rank} f'| \leqq \operatorname{rank}(f + f') \leqq \operatorname{rank} f + \operatorname{rank} f'$.

系 2.2.3.1 $f: V \to W$, $g: W \to Z$ を１次写像とするとき，f が上への写像ならば $\mathrm{rank}(g \circ f) = \mathrm{rank}\, g$, g が１対１写像ならば $\mathrm{rank}(g \circ f) = \mathrm{rank}\, f$ である．

命題 2.2.4 $A \in M(m, n; \boldsymbol{K})$ に対し，$T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義される１次写像 $T_A: \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ の階数は行列 A の階数 $\mathrm{rank}\, A$ に一致する．

2.3 １次写像の固有空間

定義 2.3.1 *1)* V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間，$f: V \to V$ を１次写像とする．$f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$ を満たす $\lambda \in \boldsymbol{K}$ と零でないベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ が存在するとき，λ を f の固有値，$\boldsymbol{x}$ を λ に対する固有ベクトルという．このとき $\mathrm{Ker}(\lambda 1_V - f) = \{\boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}\}$ は V の *0* でない部分空間であるが，これを λ に対する固有空間という．

2) $A \in M(n; \boldsymbol{K})$, $f: \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n$ を A から定まる１次写像とする．A の固有値とは f の固有値のこととし，固有値 λ に対する f の固有ベクトル，固有空間をそれぞれ A の固有ベクトル，固有空間ということにする．

3) $i \neq j$ ならば $a_{ij} = 0$ であるような正方行列 (a_{ij}) を対角行列という．正方行列 A に対し，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P が存在するとき，A は対角化可能であるという．

補題 2.3.2 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とし，V の k 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ が k 個の関係式 $\sum_{i=1}^{k} a_{ij} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$ *(*$j = 1, 2, \ldots, k$*)* を満たすとする．k 次正方行列 (a_{ij}) が正則行列ならば $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \cdots = \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ である．

証明 $\varphi: \boldsymbol{K}^k \to V$ を $\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{x}_i$ で定められる１次写像とし，$f: \boldsymbol{K}^k \to \boldsymbol{K}^k$ を行列 (a_{ij}) から定まる１次写像とする．仮定から $\varphi \circ f = 0$ であり，f は同型写像だから $\varphi = 0$ となるため主張が示される． □

命題 2.3.3 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ を１次写像 $f: V \to V$ の相異なる固有値，W_j を λ_j に対する固有空間とすると，V の部分空間 $W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ は $W_1, W_2, \ldots, W_k$ の直和である．

証明 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ $(\boldsymbol{x}_j \in W_j)$ ならば $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \cdots = \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ となることを示せばよい．f を l 回合成した写像による $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ の両辺の像を考えて，$\lambda_1^l \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2^l \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_k^l \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ を得る．このとき，$(\lambda_i^{j-1}) \in M(k; \boldsymbol{K})$ の行列式は "Van de Monde の行列式"であり，$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ は相異なるため，この値は 0 でない．従って，(2.3.2) により結果が得られる． □

命題 2.3.4 V を $\boldsymbol{K}$ 上の n 次元ベクトル空間，$f: V \to V$ を１次写像とし，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ を V の基底，$A \in M(n; \boldsymbol{K})$ をこの基底に関する f の表現行列とする．

1) λ が f の固有値になるための必要十分条件は $\det(\lambda E_n - A) = 0$ が成り立つことである．従って，f の固有値の全体は x に関する n 次方程式 $\det(xE_n - A) = 0$ の $\boldsymbol{K}$ に属する解の全体に一致して，f の異なる固有値は高々 n 個である．

2) V が f の固有空間の直和になる *(*f の固有ベクトルからなる V の基底が存在する*)* ためには A が対角化可能であることが必要十分である．とくに $V = \boldsymbol{K}^n$ で f が $A \in M(n; \boldsymbol{K})$ から定まる１次写像の場合，A が対角化可能であることと，$\boldsymbol{K}^n$ が A の固有空間の直和になること *(*A の固有ベクトルからなる $\boldsymbol{K}^n$ の基底が存在すること*)* は同値である．

$P \in M(n; \boldsymbol{K})$ が正則行列ならば $xE_n - P^{-1}AP = P^{-1}(xE_n - A)P$ だから $\det(xE_n - P^{-1}AP) = \det(xE_n - A)$ である．従って，上の多項式 $\det(xE_n - A)$ は V の基底の選び方に依存しない．

定義 2.3.5 上の命題における x に関する n 次の多項式 $\det(xE_n - A)$ を f の固有多項式といい，$\Phi_f(x)$ で表す．また x に関する n 次方程式 $\Phi_f(x) = 0$ を f の固有方程式という．とくに $V = \boldsymbol{K}^n$ で f が $A \in M(n; \boldsymbol{K})$ から定まる１次写像の場合，$\Phi_f(x) = \det(xE_n - A)$ を A の固有多項式といい，$\Phi_A(x)$ で表し，$\Phi_A(x) = 0$ を A の固有方程式という．

命題 2.3.6 *1)* $\Phi_f(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$ *(*$\lambda_j\in\boldsymbol{C}$*)* ならば $\det f=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$, $\operatorname{tr} f=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$ が成り立つ.

2) $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_d$ を $f:V\to V$ の相異なる固有値とし, $\Phi_f(x)=(x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots(x-\lambda_d)^{m_d}$ が成り立つとする. W_j を λ_j に対する固有空間とし, V がこれらの固有空間の直和になれば, $\dim W_j=\dim V-\operatorname{rank}(\lambda_j 1_V-f)=m_j$ である.

3) $A=(a_{ij})$ が三角行列ならば $\Phi_A(x)=(x-a_{11})(x-a_{22})\cdots(x-a_{nn})$ である. 従って, $\{a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}\}$ が A の固有値の全体になる.

定義 2.3.7 1次写像 $f:V\to V$ に対し, V の部分空間 W が $f(W)\subset W$ を満たすとき, W を f の不変部分空間という.

命題 2.3.8 V, W を有限次元ベクトル空間, $f:V\to W$ を1次写像とする.

1) V_1, W_1 がそれぞれ V, W の部分空間で, $f(V_1)\subset W_1$ であるとき, V の基底 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n$ を $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_l$ が V_1 の基底になるようにとり, W の基底 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\dots,\boldsymbol{y}_m$ を $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\dots,\boldsymbol{y}_k$ が W_1 の基底になるようにとれば, これら基底に関する f の表現行列は $\left(\begin{smallmatrix}A & C\\ O & B\end{smallmatrix}\right)$ *(*$A\in M(k,l;\boldsymbol{K})$, $B\in M(m-k,n-l;\boldsymbol{K})$, $C\in M(k,n-l;\boldsymbol{K})$*)* という形になる.

2) V_j, W_j *(*$1\leqq j\leqq d$*)* をそれぞれ V, W の部分空間とし, $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_d$, $W=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_d$ であり, 各 j に対して $f(V_j)\subset W_j$ が成り立つとする. $\boldsymbol{x}_{l_{j-1}+1},\boldsymbol{x}_{l_{j-1}+2},\dots,\boldsymbol{x}_{l_j}$ *(*$0=l_0<l_1<\cdots<l_d=n$*)* が V_j の基底, $\boldsymbol{y}_{k_{j-1}+1},\boldsymbol{y}_{k_{j-1}+2},\dots,\boldsymbol{y}_{k_j}$ *(*$0=k_0<k_1<\cdots<k_d=m$*)* が W_j の基底ならば V の基底 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n$ と W の基底 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\dots,\boldsymbol{y}_m$ に関する f の表現行列は下の様な形になる.

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \text{\Large 0}\\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & A_d\end{pmatrix}\quad (A_j\in M(k_j-k_{j-1},l_j-l_{j-1};\boldsymbol{K}))$$

注意 2.3.9 上の命題において, とくに $V=W=\boldsymbol{K}^n$ で, V_j が行列 A から定まる1次写像 f の不変部分空間である場合を考えれば, n 次正則行列 P で $P^{-1}AP$ が上の様な形になるものが存在する.

2.4 双対空間

定義 2.4.1 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とし, $\boldsymbol{K}$ を $\boldsymbol{K}$ 上の1次元ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^1$ とみなしたとき, *(1.4.1)* で定義した集合 $\operatorname{Hom}(V,\boldsymbol{K})$ は *(1.4.2)* により $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間であるが, これを V の双対空間と呼んで, V^* で表す.

命題 2.4.2 V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$ に対し, V^* のベクトル $\boldsymbol{v}_1^*,\boldsymbol{v}_2^*,\dots,\boldsymbol{v}_n^*$ を $\boldsymbol{v}_i^*(\boldsymbol{v}_j)=\delta_{ij}$ で定めれば, $\{\boldsymbol{v}_1^*,\boldsymbol{v}_2^*,\dots,\boldsymbol{v}_n^*\}$ は V^* の基底になる.

定義 2.4.3 V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$ に対し, 上の命題で与えた V^* の基底 $\{\boldsymbol{v}_1^*,\boldsymbol{v}_2^*,\dots,\boldsymbol{v}_n^*\}$ を V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$ の双対基底という.

定義 2.4.4 $f:V\to W$ を1次写像とするとき, *(1.2.2)* の *3)* から写像 $f^*:W^*\to V^*$ を $f^*(\varphi)=\varphi\circ f$ で定めれば, これは1次写像になるが, この写像を f の双対写像という.

命題 2.4.5 $f:V\to W$ を1次写像, $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_m\}$ を V, W の基底, $\{\boldsymbol{v}_1^*,\boldsymbol{v}_2^*,\dots,\boldsymbol{v}_n^*\}$, $\{w_1^*,w_2^*,\dots,w_m^*\}$ を $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_m\}$ の双対基底とする. $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_m\}$ に関する f の表現行列を A とすれば, f の双対写像 $f^*:W^*\to V^*$ の $\{\boldsymbol{w}_1^*,w_2^*,\dots,w_m^*\}$, $\{\boldsymbol{v}_1^*,\boldsymbol{v}_2^*,\dots,\boldsymbol{v}_n^*\}$ に関する表現行列は A の転置行列である.

命題 2.4.6 $f:V\to W$ を1次写像とするとき f の双対写像 $f^*:W^*\to V^*$ の階数は f の階数に等しい. 従って, A を $m\times n$ 行列とすれば, $\operatorname{rank}{}^tA=\operatorname{rank}A$ である.

3　内積と正規行列の対角化

3.1　内積

定義 3.1.1 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とし, 写像 $B : V \times V \to \boldsymbol{K}$ は任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in V$, $\lambda \in \boldsymbol{K}(\subset \boldsymbol{C})$ に対して, 次の性質 *(1)*~*(4)* を満たすとする.

(1) $B(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = B(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + B(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$, $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2)$

(2) $B(\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $B(\boldsymbol{x}, \lambda \boldsymbol{y}) = \bar{\lambda} B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

(3) $B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \overline{B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$

(4) $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}$ であり, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$ である.

このとき 写像 B を V の内積, $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積といい, 内積の定義されたベクトル空間を計量ベクトル空間と呼ぶ.

定義 3.1.2 *1)* V, W をそれぞれ内積 B_V, B_W が定義されている計量ベクトル空間とする. １次写像 $f : V \to W$ が任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $B_V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = B_W(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))$ を満たすとき f は内積を保つといい, さらに f が同型写像ならば f を計量同型写像という. ２つの計量ベクトル空間の間に計量同型写像が存在するとき, これらの計量ベクトル空間は計量同型であるという.

2) V を B を内積にもつ計量ベクトル空間とする. $\boldsymbol{x} \in V$ に対し, $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ とおいて, $\|\boldsymbol{x}\|$ をベクトル $\boldsymbol{x}$ の「長さ」または「ノルム」という. 長さが１のベクトルを単位ベクトルという. また, $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ を満たす２つのベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ は直交するといい, V の部分集合 S, T に対して S のベクトルと T のベクトルが常に直交するとき S と T は直交するという.

以後, 計量ベクトル空間における２つのベクトルの内積は $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ と略記する.

定義 3.1.3 V を $\boldsymbol{K}$ 上の n 次元計量ベクトル空間とし, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とする. $g_{kl} = (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_l)$ とおき, n 次正方行列 $G = (g_{kl})$ を基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に関する内積の表現行列という. *(3.1.1)* の条件 *(3)* から $g_{lk} = \bar{g}_{kl}$ である.

例 3.1.4 V を $\boldsymbol{K}$ 上の n 次元計量ベクトル空間とし, $G = (g_{kl})$ を V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に関する内積の表現行列とする.

1) $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ の場合, $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$, $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{v}_n$ $(x_j, y_j \in \boldsymbol{R})$ に対し, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k,l=1}^{n} g_{kl} x_k y_l$ である. 従ってとくに $V = \boldsymbol{R}^n$ で $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が基本ベクトルの場合, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x} G \boldsymbol{y}$ である. $G = E_n$ のとき $\boldsymbol{R}^n$ の内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{R}^n$ の標準的内積という.

2) $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ の場合, $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$, $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{v}_n$ $(x_j, y_j \in \boldsymbol{C})$ に対し, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k,l=1}^{n} g_{kl} x_k \bar{y}_l$ である. 従ってとくに $V = \boldsymbol{C}^n$ で $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が基本ベクトルの場合, $\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{v}_j$ に対して $\bar{\boldsymbol{y}} = \sum_{j=1}^{n} \bar{\boldsymbol{y}}_j \boldsymbol{v}_j$ とおくと $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x} G \bar{\boldsymbol{y}}$ である. $G = E_n$ のとき $\boldsymbol{C}^n$ の内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{y}}$ を $\boldsymbol{C}^n$ の標準的内積という.

命題 3.1.5 V を $\boldsymbol{K}$ 上の n 次元計量ベクトル空間とする. $G = (g_{kl})$, $H = (h_{kl})$ を V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$ に関する内積の表現行列とし, V の基底の変換 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} \to \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$ の行列を $P = (p_{kl})$ とすれば, $H = {}^tPG\overline{P}$ *(ただし* $\overline{P} = (\bar{p}_{kl})$*)* が成り立つ.

定理 3.1.6 V を計量ベクトル空間とすれば, 任意の $\boldsymbol{x}, \in V$ に対して次の不等式が成り立つ.

1) $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ *(*等号が成立するのは $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ が１次従属の場合*)*.

2) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ *(*等号が成立するのは $\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{y}$ または $\boldsymbol{y} = r\boldsymbol{x}$ を満たす負でない実数 r が存在する場合*)*.

証明 1) $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ ならば明らかに不等式は成り立つため, $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$ の場合を考える. 任意の $c\in\boldsymbol{C}$ に対して $(\boldsymbol{x}+c\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+c\boldsymbol{y})\geqq 0$ が成り立つため, $c=-\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{y}\|^2}$ とすれば, この左辺は $\|\boldsymbol{x}\|^2-\frac{|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}{\|\boldsymbol{y}\|^2}$ に等しくなり, $|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2\leqq\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2$ が得られる. 等号が成立する条件は明らか.

2) 1) より $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}=2\mathrm{Re}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqq 2|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\leqq 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ だから $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}\|^2+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}+\|\boldsymbol{y}\|^2\leqq(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|)^2$ となり, $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$ が得られる. $\boldsymbol{x}=r\boldsymbol{y}$ または $\boldsymbol{y}=r\boldsymbol{x}$ を満たす正の実数 r が存在すれば等号が成立するのは明らか. 逆に, 等号が成立すれば, $\mathrm{Re}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|=\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ だから, 1) により, $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{x}=r\boldsymbol{y}$ となる $r\in\boldsymbol{K}$ がある. このとき, $\mathrm{Re}(r\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=|(r\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})|$ だから $\mathrm{Re}(r)=|r|$ となり, r は負でない実数である. □

注意 3.1.7 上の証明から $\mathrm{Re}((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2-\|\boldsymbol{x}\|^2-\|\boldsymbol{y}\|^2)$, $\mathrm{Im}((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\mathrm{Re}(-i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}\|^2-\|\boldsymbol{x}\|^2-\|\boldsymbol{y}\|^2)$ がわかる.

命題 3.1.8 $f:V\to W$ を計量ベクトル空間の間の1次写像とする. f が内積を保つことと, 任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して $\|f(\boldsymbol{x})\|=\|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つことは同値であり, このとき f は1対1写像である. さらにこの場合, 次の3つは同値である.
(1) f *は上への写像である.* *(2)* f *は計量同型写像である.* *(3)* f^{-1} *は計量同型写像である.*

3.2 正規直交基底

定義 3.2.1 計量ベクトル空間 V の零でないベクトル $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_k$ が "$i\neq j\Rightarrow(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)=0$" を満たすときこれらを直交系といい, さらに各ベクトルが単位ベクトルのときこれらを正規直交系という. 直交系, 正規直交系が V の基底であるとき, それぞれ直交基底, 正規直交基底という.

命題 3.2.2 V を計量ベクトル空間とする.

1) $c\in\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{x}\in V$ に対し $\|c\boldsymbol{x}\|=|c|\|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つ. 従って $\boldsymbol{x}\in V$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ ならば $\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}$ は単位ベクトルである. これより, $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_k$ が V の直交系 *(*直交基底*)* ならば $\frac{1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}\boldsymbol{x}_1,\frac{1}{\|\boldsymbol{x}_2\|}\boldsymbol{x}_2,\ldots,\frac{1}{\|\boldsymbol{x}_k\|}\boldsymbol{x}_k$ は V の正規直交系 *(*正規直交基底*)* である.

2) $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_k$ が V の直交系で, $\boldsymbol{y}=\sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j\boldsymbol{x}_j$ ならば $\lambda_j=\frac{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_j)}{\|\boldsymbol{x}_j\|^2}$ である. 従って, 直交系は1次独立である.

3) $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_k$ が V の直交基底ならば任意の $\boldsymbol{y}\in V$ は $\boldsymbol{y}=\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_j)}{\|\boldsymbol{x}_j\|^2}\boldsymbol{x}_j$ と表せる. とくに $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_k$ が正規直交基底ならば $\boldsymbol{y}=\sum\limits_{j=1}^{k}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{x}_j$ である.

定理 3.2.3 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_k$ を計量ベクトル空間 V の1次独立なベクトルとする. 次の様に帰納的に定めた V のベクトル $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\ldots,\boldsymbol{y}_k$ は正規直交系である.

> $\boldsymbol{y}_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}\boldsymbol{x}$ とし, 順に $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\ldots,\boldsymbol{y}_{j-1}$ が $\boldsymbol{y}_l\in\langle\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_l\rangle$ *(*$1\leqq l\leqq j-1$*)* を満たすように定まったとする. $\boldsymbol{y}'_j=\boldsymbol{x}_j-\sum\limits_{l=1}^{j-1}(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{y}_l)\boldsymbol{y}_l$ とおけば, $\boldsymbol{y}'_j\neq\boldsymbol{0}$ であり, $\boldsymbol{y}_j=\frac{1}{\|\boldsymbol{y}'_j\|}\boldsymbol{y}'_j$ とする.

従って, V の正規直交系 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\ldots,\boldsymbol{y}_k$ で, $\boldsymbol{y}_j=d_j\boldsymbol{x}_j+\sum\limits_{l=1}^{j-1}p_{jl}\boldsymbol{x}_l$ *(*d_j は正の実数, $p_{jl}\in\boldsymbol{K}$*)* と表されるものが存在する.

証明 もし $\boldsymbol{y}'_j=\boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{x}_j\in\langle\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\ldots,\boldsymbol{y}_{j-1}\rangle\subset\langle\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_{j-1}\rangle$ となって, $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_k$ が1次独立であることに反する. $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\ldots,\boldsymbol{y}_{j-1}$ が正規直交系であると仮定すれば, $(\boldsymbol{y}'_j,\boldsymbol{y}_l)=0$ が $1\leqq l\leqq j-1$ に対して成り立つため $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\ldots,\boldsymbol{y}_j$ は正規直交系である. 従って j による帰納法で主張が示される. □

注意 3.2.4 上の定理において $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ *($m \leqq k$)* がすでに正規直交系になっていれば $\boldsymbol{y}_l = \boldsymbol{x}_l$ *($m \leqq k$)* である．従って, $\dim V = k$ のとき $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ が V の *(*正規*)*直交系ならば $k-m$ 個のベクトル $\boldsymbol{x}_{m+1}, \boldsymbol{x}_{m+2}, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ で, $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ が正規直交基底になるようなものがある.

正方行列 $P = (p_{kl})$ で, $k > l$ ならば $p_{kl} = 0$ であるような行列を (上半) 三角行列という.

系 3.2.4.1 *1)* n 次元計量ベクトル空間には正規直交基底が存在する.

2) $G \in M(n; \boldsymbol{K})$ を n 次元計量ベクトル空間の内積の表現行列とすれば, 対角成分が正の実数であるような n 次三角行列 P で, $P^*GP = E_n$ を満たすものが存在する.

命題 3.2.5 V, W を計量ベクトル空間, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ を V の正規直交基底, $f : V \to W$ を１次写像とする.

1) f が内積を保つ $\Leftrightarrow$ $f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \ldots, f(\boldsymbol{x}_n)$ が W の正規直交系.

2) f が計量同型写像 $\Leftrightarrow$ $f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \ldots, f(\boldsymbol{x}_n)$ が W の正規直交基底.

系 3.2.5.1 V, W を計量ベクトル空間とするとき, $\dim V \leqq \dim W$ ならば内積を保つ１次写像 $f : V \to W$ がある．従って $\dim V = \dim W$ ならば V と W は計量同型である.

定義 3.2.6 V を計量ベクトル空間, S を V の部分集合とする．$S^\perp = \{\boldsymbol{x} \in V \,|\, \boldsymbol{y} \in S \Rightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}\}$ とおくと $S^\perp$ は V の部分空間であり, これを S の直交補空間という.

命題 3.2.7 V を計量ベクトル空間, S, T を V の部分集合とする.

1) $S \subset (S^\perp)^\perp$ であり, V が有限次元で S が部分空間ならば $S = (S^\perp)^\perp$ である.

2) $S \subset T$ ならば $T^\perp \subset S^\perp$.

3) $\{\boldsymbol{0}\}^\perp = V$, $V^\perp = \{\boldsymbol{0}\}$.

補題 3.2.8 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とし, $p, q : V \to V$ は $p \circ p = p$, $q \circ q = q$ を満たす１次写像とする．このとき, $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}\, q$ かつ $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Ker}\, q$ ならば $p = q$ である.

定理 3.2.9 W を計量ベクトル空間 V の m 次元部分空間とする．W の正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ をとり, $p_W : V \to V$ を $p_W(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{m} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_j)\boldsymbol{v}_j$ で定めれば $p_W \circ p_W = p_W$, $\mathrm{Im}\, p_W = W$, $\mathrm{Ker}\, p_W = W^\perp$ が成り立つため, $V = W \oplus W^\perp$ であり, p_W は W の正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ の選び方に依存しない.

定義 3.2.10 上の定理における１次写像 p_W を W への直交射影という.

3.3 随伴写像

補題 3.3.1 V を計量ベクトル空間, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ とする．任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$ が成り立てば $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ である.

定理 3.3.2 V, W を計量ベクトル空間とする.

1) $g : V \to \boldsymbol{K}$ を１次写像とすると, $\boldsymbol{a} \in V$ で, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $g(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ が成り立つものがただ１つ存在する.

2) $f : V \to W$ を１次写像とすれば, １次写像 $f^* : W \to V$ で, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{y} \in W$ に対して $(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, f^*(\boldsymbol{y}))$ が成り立つものがただ１つ存在する.

定義 3.3.3 上の１次写像 $f^* : W \to V$ を f の随伴写像という.

命題 3.3.4 V, W, Z を計量ベクトル空間, $f, f' : V \to W$, $g : W \to Z$ を１次写像とする.

1) $(f+f')^* = f^* + f'^*$, $(\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*$ $(\lambda \in \boldsymbol{K})$, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, $1_V^* = 1_V$, $(f^*)^* = f$.

2) S, T がそれぞれ V, W の部分集合で, $f(S) \subset T$ ならば $f^*(T^\perp) \subset S^\perp$ である.

3) f が内積を保つ $\Leftrightarrow$ $f^* \circ f = 1_V$.

4) f が計量同型写像 $\Leftrightarrow$ $f^* \circ f = 1_V$ かつ $f \circ f^* = 1_W$ $\Leftrightarrow$ f^* が計量同型写像. とくに $\dim V = \dim W$ ならば $f \circ f^* = 1_W$ は $f^* \circ f = 1_V$ と同値である.

5) $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$, $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m\}$ をそれぞれ V, W の正規直交基底とし, これらに関する f の表現行列を $A = (a_{kl})$ とし, $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m\}$, $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ に関する f^* の表現行列を $A^* = (a^*_{kl})$ とすれば $a^*_{kl} = \bar{a}_{lk}$ である.

定義 3.3.5 *1)* $A = (a_{kl}) \in M(m, n; \boldsymbol{C})$ に対し, $A^* = (a^*_{kl}) \in M(n, m; \boldsymbol{C})$ を $a^*_{kl} = \bar{a}_{lk}$ で定義し, A の共役転置行列という.

2) $A \in M(n; \boldsymbol{C})$ が $A^* = A$ を満たせば *Hermite* 行列, $A^* = -A$ を満たせば歪 *Hermite* 行列, $A^*A = E_n$ を満たせばユニタリー行列という. また, $A^*A = AA^*$ を満たす行列を正規行列という. ${}^tA = A$ を満たす行列を対称行列, ${}^tA = -A$ を満たす行列を交代行列といい, ${}^tAA = E_n$ を満たす行列を直交行列と呼ぶ.

注意 3.3.6 *1)* n 次元計量ベクトル空間の内積の表現行列は n 次 *Hermite* 行列である.

2) $f : V \to W$ を有限次元計量ベクトル空間の間の１次写像とするとき, f が計量同型写像であることと, V, W の正規直交基底に関する f の表現行列がユニタリー行列になることは同値である.

命題 3.3.7 *1)* n 次 *Hermite* 行列の全体および n 次歪 *Hermite* 行列の全体はともに $M(n; \boldsymbol{C})$ の実ベクトル空間として n^2 次元部分空間である.

2) n 次対称行列の全体は $M(n; \boldsymbol{K})$ の $\frac{1}{2}n(n+1)$ 次元部分空間である. また n 次交代行列の全体は $M(n; \boldsymbol{K})$ の $\frac{1}{2}n(n-1)$ 次元部分空間である.

命題 3.3.8 *1)* $P \in M(n; \boldsymbol{K})$ がユニタリー行列であるためには P の列ベクトル全体または行ベクトル全体が $\boldsymbol{K}$ の標準的内積に関して正規直交基底になっていることが必要十分である.

2) P, Q を n 次ユニタリー行列とすれば PQ, $P^{-1} = P^*$ はともにユニタリー行列である.

3) $P \in M(k; \boldsymbol{C})$, $Q \in M(l; \boldsymbol{C})$ がともにユニタリー行列であるためには $\begin{pmatrix} P & O \\ O & Q \end{pmatrix} \in M(k+l; \boldsymbol{C})$ がユニタリー行列であることが必要十分である.

定理 3.3.9 *1)* $A \in M(n; \boldsymbol{C})$ に対し, $P^{-1}AP$ が三角行列になるようなユニタリー行列 P が存在する.

2) $A \in M(n; \boldsymbol{R})$ に対し, A の固有方程式の解がすべて実数ならば $P^{-1}AP$ が三角行列になるような直交行列 P が存在する.

証明 n による帰納法で示す. λ を A の固有値とし, $\boldsymbol{v}_1$ を λ に対する固有ベクトルとする. このとき $\lambda \in \boldsymbol{R}$ で, $A \in M(n; \boldsymbol{R})$ ならば $\boldsymbol{v}_1 \in \boldsymbol{R}^n$ としてよい. $\boldsymbol{K}^n$ の標準的内積に関して, $\boldsymbol{v}_1$ は単位ベクトルであると仮定してよいから, $\boldsymbol{K}^n$ の正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が取れる. $Q = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ とおくと Q はユニタリー行列で, $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$ は A から定まる１次写像の不変部分空間だから (2.1.6) から $\boldsymbol{K}^n$ の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に関するこの１次写像の表現行列は $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$ $(B \in M(n-1; \boldsymbol{K}))$ という形になる. B に対して帰納法の仮定を用いれば, $R^{-1}BR$ が三角行列になるような $n-1$ 次ユニタリー行列 R がある. そこで $P = Q\begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & R \end{pmatrix}$ とおくと (3.3.8) の 2), 3) から P はユニタリー行列であり, $P^{-1}AP$ は三角行列になる. □

3.4 正規行列の対角化

命題 3.4.1 V が計量ベクトル空間で, １次写像 $f : V \to V$ が $f^* \circ f = f \circ f^*$ を満たすとする. W が f の固有値 λ に対する固有空間ならば W は f^* の不変部分空間であり, $W^\perp$ は f の不変部分空間である.

証明 $\boldsymbol{x} \in W$ ならば $f(f^*(\boldsymbol{x})) = f^*(f(\boldsymbol{x})) = f^*(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda f^*(\boldsymbol{x})$ だから $f^*(\boldsymbol{x}) \in W$ である．従って W は f^* の不変部分空間であり, (3.3.4) の 3) から $W^{\perp}$ は $(f^*)^*$ の不変部分空間であるが (3.3.4) の 1) から $(f^*)^* = f$ である． □

定理 3.4.2 V を $\boldsymbol{C}$ 上の有限次元計量ベクトル空間, $f : V \to V$ を１次写像 とする．V が互いに直交する f の固有空間の直和になるためには, f が $f^* \circ f = f \circ f^*$ を満たすことが必要十分である．従って, $A \in M(n; \boldsymbol{C})$ がユニタリー行列で対角化されるためには A が正規行列であることが必要十分である．

証明 十分性は V の次元に関する帰納法で, (3.4.1) を用いれば示される．W_j を f の固有値 λ_j に対する固有空間とし, $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_d$ であり, W_j と W_k $(j \neq k)$ は直交するとする．$W_j = (W_1 \oplus \cdots \oplus W_{j-1} \oplus W_{j+1} \oplus \cdots \oplus W_d)^{\perp}$ だから (3.3.4) の 3) から各 W_j は f^* の不変部分空間である．$\boldsymbol{x} \in W_j$, $\boldsymbol{y} \in V$ ならば

$$(f \circ f^*(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\lambda_j f^*(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\lambda_j \boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{y})) = (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (f^* \circ f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})$$

だから (3.3.1) より, $f^* \circ f = f \circ f^*$ が得られる． □

定理 3.4.3 V が $\boldsymbol{K}$ 上の有限次元計量ベクトル空間で, １次写像 $f : V \to V$ が $f^* \circ f = f \circ f^*$ を満たすとする．

1) $f^* = f \;\Leftrightarrow\; f$ *の固有方程式の解がすべて実数である．*

2) $f^* = -f \;\Leftrightarrow\; f$ *の固有方程式の解がすべて純虚数または 0 である．*

3) $f^* \circ f = 1_V \;\Leftrightarrow\; f$ *の固有方程式の解の絶対値はすべて 1 である．*

証明 (3.4.2) から W_j を f の固有値 λ_j に対する固有空間とすれば V は $W_1, W_2, \ldots, W_d$ の直和で, $j \neq k$ ならば W_j と W_k は直交する．

1) $f^* = f$ ならば $\boldsymbol{x} \in W_j$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$ とすると $\lambda_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\lambda_j \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = (f^*(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) = (\boldsymbol{x}, \lambda_j \boldsymbol{x}) = \bar{\lambda}_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ で, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \neq 0$ だから $\lambda_j = \bar{\lambda}_j$ がわかる．逆に f の固有方程式の解がすべて実数であるとすると, $\boldsymbol{x} \in W_j$, $\boldsymbol{y} \in W_k$ ならば

$$(f^*(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \lambda_k \boldsymbol{y}) = \begin{Bmatrix} \lambda_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) & j = k \\ 0 & j \neq k \end{Bmatrix} = (\lambda_j \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})$$

より, (3.3.1) から $f^* = f$ が得られる．2) も 1) と同様にして示される．

3) $f^* \circ f = 1_V$ ならば $\boldsymbol{x} \in W_j$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$ に対し, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (f^*(f(\boldsymbol{x})), \boldsymbol{x}) = (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x})) = (\lambda_j \boldsymbol{x}, \lambda_j \boldsymbol{x}) = |\lambda_j|^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ だから $|\lambda_j| = 1$. 逆に $|\lambda_j| = 1$ $(1 \leqq j \leqq d)$ とすれば, $\boldsymbol{x} \in W_j$, $\boldsymbol{y} \in W_k$ ならば

$$(f^*(f(\boldsymbol{x})), \boldsymbol{y}) = (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (\lambda_j \boldsymbol{x}, \lambda_k \boldsymbol{y}) = \begin{Bmatrix} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) & j = k \\ 0 & j \neq k \end{Bmatrix} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

より, (3.3.1) から $f^* \circ f = 1_V$ が得られる． □

上の定理を行列の言葉で述べ直せば次の様になる．

定理 3.4.4 A を正規行列とする．

1) A *が Hermite 行列である．*$\Leftrightarrow$ A *の固有方程式の解がすべて実数である．*

2) A *が歪 Hermite 行列である．*$\Leftrightarrow$ A *の固有方程式の解がすべて純虚数または 0 である．*

3) A *がユニタリー行列である．*$\Leftrightarrow$ A *の固有方程式の解の絶対値はすべて 1 である．*

3.5 実正規行列

定義 3.5.1 *1)* 実ベクトル空間 V に対して次の様に定義される複素ベクトル空間 $V_{\boldsymbol{C}}$ を V の複素化という．$V_{\boldsymbol{C}}$ は実ベクトル空間としては $V \oplus V$ であり, $\boldsymbol{R}$ 上の１次写像 $J : V_{\boldsymbol{C}} \to V_{\boldsymbol{C}}$ を $J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ で定めると,

$J \circ J = -1_{V_{\boldsymbol{C}}}$ である．スカラー倍 $\boldsymbol{C} \times V_{\boldsymbol{C}} \to V_{\boldsymbol{C}}$ を $\lambda = \alpha + \beta i \in \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{z} \in V_{\boldsymbol{C}}$ に対して $\lambda \boldsymbol{z} = \alpha \boldsymbol{z} + \beta J(\boldsymbol{z})$ で定義する．これにより $V_{\boldsymbol{C}}$ は複素ベクトル空間になる．
$c : V_{\boldsymbol{C}} \to V_{\boldsymbol{C}}$, $\rho : V \to V_{\boldsymbol{C}}$ を $c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y})$, $\rho(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$ で定めればともに $\boldsymbol{R}$ 上の１次写像であり，$c \circ c = 1_{V_{\boldsymbol{C}}}$, $c \circ \rho = \rho$, $c \circ J = -J \circ c$ が成り立つ．
$f : V \to W$ を実ベクトル空間の間の１次写像とするとき，$f_{\boldsymbol{C}} : V_{\boldsymbol{C}} \to W_{\boldsymbol{C}}$ を $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))$ で定めれば，$f_{\boldsymbol{C}}$ は $\boldsymbol{C}$ 上線型であり，$f_{\boldsymbol{C}} \circ \rho = \rho \circ f$, $f_{\boldsymbol{C}} \circ c = c \circ f_{\boldsymbol{C}}$ が成り立つ．

2) 複素ベクトル空間 V を実ベクトル空間とみなしたものを V の実化といい，$V_{\boldsymbol{R}}$ で表す．V が複素ベクトル空間として n 次元ならば $V_{\boldsymbol{R}}$ は実ベクトル空間として $2n$ 次元である．$J : V_{\boldsymbol{R}} \to V_{\boldsymbol{R}}$ を $J(\boldsymbol{x}) = i\boldsymbol{x}$ で定義される $\boldsymbol{R}$ 上の１次写像とすれば $J \circ J = -1_{V_{\boldsymbol{R}}}$ が成り立つ．

注意 3.5.2 *1)* S を実ベクトル空間 V の基底とすれば $\rho(S)$ は $V_{\boldsymbol{C}}$ の複素ベクトル空間としての基底になる．従って，$\dim V = n$ ならば $V_{\boldsymbol{C}}$ の 複素ベクトル空間としての次元は n である．

2) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ をそれぞれ実ベクトル空間 V, W の基底とし，これらの基底に関する１次写像 $f : V \to W$ の表現行列は，$\{\rho(\boldsymbol{v}_1), \rho(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \rho(\boldsymbol{v}_n)\}$, $\{\rho(\boldsymbol{w}_1), \rho(\boldsymbol{w}_2), \ldots, \rho(\boldsymbol{w}_m)\}$ に関する $f_{\boldsymbol{C}} : V_{\boldsymbol{C}} \to W_{\boldsymbol{C}}$ の表現行列に一致する．とくに，$V = W$ の場合，$f : V \to V$ の固有多項式と $f_{\boldsymbol{C}} : V_{\boldsymbol{C}} \to V_{\boldsymbol{C}}$ の固有多項式は一致する．

命題 3.5.3 *1)* V を複素ベクトル空間とする．写像 $c : V \to V$ が $\boldsymbol{R}$ 上線型であり，$c \circ c = 1_V$ かつ任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $c(i\boldsymbol{x}) = -ic(\boldsymbol{x})$ を満たすとする．i 倍する写像を $J : V \to V$ とし，$p = \frac{1}{2}(1_V + c)$, $q = \frac{1}{2}(1_V - c)$ とおけば，$p, q : V \to V$ は $\boldsymbol{R}$ 上の１次写像で，$p + q = 1_V$, $pq = 0$, $q \circ J = J \circ p$ が成り立つ．従って，$W = \operatorname{Im} p$ とおくと $\operatorname{Im} q = J(\operatorname{Im} p) = J(W)$ だから実ベクトル空間として $V = W \oplus J(W)$ であり，$\varphi : W_{\boldsymbol{C}} \to V$ を $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}$ で定めれば，複素ベクトル空間としての同型写像である．

2) V を実ベクトル空間とする．$J \circ J = -1_V$ を満たす $\boldsymbol{R}$ 上の１次写像があるとき，$\mu : \boldsymbol{C} \times V \to V$ を $\mu(x + yi, v) = xv + yJ(v)$ で定めることにより V は複素ベクトル空間の構造をもつ．この複素ベクトル空間の実化はもとの V に他ならない．従ってこの様な１次写像があるとき，実ベクトル空間としての V の次元は偶数である．

例 3.5.4 *1)* $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{C}^n$ は $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n)$ の形に一意的に表せるため，$c : \boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^n$ を $c(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} - i\boldsymbol{y}$ $(x, y \in \boldsymbol{R}^n)$ で定義できる．この写像 c は *(3.5.3)* の *1)* の条件を満たすため，$\boldsymbol{C}^n$ は $\boldsymbol{R}^n$ の複素化である．

2) $1 \leqq p \leqq n$ に対し，$a_{2p-1,2p} = -1$, $a_{2p,2p-1} = 1$ とし，$(k, l) \neq (2p-1, 2p), (2p, 2p-1)$ ならば $a_{kl} = 0$ として $2n$ 次正方行列 $J = (a_{kl})$ を定義すれば $J^2 = -E_{2n}$ だから J から定まる１次写像 $\boldsymbol{R}^{2n} \to \boldsymbol{R}^{2n}$ は *(3.5.3)* の *2)* の条件を満たす．

定理 3.5.5 V を 実ベクトル空間，$f : V \to V$ を１次写像とする．Z を $f_{\boldsymbol{C}} : V_{\boldsymbol{C}} \to V_{\boldsymbol{C}}$ の固有値 $\alpha + \beta i$ に対する $f_{\boldsymbol{C}}$ の固有空間とし，$W = \rho^{-1}(Z + c(Z))$ とおく．

1) $\beta = 0$ ならば W は f の固有値 α に対する固有空間であり，$Z = \rho(W) + J(\rho(W))$ が成り立つ．

2) $\beta \neq 0$ ならば W は f の不変部分空間で，$Z \cap \operatorname{Im} \rho = Z \cap J(\operatorname{Im} \rho) = \{\boldsymbol{0}\}$ である．写像 $\pi : Z \to (Z + c(Z)) \cap \operatorname{Im} \rho$ を $\pi(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{z} + c(\boldsymbol{z}))$ で定めれば，π は実ベクトル空間としの同型写像で，$\boldsymbol{z} \in Z$ に対し，$\rho(\boldsymbol{x}) = \pi(\boldsymbol{z})$, $\rho(\boldsymbol{y}) = \pi(i\boldsymbol{z})$ を満たす $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ が１つずつ存在して $f(\boldsymbol{x}) = \alpha \boldsymbol{x} - \beta \boldsymbol{y}$, $f(\boldsymbol{y}) = \beta \boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y}$ が成り立つ．

V を有限次元実ベクトル空間とし，１次写像 $f : V \to V$ の固有方程式の相異なる実数解を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$, 虚数解を $\alpha_1 + \beta_1 i, \alpha_1 - \beta_1 i, \alpha_2 + \beta_2 i, \alpha_2 - \beta_2 i, \ldots, \alpha_k + \beta_k i, \alpha_k - \beta_k i$ とする．また，V_j を λ_j に対する f の固有空間，Z_j を $\alpha_j + \beta_j i$ に対する $f_{\boldsymbol{C}} : V_{\boldsymbol{C}} \to V_{\boldsymbol{C}}$ の固有空間とし，$W_j = \rho^{-1}(Z_j + c(Z_j))$ とおく．$V_{\boldsymbol{C}}$ が固有空間の直和になれば V は $V_1, V_2, \ldots, V_l, W_1, W_2, \ldots, W_k$ の直和になるため，上の定理を行列の言葉で述べると次の様になる．

系 3.5.5.1 $A \in M(n; \boldsymbol{R})$ が $A \in M(n; \boldsymbol{C})$ として対角化可能ならば，A の実数の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$, 虚数の

固有値を $\alpha_1+\beta_1 i, \alpha_1-\beta_1 i, \alpha_2+\beta_2 i, \alpha_2-\beta_2 i, \dots, \alpha_k+\beta_k i, \alpha_k-\beta_k i$ とすれば, 正則行列 $P \in M(n;\boldsymbol{R})$ で,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & \text{\Large 0} & \\ & & \lambda_l & & & \\ & & & A_1 & & \\ & \text{\Large 0} & & & \ddots & \\ & & & & & A_k \end{pmatrix} \quad \left(A_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \in M(2;\boldsymbol{R})\right)$$

となるものがある.

命題 3.5.6 V を実ベクトル空間, $f : V \to V$ を１次写像とする.

1) λ を $f_{\boldsymbol{C}} : V_{\boldsymbol{C}} \to V_{\boldsymbol{C}}$ の固有値, W を λ に対する $f_{\boldsymbol{C}}$ の固有空間とすれば $\bar{\lambda}$ も $f_{\boldsymbol{C}}$ の固有値で, $c(W)$ が $\bar{\lambda}$ に対する固有空間になる.

2) V が有限次元ならば f の固有多項式は $f_{\boldsymbol{C}}$ の固有多項式と一致する.

定義 3.5.7 *1)* V を $\boldsymbol{R}$ 上の計量ベクトル空間として, 写像 $B_{\boldsymbol{C}} : V_{\boldsymbol{C}} \times V_{\boldsymbol{C}} \to \boldsymbol{C}$ を $B_{\boldsymbol{C}}((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),(\boldsymbol{z},w)) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y},w) + ((\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) - (\boldsymbol{x},w))i$ で定めると, これは $V_{\boldsymbol{C}}$ の内積になる. この内積を V の内積から定まる $V_{\boldsymbol{C}}$ の内積といい, $B_{\boldsymbol{C}}((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),(\boldsymbol{z},w))$ を $((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),(\boldsymbol{z},w))_{\boldsymbol{C}}$ で表す.

2) V を $\boldsymbol{C}$ 上の計量ベクトル空間として, 写像 $B_{\boldsymbol{R}} : V_{\boldsymbol{R}} \times V_{\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{R}$ を $B_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathrm{Re}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ で定めると, これは $V_{\boldsymbol{C}}$ の内積になる. この内積を V の内積から定まる $V_{\boldsymbol{R}}$ の内積といい, $B_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{R}}$ で表す.

命題 3.5.8 V, W を $\boldsymbol{R}$ 上の計量ベクトル空間とする.

1) $V_{\boldsymbol{C}}$ の内積 B が任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$ に対して, $B(\rho(\boldsymbol{x}),\rho(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を満たせば, $B = B_{\boldsymbol{C}}$ である.

2) $f : V \to W$ を１次写像とすれば, 任意の $v \in V_{\boldsymbol{C}}$, $w \in V_{\boldsymbol{C}}$ に対して $(f_{\boldsymbol{C}}(v),w)_{\boldsymbol{C}} = (v,(f^*)_{\boldsymbol{C}}(w))_{\boldsymbol{C}}$ が成り立つ. 従って, $(f_{\boldsymbol{C}})^* = (f^*)_{\boldsymbol{C}}$ である.

3) $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n$ を V の基底とする. $V_{\boldsymbol{C}}$ の基底 $\rho(\boldsymbol{v}_1),\rho(\boldsymbol{v}_2),\dots,\rho(\boldsymbol{v}_n)$ に関する V から定まる $V_{\boldsymbol{C}}$ の内積の表現行列は $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n$ に関する V の内積の表現行列に一致する.

補題 3.5.9 V が $\boldsymbol{R}$ 上の有限次元計量ベクトル空間とし, １次写像 $f : V \to V$ は $f^* \circ f = f \circ f^*$ を満たすとする. f の固有方程式の相異なる実数解を $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_l$, 虚数解を $\mu_1,\bar{\mu}_1,\mu_2,\bar{\mu}_2,\dots,\mu_k,\bar{\mu}_k$ とし, V_j を λ_j に対する f の固有空間, Z_j を μ_j に対する $f_{\boldsymbol{C}} : V_{\boldsymbol{C}} \to V_{\boldsymbol{C}}$ の固有空間とし, $W_j = \rho^{-1}(Z_j + c(Z_j))$ とおく. このとき, V_j と W_m, W_j と W_m *(*$j \neq m$*)* は互いに直交する.

証明 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$ ならば $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\rho(\boldsymbol{x}),\rho(\boldsymbol{y}))_{\boldsymbol{C}}$ だから (3.5.2) と (3.5.8) の 2) から結果が得られる. □

定理 3.5.10 $A \in M(n;\boldsymbol{R})$ が実正規行列であるためには n 次直交行列 P で,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & \text{\Large 0} & \\ & & \lambda_l & & & \\ & & & A_1 & & \\ & \text{\Large 0} & & & \ddots & \\ & & & & & A_k \end{pmatrix} \quad \left(A_j = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\mu_j) & -\mathrm{Im}(\mu_j) \\ \mathrm{Im}(\mu_j) & \mathrm{Re}(\mu_j) \end{pmatrix} \in M(2;\boldsymbol{R})\right)$$

となるものがあることが必要十分である. ただし, $\lambda_1,\dots,\lambda_l$ は実数, $\mu_1,\dots,\mu_k$ は虚数とする. このとき, A の固有多項式は次の様な形になる.

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_l)(x-\mu_1)(x-\bar{\mu}_1)(x-\mu_2)(x-\bar{\mu}_2)\cdots(x-\mu_k)(x-\bar{\mu}_k)$$

証明 十分性は (3.5.5.1) と (3.5.2), (3.5.9) からわかる. 必要性は, 左辺の行列を D とすれば, $D^*D = DD^*$ であり, $A = PDP^*$ からわかる. $\square$

定理 3.5.11 *1)* $A \in M(n; \boldsymbol{R})$ が対称行列であるためには A が直交行列により対角化されることが必要十分である.

2) $A \in M(n; \boldsymbol{R})$ が交代行列であるためには $P^{-1}AP$ が次の様な形になる直交行列 P が存在することが必要十分である.

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & \text{\huge 0} & \\ & & 0 & & & \\ & & & A_1 & & \\ & \text{\huge 0} & & & \ddots & \\ & & & & & A_k \end{pmatrix} \quad (A_j = \begin{pmatrix} 0 & -\mu_j \\ \mu_j & 0 \end{pmatrix} \in M(2; \boldsymbol{R}))$$

3) $A \in M(n; \boldsymbol{R})$ が直交行列であるためには $P^{-1}AP$ が次の様な形になる直交行列 P が存在することが必要十分である.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \text{\huge 0} & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & A_1 & & \\ & \text{\huge 0} & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix} \quad (A_j = \begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix} \in M(2; \boldsymbol{R}))$$