第 1 章　ベクトル空間

これまでは数ベクトル空間とその間の 1 次写像について学んできたが, 考える対象を数ベクトル空間に限定せず, より広い対象をベクトル空間として取り扱えた方が線形代数学の理論がより一般的なものになるとともに, 解析学をはじめとする数学の他の分野への応用が広がることになる.

例えば, A を $m \times n$ 行列として $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ 全体からなる集合を W とすれば, W に属する 2 つのベクトルの和と W のベクトルの実数倍はつねに W に属することが容易に確かめられる. このような集合もベクトル空間の仲間に入れて, W を含む一般のベクトル空間の次元の概念を定義してやれば, W の次元は $n - \operatorname{rank} A$ に等しくなることが第 2 章第 2 節で示される (定理 2.2.11).

また, 閉区間 $[a, b]$ で定義された実数値連続関数全体からなる集合を $C[a, b]$ で表せば, $C[a, b]$ には関数の加法と実数倍が定義されるため, 一般化されたベクトル空間の一種になる. このような関数からなるベクトル空間は「関数空間」と呼ばれて, 解析学の重要な研究対象の 1 つである.

n 次元数ベクトル空間においては, 基本ベクトルと呼ばれる座標軸方向の長さ 1 のベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ があり, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の第 j 成分を x_j とすれば $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ と表せた. ところが, 例えば上のはじめの例において $n = 3$, $m = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の場合は $\boldsymbol{R}^3$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ のいずれも W には属さないので, 一般のベクトル空間において基本ベクトルを一般化した「基底」と呼ばれる概念を考える必要がある.

この章では, まず第 1 節で一般のベクトル空間を定義し, この一般化によってベクトル空間の仲間入するものの例を挙げる. 第 2, 3 節ではベクトルの 1 次独立性という性質に着目することにより, ベクトル空間の「基底」や「次元」といった概念を定義して, ベクトル空間についての基本的な定理を証明する.

1.1　ベクトル空間の定義と例

以後 $\boldsymbol{K}$ は実数の集合 $\boldsymbol{R}$ または複素数の集合 $\boldsymbol{C}$ を表すことにする.

数ベクトル空間の定義を振り返ると, n 次元数ベクトルの集合 $\boldsymbol{K}^n$ に加法とスカラー倍という 2 種類の演算を考えたが, ここで改めて「演算」とは何かを, 写像の言葉を用いて述べておこう.

まず, 集合 X, Y が与えられたとき, X の要素 x と Y の要素 y の対 (x, y) 全体からなる集合を $X \times Y$ で表す. $X \times Y$ から第 3 の集合 Z への写像 f が与えられれば, $x \in X$ と $y \in Y$ に対して f による (x, y) の像 $f(x, y)$ が対応するが, これは x と y に f という演算を行った結果であると言える. そこで, f を演算と呼ぶことにして, $f(x, y)$ を $x + y$ や xy などで表すことが多い. このようにみれば, 演算とは写像の一種に他ならないことがわかる.

例 1.1.1 *(1)* 複素数の加法, 乗法は複素数の対 (z, w) にそれぞれ $z + w$, zw を対応させる $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{C}$ への写像である.

(2) $\boldsymbol{K}^n$ の加法は n 次元数ベクトルの対 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ を対応させる $\boldsymbol{K}^n \times \boldsymbol{K}^n$ から $\boldsymbol{K}^n$ への写像である. また $\boldsymbol{K}^n$ のスカラー倍は $\boldsymbol{K}$ の要素と n 次元数ベクトルの対 $(r, \boldsymbol{x})$ に $r\boldsymbol{x}$ を対応させる $\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{K}^n$ から $\boldsymbol{K}^n$ への写像である.

ベクトル空間の定義を以下のように行う.

定義 1.1.2 集合 V に, 加法, スカラー倍と呼ばれる次の 2 種類の演算

(1) 加法 : V の 2 つの要素の対 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対して V の要素 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ を対応させる演算.

(2) スカラー倍 : $\boldsymbol{K}$ の要素 r と V の要素 $\boldsymbol{x}$ の対 $(r, \boldsymbol{x})$ に対して V の要素 $r\boldsymbol{x}$ を対応させる演算.

が定義されていて, 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$, $r, s \in \boldsymbol{K}$ に対して次の *(i)*〜*(viii)* が成り立つとき V を $\boldsymbol{K}$ 上の**ベクトル空間**という. また V の要素をベクトルと呼び, それに対し $\boldsymbol{K}$ の要素をスカラーと呼ぶ.

(i) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ (結合法則).

(ii) V の要素 $\boldsymbol{0}$ で, すべての $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ を満たすものがある.

(iii) 各 $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\boldsymbol{x}' \in V$ で, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たすものがある.

(iv) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ (交換法則).

(v) $(rs)\boldsymbol{x} = r(s\boldsymbol{x})$ (結合法則).

(vi) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

(vii) $r(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = r\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{y}$ (左分配法則).

(viii) $(r+s)\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{x}$ (右分配法則).

$\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間を $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ の場合は実ベクトル空間, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ の場合は複素ベクトル空間という.

注意 1.1.3 *(1)* 上の定義の *(ii)* における $\boldsymbol{0}$ は V の中にただ *1* つしか存在しない. 実際 $\boldsymbol{0}_1, \boldsymbol{0}_2 \in V$ がすべての $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}_2 = \boldsymbol{0}_1+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ を満たすならば, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}_1, \boldsymbol{0}_2$ の場合を考えると $\boldsymbol{0}_1+\boldsymbol{0}_2 = \boldsymbol{0}_1$ と $\boldsymbol{0}_1+\boldsymbol{0}_2 = \boldsymbol{0}_2$ が得られるため $\boldsymbol{0}_1 = \boldsymbol{0}_2$ が成り立つ. これは *(ii)* の条件を満たす $\boldsymbol{0}$ はただ *1* つであることを意味する. このような V の要素を零ベクトルと呼ぶ.

(2) $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ で $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たすものがあれば, *(i)*, *(ii)* により $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}_1+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}+\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_2$ だから *(iii)* を満たす $\boldsymbol{x}'$ は各 $\boldsymbol{x} \in V$ に対してただ *1* つだけ存在することになる. このような $\boldsymbol{x}'$ を $-\boldsymbol{x}$ で表し, さらに $\boldsymbol{y} \in V$ に対して, $\boldsymbol{y}+(-\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$ で表すことにする.

命題 1.1.4 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする.
(1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ に対して $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ である.
(2) 任意の $\boldsymbol{x} \in V$, $r \in \boldsymbol{K}$ に対して $0\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$, $-\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x}$ が成り立つ.

証明 (1) 定義 1.1.2 の (i), (ii), (iii) を用いれば, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{z}+(-\boldsymbol{z})) = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})+(-\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})+(-\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{y}+(\boldsymbol{z}+(-\boldsymbol{z})) = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{y}$.

(2) 定義 1.1.2 の (ii), (vii), (viii) から $0\boldsymbol{x}+0\boldsymbol{x} = (0+0)\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}+0\boldsymbol{x}$, $r\boldsymbol{0}+r\boldsymbol{0} = r(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}) = r\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}+r\boldsymbol{0}$ となるため, (1) により $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $r\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ である. 定義 1.1.2 の (vi), (viii) と今示したことから $\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x} = (1+(-1))\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 同様に $(-1)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ だから注意 1.1.3 の (2) から $-\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x}$ が得られる. □

ここで, ベクトル空間の例をいくつか挙げる.

例 1.1.5 *(1)* n 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^n$ は $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間である.
(2) $\boldsymbol{K}$ の要素を成分とする $m \times n$ 行列全体の集合を $M(m, n; \boldsymbol{K})$ で表すと, 行列の加法とスカラー倍により $M(m, n; \boldsymbol{K})$ は $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間である.
(3) x を変数とし, $\boldsymbol{K}$ の要素を係数とする多項式全体からなる集合

$$P = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,|\, n \geqq 0,\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \boldsymbol{K}\}$$

は多項式の加法とスカラー倍によって $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間である. また, m 次以下の多項式全体からなる P の部分集合を P_m とすれば P_m も多項式の加法とスカラー倍によって $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間である.

(4) $a<b$ を実数, r を負でない整数とする. $C^r(a,b)$ を開区間 (a,b) で定義された r 回微分可能な実数値関数で, その r 次導関数が連続であるようなもの全体からなる集合とする. $f,g\in C^r(a,b)$, $c\in\boldsymbol{R}$ に対し, 関数 $f+g$, cf を $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(cf)(x)=cf(x)$ で定めれば $f+g, cf\in C^r(a,b)$ であり, これらの演算によって $C^r(a,b)$ は $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間である.

W を 3 次元実ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ における原点を通る直線または平面とすると, W に属する 2 つのベクトルの和と, スカラー倍は W に属するため, W 自体も $\boldsymbol{R}^3$ の加法とスカラー倍により $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間である. この例を一般化して「部分空間」の概念を次のように定義する.

定義 1.1.6 $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V の部分集合 W が条件「$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in W$, $r\in\boldsymbol{K}$ ならば $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, r\boldsymbol{x}\in W$」を満たすとき, W を V の部分空間という. このとき W は V の加法とスカラー倍により $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間である.

例 1.1.7 $\boldsymbol{K}$ の要素を成分とする $m\times n$ 行列 A が与えられているとする.

(1) A を係数行列とする斉次連立 *1* 次方程式の解のベクトル全体の集合

$$\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}^n \,|\, A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

は $\boldsymbol{K}^n$ の部分空間である.

(2) $\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{K}^m$ に対し, $(A\ \boldsymbol{b})$ を拡大係数行列とする連立 *1* 次方程式を考える. この方程式が解をもつようなベクトル $\boldsymbol{b}$ 全体からなる集合

$$\{\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{K}^m \,|\, A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \text{ を満たす } \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}^n \text{ がある.}\}$$

は $\boldsymbol{K}^m$ の部分空間である.

V のベクトル $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_k$ に対し,

$$x_1\boldsymbol{v}_1+x_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+x_k\boldsymbol{v}_k \quad (x_1,x_2,\dots,x_k\in\boldsymbol{K})$$

の形に表される V のベクトルを $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_k$ の **1 次結合**と呼ぶことにする.

定義 1.1.8 V のベクトル $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_k$ の *1* 次結合によって表されるベクトル全体からなる集合を $\langle\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_k\rangle$ で表せば, これは V の部分空間であり, $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_k$ で生成される *(*張られる*)* V の部分空間という. また, $V=\langle\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_k\rangle$ が成り立つとき, $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_k$ は V を生成するという.

問 1.1.9 上で定義した $\langle\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_k\rangle$ は確かに V の部分空間であることを示せ.

問 1.1.10 W_1, W_2 を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V の部分空間とするとき, これらの共通部分 $W_1\cap W_2$ は V の部分空間であることを示せ.

部分空間の合併集合は一般には部分空間にならないので, 合併集合に代わるものとして部分空間の和を以下のように定義する.

定義 1.1.11 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間, W_1, W_2 を V の部分空間とする. V の部分集合 W_1+W_2 を

$$\{\boldsymbol{x}\in V \,|\, \boldsymbol{x}=\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2 \text{ を満たす } \boldsymbol{w}_1\in W_1,\ \boldsymbol{w}_2\in W_2 \text{ がある.}\}$$

によって定め, W_1 と W_2 の和と呼ぶ. さらに一般には, $W_1,W_2,\dots,W_k$ を V の部分空間とするとき, V の部分集合 $W_1+W_2+\cdots+W_k$ を

$$\left\{\boldsymbol{x}\in V \,\middle|\, \boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{w}_j \text{ を満たす } \boldsymbol{w}_j\in W_j\ (j=1,2,\dots,k) \text{ がある.}\right\}$$

によって定め, $W_1,W_2,\dots,W_k$ の和と呼ぶ.

問 1.1.12 *(1)* $W_1+W_2+\cdots+W_k$ は V の部分空間であり, 各 W_i *(*$i=1,2,\dots,k$*)* が部分空間 Z に含まれるならば $W_1+W_2+\cdots+W_k$ は Z に含まれることを示せ.

(2) $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_m\in V$, $1\leqq k\leqq m-1$ のとき, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\langle\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_k\rangle+\langle\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_{k+2},\dots,\boldsymbol{x}_m\rangle=\langle\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_m\rangle$$

1.2　ベクトルの一次独立性

V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする.

定義 1.2.1 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ に対し, 関係式

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} \quad \cdots (*)$$

を満たす $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \boldsymbol{K}$ は $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ に限るとき $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は **1 次独立**であるという.

また $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が *1* 次独立でないとき, これらは *1* 次従属であるという. すなわち, 関係式 $(*)$ を満たす $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \boldsymbol{K}$ で $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ 以外のものがあるとき $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は **1 次従属**であるという.

問 1.2.2 *(1)* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ が *1* 次独立ならば, これらのベクトルの一部であるベクトル $\boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_k}$ $(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqq n)$ も *1* 次独立であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ が *1* 次従属ならば, これらにベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_l \in V$ を付け加えた $k + l$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_l$ も *1* 次従属であることを示せ. また $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ のうちに零ベクトルがあれば, これらは *1* 次従属であることを示せ.

次の定理は, 今後の議論において大きな役割を果たす重要な結果である.

定理 1.2.3 ベクトル空間 V の m 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ の *1* 次結合として表される n 個のベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ が与えられたとする. $m < n$ ならば $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ は *1* 次従属である.

証明 $x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{0}$ を満たす $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 以外の $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{K}$ があることを示せばよい. 仮定から, 各 $j = 1, 2, \ldots, n$ に対し

$$\boldsymbol{w}_j = a_{1j}\boldsymbol{v}_1 + a_{2j}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{v}_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{v}_i$$

を満たす $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj} \in \boldsymbol{K}$ があるため, 各 $\boldsymbol{w}_j$ に上式を代入すると

$$x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{w}_n = \sum_{i=1}^{m}(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n)\boldsymbol{v}_i \quad \cdots (*)$$

が得られる. そこで連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

を考えると $m < n$ だから, この方程式は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 以外の解 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{K}$ をもつ. このような $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は $(*)$ によって $x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{0}$ を満たすため, 主張は示された. □

系 1.2.3.1 V のベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ が *1* 次独立であり, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V を生成していれば $m \leqq n$ である.

証明 各 $\boldsymbol{w}_j$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合だから, もし $m > n$ ならば定理 1.2.3 により $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ は 1 次従属になるため, 仮定に反する. □

次の事実は命題 1.2.5 を始め, 定理 1.3.5, 命題 1.3.7, 定理 1.3.12 の証明で用いられる.

補題 1.2.4 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が *1* 次独立で, $\boldsymbol{w} \in V$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の *1* 次結合ではないとき, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}$ は *1* 次独立である.

証明 $r_1\boldsymbol{v}_1 + r_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + r_k\boldsymbol{v}_k + c\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ を満たす $r_1, r_2, \ldots, r_k, c \in \boldsymbol{K}$ を考える．もし $c \neq 0$ ならば $\boldsymbol{w} = -\frac{r_1}{c}\boldsymbol{v}_1 - \frac{r_1}{c}\boldsymbol{v}_1 - \cdots - \frac{r_k}{c}\boldsymbol{v}_k$ となって仮定に反するため $c = 0$ である．このとき $r_1\boldsymbol{v}_1 + r_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + r_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ となり $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は 1 次独立だから $r_1 = r_2 = \cdots = r_k = 0$ である．故に $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}$ は 1 次独立である.□

系 1.2.3.1 により n 個のベクトルで生成されるベクトル空間では, 1 次独立なベクトルの個数は n を越えることはないが, 有限個のベクトルでは生成されないベクトル空間においては, いくらでも多くの 1 次独立なベクトルが存在する．すなわち次の結果が成り立つ.

命題 1.2.5 *ベクトル空間 V を生成するような有限個のベクトルは存在しないとする．このとき, 任意の自然数 n に対して, V の n 個の 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が存在する.*

証明 仮定から $V \neq \{\boldsymbol{0}\}$ だから, 零ベクトルでない V のベクトル $\boldsymbol{v}_1$ がある．帰納的に 1 次独立な V ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が選べたとすると, 仮定により $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は V を生成しないため, これらのベクトルの 1 次結合で表されない V のベクトル $\boldsymbol{v}_{k+1}$ がある．補題 1.2.4 により $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}$ は 1 次独立だから, 任意の自然数 n に対して, V の n 個の 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が選べることがわかる． □

ここでベクトルの 1 次独立性の概念と関係が深い「部分空間の直和」という概念を定義する.

定義 1.2.6 *$W_1, W_2, \ldots, W_k$ を V の部分空間とするとき, 次の 2 つの条件が満たされるとき, V は $W_1, W_2, \ldots, W_k$ の直和であるという.*

(1) $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{0}$ *を満たす* $\boldsymbol{w}_i \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *は* $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2 = \cdots = \boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{0}$ *に限る.*

(2) $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$.

定理 1.2.7 *$W_1, W_2, \ldots, W_k$ は V の部分空間で, $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ をみたすものとするとき, 以下の条件は互いに同値である.*

(1) V *は* $W_1, W_2, \ldots, W_k$ *の直和である.*

(2) $i = 1, 2, \ldots, k-1$ *に対し* $(W_1 + W_2 + \cdots + W_i) \cap W_{i+1} = \{\boldsymbol{0}\}$.

(3) $\boldsymbol{w}_{s_{i-1}+1}, \boldsymbol{w}_{s_{i-1}+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k,\ 0 = s_0 \leqq s_1 \leqq s_2 \leqq \cdots \leqq s_k)$ *が* W_i *の 1 次独立なベクトルならば* $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_k}$ *は 1 次独立である.*

証明 (2)⇒(1); $\boldsymbol{w}_i \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ は $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{0}$ を満たすとして帰納的に $\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{w}_{k-1} = \cdots = \boldsymbol{w}_{k-i+1} = \boldsymbol{0}$ $(0 \leqq i \leqq k-1)$ が示されたと仮定する．このとき $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_{k-i-1} = -\boldsymbol{w}_{k-i}$ であり, この左辺は $W_1 + W_2 + \cdots + W_{k-i-1}$ に属し, 右辺は W_{k-i} に属する．故にこの両辺は $(W_1 + W_2 + \cdots + W_{k-i-1}) \cap W_{k-i} = \{\boldsymbol{0}\}$ に属するため, $\boldsymbol{w}_{k-i} = \boldsymbol{0}$ が得られて帰納法が進む.

(1)⇒(3); $\boldsymbol{w}_{s_{i-1}+1}, \boldsymbol{w}_{s_{i-1}+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k, 0 = s_0 \leqq s_1 \leqq s_2 \leqq \cdots \leqq s_k)$ を W_i の 1 次独立なベクトルとする．$c_1, c_2, \ldots, c_{s_k} \in \boldsymbol{K}$ に対し, $c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + c_{s_k}\boldsymbol{w}_{s_k} = \boldsymbol{0}$ が成り立つと仮定して $\boldsymbol{x}_i = \sum_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} c_j\boldsymbol{w}_j$ とおくと $\boldsymbol{x}_i \in W_i$ かつ $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ だから $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \cdots = \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ となる．よって $\boldsymbol{w}_{s_{i-1}+1}, \boldsymbol{w}_{s_{i-1}+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_i}$ の 1 次独立性から $c_{s_{i-1}+1} = c_{s_{i-1}+2} = \cdots = c_{s_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ が得られ, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_k}$ は 1 次独立である.

(3)⇒(2); $(W_1 + W_2 + \cdots + W_i) \cap W_{i+1} \neq \{\boldsymbol{0}\}$ と仮定すれば, $\boldsymbol{0}$ でない $\boldsymbol{w} \in W_{i+1}$ で, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_i$ $(\boldsymbol{w}_j \in W_j,\ j = 1, 2, \ldots, i)$ と表されるものがある．$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_i$ のうちで $\boldsymbol{0}$ でないものを $\boldsymbol{w}_{j_1}, \boldsymbol{w}_{j_2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{j_l}$ とすれば, $\boldsymbol{w}_{j_1} + \boldsymbol{w}_{j_2} + \cdots + \boldsymbol{w}_{j_l} + (-1)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ が成り立つため $\boldsymbol{w}_{j_1}, \boldsymbol{w}_{j_2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{j_l}, \boldsymbol{w}$ は 1 次従属となって仮定に反する． □

1.3　ベクトル空間の次元

この節では, n 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^n$ における基本ベクトルの概念を一般化する概念である「基底」と呼ばれる概念を導入し, 有限個のベクトルで生成されるベクトル空間には基底が存在することを示す. さらに, 基底の概念を用いることによってベクトル空間の次元を定義して, いくつかの基本的な結果を証明する.

定義 1.3.1 *V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立であり, かつ V を生成するとき, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基底であるという.*

例 1.3.2 *(1) $\boldsymbol{K}^n$ における基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は $\boldsymbol{K}^n$ の基底である.*

(2) 例 1.1.5 の (3) におけるベクトル空間 P_m は $1, x, x^2, \ldots, x^m$ を基底にもつ.

(3) $\boldsymbol{K}^3$ の部分空間 $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \,\middle|\, x+y+z=0 \right\}$ の基底の 1 つとして $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる.

命題 1.3.3 *$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底であるためには, V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し, $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ を満たす $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{K}$ がただ 1 通りに定まることが必要十分である.*

証明 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底ならば, これらは V を生成するため任意の $\boldsymbol{x} \in V$ は $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ と表される. もし $\boldsymbol{x}$ が

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = x_1'\boldsymbol{v}_1 + x_2'\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n'\boldsymbol{v}_n$$

と 2 通りに表されたら, $(x_1 - x_1')\boldsymbol{v}_1 + (x_2 - x_2')\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (x_n - x_n')\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ となるため, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次独立性から $x_j = x_j'$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ が得られる.

逆に V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し, $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ を満たす $x_1, x_2, \ldots, x_n$ がただ 1 通りに定まるならば, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V を生成し, $x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ を満たす $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{K}$ は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ に限られるから $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である. □

注意 1.3.4 *V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を 1 組定めれば, 上でみたように各 $\boldsymbol{x} \in V$ は $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ と 1 通りに表せるため, x_j を第 j 成分とする $\boldsymbol{K}^n$ のベクトルを基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に関する $\boldsymbol{x}$ の「座標」と呼ぶことにする. すなわち, $\boldsymbol{v}_j$ は V の j 番目の座標軸方向のベクトルで x_j は $\boldsymbol{x}$ の第 j 成分とみることができる. この点については次章でも触れることにする.*

次の定理は, ベクトル空間 V の 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ と, V を生成するベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ が与えられたとき, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ の中から適当なベクトルを選んで $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ に付け加えてやることによって, V の基底が得られることを示している.

定理 1.3.5 *V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は 1 次独立で, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ は V を生成しているとき $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ の中から $\boldsymbol{w}_{i_1}, \boldsymbol{w}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{i_l}$ $(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leqq m)$ を選んで, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_{i_1}, \boldsymbol{w}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{i_l}$ が V の基底になるようにできる.*

証明 帰納的に整数列 $1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leqq m$ を選んで次の 2 つの条件を満たすようにできたと仮定する. (この帰納法は $s = 0$ から始める.)

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_{i_1}, \boldsymbol{w}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{i_s}$ は 1 次独立である.

(2) $j < i_s$ ならば $\boldsymbol{w}_j$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_{i_1}, \boldsymbol{w}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{i_s}$ の 1 次結合で表せる.

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_{i_1}, \boldsymbol{w}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{i_s}$ が V を生成していれば, これらのベクトルはすでに V の基底なので $s = l$ で, 定理の主張が成り立つ.

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_{i_1}, \boldsymbol{w}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{i_s}$ が V を生成していない場合, これらの1次結合で表されない $\boldsymbol{w}_j$ がある. (実際, V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{w}_m$ と表されるから, もしすべての $j = 1, 2, \ldots, m$ に対し $\boldsymbol{w}_j = \sum_{p=1}^{k} a_{pj}\boldsymbol{v}_p + \sum_{q=1}^{k} b_{qj}\boldsymbol{w}_{i_q}$ と表せたら, これを上式に代入して $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_{i_1}, \boldsymbol{w}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{i_s}$ の1次結合になってしまう.) そこで, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_{i_1}, \boldsymbol{w}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{i_s}$ の1次結合で表されない $\boldsymbol{w}_j$ の中で j が最小のものを $\boldsymbol{w}_{i_{s+1}}$ とすると, 上の条件 (2) から $i_{s+1} > i_s$ であり, 条件 (1) と補題 1.2.4 から $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_{i_1}, \boldsymbol{w}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{i_s}, \boldsymbol{w}_{i_{s+1}}$ は1次独立である. $j < i_{s+1}$ のとき, j の最小性から $\boldsymbol{w}_j$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_{i_1}, \boldsymbol{w}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{i_s}$ の1次結合で表せる. 故に $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_{i_1}, \boldsymbol{w}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{i_s}, \boldsymbol{w}_{i_{s+1}}$ は上の条件 (1), (2) の s を $s+1$ で置き換えた条件を満たすので, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_{i_1}, \boldsymbol{w}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{i_s}$ が V を生成するようになるまで, 順に整数列 $1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leqq m$ を選ぶことができる. □

注意 1.3.6 上の証明における *(2)* の条件は $s \geqq 1$ の場合に $i_{s+1} > i_s$ となることを示すために用いているだけなので, 上の証明の出発点である $s = 0$ の場合, この条件は必要がない. また $s = 0$ のとき $k \geqq 1$ ならば *(1)* の条件は「$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は *1* 次独立である.」となるため, これは仮定により満たされる. $s = k = 0$ の場合は *(1)* の条件は意味をなさないが, 零ベクトルでない $\boldsymbol{w}_j$ の中で j が最小のものを $\boldsymbol{w}_{i_1}$ とすれば $\boldsymbol{w}_{i_1}$ は *1* 次独立で, $j < i_1$ ならば $\boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{0}$ となるため $s = 1$ の場合の条件 *(1), (2)* が満たされて帰納法が進む. ややこしいと思われる読者の方には $s = 0$ の場合の証明のステップをきちんと紙に書いてみることをお勧めする.

上の定理において, あらかじめ1次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が与えられていない場合 ($k = 0$ の場合) を考えると, 次の結果が得られる.

系 1.3.6.1 有限個のベクトルで生成されるベクトル空間には基底が存在する.

定理 1.3.5 の証明の議論を用いれば次の結果が示される.

命題 1.3.7 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は *1* 次独立で, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ は V を生成しているとする. すべての $j = 1, 2, \ldots, m$ に対して $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_j$ が *1* 次従属ならば $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は V の基底である.

証明 もし $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が V を生成していないならば, 定理 1.3.5 の証明でみたように, これらの1次結合で表されない $\boldsymbol{w}_j$ がある. このとき補題 1.2.4 から $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_j$ は1次独立になるため, 仮定に反する. よって, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は V を生成するので, これらは V の基底である. □

さて, 系 1.2.3.1 と基底の定義からただちに, 次のことがわかる.

命題 1.3.8 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ がともに V の基底ならば $n = m$ である.

上の結果により, ベクトル空間の次元を次のように定義することができる.

定義 1.3.9 V が n 個のベクトルからなる基底を持つとき, V の次元は n であるといい, V の次元を $\dim V$ で表す.

例 1.3.10 *(1)* $\boldsymbol{K}^n$ は n 個のベクトルからなる基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ をもつため $\dim \boldsymbol{K}^n = n$ である.

(2) 例 *1.1.5* の *(3)* におけるベクトル空間 P_m は $m+1$ 個のベクトルからなる基底 $1, x, x^2, \ldots, x^m$ をもつため $\dim P_m = m + 1$ である.

(3) 例 *1.3.2* の *(3)* のベクトル空間は *2* 個のベクトルからなる基底をもつため, *2* 次元である.

(4) $\boldsymbol{R}$ で定義された *2* 回微分可能な実数値関数全体のなすベクトル空間を $C_2(\boldsymbol{R})$ とする. *2* 階微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} = -y$ の解全体からなる集合を S とすれば, S は $\cos x$, $\sin x$ を基底とする $C_2(\boldsymbol{R})$ の部分空間であるため $\dim S = 2$ である.

命題 1.3.11 $\boldsymbol{K}$ 上の n 次元ベクトル空間 V が $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ で生成されているとする．$\boldsymbol{w}_{i_1}, \boldsymbol{w}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{i_k}$ $(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqq m)$ が 1 次独立で，すべての $j = 1, 2, \ldots, m$ に対して $\boldsymbol{w}_{i_1}, \boldsymbol{w}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{i_k}, \boldsymbol{w}_j$ が 1 次従属ならば $k = n$ である．従って V の次元は $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ の中で 1 次独立であるものの最大個数に等しい．

証明 $\boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{w}_{i_s}$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$ とおき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ に対して命題 1.3.7 により $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は V の基底になるため $\dim V = k$ である． □

定理 1.3.12 W が有限個のベクトルで生成されるベクトル空間 V の部分空間ならば W も有限個のベクトルで生成される．このとき $\dim W \leqq \dim V$ であり，等号が成立するのは $W = V$ の場合に限る．

証明 $\dim V = n$ とおくと，定理 1.2.3 により V の $n+1$ 個以上のベクトルは 1 次従属である．もしも W を生成するような有限個のベクトルが存在しなければ命題 1.2.5 により，$n+1$ 個の W の 1 次独立なベクトルが存在して上のことと矛盾する．故に W も有限個のベクトルで生成されて，系 1.3.6.1 により W の基底 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ $(m = \dim W)$ が存在する．$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ は 1 次独立だから，系 1.2.3.1 により $\dim W = m \leqq n = \dim V$ が成り立つ．$\dim W = \dim V$ のとき，もし W に属さない $\boldsymbol{x} \in V$ が存在すれば $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ の 1 次結合で表されないため，補題 1.2.4 により $m+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m, \boldsymbol{x}$ は 1 次独立である．再び系 1.2.3.1 により $m+1 \leqq n$ であるが，これは $n = \dim V = \dim W = m$ と矛盾する．故に V のすべてのベクトルは W に属するため $W = V$ である． □

上の定理の応用としてを次の結果を示す．

定理 1.3.13 $\dim V = n$ とするとき，V の n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立であるか，または V を生成すれば $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基底になる．

証明 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立な場合 $W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ とおくと $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は W の基底だから $\dim W = n = \dim V$ である．よって，定理 1.3.12 から $W = V$ となり $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基底である．

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V を生成するとき，定理 1.3.5 により，これらのベクトルからベクトルを選んで $\boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_l}$ $(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leqq n)$ が V の基底になるようにできる．ここで $l = \dim V = n$ だから，このような $i_1, i_2, \ldots, i_n$ の選び方は $i_1 = 1, i_2 = 2, \ldots, i_n = n$ に限る． □

ベクトル空間が部分空間の直和であるための条件を定理 1.2.7 で与えたが，基底と次元の概念を用いれば次のような形で与えられる．

定理 1.3.14 $W_1, W_2, \ldots, W_k$ を V の部分空間，$\boldsymbol{w}_{s_{i-1}+1}, \boldsymbol{w}_{s_{i-1}+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k,\ 0 = s_0 \leqq s_1 \leqq s_2 \leqq \cdots \leqq s_k)$ を W_i の基底とする．以下の条件 (1)〜(3) のうち 2 つが成り立てば残りの 1 つと (4) が成り立ち，逆に (4) が成り立てば V は $W_1, W_2, \ldots, W_k$ の直和になる．

(1) $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}_i \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ならば $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \cdots = \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$.

(2) $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$.

(3) $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_k$.

(4) $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_k}$ は V の基底である．

証明 (1),(2)⇒(3),(4); 命題 1.2.7 により $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_k}$ は 1 次独立である．(2) により，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_k$ $(\boldsymbol{x}_i \in W_i)$ と表され，さらに各 $\boldsymbol{x}_i$ は $\boldsymbol{w}_{s_{i-1}+1}, \boldsymbol{w}_{s_{i-1}+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_i}$ の 1 次結合であるため $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_k}$ の 1 次結合になる．故に $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_k}$ は V の基底で，$\dim V = s_k = \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_k$.

(1),(3)⇒(2),(4); $V' = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ とおけば，(1) により V' は $W_1, W_2, \ldots, W_k$ の直和になるため命題 1.2.7 の (3) により $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_k}$ は 1 次独立である．さらに，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_k}$ は V' を生成するため，これらは

V' の基底である．よって $\dim V' = s_k = \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_k = \dim V$ となるため, 定理 1.3.12 により $V = V' = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ が得られる．

(2),(3)⇒(1),(4); $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ より $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_k}$ は V を生成し, $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_k = s_k$ だから定理 1.3.13 によって $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_k}$ は V の基底である．$\boldsymbol{x}_i \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ は $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ を満たすとする．$\boldsymbol{x}_i = \sum_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} c_j \boldsymbol{w}_j$ とおいて上式に代入すれば $\sum_{j=1}^{s_k} c_j \boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{0}$ を得るが, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_k}$ の 1 次独立性から $c_1 = c_2 = \cdots = c_{s_k} = 0$ である．従って $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \cdots = \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ である．

(4)⇒(2),(3); $\dim W_i = s_i - s_{i-1}$ より $\dim V = s_k = \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_k$ である．また, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ は $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + x_{s_k}\boldsymbol{w}_{s_k}$ と表せるため, $\boldsymbol{x}_i = \sum_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} x_j \boldsymbol{w}_j$ とおくと $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{x}_i \in W_i$ である．よって $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ となり (2), (3) の条件が成り立つため V は $W_1, W_2, \ldots, W_k$ の直和である． □

問 1.3.15 V_1, V_2 を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする．

(1) V_1, V_2 のベクトルの順序対全体からなる集合 $\{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) | \boldsymbol{v}_1 \in V_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in V_2\}$ に加法, スカラー倍を $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) + (\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2') = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_2')$, $r(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = (r\boldsymbol{v}_1, r\boldsymbol{v}_2)$ で定義すれば, この集合は $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間であることを示せ．このように定義したベクトル空間を $V_1 \oplus V_2$ で表すことにする．

(2) $W_1 = \{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{0}) | \boldsymbol{v}_1 \in V_1\}$, $W_2 = \{(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{v}_2) | \boldsymbol{v}_2 \in V_2\}$ とおくと, $V_1 \oplus V_2$ は W_1 と W_2 の直和であり, $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ が成り立つことを示せ．

最後に本章で学んだことの応用例の 1 つとして, 分数関数の不定積分を求める際になどに用いられる部分分数分解についての結果を示しておく．

定理 1.3.16 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ を相異なる実数, $(b_1, c_1), (b_2, c_2), \ldots, (b_s, c_s)$ を相異なる実数の順序対とし, 各 $j = 1, 2, \ldots, s$ について $b_j^2 - 4c_j < 0$ が成り立つとする．x の実数係数の n 次多項式 $f(x)$ が

$$f(x) = (x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \ldots (x - a_r)^{m_r}(x^2 + b_1x + c_1)^{n_1}(x^2 + b_2x + c_2)^{n_2} \ldots (x^2 + b_sx + c_s)^{n_s}$$

と因数分解されているとき, $n - 1$ 次以下の任意の実数係数多項式 $g(x)$ に対して

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i} \frac{A_{ik}}{(x - a_i)^k} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{l=1}^{n_j} \frac{B_{jl}x + C_{jl}}{(x^2 + b_jx + c_j)^l} \ \cdots\ (*)$$

を満たす実数 A_{ik} $(1 \leqq i \leqq r,\ 1 \leqq k \leqq m_i)$, B_{jl}, C_{jl} $(1 \leqq j \leqq s,\ 1 \leqq l \leqq n_j)$ はひととおりに定まる．

証明 各 $i = 1, 2, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, s$ に対して, $f(x)$ は $(x - a_i)^{m_i}$, $(x^2 + b_jx + c_j)^{n_j}$ を因数にもつため, x の $n - m_i$ 次多項式 $F_i(x)$ と $n - 2n_j$ 次多項式 $G_j(x)$ を $F_i(x) = \frac{f(x)}{(x-a_i)^{m_i}}$, $G_j(x) = \frac{f(x)}{(x^2+b_jx+c_j)^{n_j}}$ によって定義する．さらに $(x - a_i)^k F_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, r,\ k = 0, 1, \ldots, m_i - 1)$, $(x^2 + b_jx + c_j)^l G_j(x)$, $x(x^2 + b_jx + c_j)^l G_q(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, s,\ l = 0, 1, \ldots, n_j - 1)$ を要素とする多項式の集合 S を考える．$(*)$ の式の右辺に $f(x)$ をかけた式は

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_i-1} A_{im_i-k}(x - a_i)^k F_i(x) + \sum_{j=1}^{s}\sum_{l=0}^{n_j-1} B_{jn_j-l}x(x^2 + b_jx + c_j)^l G_j(x) + \sum_{j=1}^{s}\sum_{l=0}^{n_j-1} C_{jn_j-l}(x^2 + b_jx + c_j)^l G_j(x)$$

となるため, S は $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間 $P_{\boldsymbol{R},n-1}$ (例 1.1.5 の (3) 参照) の基底になることを示せば定理の主張が示される．例 1.3.10 の (2) でみたように $\dim P_{\boldsymbol{R},n-1} = n$ であり, 集合 S の要素の個数も $m_1 + m_2 + \cdots + m_r + 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_s) = n$ だから定理 1.3.13 により, S に含まれる多項式が 1 次独立であることを示せば S は $P_{\boldsymbol{R},n-1}$ の基底になることがわかる．

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_i-1} \lambda_{ik}(x - a_i)^k F_i(x) + \sum_{j=1}^{s}\sum_{l=0}^{n_j-1} \mu_{jl}(x^2 + b_jx + c_j)^l G_j(x) + \sum_{j=1}^{s}\sum_{l=0}^{n_j-1} \nu_{jl}x(x^2 + b_jx + c_j)^l G_j(x) = 0 \ \cdots\ (1)$$

とおく. 各 $p = 1, 2, \ldots, r$ に対し, $i \neq p$ ならば $F_i(x)$ は $(x - a_p)^{m_p}$ を因数にもち, すべての $j = 1, 2, \ldots, s$ に対し $G_j(x)$ は $(x - a_p)^{m_p}$ を因数にもつため,

$$\begin{aligned}(x-a_p)^{m_p}\varphi(x) &= \sum_{i\neq p}\sum_{k=0}^{m_i-1}\lambda_{ik}(x-a_i)^kF_i(x)+\sum_{j=1}^{s}\sum_{l=0}^{n_j-1}\mu_{jl}(x^2+b_jx+c_j)^lG_j(x)\\ &\quad+\sum_{j=1}^{s}\sum_{l=0}^{n_j-1}\nu_{jl}x(x^2+b_jx+c_j)^lG_j(x)\end{aligned}$$

を満たす多項式 $\varphi(x)$ がある. このとき, (1) から

$$\sum_{k=0}^{m_p-1}\lambda_{pk}(x-a_p)^kF_p(x)+(x-a_p)^{m_p}\varphi(x)=0 \ \cdots\ (2)$$

$t = 0, 1, \ldots, m_p - 1$ に対し $\lambda_{pt} = 0$ が成り立つことを t による帰納法で示す. $k \leqq t-1$ $(0 \leqq t \leqq m_p - 1)$ ならば $\lambda_{pk} = 0$ であると仮定すれば (2) の両辺は $(x - a_p)^t$ で割れるため

$$\sum_{k=t}^{m_p-1}\lambda_{pk}(x-a_p)^{k-t}kF_p(x)+(x-a_p)^{m_p-t}\varphi(x)=0$$

が成り立つ. $F_p(x)$ は $x - a_p$ では割りきれないため $F_p(a_p) \neq 0$ であることに注意すれば, 上式の x に a_p を代入して $\lambda_{pt} = 0$ が得られ, 帰納法が進む. 故に, すべての $i = 1, 2, \ldots, r$, $k = 0, 1, \ldots, m_i - 1$ に対し $\lambda_{ik} = 0$ が成り立つため, (1) から次の等式が得られる.

$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{l=0}^{n_j-1}(\mu_{jl}+\nu_{jl}x)(x^2+b_jx+c_j)^lG_j(x)=0 \ \cdots\ (3)$$

各 $q = 1, 2, \ldots, s$ に対し, $j \neq q$ ならば $G_j(x)$ は $(x^2 + b_qx + c_q)^{n_q}$ を因数にもつため,

$$(x^2+b_qx+c_q)^{n_q}\psi(x)=\sum_{j\neq q}\sum_{l=0}^{n_j-1}(\mu_{jl}+\nu_{jl}x)(x^2+b_jx+c_j)^lG_j(x)$$

を満たす多項式 $\psi(x)$ がある. このとき, (3) の等式から

$$\sum_{l=0}^{n_q-1}(\mu_{ql}+\nu_{ql}x)(x^2+b_qx+c_q)^lG_q(x)+(x^2+b_qx+c_q)^{n_q}\psi(x)=0 \ \cdots\ (4)$$

を得る. 仮定から 2 次方程式 $x^2 + b_qx + c_q = 0$ は虚数解をもち, その 1 つを α_q とすれば, もう一方は $\overline{\alpha}_q$ である. $t = 0, 1, \ldots, n_q - 1$ に対し $\mu_{qt} = \nu_{qt} = 0$ が成り立つことを t による帰納法で示す. $l \leqq t - 1$ $(0 \leqq t \leqq n_q - 1)$ ならば $\mu_{ql} = \nu_{ql} = 0$ であると仮定すれば (4) の両辺は $(x^2 + b_qx + c_q)^t$ で割れるため,

$$\sum_{l=t}^{n_q-1}(\mu_{ql}+\nu_{ql}x)(x^2+b_qx+c_q)^{l-t}G_q(x)+(x^2+b_qx+c_q)^{n_q-t}\psi(x)=0$$

が成り立つ. $G_q(x)$ は $x^2 + b_qx + c_q$ では割りきれないため $G_q(\alpha), G_q(\overline{\alpha}) \neq 0$ であることに注意すれば, 上式の x に α_q, $\overline{\alpha}_q$ を代入して $\mu_{qt} + \nu_{qt}\alpha = \mu_{qt} + \nu_{qt}\overline{\alpha} = 0$ が得られる. このことと, α は虚数であることから $\mu_{qt} = \nu_{qt} = 0$ が成り立ち, 帰納法が進む. 以上から, すべての $i = 1, 2, \ldots, r$, $k = 0, 1, \ldots, m_i - 1$, $j = 1, 2, \ldots, s$, $l = 0, 1, \ldots, n_s - 1$ に対し $\lambda_{ik} = \mu_{jl} = \nu_{jl} = 0$ となるため, S に含まれる多項式は 1 次独立である. □

第2章　ベクトル空間と一次写像

前章でベクトル空間の概念を一般化して, 基底や次元の概念について学んできたが, この章では, 一般化されたベクトル空間の間の 1 次写像の基礎的な理論について学ぶ. この章の目標の 1 つは 1 次写像の階数の概念を定義して, 行に関する基本変形を用いて定義した行列 A の階数が, A から定まる 1 次写像 T_A の階数に一致することを示すことである.

2.1　一次写像の定義と性質

定義 2.1.1 *V, W を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする. 写像 $f : V \to W$ が任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と $r \in \boldsymbol{K}$ に対して, $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$, $f(r\boldsymbol{x}) = rf(\boldsymbol{x})$ を満たすとき f を 1 次写像 (線形写像) という. とくに, $V = W$ の場合, 1 次写像 $f : V \to V$ を 1 次変換ともいう.*

任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と $r \in \boldsymbol{K}$ に対して, $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$, $f(r\boldsymbol{x}) = rf(\boldsymbol{x})$ を満たすという上の定義の性質を f の「線形性」という.

注意 2.1.2 *$f : V \to W$ が 1 次写像ならば, 命題 1.1.4 の (2) により $f(\boldsymbol{0}) = f(0\boldsymbol{0}) = 0f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ である. また, 任意の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ と $r_1, r_2, \ldots, r_k \in \boldsymbol{K}$ に対して*

$$f(r_1\boldsymbol{v}_1 + r_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + r_k\boldsymbol{v}_k) = r_1 f(\boldsymbol{v}_1) + r_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + r_k f(\boldsymbol{v}_k)$$

が成り立つことが k による帰納法で示される.

例 2.1.3 *$C^r(a,b)$ $(r \geqq 1)$ を例 1.1.5 の (4) で定義した $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とする.*
(1) 写像 $D : C^r(a,b) \to C^{r-1}(a,b)$ を $D(f) = f'$ で定めれば D は 1 次写像である.
(2) $a < c < b$ として写像 $I : C^{r-1}(a,b) \to C^r(a,b)$ を $(I(g))(x) = \int_c^x g(t)dt$ $(x \in (a,b))$ によって定めれば I は 1 次写像である. このとき, 微分積分学の基本定理により $D \circ I$ は $C^{r-1}(a,b)$ の恒等写像であり, $I \circ D(f) = f - K_{f(c)}$ (ただし $K_{f(c)} : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ は常に値が $f(c)$ である定数値関数) が成り立つ.

命題 2.1.4 *$f : V \to W$, $g : W \to Z$ を 1 次写像とする.*
(1) 合成写像 $g \circ f : V \to Z$, 恒等写像 $id_V : V \to V$ は 1 次写像である.
(2) f が全単射ならば, 逆写像 $f^{-1} : W \to V$ も 1 次写像である.

証明 (1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と $r \in \boldsymbol{K}$ に対して,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= g(f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) = g(f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})) = g(f(\boldsymbol{x})) + g(f(\boldsymbol{y})) \\ &= (g \circ f)(\boldsymbol{x}) + (g \circ f)(\boldsymbol{y}), \\ (g \circ f)(r\boldsymbol{x}) &= g(f(r\boldsymbol{x})) = g(rf(\boldsymbol{x})) = rg(f(\boldsymbol{x})) = r(g \circ f)(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

だから $g \circ f$ は 1 次写像である. 恒等写像が 1 次写像であることは明らかである.
(2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ と $r \in \boldsymbol{K}$ に対して, $f^{-1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}$, $f^{-1}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{v}$ とおくと $\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{v})$ だから

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}), \quad r\boldsymbol{x} = rf(\boldsymbol{u}) = f(r\boldsymbol{u})$$

である．故に

$$f^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y}), \quad f^{-1}(r\boldsymbol{x}) = r\boldsymbol{u} = rf^{-1}(\boldsymbol{x})$$

が得られ, f^{-1} も 1 次写像である． □

問 2.1.5 *$f, g : V \to W$ を 1 次写像, $r \in \boldsymbol{K}$ とする．f と g の和 $f+g : V \to W$, f の r 倍 $rf : V \to W$ を $(f+g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})$, $(rf)(\boldsymbol{x}) = rf(\boldsymbol{x})$ で定めれば, これらは 1 次写像であることを示せ．*

とくに断らない限り, 以下で扱うベクトル空間はすべて有限個のベクトルで生成されるとする．

次の結果は「基底の写り先を定めれば 1 次写像が定まる」ことを主張しており, 1 次写像の存在に関して最も重要な結果である．

定理 2.1.6 *V, W を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とし, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ を W のベクトルとする．このとき, 1 次写像 $f : V \to W$ で $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ を満たすものがただ 1 つ存在する．*

証明 命題 1.3.3 により, $\boldsymbol{x} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$$

を満たす $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{K}$ は 1 通りに定まる．そこで

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{w}_n$$

によって f を定義すれば, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_j$ の場合は $x_j = 1$ で $i \neq j$ ならば $x_i = 0$ だから $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$ が成り立つ．また, $\boldsymbol{y} \in V$ と $r \in \boldsymbol{K}$ に対し $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{v}_n$ と表したとき

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} &= (x_1+y_1)\boldsymbol{v}_1 + (x_1+y_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (x_n+y_n)\boldsymbol{v}_n \\ r\boldsymbol{x} &= (rx_1)\boldsymbol{v}_1 + (rx_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (rx_n)\boldsymbol{v}_n \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= (x_1+y_1)\boldsymbol{w}_1 + (x_1+y_2)\boldsymbol{w}_2 + \cdots + (x_n+y_n)\boldsymbol{w}_n \\ &= (x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{w}_n) + (y_1\boldsymbol{w}_1 + y_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{w}_n) \\ &= f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \\ f(r\boldsymbol{x}) &= (rx_1)\boldsymbol{w}_1 + (rx_2)\boldsymbol{w}_2 + \cdots + (rx_n)\boldsymbol{w}_n \\ &= r(x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{w}_n) \\ &= rf(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

となるため, 確かに f は 1 次写像である,

$g : V \to W$ も $g(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ を満たす 1 次写像とすれば, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ と表すと g の線形性から

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{x}) &= g(x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n) \\ &= x_1g(\boldsymbol{v}_1) + x_2g(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + x_ng(\boldsymbol{v}_n) \\ &= x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{w}_n \\ &= f(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

となるため $g = f$ である．故に $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ を満たす 1 次写像 $f : V \to W$ はただ 1 つだけである． □

1 次写像においては単射であるための条件が少し緩くなる．すなわち, 次の結果が成り立つ．

補題 2.1.7 *1 次写像 $f: V \to W$ が単射であるためには, 条件「$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」が成り立つことが必要十分である.*

証明 注意 2.1.2 により, f が 1 次写像ならば $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ だから, f が単射であれば条件「$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」が成り立つことは明らかである. 逆に条件「$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」が成り立つと仮定する. $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$ ならば f の線形性により $f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ となるため, 仮定により $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ である. よって $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ だから f は単射である. □

「ベクトルの 1 次独立性」,「ベクトル空間の生成」と 1 次写像の「単射性」,「全射性」との関係を次の命題の 4 つの主張にまとめておく.

命題 2.1.8 *$f: V \to W$ を 1 次写像, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ とする.*
(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立で f が単射ならば $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は 1 次独立である.
(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V を生成し, $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が 1 次独立ならば f は単射である.
(3) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V を生成し, f が全射ならば $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は W を生成する.
(4) $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が W を生成していれば f は全射である.

証明 (1) $x_1 f(\boldsymbol{v}_1) + x_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{0}$ ならば f の線形性により $f(x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{0}$ である. f は単射だから $x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ であるが, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次独立性から $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ となり, $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は 1 次独立である.

(2) $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ とする. 仮定から $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ と表されるため, $x_1 f(\boldsymbol{v}_1) + x_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{v}_n) = f(x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n) = f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ である. $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は 1 次独立であるため $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ となり, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が得られる. 故に補題 2.1.7 により, f は単射である.

(3) 任意の $\boldsymbol{y} \in W$ に対し $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ を満たす $\boldsymbol{x} \in V$ が存在し, さらに $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ と表されるため, f の線形性から $\boldsymbol{y} = x_1 f(\boldsymbol{v}_1) + x_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{v}_n)$ を得る. よって $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は W を生成する.

(4) 仮定により, 任意の $\boldsymbol{y} \in W$ に対し, $\boldsymbol{y} = x_1 f(\boldsymbol{v}_1) + x_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{v}_n)$ を満たす $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{K}$ がある. 故に f の線形性により $\boldsymbol{y} = f(x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n)$ となり, f によって $\boldsymbol{y}$ に写される V のベクトルが存在するため f は全射である. □

問 2.1.9 *$f: V \to W$ を 1 次写像, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V のベクトルとする. $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が 1 次独立ならば $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ も 1 次独立であることを示せ.*

定義 2.1.10 全単射である *1* 次写像を同型写像という. ベクトル空間 V, W の間に同型写像があるとき, V と W は同型であるという.

例 2.1.11 A を n 次正則行列とする. T_{E_n} は $\boldsymbol{K}^n$ の恒等写像 $id_{\boldsymbol{K}^n}$ であることに注意すれば $T_{A^{-1}} \circ T_A = T_{A^{-1}A} = T_{E_n} = id_{\boldsymbol{K}^n}$, $T_A \circ T_{A^{-1}} = T_{A^{-1}A} = T_{E_n} = id_{\boldsymbol{K}^n}$ だから T_A は同型写像で, $T_{A^{-1}}$ が T_A の逆写像 T_A^{-1} である.

系 2.1.11.1 *$f: V \to W$ を 1 次写像, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とする. f が同型写像であるためには, $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が W の基底であることが必要十分である.*

証明 f が同型写像ならば命題 2.1.8 の (1) により $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は 1 次独立であり, 同 (3) によって $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は W を生成するためこれらは W の基底である. 逆に $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が W の基底ならば, 命題 2.1.8 の (2) により f は単射であり, 同 (4) によって f は全射である. □

2 つのベクトル空間が同型であるかどうかは, それらの次元が等しいかどうかで判断できる. すなわち次の結果が成り立つ.

系 2.1.11.2 *$\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V と W が同型であるためには $\dim V = \dim W$ であることが必要十分である.*

証明 V と W が同型であるとして $f: V \to W$ を同型写像, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とすれば系 2.1.11.1 により $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は W の基底である．よって $\dim W = n = \dim V$ である．逆に $\dim W = \dim V = n$ と仮定して, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ をそれぞれ V, W の基底とする．定理 2.1.6 により $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ を満たす 1 次写像 $f: V \to W$ があるが, これは系 2.1.11.1 によって同型写像である． □

注意 2.1.12 *例 1.3.10 の (1) と上の結果により* $\dim V = n$ *ならば* V *と* $\boldsymbol{K}^n$ *は同型である．上の証明でみたように* V *の基底* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ *を定めれば* $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{e}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *を満たす同型写像* $f: V \to \boldsymbol{K}^n$ *があるが, この写像は各* $\boldsymbol{x}$ *を基底* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ *に関する* $\boldsymbol{x}$ *の座標 (注意 1.3.4 参照) に対応させる写像に他ならない．* f *によって (抽象的な) ベクトル空間* V *の各ベクトルを, 加法とスカラー倍の演算を保ったまま, 具体的な数ベクトルに 1 対 1 に対応させることができる．従ってこの* f *により* V *と* $\boldsymbol{K}^n$ *はベクトル空間としては「同じ型」であるとみなすことができる．*

2.2 一次写像の階数と次元公式

定義 2.2.1 *1 次写像* $f: V \to W$ *に対し,* $\mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Im} f$ *を*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker} f &= \{\boldsymbol{x} \in V \,|\, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}, \\ \mathrm{Im} f &= \{\boldsymbol{y} \in W \,|\, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \text{ を満たす } \boldsymbol{x} \in V \text{ がある }\} \end{aligned}$$

により定めれば, これらはそれぞれ V, W *の部分空間であるが,* $\mathrm{Ker} f$ *を* f *の核,* $\mathrm{Im} f$ *を* f *の像という．*

問 2.2.2 *上で定義した* $\mathrm{Ker} f$ *は* V *の部分空間であり,* $\mathrm{Im} f$ *は* W *の部分空間であることを示せ．*

注意 2.2.3 *補題 2.1.7 により 1 次写像* $f: V \to W$ *が単射であるためには* $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ *であることが必要十分である．また, 1 次写像* $f: V \to W$ *が全射であるとは* $\mathrm{Im} f = W$ *が成り立つことに他ならないが, このことは定理 1.3.12 によって* $\dim \mathrm{Im} f = \dim W$ *と同値である．*

定義 2.2.4 $f: V \to W$ *を 1 次写像とするとき,* $\dim \mathrm{Im} f$ *を* f *の階数と呼んで,* $\mathrm{rank}\, f$ *で表す．*

命題 2.2.5 $f: V \to W$ *を 1 次写像とする．* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ *が* V *を生成すれば,* $\mathrm{Im} f$ *は* $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ *で生成される．また* $\mathrm{rank}\, f$ *は* $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ *のうちで 1 次独立なベクトルの最大個数に等しい．*

証明 $\bar{f}: V \to \mathrm{Im} f$ を $\bar{f}(x) = f(x)$ で定めれば $\bar{f}$ は全射 1 次写像だから命題 2.1.8 の (4) により $\mathrm{Im} f$ は $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ によって生成される．命題 1.3.11 により $\mathrm{rank}\, f = \dim \mathrm{Im} f$ は $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ のうちで 1 次独立なベクトルの最大個数に等しい． □

例 2.2.6 A *を* $m \times n$ *行列とすれば,* $\boldsymbol{K}^n$ *の基本ベクトル* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ *は* $\boldsymbol{K}^n$ *の基底だから,* A *が定める 1 次写像* $T_A: \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ *の階数は, 上の結果により* $A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \ldots, A\boldsymbol{e}_n$ *のうちで 1 次独立なベクトルの最大個数に等しいことがわかる．とくに* $A = F_{mn}(r)$ *ならば,* $F_{mn}(r)\boldsymbol{e}_j = \begin{cases} \boldsymbol{e}_j & 1 \leqq j \leqq r \\ \boldsymbol{0} & r+1 \leqq j \leqq n \end{cases}$ *だから* $T_{F_{mn}(r)}$ *の階数は* r *である．*

行に関する基本変形を用いて定義した $m \times n$ 行列の A 階数 $\mathrm{rank}\, A$ が A によって定義される 1 次写像 $T_A: \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ の階数 $\mathrm{rank}\, T_A$ に一致することを証明するための準備を以下で行う．

一般に 2 つの集合 X と Y が与えられたとき, $X = Y$ であることを示すには, X のすべての要素が Y に属し, かつ Y のすべての要素が X に属すことを示せばよい．次の命題の (1) ではこの論法を用いる．

命題 2.2.7 *$f : V \to W$, $g : W \to Z$ を 1 次写像とする.*

(1) f が全射ならば $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im} g$ である. 従って $\mathrm{rank}\,(g \circ f) = \mathrm{rank}\, g$ である.

(2) g が単射ならば $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im} f$ を $g(\boldsymbol{y})$ に対応させる写像は $\mathrm{Im} f$ から $\mathrm{Im}(g \circ f)$ への同型写像である. 従って $\mathrm{rank}\,(g \circ f) = \mathrm{rank}\, f$ である.

証明 (1) $\boldsymbol{z} \in \mathrm{Im}(g \circ f)$ ならば $\boldsymbol{z} = (g \circ f)(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x}))$ を満たす $\boldsymbol{x} \in V$ がある. すなわち g によって $\boldsymbol{z}$ に写される W のベクトル $f(\boldsymbol{x})$ があるため $\boldsymbol{z} \in \mathrm{Im} g$ である. 一方 $\boldsymbol{z} \in \mathrm{Im} g$ ならば $\boldsymbol{z} = g(\boldsymbol{y})$ を満たす $\boldsymbol{y} \in W$ があるが, f は全射だから $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ を満たす $\boldsymbol{x} \in V$ がある. よって $\boldsymbol{z} = g(f(\boldsymbol{x})) = (g \circ f)(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im}(g \circ f)$ である. 以上から $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im} g$ が成り立つ.

(2) $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im} f$ ならば $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ を満たす $\boldsymbol{x} \in V$ があるため $g(\boldsymbol{y}) = g(f(\boldsymbol{x})) = (g \circ f)(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im}(g \circ f)$ である. そこで写像 $\bar{g} : \mathrm{Im} f \to \mathrm{Im}(g \circ f)$ を $\bar{g}(\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{y})$ によって定めると, g は 1 次写像で単射だから $\bar{g}$ も 1 次写像で単射である. 任意の $\boldsymbol{z} \in \mathrm{Im}(g \circ f)$ に対し $\boldsymbol{z} = (g \circ f)(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x}))$ を満たす $\boldsymbol{x} \in V$ がある. $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ とおけば $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im} f$ であり $\bar{g}(\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{y}) = g(f(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{z}$ となることから $\bar{g}$ は全射である. 故に $\bar{g}$ は同型写像であり, 系 2.1.11.1 により $\mathrm{rank}\,(g \circ f) = \dim \mathrm{Im}(g \circ f) = \dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rank}\, f$ を得る. □

上の結果から次の系は明らかである.

系 2.2.7.1 *$f : V \to W$ を 1 次写像とする. $h : U \to V$, $g : W \to Z$ がともに同型写像ならば $\mathrm{rank}\,(g \circ f \circ h) = \mathrm{rank}\, f$ である.*

さて, $m \times n$ 行列 A に対し, $r = \mathrm{rank}\, A$ とおけば, m 次正則行列 X と n 次正則行列 Y で, $XAY = F_{mn}(r)$ を満たすものがある. このとき $T_X \circ T_A \circ T_Y = T_{XAY} = T_{F_{mn}(r)}$ であり, 例 2.1.11 により $T_X : \boldsymbol{K}^m \to \boldsymbol{K}^m$, $T_Y : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n$ はともに同型写像である. 従って上の結果と例 2.2.6 により $\mathrm{rank}\, T_A = \mathrm{rank}\, T_{F_{mn}(r)} = r = \mathrm{rank}\, A$ が得られる. よって, 行列の階数を定義して以来の懸案事項であった次の結果が示された.

定理 2.2.8 行に関する基本変形を用いて定義した行列 A の階数 $\mathrm{rank}\, A$ は $\mathrm{rank}\, T_A$ に等しい. 従って $\mathrm{rank}\, A$ は A の基本変形のやり方に依存しない.

次に, 1 次写像 $f : V \to W$ が与えられたとき, V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_{r+k}$ で f の核の基底 $\boldsymbol{v}_{r+1}, \boldsymbol{v}_{r+2}, \dots, \boldsymbol{v}_{r+k}$ を含み, $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \dots, f(\boldsymbol{v}_r)$ が $\mathrm{Im} f$ の基底になるものがとれることを示す.

定理 2.2.9 *1 次写像 $f : V \to W$ に対し, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_r$ を $\mathrm{Im} f$ の基底として, V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ で $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$ $(j = 1, 2, \dots, r)$ を満たすものをとる. さらに $\boldsymbol{v}_{r+1}, \boldsymbol{v}_{r+2}, \dots, \boldsymbol{v}_{r+k}$ を $\mathrm{Ker} f$ の基底とすれば, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_{r+k}$ は V の基底である.*

証明 まず $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_{k+r}$ が 1 次独立であることを示す.

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k + x_{k+1}\boldsymbol{v}_{k+1} + \cdots + x_{k+r}\boldsymbol{v}_{k+r} = \boldsymbol{0}$$

とし, この両辺を f で写せば, 仮定により $1 \leqq j \leqq r$ ならば $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$, $r + 1 \leqq j \leqq r + k$ ならば $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{0}$ だから

$$x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{0}$$

が得られる. $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_r$ は 1 次独立であったので, 上式から $x_1 = x_2 = \cdots = x_r = 0$ である. これを最初の式に代入して

$$x_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1} + x_{r+2}\boldsymbol{v}_{r+2} + \cdots + x_{r+k}\boldsymbol{v}_{r+k} = \boldsymbol{0}$$

が得られるが, $\boldsymbol{v}_{r+1}, \boldsymbol{v}_{r+2}, \dots, \boldsymbol{v}_{r+k}$ は 1 次独立だから $x_{r+1} = x_{r+2} = \cdots = x_{r+k} = 0$ である. 故に $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_{k+r}$ は 1 次独立である.

任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $f(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im} f$ だから

$$f(\boldsymbol{x}) = y_1\boldsymbol{w}_1 + y_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + y_r\boldsymbol{w}_r$$

を満たす $y_1, y_2, \ldots, y_r \in \boldsymbol{K}$ がある．$f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ をこの右辺に代入すれば

$$f(\boldsymbol{x}) = y_1 f(\boldsymbol{v}_1) + y_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + y_r f(\boldsymbol{v}_r) = f(y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_r\boldsymbol{v}_r)$$

となるため, 移項して f の線形性を用いると

$$f(\boldsymbol{x} - (y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_r\boldsymbol{v}_r)) = \boldsymbol{0}$$

を得る．よって $\boldsymbol{x} - (y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_r\boldsymbol{v}_r) \in \mathrm{Ker} f$ となるため,

$$\boldsymbol{x} - (y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_r\boldsymbol{v}_r) = x_1\boldsymbol{v}_{r+1} + x_2\boldsymbol{v}_{r+2} + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_{r+k}$$

を満たす $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \boldsymbol{K}$ がある．故に

$$\boldsymbol{x} = y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_r\boldsymbol{v}_r + x_1\boldsymbol{v}_{r+1} + x_2\boldsymbol{v}_{r+2} + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_{r+k}$$

となり, $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+r}$ の 1 次結合で表せるため, これらのベクトルは V を生成することがわかる． □

上の定理において $\dim \mathrm{Ker} f = k$, $\mathrm{rank}\, f = \dim \mathrm{Im} f = r$, $\dim V = k + r$ だから「次元公式」と呼ばれる次の公式が得られる．

定理 2.2.10 *1 次写像 $f : V \to W$ に対し, $\dim \mathrm{Ker} f + \mathrm{rank}\, f = \dim V$ が成り立つ．*

次元公式の応用例をいくつか紹介する．

$m \times n$ 行列 A を係数行列とする斉次連立 1 次方程式を考えると, この解のベクトル全体の集合 (解空間) $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ は $\mathrm{Ker} T_A$ に他ならないので, その次元は次元公式と定理 2.2.8 から $n - \mathrm{rank}\, A$ に等しくなる．従って次が示された．

定理 2.2.11 *$m \times n$ 行列 A を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間の次元は $n - \mathrm{rank}\, A$ である．*

命題 2.2.12 *次の条件 (1) または (2) が成り立てば 1 次写像 $f : V \to W$ は同型写像である．*
(1) $\dim V \geqq \dim W$ かつ f は単射．　(2) $\dim V \leqq \dim W$ かつ f は全射．

証明 (1) f が単射ならば注意 2.2.3 により $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ だから定理 2.2.10 と仮定により $\dim \mathrm{Im} f = \dim V \geqq \dim W$ である．一方, 定理 1.3.12 から $\dim \mathrm{Im} f \leqq \dim W$ より $\dim \mathrm{Im} f = \dim W$ である．再び定理 1.3.12 により $\mathrm{Im} f = W$ となり, f は全射でもある．

(2) f が全射ならば $\mathrm{Im} f = W$ だから定理 2.2.10 と仮定により $\dim \mathrm{Ker} f = \dim V - \dim W \leqq 0$ である．従って $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ で, 注意 2.2.3 により f は単射でもある． □

命題 2.2.13 *W_1, W_2 を V の部分空間とするとき, 次の等式が成り立つ．*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

証明 写像 $f : W_1 \oplus W_2 \to V$ (第 1 章の問 1.3.15 参照) を $f(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2) = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ で定めれば f は 1 次写像であり, $\mathrm{Im} f = W_1 + W_2$ が成り立つ．$\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$ ならば $(\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Ker} f$ だから $g : W_1 \cap W_2 \to \mathrm{Ker} f$ を $g(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{x})$ で定義できる．g は明らかに単射であり, $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2) \in \mathrm{Ker} f$ ならば $\boldsymbol{w}_2 = -\boldsymbol{w}_1$ より $g(\boldsymbol{w}_1) = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)$ となるため g は全射でもある．故に g は同型写像だから系 2.1.7 によって $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim \mathrm{Ker} f$ である．次元公式と第 1 章の問 1.3.15 により $\dim(W_1 + W_2) = \mathrm{rank}\, f = \dim(W_1 \oplus W_2) - \dim \mathrm{Ker} f = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.□

問 2.2.14 *1 次写像 $f : V \to W$ が単射であるためには $\mathrm{rank}\, f = \dim V$ が成り立つことが必要十分であることを示せ．*

2.3 1 次写像の表現行列

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V の基底とするとき, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ によって, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の並ぶ順序も考慮に入れた V の基底を表すことにする. すなわち, V の 2 つの基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ が同じであるとは, すべての $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{w}_j$ が成り立つことを意味するものとする.

定義 2.3.1 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ をそれぞれ $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空 V, W の基底とする. *1* 次写像 $f : V \to W$ に対し,

$$f(\boldsymbol{v}_j) = a_{1j}\boldsymbol{w}_1 + a_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{w}_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i \quad (a_{ij} \in \boldsymbol{K})$$

とすれば, $m \times n$ 行列 (a_{ij}) を基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する f の表現行列という. とくに $V = W$ で $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n] = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ の場合, n 次正方行列 (a_{ij}) を f の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する表現行列という.

注意 2.3.2 A を $\boldsymbol{K}$ の要素を成分にもつ $m \times n$ 行列とする. $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定められる *1* 次写像 $T_A : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ の基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n]$, $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m]$ に関する表現行列は A に他ならない.

命題 2.3.3 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ をそれぞれ, $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V, W の基底とし, これらに関する *1* 次写像 $f : V \to W$ の表現行列を A とする. V のベクトル $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ *(*$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{K}$*)* と表されているとき,

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^n, \qquad A\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^m$$

とおけば $f(\boldsymbol{x}) = y_1\boldsymbol{w}_1 + y_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + y_m\boldsymbol{w}_m$ が成り立つ.

証明 $A = (a_{ij})$ とすれば $f(\boldsymbol{v}_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i$, $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ だから f の線形性により

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= x_1 f(\boldsymbol{v}_1) + x_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{v}_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j\boldsymbol{w}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\boldsymbol{w}_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right) \boldsymbol{w}_i = \sum_{i=1}^{m} y_i\boldsymbol{w}_i. \end{aligned}$$

□

上の結果を 1 次写像を用いて言葉で言い換えれば次のようになる.

系 2.3.3.1 命題 *2.3.3* の状況の下で, *1* 次写像 $\varphi : V \to \boldsymbol{K}^n$, $\psi : W \to \boldsymbol{K}^n$ で $\varphi(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{e}_j$ *(*$j = 1, 2, \ldots, n$*)*, $\psi(\boldsymbol{w}_i) = \boldsymbol{e}_i$ *(*$i = 1, 2, \ldots, m$*)* を満たすものが定理 *2.1.6* により存在するが, このとき $\psi \circ f = T_A \circ \varphi$ であり, $\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} A$ が成り立つ.

証明 $\boldsymbol{x} \in V$ が $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ と表されているとき, 定理 2.3.3 の記号を用いると

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n = \bar{\boldsymbol{x}}, \quad A\bar{\boldsymbol{x}} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + y_m\boldsymbol{e}_m$$

だから, 命題 2.3.3 と ψ の線形性により

$$(\psi \circ f)(\boldsymbol{x}) = \psi(f(\boldsymbol{x})) = \psi(y_1\boldsymbol{w}_1 + y_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + y_m\boldsymbol{w}_m) = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + y_m\boldsymbol{e}_m = A\bar{\boldsymbol{x}} = T_A(\bar{\boldsymbol{x}}) = (T_A \circ \varphi)(\boldsymbol{x}).$$

従って $\psi\circ f = T_A\circ\varphi$ が成り立つ．また ψ が単射, φ が全射であることから, 命題 2.2.7 と定理 2.2.8 によって $\operatorname{rank} f = \operatorname{rank}(\psi\circ f) = \operatorname{rank}(T_A\circ\varphi) = \operatorname{rank} T_A = \operatorname{rank} A$. □

上の事実から, 表現行列の階数を求めることにより, もとの写像の階数を知ることができる．次の結果は表現行列の定義から容易に示されるので, 証明は読者に任せる．

定理 2.3.4 *$f, g : V \to W$ を 1 次写像とし, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ を V の基底, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ を W の基底とする．$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する f, g の表現行列を A, B とすれば $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する $f+g$, rf $(r \in \boldsymbol{K})$ の表現行列はそれぞれ, $A+B$, rA である．*

1 次写像の合成写像の表現行列は, 表現行列の積に一致する．すなわち, 次の結果が成り立つ．

定理 2.3.5 *$f : V \to W$, $g : W \to Z$ を 1 次写像とし, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ を V の基底, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ を W の基底, $[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l]$ を Z の基底とする．$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する f の表現行列を A, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$, $[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l]$ に関する g の表現行列を B とすれば, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l]$ に関する $g\circ f$ の表現行列は BA である．*

証明 $A = (a_{ij})$ とおく．g と $\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\boldsymbol{w}_k$ に対して命題 2.3.3 を用いると, $\bar{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{e}_j$ であり $B\bar{\boldsymbol{x}} = BA\boldsymbol{e}_j$ の第 i 成分を y_{ij} とすれば $(g\circ f)(\boldsymbol{v}_j) = g(f(\boldsymbol{v}_j)) = \sum_{i=1}^{l} y_{ij}\boldsymbol{z}_i$ である．y_{ij} は BA の (i,j) 成分だから, $g\circ f$ の表現行列は BA である． □

V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する V の恒等写像 id_V の表現行列は n 次単位行列 E_n であることに注意すると, 上の定理から次の結果が示される．

定理 2.3.6 *$f : V \to W$ を同型写像とし, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ をそれぞれ, V, W の基底とする．$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ に関する f の表現行列を A とすれば A は正則行列であり, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する f の逆写像 f^{-1} の表現行列は A^{-1} である．*

証明 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する f^{-1} の表現行列を B とすれば定理 2.3.5 により, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する $f^{-1}\circ f$ の表現行列は BA である．一方 $f^{-1}\circ f$ は V の恒等写像だから $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する $f^{-1}\circ f$ の表現行列は E_n となるため $BA = E_n$ である．同様に, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ に関する $f\circ f^{-1}$ 表現行列を考えて $AB = E_n$ が得られるため, $B = A^{-1}$ となって A は正則である． □

ベクトル空間の基底の選び方は幾通りもあるので, 基底を取り替えると 1 次写像の表現行列がどのように変わるかをみる必要がある．そのために, まず「基底の変換行列」という概念を定義する．

定義 2.3.7 *$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ を V の基底とする．$j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\boldsymbol{v}'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\boldsymbol{v}_i$ と表したとき, n 次正方行列 (p_{ij}) を $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ から $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ への基底の変換行列という．*

注意 2.3.8 基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ から $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ への基底の変換行列は, 基底 $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する V の恒等写像 $id_V : V \to V$ の表現行列に他ならない．id_V は同型写像だから定理 2.3.6 により基底の変換行列は正則行列である．

命題 2.3.9 *V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ から $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ への基底の変換行列を P, $\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\bar{\boldsymbol{x}}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{K}^n$ のベクトルとする．このとき $\sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j\boldsymbol{v}'_j$ が成り立つためには $\bar{\boldsymbol{x}} = P\bar{\boldsymbol{x}}'$ であることが必要十分である．*

証明 $\boldsymbol{v}'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\boldsymbol{v}_i$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ より

$$\sum_{j=1}^{n} x'_j \boldsymbol{v}'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}x'_j\boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x'_j\right)\boldsymbol{v}_i$$

だから $\sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j\boldsymbol{v}'_j$ が成り立つことと, $x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}x'_j$ がすべての $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して成り立つこと, すなわち $\bar{\boldsymbol{x}} = P\bar{\boldsymbol{x}}'$ であることは同値である. □

V のベクトル $\boldsymbol{x}$ の $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ に関する座標を $\bar{\boldsymbol{x}}'$ とすれば, 上の結果から $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する座標は $P\bar{\boldsymbol{x}}'$ である. 従って V の基底の変換行列は, V のベクトルの座標変換の規則を与える行列であると言える.

問 2.3.10 $\boldsymbol{K}^n$ の基本ベクトルからなる基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n]$ から $\boldsymbol{K}^n$ の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ への基底の変換行列は $\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n\end{pmatrix}$ であることを示せ.

定理 2.3.11 $f : V \to W$ を *1* 次写像として, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ を V の基底, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$, $[\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_m]$ を W の基底とする. また, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ から $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ への V の基底の変換行列を P, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ から $[\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_m]$ への W の基底の変換行列を Q として $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する f の表現行列を A とすれば $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$, $[\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_m]$ に関する f の表現行列は $Q^{-1}AP$ である. とくに $V = W$, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n] = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$, $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n] = [\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_m]$ ならば $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ に関する f の表現行列は $P^{-1}AP$ である.

証明 注意 2.3.8 により P は基底 $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する V の恒等写像 id_V の表現行列だから定理 2.3.5 から $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する $f \circ id_V = f$ の表現行列は AP である. 一方 Q は基底 $[\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ に関する W の恒等写像 id_W の表現行列だから $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$, $[\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_m]$ に関する f の表現行列を B とすれば 定理 2.3.5 により $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する $id_W \circ f = f$ の表現行列は QB である. AP, QB はともに同じ基底に関する f の表現行列だから $QB = AP$ であり, Q は正則行列だったので $B = Q^{-1}AP$ を得る. □

1 次写像 $f : V \to W$ に対して, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ を $\mathrm{Im}f$ の基底とする. W を生成するベクトル $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_p$ を考えて定理 1.3.5 を用いれば $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_p$ の中からベクトルを選んだベクトルを $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ に付け加えてやることにより $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ を含む W の基底 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ $(m \geqq r)$ を選ぶことができる. そこで定理 2.2.9 のように V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+r}$ をとれば, $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$ $(1 \leqq j \leqq r)$, $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{0}$ $(r+1 \leqq j \leqq r+k)$ だから $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+r}]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する f の表現行列は $F_{mn}(r)$ $(n = r+k)$ となる.

A を $\boldsymbol{K}$ の要素を成分にもつ階数が r の $m \times n$ 行列とし, 1 次写像 $T_A : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ に対して上の議論を用いると, $\boldsymbol{K}^n$ の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ と $\boldsymbol{K}^m$ の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ で, これらの行列に関する T_A の表現行列が $F_{mn}(r)$ となるものが存在することが分かる. 一方, 基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n]$ から基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ への変換行列を P, 基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m]$ から基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ への変換行列を Q とすれば, 定理 2.3.11 から $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する T_A の表現行列は $Q^{-1}AP$ となるため, $Q^{-1}AP = F_{mn}(r)$ である. 従って「階数 r の $m \times n$ 行列 A に対して, m 次正方行列 X と n 次正方行列 Y で $XAY = F_{mn}(r)$ を満たすものが存在する.」という定理の (掃き出し法によらない) 別証明が与えられたことになる.

第3章　計量ベクトル空間

3.1　内積の定義

定義 3.1.1 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とし, 写像 $B : V \times V \to \boldsymbol{K}$ は任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in V$, $\lambda \in \boldsymbol{K}(\subset \boldsymbol{C})$ に対して, 次の性質 *(1)〜(4)* を満たすとする.

(1) $B(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = B(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + B(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$, $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2)$

(2) $B(\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $B(\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{y}) = \bar{\lambda} B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

(3) $B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \overline{B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$

(4) $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}$ であり, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$ である.

このとき 写像 B を V の内積, $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積といい, 内積の定義されたベクトル空間を計量ベクトル空間と呼ぶ.

注意 3.1.2 上の *(2)* から, $B(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{y}) = B(0\boldsymbol{0}, \boldsymbol{y}) = 0B(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{y}) = 0$, $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = B(\boldsymbol{x}, 0\boldsymbol{0}) = \bar{0}B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{0}) = 0$ であることに注意する.

定義 3.1.3 *(1)* V を B を内積にもつ計量ベクトル空間とする. $\boldsymbol{x} \in V$ に対し, $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ とおいて, $\|\boldsymbol{x}\|$ をベクトル $\boldsymbol{x}$ の「長さ」または「ノルム」という. 長さが *1* のベクトルを単位ベクトルという. また, $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ を満たす *2* つのベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ は直交するといい, V の部分集合 S, T に対して S のベクトルと T のベクトルが常に直交するとき S と T は直交するという.

(2) V, W をそれぞれ内積 B_V, B_W が定義されている計量ベクトル空間とする. *1* 次写像 $f : V \to W$ が任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $B_V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = B_W(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))$ を満たすとき f は内積を保つといい, さらに f が同型写像ならば f を計量同型写像という. *2* つの計量ベクトル空間の間に計量同型写像が存在するとき, これらの計量ベクトル空間は計量同型であるという.

注意 3.1.4 命題 *3.1.10* において, 内積を保つ写像は *1* 次写像であることを示す. また, 写像 $f : V \to W$ が任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\|f(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$ を満たせば, 命題 *2.1.7* と定義 *3.1.1* の *(4)* により f は単射である. とくに, 内積を保つ写像は単射である.

以後, 計量ベクトル空間における 2 つのベクトルの内積は $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ と略記する.

例 3.1.5 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の第 j 成分をそれぞれ x_j, y_j とするとき $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j$ で $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を定めればこれは $\boldsymbol{K}^n$ の内積である. 以後, 特に断らない限り, この内積により $\boldsymbol{K}^n$ を計量ベクトル空間とみなす.

V を計量ベクトル空間とするとき, ベクトルの長さの定義と定義 3.1.1 の (2) から次の結果が容易に導かれる.

命題 3.1.6 $\boldsymbol{x} \in V$, $\lambda \in \boldsymbol{K}$ に対し, $\|\lambda\boldsymbol{x}\| = |\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つ. 従って $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}$ は単位ベクトルである.

複素数 z の実部を $\mathrm{Re}(z)$, 虚部を $\mathrm{Im}(z)$ で表すことにすれば, 次の命題が示される.

命題 3.1.7 *(1)* $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$, $|z|=\sqrt{\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2}$

(2) $|\mathrm{Re}(z)|\leqq|z|$ であり, 等号が成立するのは z が実数の場合である. さらに $\mathrm{Re}(z)=|z|$ が成り立つのは z が負でない実数の場合である.

(3) $|\mathrm{Im}(z)|\leqq|z|$ であり, 等号が成立するのは z が純虚数の場合 *(*$\mathrm{Re}(z)=0$*)* である.

問 3.1.8 命題 *3.1.6, 3.1.7* を示せ.

定理 3.1.9 V を $\boldsymbol{K}$ 上の計量ベクトル空間とするとき, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ に対して次の不等式が成立する.

(1) $|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\leqq\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ *(Schwarts の不等式)* 等号が成立するのは $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の一方が他方のスカラー倍の場合である.

(2) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$ *(三角不等式)* 等号が成立するのは $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の一方が他方の負でない実数倍の場合である.

証明 まず $t\in\boldsymbol{K}$ に対し, 定義 3.1.1 の (1), (2), (3) から,

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}) &= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y})+(t\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x},t\boldsymbol{y})+(t\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+(t\boldsymbol{y},t\boldsymbol{y})\\
&= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+\bar{t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+t(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+t\bar{t}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}\|+\bar{t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+t\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}+|t|^2\|\boldsymbol{y}\|\ \cdots\ (*)
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ の場合は, 注意 3.1.2 により $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{y}\|=0$ だから, (1), (2) の不等式の等号が成立し, $\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x}$ の 0 倍になっている. 従って $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$ と仮定して 2 つの不等式を示せばよい.

(1) $c=\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{y}\|^2}$ とおくと, 定義 3.1.1 の (4) から, $(\boldsymbol{x}+c\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+c\boldsymbol{y})\geqq0$ が成り立つため, $(*)$ より $\|\boldsymbol{x}\|+\bar{c}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+c\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}+|c|^2\|\boldsymbol{y}\|\geqq0$ を得る. この左辺は $\frac{1}{\|\boldsymbol{y}\|^2}((\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|)^2-|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2)$ だから $\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\geqq|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|$ である. 等号が成立すれば $(\boldsymbol{x}+c\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+c\boldsymbol{y})=0$ となるため, 定義 3.1.1 の (4) から $\boldsymbol{x}+c\boldsymbol{y}=0$ となり, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ は 1 次従属である. 逆に $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の一方が他方のスカラー倍で, $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{x}=r\boldsymbol{y}$ を満たす $r\in\boldsymbol{K}$ が存在する. このとき $|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|=|(r\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})|=|r(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})|=|r||(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})|=|r|\|\boldsymbol{y}\|^2=\|r\boldsymbol{y}\|\|\boldsymbol{y}\|=\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ となって, 等号が成立する.

(2) $(*)$ において $t=1$ の場合を考えると, $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}\|+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}+\|\boldsymbol{y}\|$ となる. 一方, 命題 3.1.7 の (2) と (1) の結果から $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}=2\mathrm{Re}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqq2|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\leqq2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ となるため, $(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|)^2-\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|-((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})})\geqq0$ である. 等号が成立すれば, $2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|=((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})})\leqq2|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\leqq2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ となるため, $|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|=\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ かつ $\mathrm{Re}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|$ が成り立つ. (1) の結果と前者の等式から $\boldsymbol{x}=c\boldsymbol{y}$ である. これを後者の等式に代入して $\mathrm{Re}(c\|\boldsymbol{y}\|^2)=|c|\|\boldsymbol{y}\|^2$ を得るが, $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$ より $\|\boldsymbol{y}\|\neq0$ だから $\mathrm{Re}(c)=|c|$ である. 従って命題 3.1.7 の (2) により c は負でない実数である. 逆に $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の一方が他方の負でない実数倍で, $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{x}=r\boldsymbol{y}$ を満たす $r\in\boldsymbol{R}$ $(r\geqq0)$ が存在する. このとき $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|=\|(r+1)\boldsymbol{y}\|=(r+1)\|\boldsymbol{y}\|=r\|\boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{y}\|=\|r\boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{y}\|=\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$ となって等号が成立する. □

命題 3.1.10 $f:V\to W$ を $\boldsymbol{K}$ 上の計量ベクトル空間の間の写像とする.

(1) f が内積を保てば, f は *1* 次写像である.

(2) f が *1* 次写像で, 任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して $\|f(\boldsymbol{x})\|=\|\boldsymbol{x}\|$ が成り立てば, f は内積を保つ.

(3) 任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ に対し, $\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\|=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ が成り立つとき, 写像 $\tilde{f}:V\to W$ を $\tilde{f}(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{0})$ で定めると, 任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ に対し, $\mathrm{Re}(\tilde{f}(\boldsymbol{x}),\tilde{f}(\boldsymbol{y}))=\mathrm{Re}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成り立つ. とくに $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ の場合は $\tilde{f}$ は内積を保つ.

証明 (1) 仮定から, 任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ に対し $(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成り立つため,

$$
\begin{aligned}
\|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\|^2 &= (f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y}),f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y}))\\
&= (f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}),f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}))+(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{x}))+(f(\boldsymbol{y}),f(\boldsymbol{y}))-(f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}),f(\boldsymbol{x}))\\
&\quad -(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}))-(f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}),f(\boldsymbol{y}))-(f(\boldsymbol{y}),f(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}))+(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))\\
&\quad +(f(\boldsymbol{y}),f(\boldsymbol{x}))\\
&= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\\
&\quad -(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\\
&= ((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|f(r\boldsymbol{x})-rf(\boldsymbol{x})\|^2 &= (f(r\boldsymbol{x})-rf(\boldsymbol{x}), f(r\boldsymbol{x})-rf(\boldsymbol{x}))\\
&= (f(r\boldsymbol{x}),f(r\boldsymbol{x}))-(f(r\boldsymbol{x}),rf(\boldsymbol{x}))-(rf(\boldsymbol{x}),f(r\boldsymbol{x}))+(rf(\boldsymbol{x}),rf(\boldsymbol{x}))\\
&= (f(r\boldsymbol{x}),f(r\boldsymbol{x}))-\bar{r}(f(r\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{x}))-r(f(\boldsymbol{x}),f(r\boldsymbol{x}))+r\bar{r}(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{x}))\\
&= (r\boldsymbol{x},r\boldsymbol{x})-\bar{r}(r\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})-r(\boldsymbol{x},r\boldsymbol{x})+r\bar{r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0
\end{aligned}
$$

により, f は 1 次写像である.

(2) 任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して $\|f(\boldsymbol{x})\|=\|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つとすれば, $\|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|^2=\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2$ であり, この左辺は $\|f(\boldsymbol{x})\|^2+(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))+\overline{(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))}+\|f(\boldsymbol{y})\|^2$ に等しく, 右辺は $\|\boldsymbol{x}\|^2+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}+\|\boldsymbol{y}\|^2$ に等しいため, $(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))+\overline{(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}$ が成り立つ. $\boldsymbol{y}$ を $i\boldsymbol{y}$ で置き換え, 両辺を i で割れば $(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))-\overline{(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}$ となり, これと上式を辺々たして 2 で割れば $(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を得る.

(3) 任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ に対して $\|\tilde{f}(\boldsymbol{x})-\tilde{f}(\boldsymbol{y})\|=\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\|=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ であり, $\tilde{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ が成り立つことに注意すると, 等式 $\|\tilde{f}(\boldsymbol{x})-\tilde{f}(\boldsymbol{y})\|=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ において $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ の場合を考えれば, 任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して $\|\tilde{f}(\boldsymbol{x})\|=\|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つ. $\|\tilde{f}(\boldsymbol{x})-\tilde{f}(\boldsymbol{y})\|^2=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2$ の左辺は $(\tilde{f}(\boldsymbol{x})-\tilde{f}(\boldsymbol{y}),\tilde{f}(\boldsymbol{x})-\tilde{f}(\boldsymbol{y}))=\|\tilde{f}(\boldsymbol{x})\|^2-2\mathrm{Re}(\tilde{f}(\boldsymbol{x}),\tilde{f}(\boldsymbol{y}))+\|\tilde{f}(\boldsymbol{y})\|^2$ に等しく, 右辺は $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}\|^2-2\mathrm{Re}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\|\boldsymbol{y}\|^2$ に等しいため $\mathrm{Re}(\tilde{f}(\boldsymbol{x}),\tilde{f}(\boldsymbol{y}))=\mathrm{Re}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成り立つ. □

注意 3.1.11 *$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$ の場合, 上の (3) の $\tilde{f}$ は内積を保つとは限らない. 例えば $f:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$ を $f(z)=\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Re}(z)i$ で定めれば, $|f(z)-f(w)|=|z-w|$ は成り立ち, $\tilde{f}=f$ であるが, $\mathrm{Im}(f(z),f(w))=\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(w)-\mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(w)=-\mathrm{Im}(z,w)$ となる.*

3.2 正規直交基底

定義 3.2.1 計量ベクトル空間 V の零でないベクトル $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_k$ が "$i\neq j$ ならば $(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)=0$" を満たすときこれらを直交系といい, さらに各ベクトルが単位ベクトルのときこれらを正規直交系という. 直交系, 正規直交系が V の基底であるとき, それぞれ直交基底, 正規直交基底という.

命題 3.2.2 *V を計量ベクトル空間とする.*

(1) $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_k$ が V の直交系 (直交基底) ならば $\frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1,\frac{1}{\|\boldsymbol{v}_2\|}\boldsymbol{v}_2,\dots,\frac{1}{\|\boldsymbol{v}_k\|}\boldsymbol{v}_k$ は V の正規直交系 (正規直交基底) である.

(2) $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_k$ が V の直交系で, $\boldsymbol{y}=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\boldsymbol{v}_j$ ならば $\lambda_j=\frac{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{v}_j)}{\|\boldsymbol{v}_j\|^2}$ である. 従って, 直交系は 1 次独立である.

(3) $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_k$ が V の直交基底ならば任意の $\boldsymbol{y}\in V$ は $\boldsymbol{y}=\sum_{j=1}^{k}\frac{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{v}_j)}{\|\boldsymbol{v}_j\|^2}\boldsymbol{v}_j$ と表せる. とくに $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_k$ が正規直交基底ならば $\boldsymbol{y}=\sum_{j=1}^{k}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{v}_j)\boldsymbol{v}_j$ である.

証明 (1) は命題 3.1.6 から明らかである.

(2) $\boldsymbol{y}=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\boldsymbol{v}_j$ ならば $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{v}_l)=(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_l)=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_l)=\lambda_l\|\boldsymbol{v}_l\|^2$ より結果が得られる.

(3) は (2) からただちにわかる. □

定理 3.2.3 *$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n$ を計量ベクトル空間 V の 1 次独立なベクトルとすると, V の正規直交系 $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_n$ で次の条件を満たすものが存在する.*

(∗) 各 $j=1,2,\dots,n$ に対し, $a_{ij}\in\boldsymbol{K}$ $(i=1,2,\dots,j-1)$ と正の実数 a_{jj} で $\boldsymbol{w}_j=a_{1j}\boldsymbol{v}_1+a_{2j}\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{jj}\boldsymbol{v}_j$ を満たすものがある.

さらに $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n$ が V の基底ならば $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_n$ は V の正規直交基底である.

証明 $\boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1$ とし, 正規直交系 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{k-1}$ が定まり, 各 $j = 1, 2, \ldots, k-1$ に対して $\boldsymbol{w}_j = a_{1j}\boldsymbol{v}_1 + a_{2j}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{jj}\boldsymbol{v}_j$ $(a_{ij} \in \boldsymbol{K})$ の形に表せたとする. $\boldsymbol{w}'_k = -\sum\limits_{i=1}^{k-1}(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_i)\boldsymbol{w}_i + \boldsymbol{v}_k$ とおけば, $\boldsymbol{w}_i$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_i$ の 1 次結合であることから $\boldsymbol{w}'_k = \sum\limits_{i=1}^{k-1} a'_{ik}\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_k$ の形になる. 従って $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次独立性により $\boldsymbol{w}'_k \neq \boldsymbol{0}$ である. そこで, $\boldsymbol{w}_k = \frac{1}{\|\boldsymbol{w}'_k\|}\boldsymbol{w}'_k$ によって $\boldsymbol{w}_k$ を定めれば, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ は正規直交系であり, $\boldsymbol{w}_j = a_{1j}\boldsymbol{v}_1 + a_{2j}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{jj}\boldsymbol{v}_j$ $(a_{jj} = \frac{1}{\|\boldsymbol{w}'_k\|})$ の形になる. $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ は命題 3.2.2 の (2) により 1 次独立だから $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底ならば定理 1.3.13 により $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ は V の基底である. □

定義 3.2.4 上の定理のようにして, *1* 次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ から V の正規直交系 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ を構成することを,「$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を直交化する」といい, そのやり方を「*Schmidt* の直交化法」という.

V を計量ベクトル空間とすれば, V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が存在するが, これを直交化して V の正規直交基底が得られる. 従って次のことがわかる.

系 3.2.4.1 計量ベクトル空間には正規直交基底が存在する.

命題 3.2.5 $f : V \to W$ を *1* 次写像, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の正規直交基底とする.

(1) f が内積を保つためには, $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が W の正規直交系であることが必要十分である.

(2) f が計量同型写像であるためには, $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が W の正規直交基底であることが必要十分である.

証明 (1) f が内積を保つならば, $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が W の正規直交系になることは明らかである. 逆に $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ を W の正規直交系として $\boldsymbol{x} \in V$ を任意にとる. $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{v}_j$ とすれば $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が正規直交系であることから $\|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2$. また $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が正規直交系で $f(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j f(\boldsymbol{v}_j)$ より $\|f(\boldsymbol{x})\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2$ となる. 従って $\|f(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$ となるため命題 3.1.10 から f は内積を保つ.

(2) 系 2.1.11.1 により f が同型写像であることと, $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が W の基底であることは同値だから, (1) により f が計量同型写像であることと $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が W の正規直交基底であることは同値である. □

系 3.2.5.1 計量ベクトル空間 V, W が計量同型であるためには, $\dim V = \dim W$ であることが必要十分である.

証明 V, W が計量同型ならばベクトル空間としても同型だから系 2.1.11.2 により $\dim V = \dim W$ である. 逆に $\dim V = \dim W$ ならば, $\dim V = n$ とおいて $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の正規直交基底, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ を W の正規直交基底とすれば, $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ を満たす 1 次写像は, 命題 3.2.5 の (2) により計量同型写像である. □

補題 3.2.6 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の正規直交基底とする. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ を $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{v}_j$, $\boldsymbol{y} = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j\boldsymbol{v}_j$ と表し, x_j を第 j 成分とする $\boldsymbol{K}^n$ のベクトルを $\boldsymbol{p}$, y_j を第 j 成分とする $\boldsymbol{K}^n$ のベクトルを $\boldsymbol{q}$ とすれば $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ が成り立つ. ただし, 右辺の $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ は例 *3.1.5* で定義した $\boldsymbol{K}^n$ の内積である.

証明 内積の性質と, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の正規直交基底であることから
$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{v}_i, \sum\limits_{j=1}^{n} y_j\boldsymbol{v}_j) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i\bar{y}_j(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_i\bar{y}_i = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$. □

定義 3.2.7 V を計量ベクトル空間, W を V の部分空間とする. $W^\perp = \{\boldsymbol{x} \in V \mid \boldsymbol{y} \in W$ ならば $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\}$ とおくと $W^\perp$ は V の部分空間であり, これを W の直交補空間という.

命題 3.2.8 V を計量ベクトル空間, W を V の部分空間とすれば $V = W \oplus W^\perp$, $(W^\perp)^\perp = W$ が成り立つ.

証明 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ を W の正規直交基底とし, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ を含む V の基底 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{w}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ をとる. この基底を直交化したものを $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{v}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ とすれば, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ はすでに正規直交系だから $\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{w}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ である. また, 各 $\boldsymbol{v}_j$ $(j = k+1, k+2, \ldots, n)$ はすべての $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ と直交し, 任意の $\boldsymbol{x} \in W$ は $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{i=1}^{k} r_i \boldsymbol{v}_i$ と表されるため, $(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{x}) = 0$ が成り立つ. 従って $\boldsymbol{v}_j \in W^\perp$ である. 一方 $\boldsymbol{x}$ を $W^\perp$ の任意のベクトルとして, $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i \boldsymbol{v}_i$ と表せば, $i = 1, 2, \ldots, k$ に対して $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{v}_i$ と直交するため $r_i = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i) = 0$ である. 故に $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{v}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合になるため, これらのベクトルは $W^\perp$ を生成する. よって $\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{v}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は $W^\perp$ の正規直交基底であり, 定理 1.3.14 から $V = W \oplus W^\perp$ が得られる.

$(W^\perp)^\perp = \{\boldsymbol{x} \in V | \boldsymbol{y} \in W^\perp$ ならば $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\}$ であり, 任意の $\boldsymbol{x} \in W$, $\boldsymbol{y} \in W^\perp$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ だから $\boldsymbol{x} \in (W^\perp)^\perp$ である. よって, W は $(W^\perp)^\perp$ に含まれる. $\boldsymbol{x} \in (W^\perp)^\perp$ を $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i \boldsymbol{v}_i$ と表せば, $\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{v}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in W^\perp$ だから $j = k+1, k+2, \ldots, n$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_j) = 0$ である. 一方 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_j) = r_j$ だから $r_{k+1} = r_{k+2} = \cdots = r_n = 0$ となり, $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の 1 次結合となって W に属することがわかる. 従って $(W^\perp)^\perp$ は W に含まれ, $(W^\perp)^\perp = W$ が成り立つ. □

3.3 随伴写像

定義 3.3.1 $A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 行列とする.

(1) $\bar{a}_{ij}$ を (i,j)-成分にもつ $m \times n$ 行列を A の共役 *(行列)* と呼んで, $\overline{A}$ で表す. また $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ を $n \times 1$ 行列とみなして $\boldsymbol{x}$ の共役を $\bar{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{K}^n$ で表す.

(2) $A = (a_{ij})$ に対し, $\bar{a}_{ji}$ を (i,j)-成分にもつ $n \times m$ 行列を A の共役転置行列と呼んで, A^* で表す.

注意 3.3.2 *(1)* A^* の定義から $A^* = {}^t(\overline{A}) = \overline{{}^tA}$ が成り立つ.

(2) 例 *3.1.5* で定義した $\boldsymbol{K}^n$ の内積は, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{y}}$ で与えられる.

共役複素数に関する等式 $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$ $(z, w \in \boldsymbol{C})$ と上の注意の (1), および転置行列に関する等式から, 次の結果が得られる.

命題 3.3.3 A, B を $m \times n$ 行列, C を $n \times k$ 行列, $r \in \boldsymbol{K}$ とすると, 次の等式が成り立つ.

$$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}, \quad \overline{AC} = \overline{A}\overline{C}, \quad \overline{rA} = \overline{r}\overline{A}, \quad (A+B)^* = A^* + B^*, \quad (AC)^* = A^*C^*, \quad (rA)^* = \overline{r}A^*$$

補題 3.3.4 $m \times n$ 行列 A, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^m$ に対して $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y})$ が成り立つ.

証明 注意 3.3.2 の (1), (2) と上の命題から $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t(A\boldsymbol{x})\bar{\boldsymbol{y}} = {}^t\boldsymbol{x}{}^tA\bar{\boldsymbol{y}} = {}^t\boldsymbol{x}\overline{\overline{{}^tA}}\bar{\boldsymbol{y}} = {}^t\boldsymbol{x}\overline{A^*}\bar{\boldsymbol{y}} = {}^t\boldsymbol{x}\overline{A^*\boldsymbol{y}} = (\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y})$.□

補題 3.3.5 V を計量ベクトル空間, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ とする. 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$ ならば $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ である.

証明 仮定から任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 0$ だから, とくに $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ とすれば $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ がわかる. □

定理 3.3.6 V, W を計量ベクトル空間, $f : V \to W$ を *1* 次写像とすれば, *1* 次写像 $f^* : W \to V$ で, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{y} \in W$ に対して $(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, f^*(\boldsymbol{y}))$ が成り立つものがただ *1* つ存在する.

証明 V, W の正規直交基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ をとり, これらに関する f の表現行列を $A = (a_{ij})$ とする. $f^* : W \to V$ を $f^*(\boldsymbol{w}_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{a}_{ji} \boldsymbol{v}_i$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ を満たす 1 次写像 (定理 2.1.6) とすると,

$[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_m]$, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する f^* の表現行列は A^* である．$\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{y} \in W$ に対し, $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{m} y_j \boldsymbol{w}_j$ として,

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^n, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^m, \quad A\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^m, \quad A^*\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^m$$

とおくと, 命題 2.3.3 により $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} z_i \boldsymbol{w}_i$, $f^*(\boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} w_j \boldsymbol{v}_j$ だから, 補題 3.2.6 と補題 3.3.4 により $(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{p}, A^*\boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{x}, f^*(\boldsymbol{y}))$ が得られる．

$g : W \to V$ も任意の $\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{y} \in W$ に対して $(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{y}))$ を満たすとすれば $(\boldsymbol{x}, f^*(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{y}))$ が任意の $\boldsymbol{x}$ に対して成り立つから補題 3.3.5 により $f^*(\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{y})$ である．従って $f^* = g$ である． □

定義 3.3.7 *上の定理の 1 次写像 $f^* : W \to V$ を f の随伴写像という．*

とくに $V = \boldsymbol{K}^n$, $W = \boldsymbol{K}^m$ の場合を考えれば注意 2.3.2 の (1) と定理 3.3.6 の随伴写像の一意性により $(T_A)^* = T_{A^*}$ である．また, 定理 3.3.6 の証明において次のことを示した．

命題 3.3.8 *V, W を計量ベクトル空間, $f : V \to W$ を 1 次写像とする．V, W の正規直交基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する f の表現行列を A とすれば, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_m]$, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する f^* の表現行列は A^* である．*

命題 3.3.9 *$f, f' : V \to W$, $g : W \to Z$ を 1 次写像とすると, $(f + f')^* = f^* + f'^*$, $(rf)^* = \bar{r} f^*$ $(r \in \boldsymbol{K})$, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, $(f^*)^* = f$ が成り立つ．*

証明 $\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{y} \in W$, $\boldsymbol{z} \in Z$ を任意にとると以下の等式と, 随伴写像の一意性から結果が得られる．
$((f + f')(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) + (f'(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, f^*(\boldsymbol{y})) + (\boldsymbol{x}, f'^*(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, (f^* + f'^*)(\boldsymbol{y}))$
$((rf)(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = r(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = r(\boldsymbol{x}, f^*(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, (\bar{r} f^*)(\boldsymbol{y}))$
$((g \circ f)(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{z}) = (g(f(\boldsymbol{x})), \boldsymbol{z}) = (f(\boldsymbol{x}), g^*(\boldsymbol{z})) = (\boldsymbol{x}, f^*(g^*(\boldsymbol{z})))$
$(f^*(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}) = \overline{(\boldsymbol{x}, f^*(\boldsymbol{y}))} = \overline{(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})} = (\boldsymbol{y}, f(\boldsymbol{x}))$ □

命題 3.3.10 *$f : V \to W$ を 1 次写像とする．*

(1) f が内積を保つためには $f^* \circ f = id_V$ が成り立つことが必要十分である．

(2) $\dim V = \dim W$ の場合, $f^* \circ f = id_V$ または $f \circ f^* = id_W$ のいずれかが成り立てば f は計量同型写像で, $f^* = f^{-1}$ である．

証明 (1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して, $(\boldsymbol{x}, (f^* \circ f)(\boldsymbol{y})) = (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))$ だから $f^* \circ f = id_V$ が成り立てば, f は内積を保ち, 逆に f が内積を保てば $(\boldsymbol{x}, (f^* \circ f)(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して成り立つため, 補題 3.3.5 により $(f^* \circ f)(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}$ が任意の $\boldsymbol{y} \in V$ に対して成り立つ．

(2) $f^* \circ f = id_V$ が成り立つとして, $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$ とすれば $\boldsymbol{x} = f^* \circ f(\boldsymbol{x}) = f^*(f(\boldsymbol{x})) = f^*(f(\boldsymbol{y})) = f^* \circ f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}$ だから f は 1 対 1 写像である．従って命題 2.2.12 により f は同型写像であり, (1) により f は内積を保つため f は計量同型写像である．また, $f^* \circ f = id_V = f^{-1} \circ f$ だから $f^* = f^{-1}$ を得る．

$f \circ f^* = id_W$ が成り立てば, 任意の $\boldsymbol{w} \in W$ に対し．$f(f^*(\boldsymbol{w})) = f \circ f^*(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}$ だから f は上への写像である．従って命題 2.2.12 により f は同型写像であり, $f \circ f^* = id_W = f \circ f^{-1}$ だから $f^* = f^{-1}$ を得る．よって $f^* \circ f = f^{-1} \circ f = id_V$ だから (1) により f は内積を保つ． □

第4章　1次変換と行列の対角化

4.1　固有値・固有空間

定義 4.1.1 *(1)* V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間, $f : V \to V$ を *1* 次変換とする. $f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$ を満たす $\lambda \in \boldsymbol{K}$ と零でないベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ が存在するとき, λ を f の固有値, $\boldsymbol{v}$ を λ に対する固有ベクトルという. このとき $\mathrm{Ker}(\lambda id_V - f) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}\}$ は V の 0 でない部分空間であるが, これを λ に対する固有空間という.

(2) A を $\boldsymbol{K}$ の要素を成分とする n 次正方行列, $T_A : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n$ を A から定まる *1* 次変換とする. A の固有値とは T_A の固有値のこととし, 固有値 λ に対する T_A の固有ベクトル, 固有空間をそれぞれ A の固有ベクトル, 固有空間と呼ぶことにする.

命題 4.1.2 $\lambda \in \boldsymbol{K}$ が $\boldsymbol{K}$ の要素を成分とする n 次正方行列 A の固有値であるためには $|\lambda E_n - A| = 0$ が成り立つことが必要十分である.

証明 λ を A の固有値とする. λ に対する A の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ をとると, $A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ より $(\lambda E_n - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ である. もし $\lambda E_n - A$ が正則ならば $(\lambda E_n - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の両辺に左から $\lambda E_n - A$ の逆行列を掛ければ $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ が得られ, $\boldsymbol{v}$ が固有ベクトルであるという仮定に反する. 従って $\lambda E_n - A$ は正則ではないため $|\lambda E_n - A| = 0$ である.

逆に $|\lambda E_n - A| = 0$ とすれば, $\lambda E_n - A$ は正則ではないため, $\mathrm{rank}(\lambda E_n - A) \leqq n - 1$ である. 従って次元公式から $\dim \mathrm{Ker} T_{\lambda E_n - A} = n - \mathrm{rank}(\lambda E_n - A) \geqq 1$ となるため, $\mathrm{Ker} T_{\lambda E_n - A}$ は零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{v}$ を含む. このとき $(\lambda E_n - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ より $A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ となるため λ は A の固有値である. □

定義 4.1.3 n 次正方行列 A に対して x を変数とする n 次多項式 $|xE_n - A|$ を A の固有多項式と呼んで $F_A(x)$ で表すことにする. また, n 次方程式 $F_A(x) = 0$ を A の固有方程式という.

P が n 次正則行列ならば $xE_n - P^{-1}AP = P^{-1}(xE_n - A)P$ だから $|xE_n - P^{-1}AP| = |xE_n - A|$ である. 従って, 次の結果が得られる.

命題 4.1.4 n 次正方行列 A, n 次正則行列 P に対して $F_{P^{-1}AP}(x) = F_A(x)$ が成り立つ.

定理 2.3.11 と上の結果から次のことがわかる.

命題 4.1.5 V を $\boldsymbol{K}$ 上の n 次元ベクトル空間, $f : V \to V$ を *1* 次変換とし, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \dots, \boldsymbol{v}'_n]$ を V の基底とする. A, B をそれぞれ $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \dots, \boldsymbol{v}'_n]$ に関する f の表現行列とすると $F_A(x) = F_B(x)$ である.

この結果により次のように定義できる.

定義 4.1.6 V を $\boldsymbol{K}$ 上の n 次元ベクトル空間, $f : V \to V$ を *1* 次変換とし, $[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n]$ を V の基底, A をこの基底に関する f の表現行列とする. このとき $F_A(x)$ を f の固有多項式といい, $F_f(x)$ で表す. また x に関する n 次方程式 $F_f(x) = 0$ を f の固有方程式という.

命題 4.1.7 V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n]$ をとり, A をこの基底に関する *1* 次変換 $f : V \to V$ の表現行列とする. $\boldsymbol{x} \in V$ に対し, $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{v}_j$ とし, x_j を第 j 成分とする $\boldsymbol{K}^n$ のベクトルを $\boldsymbol{p}$ とする. λ が f の固有値で, $\boldsymbol{x}$ が λ に対する f の固有ベクトルであるためには λ が A の固有値で, $\boldsymbol{p}$ が λ に対する固有ベクトルであることが必要十分である.

証明 $\boldsymbol{Ap}$ の第 j 成分を y_j とすれば命題 2.3.3 から $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{v}_j$ となるため, $f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$ が成り立つためには $\sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda x_j \boldsymbol{v}_j$, すなわち $A\boldsymbol{p} = \lambda \boldsymbol{p}$ が成り立つことが必要十分である．また, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ であるためには $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ であることが必要十分だから, 主張が示される． □

命題 4.1.2 と命題 4.1.7 から次のことがわかる．

命題 4.1.8 *V を $\boldsymbol{K}$ 上の n 次元ベクトル空間, $f : V \to V$ を 1 次変換とする．$\lambda \in \boldsymbol{K}$ が f の固有値になるための必要十分条件は $F_f(\lambda) = 0$ が成り立つことである．従って, f の固有値の全体は x に関する n 次方程式 $F_f(x) = 0$ の $\boldsymbol{K}$ に属する解の全体に一致して, f の異なる固有値は高々 n 個である．*

注意 4.1.9 「複素数を係数とする n 次方程式は, 複素数の範囲に解を持つ.」という「代数学の基本定理」が成り立つため, 上の結果から $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ の場合は 1 次写像 $f : V \to V$ の固有方程式の解はすべて f の固有値である．

補題 4.1.10 *V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間, (a_{ij}) を $\boldsymbol{K}$ の要素を成分にもつ k 次正則行列とする．V のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ が k 個の関係式 $\sum_{j=1}^{k} a_{ij} \boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{0}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ を満たせば, $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \cdots = \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ である．*

証明 V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を取り, 各 $\boldsymbol{x}_i$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ を $\boldsymbol{x}_j = \sum_{l=1}^{n} x_{jl} \boldsymbol{v}_l$ $(x_{jl} \in \boldsymbol{K})$ と表す．このとき, $\sum_{j=1}^{k} a_{ij} \boldsymbol{x}_j = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} \left(\sum_{l=1}^{n} x_{jl} \boldsymbol{v}_l \right) = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_{jl} \right) \boldsymbol{v}_l$ だから $i = 1, 2, \ldots, k$, $l = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_{jl} = 0$ が成り立つ．従って $A = (a_{ij})$, $X = (x_{jl})$ とおけば $AX = O$ となるが, 仮定により A は正則行列だから $X = O$ である．故に $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \cdots = \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ が得られる． □

定理 4.1.11 *$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ を 1 次変換 $f : V \to V$ の相異なる固有値, W_j を λ_j に対する f の固有空間とすると,*

$$\boldsymbol{x}_i \in W_i \ (i = 1, 2, \ldots, k) \text{ かつ } \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0} \ \text{ ならば } \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \cdots = \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ．従って $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ ならば $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$ である．

証明 f を i 回合成した写像 $\overbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}^{i\text{ 個}}$ を f^i で表すことにすれば $f(\boldsymbol{x}_j) = \lambda_j \boldsymbol{x}_j$ より $f^i(\boldsymbol{x}_j) = \lambda_j^i \boldsymbol{x}_j$ が成り立つことが i による帰納法で容易に示される．従って $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ の両辺を f^{i-1} で写せば $\lambda_1^{i-1} \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2^{i-1} \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_k^{i-1} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ が $i = 1, 2, \ldots, k$ に対して成り立つ．そこで $A = (\lambda_j^{i-1})$ とおくと, $|A|$ は Vandermonde の行列式だから $|A| = \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i)$ であり, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ は相異なるため $|A| \neq 0$ となる．故に A は正則行列で補題 4.1.10 から $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \cdots = \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ を得る． □

系 4.1.11.1 *$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ を 1 次変換 $f : V \to V$ の相異なる固有値, $\boldsymbol{v}_j$ を λ_j に対する f の固有ベクトルとすれば, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は 1 次独立である．*

証明 W_j を λ_j に対する f の固有空間として $r_1 \boldsymbol{v}_1 + r_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + r_k \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ $(r_j \in \boldsymbol{K})$ とおく．各 j に対して $r_j \boldsymbol{v}_j \in W_j$ だから定理 4.1.11 によって $r_j \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0}$ であるが, $\boldsymbol{v}_j \neq \boldsymbol{0}$ だから $r_j = 0$ である．故に $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は 1 次独立である． □

定義 4.1.12 *$i \neq j$ ならば $d_{ij} = 0$ であるような正方行列 (d_{ij}) を対角行列という．正方行列 A に対し, $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P が存在するとき, A は対角化可能であるという．また,「P は A を対角化する」という．*

命題 4.1.13 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ を V の基底, $P = (p_{ij})$ を $m \times n$ 行列として $\boldsymbol{w}_j = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}\boldsymbol{v}_i$ によって V のベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ を定める.

(1) $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ によって生成される V の部分空間を W とすれば, $\dim W = \operatorname{rank} P$ が成り立つ.

(2) $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ が V を生成するためには $\operatorname{rank} P = m$ であることが必要十分である.

(3) $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ が *1* 次独立であるためには $\operatorname{rank} P = n$ であることが必要十分である.

証明 (1) 定理 2.1.6 により $f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{w}_j$ を満たす 1 次写像 $f : \boldsymbol{K}^n \to V$ がある. 命題 2.1.8 の (3) により $\operatorname{Im} f$ は $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ によって生成されるため $W = \operatorname{Im} f$ である. また, 基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n]$, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m]$ に関する f の表現行列は P だから, 系 2.3.3.1 により $\dim W = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} f = \operatorname{rank} P$ である.

(2) 定理 1.3.12 によって $W = V$ であることと $\dim W = \dim V$ であることは同値だから上の (1) により主張が成り立つ.

(3) 命題 2.1.8 の (1), (2) により $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ が 1 次独立であるためには f が単射であることが必要十分であり, さらにこのことは $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ であることと同値である. 一方, 次元公式から $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \boldsymbol{K}^n - \operatorname{rank} f = n - \operatorname{rank} P$ だから, 結果が得られる. □

命題 4.1.14 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ を V の基底とする. *1* 次変換 $f : V \to V$ に対し, 次の *3* つは同値である.

(1) V は f の固有空間の直和である.

(2) f の固有ベクトルからなる V の基底が存在する.

(3) $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する f の表現行列は対角化可能である.

証明 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ を f のすべての相異なる固有値, W_i を λ_i に対する f の固有空間とする.

(1)⇒(3); $[\boldsymbol{w}_{s_{i-1}+1}, \boldsymbol{w}_{s_{i-1}+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_i}]$ $(i = 1, 2, \ldots, k,\ 0 = s_0 \leqq s_1 \leqq s_2 \leqq \cdots \leqq s_k)$ を W_i の基底とすれば定理 1.3.14 により $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_k}]$ は V の基底 (従って $s_k = n$) である. A を $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する f の表現行列, P を基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ から基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ への基底の変換行列とすれば, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ に関する f の表現行列は定理 2.3.11 により $P^{-1}AP$ である. 一方, $s_{i-1} + 1 \leqq j \leqq s_i$ ならば $f(\boldsymbol{w}_j) = \lambda_j \boldsymbol{w}_j$ だから $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ に関する f の表現行列は対角行列である. 故に A は対角化可能である.

(3)⇒(2); $P^{-1}AP$ が対角行列になるような n 次正則行列 $P = (p_{ij})$ をとり, $\boldsymbol{w}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\boldsymbol{v}_i$ とおくと, 命題 4.1.13 によって $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ は V の基底であり, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ から $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ への基底の変換行列は P である. 定理 2.3.11 により基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ に関する f の表現行列は対角行列 $P^{-1}AP$ だから $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ はすべて f の固有ベクトルである.

(2)⇒(1); $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ を f の固有ベクトルからなる V の基底とすれば, 各 $\boldsymbol{w}_j$ は $W_1, W_2, \ldots, W_k$ のいずれかに属するため, 定理 1.3.14 によって, V は $W_1, W_2, \ldots, W_k$ の固有空間の直和である. □

定義 4.1.15 $f : V \to V$ を *1* 次変換とする. V の部分空間 W が $f(W) \subset W$ を満たすとき, W を f の不変部分空間という.

命題 4.1.16 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間, $f : V \to V$ を *1* 次変換とする.

(1) W が f の不変部分空間であるとき, $\bar{f} : W \to W$ を $\bar{f}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ で定めて, V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ を $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k]$ が W の基底になるようにとる. $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k]$ に関する $\bar{f}$ の表現行列を A とすれば, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する f の表現行列は $\left(\begin{smallmatrix} A & C \\ O & B \end{smallmatrix}\right)$ という形になる.

(2) W_j $(1 \leqq j \leqq m)$ が f の不変部分空間であり, $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$ が成り立つとする. $\bar{f}_j : W_j \to W_j$ を $\bar{f}_j(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ で定め, W_j の基底 $[\boldsymbol{v}_{k_{j-1}+1}, \boldsymbol{v}_{k_{j-1}+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{k_j}]$ $(0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_d = n)$ に関する $\bar{f}_j$ の表

現行列を A_j とすれば, V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する f の表現行列は下のようになる.

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \mathbf{0} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & A_m \end{pmatrix}$$

命題 4.1.17 *V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間, $f : V \to V$ を 1 次変換とする. W が f の不変部分空間であるとき, $\bar{f} : W \to W$ を $\bar{f}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ で定めれば, f の固有多項式は $\bar{f}$ の固有多項式で割り切れる.*

証明 V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ を命題 4.1.16 のようにとると, 命題 4.1.16 から

$$F_f(x) = \begin{vmatrix} xE_k - A & -C \\ O & xE_{n-k} - B \end{vmatrix} = |xE_k - A||xE_{n-k} - B| = F_A(x)F_B(x) = F_{\bar{f}}(x)F_B(x).$$

□

4.2 正規写像

定義 4.2.1 *$f \circ f^* = f^* \circ f$ を満たす 1 次変換 $f : V \to V$ を正規写像という.*

正規写像の定義と命題 3.3.10 の (2) から次の結果は明らかである.

命題 4.2.2 *1 次変換 $f : V \to V$ が $f^* = f$, $f^* = -f$, $f^* \circ f = id_V$, $f \circ f^* = id_V$ のいずれかを満たせば f は正規写像である.*

定義 4.2.3 A を正方行列とする. $AA^* = A^*A$ が成り立つとき, A を正規行列, $A^* = A$ が成り立つとき, A をエルミート行列, $A^* = -A$ が成り立つとき, A を歪エルミート行列, $A^* = A^{-1}$ が成り立つとき, A をユニタリー行列という.

命題 4.2.4 *A を $\boldsymbol{K}$ の要素を成分に持つ n 次正方行列とするとき, A がユニタリー行列であるためには, A の列ベクトル $A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \ldots, A\boldsymbol{e}_n$ が $\boldsymbol{K}^n$ の正規直交系であることが必要十分である.*

証明 $A = (a_{ij})$ とすれば A^*A の (j, i) 成分は $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\bar{a}_{kj} = (A\boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{e}_j)$ であることから, $A^*A = E_n$ であるためには $A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \ldots, A\boldsymbol{e}_n$ が $\boldsymbol{K}^n$ の正規直交系であることが必要十分である. □

命題 4.2.5 *f を 1 次変換とする.*
(1) $f^* = f$ ならば f の固有方程式の解はすべて実数である.
(2) $f^* = -f$ ならば f の固有方程式の解はすべて純虚数である.
(3) $f^* = f^{-1}$ ならば f の固有方程式の解はすべて絶対値 1 の複素数である.

証明 V の正規直交基底を 1 組選び, その基底に関する f の表現行列を A とすると, 同じ基底に関する f^* の表現行列は命題 3.3.8 により A^* である. $\lambda \in \boldsymbol{C}$ を f の固有方程式の解として, A を複素行列とみなせば, λ は A の固有値である. そこで λ に対する A の固有ベクトル $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{C}^n$ $(n = \dim V)$ を 1 つ選ぶ.

(1) 仮定から $A^* = A$ で $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ だから $\lambda(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\lambda\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, A^*\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \lambda\boldsymbol{v}) = \bar{\lambda}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ となるため $(\lambda - \bar{\lambda})(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$. $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ より $\lambda - \bar{\lambda} = 0$, 従って λ は実数である.

(2) 仮定から $A^* = -A$ で $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ だから $\lambda(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\lambda\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, A^*\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, -A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, -\lambda\boldsymbol{v}) = -\bar{\lambda}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ となるため $(\lambda + \bar{\lambda})(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$. $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ より $\lambda + \bar{\lambda} = 0$, 従って λ は純虚数である.

(3) 仮定から $A^*A = E_n$ で $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ だから $|\lambda|^2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\lambda\boldsymbol{v}, \lambda\boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, A^*A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ となるため $(|\lambda|^2 - 1)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$. $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ より $|\lambda|^2 = 1$, 従って λ は絶対値 1 の複素数である. □

命題 4.2.6 *1* 次変換 $f : V \to V$ の固有ベクトルからなる V の正規直交基底が存在すれば, f は正規写像である.

証明 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ を f の固有ベクトルからなる V の正規直交基底とし, $f(\boldsymbol{v}_j) = \lambda_j \boldsymbol{v}_j$ とすれば命題 3.3.8 から $f^*(\boldsymbol{v}_j) = \bar{\lambda}_j \boldsymbol{v}_j$ である. 従って $(f^* \circ f)(\boldsymbol{v}_j) = \lambda_j f^*(\boldsymbol{v}_j) = |\lambda_j|^2 \boldsymbol{v}_j$, $(f \circ f^*)(\boldsymbol{v}_j) = \bar{\lambda}_j f(\boldsymbol{v}_j) = |\lambda_j|^2 \boldsymbol{v}_j$ だから $(f^* \circ f)(\boldsymbol{v}_j) = (f \circ f^*)(\boldsymbol{v}_j)$ が $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して成り立ち, 定理 2.1.6 により, $f^* \circ f = f \circ f^*$ である. □

命題 4.2.7 W が計量ベクトル空間 V の *1* 次変換 f の不変部分空間ならば W の直交補空間 $W^\perp$ は f の随伴写像 f^* の不変部分空間である.

証明 $\boldsymbol{x} \in W^\perp$, $\boldsymbol{y} \in W$ に対し, $f(\boldsymbol{y}) \in W$ だから上の結果から $(f^*(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, (f^*)^*(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{y})) = 0$. 従って $f^*(\boldsymbol{x}) \in W^\perp$ である. □

補題 4.2.8 λ を正規写像 $f : V \to V$ の固有値, $\boldsymbol{v}$ を λ に関する f の固有ベクトルとすれば $f^*(\boldsymbol{v}) = \bar{\lambda}\boldsymbol{v}$ である.

証明 $\boldsymbol{x} \in V$ に対し, $(\boldsymbol{x}, f^*(\boldsymbol{v}) - \bar{\lambda}\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{x}, f^*(\boldsymbol{v})) - (\boldsymbol{x}, \bar{\lambda}\boldsymbol{v}) = (f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v}) - \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = (f(\boldsymbol{x}) - \lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ より, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$ とすると, $f(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$ だから $(\boldsymbol{v}, f^*(\boldsymbol{v}) - \bar{\lambda}\boldsymbol{v}) = 0$. $\boldsymbol{x} = f^*(\boldsymbol{v})$ とすると, $(f^*(\boldsymbol{v}), f^*(\boldsymbol{v}) - \bar{\lambda}\boldsymbol{v}) = (f(f^*(\boldsymbol{v})) - \lambda f^*(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}) = (f^*(f(\boldsymbol{v})) - \lambda f^*(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}) = (f^*(\lambda\boldsymbol{v}) - \lambda f^*(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}) = 0$ だから上で得た式とから $(f^*(\boldsymbol{v}) - \bar{\lambda}\boldsymbol{v}, f^*(\boldsymbol{v}) - \bar{\lambda}\boldsymbol{v}) = 0$. □

命題 4.2.9 $f : V \to V$ を正規写像とする. λ, μ が f の相異なる固有値で $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ をそれぞれ λ, μ に対する f の固有ベクトルとすれば $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ である.

証明 補題 4.2.8 により $f^*(\boldsymbol{w}) = \bar{\mu}\boldsymbol{w}$ だから $\lambda(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\lambda\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (f(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}, f^*(\boldsymbol{w})) = (\boldsymbol{v}, \bar{\mu}\boldsymbol{w}) = \mu(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ である. 従って $(\lambda - \mu)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ で $\lambda \neq \mu$ だから $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ である. □

補題 4.2.10 $f : V \to V$ を正規写像, $\boldsymbol{v}$ を f の固有ベクトルとすれば $\boldsymbol{v}$ で生成される部分空間 $\langle \boldsymbol{v} \rangle$ の直交補空間 $\langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp$ は f の不変部分空間である.

証明 $\langle \boldsymbol{v} \rangle$ は補題 4.2.8 により f^* の不変部分空間だから, 命題 4.2.7 と命題 3.3.9 により $\langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp$ は $(f^*)^* = f$ の不変部分空間である. □

定理 4.2.11 V を $\boldsymbol{K}$ 上の計量ベクトル空間とする. $f : V \to V$ は正規写像で, f の固有方程式の解がすべて $\boldsymbol{K}$ に属しているとき f の固有ベクトルからなる V の正規直交基底が存在する.

証明 V の次元に関する帰納法で示す. $\dim V = 1$ のときは主張は明らかに成り立つ. $\dim V = n - 1$ のときに主張が成り立つと仮定して $\dim V = n$ の場合を考える. λ を f の固有方程式の解とすれば命題 4.1.8 により λ は f の固有値である. λ に対する f の固有ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とすると補題 4.2.10 により $\langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp$ は f の不変部分空間である. $\bar{f} : \langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp \to \langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp$ を $\bar{f}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ で定めれば命題 4.1.17 により $\bar{f}$ の固有方程式の解はすべて $\boldsymbol{K}$ に属する. 命題 3.2.8 から $V = \langle \boldsymbol{v} \rangle \oplus \langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp$ であるため定理 1.3.14 により $\dim \langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp = n - 1$. 従って $\bar{f}$ に対して帰納法の仮定が適用できるため $\bar{f}$ の固有ベクトルからなる $\dim \langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp$ の正規直交基底 $[\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ が存在する. そこで $\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}\boldsymbol{v}$ とおけば, 定理 1.3.14 から $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ は f の固有ベクトルからなる V の基底であり, $\boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp = \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle^\perp$ だから $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は正規直交系である. □

系 4.2.11.1 A を $\boldsymbol{K}$ の要素を成分とする n 次正規行列とし, A の固有方程式の解がすべて $\boldsymbol{K}$ に属していれば, A はユニタリー行列で対角化可能である.

証明 仮定から $T_A \circ (T_A)^* = T_A \circ T_{A^*} = T_{AA^*} = T_{A^*A} = T_{A^*} \circ T_A = (T_A)^* \circ T_A$ だから $T_A : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n$ は正規写像である. 従って定理 4.2.11 により T_A の固有ベクトルからなる $\boldsymbol{K}^n$ の正規直交基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ が存在する. このとき, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する T_A の表現行列は対角行列であることに注意する. 基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n]$ から $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ への変換行列を P とすれば $P = (\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2 \cdots \boldsymbol{v}_n)$ であるため命題 4.2.4 により P はユニタリー行列である. $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n]$ に関する T_A の表現行列は A だから定理 2.3.11 により $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する T_A の表現行列は $P^{-1}AP$ となるため, $P^{-1}AP$ は対角行列である. □

命題 4.2.12 $f : V \to V$ を正規写像とする.

(1) f の固有方程式の解がすべて実数ならば $f^* = f$ である.

(2) $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ であり f の固有値がすべて純虚数ならば $f^* = -f$ である.

(3) $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ であり f の固有値がすべて絶対値 *1* の複素数ならば $f^* = f^{-1}$ である.

証明 いずれの場合でも命題 4.1.8, 注意 4.1.9, 定理 4.2.11 から f の固有ベクトルからなる V の正規直交基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ が存在する. ここで, $f(\boldsymbol{v}_j) = \lambda_j \boldsymbol{v}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ とする.

(1) 命題 3.3.8 から $f^*(\boldsymbol{v}_j) = \bar{\lambda}_j \boldsymbol{v}_j = \lambda_j \boldsymbol{v}_j = f(\boldsymbol{v}_j)$ となるため定理 2.1.6 により $f^* = f$ である.

(2) 命題 3.3.8 から $f^*(\boldsymbol{v}_j) = \bar{\lambda}_j \boldsymbol{v}_j = -\lambda_j \boldsymbol{v}_j = -f(\boldsymbol{v}_j)$ となるため定理 2.1.6 により $f^* = -f$ である.

(3) 命題 3.3.8 から $f^* \circ f(\boldsymbol{v}_j) = f^*(f(\boldsymbol{v}_j)) = f^*(\lambda_j \boldsymbol{v}_j) = \lambda_j f^*(\boldsymbol{v}_j) = |\lambda_j|^2 \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_j = id_V(\boldsymbol{v}_j)$ となるため定理 2.1.6 により $f^* \circ f = id_V$ である. 同様にして $f \circ f^* = id_V$ も示されるため, $f^* = f^{-1}$ である. □

第5章　2次形式

5.1　2次形式の定義

n 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し, ${}^t\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}$ を $n\times 1$ 行列とみなしたときの転置行列とする.

定義 5.1.1 *A を実数を成分にもつ n 次対称行列とする. $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を対応させる関数 $Q_A:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ を A を係数行列とする (実)2次形式という.*

$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ の第 j 成分を x_j とし, A の (i,j)-成分を a_{ij} とすれば, $a_{ji}=a_{ij}$ より

$$Q_A(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2+\sum_{1\leqq i<j\leqq n}2a_{ij}x_ix_j \quad\cdots(*)$$

である. 従って Q_A は $x_1,x_2,\ldots,x_n$ の「2次関数」であるといえる. 逆に, $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ を実数を係数とする2次の同次式とすると, $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum\limits_{1\leqq i\leqq j\leqq n}c_{ij}x_ix_j$ の形に表されるが, c_{ii} を (i,i)-成分, $\frac{c_{ij}}{2}$ $(i<j)$ を (i,j)-成分と (i,j)-成分にもつ n 次対称行列を A とすれば $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)=Q_A(\boldsymbol{x})$ である.

命題 5.1.2 *A, B を n 次実対称行列とする. $Q_A=Q_B:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ (すなわち, すべての $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して $Q_A(\boldsymbol{x})=Q_B(\boldsymbol{x})$) ならば $A=B$ である.*

証明 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ とし, $\boldsymbol{e}_j\in\boldsymbol{R}^n$ の基本ベクトルとすれば, $Q_A(\boldsymbol{e}_i)={}^t\boldsymbol{e}_iA\boldsymbol{e}_i=a_{ii}$, $Q_A(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)={}^t(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)A(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)={}^t\boldsymbol{e}_iA\boldsymbol{e}_i+{}^t\boldsymbol{e}_iA\boldsymbol{e}_j+{}^t\boldsymbol{e}_jA\boldsymbol{e}_i+{}^t\boldsymbol{e}_jA\boldsymbol{e}_j=a_{ii}+a_{ij}+a_{ji}+a_{jj}=a_{ii}+2a_{ij}+a_{jj}$ であり, 同様に $Q_B(\boldsymbol{e}_i)=b_{ii}$, $Q_B(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)=b_{ii}+2b_{ij}+b_{jj}$ を得る. 仮定からすべての $1\leqq i,j\leqq n$ に対して $Q_A(\boldsymbol{e}_i)=Q_B(\boldsymbol{e}_i)$ $Q_A(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)=Q_B(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)$ だから $a_{ii}=b_{ii}$, $a_{ii}+2a_{ij}+a_{jj}=b_{ii}+2b_{ij}+b_{jj}$ が成り立つ. これらの式から $a_{ij}=b_{ij}$ が得られる. □

次の命題は明らかである.

命題 5.1.3 *$r\in\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し, $Q_A(r\boldsymbol{x})=r^2Q_A(\boldsymbol{x})$.*

5.2　2次形式の符号数

まず, 次の結果が成り立つことに注意する.

命題 5.2.1 *A が零行列でないならば 2次形式 $Q_A:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ に関して以下のいずれか 1つだけが成り立つ.*

(1) $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ ならば $Q_A(\boldsymbol{x})>0$ である.

(2) $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ ならば $Q_A(\boldsymbol{x})<0$ である.

(3) すべての $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し, $Q_A(\boldsymbol{x})\geqq 0$ であり, $Q_A(\boldsymbol{a})=0$ となる $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ がある.

(4) すべての $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し, $Q_A(\boldsymbol{x})\leqq 0$ であり, $Q_A(\boldsymbol{a})=0$ となる $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ がある.

(5) $Q_A(\boldsymbol{a})>0$ となる $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{R}^n$ と $Q_A(\boldsymbol{b})<0$ となる $\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^n$ がある.

定義 5.2.2 実対称行列 A が上の命題の *(1)* を満たすとき, A を正値対称行列といい, *(2)* を満たすとき, A を負値対称行列という．また, *(5)* を満たすとき A は不定符号であるという．

命題 5.2.3 A を n 次対称行列, P を n 次正方行列とするとき, 任意の $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $Q_A(P\boldsymbol{y}) = Q_{{}^tPAP}(\boldsymbol{y})$ が成り立つ．

証明 $Q_A(P\boldsymbol{y}) = {}^t(P\boldsymbol{y})A(P\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{y}({}^tPAP)\boldsymbol{y} = Q_{{}^tPAP}(\boldsymbol{y})$. □

R_{ij} $(1 \leqq i, j \leqq n)$ を n 次単位行列 E_n の第 i 行と第 j 行を入れ替えて得られる行列とすると $R_{ij}^{-1} = {}^tR_{ij} = R_{ij}$ であり, 次の結果は容易に示される．

補題 5.2.4 A を n 次正方行列とするとき, $R_{ij}A$ は A の第 i 行と第 j 行を入れ替えて得られる行列, AR_{ij} は A の第 i 列と第 j 列を入れ替えて得られる行列である．従って $R_{ij}AR_{ij}$ の対角成分は A の対角成分の i 番目と j 番目を入れ替えたものである．

2 次形式 Q_A は「平方完成」できる．すなわち, 次の定理が成り立つ．

定理 5.2.5 A を n 次実対称行列とするとき, 正則行列 P で $P^{-1}\boldsymbol{x}$ の第 j 成分を y_j とすれば,

$$Q_A(\boldsymbol{x}) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2 \qquad (0 \leqq p \leqq n,\ 0 \leqq q \leqq n-p)$$

という形になるものが存在する．

証明 まず, 正則行列 T で $T^{-1}\boldsymbol{x}$ の第 j 成分を y_j とすれば, $Q_A(\boldsymbol{x}) = c_1y_1^2 + \cdots + c_ny_n^2$ の形になるものがあることを n による帰納法で示す．$A = O$ ならば主張は明らかだから, $A \neq O$ と仮定する．A の (i,j)-成分を a_{ij} とする．まず $n = 1$ のときは主張は明らかであり, A が $n-1$ 次対称行列のときに主張が成り立つと仮定する．

(1) $a_{kk} \neq 0$ となる k がある場合;
$\boldsymbol{u} = R_{kn}^{-1}\boldsymbol{x}$ とおいて, $\boldsymbol{u}$ の第 j 成分を u_j とすれば, 命題 5.2.3 から $Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_A(R_{kn}\boldsymbol{u}) = Q_{{}^tR_{kn}AR_{kn}}(\boldsymbol{u})$ である．${}^tR_{kn}AR_{kn} = R_{kn}AR_{kn} = (b_{ij})$ とすれば, 補題 5.2.4 から $b_{nn} = a_{kk} \neq 0$ であり, ${}^tR_{kn}AR_{kn}$ は対称行列であることに注意する．そこで $b_{in} = b_{ni}$ を用いて, 以下のように u_n に関して平方完成する．

$$\begin{aligned} Q_A(\boldsymbol{x}) &= Q_{{}^tR_{kn}AR_{kn}}(\boldsymbol{u}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}u_iu_j = \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}u_iu_j + b_{nn}u_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2b_{in}u_iu_n \\ &= \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}u_iu_j + b_{nn}\left(u_n + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_{in}}{b_{nn}}u_i\right)^2 - b_{nn}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_{in}}{b_{nn}}u_i\right)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{n-1}\left(b_{ij} - \frac{b_{in}b_{jn}}{b_{nn}}\right)u_iu_j + b_{nn}\left(u_n + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_{in}}{b_{nn}}u_i\right)^2 \quad \cdots \ (i) \end{aligned}$$

従って $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \text{\Large 0} & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ \text{\Large 0} & & 1 & 0 \\ \frac{b_{1n}}{b_{nn}} & \cdots & \frac{b_{n-1\,n}}{b_{nn}} & 1 \end{pmatrix}$ (P_1 の (n,i)-成分 $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ は $\frac{b_{in}}{b_{nn}}$) とおき, $\boldsymbol{v} = P_1\boldsymbol{u}$ とおいて $\boldsymbol{v}$ の第 i 成分を v_i とすれば P_1 は正則行列であり, $v_i = u_i$ $(i < n)$, $v_n = u_n + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_{in}}{b_{nn}}u_i$ が成り立つ．このとき $\boldsymbol{v} = P_1R_{kn}^{-1}\boldsymbol{x}$ であり, (i) から

$$Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_A(R_{kn}P_1^{-1}\boldsymbol{v}) = Q_{{}^tR_{kn}AR_{kn}}(P_1^{-1}\boldsymbol{v}) = \sum_{i,j=1}^{n-1}\left(b_{ij} - \frac{b_{in}b_{jn}}{b_{nn}}\right)v_iv_j + b_{nn}v_n^2 \quad \cdots \ (ii)$$

を得る. さらに $b_{ij}-\frac{b_{in}b_{jn}}{b_{nn}}$ を (i,j)-成分にもつ $n-1$ 次対称行列を B として, $C=\begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & b_{nn}\end{pmatrix}$ とおき, $\boldsymbol{v}'\in\boldsymbol{R}^{n-1}$ を $\boldsymbol{v}$ から第 n 成分を除いたベクトルとすれば $\boldsymbol{v}=P_1R_{kn}^{-1}\boldsymbol{x}$ ならば (ii) から以下の等式が得られる.

$$Q_A(\boldsymbol{x})=Q_C(\boldsymbol{v})=Q_B(\boldsymbol{v}')+b_{nn}v_n^2 \quad \cdots \ (iii)$$

B に帰納法の仮定を用いると, $n-1$ 次正則行列 T_1 で $\boldsymbol{v}'\in\boldsymbol{R}^{n-1}$ に対し $\boldsymbol{w}'=T_1^{-1}\boldsymbol{v}'$ の第 i 成分を w_i とすれば $Q_B(\boldsymbol{v}')=c_1w_1^2+\cdots+c_{n-1}w_{n-1}^2$ いう形になるものがある. $T_2=\begin{pmatrix} T_1 & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & 1\end{pmatrix}$, とおくと T_2 も正則である. $\boldsymbol{w}=T_2^{-1}\boldsymbol{v}$ とおいて, $\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}'\in\boldsymbol{R}^{n-1}$ をそれぞれ $\boldsymbol{v}$, vw から第 n 成分を除いたベクトルとすれば $\boldsymbol{w}'=T_1^{-1}\boldsymbol{v}'$, $w_n=v_n$ と (iii) から $\boldsymbol{w}=T_2^{-1}P_1R_{kn}^{-1}\boldsymbol{x}$ ならば $Q_A(\boldsymbol{x})=c_1w_1^2+\cdots+c_{n-1}w_{n-1}^2+b_{nn}w_n^2$ である. ゆえに A が n 次対称行列の場合も主張が成り立つ.

(2) $a_{11}=\cdots=a_{nn}=0$ の場合;
$A\neq O$ だから a_{kl} が 0 でないような k,l がある. $x_k=u_k+u_l$, $x_l=u_k-u_l$, $x_i=u_i$ $(i\neq k,l)$, すなわち P_3 を第 i 行が $i=k$ なら ${}^t\boldsymbol{e}_k+{}^t\boldsymbol{e}_l$, $i=l$ なら ${}^t\boldsymbol{e}_k-{}^t\boldsymbol{e}_l$, $i\neq k,l$ なら ${}^t\boldsymbol{e}_i$ であるような n 次正則行列として $\boldsymbol{u}=P_3^{-1}\boldsymbol{x}$ とおけば, $Q_A(\boldsymbol{x})=Q_A(P_3\boldsymbol{u})=2a_{kl}u_k^2+\cdots$ となり, u_k^2 の係数は 0 でないため, $Q_{{}^tP_3AP_3}(\boldsymbol{u})=Q_A(P_3\boldsymbol{u})$ は上の (1) の場合に帰着する.

正則行列 T で $\boldsymbol{y}=T^{-1}\boldsymbol{x}$ の第 j 成分を y_j とすれば, $Q_A(\boldsymbol{x})=Q_A(T\boldsymbol{y})=c_1y_1^2+\cdots+c_ny_n^2$ の形になるものを選ぶ. $\boldsymbol{y}$ の成分の順序を入れ替えることにより, $c_1,\ldots,c_p>0$, $c_{p+1},\ldots,c_{p+q}<0$, $c_{p+q+1}=\cdots=c_n=0$ の形にする. すなわち R_{ij} の形をした行列の積で表される行列 R で $\boldsymbol{z}=R^{-1}\boldsymbol{y}$ とおけば,

$$Q_A(\boldsymbol{x})=Q_A(TR\boldsymbol{z})=c'_1z_1^2+\cdots+c'_pz_p^2+c'_{p+1}z_{p+1}^2+\cdots+c'_{p+q}z_{p+q}^2 \quad (c'_1,\ldots,c'_p>0,\ c'_{p+1},\ldots,c'_{p+q}<0)$$

となるものがある. 最後に, D を対角行列で i 番目の対角成分が $1\leqq i\leqq p$ なら $\frac{1}{\sqrt{c'_i}}$, $p+1\leqq i\leqq p+q$ なら $\frac{1}{\sqrt{-c'_i}}$, $p+q+1\leqq i\leqq n$ なら 1 で与えられるものとして $\boldsymbol{w}=D^{-1}\boldsymbol{z}$ とおけば

$$Q_A(\boldsymbol{x})=Q_A(TRD\boldsymbol{w})=w_1^2+\cdots+w_p^2-w_{p+1}^2-\cdots-w_{p+q}^2$$

となる. □

n 次対角行列 $\begin{pmatrix} E_p & & \text{\huge 0} \\ & -E_q & \\ \text{\huge 0} & & O\end{pmatrix}$ を $D_{p,q}$ で表すことにする.

系 5.2.5.1 実数を成分にもつ n 次対称行列 A に対し, 正則行列 P で, ${}^tPAP=D_{p,q}$ という形になるものがある.

証明 2 次形式 Q_A に対し, 正則行列 P で定理 5.2.5 の条件を満たすものをとれば, 命題 5.2.3 から任意の $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し, $Q_{{}^tPAP}(\boldsymbol{y})=Q_A(P\boldsymbol{y})=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2=Q_{D_{p,q}}(\boldsymbol{y})$ が成り立つため命題 5.1.2 から ${}^tPAP=D_{p,q}$ である. □

上の結果における (p,q) は一意的に定まる. すなわち, 次の「Sylvester の慣性法則」と呼ばれる結果が成り立つ.

定理 5.2.6 正則行列 P に対して ${}^tPD_{p,q}P=D_{s,t}$ ならば $p=s$ かつ $q=t$ である.

証明 P は正則行列だから $s+t=\mathrm{rank}\ D_{s,t}=\mathrm{rank}\ {}^tPD_{p,q}P=\mathrm{rank}\ D_{p,q}=p+q$ である. $p<s$ と仮定して矛盾を導く. P の (i,j)-成分を a_{ij} とすれば, $p<s$ だから $\sum\limits_{j=1}^{s}p_{ij}y_j=0$ $(i=1,2,\ldots,p)$ を満たす $(0,0,\ldots,0)$ とは異なる $(y_1,y_2,\ldots,y_s)$ がある. さらに $y_{s+1}=\cdots=y_n=0$ とおき, $x_j=\sum\limits_{j=1}^{n}p_{ij}y_j$ によって $x_1,x_2,\ldots,x_n$ を定めれば, $y_1,y_2,\ldots,y_n$ の定め方から $x_1=\cdots=x_p=0$ である. このように定めた x_j, y_j を第 j 成分にもつ列ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ とすれば, $Q_{D_{s,t}}(\boldsymbol{y})=y_1^2+\cdots+y_s^2>0$, $Q_{D_{p,q}}(\boldsymbol{x})=-|x_{p+1}|^2-\cdots-|x_{p+q}|^2\leqq 0$ が成り立つ. ところが, $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ だから $Q_{D_{p,q}}(\boldsymbol{x})=Q_{{}^tPD_{p,q}P}(\boldsymbol{y})=Q_{D_{s,t}}(\boldsymbol{y})$ となるため矛盾が生じる. ${}^t(P^{-1})D_{s,t}P^{-1}=D_{p,q}$ だから, 上と同じ議論で $s<p$ からも矛盾が導かれる. □

定義 5.2.7 *A, B を実対称行列とする．$B = {}^tPAP$ を満たす実正則行列 P が存在するとき, 2 次形式 Q_A と Q_B は同値であるという．*

命題 5.2.8 *2 つの 2 次形式が上の意味で同値であるという関係は, いわゆる同値関係である．すなわち, 次のことが成り立つ．*

(1) $Q_A(\boldsymbol{x})$ と $Q_A(\boldsymbol{x})$ は同値である．

(2) $Q_A(\boldsymbol{x})$ と $Q_B(\boldsymbol{x})$ が同値ならば $Q_B(\boldsymbol{x})$ と $Q_A(\boldsymbol{x})$ は同値である．

(3) $Q_A(\boldsymbol{x})$ と $Q_B(\boldsymbol{x})$ が同値で $Q_B(\boldsymbol{x})$ と $Q_C(\boldsymbol{x})$ が同値ならば $Q_A(\boldsymbol{x})$ と $Q_C(\boldsymbol{x})$ は同値である．

証明 $A = {}^tE_nAE_n$ だから (1) が成り立ち, $B = {}^tPAP$ ならば $A = {}^t(P^{-1})BP^{-1}$ だから (2) が成り立つ．また, $B = {}^tPAP$ かつ $C = {}^tQBQ$ ならば $C = {}^t(PQ)A(PQ)$ だから (3) が成り立つ． □

定理 5.2.5, 命題 5.2.8 により, 任意の 2 次形式 Q_A に対して, Q_A と $Q_{D_{p,q}}$ が同値になるような負でない整数の対 (p, q) が存在するが, 定理 5.2.6 により, この対は A に関して一意的に定まる．そこで, 次のように定義する．

定義 5.2.9 *2 次形式 Q_A に対して, Q_A と $Q_{D_{p,q}}$ が同値になるような負でない整数の対 (p, q) を Q_A の符号数という．*

命題 5.2.10 *$f : V \to V$ を 1 次変換とし, V は f の固有空間の直和であるとする．f の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, 各 $i = 1, 2, \dots, k$ に対し, λ_i に対する f の固有値空間の次元を n_i とすれば f の固有多項式 $F_f(x)$ は $(x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\cdots(x-\lambda_k)^{n_k}$ と因数分解される．*

証明 $i = 1, 2, \dots, k$ に対し $[\boldsymbol{v}_{n_1+\cdots+n_{i-1}+1}, \boldsymbol{v}_{n_1+\cdots+n_{i-1}+2}, \dots, \boldsymbol{v}_{n_1+\cdots+n_{i-1}+n_i}]$ が λ_i に対する f の固有空間の基底になるように V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n]$ をとれば, この基底に関する f の表現行列 A は, (j, j)-成分が λ_i $(n_1 + \cdots + n_{i-1} + 1 \leqq j \leqq n_1 + \cdots + n_{i-1} + n_i)$ であるような対角行列となるため $F_f(x) = |xE_n - A| = (x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\cdots(x-\lambda_k)^{n_k}$ である． □

A を n 次実対称行列とすれば $T_A : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n$ は $T_A^* = T_{A^*} = T_A$ を満たすため命題 4.2.5 により, A の固有方程式の解はすべて実数である．

命題 5.2.11 *A を n 次実対称行列として A の固有多項式は*

$$F_A(x) = x^{n-p-q}(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_{p+q}) \quad \lambda_1, \dots, \lambda_p > 0,\ \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q} < 0$$

と因数分解されているとする．このとき, 2 次形式 Q_A の符号数は (p, q) である．

証明 A は実対称行列だから, エルミート行列である．従って命題 4.2.5 により, A の固有方程式の解はすべて実数になるため, 系 4.2.11.1 により, 実数を成分とするユニタリー行列 T で $T^{-1}AT$ が対角行列になるものが存在する．ここで, $T^{-1} = T^* = {}^tT$ であり, T の列ベクトルを適当に入れ換えることにより ${}^tTAT = T^{-1}AT$ の (i, i)-成分は λ_i $(i = 1, 2, \dots, p+q)$, 0 $(i = s+t+1, s+t+2, \dots, n)$ であると仮定してよい．$\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$ と変数変換すれば $Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_{{}^tTAT}(\boldsymbol{y}) = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_{p+q}y_{p+q}^2$ となる．さらに, $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ $(i = 1, 2, \dots, p)$, $\frac{1}{\sqrt{-\lambda_i}}$ $(i = p+1, p+2, \dots, p+q)$, 1 $(i = p+q+1, p+q+2, \dots, n)$ を (i, i)-成分にもつ対角行列を S として $\boldsymbol{y} = S\boldsymbol{z}$ と変数変換すれば $Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_{{}^t(TS)A(TS)}(\boldsymbol{z}) = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_{p+q}^2$ となるため, Q_A の符号数は (p, q) である． □

注意 5.2.12 *一般に n が 3 以上 (5 以上の場合は特に) ならば n 次方程式の解の符号と重複度を調べるのは困難なので, 上の結果を用いて Q_A の符号数を求める方法は実用的ではない．定理 5.2.5 の証明の手順のように, $Q_A(\boldsymbol{x})$ を平方完成して符号数を求める方が現実的である．*

命題 5.2.13 零でない実対称行列 A に対し, A の符号数を (p, q) とすれば, 以下が成り立つ.

(1) A が正値対称行列であるための必要十分条件は $p = n$ かつ $q = 0$ である.

(2) A が負値対称行列であるための必要十分条件は $p = 0$ かつ $q = n$ である.

(3) A が命題 *5.2.1)* の *(3)* を満たすための必要十分条件は $p < n$ かつ $q = 0$ である.

(4) A が命題 *5.2.1* の *(4)* を満たすための必要十分条件は $p = 0$ かつ $q < n$ である.

(5) A が不定符号であるための必要十分条件は $p > 0$ かつ $q > 0$ である.

証明 任意の $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, $Q_A(P\boldsymbol{y}) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2$ であり P は正則行列だから $\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{R}^n$ 全体を動けば $P\boldsymbol{y}$ も $\boldsymbol{R}^n$ 全体を動く. 従って $p = n$ かつ $q = 0$ ならば A は正値対称行列, $p = 0$ かつ $q = n$ ならば A は負値対称行列, $p < n$ かつ $q = 0$ ならば A は命題 5.2.1 の (3) を満たし, $p = 0$ かつ $q < n$ ならば A は命題 5.2.1 の (4) を満たし, $p > 0$ かつ $q > 0$ ならば A は不定符号である. □