第1章　ベクトル空間

これまでは数ベクトル空間とその間の 1 次写像について学んできたが, 考える対象を数ベクトル空間に限定せず, より広い対象をベクトル空間として取り扱えたほうが線形代数学の理論がより一般的なものになるとともに, 解析学をはじめとする数学の他の分野への応用が広がることになる.

例えば, A を $m \times n$ 行列として $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ をみたす $\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ 全体からなる集合を W とすれば, W に属する 2 つのベクトルの和と W のベクトルの実数倍はつねに W に属することが容易に確かめられる. このような集合もベクトル空間の仲間に入れて, W を含む一般のベクトル空間の次元の概念を定義してやれば, W の次元は $n - \mathrm{rank} A$ に等しくなることが第 2 章で示される.

また, 閉区間 $[a, b]$ で定義された実数値連続関数全体からなる集合を $C[a, b]$ で表せば, $C[a, b]$ には関数の加法と実数倍が定義されるため, 一般化されたベクトル空間の一種になる. このような関数からなるベクトル空間は「関数空間」とよばれて, 解析学の重要な研究対象の一つである.

1.1　複素数

2 次方程式 $x^2 + 1 = 0$ の解の一つを i (または $\sqrt{-1}$) で表し, 実数 x, y に対して $x + yi$ の形に表される数を**複素数** (complex number) とよぶ. 2 つの複素数 $w = u + vi$, $z = x + yi \quad (u,\, v,\, x,\, y \in \boldsymbol{R})$ が与えられたとき, $u = x$ かつ $v = y$ が成り立つとき, またそのときに限って w と z は**等しい**といい, このことを $w = z$ により表す. 以後, 複素数全体からなる集合を $\boldsymbol{C}$ で表すことにする. ここで, 実数 x に対し $x = x + 0i$ とみなすことにより, 実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ を $\boldsymbol{C}$ の部分集合と考えることにする.

$\boldsymbol{C}$ における加法, 乗法は $w = u + vi, z = x + yi$ $(u, v, x, y \in \boldsymbol{R})$ に対し

$$w + z = (u + x) + (v + y)i, \qquad wz = (ux - vy) + (uy + vx)i$$

で与えられる演算である. このとき, 複素数 v, w, z に対して下記の演算法則 (1)〜(6) が成り立つことが容易に確かめられ, 複素数でも実数と同様に四則演算を行えることがわかる.

(1) $(v + w) + z = v + (w + z)$, $\quad (vw)z = v(wz)$ $\quad$ (**結合法則**)

(2) $z + 0 = 0 + z = z$, $\quad 1z = z1 = z$

(3) $z = x + yi$ $(x, y \in \boldsymbol{R})$ のとき $-z = -x + (-y)i$ とおくと $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

(4) $z = x + yi \neq 0$ $(x, y \in \boldsymbol{R})$ のとき $z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2}i$ とおくと $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$.

(5) $w + z = z + w$, $wz = zw$ $\quad$ (**交換法則**)

(6) $v(w + z) = vw + vz$ $\quad$ (**分配法則**)

問 1.1 上記の演算法則 (1)〜(6) が成り立つことを示せ.

問 1.2 $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ とおくとき, α^2, α^3 を $x + yi$ $(x, y \in \boldsymbol{R})$ の形に表せ. さらに, α^{12} を求めよ.

定義 1.1 複素数 $z = x + yi$ $(x, y \in \boldsymbol{R})$ に対し, $x - yi$ を z の**共役複素数**といい, $\overline{z}$ で表す. また, 実数 x, y, $\sqrt{x^2 + y^2}$ をそれぞれ z の**実部**, **虚部**, **絶対値**といい, $\mathfrak{Re}\,(z)$, $\mathfrak{Im}\,(z)$, $|z|$ で表す. $\mathfrak{Im}\,(z) \neq 0$ ならば z を**虚数**といい, さらに $\mathfrak{Re}\,(z) = 0$ ならば z を**純虚数**という.

なお, 複素数 z が実数ならば, z の絶対値 $|z|$ は実数としての絶対値に一致することを注意しておく.

問 1.3 複素数 z に対し, 次の等式が成り立つことを示せ.
(1) $\mathfrak{Re}\,(z) = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$　(2) $\mathfrak{Im}\,(z) = \frac{1}{2i}(z-\overline{z})$　(3) $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$

定義 1.2 複素数 $x+iy$ と実 2 次元数ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を対応させることによって, 複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ を実 2 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^2$ と同一視する. このように, 同一視を行った $\boldsymbol{R}^2$ を**複素平面**とよぶ. このとき, z の絶対値は複素平面における 0 と z との距離にほかならないため, $z = x+yi \neq 0$ の場合, $x = |z|\cos\theta$, $y = |z|\sin\theta$ となる $0 \leqq \theta < 2\pi$ が一意的に定まる. この θ を z の**偏角**といい $\arg z$ で表す.

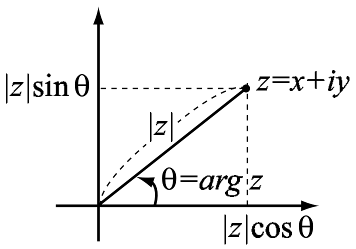


図 5.1 複素平面

注意 1.1 上の定義で与えた対応によって, 複素数 $z = u+vi$,　$w = x+yi$　$(u,v,x,y \in \boldsymbol{R})$ はそれぞれ $\boldsymbol{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{z} = \begin{matrix} u \\ v \end{matrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ に対応するが, このとき $z+w$,　az　$(a \in \boldsymbol{R})$ はぞれぞれ $\boldsymbol{z}+\boldsymbol{w}$, $a\boldsymbol{z}$ に対応することに注意する. すなわち, 複素数の和と実数倍は対応する $\boldsymbol{R}^2$ のベクトルの和とスカラー倍にそれぞれ対応している. また, $z \in \boldsymbol{C}$ を共役複素数 $\overline{z}$ に対応させる写像は, $\boldsymbol{R}^2$ における x 軸に関する対称移動に相当する. このように, 複素数全体の集合と 2 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^2$ を対応づけることによって, 複素数は 2 次元数ベクトル空間としての「実体」をもたせることができる. 逆の見方をすれば, 複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ とは 2 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^2$ に乗法を

$$\begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \quad \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} ux-vy \\ uy+vx \end{matrix}$$

によって定義したものであると考えられる.

共役複素数は次の性質をもつ.

命題 1.1 複素数 z, w に対し, 等式

$$\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$$

が成り立つ. また, z が実数であるためには $\overline{z} = z$ が成り立つことが必要十分である.

問 1.4 命題 1.1 を示せ.

複素数の絶対値は次の性質をもつ.

命題 1.2 複素数 z, w に対し次が成り立つ.

(1) $|z| \geqq 0$ であり, 等号成立は $z = 0$ の場合に限る.

(2) $|zw| = |z||w|$

(3) $|z+w| \leqq |z|+|w|$ であり, 等号成立は $zw = 0$ または $\arg z = \arg w$ の場合に限る.

証明　(1) は絶対値の定義から明らかである.
(2) は問 1.3 (3) と命題 1.1 の $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ を用いればただちに得られる.

(3) $zw=0$ のときは明らかに等号が成立するので, $zw \neq 0$ と仮定して $x=|z|\cos\varphi$, $y=|z|\sin\varphi$, $u=|w|\cos\psi$, $v=|w|\sin\psi$ とおく. $z=x+yi$, $w=u+vi$ より

$$|z+w|^2=(x+u)^2+(y+v)^2=|z|^2+|w|^2+2(ux+vy)=|z|^2+|w|^2+2|z||w|\cos(\varphi-\psi)$$

である. ゆえに

$$(|z|+|w|)^2-|z+w|^2=2|z||w|(1-\cos(\varphi-\psi))\geqq 0$$

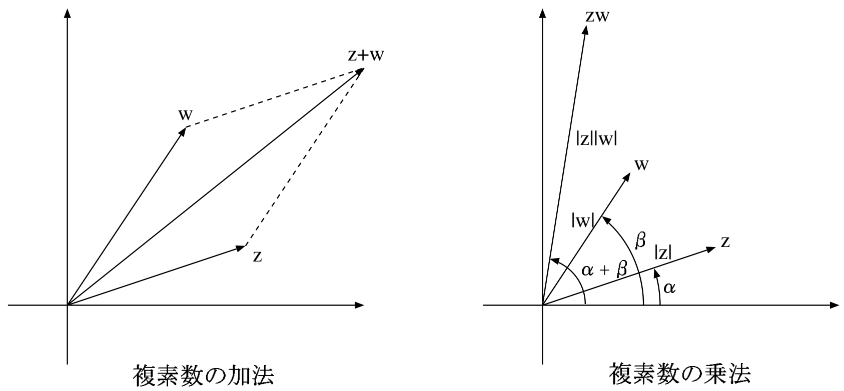
となり, $|\varphi-\psi|<2\pi$ であるから, $zw\neq 0$ の場合に等号が成立するのは $\varphi=\psi$ の場合に限る. □

命題 1.3 0 でない複素数 z, w に対して次の等式が成り立つ.

$$\arg(zw)=\begin{cases}\arg z+\arg w & (\arg z+\arg w<2\pi)\\ \arg z+\arg w-2\pi & (\arg z+\arg w\geqq 2\pi)\end{cases}$$

証明 $\varphi=\arg z$, $\psi=\arg w$ とおくと $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $\quad w=|w|(\cos\psi+i\sin\psi)$ であるから, 三角関数の加法定理を用いると $zw=|zw|(\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi))$ となる. これより, $\varphi+\psi<2\pi$ ならば $\varphi+\psi$ が zw の偏角であり, $\varphi+\psi\geqq 2\pi$ ならば $\varphi+\psi$ から 2π を引いたものが zw の偏角である. □

注意 1.2 複素数 z に対し, $f_z(w)=zw$ で定義される写像 $f_z:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$ は, $z\neq 0$ ならば, これは複素平面において原点を中心とした $\arg z$ の回転と $|z|$ 倍の相似拡大の合成であることが, 命題 1.2 (2) と命題 1.3 からわかる. ここで $z=x+yi$ $(x,y\in\boldsymbol{R})$ の場合, f_z を $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^2$ への写像とみなせば, f_z は行列 $\begin{matrix} x & -y \\ y & x\end{matrix}$ で表される 1 次変換である. (下図参照)



複素数の加法　　複素数の乗法

図 5.2 複素数の加法と乗法

問 1.5 (1) n による数学的帰納法で, すべての自然数に対して $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+\sin n\theta$ が成り立つことを示せ.
(2) $z^{12}=1$ をみたす複素数 z をすべて求めよ.

複素数まで数の世界を広げれば,「代数方程式」は複素数の中に解を必ずもつことが保証される. すなわち次の「**代数学の基本定理**」とよばれる定理が成り立つことが知られている. この定理の証明にはさらに進んだ数学の知識が必要であるため, 証明なしに認めることにする.

定理 1.4 複素数を係数にもつ方程式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ $(a_n\neq 0)$ は $\boldsymbol{C}$ の中に解をもつ. したがって, 複素数を係数にもつ 1 変数の多項式は 1 次式の積に因数分解される.

ここで, 方程式の**解の重複度**を定義しておく.

定義 1.3 α が複素数を係数にもつ方程式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ $(a_n\neq 0)$ の解であるとき, 正の整数 m と x の $(n-m)$ 次多項式 $p(x)$ で $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=(x-\alpha)^mp(x)$ かつ $p(\alpha)\neq 0$ をみたすものが一通りに定まるが, このとき m を解 α の**重複度**という. また, 重複度が m $(\geqq 2)$ である解を m **重解** (または m **重根**) とよぶ.

x の多項式 $f(x)$ に対し, 方程式 $f(x)=0$ の相異なる解を $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ とし, α_j の重複度を m_j $(j=1,2,\ldots,r)$ とすれば $f(x)$ は $f(x)=(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_r)^{m_r}$ と因数分解される.

命題 1.1 を用いると次の結果が容易に示される.

命題 1.5 実数を係数にもつ方程式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ $(a_n\neq 0)$ が $\alpha\in\boldsymbol{C}$ を解にもてば, $\bar{\alpha}$ も解である.

定理 1.4 と上の命題を用いれば次の結果が得られる.

系 1.6 実数を係数にもつ 1 変数の多項式は, 実数を係数とする 1 次式と 2 次式の積に因数分解される.

問 1.6 命題 1.5 を証明せよ.

問 1.7 系 1.6 を証明せよ.

1.2　ベクトル空間の定義と例

数ベクトル空間の定義を振り返ると, n 次元数ベクトルの集合 $\boldsymbol{K}^n$ に加法とスカラー倍という 2 種類の演算を考えたが, ここで改めて「演算」とは何かを, 第 1 章で学んだ写像の言葉を用いて述べることにする. そのためにまず記号を導入する. 一般に, 集合 X, Y が与えられたとき, X の要素 x と Y の要素 y の組 (x,y) 全体からなる集合を $X\times Y$ で表す.

例 1.1 (1) 複素数の加法, 乗法は複素数の組 (z,w) にそれぞれ $z+w$, zw を対応させる $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{C}$ への写像である.

(2) $\boldsymbol{K}^n$ の加法は n 次元数ベクトルの組 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ に $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ を対応させる $\boldsymbol{K}^n\times\boldsymbol{K}^n$ から $\boldsymbol{K}^n$ への写像である. また $\boldsymbol{K}^n$ のスカラー倍は $\boldsymbol{K}$ の要素と n 次元数ベクトルの組 $(r,\boldsymbol{x})$ に $r\boldsymbol{x}$ を対応させる $\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{K}^n$ から $\boldsymbol{K}^n$ への写像である.

注意 1.3 上の例でみたように, $X\times Y$ から第 3 の集合 Z への写像 f が与えられれば, $x\in X$ と $y\in Y$ に対して f による (x,y) の像 $f(x,y)$ が対応するが, これは x と y に f という演算を行った結果であるといえる. そこで, f を演算とよぶことにして, $f(x,y)$ を $x+y$ や xy などで表すことが多い. このようにみれば, 演算とは写像の一種にほかならないことがわかる.

ここで, ベクトル空間の定義を以下のように行う.

定義 1.4 集合 V に, 加法, スカラー倍とよばれる次の 2 種類の演算

- **加法** : V の 2 つの要素の組 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ に対して V の要素 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ を対応させる演算.
- **スカラー倍** : $\boldsymbol{K}$ の要素 r と V の要素 $\boldsymbol{x}$ の組 $(r,\boldsymbol{x})$ に対して V の要素 $r\boldsymbol{x}$ を対応させる演算.

が定義されていて, 任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V,\ \ r,s\in\boldsymbol{K}$ に対して次の (i)〜(viii) が成り立つとき, V を $\boldsymbol{K}$ 上の**ベクトル空間**という. また V の要素を**ベクトル**とよび, それに対し $\boldsymbol{K}$ の要素を**スカラー**とよぶ.

(i) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ (**結合法則**).
(ii) V の要素 $\mathbf{0}$ で, すべての $\boldsymbol{x}\in V$ に対して $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ をみたすものがある.
(iii) 各 $\boldsymbol{x}\in V$ に対して $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ をみたす $\boldsymbol{x}'\in V$ がある.
(iv) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ (**交換法則**).
(v) $(rs)\boldsymbol{x}=r(s\boldsymbol{x})$ (**結合法則**).
(vi) $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$
(vii) $r(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=r\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{y}$ (**分配法則**).
(viii) $(r+s)\boldsymbol{x}=r\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{x}$ (**分配法則**).

$\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間を $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ の場合は**実ベクトル空間**, $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$ の場合は**複素ベクトル空間**という.

注意 1.4 (1) 上の定義の (ii) における $\mathbf{0}$ は V の中にただ一つしか存在しない. 実際, $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2 \in V$ がすべての $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_1+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ をみたすならば, $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$ の場合を考えると $\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_1$ と $\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_2$ が得られるため $\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_2$ が成り立つ. このような V の要素を**零ベクトル**とよぶ.

(2) $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ が $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_1=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_2=\mathbf{0}$ をみたすとすると, (i), (ii) により

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_1+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}_1+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_2)=(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}_2=\mathbf{0}+\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_2$$

である. よって, (iii) をみたす $\boldsymbol{x}'$ は各 $\boldsymbol{x} \in V$ に対してただ一つだけ存在することになる. このような $\boldsymbol{x}'$ を $-\boldsymbol{x}$ で表し, さらに $\boldsymbol{y} \in V$ に対して, $\boldsymbol{y}+(-\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$ で表すことにする.

命題 1.7 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする.

(1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ に対して $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$ ならば $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ である.

(2) 任意の $\boldsymbol{x} \in V$, $r \in \boldsymbol{K}$ に対して $0\boldsymbol{x}=r\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $-\boldsymbol{x}=(-1)\boldsymbol{x}$ が成り立つ.

証明 (1) 定義 1.4 (i), (ii), (iii) を用いれば,

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{z}+(-\boldsymbol{z}))=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})+(-\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})+(-\boldsymbol{z})=\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{z}+(-\boldsymbol{z}))=\boldsymbol{y}+\mathbf{0}=\boldsymbol{y}.$$

(2) 定義 1.4 (ii), (vii), (viii) から,

$$0\boldsymbol{x}+0\boldsymbol{x}=(0+0)\boldsymbol{x}=0\boldsymbol{x}=\mathbf{0}+0\boldsymbol{x}, \quad r\mathbf{0}+r\mathbf{0}=r(\mathbf{0}+\mathbf{0})=r\mathbf{0}=\mathbf{0}+r\mathbf{0}$$

となるため, 上の (1) により $0\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, $r\mathbf{0}=\mathbf{0}$ である. 定義 1.4 (vi), (viii) といま示したことから

$$\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x}=1\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x}=(1+(-1))\boldsymbol{x}=0\boldsymbol{x}=\mathbf{0}.$$

同様に $(-1)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ であるから, 注意 1.4 (2) から $-\boldsymbol{x}=(-1)\boldsymbol{x}$ が得られる. □

ここで, ベクトル空間の例をいくつかあげる.

例 1.2 (1) n 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^n$ は $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間である.

(2) $\boldsymbol{K}$ の要素を成分とする $m \times n$ 行列全体の集合を $\mathrm{M}_{m,n}(\boldsymbol{K})$ で表すと, 行列の加法とスカラー倍により $\mathrm{M}_{m,n}(\boldsymbol{K})$ は $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間である. ここで, $\mathrm{M}_{m,n}(\boldsymbol{K})$ の零ベクトルは零行列 $O_{m,n}$ である. とくに n 次正方行列の集合 $\mathrm{M}_{n,n}(\boldsymbol{K})$ を $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{K})$ で表すことにすれば, 第 2 章で学んだように $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{K})$ には加法とスカラー倍以外に行列の積という演算が定義されていることに注意する. また, 第 4 章で定義した行列式は $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{K})$ から $\boldsymbol{K}$ への写像 (関数) であるといえる.

(3) x を変数とし, $\boldsymbol{K}$ の要素を係数とする多項式全体からなる集合 $P(\boldsymbol{K})$ は, 多項式の加法とスカラー倍によって $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間である. また, n 次以下の多項式全体からなる $P(\boldsymbol{K})$ の部分集合

$$P_n(\boldsymbol{K})=\{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0 \,|\, a_0, a_1, \ldots, a_n \in \boldsymbol{K}\}$$

も多項式の加法とスカラー倍によって $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間である. $P(\boldsymbol{K})$, $P_n(\boldsymbol{K})$ の零ベクトルは 0 (すべての次数の係数が 0 である多項式) である.

(4) 集合 S に対し $F(S)$ を S から $\boldsymbol{K}$ への関数全体からなる集合とする. $f, g \in F(S)$, $c \in \boldsymbol{K}$ に対し, 関数 $f+g$, cf を $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(cf)(x)=cf(x)$ で定めれば $f+g, cf \in F(S)$ であり, これらの演算によって $F(S)$ は $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間である. $F(S)$ の零ベクトルは零写像である.

(5) $a<b$ を実数, r を負でない整数とする. $C^r(a,b)$ を開区間 (a,b) で定義された r 回微分可能な実数値関数で, その r 次導関数が連続であるようなもの全体からなる集合 ($C^0(a,b)$ は (a,b) で定義された実数値連続関数全体からなる集合) とする. $f, g \in C^r(a,b)$, $c \in \boldsymbol{R}$ に対し, 関数 $f+g$, cf を $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(cf)(x)=cf(x)$ で定めれば $f+g, cf \in C^r(a,b)$ であり, これらの演算によって $C^r(a,b)$ は $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間である. 零ベクトルは (a,b) で恒等的に 0 である関数である.

W を 3 次元実ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ における原点を通る直線または平面とすると, W に属する 2 つのベクトルの和と, スカラー倍は W に属するため, W 自体も $\boldsymbol{R}^3$ の加法とスカラー倍により $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間である. この例を一般化して「部分空間」の概念を次のように定義する.

定義 1.5 $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V の部分集合 W が条件「$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$, $r \in \boldsymbol{K}$ ならば $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, r\boldsymbol{x} \in W$」をみたすとき, W を V の**部分空間**または**部分ベクトル空間**という.

$\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V の部分空間は V の加法とスカラー倍により $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間である.

例 1.3 $\boldsymbol{K}$ の要素を成分とする $m \times n$ 行列 A が与えられているとする.

(1) A を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解のベクトル全体の集合 $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ は $\boldsymbol{K}^n$ の部分空間である. これを A を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の**解空間**という.

(2) $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{K}^m$ に対し, $(A \mid \boldsymbol{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. この方程式が解をもつようなベクトル $\boldsymbol{b}$ 全体からなる集合 $\{\boldsymbol{b} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ をみたす $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ がある.$\}$ は $\boldsymbol{K}^m$ の部分空間である.

$\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ に対し, $x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k$ $(x_1, x_2, \ldots, x_k \in \boldsymbol{K})$ の形に表される V のベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の **1 次結合**とよぶ.

定義 1.6 $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の 1 次結合によって表されるベクトル全体からなる集合を $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ で表し, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ で**生成**される (張られる) V の部分空間という. これは V の部分空間である. また, $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ が成り立つとき, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は V を**生成する**という.

問 1.8 上で定義した $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ は V の部分空間であることを示せ.

例 1.4 (1) $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{R}^3$ の零でないベクトルとすると, $\langle \boldsymbol{v} \rangle$ は原点を通る直線である.

(2) $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{R}^3$ のベクトルとすると, これらが互いに平行でないならば $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ は原点を通る平面である. また, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ の少なくとも一方が零ベクトルでなく, $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ が平行ならば $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ は原点を通る直線である. いずれにしても $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ は原点を通る平面に含まれる V の部分集合である.

問 1.9 W_1, W_2 を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V の部分空間とするとき, これらの共通部分 $W_1 \cap W_2$ は V の部分空間であることを示せ.

1.3　ベクトルの 1 次独立性

V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする.

定義 1.7 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ に対し, 関係式

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} \qquad (*)$$

をみたす $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \boldsymbol{K}$ が $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ に限るとき $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は **1 次独立**であるという.

また $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が 1 次独立でないとき, これらは **1 次従属**であるという. すなわち, 関係式 $(*)$ をみたす $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \boldsymbol{K}$ で $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ 以外のものがあるとき, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は 1 次従属であるという.

問 1.10 (1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ が 1 次独立ならば, これらのベクトルの一部であるベクトル $\boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_k}$ $(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqq n)$ も 1 次独立であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ が 1 次従属ならば, これらに $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_l \in V$ を付け加えた $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_l$ も 1 次従属であることを示せ. また $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ のうちに零ベクトルがあれば, これらは 1 次従属であることを示せ.

命題 1.8 $\boldsymbol{K}$ 上の ベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が 1 次従属であるためには $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ のいずれか一つのベクトルが残りのベクトルの 1 次結合で表されることが必要十分である.

問 1.11 命題 1.8 を示せ.

例 1.5 (1) V の一つのベクトル $\boldsymbol{v}$ が 1 次独立であることと, $\boldsymbol{v}$ が零ベクトルでないことは同値である.

(2) V の 2 つのベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ が 1 次独立であるためには, 一方のベクトルが他方のベクトルのスカラー倍にならないことが必要十分であることが命題 1.8 からわかる. とくに, $V = \boldsymbol{R}^2$ または $V = \boldsymbol{R}^3$ の場合は, 2 つのベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ が 1 次独立であるためには, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ が原点を通る同一直線上にのっていない (いい換えれば互いに平行でない) ことが必要十分である.

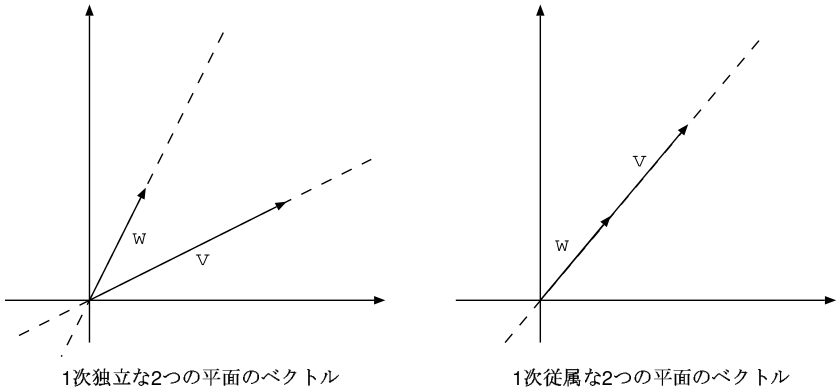


図 5.3 平面における 1 次独立と 1 次従属

(3) $\boldsymbol{R}^3$ の 3 つのベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ が与えられているとする. これらが 1 次従属であるためには, 命題 1.8 により, あるベクトルが他の 2 つのベクトルの 1 次結合になることが必要十分である. 例えば $\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の 1 次結合ならば $\boldsymbol{w} \in \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ であるから, 例 1.4 (2) により, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ は原点を通る同一平面上のベクトルである. ゆえに, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ が 1 次従属ならば, これらは原点を通る一つの平面に含まれている.

逆に, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ が原点を通る一つの平面 H に含まれているとして, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ が平行でないならば $H = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ であるから $\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の 1 次結合になり, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ は 1 次従属である. $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ が平行な場合は (2) により $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は 1 次従属であり, さらに問 1.10 (2) により $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ は 1 次従属である.

以上から $\boldsymbol{R}^3$ の 3 つのベクトルが 1 次従属であるためには, 原点を通る一つの平面に含まれていることが必要十分である. したがって, $\boldsymbol{R}^3$ の 3 つのベクトルが 1 次独立であるためには, これらの 3 つのベクトルを同時に含むような原点を通る平面が存在しないことが必要十分である.

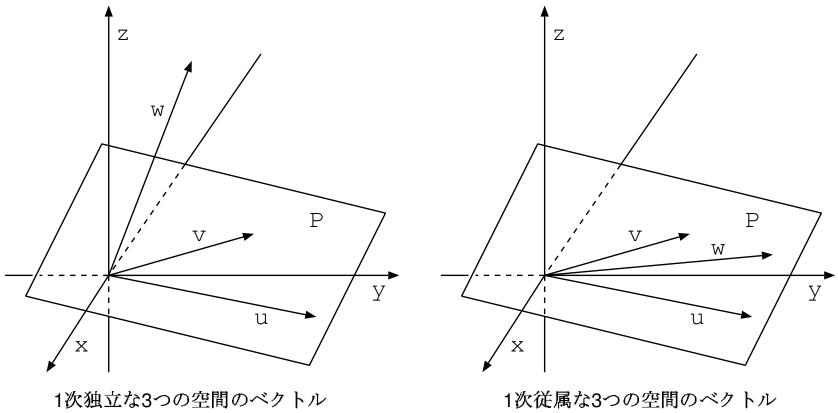


図 5.4 空間における 1 次独立と 1 次従属

問 1.12 次のベクトルは 1 次独立であるかどうか判定せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ -i-2 \\ i+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i+1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ -i-2 \\ i+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i+1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\1\\-2\end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\1\\2\end{pmatrix}$

次の定理は, 今後の議論において大きな役割を果たす重要な結果である.

定理 1.9 $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V の m 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ の 1 次結合として表される n 個のベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ が与えられたとする. $m < n$ ならば $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ は 1 次従属である.

証明 $x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{0}$ をみたす $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 以外の $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{K}$ があることを示せばよい. 仮定から, 各 $j = 1, 2, \ldots, n$ に対し $\boldsymbol{w}_j = a_{1j}\boldsymbol{v}_1 + a_{2j}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{v}_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{v}_i$ をみたす $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj} \in \boldsymbol{K}$ があるため, 各 $\boldsymbol{w}_j$ に上式を代入すると

$$x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{w}_n = \sum_{i=1}^{m}(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n)\boldsymbol{v}_i \qquad (*)$$

が得られる. そこで連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = 0 \\ & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}$$

を考えると, 未知数の個数 n は方程式の個数 m より多いため, この方程式は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 以外の解 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{K}$ をもつ. このような $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は $(*)$ によって $x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{0}$ をみたすため, 主張は示された. □

系 1.10 V が m 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ で生成されているとする. V のベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ が 1 次独立であれば, $n \leqq m$ である.

証明 各 $\boldsymbol{w}_j$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ の 1 次結合であるから, もし $n > m$ ならば定理 1.9 により $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ は 1 次従属になるため, 仮定に反する. □

次の事実は, 定理 1.12, 定理 1.16, 定理 1.18 の証明で用いられる.

補題 1.11 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を V の 1 次独立なベクトルとする.

(1) V のベクトル $\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の 1 次結合ではないとき, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}$ は 1 次独立である.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が V を生成しないならば, V のベクトル $\boldsymbol{w}$ で $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}$ が 1 次独立になるものが存在する.

証明 (1) $r_1\boldsymbol{v}_1 + r_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + r_k\boldsymbol{v}_k + c\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ をみたす $r_1, r_2, \ldots, r_k, c \in \boldsymbol{K}$ を考える. もし $c \neq 0$ ならば $\boldsymbol{w} = -\frac{r_1}{c}\boldsymbol{v}_1 - \frac{r_1}{c}\boldsymbol{v}_1 - \cdots - \frac{r_k}{c}\boldsymbol{v}_k$ となって仮定に反するため $c = 0$ である. このとき $r_1\boldsymbol{v}_1 + r_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + r_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ となり $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は 1 次独立であるから $r_1 = r_2 = \cdots = r_k = 0$ である. ゆえに $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}$ は 1 次独立である.

(2) 仮定から $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の 1 次結合で表されないベクトル $\boldsymbol{w}$ があるが, (1) により $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{w}$ は 1 次独立である. □

系 1.10 により, n 個のベクトルで生成されるベクトル空間では, 1 次独立なベクトルの個数は n を越えることはないが, 逆に 1 次独立であるベクトルの個数が高々 n 個であるようなベクトル空間は n 個以下のベクトルで生成される. すなわち, 次の結果が成り立つ.

定理 1.12 ベクトル空間 V の $n+1$ 個以上のベクトルがつねに 1 次従属になるならば, n 個以下の 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ で V を生成するものが存在する.

証明 $V \neq \{\boldsymbol{0}\}$ ならば零ベクトルでない V のベクトル $\boldsymbol{v}_1$ をとり, 帰納的に 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_j$ が選べたとする. もし $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_j$ が V を生成しないならば, 補題 1.11 (2) により, V のベクトル $\boldsymbol{v}_{j+1}$ で, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_{j+1}$ が 1 次独立であるものがとれる. 仮定から V の 1 次独立なベクトルの最大個数は n 以下であるから, このようにしてベクトルを一つずつ付け加えることにより, いずれは 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ $(k \leqq n)$ で V を生成するものが得られる. □

1.4 ベクトル空間の次元

n 次元数ベクトル空間においては, 基本ベクトルとよばれる座標軸方向の長さ 1 のベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ があり, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の第 j 成分を x_j とすれば $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ と表せた. ところが, 例えば, $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x - y + z = 0 \right\}$ の場合は, $\boldsymbol{R}^3$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ のいずれも W には属さない. そこで, 本節では, n 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^n$ における基本ベクトルの概念を一般化した「基底」とよばれる概念を導入し, 有限個のベクトルで生成されるベクトル空間には基底が存在することを示す. さらに, 基底の概念を用いることによってベクトル空間の次元を定義して, いくつかの基本的な結果を証明する.

定義 1.8 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立であり, かつ V を生成するとき, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の**基底**であるという.

例 1.6 (1) $\boldsymbol{K}^n$ における基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は $\boldsymbol{K}^n$ の基底である. これを $\boldsymbol{K}^n$ の**標準基底**という.

(2) $\boldsymbol{R}^2$ において, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{R}^2$ の基底となる. 実際, 1 次独立となることは明らかであり, また, 任意の $\boldsymbol{R}^2$ のベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x-y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ となる.

(3) $\boldsymbol{R}^3$ において, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底となる. 実際, 1 次独立となることは明らかであり, また, 任意の $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ について, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{2x-y+z}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{y+z}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ となる.

(4) 例 1.2 (3) におけるベクトル空間 $P_n(\boldsymbol{K})$ は $1, x, x^2, \ldots, x^n$ を基底にもつ.

(5) $\boldsymbol{K}^3$ の部分空間 $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y, z \in \boldsymbol{K},\ x - y + z = 0 \right\}$ の一つの基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる.

(6) n 個の要素からなる有限集合 $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ が与えられたとき, 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して関数 $f_i : S \to \boldsymbol{K}$ を $f_i(s_j) = \begin{cases} 1 & (j = i) \\ 0 & (j \neq i) \end{cases}$ で定めれば, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ は例 1.2 (4) で与えたベクトル空間 $F(S)$ の基底である.

注意 1.5 例 1.2 (3) におけるベクトル空間 $P(\boldsymbol{K})$ や, 有限集合でない集合 S に対して例 1.2 (4) で与えたベクトル空間 $F(S)$, および例 1.2 (5) におけるベクトル空間 $C^r(a, b)$ は有限個のベクトルによって生成されないため, 定義 1.8 の意味での基底は存在しない.

問 1.13 斉次連立 1 次方程式 $\begin{cases} -2x+y+z-w=0 \\ x+y-z+2w=0 \\ x-2y-w=0 \\ 3x-2z+3w=0 \end{cases}$ の解空間の基底を 1 組求めよ.

ベクトル空間の基底の存在に関しては次の基本的な定理がある.

定理 1.13 V が n 個のベクトルで生成されているならば, n 個以下のベクトルからなる V の基底が存在する.

証明 仮定と系 1.10 により, V の $n+1$ 個以上のベクトルはつねに 1 次従属である. したがって, 定理 1.12 によって n 個以下のベクトルからなる V の基底が存在する. □

次の命題も重要である.

命題 1.14 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底であるためには, V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し, $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ をみたす $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{K}$ がただ一通りに定まることが必要十分である.

証明 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底ならば, これらは V を生成するため任意の $\boldsymbol{x} \in V$ は $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ と表される. もし $\boldsymbol{x}$ が

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = x'_1\boldsymbol{v}_1 + x'_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x'_n\boldsymbol{v}_n$$

と 2 通りに表されるならば, $(x_1 - x'_1)\boldsymbol{v}_1 + (x_2 - x'_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (x_n - x'_n)\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ となるため, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次独立性から $x_j = x'_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ が得られる.

逆に, V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し, $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ をみたす $x_1, x_2, \ldots, x_n$ がただ一通りに定まるとする. このとき, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V を生成する. $x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ とすると $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{K}$ は $0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ より $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ である. よって, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である. □

以後, とくに断らない限り有限個のベクトルからなる基底が存在するベクトル空間のみを扱うことにする.

さて, 系 1.10 と基底の定義からただちに, 次のことがわかる.

命題 1.15 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ がともに V の基底ならば $n = m$ である.

上の結果により, ベクトル空間の次元を次のように定義することができる.

定義 1.9 V が n 個のベクトルからなる基底をもつとき, V の**次元**は n であるといい, V の次元を $\dim V$ で表す.

あらかじめ与えられた 1 次独立なベクトルを含む基底がとれることが示す次の定理は重要である.

定理 1.16 V を $\boldsymbol{K}$ 上の n 次元ベクトル空間とする. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を 1 次独立な V のベクトルとすれば $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を含む V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が存在する.

証明 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が V を生成しないならば, 補題 1.11 (2) により, V のベクトル $\boldsymbol{v}_{k+1}$ で $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}$ が 1 次独立であるものがとれる. 系 1.10 から V の 1 次独立なベクトルの最大個数は m 以下であるから, このようにしてベクトルを一つずつ付け加えることにより, いずれは 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ $(m \leqq n)$ で V を生成するものが得られる. 基底の定義より, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ は V と基底となるので命題 1.15 より, $m = n$ である. □

例 1.7 (1) $\boldsymbol{K}^n$ は基本ベクトルからなる標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ をもつため $\dim \boldsymbol{K}^n = n$ である.

(2) 例 1.2 (3) におけるベクトル空間 $P_n(\boldsymbol{K})$ は $n+1$ 個のベクトルからなる基底 $1, x, x^2, \ldots, x^n$ をもつため $\dim P_n(\boldsymbol{K}) = n+1$ である.

(3) 例 1.6 (5) のベクトル空間 W は 2 個のベクトルからなる基底をもつため $\dim W = 2$ である.

(4) $\boldsymbol{R}$ で定義された 2 回微分可能な実数値関数全体のなすベクトル空間を $C^2(\boldsymbol{R})$ とする．2 階微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -y$ の解全体からなる集合を S とすれば, $\cos x$, $\sin x$ の 2 次導関数はそれぞれ $-\cos x$, $-\sin x$ であることから, S は $\cos x$, $\sin x$ を含む．もし $a\cos x + b\sin x = 0$ $(a, b \in \boldsymbol{R})$ がすべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して成り立てば, とくに $x = 0, \frac{\pi}{2}$ を代入することによって $a = b = 0$ が得られるため $\cos x, \sin x$ は 1 次独立である．さらに, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -y$ の任意の解は $\cos x, \sin x$ の 1 次結合で表されることが知られているため, S は 2 つのベクトル $\cos x, \sin x$ を基底とする $C^2(\boldsymbol{R})$ の部分空間である．したがって $\dim S = 2$ である．

定理 1.17 V が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ で生成されているとする．$\boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_n}$ $(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqq m)$ が 1 次独立で, すべての $j = 1, 2, \ldots, m$ に対して $\boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_n}, \boldsymbol{v}_j$ が 1 次従属ならば $\boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_n}$ は V の基底である．

証明 番号を付け替えることによって $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立で, すべての $j = n+1, n+2, \ldots, m$ に対して $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_j$ が 1 次従属であるとする．このとき, $\sum\limits_{i=1}^{n} c_{ij}\boldsymbol{v}_i + c_j\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0}$ をみたす $c_{1j}, c_{2j}, \ldots, c_{nj}, c_j \in \boldsymbol{K}$ で少なくとも一つは 0 でないものがある．もし $c_j = 0$ ならば $\sum\limits_{i=1}^{n} c_{ij}\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$ となるため $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次独立性から $c_{1j} = c_{2j} = \cdots = c_{nj} = 0$ となって仮定に反する．ゆえに $c_j \neq 0$ であるから $a_{ij} = -\frac{c_{ij}}{c_j}$ とおくと $\boldsymbol{v}_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{v}_i$ が成り立つ．

仮定から V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i\boldsymbol{v}_i$ と表されるが, この式に $j = n+1, n+2, \ldots, m$ に対して上式を代入すれば, $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合として表される．したがって $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V を生成するため, これらは V の基底である． □

注意 1.6 上の定理により V を生成するベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ の中で 1 次独立であるベクトルからなる極大な部分集合は V の基底である．ここで「極大」とは「一つでも他のベクトルを付け加えれば 1 次従属になってしまう」という意味である．したがって, V の次元はこのような極大な部分集合の要素の個数である．命題 1.15 で示したように V の基底を構成するベクトルの個数は一定であるから, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ の中で 1 次独立なベクトルからなる極大な部分集合の要素の個数は一定である．ゆえに V **の次元は** V **を生成するベクトル** $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ **の中で 1 次独立であるベクトルの最大個数**である．

また, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ の中で $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が 1 次独立ならば, $\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{v}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ のうちからベクトル $\boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_l}$ を選んで, 上で述べた意味で 1 次独立であるベクトルからなる極大な部分集合 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_l}$ をつくると, これらは V の基底になる．

例題 1.1 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in \boldsymbol{K}^3$ を $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で定める．$\boldsymbol{K}^3$ の部分空間 $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ の基底を 1 組求めよ．

解 $x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2 + z\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ とおくと, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ を係数行列とする x, y, z についての斉次連立 1 次方程式が得られる．この解は $x = t$, $y = t$, $z = -t$ ($t \in \boldsymbol{K}$ は任意) で与えられるため, とくに $t = 1$ とすることにより $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次従属であることがわかる．

また, $x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ をみたす x, y を求めるために, 上と同様に連立 1 次方程式を考えるのであるが, この解は $x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2 + z\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ で $z = 0$ をみたす x, y にほかならない．

したがって上の結果から, そのような x, y は $x = y = 0$ に限るため, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は 1 次独立である．よって $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ の基底である． □

問 1.14 $\boldsymbol{K}^4$ の部分空間 $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle$ の基底を 1 組求めよ.

部分空間の次元に関しては, 次の結果がある.

定理 1.18 V を $\boldsymbol{K}$ 上の n 次元ベクトル空間, W を V の部分空間とする. このとき $\dim W \leqq \dim V$ であり, 等号が成立するのは $W = V$ の場合に限る.

証明 $\dim V = n$ とおくと, 系 1.10 により V の $n+1$ 個以上のベクトルは 1 次従属である. W は V の部分集合であり, W の $n+1$ 個以上のベクトルは 1 次従属であるから, 定理 1.12 により, W には n 個以下のベクトルからなる基底 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ $(m = \dim W)$ が存在して $\dim W = m \leqq n = \dim V$ が成り立つ.

$\dim W = \dim V$ のとき, もし W に属さない $\boldsymbol{x} \in V$ が存在すれば $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ の 1 次結合で表されないため, 補題 1.11 (1) により $m+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m, \boldsymbol{x}$ は 1 次独立である. ふたたび系 1.10 により $m+1 \leqq n$ であるが, これは $n = \dim V = \dim W = m$ と矛盾する. ゆえに V のすべてのベクトルは W に属するため $W = V$ である. □

上の定理の一つの応用として次を示す.

定理 1.19 $\dim V = n$ とするとき, V の n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立であるか または V を生成すれば, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基底になる.

証明 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立な場合, $W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ とおくと, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は W の基底であるから $\dim W = n = \dim V$ である. よって, 定理 1.18 から $W = V$ となり, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基底である.

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V を生成すると仮定する. もし, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立でなければ, 命題 1.8 により, 番号を付け直せば $\boldsymbol{v}_n$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}$ の 1 次結合 $\boldsymbol{v}_n = \sum_{j=1}^{n-1} c_j \boldsymbol{v}_j$ であるとしてよい. V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n-1} x_j \boldsymbol{v}_j + x_n \boldsymbol{v}_n$ と表されるが, これに上式を代入すれば, $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}$ の 1 次結合として表せる. したがって V は $n-1$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}$ によって生成される. これは $\dim V = n$ であることに矛盾するので $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立であり, V の基底になることがわかる. □

1.5 部分空間の和と直和

部分空間の共通部分は問 1.9 でみたように部分空間であるが, 部分空間の合併集合は一般には部分空間にならないので, 合併集合に代わるものとして**部分空間の和**を以下のように定義する.

定義 1.10 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間, W_1, W_2 を V の部分空間とする. V の部分集合 $W_1 + W_2$ を

$$\{\, \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \mid \boldsymbol{w}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{w}_2 \in W_2 \,\}$$

によって定め, W_1 と W_2 の**和**とよぶ. さらに一般には, $W_1, W_2, \ldots, W_k$ を V の部分空間とするとき, V の部分集合 $W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ を

$$\left\{ \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{w}_j \;\middle|\; \boldsymbol{w}_j \in W_j \ (j = 1, 2, \ldots, k) \right\}$$

によって定め, $W_1, W_2, \ldots, W_k$ の**和**とよぶ.

問 1.15 (1) $W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ は V の部分空間であり, 各 W_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ が V の部分空間 Z に含まれるならば $W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ は Z に含まれることを示せ.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in V$, $1 \leqq k \leqq m-1$ のとき, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle + \langle \boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{v}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle.$$

注意 1.7 上の問 1.15 (1) により, $W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ は部分空間 $W_1, W_2, \ldots, W_k$ をすべて含む V の部分空間のうちで最小のものであるといえる.

2 つの部分空間の和の次元については次の結果がある.

定理 1.20 W_1, W_2 を V の部分空間とするとき, 次の関係式が成り立つ.

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

証明 $n = \dim(W_1 \cap W_2)$ とおき, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ を $W_1 \cap W_2$ の基底とする. $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_k$ が W_1 の基底, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l$ が W_2 の基底になるように $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_k \in W_1$, $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l \in W_2$ を選ぶことができる (定理 1.16).

任意の $\boldsymbol{p} \in W_1 + W_2$ は $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{u} \in W_1$, $\boldsymbol{v} \in W_2$) と表され, $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_k$ の 1 次結合, $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l$ の 1 次結合であるから, $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_k, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l$ の 1 次結合になる. ゆえに, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_k, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l$ は $W_1 + W_2$ を生成する.

ここで,

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n + b_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + b_k\boldsymbol{y}_k + c_1\boldsymbol{z}_1 + \cdots + c_l\boldsymbol{z}_l = \boldsymbol{0}$$

が成り立つとする. このとき,

$$c_1\boldsymbol{z}_1 + c_2\boldsymbol{z}_2 + \cdots + c_l\boldsymbol{z}_l \in W_2, \quad a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n + b_1\boldsymbol{y}_1 + b_2\boldsymbol{y}_2 + \cdots + b_k\boldsymbol{y}_k \in W_1$$

であるから

$$c_1\boldsymbol{z}_1 + \cdots + c_l\boldsymbol{z}_l = -(a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n + b_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + b_k\boldsymbol{y}_k) \in W_1 \cap W_2$$

である. したがって

$$c_1\boldsymbol{z}_1 + c_2\boldsymbol{z}_2 + \cdots + c_l\boldsymbol{z}_l = x_1\boldsymbol{x}_1 + x_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{x}_n$$

と表されるが, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l$ は 1 次独立であるから $c_1 = c_2 = \cdots = c_l = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ が得られる. このとき,

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n + b_1\boldsymbol{y}_1 + b_2\boldsymbol{y}_2 + \cdots + b_k\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{0}$$

であるから $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_k$ の 1 次独立性により $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0$ である. ゆえに $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$,$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_k$,$\boldsymbol{z}_1$,$\boldsymbol{z}_2$,..., $\boldsymbol{z}_l$ は 1 次独立である.

以上から $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$,$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_k$,$\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l$ は $W_1 + W_2$ の基底になるため

$$\dim(W_1 + W_2) = n + k + l = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

が成り立つ. □

上の結果を一般化すれば次のようになる.

系 1.21 V の部分空間 $W_1, W_2, \ldots, W_k$ に対し, 次の関係式が成り立つ.

$$\dim(W_1 + W_2 + \cdots + W_k) = \sum_{i=1}^{k} \dim W_i - \sum_{i=1}^{k-1} \dim((W_1 + W_2 + \cdots + W_i) \cap W_{i+1})$$

問 1.16 定理 1.20 を用いて, k による数学的帰納法により系 1.21 を証明せよ.

次に, **部分空間の直和**を定義するが, まず 2 つの部分空間の直和から定義をする.

定義 1.11 W_1, W_2 を V の部分空間とする．次の 2 つの条件 (1), (2) がみたされるとき, V は W_1 と W_2 の**直和**であるという．

(1) $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ をみたす $\boldsymbol{v}_1 \in W_1, \boldsymbol{v}_2 \in W_2$ は $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ に限る．

(2) $V = W_1 + W_2$.

V が W_1 と W_2 の直和であることを $V = W_1 \oplus W_2$ で表す．

上の定義における一つ目の条件について考える．

命題 1.22 V の部分空間 W_1, W_2 に関して以下の条件 (1)〜(4) は同値である．

(1) $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ をみたす $\boldsymbol{v}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in W_2$ は $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ に限る．

(2) $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ が W_1 の 1 次独立なベクトルで, $\boldsymbol{w}_{k+1}, \boldsymbol{w}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_l$ が W_2 の 1 次独立なベクトルならば $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_l$ は 1 次独立である．

(3) $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ を W_1 の基底, $\boldsymbol{w}_{k+1}, \boldsymbol{w}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{k+l}$ を W_2 の基底とすると, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{k+l}$ は $W_1 + W_2$ の基底である．

(4) $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$.

(5) $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$.

証明 (1)$\Longrightarrow$(2) $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{w}_{k+1}, \boldsymbol{w}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{k+l}$ の 1 次独立性を示すため,

$$c_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{w}_k + c_{k+1}\boldsymbol{w}_{k+1} + \cdots + c_{k+l}vw_{k+l} = \boldsymbol{0}$$

が成り立つとする．

$$\boldsymbol{v}_1 = c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{w}_k, \quad \boldsymbol{v}_2 = c_{k+1}\boldsymbol{w}_{k+1} + c_{k+2}\boldsymbol{w}_{k+2} + \cdots + c_{k+l}\boldsymbol{w}_{k+l}$$

とおけば $\boldsymbol{v}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in W_2$ かつ $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ が成り立つため, 仮定により $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ である．よって $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の 1 次独立性により $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$, また $\boldsymbol{w}_{k+1}, \boldsymbol{w}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{k+l}$ の 1 次独立性により $c_{k+1} = c_{k+2} = \cdots = c_l = 0$ である．以上から $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \ldots, \boldsymbol{w}_{k+l}$ は 1 次独立である．

(2)$\Longrightarrow$(3) $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{w}_{k+1}$, $\boldsymbol{w}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{k+l}$ が $W_1 + W_2$ を生成することは明らかで, 仮定からこれらは 1 次独立である．

(3)$\Longrightarrow$(4) 次元の定義より明らかである．

(4)$\Longrightarrow$(5) 仮定 $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$ と定理 1.20 から $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$ が得られるため, $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ である．

(5)$\Longrightarrow$(1) $\boldsymbol{v}_1 \in W_1, \boldsymbol{v}_2 \in W_2$ は $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ をみたすとすれば $\boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{v}_2 \in W_2$ であるから $\boldsymbol{v}_1 \in W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ となる．よって $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$ となり, $\boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$ である． □

例 1.8 (1) $\boldsymbol{R}^2$ において W_1, W_2 を原点を通る相異なる直線とすれば, $\boldsymbol{R}^2$ は W_1 と W_2 の直和である．

(2) $\boldsymbol{R}^3$ において W_1 を原点を通る平面とし, W_2 を原点を通る直線で W_1 に含まれないものとすれば, $\boldsymbol{R}^3$ は W_1 と W_2 の直和である．

一般に, n 個の部分空間の直和を次のように定義する．

定義 1.12 $W_1, W_2, \ldots, W_k$ を V の部分空間とする．次の条件 (1), (2) がみたされるとき, V は $W_1, W_2, \ldots, W_k$ の直和であるという．

(1) $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ をみたす $\boldsymbol{v}_i \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ は $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \cdots = \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ に限る．

(2) $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$.

V が $W_1, W_2, \ldots, W_k$ の直和であることを $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$ で表す.

問 1.17 V が $W_1, W_2, \ldots, W_k$ の直和であるためには, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_k$ をみたす $\boldsymbol{x}_i \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ がただ一つ存在することが必要十分であることを示せ.

命題 1.22 は次のように一般化される.

命題 1.23 V の部分空間 $W_1, W_2, \ldots, W_k$ に対し, 以下の条件 (1)〜(4) は同値である.

(1) $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ をみたす $\boldsymbol{v}_i \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ は $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \cdots = \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ に限る.

(2) 各 $i = 1, 2, \ldots, k$ に対し $\boldsymbol{w}_{s_{i-1}+1}, \boldsymbol{w}_{s_{i-1}+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_i}$ $(0 = s_0 \leqq s_1 \leqq s_2 \leqq \cdots \leqq s_k)$ が W_i の 1 次独立なベクトルならば $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_k}$ は 1 次独立である.

(3) 各 $i = 1, 2, \ldots, k$ に対し $\boldsymbol{w}_{s_{i-1}+1}, \boldsymbol{w}_{s_{i-1}+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_i}$ $(0 = s_0 \leqq s_1 \leqq s_2 \leqq \cdots \leqq s_k)$ が W_i の基底ならば, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_k}$ は $W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ の基底である.

(4) $\dim(W_1 + W_2 + \cdots + W_k) = \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_k$.

(5) $i = 1, 2, \ldots, k-1$ に対し $(W_1 + W_2 + \cdots + W_i) \cap W_{i+1} = \{\boldsymbol{0}\}$.

証明 (1)$\Longrightarrow$(2) $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_k}$ の 1 次独立性を示すために, $c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + c_{s_k}\boldsymbol{w}_{s_k} = \boldsymbol{0}$ が成り立つとする. $\boldsymbol{v}_i = \sum\limits_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} c_j\boldsymbol{w}_j$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ とおけば $\boldsymbol{v}_i \in W_i$ かつ $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ が成り立つため, 仮定により $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \cdots = \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ である. よって各 $i = 1, 2, \ldots, k$ に対して $\sum\limits_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} c_j\boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{0}$ であるから, $\boldsymbol{w}_{s_{i-1}+1}, \boldsymbol{w}_{s_{i-1}+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_i}$ の 1 次独立性により $c_j = 0$ $(s_{i-1}+1 \leqq j \leqq s_i)$ である. したがって, $c_1 = c_2 = \cdots = c_{s_k} = 0$ となるため $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_l$ は 1 次独立である.

(2)$\Longrightarrow$(3) 仮定から $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_k}$ は 1 次独立である. 任意の $\boldsymbol{x} \in W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ は $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{i=1}^{k} \boldsymbol{x}_i$ $(\boldsymbol{x}_i \in W_i)$ と表され, 各 $\boldsymbol{x}_i$ は $\boldsymbol{w}_{s_{i-1}+1}, \boldsymbol{w}_{s_{i-1}+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_i}$ の 1 次結合であるから, $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_k}$ の 1 次結合である. したがって, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_k}$ は $W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ を生成する.

(3)$\Longrightarrow$(4) 次元の定義より明らかである.

(4)$\Longrightarrow$(5) $(W_1 + W_2 + \cdots + W_j) \cap W_{j+1} \neq \{\boldsymbol{0}\}$ となる j が存在すれば, $\dim((W_1 + W_2 + \cdots + W_j) \cap W_{j+1}) > 0$ であるから, 系 1.21 により $\dim(W_1 + W_2 + \cdots + W_k) < \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_k$ が得られる.

(5)$\Longrightarrow$(1) $\boldsymbol{v}_i \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ は $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ をみたすとする. もし $\boldsymbol{v}_i \neq \boldsymbol{0}$ となる i があれば, そのような i のうちで最大のものを j とする. このとき $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0}$ であるから $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_{j-1} = -\boldsymbol{v}_j$ が成り立つが, この左辺は $W_1 + W_2 + \cdots + W_{j-1}$ に属するため, $-\boldsymbol{v}_j \in (W_1 + W_2 + \cdots + W_{j-1}) \cap W_j = \{\boldsymbol{0}\}$ である. これは $\boldsymbol{v}_j \neq \boldsymbol{0}$ であるという仮定と矛盾する. ゆえに $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \cdots = \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ である. □

1.6 部分分数展開への応用例

最後に, これまでに学んだことの数学的応用例の一つとして, 分数関数の不定積分を求める際などに用いられる部分分数分解についての結果を示すことにするが, そのために, まず $n-1$ 次以下の実数係数の多項式全体からなる $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間 $P_{n-1}(\boldsymbol{R})$ (例 1.2 (3) 参照) の基底を定義する.

x^n の係数が 1 である x の実数係数の n 次多項式 $f(x)$ が与えられ, 実数の範囲で

$$f(x) = (x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots(x-a_r)^{m_r}(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}(x^2+b_2x+c_2)^{n_2}\cdots(x^2+b_sx+c_s)^{n_s}$$

(ただし $a_1, a_2, \ldots, a_r$ は相異なる実数, $(b_1, c_1), (b_2, c_2), \ldots, (b_s, c_s)$ は相異なる実数の組であり, 各 $j = 1, 2, \ldots, s$ について $b_j^2 - 4c_j < 0$ が成り立つとする) と因数分解されているとする. このとき, 各 $i = 1, 2, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, s$ に対して, $f(x)$ は $(x - a_i)^{m_i}$, $(x^2 + b_j x + c_j)^{n_j}$ を因数にもつため, x の $n - m_i$ 次多項式 $F_i(x)$ と $n - 2n_j$ 次多項式 $G_j(x)$ を

$$F_i(x) = \frac{f(x)}{(x - a_i)^{m_i}}, \qquad G_j(x) = \frac{f(x)}{(x^2 + b_j x + c_j)^{n_j}}$$

によって定義する.

補題 1.24 $(x - a_i)^k F_i(x)$ $(1 \leqq i \leqq r,\ 0 \leqq k < m_i)$, $(x^2 + b_j x + c_j)^l G_j(x)$, $x(x^2 + b_j x + c_j)^l G_j(x)$ $(1 \leqq j \leqq s,\ 0 \leqq l < n_j)$ を要素とする多項式の集合を S とすれば, S は $P_{n-1}(\boldsymbol{R})$ の基底である.

証明 例 1.7 (2) でみたように $\dim P_{n-1}(\boldsymbol{R}) = n$ であり, 集合 S の要素の個数も

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r + 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_s) = n$$

であるから, 定理 1.19 により, S に含まれる多項式が 1 次独立であることを示せば, S は $P_{n-1}(\boldsymbol{R})$ の基底になることがわかる. そこで

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{m_i - 1} \lambda_{ik} (x - a_i)^k F_i(x) + \sum_{j=1}^{s} \sum_{l=0}^{n_j - 1} \mu_{jl} (x^2 + b_j x + c_j)^l G_j(x) + \sum_{j=1}^{s} \sum_{l=0}^{n_j - 1} \nu_{jl} x (x^2 + b_j x + c_j)^l G_j(x) = 0 \tag{1.1}$$

とおく. 各 $p = 1, 2, \ldots, r$ に対し, $i \neq p$ ならば $F_i(x)$ は $(x - a_p)^{m_p}$ を因数にもち, すべての $j = 1, 2, \ldots, s$ に対し $G_j(x)$ は $(x - a_p)^{m_p}$ を因数にもつため,

$$(x - a_p)^{m_p} \varphi(x) = \sum_{i \neq p} \sum_{k=0}^{m_i - 1} \lambda_{ik} (x - a_i)^k F_i(x) + \sum_{j=1}^{s} \sum_{l=0}^{n_j - 1} \mu_{jl} (x^2 + b_j x + c_j)^l G_j(x) + \sum_{j=1}^{s} \sum_{l=0}^{n_j - 1} \nu_{jl} x (x^2 + b_j x + c_j)^l G_j(x)$$

をみたす多項式 $\varphi(x)$ がある. このとき, (1.1) から

$$\sum_{k=0}^{m_p - 1} \lambda_{pk} (x - a_p)^k F_p(x) + (x - a_p)^{m_p} \varphi(x) = 0 \tag{1.2}$$

ここで, $t = 0, 1, \ldots, m_p - 1$ に対し $\lambda_{pt} = 0$ が成り立つことを, t による帰納法で示す. $k \leqq t - 1$ $(0 \leqq t \leqq m_p - 1)$ ならば $\lambda_{pk} = 0$ であると仮定すれば (1.2) の両辺は $(x - a_p)^t$ で割れるため

$$\sum_{k=t}^{m_p - 1} \lambda_{pk} (x - a_p)^{k-t} F_p(x) + (x - a_p)^{m_p - t} \varphi(x) = 0$$

が成り立つ. $F_p(x)$ は $x - a_p$ では割りきれないため $F_p(a_p) \neq 0$ であることに注意すれば, 上式の x に a_p を代入して $\lambda_{pt} = 0$ が得られ, 帰納法が進む. ゆえに, すべての $i = 1, 2, \ldots, r$; $k = 0, 1, \ldots, m_i - 1$ に対し $\lambda_{ik} = 0$ が成り立つため, (1.1) から次の等式が得られる.

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{l=0}^{n_j - 1} (\mu_{jl} + \nu_{jl} x)(x^2 + b_j x + c_j)^l G_j(x) = 0 \tag{1.3}$$

ここで, 各 $q = 1, 2, \ldots, s$ に対し, $j \neq q$ ならば $G_j(x)$ は $(x^2 + b_q x + c_q)^{n_q}$ を因数にもつため,

$$(x^2 + b_q x + c_q)^{n_q} \psi(x) = \sum_{j \neq q} \sum_{l=0}^{n_j - 1} (\mu_{jl} + \nu_{jl} x)(x^2 + b_j x + c_j)^l G_j(x)$$

をみたす多項式 $\psi(x)$ がある. このとき, (1.3) の等式から

$$\sum_{l=0}^{n_q - 1} (\mu_{ql} + \nu_{ql} x)(x^2 + b_q x + c_q)^l G_q(x) + (x^2 + b_q x + c_q)^{n_q} \psi(x) = 0 \tag{1.4}$$

を得る．仮定から 2 次方程式 $x^2+b_qx+c_q=0$ は虚数解をもち，その一つを α_q とすれば，もう一方は $\overline{\alpha}_q$ である．

任意の $t=0,1,\ldots,n_q-1$ に対し $\mu_{qt}=\nu_{qt}=0$ が成り立つことを t による帰納法で示す．$l \leqq t-1$ $(0 \leqq t \leqq n_q-1)$ ならば $\mu_{ql}=\nu_{ql}=0$ であると仮定すれば，(1.4) の両辺は $(x^2+b_qx+c_q)^t$ で割れるため，

$$\sum_{l=t}^{n_q-1}(\mu_{ql}+\nu_{ql}x)(x^2+b_qx+c_q)^{l-t}G_q(x)+(x^2+b_qx+c_q)^{n_q-t}\psi(x)=0$$

が成り立つ．$G_q(x)$ は $x^2+b_qx+c_q$ では割り切れないため $G_q(\alpha), G_q(\overline{\alpha}) \neq 0$ であることに注意すれば，上式の x に $\alpha_q, \overline{\alpha}_q$ を代入して $\mu_{qt}+\nu_{qt}\alpha=\mu_{qt}+\nu_{qt}\overline{\alpha}=0$ が得られる．このことと α は虚数であることから $\mu_{qt}=\nu_{qt}=0$ が成り立ち，帰納法が進む．

以上から，すべての $i=1,2,\ldots,r;\ k=0,1,\ldots,m_i-1;\ j=1,2,\ldots,s;\ l=0,1,\ldots,n_s-1$ に対し $\lambda_{ik}=\mu_{jl}=\nu_{jl}=0$ となるため，S に含まれる多項式は 1 次独立である． □

定理 1.25 x の実数係数の n 次多項式 $f(x)$ が

$$f(x)=(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots(x-a_r)^{m_r}(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}(x^2+b_2x+c_2)^{n_2}\cdots(x^2+b_sx+c_s)^{n_s}$$

(ただし $a_1,a_2,\ldots,a_r$ は相異なる実数，$(b_1,c_1),(b_2,c_2),\ldots,(b_s,c_s)$ は相異なる実数の組であり，各 $j=1,2,\ldots,s$ について $b_j^2-4c_j<0$ が成り立つとする.) と因数分解されているとき，$n-1$ 次以下の任意の実数係数多項式 $g(x)$ に対して

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{A_{ik}}{(x-a_i)^k}+\sum_{j=1}^{s}\sum_{l=1}^{n_j}\frac{B_{jl}x+C_{jl}}{(x^2+b_jx+c_j)^l}$$

をみたす実数 A_{ik} $(1 \leqq i \leqq r;\ 1 \leqq k \leqq m_i)$, B_{jl}, C_{jl} $(1 \leqq j \leqq s;\ 1 \leqq l \leqq n_j)$ は一通りに定まる．

証明 上の補題により

$$g(x)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_i-1}A_{im_i-k}(x-a_i)^kF_i(x)+\sum_{j=1}^{s}\sum_{l=0}^{n_j-1}B_{jn_j-l}x(x^2+b_jx+c_j)^lG_j(x)+\sum_{j=1}^{s}\sum_{l=0}^{n_j-1}C_{jn_j-l}(x^2+b_jx+c_j)^lG_j(x)$$

をみたす実数 A_{ik} $(1 \leqq i \leqq r;\ 1 \leqq k \leqq m_i)$, B_{jl}, C_{jl} $(1 \leqq j \leqq s;\ 1 \leqq l \leqq n_j)$ は一通りに定まる．多項式 $F_i(x)$, $G_i(x)$ の定義から

$$\frac{(x-a_i)^kF_i(x)}{f(x)}=\frac{(x-a_i)^kf(x)}{(x-a_i)^{m_i}f(x)}=\frac{1}{(x-a_i)^{m_i-k}},$$
$$\frac{(x^2+b_jx+c_j)^lG_j(x)}{f(x)}=\frac{(x^2+b_jx+c_j)^lf(x)}{(x^2+b_jx+c_j)^{n_j}f(x)}=\frac{1}{(x^2+b_jx+c_j)^{n_j-l}}$$

が成り立つため，上式の両辺を $f(x)$ で割ることにより，目標の等式

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_i-1}\frac{A_{im_i-k}}{(x-a_i)^{m_i-k}}+\sum_{j=1}^{s}\sum_{l=0}^{n_j-1}\frac{B_{jn_j-l}x+C_{jn_j-l}}{(x^2+b_jx+c_j)^{n_j-l}}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{A_{ik}}{(x-a_i)^k}+\sum_{j=1}^{s}\sum_{l=1}^{n_j}\frac{B_{jl}x+C_{jl}}{(x^2+b_jx+c_j)^l}$$

が得られる． □

注意 1.8 $f(x)$ が複素数係数の n 次多項式で，x^n の係数が 1 ならば代数学の基本定理 (定理 1.4) から，複素数の範囲で $f(x)=(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\ldots(x-a_r)^{m_r}$ (ただし $a_1,a_2,\ldots,a_r$ は相異なる複素数) と 1 次式のみの積に因数分解されるため，$n-1$ 次以下の任意の複素数係数多項式 $g(x)$ に対して $\frac{g(x)}{f(x)}=\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{k=1}^{m_i}\frac{A_{ik}}{(x-a_i)^k}$ をみたす複素数 A_{ik} $(1 \leqq i \leqq r)$ は一通りに定まることが示される．

第 1 章の演習問題

1.1 z, w を 0 でない複素数とする．

(1) 次の 3 つは同値であることを示せ．

(i) 複素平面上において $0, z, w$ は同一直線上にない.　(ii) $z\bar{w} - \bar{z}w \neq 0$　(iii) $\frac{z}{w}$ の虚部は 0 でない.

(2) 複素平面上において $0, z, w$ は同一直線上にないとする. このとき, 複素平面上において $0, z, w$ の 3 つの複素数から等距離にある複素数, を z, w および, それらの共役複素数 $\bar{z}, \bar{w}$ を用いて表せ.

1.2 (1) t が実数全体を動くとき, 複素平面における $\frac{1}{1+ti}$ の軌跡を求めよ.
(2) p を絶対値 r (ただし $r \neq 0$), 偏角 θ の複素数とし, 複素平面において p が表す点を P, 原点を O とする. さらに P をとおり, 直線 OP に垂直な直線を l とする. 複素数 z が l 上の点全体を動くとき, $\frac{1}{z}$ の軌跡を求めよ.

1.3 x の n 次多項式 $p_n(x)$ を $p_n(x) = \frac{1}{n!}x(x-1)\cdots(x-n+1)$ で定義する.
(1) $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_m(x)$ (ただし $p_0(x) = 1$ とする) は, 例 1.2 (3) で定義したベクトル空間 $P_m(\boldsymbol{K})$ の基底であることを示せ.
(2) x^2, x^3, x^4 を $p_0(x), p_1(x), p_3(x), p_4(x)$ の 1 次結合で表せ.

1.4 V のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_l$ に対し, $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \rangle \subset \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_l \rangle$ が成り立つためには, 各 $\boldsymbol{x}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ が $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_l$ の 1 次結合になることが必要十分であることを示せ.

1.5 実数全体で定義された実数値連続関数全体からなるベクトル空間の中で, $1, \sin x, \sin 2x, \ldots, \sin kx, \cos x, \cos 2x4, \ldots 4, \cos kx$ は 1 次独立であることを示せ.

1.6 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ は 1 次独立な V のベクトルとする. $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ は各 $j = 1, 2, \ldots, n$ に対し, $\boldsymbol{w}_j = a_{1j}\boldsymbol{v}_1 + a_{2j}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{v}_m$ と $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ の 1 次結合で表されるとき, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ が 1 次独立であるためには, 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = 0 \\ & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}$$

が $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 以外の解をもたないことが必要十分であることを示せ.

1.7 $A = (a_{ij})$ を $\boldsymbol{K}$ の要素を成分とする k 次正則行列とする. $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V の k 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ で k 個の関係式 $\sum_{i=1}^{k} a_{ij}\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ をみたすものは $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \cdots = \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ に限ることを証明せよ.

1.8 D をすべての成分が相異なる n 次対角行列とするとき $AD = DA$ をみたす n 次正方行列全体 A からなる $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{K})$ (例 1.2 (2) 参照) の部分空間の次元を求めよ.

1.9 $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{K})$ の部分集合 $S(n; \boldsymbol{K})$, $A(n; \boldsymbol{K})$ を $S(n; \boldsymbol{K}) = \{A |\, A \in \mathrm{M}_n(\boldsymbol{K}),\ {}^tA = A\}$, $A(n; \boldsymbol{K}) = \{A |\, A \in \mathrm{M}_n(\boldsymbol{K}),\ {}^tA = -A\}$ で定める.
(1) $S(n; \boldsymbol{K})$, $A(n; \boldsymbol{K})$ はともに $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{K})$ の部分空間であることを示し, それぞれの次元を求めよ.
(2) $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{K}) = S(n; \boldsymbol{K}) \oplus A(n; \boldsymbol{K})$ であることを示せ.

1.10 (1) V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間, W を V の部分空間とする. V の部分空間 Z で $V = W \oplus Z$ となるものが存在することを示せ. このような部分空間 Z を W の**補空間**という.

(2) $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間 $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ の補空間を一つ求めよ.

第2章　ベクトル空間と1次写像

前章でベクトル空間の概念を一般化して, 基底や次元の概念について学んできたが, 本章では, 一般化されたベクトル空間の間の1次写像の基礎的な理論について学ぶ. 第1節では1次写像の定義を行い, 基本的な性質について論じる. さらにベクトル空間の「同型」という概念を定義して, 2つのベクトル空間が同型であるためには, それらの次元が等しいことが必要十分であることを示す. 第2節では, まず1次写像に対して「核」,「像」とよばれるベクトル空間を導入する. 次に1次写像の階数を定義して, 以前定義した行列 A の階数が A から定まる1次写像 T_A の階数に一致することを示す. また「次元公式」とよばれる1次写像の階数に関する等式を示して, その応用例を与える. 第3節では1次写像の表現行列という概念を定義して, 抽象的なベクトル空間の間の1次写像と行列を関係づけ, さらに第4節では1次変換の「不変部分空間」という概念を導入して, 1次変換の表現行列との関連について考察する.

2.1　1次写像の定義と性質

数ベクトル空間の間の1次写像は以前定義したが, そこでは数ベクトル空間では加法とスカラー倍が定義されていることだけを用いているので, この定義は次のように, そのままの形で抽象的なベクトル空間の間の1次写像の定義に一般化される.

定義 2.1 V, W を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする. V から W への写像 f が, 任意の V のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ と $r \in \boldsymbol{K}$ に対して, 次の (i), (ii) をみたすとき, V から W への **1次写像**という. なお, $V = W$ のときは, V の **1次変換**という.

(i) $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$

(ii) $f(r\boldsymbol{x}) = rf(\boldsymbol{x})$

上記定義における (i), (ii) の性質を**線形性**という.

注意 2.1 $f : V \to W$ が1次写像ならば, 命題 1.7 (2) により, $f(\boldsymbol{0}) = f(0\boldsymbol{0}) = 0f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ である. また, 任意の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ と $r_1, r_2, \ldots, r_k \in \boldsymbol{K}$ に対して

$$f(r_1\boldsymbol{v}_1 + r_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + r_k\boldsymbol{v}_k) = r_1f(\boldsymbol{v}_1) + r_2f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + r_kf(\boldsymbol{v}_k)$$

が成り立つ.

例 2.1 (1) $A = \begin{pmatrix} -9 & 8 & 12 \\ 8 & -9 & 12 \\ 12 & 12 & 1 \end{pmatrix}$ とおき, V を $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ に垂直なベクトル全体からなる $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間とする. このとき, $T_A : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ によって V に属するベクトルは V に属するベクトルにうつされるため, 写像 $f : V \to V$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ によって定めることができるが, f は V の1次変換である.

(2) $P(\boldsymbol{K})$ を例 1.2 (3) で定義した $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする. 写像 $\delta : P(\boldsymbol{K}) \to P(\boldsymbol{K})$ を $\delta(f(x)) = f(x) - f(x-1)$ によって定めれば, δ は1次写像である. なお, $P(\boldsymbol{K})$ の部分空間 $P_n(\boldsymbol{K})$ に属する多項式の δ による像は $P_{n-1}(\boldsymbol{K})$ に属することに注意しよう.

(3) 集合 S が自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ の場合, 例 1.2 (4) で定義した $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 $F(\boldsymbol{N})$ を考える. 写像 $D, S : F(\boldsymbol{N}) \to F(\boldsymbol{N})$ をそれぞれ

$$(D(f))(n) = f(n+1) - f(n), \quad (S(f))(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

で定めれば, これらは 1 次写像である.

(4) $C^r(a,b)$ $(r \geqq 1)$ を例 1.2 (4) で定義した $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とする. 写像 $D : C^r(a,b) \to C^{r-1}(a,b)$ を $D(f) = f'$ で定めれば D は 1 次写像である. また, $a < c < b$ として写像 $I : C^{r-1}(a,b) \to C^r(a,b)$ を $(I(g))(x) = \displaystyle\int_c^x g(t)\,dt$ $(x \in (a,b))$ によって定めれば I は 1 次写像である. このとき, 微分積分学の基本定理により $D \circ I$ は $C^{r-1}(a,b)$ の恒等写像であり, $I \circ D(f) = f - K_{f(c)}$ (ただし $K_{f(c)} : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ はつねに値が $f(c)$ である定数値関数) が成り立つ.

問 2.1 (1) 例 2.1 (1) において $T_A : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ は V に属するベクトルを V に属するベクトルにうつすことを示せ.

(2) $p_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を第 1 章の演習問題 **1.3** で定義した多項式とする. このとき, 例 2.1 (2) で定義した写像 δ による $p_n(x)$ の像を求めよ.

(3) 例 2.1 (3) で定義した写像 D, S に関して, $(D \circ S)(f)$ は 自然数 n を $f(n+1)$ にうつす写像であり, $(S \circ D)(f)$ は 自然数 n を $f(n+1) - f(1)$ にうつす写像であることを示せ.

命題 2.1 $f : V \to W$, $g : W \to Z$ を 1 次写像とする.

(1) 合成写像 $g \circ f : V \to Z$ は 1 次写像であり, 恒等変換 $\mathbf{Id}_V : V \to V$ は 1 次変換である.

(2) f が全単射ならば, 逆写像 $f^{-1} : W \to V$ も 1 次写像である.

証明 (1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と $r \in \boldsymbol{K}$ に対して,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &= g(f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})) = g(f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})) = g(f(\boldsymbol{x})) + g(f(\boldsymbol{y})) \\ &= (g \circ f)(\boldsymbol{x}) + (g \circ f)(\boldsymbol{y}), \\ (g \circ f)(r\boldsymbol{x}) &= g(f(r\boldsymbol{x})) = g(rf(\boldsymbol{x})) = rg(f(\boldsymbol{x})) = r(g \circ f)(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

であるから, $g \circ f$ は 1 次写像である. なお, 恒等変換が 1 次変換であることは明らかである.

(2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ と $r \in \boldsymbol{K}$ に対して, $f^{-1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}$, $f^{-1}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{v}$ とおくと $\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{v})$ であるから,

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}), \qquad r\boldsymbol{x} = rf(\boldsymbol{u}) = f(r\boldsymbol{u})$$

である. ゆえに

$$f^{-1}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y}), \qquad f^{-1}(r\boldsymbol{x}) = r\boldsymbol{u} = rf^{-1}(\boldsymbol{x})$$

が得られ, f^{-1} も 1 次写像である. □

問 2.2 (1) $f, g : V \to W$ を 1 次写像, $r \in \boldsymbol{K}$ とする. f と g の和 $f + g : V \to W$, f の r 倍 $rf : V \to W$ を それぞれ $(f+g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})$, $(rf)(\boldsymbol{x}) = rf(\boldsymbol{x})$ で定めれば, これらは 1 次写像であることを示せ.

(2) 1 次写像 $f_1, f_2 : V \to W$, $g_1, g_2 : W \to Z$ と $r \in \boldsymbol{K}$ に対し

$$g_1 \circ (f_1 + f_2) = g_1 \circ f_1 + g_1 \circ f_2, \quad (g_1 + g_2) \circ f_1 = g_1 \circ f_1 + g_2 \circ f_1$$

$$(rg_1) \circ f_1 = r(g_1 \circ f_1) = g_1 \circ (rf_1)$$

が成り立つことを示せ.

次の結果は **「基底のうつり先を定めれば 1 次写像が定まる」** ことを主張しており, 1 次写像の存在に関してもっとも基本的で重要な結果である.

命題 2.2 V, W を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間として, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ を W のベクトルとする. このとき, 1 次写像 $f : V \to W$ で $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ をみたすものがただ一つ存在する.

証明 命題 1.14 により, $\boldsymbol{x} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$$

をみたす $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{K}$ は一通りに定まる. そこで

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{w}_n$$

によって f を定義すれば, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_j$ の場合は $x_j = 1$ で $i \neq j$ ならば $x_i = 0$ であるから, $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$ が成り立つ. また, $\boldsymbol{y} \in V$ と $r \in \boldsymbol{K}$ に対し $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{v}_n$ と表したとき

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= (x_1 + y_1)\boldsymbol{v}_1 + (x_1 + y_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (x_n + y_n)\boldsymbol{v}_n, \\
r\boldsymbol{x} &= (rx_1)\boldsymbol{v}_1 + (rx_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (rx_n)\boldsymbol{v}_n
\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &= (x_1 + y_1)\boldsymbol{w}_1 + (x_2 + y_2)\boldsymbol{w}_2 + \cdots + (x_n + y_n)\boldsymbol{w}_n \\
&= (x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{w}_n) + (y_1\boldsymbol{w}_1 + y_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{w}_n), \\
&= f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \\
f(r\boldsymbol{x}) &= (rx_1)\boldsymbol{w}_1 + (rx_2)\boldsymbol{w}_2 + \cdots + (rx_n)\boldsymbol{w}_n \\
&= r(x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{w}_n) \\
&= rf(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

となるため, 確かに f は 1 次写像である.

$g : V \to W$ も $g(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ をみたす 1 次写像とすれば, 任意の V のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ と表すと, g の線形性から

$$\begin{aligned}
g(\boldsymbol{x}) &= g(x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n) \\
&= x_1 g(\boldsymbol{v}_1) + x_2 g(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + x_n g(\boldsymbol{v}_n) \\
&= x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{w}_n \\
&= f(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

となるため $g = f$ である. ゆえに $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ をみたす 1 次写像 $f : V \to W$ はただ一つだけである. □

1 次写像においては単射であるための条件が少しゆるくなる. すなわち, 次の結果が成り立つ.

補題 2.3 1 次写像 $f : V \to W$ が単射であるためには, 条件「$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」が成り立つことが必要十分である.

証明 注意 2.1 により, f が 1 次写像ならば $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ であるから, f が単射であれば, 条件「$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」が成り立つことは明らかである.

逆に, 条件「$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」が成り立つと仮定する. $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$ ならば f の線形性により $f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ となるため, 仮定により $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ である. よって $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ であるから, f は単射である. □

「ベクトルの 1 次独立性」,「ベクトル空間の生成」と 1 次写像の「単射性」,「全射性」との関係を次の命題の 4 つの主張にまとめておく.

命題 2.4 $f : V \to W$ を 1 次写像, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V のベクトルとする.

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立で f が単射ならば $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は 1 次独立である.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V を生成し, $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が 1 次独立ならば f は単射である.

(3) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V を生成し, f が全射ならば $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は W を生成する.

(4) $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が W を生成していれば f は全射である.

証明 (1) $x_1 f(\boldsymbol{v}_1) + x_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{0}$ ならば f の線形性により $f(x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{0}$ である. f は単射であるから, $x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ であるが, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次独立性から $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ となり, $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は 1 次独立である.

(2) $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ とする. 仮定から $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ と表されるため, $x_1 f(\boldsymbol{v}_1) + x_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{v}_n) = f(x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n) = f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ である. $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は 1 次独立であるため $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ となり, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が得られる. ゆえに補題 2.3 により, f は単射である.

(3) 任意の W のベクトル $\boldsymbol{y}$ に対し $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ をみたす V のベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在し, さらに $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ と表されるため, f の線形性から $\boldsymbol{y} = x_1 f(\boldsymbol{v}_1) + x_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{v}_n)$ を得る. よって $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は W を生成する.

(4) 仮定により, 任意の W のベクトル $\boldsymbol{y}$ に対し, $\boldsymbol{y} = x_1 f(\boldsymbol{v}_1) + x_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{v}_n)$ をみたす $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{K}$ がある. したがって, f の線形性により $\boldsymbol{y} = f(x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n)$ となり, f によって $\boldsymbol{y}$ にうつされる V のベクトルが存在するため f は全射である. □

問 2.3 $f : V \to W$ を 1 次写像, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V のベクトルとする. $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が 1 次独立ならば $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ も 1 次独立であることを示せ.

定義 2.2 全単射である 1 次写像を**同型写像**という. ベクトル空間 V, W の間に同型写像があるとき, V と W は**同型**であるという.

注意 2.2 $f : V \to W$, $g : W \to Z$ が同型写像ならば, 命題 2.1 (1), (2) により f と g の合成写像 $g \circ f : V \to W$ および f の逆写像 $f^{-1} : W \to V$ はともに 1 次写像であり, これらは全単射でもあるから, $g \circ f$, f^{-1} も同型写像である.

例 2.2 A を n 次正則行列とする. T_{E_n} は $\boldsymbol{K}^n$ の恒等変換 $\mathbf{Id}_{\boldsymbol{K}^n}$ であることに注意すれば,

$$T_{A^{-1}} \circ T_A = T_{A^{-1}A} = T_{E_n} = \mathbf{Id}_{\boldsymbol{K}^n}, \quad T_A \circ T_{A^{-1}} = T_{A^{-1}A} = T_{E_n} = \mathbf{Id}_{\boldsymbol{K}^n}$$

であるから, T_A は同型写像で, $T_{A^{-1}}$ が T_A の逆写像 T_A^{-1} である.

定理 2.5 $f : V \to W$ を 1 次写像, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とする. f が同型写像であるためには, $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が W の基底であることが必要十分である.

証明 f が同型写像ならば命題 2.4 (1) により $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は 1 次独立であり, さらに命題 2.4 (3) によって $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は W を生成するため, $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は W の基底である.

逆に, $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が W の基底ならば, 命題 2.4 (2) により f は単射であり, 命題 2.4 (4) によって f は全射である. □

2 つのベクトル空間が同型であるかどうかは, それらの次元が等しいかどうかで判断できる. すなわち, 次の結果が成り立つ.

定理 2.6 $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V と W が同型であるためには

$$\dim V = \dim W$$

であることが必要十分である.

証明　V と W が同型であるとして, $f: V \to W$ を同型写像, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とすれば, 定理 2.5 により $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は W の基底である．よって $\dim W = n = \dim V$ である．

逆に, $\dim W = \dim V = n$ と仮定して, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_n$ をそれぞれ V, W の基底とする．定理 2.2 により $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ をみたす 1 次写像 $f: V \to W$ があるが, これは定理 2.5 によって同型写像である．□

注意 2.3 例 1.7 (1) と上の結果により, $\dim V = n$ ならば V と $\boldsymbol{K}^n$ は同型である．上の証明でみたように, V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ を定めれば $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{e}_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ をみたす同型写像 $f: V \to \boldsymbol{K}^n$ があるが, この写像によって (抽象的な) ベクトル空間 V の各ベクトルを, 加法とスカラー倍の演算を保ったまま, 具体的な数ベクトルに 1 対 1 に対応させることができる．したがって, この f により V と $\boldsymbol{K}^n$ はベクトル空間としては「同じ型」であるとみなすことができる．

2.2　1 次写像の階数と次元公式

定義 2.3 1 次写像 $f: V \to W$ に対し, $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ を

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\, f &= \{\boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}, \\ \mathrm{Im}\, f &= \{\boldsymbol{y} \in W \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \text{ をみたす } \boldsymbol{x} \in V \text{ がある }\} \end{aligned}$$

により定めれば, これらはそれぞれ V, W の部分空間である．$\mathrm{Ker}\, f$ を f の**核**, $\mathrm{Im}\, f$ を f の**像**という．

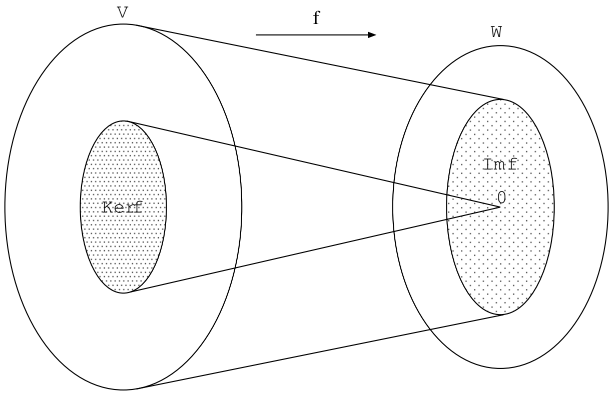


図 6.1 1 次写像の核と像

問 2.4 上で定義した $\mathrm{Ker}\, f$ は V の部分空間であり, $\mathrm{Im}\, f$ は W の部分空間であることを示せ．

注意 2.4 (1)　補題 2.3 により, 1 次写像 $f: V \to W$ が単射であるためには $\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{0}\}$ であることが必要十分である．また, 1 次写像 $f: V \to W$ が全射であるとは $\mathrm{Im}\, f = W$ が成り立つことにほかならないが, このことは定理 1.18 によって $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim W$ と同値である．

(2)　A を $m \times n$ 行列とすれば, A の表す 1 次写像 $T_A: \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ の核は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ をみたす $\boldsymbol{K}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ 全体からなる集合であるから, A を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間 (例 1.3 (1) 参照) にほかならない．また, T_A の像は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ をみたす $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ が存在するような $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{K}^m$ 全体からなる集合である．いい替えれば, これは $(A \mid \boldsymbol{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつ $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{K}^m$ 全体からなる集合である．

定義 2.4 $f: V \to W$ を 1 次写像とするとき, $\dim \mathrm{Im}\, f$ を f の**階数**とよんで, $\mathrm{rank}\, f$ で表す．

命題 2.7 $f: V \to W$ を 1 次写像とする．V が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ で生成されるならば, $\mathrm{Im}\, f$ は $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)$ で生成される．また $\mathrm{rank}\, f$ は $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)$ のうちで 1 次独立なベクトルの最大個数 (注意 1.6) に等しい．

証明　$\tilde{f}: V \to \mathrm{Im}\, f$ を $\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ で定めれば $\tilde{f}$ は全射である 1 次写像であるから, 命題 2.4 (4) により $\mathrm{Im}\, f$ は $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ によって生成される．したがって, 定理 1.17 により $\mathrm{rank}\, f = \dim \mathrm{Im}\, f$ は $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ のうちで 1 次独立なベクトルの最大個数に等しい．　□

例 2.3　A を $m \times n$ 行列とすれば, $\boldsymbol{K}^n$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は $\boldsymbol{K}^n$ の基底であるから, 上の結果により $T_A : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ の像 は A の列ベクトル $A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \ldots, A\boldsymbol{e}_n$ で生成され, T_A の階数は A の列ベクトルのうちで 1 次独立なベクトルの最大個数に等しい．とくに, A が 3.3 節で定義した行列 $F_{mn}(r)$ ならば,

$$F_{mn}(r)\boldsymbol{e}_j = \begin{cases} \boldsymbol{e}_j & (1 \leqq j \leqq r), \\ \boldsymbol{0} & (r+1 \leqq j \leqq n) \end{cases}$$

であるから, $T_{F_{mn}(r)}$ の階数は r である．

第 3 章で定義した $m \times n$ 行列 A の階数 $\mathrm{rank}\, A$ が A によって定義される 1 次写像 $T_A : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ の階数 $\mathrm{rank}\, T_A$ に一致することを証明するための準備を以下で行う．

一般に, 2 つの集合 X と Y が与えられたとき, $X = Y$ であることを示すには, X のすべての要素が Y に属し, かつ Y のすべての要素が X に属することを示せばよい．次の命題の (1) の証明ではこの論法を用いる．

命題 2.8　$f : V \to W$, $g : W \to Z$ を 1 次写像とする．

(1)　f が全射ならば $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g$ である．したがって, $\mathrm{rank}(g \circ f) = \mathrm{rank}\, g$ である．

(2)　g が単射ならば $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}\, f$ を $g(\boldsymbol{y})$ に対応させる写像は $\mathrm{Im}\, f$ から $\mathrm{Im}(g \circ f)$ への同型写像である．したがって, $\mathrm{rank}(g \circ f) = \mathrm{rank}\, f$ である．

証明　(1)　$\boldsymbol{z} \in \mathrm{Im}(g \circ f)$ ならば $\boldsymbol{z} = (g \circ f)(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x}))$ をみたす $\boldsymbol{x} \in V$ がある．すなわち, g によって $\boldsymbol{z}$ に写される W のベクトル $f(\boldsymbol{x})$ があるため $\boldsymbol{z} \in \mathrm{Im}\, g$ である．一方, $\boldsymbol{z} \in \mathrm{Im}\, g$ ならば $\boldsymbol{z} = g(\boldsymbol{y})$ をみたす $\boldsymbol{y} \in W$ があるが, f は全射であるから, $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ をみたす $\boldsymbol{x} \in V$ がある．よって, $\boldsymbol{z} = g(f(\boldsymbol{x})) = (g \circ f)(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im}(g \circ f)$ である．以上から $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g$ が成り立つ．

(2)　$\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}\, f$ ならば $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ をみたす $\boldsymbol{x} \in V$ があるため, $g(\boldsymbol{y}) = g(f(\boldsymbol{x})) = (g \circ f)(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im}(g \circ f)$ である．そこで写像 $\bar{g} : \mathrm{Im}\, f \to \mathrm{Im}(g \circ f)$ を $\bar{g}(\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{y})$ によって定めると, g は 1 次写像で単射であるから, $\bar{g}$ も 1 次写像で単射である．任意の $\boldsymbol{z} \in \mathrm{Im}(g \circ f)$ に対し $\boldsymbol{z} = (g \circ f)(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x}))$ をみたす $\boldsymbol{x} \in V$ がある．$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ とおけば $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}\, f$ であり $\bar{g}(\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{y}) = g(f(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{z}$ となることから $\bar{g}$ は全射である．ゆえに $\bar{g}$ は同型写像であり, 定理 2.5 により $\mathrm{rank}(g \circ f) = \dim \mathrm{Im}(g \circ f) = \dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rank}\, f$ を得る．　□

上の結果から次の系は明らかである．

系 2.9　$f : V \to W$ を 1 次写像とする．$h : U \to V$, $g : W \to Z$ がともに同型写像ならば $\mathrm{rank}(g \circ f \circ h) = \mathrm{rank}\, f$ である．

さて, $m \times n$ 行列 A に対し $r = \mathrm{rank}\, A$ とおけば, m 次正則行列 X と n 次正則行列 Y で, $XAY = F_{mn}(r)$ をみたすものがあることは以前証明した．　このとき $T_X \circ T_A \circ T_Y = T_{XAY} = T_{F_{mn}(r)}$ であり, 例 2.2 により $T_X : \boldsymbol{K}^m \to \boldsymbol{K}^m$, $T_Y : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n$ はともに同型写像である．したがって, 上の結果と例 2.3 により

$$\mathrm{rank}\, T_A = \mathrm{rank}\, T_{F_{mn}(r)} = r = \mathrm{rank}\, A$$

が得られる．よって, 行列の階数を定義して以来の懸案事項であった次の結果が示された．

定理 2.10　行列 A の階数 $\mathrm{rank}\, A$ は $\mathrm{rank}\, T_A$ に等しい．したがって, A を行について基本変形して得られる階段行列の零ベクトルではない行ベクトルの数は, A の基本変形のやり方よらず一定である．

上の定理と命題 2.7 を用いれば, $\boldsymbol{K}^n$ のベクトルが与えられたとき, それらで生成される部分空間の次元は以下で与えられることが示される．

命題 2.11 $\boldsymbol{K}^n$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ に対し, 次の等式が成り立つ.

$$\dim\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\rangle = \operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_k\end{pmatrix}$$

証明 $A = \begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_k\end{pmatrix}$ とおき, 1 次写像 $T_A : \boldsymbol{K}^k \to \boldsymbol{K}^n$ に対して命題 2.7 を用いると

$$\operatorname{Im} T_A = \langle A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \ldots, A\boldsymbol{e}_k\rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\rangle$$

が得られる. よって定理 2.10 から,

$$\dim\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\rangle = \dim \operatorname{Im} T_A = \operatorname{rank} T_A = \operatorname{rank} A.$$

が得られる. □

次に, 「**次元公式**」とよばれる重要な公式を証明する.

定理 2.12 1 次写像 $f : V \to W$ に対し, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ を $\operatorname{Im} f$ の基底として, V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ で $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ をみたすものをとる. さらに $\boldsymbol{v}_{r+1}, \boldsymbol{v}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{r+k}$ を $\operatorname{Ker} f$ の基底とすれば, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{r+k}$ は V の基底である. したがって, 次の等式が成り立つ.

$$\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rank} f = \dim V.$$

証明 まず $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+r}$ が 1 次独立であることを示す.

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k + x_{k+1}\boldsymbol{v}_{k+1} + \cdots + x_{k+r}\boldsymbol{v}_{k+r} = \boldsymbol{0}$$

とし, この両辺を f でうつせば, 仮定により, $1 \leqq j \leqq r$ ならば $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$, $r+1 \leqq j \leqq r+k$ ならば $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{0}$ であるから,

$$x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{0}$$

が得られる. $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ は 1 次独立であったので, 上式から $x_1 = x_2 = \cdots = x_r = 0$ である. これを最初の式に代入して

$$x_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1} + x_{r+2}\boldsymbol{v}_{r+2} + \cdots + x_{r+k}\boldsymbol{v}_{r+k} = \boldsymbol{0}$$

が得られるが, $\boldsymbol{v}_{r+1}, \boldsymbol{v}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{r+k}$ は 1 次独立であるから, $x_{r+1} = x_{r+2} = \cdots = x_{r+k} = 0$ である. ゆえに $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+r}$ は 1 次独立である.

任意の V のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し, $f(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Im} f$ であるから,

$$f(\boldsymbol{x}) = y_1\boldsymbol{w}_1 + y_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + y_r\boldsymbol{w}_r$$

をみたす $y_1, y_2, \ldots, y_r \in \boldsymbol{K}$ がある. $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ をこの右辺に代入すれば, f の線形性から

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= y_1 f(\boldsymbol{v}_1) + y_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + y_r f(\boldsymbol{v}_r) \\ &= f(y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_r\boldsymbol{v}_r) \end{aligned}$$

となるため, 移項して再度 f の線形性を用いると

$$f(\boldsymbol{x} - (y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_r\boldsymbol{v}_r)) = \boldsymbol{0}$$

を得る. よって $\boldsymbol{x} - (y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_r\boldsymbol{v}_r) \in \operatorname{Ker} f$ となるため,

$$\boldsymbol{x} - (y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_r\boldsymbol{v}_r) = x_1\boldsymbol{v}_{r+1} + x_2\boldsymbol{v}_{r+2} + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_{r+k}$$

をみたす $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \boldsymbol{K}$ がある. ゆえに

$$\boldsymbol{x} = y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_r\boldsymbol{v}_r + x_1\boldsymbol{v}_{r+1} + x_2\boldsymbol{v}_{r+2} + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_{r+k}$$

となり, $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+r}$ の 1 次結合で表せるため, これらのベクトルは V を生成することがわかる. □

例題 2.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ のとき, $\mathrm{Ker}\, T_A$, $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底をそれぞれ 1 組ずつ求めよ.

解　$\mathrm{Ker}\, T_A$ は A を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間で, A を行に関して基本変形すれば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるため, $\mathrm{Ker}\, T_A$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を基底にもつ. 上の計算から $\mathrm{rank} T_A = \mathrm{rank} A = 2$ であるから $\mathrm{Im}\, T_A$ は A の列ベクトルで生成される $\boldsymbol{R}^3$ の 2 次元部分空間である. A の第 1 列, 第 2 列のベクトルは 1 次独立であるため, 定理 1.19 により $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底である. □

問 2.5 A が以下の行列の場合に, $\mathrm{Ker}\, T_A$, $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底をそれぞれ 1 組ずつ求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

次元公式の応用例をいくつか紹介する.

$m \times n$ 行列 A を係数行列とする斉次連立 1 次方程式を考えると, 注意 2.4 でみたように, この方程式の解空間は $\mathrm{Ker}\, T_A$ にほかならないので, その次元は次元公式と定理 2.10 から $n - \mathrm{rank}\, A$ に等しくなる. したがって, 次が示された.

定理 2.13 $m \times n$ 行列 A を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間の次元は $n - \mathrm{rank}\, A$ である.

命題 2.14 $\dim V = \dim W$ のとき, 1 次写像 $f : V \to W$ が単射または全射であれば f は同型写像である.

証明　f が単射ならば, 注意 2.4 により $\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{0}\}$ であるから, 定理 2.12 と仮定により $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim V = \dim W$ である. 定理 1.18 により $\mathrm{Im}\, f = W$ となり, f は全射でもある.

f が全射ならば $\mathrm{Im}\, f = W$ であるから, 定理 2.12 と仮定により $\dim \mathrm{Ker}\, f = \dim V - \dim W = 0$ である. したがって, $\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{0}\}$ で, 注意 2.4 により f は単射でもある. □

命題 2.15 1 次写像 $f : V \to W$ が単射であるためには $\mathrm{rank}\, f = \dim V$ が成り立つことが必要十分である.

問 2.6 命題 2.15 を示せ.

命題 2.7 と命題 2.16 から次の結果が直ちに得られる.

命題 2.16 A を $m \times n$ 行列とする. A の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が $\boldsymbol{K}^m$ を生成するためには $\mathrm{rank}\, A = m$ であることが必要十分であり, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が 1 次独立であるためには $\mathrm{rank}\, A = n$ であることが必要十分である. したがって, $m = n$ の場合 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が $\boldsymbol{K}^n$ の基底であるためには, A が正則行列であることが必要十分である.

例題 2.2 $f : V \to W$, $g : W \to Z$ を 1 次写像とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{rank}(g \circ f) \leqq \mathrm{rank}\, g$ を示せ.

(2) $m \times n$ 行列 A と $n \times m$ 行列 B で $AB = E_m$ となるものがあれば $m \leqq n$ であることを示せ.

(3) $h:\operatorname{Im} f \to Z$ を $h(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$ で定めれば

$$\operatorname{Ker} h = \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g, \quad \operatorname{Im} h = \operatorname{Im}(g \circ f)$$

であることを示せ.

(4) $\operatorname{rank}(g \circ f) = \operatorname{rank} f - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g)$ であることを示せ.

解　(1) $\boldsymbol{z} \in \operatorname{Im}(g \circ f)$ ならば $g(f(\boldsymbol{v})) = g \circ f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{z}$ をみたす $\boldsymbol{v} \in V$ が存在するため, $\boldsymbol{z} \in \operatorname{Im}\, g$ である. よって $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im}\, g$ となるため, 定理 1.18 により $\operatorname{rank}(g \circ f) \leqq \operatorname{rank} g$ が成り立つ.

(2) 上の結果と定理 2.12 から

$$\begin{aligned} m = \operatorname{rank} T_{E_m} &= \operatorname{rank} T_{AB} = \operatorname{rank}(T_A \circ T_B) \\ &\leqq \operatorname{rank} T_A = \dim \boldsymbol{K}^n - \dim \operatorname{Ker} T_A \leqq n. \end{aligned}$$

(3) $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Ker} h$ ならば, $h : \operatorname{Im} f \to Z$ の定義から $g(\boldsymbol{w}) = h(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$ である. $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$ ならば $h(\boldsymbol{w}) = g(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0}$ であるから $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Ker} h$ となる. ゆえに $\operatorname{Ker} h = \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$ を得る.

$\boldsymbol{z} \in \operatorname{Im} h$ ならば, $\boldsymbol{z} = h(\boldsymbol{w})$ をみたす $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Im} f$ がある. さらに $\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})$ をみたす $\boldsymbol{v} \in V$ があるため

$$\boldsymbol{z} = h(f(\boldsymbol{v})) = g(f(\boldsymbol{v})) = g \circ f(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Im}(g \circ f).$$

$\boldsymbol{z} \in \operatorname{Im}(g \circ f)$ ならば $\boldsymbol{z} = g \circ f(\boldsymbol{v})$ をみたす $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im}(g \circ f)$ がある. このとき $\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})$ とおくと $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Im} f$ であるから, $\boldsymbol{z} = g(f(\boldsymbol{v})) = g(\boldsymbol{w}) = h(\boldsymbol{w}) \in \operatorname{Im} h$ である. したがって, $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im}(g \circ f)$ が成り立つ.

(4) (3) の結果と定理 2.12 を $h : \operatorname{Im} f \to Z$ に対して用いると

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(g \circ f) &= \dim \operatorname{Im}(g \circ f) = \dim \operatorname{Im} h = \operatorname{rank} h \\ &= \dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Ker} h = \operatorname{rank} f - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g). \end{aligned}$$

を得る. □

2.3　1 次写像の表現行列

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V の基底とするとき, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ によって, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の並ぶ順序も考慮に入れた V の基底を表すことにする. すなわち, V の 2 つの基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ が同じであるとは, すべての $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{w}_j$ が成り立つことを意味するものとする.

定義 2.5 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ をそれぞれ $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V, W の基底とする. 1 次写像 $f : V \to W$ に対し,

$$f(\boldsymbol{v}_j) = a_{1j}\boldsymbol{w}_1 + a_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{w}_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i \qquad (a_{ij} \in \boldsymbol{K})$$

であるとき $m \times n$ 行列 (a_{ij}) を基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する f の**表現行列**という. とくに $V = W$ で $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n] = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ の場合, n 次正方行列 (a_{ij}) を f の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する表現行列という.

注意 2.5 (1) A を $\boldsymbol{K}$ の要素を成分にもつ $m \times n$ 行列とする. $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定められる 1 次写像 $T_A : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ の基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n]$, $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m]$ に関する表現行列は A にほかならない.

(2) $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ を V の基底とすると, V の恒等写像 $\mathbf{Id}_V$ は $\mathbf{Id}_V(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{v}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ をみたすため $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する表現行列は n 次単位行列 E_n である.

例 2.4 (1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底であり,

$$T_A(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1,\ \ T_A(\boldsymbol{v}_2) = 2\boldsymbol{v}_2,\ \ T_A(\boldsymbol{v}_3) = 3\boldsymbol{v}_3$$

が成り立つため, $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換 T_A の $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ に関する表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ である.

(2) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ とおけば, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ は $\boldsymbol{C}^2$ の基底である. ここで $\boldsymbol{C}^2$ における 1 次変換 T_A を考えると

$$T_A(\boldsymbol{v}_1) = (\cos\theta + i\sin\theta)\boldsymbol{v}_1,\ \ T_A(\boldsymbol{v}_2) = (\cos\theta - i\sin\theta)\boldsymbol{v}_2$$

より, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ に関する T_A の表現行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta + i\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta - i\sin\theta \end{pmatrix}$ である.

(3) x, y, z, w は $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$, $y^2 + z^2 \neq 0$ をみたす実数とする.

$$A = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - z^2 - w^2 & 2(yz - xw) & 2(xz + yw) \\ 2(xw + yz) & x^2 - y^2 + z^2 - w^2 & 2(zw - xy) \\ 2(yw - xz) & 2(xy + zw) & x^2 - y^2 - z^2 + w^2 \end{pmatrix}$$

のとき

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)(y^2 + z^2)}} \begin{pmatrix} -yw \\ -zw \\ y^2 + z^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} \begin{pmatrix} z \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

とおくと, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ は互いに直交する長さ 1 のベクトルである. したがって, 例 1.5 (3) でみたようにこれらは 1 次独立になり, さらに定理 1.19 によって $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底である. ここで

$$T_A(\boldsymbol{v}_1) = (2x^2 - 1)\boldsymbol{v}_1 + 2x\sqrt{1 - x^2}\boldsymbol{v}_2, \quad T_A(\boldsymbol{v}_2) = -2x\sqrt{1 - x^2}\boldsymbol{v}_1 + (2x^2 - 1)\boldsymbol{v}_2, \quad T_A(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_3$$

が成り立つことが容易に確かめられるため, $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換 T_A の $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ に関する表現行列は

$$\begin{pmatrix} 2x^2 - 1 & -2x\sqrt{1 - x^2} & 0 \\ 2x\sqrt{1 - x^2} & 2x^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である. $(2x^2 - 1)^2 + (2x\sqrt{1 - x^2})^2 = 1$, $x^2 < 1$ が成り立つことに注意すれば, $\cos\theta = 2x^2 - 1$ かつ $\sin\theta = 2x\sqrt{1 - x^2}$ をみたす $0 < \theta < 2\pi$ がただ一つ定まる. ゆえに $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ に関する T_A の表現行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるため, T_A は原点を通って方向ベクトルが $\boldsymbol{v}_3$ である直線を軸として, $\boldsymbol{v}_3$ の方向を向いて θ だけ時計回りにベクトルを回転させる 1 次変換であることがわかる.

問 2.7 (1) $A = \begin{matrix} 1 & 6 \\ -2 & 8 \end{matrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$ とおく. $\boldsymbol{K}^2$ の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ に関する T_A の表現行列を求めよ.

(2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3$ は 1 次独立であることを確かめて, $\boldsymbol{K}^3$ の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3]$ に関する T_B の表現行列を求めよ.

順序も考慮に入れた基底を考えることの利点は, 1 次写像の表現行列が定義できることだけでなく, 抽象的なベクトル空間にも座標の概念を次のようにして導入できることである.

定義 2.6 V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ が与えられているとする. 命題 1.14 により, $\boldsymbol{x} \in V$ は $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ $(x_j \in \boldsymbol{K})$ と一通りに表せるが, このとき $\boldsymbol{K}^n$ のベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する $\boldsymbol{x}$ の**座標**とよぶ.

注意 2.6 上の定義において $\boldsymbol{v}_j$ は V の j 番目の座標軸方向のベクトルで x_j は $\boldsymbol{x}$ の第 j 成分とみることができる. また, 注意 2.3 で与えた同型写像 $f : V \to \boldsymbol{K}^n$ は, 各 $\boldsymbol{x}$ を基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する $\boldsymbol{x}$ の座標に対応させる写像である.

座標の言葉を用いると表現行列の意味が次のように明確になる.

命題 2.17 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ をそれぞれ, $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V, W の基底とし, これらに関する 1 次写像 $f : V \to W$ の表現行列を A とする. 基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する $\boldsymbol{x} \in V$ の座標を $\tilde{\boldsymbol{x}}$ とすれば 基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する $f(\boldsymbol{x}) \in W$ の座標は $A\tilde{\boldsymbol{x}}$ である.

証明 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ の第 j 成分を x_j とすれば $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ であり, $A = (a_{ij})$ とおくと $f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i$ である. よって f の線形性により

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= x_1 f(\boldsymbol{v}_1) + x_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{v}_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \boldsymbol{w}_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \boldsymbol{w}_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \boldsymbol{w}_i. \end{aligned}$$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ は $A\tilde{\boldsymbol{x}}$ の第 i 成分であるから, 主張が成り立つ. □

上の命題の状況のもとで, 同型写像 $\varphi : V \to \boldsymbol{K}^n$, $\psi : W \to \boldsymbol{K}^m$ で $\varphi(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{e}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, $\psi(\boldsymbol{w}_i) = \boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ をみたすものが存在するが (注意 2.3 参照), これらの写像を用いて上の結果を 1 次写像を用いていい替えれば次のようになる.

系 2.18 $\psi \circ f = T_A \circ \varphi$ であり, $\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} A$ が成り立つ. とくに A が正則行列ならば f は同型写像である.

証明 $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $\psi \circ f(\boldsymbol{x})$ は W の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する $f(\boldsymbol{x})$ の座標である. 一方, $\varphi(\boldsymbol{x})$ は V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する $\boldsymbol{x}$ の座標であるから, 命題 2.17 により $T_A \circ \varphi(\boldsymbol{x}) = A\varphi(\boldsymbol{x})$ は $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する $f(\boldsymbol{x})$ の座標である. よって $\psi \circ f(\boldsymbol{x}) = T_A \circ \varphi(\boldsymbol{x})$ が成り立つ. また ψ が単射, φ が全射であることから, 命題 2.8 と定理 2.10 によって

$$\operatorname{rank} f = \operatorname{rank}(\psi \circ f) = \operatorname{rank}(T_A \circ \varphi) = \operatorname{rank} T_A = \operatorname{rank} A.$$

A が正則行列ならば T_A は同型写像 (例 2.2) で, f は同型写像の合成写像 $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ になるため同型写像 (注意 2.2) である. □

上の事実から, 表現行列の階数を求めることにより, もとの写像の階数を知ることができる. 次の結果は表現行列の定義から容易に示されるので, 証明は読者に任せる.

定理 2.19 $f, g : V \to W$ を 1 次写像とし $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ をそれぞれ V, W の基底とする. $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する f, g の表現行列を A, B とすれば, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する $f + g$, rf $(r \in \boldsymbol{K})$ の表現行列はそれぞれ, $A + B$, rA である.

1 次写像の合成写像の表現行列は, 表現行列の積に一致する. すなわち, 次の結果が成り立つ.

定理 2.20 $f: V \to W$, $g: W \to Z$ をともに 1 次写像とし, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$, $[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l]$ をそれぞれ V, W, Z の基底とする.
$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する f の表現行列を A,
$[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$, $[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l]$ に関する g の表現行列を B とすれば,
$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l]$ に関する $g \circ f$ の表現行列は BA である.

証明 基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する $\boldsymbol{v}_j$ の座標は $\boldsymbol{e}_j$ であるから, 命題 2.17 により, 基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する $f(\boldsymbol{v}_j)$ の座標は $A\boldsymbol{e}_j$ である. したがって, 命題 2.17 を再度用いると, 基底 $[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l]$ に関する $(g \circ f)(\boldsymbol{v}_j) = g(f(\boldsymbol{v}_j))$ の座標は $BA\boldsymbol{e}_j$ である. このことは, $(g \circ f)(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{l} y_{ij}\boldsymbol{z}_i$ と表したとき, y_{ij} は BA の (i, j) 成分であることを意味するため, $g \circ f$ の表現行列は BA である. □

注意 2.5 (2) と上の定理から次の結果が示される.

定理 2.21 $f : V \to W$ を同型写像とし, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ をそれぞれ, V, W の基底とする. $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ に関する f の表現行列を A とすれば A は正則行列であり, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する f の逆写像 f^{-1} の表現行列は A^{-1} である.

証明 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する f^{-1} の表現行列を B とすれば, 定理 2.20 により, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する $f^{-1} \circ f$ の表現行列は BA である. 一方 $f^{-1} \circ f$ は V の恒等写像であるから, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する $f^{-1} \circ f$ の表現行列は E_n となるため $BA = E_n$ である. 同様に, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ に関する $f \circ f^{-1}$ 表現行列を考えて $AB = E_n$ が得られるため, $B = A^{-1}$ となって A は正則である. □

問 2.8 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, $W = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \rangle$, $Z = \langle \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \rangle$ とおくとき, 次の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{x} \in V$ ならば $A\boldsymbol{x}, B\boldsymbol{x} \in W$ であり, $\boldsymbol{y} \in W$ ならば $C\boldsymbol{y} \in Z$ であることを確かめよ.

(2) 1 次写像 $f, g : V \to W$, $h : W \to Z$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, $g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$, $h(\boldsymbol{y}) = C\boldsymbol{y}$ によって定義する. V, W の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2]$ に関する f の表現行列を P, g の表現行列を Q とし, W, Z の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2]$, $[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2]$ に関する h の表現行列を R とするとき, P, Q, R の成分を求めよ.

(3) 基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2]$ に関する $f + g$, rf $(r \in \boldsymbol{K})$ の表現行列はそれぞれ $P + Q$, rP に一致していることを確かめよ.

(4) 基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$, $[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2]$ に関する $h \circ f$ の表現行列は RP に一致していることを確かめよ.

(5) 基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2]$, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ に関する f^{-1} の表現行列は P^{-1} に一致していることを確かめよ.

例題 2.3 1 次変換 $F : P_n(\boldsymbol{R}) \to P_n(\boldsymbol{R})$ を $F(f(x)) = (ax + b)\dfrac{df}{dx}(x) + cf(x)$ (a, b, c は実数の定数) で定める.

(1) $P_n(\boldsymbol{R})$ の基底 $\left[1, x, \dfrac{x^2}{2!}, \ldots, \dfrac{x^n}{n!}\right]$ に関する F の表現行列を求めよ.

(2) $\dim \operatorname{Ker} F$ を求めよ.

解 (1) $f(1) = c$, $f\left(\dfrac{x^{j-1}}{(j-1)!}\right) = b\dfrac{x^{j-2}}{(j-2)!} + (a(j-1) + c)\dfrac{x^{j-1}}{(j-1)!}$ $(2 \leqq j \leqq n+1)$ より f の表現行列を A と

すれば, A の第 1 列は $c\boldsymbol{e}_1$, 第 j 列 $(2 \leqq j \leqq n+1)$ は $b\boldsymbol{e}_{j-1} + ((j-1)a + c)\boldsymbol{e}_j$ である．すなわち

$$A = \begin{pmatrix} c & b & 0 & \cdots & 0 \\ & a+c & b & \ddots & \vdots \\ & & 2a+c & \ddots & 0 \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & b \\ & & & & na+c \end{pmatrix}.$$

(2) (1) から A は対角成分が $c, a+c, 2a+c, \ldots, na+c$ である上半三角行列である．したがって, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ に対して $c \neq -ak$ ならば $|A| = c(a+c)\cdots(na+c) \neq 0$ となり A は正則行列である．ゆえに, 系 2.18 により f は同型写像で, この場合は $\dim \mathrm{Ker}\, f = 0$ である．

$c = -ak$ となる整数 $0 \leqq k \leqq n$ がある場合, $|A| = c(a+c)\cdots(na+c) = 0$ より A は正則行列ではないので $\mathrm{rank}A \leqq n$ である．このとき $a = 0$ ならば $c = 0$ で $A = b\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}$ であるから $b \neq 0$ ならば $\mathrm{rank}A = n$ である．$a \neq 0$ ならば A の第 $k+1$ 列以外の n 個の列ベクトル

$$-ak\boldsymbol{e}_1, b\boldsymbol{e}_1 - a(k-1)\boldsymbol{e}_2, \ldots, b\boldsymbol{e}_{k-1} - a\boldsymbol{e}_k, b\boldsymbol{e}_{k+1} + a\boldsymbol{e}_{k+2}, \ldots, b\boldsymbol{e}_n + a(n-k)\boldsymbol{e}_{n+1}$$

は 1 次独立であるから命題 2.11 により $\mathrm{rank}A \geqq n$ でもある．

したがって, $c = -ak$ となる整数 $0 \leqq k \leqq n$ がある場合, $a \neq 0$ または $b \neq 0$ ならば $\mathrm{rank}A = n$ であり, 系 2.18 により $\mathrm{rank}F = \mathrm{rank}A = n$ となるため, 次元公式によって $\dim \mathrm{Ker}\, F = \dim P_n(\boldsymbol{R}) - \mathrm{rank}F = n + 1 - n = 1$ である．$a = b = c = 0$ の場合は明らかに $\dim \mathrm{Ker}\, F = \dim P_n(\boldsymbol{R}) = n + 1$ である．$\square$

注意 2.7 微分方程式 $(ax+b)\dfrac{dy}{dx} + cy = 0$ の解は $a \neq 0$, $c = -ak$ ならば C を任意定数として $y = C(ax+b)^k$ で与えられるため k が $0 \leqq k \leqq n$ をみたす整数ならば上の例題における $\mathrm{Ker}\, F$ は $(ax+b)^k$ で生成される．一方 $a = c = 0, b \neq 0$ ならば $\mathrm{Ker}\, F$ は 1 で生成される．

ベクトル空間の基底の選び方は何通りもあるので, 基底を取り換えると 1 次写像の表現行列がどのように変わるかをみる必要がある．そのために, まず「基底の変換行列」という概念を定義する．

定義 2.7 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ を V の基底とする．$j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\boldsymbol{v}'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\boldsymbol{v}_i$ と表したとき, n 次正方行列 (p_{ij}) を $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ から $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ への**基底の変換行列**という．

注意 2.8 基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ から $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ への基底の変換行列は, 基底 $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する V の恒等変換 $\mathbf{Id}_V : V \to V$ の表現行列にほかならない．$\mathbf{Id}_V$ は同型写像であるから, 定理 2.21 により基底の変換行列は正則行列である．

問 2.9 $\boldsymbol{K}^n$ の標準基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n]$ から $\boldsymbol{K}^n$ の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ への基底の変換行列は $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}$ であることを示せ．

次の結果は, V の基底の変換行列は V のベクトルの座標変換の規則を与える行列であることを示している．

命題 2.22 V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ から $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ への基底の変換行列を P とする．基底 $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ に関する $\boldsymbol{x} \in V$ の座標を $\tilde{\boldsymbol{x}}'$ とすれば, 基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する $\boldsymbol{x}$ の座標は $P\tilde{\boldsymbol{x}}'$ である．

証明　注意 2.7 により, P は基底 $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する V の恒等変換 $\mathbf{Id}_V : V \to V$ の表現行列であるから, 命題 2.17 により基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する $\boldsymbol{x} = \mathbf{Id}_V(\boldsymbol{x})$ の座標は $P\tilde{\boldsymbol{x}}'$ である．$\square$

定理 2.23 $f : V \to W$ を 1 次写像として, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ を V の基底, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$, $[\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_m]$ を W の基底とする．また,

- $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ から $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ への V の基底の変換行列を P,
- $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ から $[\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_m]$ への W の基底の変換行列を Q,
- $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する f の表現行列を A

とすれば, $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$, $[\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_m]$ に関する f の表現行列は $Q^{-1}AP$ である．とくに $V = W$ の場合, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n] = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ かつ $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n] = [\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_m]$ ならば $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ に関する f の表現行列は $P^{-1}AP$ である．

証明　注意 2.8 から, P は基底 $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する恒等変換 $\mathbf{Id}_V$ の表現行列であるから, 定理 2.20 より, $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する $f \circ \mathbf{Id}_V = f$ の表現行列は AP である．一方, Q は基底 $[\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ に関する恒等変換 $\mathbf{Id}_W$ の表現行列であるから, $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$, $[\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_m]$ に関する f の表現行列を B とすれば, 定理 2.20 により, $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する $\mathbf{Id}_W \circ f = f$ の表現行列は QB である．ここで, AP, QB はともに同じ基底に関する f の表現行列であるから, $QB = AP$ であり, Q は正則行列だったので $B = Q^{-1}AP$ を得る．□

問 2.10 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}$ (ただし $ps - qr \neq 0$) とおく．

(1) $\boldsymbol{K}^2$ の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ に関する T_A の表現行列を求めよ．

(2) $\boldsymbol{K}^2$ の基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ から $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ への変換行列を P とするとき, $P^{-1}AP$ が上で求めた行列と一致することを確かめよ．

定義 2.8 n 次正方行列 A, B に対し, n 次正則行列 P で $P^{-1}AP = B$ をみたすものが存在するとき, A と B は**共役**であるという．

定理 2.23 より, n 次正方行列 A と B が共役ならば, $\boldsymbol{K}^n$ の 1 次変換 T_A のある基底に関する表現行列が B となる．

注意 2.9 1 次写像 $f : V \to W$ に対して, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ を $\mathrm{Im}\, f$ の基底とする．$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ は 1 次独立であるから, 定理 1.16 により $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ を含む W の基底 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ $(m \geqq r)$ を選ぶことができる．そこで定理 2.12 のように V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+r}$ をとれば,

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j \ (1 \leqq j \leqq r), \qquad f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{0} \ (r + 1 \leqq j \leqq r + k)$$

であるから, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+r}]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する f の表現行列は $F_{mn}(r)$ $(n = r + k)$ となる．

A を $\boldsymbol{K}$ の要素を成分にもつ階数が r の $m \times n$ 行列とし, 1 次写像 $T_A : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ に対して上記のことから, $\boldsymbol{K}^n$ の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ と $\boldsymbol{K}^m$ の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ で, これらに関する T_A の表現行列が $F_{mn}(r)$ となるものが存在する．一方, 基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n]$ から基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ への変換行列を P, 基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m]$ から基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ への変換行列を Q とすれば, 定理 2.23 から $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する T_A の表現行列は $Q^{-1}AP$ となるため, $Q^{-1}AP = F_{mn}(r)$ である．したがって,「$m \times n$ 行列 A に対して, $\mathrm{rank} A = r$ ならば m 次正則行列 X と n 次正則行列 Y で $XAY = F_{mn}(r)$ となるものがある.」という定理の掃き出し法によらない別証明が与えられたことになる．

2.4　不変部分空間

前節では 1 次写像 $f : V \to W$ に対し, V と W で別々に基底を選んで, それらの基底に関する f の表現行列を考えたが, 本節では V の 1 次変換 f の表現行列について考える．

定義 2.9 V の 1 次変換 f に対し V の部分空間 W で条件「$\boldsymbol{x} \in W$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \in W$」をみたすものを f の**不変部分空間**という．

問 2.11 問 2.7 (2) における行列 B とベクトル $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ を考える．

(1) $W = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \rangle$ とおけば W は T_B の不変部分空間であることを示せ.

(2) $f : W \to W$ を $f(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ によって定義する. W の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2]$ に関する f の表現行列を求めよ.

f の不変部分空間 W $(W \neq \{\boldsymbol{0}\}, V)$ があれば, W の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k]$ をとり, これらを含むような V の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{w}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ を選ぶ. 各 $j = 1, 2, \ldots, k$ に対し $f(\boldsymbol{w}_j) \in W$ であるから, $f(\boldsymbol{w}_j)$ は $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ の 1 次結合である. したがって, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{w}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ に関する f の表現行列を $A = (a_{ij})$ とすれば $i = k+1, k+2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, k$ に対して $a_{ij} = 0$ である. すなわち A は

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

という形をした n 次正方行列である. ここで A_{11}, A_{12}, A_{22} はそれぞれ k 次正方行列, $k \times (n-k)$ 行列, $n-k$ 次正方行列であり, A_{11} は $\boldsymbol{x} \in W$ を $f(\boldsymbol{x})$ に対応させる W の 1 次変換の $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k]$ に関する表現行列である.

さらに, V が f の 2 つの不変部分空間 W, Z の直和であるとき, W の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k]$ と Z の基底 $[\boldsymbol{w}_{k+1}, \boldsymbol{w}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ をとれば, 命題 1.22 により $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ は V の基底になる. この基底に関する f の表現行列を $A = (a_{ij})$ とすれば, $1 \leqq j \leqq k$ ならば $f(\boldsymbol{w}_j)$ は $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ の 1 次結合であり, $k+1 \leqq j \leqq n$ ならば $f(\boldsymbol{w}_j)$ は $\boldsymbol{w}_{k+1}, \boldsymbol{w}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ の 1 次結合である. したがって, 「$1 \leqq j \leqq k$ かつ $k+1 \leqq i \leqq n$」または「$k+1 \leqq j \leqq n$ かつ $1 \leqq i \leqq k$」ならば $a_{ij} = 0$ となるため, A は

$$\begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

という形の正方行列である. ここで A_{11} は $\boldsymbol{x} \in W_1$ を $f(\boldsymbol{x})$ に対応させる W の 1 次変換の $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k]$ に関する表現行列であり, A_{22} は $\boldsymbol{x} \in Z$ を $f(\boldsymbol{x})$ に対応させる Z の 1 次変換の $[\boldsymbol{w}_{k+1}, \boldsymbol{w}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ に関する表現行列である.

一般に V が f の k 個の不変部分空間 $W_1, W_2, \ldots, W_k$ の直和であれば, $[\boldsymbol{w}_{s_{l-1}+1}, \boldsymbol{w}_{s_{l-1}+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_l}]$ $(l = 1, 2, \ldots, k,\ 0 = s_0 \leqq s_1 \leqq \cdots \leqq s_k = n)$ が W_l の基底になるように V のベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ を選ぶと, 命題 1.23 により $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ は V の基底になる. この基底に関する f の表現行列を $A = (a_{ij})$ とすれば, $s_{l-1}+1 \leqq j \leqq s_l$ ならば $f(\boldsymbol{w}_j)$ は $\boldsymbol{w}_{s_{l-1}+1}, \boldsymbol{w}_{s_{l-1}+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_l}$ の 1 次結合であるから, $1 \leqq i \leqq s_{l-1}$ または $s_l + 1 \leqq i \leqq n$ ならば $a_{ij} = 0$ である. ゆえに A は

$$\begin{pmatrix} A_{11} & O & \cdots & O \\ O & A_{22} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix}$$

という形の正方行列で, A_{ll} は $\boldsymbol{x} \in W_l$ を $f(\boldsymbol{x})$ に対応させる W_l の 1 次変換の $[\boldsymbol{w}_{s_{l-1}+1}, \boldsymbol{w}_{s_{l-1}+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_l}]$ に関する表現行列である.

このように, f の不変部分空間 $W_1, W_2, \ldots, W_k$ で V がこれらの直和になるようなものをみつけることができれば, f の表現行列がより扱いやすい形になるような基底を選ぶことができる.

例 2.5 (1) 例 2.4 (1) において $W_l = \langle \boldsymbol{v}_l \rangle$ $(l = 1, 2, 3)$ とおけば, W_l は T_A の不変部分空間で, $\boldsymbol{R}^3$ は W_1, W_2, W_3 の直和である.

(2) 例 2.4 (2) において $W_l = \langle \boldsymbol{v}_l \rangle$ $(l = 1, 2)$ とおけば W_l は T_A の不変部分空間で, $\boldsymbol{C}^2$ は W_1 と W_2 の直和である. T_A を $\boldsymbol{R}^2$ の 1 次変換とみた場合, これは原点のまわりに反時計方向に θ だけベクトルを回転させる 1 次変換であるから, $\theta \neq 0, \pi$ ならば T_A によって動かない原点を通る直線は存在しない. いい換えれば, $\theta \neq 0, \pi$ のときは $T_A : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ の 1 次元の不変部分空間は存在しない.

(3) 例 2.4 (3) において $W_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, $W_2 = \langle \boldsymbol{v}_3 \rangle$ とおくと W_1, W_2 は T_A の不変部分空間で, $\boldsymbol{R}^3$ は W_1 と W_2 の直和である.

以下で, 特別な関係式をみたす 1 次変換の表現行列に関する例題を与えて, 本章を終えることにするが, 第 8 章では V の 1 次変換 f の表現行列が対角行列になるような V の基底が選べるための条件と, そのような基底の選び方について考える.

例題 2.4 V の 1 次変換 p が $p{\circ}p = p$ をみたすとする.

(1) $\mathrm{Ker}(\mathbf{Id}_V - p) = \mathrm{Im}\, p,\ \ \mathrm{Im}(\mathbf{Id}_V - p) = \mathrm{Ker}\, p, \quad V = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p$
が成り立つことを示せ.

(2) V の基底を適当に選べば, その基底に関する p の表現行列を $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ $(\mathrm{rank} p = r)$ にできることを示せ.

解 (1) $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{Id}_V - p)$ ならば $\boldsymbol{x} - p(\boldsymbol{x}) = (\mathbf{Id}_V - p)(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ であるから, $\boldsymbol{x} = p(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im}\, p$ である. 一方, $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}\, p$ ならば $\boldsymbol{x} = p(\boldsymbol{v})$ をみたす $\boldsymbol{v} \in V$ が存在する. このとき

$$(\mathbf{Id}_V - p)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - p(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{v}) - (p{\circ}p)(\boldsymbol{v})) = p(\boldsymbol{v}) - p(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$$

となるため $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{Id}_V - p)$ である. 以上から $\mathrm{Ker}(\mathbf{Id}_V - p) = \mathrm{Im}\, p$ を得る.

$q = \mathbf{Id}_V - p$ とおくと, 問 2.2 (2) により

$$\begin{aligned} q{\circ}q &= (\mathbf{Id}_V - p){\circ}(\mathbf{Id}_V - p) = \mathbf{Id}_V{\circ}\mathbf{Id}_V - p{\circ}\mathbf{Id}_V - \mathbf{Id}_V{\circ}p + p{\circ}p \\ &= \mathbf{Id}_V - p - p + p = q \end{aligned}$$

となるため, $\mathbf{Id}_V - q = p$ であるから, 上の結果より

$$\mathrm{Im}(\mathbf{Id}_V - p) = \mathrm{Im}\, q = \mathrm{Ker}(\mathbf{Id}_V - q) = \mathrm{Ker}\, p.$$

任意の V のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - p(\boldsymbol{x}) + p(\boldsymbol{x}) = q(\boldsymbol{x}) + p(\boldsymbol{x})$ であり,

$$q(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im}\, q = \mathrm{Im}(\mathbf{Id}_V - p) = \mathrm{Ker}\, p, \quad p(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im}\, p$$

であるから $V = \mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Im}\, p$ が成り立つ. ここで, $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Im}\, p$ ならば $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(\mathbf{Id}_V - p)$ かつ $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\, p$ であるから, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - p(\boldsymbol{x}) = (\mathbf{Id}_V - p)(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ である. よって $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Im}\, p = \{\mathbf{0}\}$ となるため, 命題 1.22 により $V = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p$ である.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ を $\mathrm{Im}\, p$ の基底, $\boldsymbol{v}_{r+1}, \boldsymbol{v}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ $(n = \dim V)$ を $\mathrm{Ker}\, p$ の基底とすると, 命題 1.22 によって $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基底である. $j = 1, 2, \ldots, r$ ならば $\boldsymbol{v}_j \in \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(\mathbf{Id}_V - p)$ より $\boldsymbol{v}_j - p(\boldsymbol{v}_j) = (\mathbf{Id}_V - p)(\boldsymbol{v}_j) = \mathbf{0}$ となるため $p(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{v}_j$ であり, $j = r+1, r+2, \ldots, n$ ならば $\boldsymbol{v}_j \in \mathrm{Ker}\, p$ より $p(\boldsymbol{v}_j) = \mathbf{0}$ であるから $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する p の表現行列は $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ となる. □

例題 2.5 V の 1 次変換 g が $g{\circ}g = \mathbf{Id}_V$ をみたすとする.

(1) $p = \dfrac{1}{2}(\mathbf{Id}_V - g)$ とおけば $p{\circ}p = p$ が成り立つことを示せ.

(2) $W = \{\, \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in V,\ g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \}$, $Z = \{\, \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in V,\ g(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x} \}$ とおくと, $W = \mathrm{Ker}\, p$, $Z = \mathrm{Ker}(\mathbf{Id}_V - p)$ であることを示せ. したがって, 例題 2.4 の結果により V は W と Z の直和である.

(3) V の基底を適当に選べば, その基底に関する g の表現行列を $\begin{pmatrix} E_k & O \\ O & -E_m \end{pmatrix}$ $(k = \dim W,\ m = \dim Z)$ の形にできることを示せ.

解 (1) 問 2.2 (2) を用いると

$$\begin{aligned} p{\circ}p &= \left(\frac{1}{2}(\mathbf{Id}_V - g)\right) \circ \left(\frac{1}{2}(\mathbf{Id}_V - g)\right) \\ &= \frac{1}{4}(\mathbf{Id}_V{\circ}\mathbf{Id}_V - g{\circ}\mathbf{Id}_V - \mathbf{Id}_V{\circ}g + g{\circ}g) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}(\mathbf{Id}_V - g - g + \mathbf{Id}_V) = \frac{1}{2}(\mathbf{Id}_V - g) = p.$$

(2) V のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $p(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - g(\boldsymbol{x})$ であるから, $\boldsymbol{x} \in W$ であることと $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} p$ であることは同値であるので, $W = \operatorname{Ker} p$ である. 同様に $\boldsymbol{x} \in V$ に対して

$$(\mathbf{Id}_V - p)(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Id}_V - g)(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + g(\boldsymbol{x}))$$

であるから, $\boldsymbol{x} \in Z$ であることと $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker}(\mathbf{Id}_V - p)$ であることは同値であるため, $Z = \operatorname{Ker}(\mathbf{Id}_V - p)$ である.

(3) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を W の基底, $\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{v}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+m}$ を Z の基底とすると, 命題 1.22 によって $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+m}$ は V の基底である. $j = 1, 2, \ldots, k$ ならば $\boldsymbol{v}_j \in W$ より $g(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{v}_j$ であり, $j = r+1, r+2, \ldots, n$ ならば $\boldsymbol{v}_j \in Z$ より $g(\boldsymbol{v}_j) = -\boldsymbol{v}_j$ であるから $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する g の表現行列は $\begin{pmatrix} E_k & O \\ O & -E_m \end{pmatrix}$ となる. □

第 2 章の演習問題

2.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ とおき, W を $\boldsymbol{K}^3$ の 2 次元部分空間とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\operatorname{Ker} T_A$, $\operatorname{Im} T_A$ の基底をそれぞれ 1 組ずつ求めよ.

(2) 1 次写像 $f : W \to \boldsymbol{K}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する. W が $\operatorname{Ker} T_A$ を含む場合と含まない場合に分けて, f の階数を求めよ.

2.2 1 次写像 $G : P_n(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ を $G(f(x)) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ で定める. $\operatorname{Ker} G$ の基底を 1 組求めよ.

2.3 (1) V の 1 次変換 f に対し V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ と $a \in \boldsymbol{K}$ で,

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \begin{cases} \boldsymbol{v}_{j-1} & j = 2, \ldots, n \\ a\boldsymbol{v}_n & j = 1 \end{cases}$$

をみたすものがあるとする. このとき, f を n 回合成した写像 $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ による $\boldsymbol{v}_j$ の像を求めることによって f^n は V の恒等変換を a 倍したものであることを示せ.

(2) $a \in \boldsymbol{K}$ を定数として, n 次正方行列 A の (i, j) 成分 a_{ij} が

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j-1,\ 2 \leqq j \leqq n \\ a & i = n,\ j = 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられるとき A^n を求めよ.

2.4 $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成される $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間を W とする. $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換 f は「$\boldsymbol{x} \in W$ ならば $f(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}$」と「$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = 0$ ならば $f(\boldsymbol{x}) = -3\boldsymbol{x}$」をみたすとする. このとき, $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ に関する f の表現行列を求めよ.

2.5 V を $\boldsymbol{K}$ 上の n 次元ベクトル空間, f を V の 1 次変換とする.

(1) f が $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ をみたすならば $\operatorname{rank} f \leqq \frac{n}{2}$ であることを示せ.

(2) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ が成り立つとき n は偶数であり, V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ で, $f(\boldsymbol{v}_{2i-1}) = \boldsymbol{v}_{2i}$, $f(\boldsymbol{v}_{2i}) = \boldsymbol{0}$ $(1 \leqq i \leqq \frac{n}{2})$ をみたすものがとれることを示せ.

2.6 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とし, 同型写像 $f, g : V \to V$ で $g \circ g = \mathbf{Id}_V$, $g \circ f = -f \circ g$ をみたすものがあるとする.

(1) $W = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in V,\ g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\}$, $Z = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in V,\ g(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}\}$ とおく. $\boldsymbol{w} \in W$ ならば $f(\boldsymbol{w}) \in Z$ であることを示し, $h(\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{w})$ によって定義される写像 $h : W \to Z$ は同型写像であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が W の基底ならば $\boldsymbol{v}_1, f(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2, f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \boldsymbol{v}_n, f(\boldsymbol{v}_n)$ は V の基底であることを示せ. (ヒント. 例題 2.5 の結果を用いよ.)

2.7 f, g をともに階数が 2 である $\boldsymbol{K}^3$ の 1 次変換とする．合成写像 $g \circ f$ の階数が 1 であるためには $\operatorname{Ker} g$ が $\operatorname{Im} f$ に含まれることが必要十分であることを示せ．(ヒント．例題 2.2 の結果を用いよ)

2.8 $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して, $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換 $f_{\boldsymbol{c}}$ を $f_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{x}$ で定義する．

(1) $\operatorname{Ker} f_{\boldsymbol{c}}$, $\operatorname{Im} f_{\boldsymbol{c}}$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対し, 合成写像 $f_{\boldsymbol{b}} \circ f_{\boldsymbol{a}}$ の基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ に関する表現行列を求めよ．以後 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ と仮定する．

(3) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が垂直なとき, $\operatorname{Im}(f_{\boldsymbol{b}} \circ f_{\boldsymbol{a}}) = \langle \boldsymbol{a} \rangle$ であることを示せ．

(4) $f_{\boldsymbol{b}} \circ f_{\boldsymbol{a}}$ の階数が 1 になるためには $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が垂直であることが必要十分であることを示せ．

2.9 $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換 g が任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して $(g(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = 0$ をみたすためには $g = f_{\boldsymbol{c}}$ をみたす $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^3$ が存在することが必要十分であることを示せ．

2.10 a を実数の定数として 1 次変換 $F : P_n(\boldsymbol{R}) \to P_n(\boldsymbol{R})$ $(n \geqq 0)$ を

$$F(f(x)) = (x^2 - 1)\frac{d^2 f}{dx^2}(x) + 2x\frac{df}{dx}(x) - af(x)$$

で定める．このとき例題 2.3 を参考にして以下の問いに答えよ．

(1) $P_n(\boldsymbol{R})$ の基底　$1, x, \dfrac{x^2}{2!}, \ldots, \dfrac{x^n}{n!}$　に関する F の表現行列を求めよ．

(2) $\dim \operatorname{Ker} F$ を求めよ．

2.11 V_n を実数係数の 2 変数 n 次同次多項式全体からなるベクトル空間

$$\left\{ f(x,y) \quad f(x,y) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i y^{n-i} \ , a_i \boldsymbol{R} \right\}$$

として, 1 次写像 $D_n : V_n \to V_{n-2}$ $(n \geqq 2)$ を次で定める．

$$D_n(f(x,y)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y)$$

(1) $\dfrac{y^n}{n!}, \ldots, \dfrac{x^i y^{n-i}}{i!(n-i)!}, \ldots, \dfrac{x^n}{n!}$,　$\dfrac{y^{n-2}}{(n-2)!}, \ldots, \dfrac{x^i y^{n-i-2}}{i!(n-i-2)!}, \ldots, \dfrac{x^{n-2}}{(n-2)!}$　はそれぞれ, V_n, V_{n-2} の基底であるが, これらに関する D_n の表現行列を求めよ．

(2) $\operatorname{Ker} D_n$ の基底を 1 組求めよ．

第１章の問・演習問題の解答

問 1.1 略.

問 1.2 $\alpha^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$, $\alpha^3 = i$. $\alpha^{12} = (\alpha^3)^4 = i^4 = 1$.

問 1.3 略.

問 1.4 $z = x + yi$, $w = u + vi$ とおく. $\overline{z + w} = \overline{(x+u) + (y+v)i} = (x+u) - (y+v)i = (x - yi) + (u - vi) = \overline{z} + \overline{w}$. $\overline{zw} = \overline{(x+yi)(u+vi)} = \overline{xu - yv + (yu + xv)i} = xu - yv - (yu + xv)i$. 一方, $\overline{z}\,\overline{w} = (x - yi)(u - vi) = xu - yv - (yu + xv)i$ であるから, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.

問 1.5 (1):$n = 1$ のときは明らかに成立する. $n = k - 1$ のとき成立すると仮定する. $n = k$ のとき,

$$
\begin{aligned}
&(\cos\theta + i\sin\theta)^k = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)^{k-1}\\
&= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos(k-1)\theta + i\sin(k-1)\theta)\\
&= \cos\theta\cos(k-1)\theta - \sin\theta\sin(k-1)\theta +\\
&\qquad\qquad i(\cos\theta\sin(k-1)\theta + \sin\theta\cos(k-1)\theta)\\
&= \cos k\theta + i\sin k\theta.
\end{aligned}
$$

よって $n = k$ のときも成立する.

(2):$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおく. $z^{12} = 1$ なので, $|z| = r = 1$. (1) より $\cos 12\theta + i\sin 12\theta) = 1$. すなわち 12θ は 2π の整数倍である. ところで $0 \leqq \theta < 2\pi$ なので, $\theta = \frac{k\pi}{6}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots 11)$ となる. すなわち $z = (\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^k = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots 11)$.

問 1.6 α が解なので, $a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0$ である. この式の複素共役を考えると, 係数 a_i が実数なので, $\overline{a_i} = a_i$ なることに注意すれば,

$$
\begin{aligned}
&\overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0}\\
&= a_n\overline{\alpha}^n + a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{\alpha} + a_0 = \overline{0} = 0.
\end{aligned}
$$

よって $\overline{\alpha}$ も解である.

5.7

問 1.7 $f(x)$ を実数を係数にもつ 1 変数の多項式とする. 定理 1.4 と命題 1.5 より,

$$
f(x) = c(x - a_1)\cdots(x - a_r)(x - b_1)(x - \overline{b_1})\cdots(x - b_s)(x - \overline{b_s})
$$

と分解する. 但し $c, a_1, \ldots, a_r$ は実数であり, $b_1, \ldots b_s$ は虚数であるとする.
$j = 1, \ldots s$ に対しては, $(x - b_j)(x - \overline{b_j}) = x^2 - 2\,\mathfrak{Re}\,(b_j)x + |b_j|^2$ は実係数の 2 次多項式であり, $f(x)$ は 1 次式と 2 次式の積に因数分解される.

問 1.8 $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{b} = y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_k\boldsymbol{v}_k \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ とするならば,

$$
\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (x_1 + y_1)\boldsymbol{v}_1 + (x_2 + y_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (x_k + y_k)\boldsymbol{v}_k
$$

なので, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ である. $r \in \boldsymbol{K}$ に対して

$$
c\boldsymbol{a} = (cx_1)\boldsymbol{v}_1 + (cx_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (cx_k)\boldsymbol{v}_k
$$

より, $c\boldsymbol{a} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$. よって $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ は部分空間である.

問 1.9 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in W_1 \cap W_2$ ならば, $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in W_i$ $(i = 1, 2)$ である. W_i は部分空間なので $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in W_i$ $(i = 1, 2)$. よって $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in W_1 \cap W_2$. スカラー倍についても同様.

問 1.10 定義より明らかなので略す.

問 1.11 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が 1 次従属であるとすると，$x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ となるすべては 0 でない $x_k \in \boldsymbol{K}$ がある．$x_i \neq 0$ とすると，$\boldsymbol{v}_i = (-\frac{x_1}{x_i})\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (-\frac{x_{i-1}}{x_i})\boldsymbol{v}_{i-1} + (-\frac{x_{i+1}}{x_i})\boldsymbol{v}_{i+1} + \cdots + (-\frac{x_k}{x_i})\boldsymbol{v}_k$ となる．すなわち $\boldsymbol{v}_i$ は残りのベクトルの 1 次結合である．逆は明らかである．

問 1.12 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を n 個の m 次元数ベクトルとする．このとき $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = A\boldsymbol{x}$ と表される．ここで A は $\boldsymbol{a}_j$ を列ベクトルとする行列 $(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots \boldsymbol{a}_n)$ であり，$\boldsymbol{x}$ は x_i を第 i 成分とするベクトルである．よって $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が 1 次独立であるための必要十分条件は連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が自明でない解をもたないことである．今の場合 A は正方行列なので，この条件は A が正則であること，すなわち A の行列式が 0 でないことと同じである．（系 3.10，系 4.17 参照）．(1),(2),(3),(4) のベクトルを列ベクトルとする正方行列の行列式はそれぞれ $-4-12i, 8i, 0, 36$ であるので (3) のみが 1 次従属で他は 1 次独立である．

問 1.13 係数行列は $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ である．行について基本変形して階段行列にすれば $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるので，連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y - z + 2w = 0 \\ 3y - z + 3w = 0 \end{cases}$$

を解けばよい．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y + w \\ y \\ 3y + 3w \\ w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より，基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

問 1.14 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ が基底である．

問 1.15 (1):$\boldsymbol{w}_i \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots k)$ とする．$W_i \subsetneqq Z$ なので $\boldsymbol{w}_i \in Z$．Z は部分空間なので，$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \cdots \boldsymbol{w}_k \in Z$．すなわち $W_1 + W_2 + \cdots W_k \subsetneqq Z$ である．

(2):

$$\begin{aligned} & c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k + c_{k+1}\boldsymbol{v}_{k+1} + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m \\ & = (c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k) + (c_{k+1}\boldsymbol{v}_{k+1} + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m) \end{aligned}$$

と考えれば，定義から明らかである．

問 1.16 定理 1.20 より $k = 2$ の場合は成立する．$k = n-1$ のとき成り立つと仮定して，$k = n$ のときを考える．

$$\begin{aligned} & \dim(W_1 + W_2 + \cdots + W_n) = \dim((W_1 + W_2 + \cdots + W_{n-1}) + W_n) \\ & = \dim(W_1 + W_2 + \cdots + W_{n-1}) + \dim W_n \\ & \qquad - \dim((W_1 + W_2 + \cdots + W_{n-1}) \cap W_n) \end{aligned}$$

$k = n-1$ のときの仮定より，

$$\begin{aligned} & \dim(W_1 + W_2 + \cdots + W_{n-1}) = \\ & \qquad \sum_{i=1}^{n-1} \dim W_i - \sum_{i=1}^{n-2} \dim((W_1 + W_2 + \cdots + W_i) \cap W_{i+1}) \end{aligned}$$

を代入すれば，$k = n$ の場合の求める結果を得る．

問 1.17 定義 1.12 の条件 (2) は任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_k$ を満たす $\boldsymbol{x}_i \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ が存在することと同じである．よって定義 1.12 の条件 (1) の条件が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_k$ を満たす $\boldsymbol{x}_i \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ がただ一つだけ存在するという条件と同じであることを示せばよい. (1) が成立するとする．今また別に

演習問題

1.1 $0, z, w$ が同一直線上にあるための必要十分条件は $\frac{z}{w}$ が実数であることである.

$$\frac{z}{w} \text{ が実数} \Leftrightarrow \frac{z}{w} = \overline{(\frac{z}{w})} \Leftrightarrow z\overline{w} - \overline{z}w = 0 \Leftrightarrow \frac{z}{w} \text{ の虚部は } 0$$

なので，(1) の 3 条件は同値である.

(2):求める複素数を α とすると，題意より，$|z-\alpha| = |w-\alpha| = |\alpha|$ である．これらの関係から $z\overline{z}-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z = 0, w\overline{w}-\alpha\overline{w}-\overline{\alpha}w = 0$ を得る．この 2 式から $\overline{\alpha}$ を消去すれば $\alpha = \frac{zw(\overline{w}-\overline{z})}{z\overline{w}-\overline{z}w}$ となる.

1.2 $z = \frac{1}{1+ti}$ とおくと，$z \neq 0$ なので $\frac{1}{z} = 1 + ti$ より，$\frac{1}{z} + \overline{\frac{1}{z}} = 2$ である．これから $2z\overline{z} - (z + \overline{z}) = 0$ となる．すなわち $(z - \frac{1}{2})(\overline{z} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ であり，この式は原点を除いた $(\frac{1}{2}, 0)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円周を表す.

(2):題意より，t を任意の実数とすると，$(z - p) = tpi$ である．すなわち $\frac{1}{z} = \frac{1}{p(1+ti)}$ となる．よって (1) の図形を $-\theta$ 回転し $\frac{1}{r}$ 倍の相似拡大したものとなるので，中心 $(\frac{\cos\theta}{2r}, -\frac{\sin\theta}{2r})$, 半径 $\frac{1}{2r}$ の円周の原点を除いた部分である.

1.3 $p_n(x) = \frac{1}{n!}x(x-1)\cdots(x-n+1)$ は $x = 0, 1, \ldots n-1$ で 0，$p_n(n) = 1$ になることを注意する．$P_{\boldsymbol{K},m}$ の次元は $m+1$ なので，(1) を示すためには $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_m(x)$ が 1 次独立なることを示せばよい．$c_0p_0(x) + c_1p_1(x) + \cdots + c_mp_m(x) = 0$ とする．$x = 0$ を代入すれば，上記の注意より $p_1(0) = \cdots = p_m(0) = 0$ なので $c_0 = 0$ を得る．$x = 1$ を代入すれば $c_0 = 0, p_1(1) = 1, p_2(1) = \cdots = p_m(1) = 0$ なので $c_1 = 0$ を得る．同様に $x = 2, 3, \ldots, m-1$ を代入すれば，順に $c_2 = 0, c_3 = 0, \ldots, c_m = 0$ を得る.

(2):x^3 の場合を考える．$x^3 = c_0p_0(x) + c_1p_1(x) + c_2p_2(x) + c_3p_3(x)$ とおく．$p_4(x)$ は 4 次多項式なので，x^3 の表示には出てこないことに注意しょう．$x = 0, 1, 2, 3$ を代入すれば連立 1 次方程式

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_0 + c_1 = 1 \\ c_0 + 2c_1 + c_2 = 8 \\ c_0 + 3c_1 + 3c_2 + c_3 = 27 \end{cases}$$

を得る．これを解けば $c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 6, c_3 = 6$ である．x^2, x^4 の場合も同様なので略す.

1.4 $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \rangle \subset \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_l \rangle$ ならば $\boldsymbol{x}_j \in \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_l \rangle$ なので，$\boldsymbol{x}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ は $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_l$ の 1 次結合である．逆に $\boldsymbol{x}_j = a_{j1}\boldsymbol{y}_1 + a_{j2}\boldsymbol{y}_2 + \cdots + a_{jl}\boldsymbol{y}_l$ と 1 次結合に表されているとする．任意の $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \rangle$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = u_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + u_k\boldsymbol{x}_k$ となるので

$$\boldsymbol{x} = \sum_j u_j\boldsymbol{x}_j = \sum_j u_j(\sum_i a_{ji}\boldsymbol{y}_i) = \sum_i(\sum_j a_{ji})\boldsymbol{y}_i.$$

すなわち，$\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_l \rangle$ を得る.

1.5 m と n が異なる自然数とするとき

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \ dx = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \ dx = 0$$

任意の自然数 m, n に対して

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \ dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 mx \ dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 mx \ dx = \pi$$

なる結果を使う．$c_0 + c_1 \sin x + c_2 \sin 2x + \cdots + c_k \sin kx + d_1 \cos x + d_2 \cos 2x + \cdots + d_k \cos kx = 0$ とおく．この式に

$$1, \sin x, \sin 2x, \ldots, \sin kx, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos kx$$

を順に掛けて得られる等式の両辺を 0 から 2π まで積分して，上の結果を用いれば, すべての係数 $c_0, c_1, \ldots, c_k, d_1, \ldots, d_k$ が 0 になることがわかる.

1.6 $x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{0}$ とする．条件より，この式は

$$\begin{aligned} & x_1(a_{11}\boldsymbol{v}_1 + a_{21}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{v}_m) + \\ & \qquad \cdots + x_n(a_{1n}\boldsymbol{v}_1 + a_{2n}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{v}_m) \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\boldsymbol{v}_1 + \\ & \qquad \cdots + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n)\boldsymbol{v}_m \\ &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

となる．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ は 1 次独立なので，各係数が 0 なので
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

の解である．よって $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ が 1 次独立であるためには，この連立 1 次方程式が $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 以外の解を持たないことである．

1.7 A の逆行列 $A^{-1} = (b_{ij})$ を考える．仮定より

$$\sum_j (\sum_i a_{ij}\boldsymbol{x}_i) b_{jl} = \sum_i (\sum_j a_{ij}b_{jl})\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$$

である．また和 $\sum\limits_j a_{ij}b_{jl}$ は $i = l$ のときは 1, それ以外のときは 0 なので，上式は $\sum\limits_i (\sum\limits_j a_{ij}b_{jl})\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_l$ となる．よって $\boldsymbol{x}_l = \boldsymbol{0}$.

1.8 D の対角成分を左上から右下へ $d_1, d_2, \cdots, d_n$ とする．$A = (a_{ij})$ とおけば，条件 $AD = DA$ より両辺の (ij) 成分を比べると $a_{ij}d_j = d_i a_{ij}$ を得る．$i \neq j$ ならば $d_i \neq d_j$ なので $a_{ij} = 0$ である．すなわち A は対角行列．求める次元は n.

1.9 (1):$A, B \in S(n; \boldsymbol{K})$ とする．${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = A + B$ なので，$A + B \in S(n; \boldsymbol{K})$．$\alpha \in \boldsymbol{K}$ ならば ${}^t(\alpha A) = \alpha {}^tA = \alpha A$. よって $\alpha A \in S(n; \boldsymbol{K})$ であり，$S(n; \boldsymbol{K})$ は部分空間．$A = (a_{ij})$ とする．${}^tA = A$ なる条件は $a_{ij} = a_{ji}$ と同じである．A は a_{ij} $(i \leqq j)$ で決まる．よって $S(n; \boldsymbol{K})$ の次元は $\frac{n(n+1)}{2}$. $A(n; \boldsymbol{K})$ の場合も同様にすれば良い．但しこの場合 ${}^tA = -A$ なので $a_{ij} = -a_{ji}$ となるので，対角成分は 0 である．よって $A(n; \boldsymbol{K})$ の次元は $\frac{n(n-1)}{2}$ となる．
(2):$A \in S(n; \boldsymbol{K}) \cap A(n; \boldsymbol{K})$ とすれば $A = {}^tA = -A$ となるので $A = O$．すなわち $S(n; \boldsymbol{K}) \cap A(n; \boldsymbol{K}) = \{O\}$ である．また $S(n; \boldsymbol{K}), A(n; \boldsymbol{K})$ の次元の和は n^2 であり，$\mathrm{M}_n(\boldsymbol{K})$ の次元と等しい．命題 1.22 より $\mathrm{M}_n(\boldsymbol{K}) = S(n; \boldsymbol{K}) + A(n; \boldsymbol{K})$．よって，(2) が示された．

1.10 (1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を W の基底とすれば, 定理 1.16 により V のベクトル $\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{v}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ で, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{v}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底になるようなものがある．$Z = \langle \boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{v}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ とおくと $\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{v}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立であるから, Z の基底である．命題 1.22 により $V = W \oplus Z$ である．
(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{R}^4$ の基底であるから $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ は与えられた部分空間の補空間の 1 つである．

第２章の問・演習問題の解答

問 2.1 (1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V$ となる条件は $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ である．$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -9x_1 + 8x_2 + 12x_3 \\ 8x_1 - 9x_2 + 12x_3 \\ 12x_1 + 12x_2 + x_3 \end{pmatrix}$ であり，

$$2(-9x_1 + 8x_2 + 12x_3) + 2(8x_1 - 9x_2 + 12x_3) + 3(12x_1 + 12x_2 + x_3) = 17(2x_1 + 2x_2 + 3x_3) = 0$$

より $f(\boldsymbol{x}) \in V$ である．よって，f は V を V にうつす．(2) $\delta(p_n(x)) = p_n(x) - p_n(x-1)$ に $p_n(x) = \frac{1}{n!}x(x-1)\cdots(x-n+1)$ を代入し，$\delta(p_n(x)) = \frac{1}{n!}(x-1)\cdots(x-n+1)(x-(x-n)) = p_{n-1}(x)$ となる．(3)

$$((\varDelta \circ \varSigma)(f))(n) = (\varSigma(f))(n+1) - (\varSigma(f))(n)$$

$$
\begin{aligned}
&= f(1)+f(2)+\cdots+f(n+1)-(f(1)+f(2)+\cdots+f(n)) \\
&= f(n+1), \\
((\Sigma\circ\Delta)(f))(n) &= \Delta(f)(1)+\Delta(f)(2)+\cdots+\Delta(f)(n) \\
&= f(2)-f(1)+f(3)-f(2)+\cdots+f(n+1)-f(n) \\
&= f(n+1)-f(1)
\end{aligned}
$$

問 2.2 (1) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V, c,d\in\boldsymbol{K}$ にたいして

$$
\begin{aligned}
(f+g)(c\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{y}) &= f(c\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{y})+g(c\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{y}) \\
&= cf(\boldsymbol{x})+df(\boldsymbol{y})+cg(\boldsymbol{x})+cg(\boldsymbol{y}) \quad (f,g \text{ の線形性}) \\
&= c(f+g)(\boldsymbol{x})+d(f+g)(\boldsymbol{y})
\end{aligned}
$$

よって，$f+g$ は線形写像である，rf についても同様に示せる．(2) $(g_1\circ(f_1+f_2))(\boldsymbol{x}) = g_1(f_1(\boldsymbol{x})+f_2(\boldsymbol{x})) = g_1(f_1(\boldsymbol{x}))+g_1(f_2(\boldsymbol{x}))$ よって，$g_1\circ(f_1+f_2)=g_1\circ f_1+g_1\circ f_2$. 他も同様に示せる．

問 2.3 $x_1\boldsymbol{v}_1+x_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{0}$ とする．両辺を f でうつすと $f(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ より $f(x_1\boldsymbol{v}_1+x_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{v}_n)=\boldsymbol{0}$ となり，左辺に f の線形性を用いると $x_1f(\boldsymbol{v}_1)+x_2f(\boldsymbol{v}_2)+\cdots+x_nf(\boldsymbol{v}_n)=\boldsymbol{0}$ となる．$f(\boldsymbol{v}_1),f(\boldsymbol{v}_2),\ldots,f(\boldsymbol{v}_n)$ は 1 次独立なので $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$. よって $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である．

問 2.4 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\operatorname{Ker}f, c,d\in\boldsymbol{K}$ にたいして

$$
f(c\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{y})=cf(\boldsymbol{x})+df(\boldsymbol{y})=c\boldsymbol{0}+d\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}
$$

$c\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{y}\in\operatorname{Ker}f$. よって，$\operatorname{Ker}f$ は V の部分空間である．$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\operatorname{Im}f, c,d\in\boldsymbol{K}$ にたいして，$f(\boldsymbol{x}')=\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{y}')=\boldsymbol{y}$ となる $\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}'\in V$ がある．$c\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{y}=cf(\boldsymbol{x}')+df(\boldsymbol{y}')=f(c\boldsymbol{x}'+d\boldsymbol{y}')\in\operatorname{Im}f$ より $\operatorname{Im}f$ は W の部分空間である．

問 2.5 $\operatorname{Ker}T_A$ の基底を求めるには A の定める斉次連立 1 次方程式を行の基本変形をもちいて解けばよい．そのさい，A の rank から次元公式 2.12 を用いて，$\operatorname{Ker}T_A$ の次元がわかることに注意する．$\operatorname{Im}T_A$ は A の列ベクトルのなかで，1 次独立なものを A の rank だけ取ればよい．

(1) A は行に関する基本変形で行列 $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ に変形されるので，$\operatorname{rank}A=2$ で $\operatorname{Ker}T_A$ の基底として $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ がとれる．A の列ベクトルから 1 次独立なものを 2 つ選んで，$\operatorname{Im}T_A$ の基底として $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ がとれる．(2),(3) も同様なので基底の一例のみ示す．

(2) $\operatorname{Ker}T_A$ の基底：$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\operatorname{Im}T_A$ の基底：$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

(3) $\operatorname{Ker}T_A$ の基底：$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\end{pmatrix}$, $\operatorname{Im}T_A$ の基底：$\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$

問 2.6 次元公式より $\operatorname{Ker}f=\{\boldsymbol{0}\}\Longleftrightarrow\operatorname{rank}f=\dim V$ であることと，補題 2.3 より，直ちにしたがう．

問 2.7 (1) $A\boldsymbol{v}_1=4\boldsymbol{v}_1=4\boldsymbol{v}_1+0\boldsymbol{v}_2, A\boldsymbol{v}_2=5\boldsymbol{v}_2=0\boldsymbol{v}_1+5\boldsymbol{v}_2$ より T_A の $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]$ に関する表現行列は $\begin{matrix}4&0\\0&5\end{matrix}$ である．$B\boldsymbol{w}_1=2\boldsymbol{w}_1-3\boldsymbol{w}_2\in W, B\boldsymbol{w}_2=2\boldsymbol{w}_1+3\boldsymbol{w}_2\in W$. $[\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2]$ は W の基底なので $\boldsymbol{x}\in W$ ならば $B\boldsymbol{x}\in W$ となる．T_B の $[\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2]$ に関する表現行列は $\begin{matrix}2&2\\-3&3\end{matrix}$ となる．(2) (1) と同様に $A\boldsymbol{w}_i (i=1,2,3)$ を $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3$ の 1 次結合で表して $[\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3]$ に関する T_B の表現行列は $\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-3&-5&-2\\0&0&3\end{pmatrix}$ となる．

問 2.8 (1) 任意の V の要素 $\boldsymbol{x}$ は，$\boldsymbol{x}=r\boldsymbol{v}_1+s\boldsymbol{v}_2$ $(r,s\in\boldsymbol{K})$ の形に書けて，線形性より $f(\boldsymbol{x})=rf(\boldsymbol{v}_1)+sf(\boldsymbol{v}_2)$ となる．W が部分空間であることより $f(\boldsymbol{v}_1),f(\boldsymbol{v}_2)\in W$ となれば，$f(\boldsymbol{x})\in W$ となるから，それぞれの空間の基底の行き先に

ついてのみ調べればよい．$A\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = -3\boldsymbol{w}_1 + 6\boldsymbol{w}_2$, $A\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2$, $B\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = -3\boldsymbol{w}_1 + 5\boldsymbol{w}_2$, $B\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = -2\boldsymbol{w}_2$ より，$\boldsymbol{x} \in V$ ならば，$A\boldsymbol{x}, B\boldsymbol{x} \in W$．$C\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{z}_1$,$C\boldsymbol{z}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{z}_2$ より，$\boldsymbol{y} \in W$ ならば，$C\boldsymbol{y} \in Z$．(2) (1) より $P = \begin{matrix} -3 & 1 \\ 6 & -1 \end{matrix}$, $Q = \begin{matrix} -3 & 0 \\ 5 & -2 \end{matrix}$,$R = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}$ である．(3), (4), (5) 略.

問 2.9 $\boldsymbol{v}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\boldsymbol{e}_j$ なので $(x_{ij}) = \begin{matrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{matrix}$ が基底の変換行列である.

問 2.10 (1) $A\boldsymbol{v}_1 = x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2$ を x, y の連立 1 次方程式とみて解くと，$x = \frac{(ap+br)s-(cp+dr)q}{ps-qr}$,$y = \frac{-(ap+br)r+(cp+dr)p}{ps-qr}$ となる同様に，$A\boldsymbol{v}_2 = z\boldsymbol{v}_1 + w\boldsymbol{v}_2$ となる z, w をもとめて，T_A の $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ に関する表現行列は

$$\frac{1}{ps-qr} \begin{matrix} (ap+br)s-(cp+dr)q & (aq+bs)s-(cq+ds)q \\ -(ap+br)r+(cp+dr)p & -(aq+bs)r+(cq+ds)p \end{matrix} .$$

. (2) 実際に計算すれば確かめられる.

問 2.11 (1) $T_B(\boldsymbol{w}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -2\boldsymbol{w}_1 - 2\boldsymbol{w}_2 \in W$, $T_B(\boldsymbol{w}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = -2\boldsymbol{w}_1 - 5\boldsymbol{w}_2 \in W$ となるため, T_B の線形性から W の任意のベクトルは T_B によって W のベクトルにうつされる.

(2) $f(\boldsymbol{w}_1) = T_B(\boldsymbol{w}_1) = -2\boldsymbol{w}_1 - 2\boldsymbol{w}_2 \in W$, $f(\boldsymbol{w}_2) = T_B(\boldsymbol{w}_2) = -2\boldsymbol{w}_1 - 5\boldsymbol{w}_2$ より, 基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2]$ に関する f の表現行列は $\begin{matrix} -2 & -2 \\ -3 & -5 \end{matrix}$ である.

章末問題の解答

2.1 (1) たとえば $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\, T_A$ の基底で, $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底である.

(2) $\mathrm{Ker}\, f = W \cap \mathrm{Ker}\, T_A$ だから W が $\mathrm{Ker}\, T_A$ を含む場合, $\dim \mathrm{Ker}\, f = \dim(W \cap \mathrm{Ker}\, T_A) = \dim \mathrm{Ker}\, T_A = 1$. したがって次元公式から $\mathrm{rank} f = \dim W - \dim \mathrm{Ker}\, f = 2 - 1 = 1$. W が $\mathrm{Ker}\, T_A$ を含まない場合, $\mathrm{Ker}\, f = W \cap \mathrm{Ker}\, T_A = \{\boldsymbol{0}\}$ だから $\mathrm{rank} f = \dim W - \dim \mathrm{Ker}\, f = 2 - 0 = 2$.

2.2 まず, 任意の $c \in \boldsymbol{R}$ に対して $G \;\; \frac{c}{2} \;\; = c$ より G は全射である．したがって $\mathrm{rank} G = 1$ となるため, 次元公式より $\dim \mathrm{Ker}\, G = \dim P_{\boldsymbol{R},n} - \mathrm{rank} G = n + 1 - 1 = n$ であることがわかる．一方 $2i \leqq n$ ならば $G(x^{2i}) = \frac{2}{2i+1}$ より $G \;\; x^{2i} - \frac{1}{2i+1} \;\; = 0$ であり, $2j - 1 \leqq n$ ならば $G(x^{2j-1}) = 0$ である. n が偶数の場合は $n = 2m$ とおけば $m + m = n$ 個の 1 次独立な多項式 $x^2 - \frac{1}{3}, x^4 - \frac{1}{5}, \ldots, x^{2m} - \frac{1}{2m+1}, x, x^3, \ldots, x^{2m-1}$ が $\mathrm{Ker}\, G$ に含まれ, n が奇数の場合は $n = 2m - 1$ とおけば $(m-1) + m = n$ 個の 1 次独立な多項式 $x^2 - \frac{1}{3}, x^4 - \frac{1}{5}, \ldots, x^{2(m-1)} - \frac{1}{2m-1}, x, x^3, \ldots, x^{2m-1}$ が $\mathrm{Ker}\, G$ に含まれる. いずれの場合も $\mathrm{Ker}\, G$ は n 個の 1 次独立な多項式を含むため, 第 1 章定理 1.19 により, これらは $\mathrm{Ker}\, G$ の基底になる.

2.3 (1) $f^n(\boldsymbol{v}_j) = f^{n-j+1}(f^{j-1}(\boldsymbol{v}_j)) = f^{n-j+1}(\boldsymbol{v}_1) = f^{n-j}(f(\boldsymbol{v}_1)) = f^{n-j}(a\boldsymbol{v}_n) = a\boldsymbol{v}_j = aid_V(\boldsymbol{v}_j)$ が $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して成り立つため, 命題 2.2 により $f^n = aId_V$ である.

(2) A の定義から $T_A(\boldsymbol{e}_j) = \begin{cases} \boldsymbol{e}_{j+1} & j = 1, 2, \ldots, n-1 \\ a\boldsymbol{e}_1 & j = n \end{cases}$ となるため (1) の結果から $T_{A^n} = T_A^n = aid_{\boldsymbol{K}^n} = T_{aE_n}$ である. したがって $A^n = aE_n$ である.

2.4 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ だから $f(\boldsymbol{u}) = 2\boldsymbol{u}$, $f(\boldsymbol{v}) = 2\boldsymbol{v}$ である．$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}$ とおくと, $\boldsymbol{w}$ は $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = 0$ をみたすため, $f(\boldsymbol{w}) = -3\boldsymbol{w}$ である．$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は 1 次独立だから, $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底になり, この基底に関する f の表現行列を B とすれば $B = \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix}$ である．$\boldsymbol{R}^3$ の基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ から $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ への基底の変換行列を P とすれば問 2.9 により $P = (\, \boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w} \,) = \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$ である. 基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ に関する f の表現行列を A とすれば定理 2.23 により $B = P^{-1}AP$ で

ある．したがって $A = PBP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 \\ -5 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$．

2.5 (1) $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ より $\operatorname{rank} f = \dim \operatorname{Im} f \leqq \dim \operatorname{Ker} f$．したがって次元公式により $n = \dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rank} f \geqq 2\operatorname{rank} f$．ゆえに $\operatorname{rank} f \leqq \frac{n}{2}$ である．

(2) $\operatorname{rank} f = r$ とおき，$\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_4, \ldots, \boldsymbol{w}_{2r}$ を $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ の基底とし，各 $i = 1, 2, \ldots, r$ に対し $f(\boldsymbol{v}_{2i-1}) = \boldsymbol{v}_{2i}$ をみたす $\boldsymbol{v}_{2i-1}$ をとれば，$\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_4, \ldots, \boldsymbol{w}_{2r} \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ だから $f(\boldsymbol{v}_{2i}) = \boldsymbol{0}$ $(1 \leqq i \leqq r)$ が成り立つ．したがって 定理 2.12 により，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{2r}$ は V の基底であり，$n = 2r$ となるため n は偶数である．

2.6 (1) $\boldsymbol{w} \in W$ ならば $g(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}$ より $g(f(\boldsymbol{w})) = -f(g(\boldsymbol{w})) = -f(\boldsymbol{w})$ となるため $f(\boldsymbol{w}) \in Z$ である．$\boldsymbol{w} \in W$ に対し $h(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0}$ ならば $f(\boldsymbol{w}) = h(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0}$ で，同型写像 f は単射だから $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ である．よって h は単射である．任意の $\boldsymbol{z} \in Z$ に対し，$g(\boldsymbol{z}) = -\boldsymbol{z}$ より $g(f^{-1}(\boldsymbol{z})) = f^{-1}(f(g(f^{-1}(\boldsymbol{z})))) = f^{-1}(-g(f(f^{-1}(\boldsymbol{z})))) = -f^{-1}(g(\boldsymbol{z})) = -f^{-1}(\boldsymbol{z})$ となるため $f^{-1}(\boldsymbol{z}) \in W$ である．このとき $h(f^{-1}(\boldsymbol{z})) = f(f^{-1}(\boldsymbol{z})) = \boldsymbol{z}$ だから h は全射であることがわかる．ゆえに h は同型写像である．

(2) (1) と定理 2.5 により $h(\boldsymbol{v}_1), h(\boldsymbol{v}_2), \ldots, h(\boldsymbol{v}_n)$ は Z の基底である．例題 2.5 の (2) と第 1 章命題 1.22 によって $\boldsymbol{v}_1, h(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2, h(\boldsymbol{v}_2), \ldots, \boldsymbol{v}_n, h(\boldsymbol{v}_n)$ は V の基底である．h の定義から $h(\boldsymbol{v}_i) = f(\boldsymbol{v}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ であるため主張が成立する．

2.7 $\operatorname{rank}(g \circ f) = 1$ ならば仮定と例題 2.2 により $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) = \operatorname{rank} f - \operatorname{rank}(g \circ f) = 1$ であり，仮定と次元公式により $\dim \operatorname{Ker} g = 1$ である．したがって $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) = \dim \operatorname{Ker} g$ であり，$\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} g$ でもあるから，第 5 章定理 1.18 から $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} g$ が成り立つ．ゆえに $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Im} f$ である．

逆に $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Im} f$ ならば $\operatorname{Ker} g$ と $\operatorname{Im} f$ の共通部分は $\operatorname{Ker} g$ であるから，仮定と次元公式により $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) = \dim \operatorname{Ker} g = 1$ である．よって，仮定と例題 2.2 により $\operatorname{rank}(g \circ f) = \operatorname{rank} f - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) = 2 - 1 = 1$ である．

2.8 (1) $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ の場合，外積の性質から $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるためには $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{c}$ の実数倍であることが必要十分だから $\operatorname{Ker} f_{\boldsymbol{c}} = \langle \boldsymbol{c} \rangle$ である．また $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{x}$ はつねに $\boldsymbol{c}$ と垂直なベクトルだから $\operatorname{Im} f_{\boldsymbol{c}}$ は原点を通って $\boldsymbol{c}$ に垂直な平面 (H とする) に含まれる．$\dim \operatorname{Ker} f_{\boldsymbol{c}} = 1$ だから，次元公式により $\dim \operatorname{Im} f_{\boldsymbol{c}} = \operatorname{rank} f_{\boldsymbol{c}} = 2$ となり $\operatorname{Im} f_{\boldsymbol{c}}$ の次元は H の次元に等しくなるため，第 5 章定理 1.18 から $\operatorname{Im} f_{\boldsymbol{c}} = H$ である．$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ の場合は明らかに $\operatorname{Ker} f_{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{R}^3$, $\operatorname{Im} f_{\boldsymbol{c}} = \{\boldsymbol{0}\}$ である．

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とおく．$f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -a_3x_2 + a_2x_3 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ -a_2x_1 + a_1x_2 \end{pmatrix}$ より $f_{\boldsymbol{a}}$ の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$．同様に $f_{\boldsymbol{b}}$ の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix}$ だから $f_{\boldsymbol{b}} \circ f_{\boldsymbol{a}}$ の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2b_2 - a_3b_3 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & -a_1b_1 - a_3b_3 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & -a_1b_1 - a_2b_2 \end{pmatrix}$ である．

(3) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ を任意にとり，$\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}) = t\boldsymbol{a}$ を満たす $t \in \boldsymbol{R}$ が存在することを示せばよい．$\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ の場合は $t = 0$ とすれば $\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}) = t\boldsymbol{a}$ が成り立つため $\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ の場合を考える．このとき，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}$ は互いに他方のスカラー倍ではないので，原点を含み $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}$ を含む平面はただ一つに定まる．この平面を P とすれば，$\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}$ の両方に垂直なベクトルだから，P に垂直なベクトルである．一方 $\boldsymbol{a}$ も $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}$ の両方に垂直なベクトルだから，P に垂直なベクトルである．従って $\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}) = t\boldsymbol{a}$ を満たす $t \in \boldsymbol{R}$ が存在する．

(4) $f_{\boldsymbol{b}} \circ f_{\boldsymbol{a}}$ の階数が 1 ならば $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ であるから (1) により $\operatorname{rank} f_{\boldsymbol{a}} = \operatorname{rank} f_{\boldsymbol{b}} = 2$ である．よって前問と (1) により $\langle \boldsymbol{b} \rangle \operatorname{Ker} f_{\boldsymbol{b}} \subset \operatorname{Im} f_{\boldsymbol{a}}$ である．したがって $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} f_{\boldsymbol{a}}$ であり，$\operatorname{Im} f_{\boldsymbol{a}}$ は (1) でみたように $\boldsymbol{a}$ に垂直な平面だから $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は垂直である．逆に $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が垂直ならば $f_{\boldsymbol{b}} \circ f_{\boldsymbol{a}}$ の階数が 1 になることは (3) からわかる．

2.9 g の基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ に関する表現行列を $A = (a_{ij})$ とすると $(g(\boldsymbol{e}_j), \boldsymbol{e}_j) = 0$ が $j = 1, 2, 3$ に対して成り立ち，さらに $(g(\boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_k), \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_k) = 0$ が $j, k = 1, 2, 3$ に対して成り立つため $0 = (g(\boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_k), \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_k) = (g(\boldsymbol{e}_j) + g(\boldsymbol{e}_k), \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_k) = (g(\boldsymbol{e}_j), \boldsymbol{e}_j) + (g(\boldsymbol{e}_j), \boldsymbol{e}_k) + (g(\boldsymbol{e}_k), \boldsymbol{e}_j) + (g(\boldsymbol{e}_k), \boldsymbol{e}_k) = (g(\boldsymbol{e}_j), \boldsymbol{e}_k) + (g(\boldsymbol{e}_k), \boldsymbol{e}_j)$ である．したがって $a_{kj} = (g(\boldsymbol{e}_j), \boldsymbol{e}_k) = -(g(\boldsymbol{e}_k), \boldsymbol{e}_j) = -a_{jk}$ が $j, k = 1, 2, 3$ に対して成り立つため $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ であり，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} a_{32} \\ a_{13} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ とおけば，前問の (2) の解答から $g = T_A = f_{\boldsymbol{c}}$ であることがわかる．

逆に $g = f_{\boldsymbol{c}}$ を満たす $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^3$ が存在すれば，任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して $g(\boldsymbol{x}) = f_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ に垂直であるから $(g(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = 0$ が成り立つ．

2.10 (1) $F(1) = -a$, $F(x) = (2-a)x$ であり，$3 \leqq j \leqq n+1$ ならば $F\left(\frac{x^{j-1}}{(j-1)!}\right) = -\frac{x^{j-3}}{(j-3)!} + (j(j-1)-a)\frac{x^{j-1}}{(j-1)!}$ となる

ため, 与えられた基底に関する F の表現行列は次のような上半三角行列である.

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & -1 & & & & & \\ & 2-a & 0 & \ddots & & \text{\huge 0} & & \\ & & 6-a & \ddots & -1 & & & \\ & & & \ddots & 0 & \ddots & & \\ & & & & j(j-1)-a & \ddots & -1 & \\ & \text{\huge 0} & & & & \ddots & 0 & \\ & & & & & & n(n+1)-a \end{pmatrix}$$

(2) (1) で求めた F の表現行列を A とする. すべての $j = 1, 2, \ldots, n+1$ に対して $a \neq j(j-1)$ ならば A は正則であるため系 2.18 により F は同型写像である. よってこの場合は $\dim \operatorname{Ker} F = 0$ である. $a = j(j-1)$ となる整数 $1 \leqq j \leqq n+1$ があるとき A の第 j 列以外の n 個の列ベクトルは 1 次独立になるため命題 2.11 により $\operatorname{rank} A \geqq n$ である. また $|A| = -a(2-a)\cdots(n(n+1)-a) = 0$ より A は正則行列ではないので $\operatorname{rank} A \leqq n$ である. 従って $\operatorname{rank} A = n$ となるため, 次元公式と系 2.18 により $\dim \operatorname{Ker} F = \dim P_{\boldsymbol{R},n} - \operatorname{rank} F = \dim P_{\boldsymbol{R},n} - \operatorname{rank} A = n+1-n = 1$ である. ($a = k(k+1)$ となる整数 $0 \leqq k \leqq n$ がある場合, $\operatorname{Ker} F$ は k 次多項式 $\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k$ で生成されることが知られている.)

2.11 (1) $2 \leqq i \leqq n-2$ ならば $D_n \frac{x^i y^{n-i}}{i!(n-i)!} = \frac{x^{i-2}y^{n-i}}{(i-2)!(n-i)!} + \frac{x^i y^{n-i-2}}{i!(n-i-2)!}$, $D_n \frac{y^n}{n!} = \frac{y^{n-2}}{(n-2)!}$, $D_n \frac{x^n}{n!} = \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}$, $n \geqq 3$ ならば $D_n \frac{xy^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{xy^{n-3}}{(n-3)!}$, $D_n \frac{x^{n-1}y}{(n-1)!} = \frac{x^{n-3}y}{(n-3)!}$, $n = 2$ ならば $D_n(xy) = 0$ より求める行列を A_n とすれば
$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & 1 & \text{\huge 0} & \\ & \text{\huge 0} & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($(n-1) \times (n+1)$ 行列) である.

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{n+1}$ に対し $A_n \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} c_1 + c_3 \\ c_2 + c_4 \\ \vdots \\ c_{n-1} + c_{n+1} \end{pmatrix}$ より $A_n \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ならば $c_1 = p$, $c_2 = q$ とおくと $c_{2i-1} = (-1)^{i-1}p$, $c_{2i} = (-1)^{i-1}q$ である. ゆえに命題 2.17 から $\operatorname{Ker} D_n$ に属する多項式 $f(x,y)$ は p, q を任意の実数として

$$f(x,y) = p \sum_{1 \leqq i \leqq \frac{n}{2}+1} (-1)^{i-1} \tfrac{x^{2i-1}y^{n-2i+1}}{(2i-1)!(n-2i+1)!} + q \sum_{1 \leqq i \leqq \frac{n+1}{2}} (-1)^{i-1} \tfrac{x^{2i}y^{n-2i}}{(2i)!(n-2i)!}$$

と表される. したがって $\operatorname{Ker} D_n$ の基底は次の 2 つの多項式で与えられる.

$$\sum_{1 \leqq i \leqq \frac{n}{2}+1} (-1)^{i-1} \frac{x^{2i-1}y^{n-2i+1}}{(2i-1)!(n-2i+1)} \ , \quad \sum_{1 \leqq i \leqq \frac{n+1}{2}} (-1)^{i-1} \frac{x^{2i}y^{n-2i}}{(2i)!(n-2i)!}$$

第3章　行列の対角化

本章では「与えられた行列 A と共役な対角行列が存在するか?」,「またそのとき, A と共役な対角行列をどのようにして求めるか?」という**「行列の対角化」**と呼ばれる問題について考える.

3.1　固有値と固有ベクトル

定義 3.1 $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V の 1 次変換 $f : V \to V$ に対し, $f(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$ を満たす $\lambda \in \boldsymbol{K}$ と零でないベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ が存在するとき, λ を f の**固有値**, $\boldsymbol{v}$ を λ に対する f の**固有ベクトル**という. また, $A \in \mathrm{M}_n(\boldsymbol{K})$ に対し, $T_A : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n$ の固有値, 固有ベクトルをそれぞれ A の固有値, 固有ベクトルという.

定義 3.2 1 次変換 $f : V \to V$ の固有値 λ に対し, $W_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}\}$ とおき, W_λ を λ に対する f の**固有空間**という. また, $A \in \mathrm{M}_n(\boldsymbol{K})$ に対し, A の固有値 λ に対する T_A の固有空間 W_λ を A の固有空間という. このとき W_λ は $\lambda E_n - A$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解ベクトル全体からなる $\boldsymbol{K}^n$ の部分空間である.

定理 3.1 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \boldsymbol{K}$ を 1 次変換 $f : V \to V$ の相異なる固有値として, W_{λ_j} を λ_j に対する A の固有空間とする. $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \boldsymbol{K}^n$ が $j = 1, 2, \ldots, k$ に対して $\boldsymbol{x}_j \in W_{\lambda_j}$ を満たし, さらに $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ が成り立てば $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \cdots = \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ である.

証明 k による帰納法で主張を示す. まず $k = 1$ の場合は主張は明らかに成立する. $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{K}^n$ が $j = 1, 2, \ldots, i$ に対して $\boldsymbol{x}_j \in W_{\lambda_j}$ を満たし, さらに $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$ が成り立つとき, この等式の両辺を f で写した式から, 両辺を λ_i 倍した式を辺々引くことにより $(\lambda_1 - \lambda_i)\boldsymbol{x}_1 + (\lambda_2 - \lambda_i)\boldsymbol{x}_2 + \cdots + (\lambda_{i-1} - \lambda_i)\boldsymbol{x}_{i-1} = \boldsymbol{0}$ が得られる. そこで, $j = 1, 2, \ldots, i-1$ に対して $\boldsymbol{x}'_j = (\lambda_j - \lambda_i)\boldsymbol{x}_j$ とおくと $\boldsymbol{x}'_j \in W_{\lambda_j}$ かつ $\boldsymbol{x}'_1 + \boldsymbol{x}'_2 + \cdots + \boldsymbol{x}'_{i-1} = \boldsymbol{0}$ が成り立つため, $k = i - 1$ の場合の帰納法の仮定により $\boldsymbol{x}'_1 = \boldsymbol{x}'_2 = \cdots = \boldsymbol{x}'_{i-1} = \boldsymbol{0}$ である. $j < i$ ならば $\lambda_j \neq \lambda_i$ であるから $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \cdots = \boldsymbol{x}_{i-1} = \boldsymbol{0}$ が得られ, さらに $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$ である. 故に $k = i$ の場合も主張が成り立つ. □

定義 3.3 n 次正方行列 A に対して t を変数とする n 次多項式 $|tE_n - A|$ を A の**固有多項式**と呼んで $F_A(t)$ で表すことにする. また, n 次方程式 $F_A(t) = 0$ を A の**固有方程式**という.

P が n 次正則行列ならば $tE_n - P^{-1}AP = P^{-1}(tE_n - A)P$ だから $|tE_n - P^{-1}AP| = |tE_n - A|$ である. 従って, 次の結果が得られる.

命題 3.2 n 次正方行列 A, n 次正則行列 P に対して $F_{P^{-1}AP}(t) = F_A(t)$ が成り立つ. 従って A と B が共役な正方行列ならば $F_A(t) = F_B(t)$ である.

命題 3.3 $\lambda \in \boldsymbol{K}$ が $A \in \mathrm{M}_n(\boldsymbol{K})$ の固有値であるためには $F_A(\lambda) = 0$ が成り立つことが必要十分である.

証明 λ を A の固有値とする. λ に対する A の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ をとると, $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ より $(\lambda E_n - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ である. もし $\lambda E_n - A$ が正則ならば $(\lambda E_n - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の両辺に左から $\lambda E_n - A$ の逆行列を掛ければ $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ が得られ, $\boldsymbol{v}$ が固有ベクトルであるという仮定に反する. 従って $\lambda E_n - A$ は正則ではないため $F_A(\lambda) = |\lambda E_n - A| = 0$ である.

逆に $|\lambda E_n - A| = F_A(\lambda) = 0$ とすれば, $\lambda E_n - A$ は正則ではないため, $\lambda E_n - A$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式は零ベクトルではない解ベクトル $\boldsymbol{v}$ をもつ. このとき $(\lambda E_n - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ より $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ となるため λ は

A の固有値である. □

n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ が「$i>j$ ならば $a_{ij}=0$」をみたすとき, A を**上半三角行列**という.

命題 3.4 A を n 次正方行列, P を n 次正則行列とする. $P^{-1}AP$ が λ_j を (j,j)-成分とする上半三角行列ならば $F_A(t)=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n)$ である.

証明　命題 3.2 により

$$F_A(t)=F_{P^{-1}AP}(t)=\begin{vmatrix} t-\lambda_1 & * & \cdots & * \\ & t-\lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ \text{\huge 0} & & & t-\lambda_n \end{vmatrix}=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n).$$

□

命題 3.5 n 次正方行列 A の固有多項式 $F_A(t)$ が $(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n)$ と因数分解されるとき, $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$, $\operatorname{tr}A=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$ が成り立つ.

証明　まず $F_A(t)=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n)$ の両辺に $t=0$ を代入して $|-A|=(-\lambda_1)(-\lambda_2)\cdots(-\lambda_n)$ を得る. この左辺は $(-1)^n|A|$ に等しく, 右辺は $(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ に等しいため, $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ が得られる.

また $A=(a_{ij})$ とすれば, $F_A(t)=|tE_n-A|=(t-a_{11})(t-a_{22})\cdots(t-a_{nn})+(t$ の $n-2$ 次以下の多項式$)=t^n-(\operatorname{tr}A)t^{n-1}+(t$ の $n-2$ 次以下の多項式$)$ となるため $|tE_n-A|$ の t^{n-1} の係数は $-\operatorname{tr}A$ である. 一方 $(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n)$ の t^{n-1} の係数は $-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$ だから $\operatorname{tr}A=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$ を得る. □

$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\in\boldsymbol{K}^m$ に対して, $\boldsymbol{a}_j$ を第 j 列とする $m\times n$ 行列を $\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$ で表す. このとき, $k\times m$ 行列 B に対して

$$B\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B\boldsymbol{a}_1 & B\boldsymbol{a}_2 & \cdots & B\boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$$

が成り立つことに注意する.

命題 3.6 $\lambda\in\boldsymbol{K}$ を $A\in\mathrm{M}_n(\boldsymbol{K})$ の固有値, W_λ を λ に対する A の固有空間とする. $\dim W_\lambda=m$ とおけば, A の固有多項式 $F_A(t)$ は $(t-\lambda)^m$ を因数にもつ.

証明　$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m$ を W_λ の基底とし, $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ が $\boldsymbol{K}^n$ の基底になるように $\boldsymbol{v}_{m+1},\boldsymbol{v}_{m+2},\ldots,\boldsymbol{v}_n\in\boldsymbol{K}^n$ を選ぶ. $P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n\end{pmatrix}$ とおくと, P は正則であり, $j=1,2,\ldots,m$ に対して $A\boldsymbol{v}_j=\lambda\boldsymbol{v}_j=\lambda P\boldsymbol{e}_j$ だから

$$AP=\begin{pmatrix}A\boldsymbol{v}_1 & A\boldsymbol{v}_2 & \cdots & A\boldsymbol{v}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda P\boldsymbol{e}_1 & \lambda P\boldsymbol{e}_2 & \cdots & \lambda P\boldsymbol{e}_m & A\boldsymbol{v}_{m+1} & \cdots & A\boldsymbol{v}_n\end{pmatrix}$$

である. 従って $\begin{pmatrix}P^{-1}A\boldsymbol{v}_{m+1} & \cdots & P^{-1}A\boldsymbol{v}_n\end{pmatrix}$ の第 $m+1$ 行以下の行からなる $n-m$ 次正方行列を B とすると

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{e}_1 & \lambda\boldsymbol{e}_2 & \cdots & \lambda\boldsymbol{e}_m & P^{-1}A\boldsymbol{v}_{m+1} & \cdots & P^{-1}A\boldsymbol{v}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda E_m & * \\ O & B\end{pmatrix}$$

より, 命題 3.2 を用いれば

$$F_A(t)=F_{P^{-1}AP}(t)=\begin{vmatrix}(t-\lambda)E_m & * \\ O & tE_{n-m}-B\end{vmatrix}=|(t-\lambda)E_m||tE_{n-m}-B|=(t-\lambda)^mF_B(t)$$

である. 故に $F_A(t)$ は $(t-\lambda)^m$ を因数にもつ. □

定義 3.4 $A\in\mathrm{M}_n(\boldsymbol{K})$ に対し, 正則行列 $P\in\mathrm{M}_n(\boldsymbol{K})$ で $P^{-1}AP$ が対角行列になるものが存在するとき, A は $\boldsymbol{K}$ 上**対角化可能**であるという. このとき P は A を**対角化**するという.

$A \in \mathrm{M}_n(\boldsymbol{K})$ が $\boldsymbol{K}$ 上対角化可能であるとする. 正則行列 P で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 & \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \lambda_n \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}$$

となるものを考えれば, $AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 & \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \lambda_n \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 P\boldsymbol{e}_1 & \lambda_2 P\boldsymbol{e}_2 & \cdots & \lambda_n P\boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}$ より AP の第 j 列は $AP\boldsymbol{e}_j$ は $\lambda_j P\boldsymbol{e}_j$ となる. すなわち λ_j は A の固有値で, P の第 j 列は λ_j に対する A の固有ベクトルである. また, P は正則行列であるため, P の列ベクトル $P\boldsymbol{e}_1, P\boldsymbol{e}_2, \ldots, P\boldsymbol{e}_n$ は $\boldsymbol{K}^n$ の基底である.

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を A の固有ベクトルからなる $\boldsymbol{K}^n$ の基底とし, 各 $\boldsymbol{v}_j$ に対して $A\boldsymbol{v}_j = \lambda_j \boldsymbol{v}_j$ が成り立つとき, $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は $\boldsymbol{K}^n$ の基底であるため, P は正則である. さらに,

$$\begin{aligned} AP &= A\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A\boldsymbol{v}_1 & A\boldsymbol{v}_2 & \cdots & A\boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 & \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \lambda_n \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 P\boldsymbol{e}_1 & \lambda_2 P\boldsymbol{e}_2 & \cdots & \lambda_n P\boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} \qquad (P\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{v}_j) \\ &= P\begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 & \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \lambda_n \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるため $P^{-1}AP$ は対角行列 $\begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 & \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \lambda_n \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}$ である. 以上から次の定理が示された.

定理 3.7 $A \in \mathrm{M}_n(\boldsymbol{K})$ が $\boldsymbol{K}$ 上対角化可能ならば A の固有ベクトルからなる $\boldsymbol{K}^n$ の基底が存在する. 逆に, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を A の固有ベクトルからなる $\boldsymbol{K}^n$ の基底とし, $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $A\boldsymbol{v}_j = \lambda_j \boldsymbol{v}_j$ が成り立つとき, $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}$ とおけば, P は正則で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ. 従って A が $\boldsymbol{K}$ 上対角化可能であるためには A の固有ベクトルからなる $\boldsymbol{K}^n$ の基底が存在することが必要十分である.

注意 3.1 $A \in \mathrm{M}_n(\boldsymbol{K})$ が $\boldsymbol{K}$ 上対角化可能ならば命題 3.4 により A の固有多項式は $\boldsymbol{K}$ の範囲で 1 次式の積に因数分解される.

固有空間の概念を用いれば, 対角化可能であるための条件は次のように言い換えられる.

定理 3.8 $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k \in \boldsymbol{K}$ を $A \in \mathrm{M}_n(\boldsymbol{K})$ の相異なる固有値の全体として W_{μ_i} を μ_i に対する A の固有空間とする. このとき次の (1), (2), (3) は同値である.

(1) A は $\boldsymbol{K}$ 上対角化可能である.

(2) 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_k$ となる $\boldsymbol{x}_i \in W_{\mu_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ がある.

(3) $\dim W_{\mu_i} = m_i$ とおくと A の固有多項式は $(t-\mu_1)^{m_1}(t-\mu_2)^{m_2}\cdots(t-\mu_k)^{m_k}$ と因数分解される.

証明　(1)⇒(2), (3); 定理 3.7 により A の固有ベクトルからなる $\boldsymbol{K}^n$ の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が存在するため, 各 $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $A\boldsymbol{v}_j = \mu_{l(j)}\boldsymbol{v}_j$ を満たす $1 \leqq l(j) \leqq k$ がある. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の番号を付け直すことにより $1 = l(1) \leqq l(2) \leqq \cdots \leqq l(n) = k$ が成り立つようにして, 各 $i = 1, 2, \ldots, k$ に対し, $l(j) = i$ を満たす最大の j を s_i とおく. 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ は $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ と表され, $\boldsymbol{x}_i = \sum_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} x_j\boldsymbol{v}_j$ とおくと, $\boldsymbol{x}_i \in W_{\mu_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ であり, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_k$ が成り立つため (2) が成り立つ.

とくに $\boldsymbol{x} \in W_{\mu_i}$ の場合, $\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_{i-1} + (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}_{i+1} + \cdots + \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ となり, $\boldsymbol{x}_l \in W_{\mu_l}$, $\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x} \in W_{\mu_i}$ に注意すれば定理 3.1 により $\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ すなわち $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_i = \sum_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} x_j\boldsymbol{v}_j$ である. 故に 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_{s_{i-1}+1}, \boldsymbol{v}_{s_{i-1}+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{s_i}$ は W_{μ_i} を生成するため, これらは W_{μ_i} の基底である. 従って $i = 1, 2, \ldots, k$ に対して $m_i = \dim W_{\mu_i} = s_i - s_{i-1}$ である. $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}$ とおけば, 定理 3.7 から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mu_1 E_{m_1} & & & \text{\huge 0} \\ & \mu_2 E_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \mu_k E_{m_k} \end{pmatrix}$$

となるため, 命題 3.2 により $F_A(t) = F_{P^{-1}AP}(t) = (t-\mu_1)^{m_1}(t-\mu_2)^{m_2}\cdots(t-\mu_k)^{m_k}$ と因数分解される.

(3)⇒(1); A の固有多項式の次数は n であるため, 仮定から $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ である. $s_i = m_1 + m_2 + \cdots + m_i$ $(i = 0, 1, \ldots, k$, ただし $s_0 = 0$ とする.) とおいて, $\boldsymbol{v}_{s_{i-1}+1}, \boldsymbol{v}_{s_{i-1}+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{s_i}$ を W_{μ_i} の基底とする. このとき, $s_k = n$ であり, 定理 3.1 と命題 1.23 により $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は $\boldsymbol{K}^n$ の n 個の 1 次独立なベクトルであるから, これらは $\boldsymbol{K}^n$ の基底である. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ はすべて A の固有ベクトルだから定理 3.7 により A は $\boldsymbol{K}$ 上対角化可能である.

(2)⇒(1); 各 $i = 1, 2, \ldots, k$ に対して $\boldsymbol{v}_{s_{i-1}+1}, \boldsymbol{v}_{s_{i-1}+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{s_i}$ $(0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_k)$ が W_{μ_i} の基底になるように $\boldsymbol{K}^n$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{s_k}$ を選ぶ. 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_k$ となる $\boldsymbol{x}_i \in W_{\mu_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ が存在し, さらに各 i に対して $\boldsymbol{x}_i$ は $\boldsymbol{v}_{s_{i-1}+1}, \boldsymbol{v}_{s_{i-1}+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{s_i}$ の 1 次結合になるため, $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{s_k}$ の 1 次結合である. 故に $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{s_k}$ は $\boldsymbol{K}^n$ を生成する. また, 定理 3.1 と命題 1.23 より $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{s_k}$ は 1 次独立でもあるから $\boldsymbol{K}^n$ の基底である. 従って $s_k = n$ である. さらに $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ はすべて A の固有ベクトルだから定理 3.7 により A は $\boldsymbol{K}$ 上対角化可能である. □

3.2　内積と正規直交基底

定義 3.5 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とし, 写像 $B : V \times V \to \boldsymbol{K}$ は任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in V$, $\lambda \in \boldsymbol{K}(\subset \boldsymbol{C})$ に対して, 次の性質 (1)〜(4) を満たすとする.

(1) $B(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = B(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + B(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$, $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2)$

(2) $B(\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $B(\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{y}) = \bar{\lambda}B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

(3) $B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \overline{B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$

(4) $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}$ であり, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$ である.

このとき 写像 B を V の**内積**, $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積といい, 内積の定義されたベクトル空間を**計量ベクトル空間**と呼ぶ.

注意 3.2 上の (2) から, $B(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{y}) = B(0\boldsymbol{0}, \boldsymbol{y}) = 0B(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{y}) = 0$, $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = B(\boldsymbol{x}, 0\boldsymbol{0}) = \bar{0}B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{0}) = 0$ であることに注意する.

定義 3.6 V を B を内積にもつ計量ベクトル空間とする.

(1) $\boldsymbol{x} \in V$ に対し, $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ とおいて, $\|\boldsymbol{x}\|$ をベクトル $\boldsymbol{x}$ の「**長さ**」または「**ノルム**」という. 長さが 1 のベクトルを**単位ベクトル**という.

(2) 零ベクトルでない 2 つのベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ が $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ を満たすとき, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は**直交**するという. また, V の部分集合 S, T が「$\boldsymbol{x} \in S$, $\boldsymbol{y} \in T$ ならば $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$」を満たすとき S と T は直交するという.

(3) V, W をそれぞれ内積 B_V, B_W が定義されている計量ベクトル空間とする. 1 次写像 $f : V \to W$ が任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $B_V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = B_W(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))$ を満たすとき f は**内積を保つ**といいい, さらに f が同型写像ならば f を**計量同型写像**という. 2 つの計量ベクトル空間の間に計量同型写像が存在するとき, これらの計量ベクトル空間は**計量同型**であるという.

注意 3.3 命題 3.12 において, 内積を保つ写像は 1 次写像であることを示す. また, 写像 $f : V \to W$ が任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\|f(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$ を満たせば, 命題 2.3 と定義 3.5 の (4) により f は単射である. とくに, 内積を保つ写像は単射である.

以後, 計量ベクトル空間における 2 つのベクトルの内積は $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ と略記する.

定義 3.7 $A = (a_{jk}) \in \mathrm{M}_{m,n}(\boldsymbol{C})$ に対し, $\overline{a_{jk}}$ を (j,k) 成分とする $m \times n$ 行列 を A の共役行列と呼んで $\overline{A}$ で表し, a_{kj} を (j,k) 成分とする $n \times m$ 行列を A の転置行列と呼んで ${}^t\!A$ で表す. このとき, ${}^t(\overline{A}) = \overline{{}^t\!A}$ が成り立つが, ${}^t(\overline{A})$ を A の共役転置行列と呼んで A^* で表す.

命題 3.9 (1) $A, B \in \mathrm{M}_{m,n}(\boldsymbol{K})$, $c \in \boldsymbol{K}$ に対して ${}^t(A+B) = {}^t\!A + {}^t\!B$, $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$, $(A+B)^* = A^* + B^*$, ${}^t(cA) = x\,{}^t\!A$, $\overline{cA} = \bar{c}\overline{A}$, $(cA)^* = \bar{c}A^*$ が成り立つ.

(2) $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\boldsymbol{K})$, $B \in \mathrm{M}_{n,k}(\boldsymbol{K})$ に対して ${}^t(AB) = {}^t\!B\,{}^t\!A$, $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$, $(AB)^* = B^*A^*$ が成り立つ.

例 3.1 $\boldsymbol{K}^n$ を $\mathrm{M}_{n,1}(\boldsymbol{K})$ と同一視する. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{y}}$ で $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を定めれば これは $\boldsymbol{K}^n$ の内積である. 実際, 定義 3.5 の条件 (1), (2), (3) は命題 3.9 から明らかである. また $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の第 j 成分をそれぞれ x_j, y_j とすれば $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の定義により, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$ だから $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2$ となるため, 定義 3.5 の条件 (4) も成り立つことがわかる. 以後, 特に断らない限り, この内積により $\boldsymbol{K}^n$ を計量ベクトル空間とみなす.

V を計量ベクトル空間とするとき, ベクトルの長さの定義と定義 3.5 の (2), (4) から次の結果が容易に導かれる.

命題 3.10 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $\lambda \in \boldsymbol{K}$ とする.

(1) $\|\lambda\boldsymbol{x}\| = |\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$. 従って $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}$ は単位ベクトルである.

(2) $\|\boldsymbol{x}\| \geqq 0$ であり, $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ となるのは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の場合に限る.

定理 3.11 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ のとき, 次の不等式が成り立つ.

(1) $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|$ (Schwarts の不等式). (2) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ (三角不等式).

証明 (1) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ならば両辺はともに 0 になって不等式は成り立つため, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ と仮定する. 仮定と定義 3.5 の (4) から $\|\boldsymbol{x}\| \neq 0$ であることに注意して定義 3.5 の (1), (2), (3) を用いれば, $t = -\frac{\overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ の場合, $(t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (t\boldsymbol{x}, t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + (t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}) = (t\boldsymbol{x}, t\boldsymbol{x}) + (t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = |t|^2\|\boldsymbol{x}\|^2 + t(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \bar{t}\overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^2}(\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2)$ である. 一方, 任意の $t \in \boldsymbol{K}$ に対して定義 3.5 の (4) から $(t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \geqq 0$ が成り立つため, $\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2 \geqq 0$ が得られる.

(2) 上の計算で $t = 1$ とすれば, $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\mathrm{Re}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2$ であるが, 上の結果から $\mathrm{Re}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqq |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|$ より $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 \leqq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2$ だから結果が得られる. □

命題 3.12 $f : V \to W$ を $\boldsymbol{K}$ 上の計量ベクトル空間の間の写像とする.

(1) f が内積を保てば, f は 1 次写像である.

(2) f が 1 次写像で, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\|f(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$ が成り立てば, f は内積を保つ.

(3) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対し, $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ が成り立つとき, $\tilde{f} : V \to W$ を $\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{0})$ で定めると, 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $\mathrm{Re}(\tilde{f}(\boldsymbol{x}), \tilde{f}(\boldsymbol{y})) = \mathrm{Re}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ である. とくに $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ ならば $\tilde{f}$ は内積を保つ.

証明　(1) 仮定から, 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対し $(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成り立つため,

$$\begin{aligned}
\|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\|^2 &= (f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})) \\
&= (f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) + (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x})) + (f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{y})) - (f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x})) \\
&\quad -(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) - (f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{y})) - (f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y})) + (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) \\
&\quad +(f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x})) \\
&= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \\
&\quad -(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \\
&= ((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = 0 \\
\|f(r\boldsymbol{x}) - rf(\boldsymbol{x})\|^2 &= (f(r\boldsymbol{x}) - rf(\boldsymbol{x}), f(r\boldsymbol{x}) - rf(\boldsymbol{x})) \\
&= (f(r\boldsymbol{x}), f(r\boldsymbol{x})) - (f(r\boldsymbol{x}), rf(\boldsymbol{x})) - (rf(\boldsymbol{x}), f(r\boldsymbol{x})) + (rf(\boldsymbol{x}), rf(\boldsymbol{x})) \\
&= (f(r\boldsymbol{x}), f(r\boldsymbol{x})) - \bar{r}(f(r\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x})) - r(f(\boldsymbol{x}), f(r\boldsymbol{x})) + r\bar{r}(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x})) \\
&= (r\boldsymbol{x}, r\boldsymbol{x}) - \bar{r}(r\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - r(\boldsymbol{x}, r\boldsymbol{x}) + r\bar{r}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0
\end{aligned}$$

により, f は 1 次写像である.

(2) 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\|f(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つとすれば, $\|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|^2 = \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2$ であり, この左辺は $\|f(\boldsymbol{x})\|^2 + (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) + \overline{(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))} + \|f(\boldsymbol{y})\|^2$ に等しく, 右辺は $\|\boldsymbol{x}\|^2 + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} + \|\boldsymbol{y}\|^2$ に等しいため, $(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) + \overline{(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$ が成り立つ. $\boldsymbol{y}$ を $i\boldsymbol{y}$ で置き換え, 両辺を i で割れば $(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) - \overline{(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$ となり, これと上式を辺々たして 2 で割れば $(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を得る.

(3) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $\|\tilde{f}(\boldsymbol{x}) - \tilde{f}(\boldsymbol{y})\| = \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ であり, $\tilde{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ が成り立つことに注意すると, 等式 $\|\tilde{f}(\boldsymbol{x}) - \tilde{f}(\boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ において $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ の場合を考えれば, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\|\tilde{f}(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つ. $\|\tilde{f}(\boldsymbol{x}) - \tilde{f}(\boldsymbol{y})\|^2 = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2$ の左辺は $(\tilde{f}(\boldsymbol{x}) - \tilde{f}(\boldsymbol{y}), \tilde{f}(\boldsymbol{x}) - \tilde{f}(\boldsymbol{y})) = \|\tilde{f}(\boldsymbol{x})\|^2 - 2\mathrm{Re}(\tilde{f}(\boldsymbol{x}), \tilde{f}(\boldsymbol{y})) + \|\tilde{f}(\boldsymbol{y})\|^2$ に等しく, 右辺は $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\mathrm{Re}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2$ に等しいため $\mathrm{Re}(\tilde{f}(\boldsymbol{x}), \tilde{f}(\boldsymbol{y})) = \mathrm{Re}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成り立つ. □

注意 3.4 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ の場合, 上の (3) の $\tilde{f}$ は内積を保つとは限らない. 例えば $f : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ を $f(z) = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Re}(z)i$ で定めれば, $|f(z) - f(w)| = |z - w|$ は成り立ち, $\tilde{f} = f$ であるが, $\mathrm{Im}(f(z), f(w)) = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(w) - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(w) = -\mathrm{Im}(z, w)$ となる.

定義 3.8 計量ベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の相異なる 2 つのベクトルが直交するとき, これらのベクトルを**直交系**という. さらに, 長さがすべて 1 である直交系を**正規直交系**といい, 正規直交系である基底を**正規直交基底**という.

命題 3.13 V を $\boldsymbol{K}$ 上の計量ベクトル空間とする.

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が V の直交系ならば $\frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1, \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_2\|}\boldsymbol{v}_2, \ldots, \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_k\|}\boldsymbol{v}_k$ は V の正規直交系である.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が V の直交系で, $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \boldsymbol{v}_j$ ならば $\lambda_j = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_j)}{\|\boldsymbol{v}_j\|^2}$ である. 従って, 直交系は 1 次独立である.

(3) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が V の正規直交基底ならば任意の $\boldsymbol{x} \in V$ は $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_j)\boldsymbol{v}_j$ と表せる.

証明　(1) 命題 3.10 の (1) により $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\left\| \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_j\|}\boldsymbol{v}_j \right\| = 1$ である.

(2) $\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \boldsymbol{v}_j$ ならば $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}_l) = \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_l \right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_l) = \lambda_l \|\boldsymbol{v}_l\|^2$ より結果が得られる.

(3) は (2) からただちにわかる. □

定理 3.14 V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に対し, V の正規直交基底 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ で次の条件を満たすものがある.

($*$) 各 $j = 1, 2, \ldots, n$ に対し, $a_{ij} \in \boldsymbol{K}$ $(i = 1, 2, \ldots, j-1)$ と正の実数 a_{jj} で $\boldsymbol{w}_j = a_{1j}\boldsymbol{v}_1 + a_{2j}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{jj}\boldsymbol{v}_j$ を満たすものがある.

証明 $\boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1$ とし, 正規直交系 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{k-1}$ が定まり, 各 $j = 1, 2, \ldots, k-1$ に対して $\boldsymbol{w}_j = a_{1j}\boldsymbol{v}_1 + a_{2j}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{jj}\boldsymbol{v}_j$ $(a_{ij} \in \boldsymbol{K}, a_{jj} > 0)$ の形に表せたとする. $\boldsymbol{w}'_k = -\sum_{j=1}^{k-1}(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_j)\boldsymbol{w}_j + \boldsymbol{v}_k$ とおけば, $i = 1, 2, \ldots, k-1$ に対して $(\boldsymbol{w}'_k, \boldsymbol{w}_i) = 0$ である. また, $\boldsymbol{w}_j$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_j$ の 1 次結合であることから $\boldsymbol{w}'_k = \sum_{i=1}^{k-1} a'_{ik}\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_k$ の形になる. 従って $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次独立性により $\boldsymbol{w}'_k \neq \boldsymbol{0}$ である. そこで, $\boldsymbol{w}_k = \frac{1}{\|\boldsymbol{w}'_k\|}\boldsymbol{w}'_k$ によって $\boldsymbol{w}_k$ を定めれば, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ は正規直交系であり, $\boldsymbol{w}_k = a_{1k}\boldsymbol{v}_1 + a_{2k}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{kk}\boldsymbol{v}_k$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1$ ならば $a_{ik} = \frac{a'_{ik}}{\|\boldsymbol{w}'_k\|}$, $a_{kk} = \frac{1}{\|\boldsymbol{w}'_k\|} > 0)$ の形になる. 命題 3.13 の (2) から $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ は n 次元ベクトル空間 V の n 個の 1 次独立なベクトルだから, これらは V の基底である. □

上の定理のように V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ から正規直交基底 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ を構成することを,「$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を直交化する.」といい, この構成法を **Schmidt の正規直交化法**という.

3.3 正規行列の対角化

定義 3.9 A を正方行列とする. $AA^* = A^*A$ が成り立つとき, A を**正規行列**, $A^* = A$ が成り立つとき, A を**エルミート行列**, $A^* = -A$ が成り立つとき, A を**歪エルミート行列**, $A^* = A^{-1}$ が成り立つとき, A を**ユニタリー行列**という.

エルミート行列, 歪エルミート行列, ユニタリー行列はいずれも正規行列である.

補題 3.15 $A \in \mathrm{M}_n(\boldsymbol{K})$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^n$ に対して $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y})$ が成り立つ.

証明 $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t(A\boldsymbol{x})\bar{\boldsymbol{y}} = {}^t\boldsymbol{x}{}^tA\bar{\boldsymbol{y}} = {}^t\boldsymbol{x}\overline{A^*\boldsymbol{y}} = (\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y})$ □

命題 3.16 $A \in \mathrm{M}_n(\boldsymbol{K})$ がユニタリー行列であるためには次の 2 つの条件のうち, 少なくとも一方が成り立つことが必要十分である.

(1) A の列ベクトル $A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \ldots, A\boldsymbol{e}_n$ は $\boldsymbol{K}^n$ の正規直交系である. (2) $T_A : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n$ は内積を保つ.

証明 (1) $A = (a_{ij})$ とすれば A^*A の (j, i) 成分は $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\bar{a}_{kj} = (A\boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{e}_j)$ であることから, $A^*A = E_n$ であるためには $A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \ldots, A\boldsymbol{e}_n$ が $\boldsymbol{K}^n$ の正規直交系であることが必要十分である.

(2) 補題 3.15 から $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^n$ に対して $(T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{y})) = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^*A\boldsymbol{y})$ だから $A^*A = E_n$ ならば T_A は内積を保つ. 逆に T_A が内積を保つとき, 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^n$ に対して $(\boldsymbol{x}, A^*A\boldsymbol{y}) = (T_A(\boldsymbol{x}), T_A(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ だから $(\boldsymbol{x}, A^*A\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}) = 0$ が成り立つ. とくに $\boldsymbol{x} = A^*A\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}$ とすれば, $(A^*A\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}, A^*A\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}) = 0$ だから任意の $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^n$ に対して $A^*A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$ である. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の場合を考えれば $A^*A = E_n$ が得られる. □

補題 3.17 λ が正規行列 $A \in \mathrm{M}_n(\boldsymbol{K})$ の固有値で, $\boldsymbol{x}$ が λ に対する A の固有ベクトルとすれば, $\bar{\lambda}$ は A^* の固有値で, $\boldsymbol{x}$ は λ に対する A^* の固有ベクトルである.

証明 補題 3.15 と内積の定義 3.5 から $(A^*\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{x} - \bar{\lambda}\boldsymbol{x}) = (A^*\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{x}) - (A^*\boldsymbol{x}, \bar{\lambda}\boldsymbol{x}) = (AA^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - \lambda(A^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (A^*A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - \lambda(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) - (\lambda\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{0}, A\boldsymbol{x}) = 0$ である. 同様に $(\bar{\lambda}\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{x} - \bar{\lambda}\boldsymbol{x}) =$

$(\bar{\lambda}\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{x}) - (\bar{\lambda}\boldsymbol{x}, \bar{\lambda}\boldsymbol{x}) = \bar{\lambda}(\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{x}) - \bar{\lambda}\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}) - (\lambda\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{0}, \lambda\boldsymbol{x}) = 0$ より $(A^*\boldsymbol{x} - \bar{\lambda}\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{x} - \bar{\lambda}\boldsymbol{x}) = 0$ となるため $A^*\boldsymbol{x} = \bar{\lambda}\boldsymbol{x}$ である. □

命題 3.18 λ, μ を正規行列 $A \in \mathrm{M}_n(\boldsymbol{K})$ の相異なる固有値とし, W_λ, W_μ をそれぞれ λ, μ に対する A の固有空間とすれば W_λ と W_μ は直交する.

証明 $\boldsymbol{x} \in W_\lambda$, $\boldsymbol{y} \in W_\mu$ とすれば $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, $A\boldsymbol{y} = \mu\boldsymbol{y}$ だから補題 3.17 により $A^*\boldsymbol{y} = \bar{\mu}\boldsymbol{y}$ が成り立つ. 従って内積の性質と補題 3.15 から $\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \bar{\mu}\boldsymbol{y}) = \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ となるため $(\lambda-\mu)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ が得られる. 仮定から $\lambda \neq \mu$ であるから $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ である. □

補題 3.19 (1) A, B が n 次ユニタリー行列ならば AB, A^{-1} も n 次ユニタリー行列である.

(2) A を m 次ユニタリー行列, B を n 次ユニタリー行列ならば $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ は $m+n$ 次ユニタリー行列である.

(3) U を n 次ユニタリー行列, A を n 次正規行列とすれば, $U^{-1}AU$ は正規行列である.

(4) A を正方行列とする. ユニタリー行列 U で $U^{-1}AU$ が対角行列になるものが存在すれば A は正規行列である.

証明 (1) $A^* = A^{-1}$, $B^* = B^{-1}$ より $(AB)^* = B^*A^* = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$, $(A^{-1})^* = (A^*)^* = A = (A^{-1})^{-1}$ となるため AB, A^{-1} もユニタリー行列である.

(2) $A^* = A^{-1}$, $B^* = B^{-1}$ より $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} A^* & O \\ O & B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}$ となるため $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ はユニタリー行列である.

(3) $U^{-1} = U^*$ より $(U^{-1}AU)^*(U^{-1}AU) = (U^*AU)^*(U^{-1}AU) = U^*A^*(U^*)^*U^{-1}AU = U^*A^*UU^{-1}AU = U^*A^*AU = U^*AA^*U = U^{-1}AUU^{-1}A^*U = U^{-1}AUU^*A^*(U^*)^* = (U^{-1}AU)(U^*AU)^* = (U^{-1}AU)(U^{-1}AU)^*$ となるため $U^{-1}AU$ は正規行列である.

(4) $U^{-1}AU = D$ とおく. D が対角行列ならば D^* も対角行列だから $DD^* = D^*D$ が成り立つため D は正規行列である. (1) により U^{-1} はユニタリー行列で, $A = (U^{-1})^{-1}DU^{-1}$ だから (3) により A は正規行列である. □

定理 3.20 $A \in \mathrm{M}_n(\boldsymbol{K})$ に対し, A の固有方程式の解がすべて $\boldsymbol{K}$ に属するとき, $\boldsymbol{K}$ の要素を成分にもつユニタリー行列 U で, $U^{-1}AU$ が上半三角行列になるものが存在する.

証明 n による帰納法で主張を示す. まず $n = 1$ の場合は, 主張は明らかである. 固有方程式の解がすべて $\boldsymbol{K}$ に属する任意の $n-1$ 次正方行列 B に対して $\boldsymbol{K}$ の要素を成分にもつユニタリー行列 V で, $V^{-1}BV$ が上半三角行列になるものが存在すると仮定する.

λ を A の固有値, $\boldsymbol{v}_1$ を λ に対する固有ベクトルとする. $\boldsymbol{K}^n$ のベクトル $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ で, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が $\boldsymbol{K}^n$ の基底になるものを選ぶ. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を直交化して得られる $\boldsymbol{K}^n$ の正規直交基底を $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ とすれば, $\boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1$ だから $\boldsymbol{w}_1$ も λ に対する A の固有ベクトルである. $\boldsymbol{w}_j$ を第 j 列にもつ n 次正方行列を U_1 とすれば命題 3.16 により U_1 はユニタリー行列である. (AU_1 の第 1 列) $= A\boldsymbol{w}_1 = \lambda\boldsymbol{w}_1 = \lambda U_1\boldsymbol{e}_1 = U_1(\lambda\boldsymbol{e}_1)$ だから $U_1^{-1}AU_1$ の第 1 列は $\lambda\boldsymbol{e}_1$ に等しい. そこで $U_1^{-1}AU_1$ の $(i+1, j+1)$-成分を (i, j)-成分とする $n-1$ 次正方行列を B とすれば $U_1^{-1}AU_1 = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ \boldsymbol{0} & B \end{pmatrix}$ である. 命題 3.2 から

$$F_A(t) = F_{U_1^{-1}AU_1} = \begin{vmatrix} t-\lambda & * \\ \boldsymbol{0} & tE_{n-1} - B \end{vmatrix} = (t-\lambda)|tE_{n-1} - B| = (t-\lambda)F_B(t)$$

となるため, B の固有方程式の解は A の固有方程式の解である. 従って B の固有方程式の解はすべて $\boldsymbol{K}$ に属するため, 帰納法の仮定によって $\boldsymbol{K}$ の要素を成分にもつユニタリー行列 V で, $V^{-1}BV$ が上半三角行列になるもの

が存在する. $U_2 = \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V \end{pmatrix}$ とおくと補題 3.19 の (2) により U_2 はユニタリー行列であり, さらに補題 3.19 の (1) により U_1U_2 もユニタリー行列である.

$$(U_1U_2)^{-1}A(U_1U_2) = U_2^{-1}U_1^{-1}AU_1U_2 = \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & * \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ \mathbf{0} & V^{-1}BV \end{pmatrix}$$

より $(U_1U_2)^{-1}A(U_1U_2)$ は上半三角行列である. □

補題 3.21 上半三角行列が正規行列ならば対角行列である.

証明 $A = (a_{ij})$ を n 次上半三角行列である正規行列とすれば, $i > j$ ならば $a_{ij} = 0$ である. A^*A の (j,j)-成分は $\sum_{k=1}^{n} |a_{kj}|^2 = \sum_{k=1}^{j} |a_{kj}|^2$, AA^* の (j,j)-成分は $\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2 = \sum_{k=j}^{n} |a_{jk}|^2$ だから $\sum_{k=1}^{j-1} |a_{kj}|^2 = \sum_{k=j+1}^{n} |a_{jk}|^2$ が $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して成り立つ. とくに $j = n$ の場合, $\sum_{k=1}^{n-1} |a_{kn}|^2 = 0$ だから $a_{1n} = a_{2n} = \cdots = a_{n-1\,n} = 0$ である. $l < j \leqq n$ に対して $a_{1j} = a_{2j} = \cdots = a_{j-1\,j} = 0$ が成り立つと仮定すると, $\sum_{k=1}^{l-1} |a_{kl}|^2 = \sum_{k=l+1}^{n} |a_{lk}|^2 = 0$ より $a_{1l} = a_{2l} = \cdots = a_{l-1\,l} = 0$ となるため $i < j$ ならば $a_{ij} = 0$ である. 従って A は対角行列である. □

定理 3.22 $A \in \mathrm{M}_n(\boldsymbol{K})$ に対し, A の固有方程式の解がすべて $\boldsymbol{K}$ に属するとき, A が正規行列ならば, $\boldsymbol{K}$ の要素を成分にもつユニタリー行列 U で $U^{-1}AU$ が対角行列になるものが存在する.

証明 定理 3.20 により, $\boldsymbol{K}$ の要素を成分にもつユニタリー行列 U で, $U^{-1}AU$ が上半三角行列になるものが存在する. 補題 3.19 の (3) から $U^{-1}AU$ は正規行列だから補題 3.21 によって $U^{-1}AU$ は対角行列である. □

命題 3.23 A を正方行列とする.
(1) A がエルミート行列ならば A の固有方程式の解はすべて実数である.
(2) A が歪エルミート行列ならば A の固有方程式の解はすべて純虚数である.
(3) A がユニタリー行列ならば A の固有方程式の解はすべて絶対値 1 の複素数である.

証明 まず定理 1.4 により, 複素数の範囲で A の固有方程式の解が存在することに注意する. $\lambda \in \boldsymbol{C}$ を A の固有方程式の解として, A を複素行列とみなせば, 命題 3.3 により λ は A の固有値である. そこで λ に対する A の固有ベクトル $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{C}^n$ を 1 つ選ぶ.

(1) 仮定から $A^* = A$ で $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ だから $\lambda(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = (\lambda\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v},A^*\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v},A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v},\lambda\boldsymbol{v}) = \bar{\lambda}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$ となるため $(\lambda - \bar{\lambda})(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = 0$. $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ より $\lambda - \bar{\lambda} = 0$, 従って λ は実数である.

(2) 仮定から $A^* = -A$ で $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ だから $\lambda(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = (\lambda\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v},A^*\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v},-A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v},-\lambda\boldsymbol{v}) = -\bar{\lambda}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$ となるため $(\lambda + \bar{\lambda})(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = 0$. $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ より $\lambda + \bar{\lambda} = 0$, 従って λ は純虚数である.

(3) 仮定から $A^*A = E_n$ で $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ だから $|\lambda|^2(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = (\lambda\boldsymbol{v},\lambda\boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{v},A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v},A^*A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$ となるため $(|\lambda|^2 - 1)(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = 0$. $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ より $|\lambda|^2 = 1$, 従って λ は絶対値 1 の複素数である. □

命題 3.24 A を正規行列とする.
(1) A の固有方程式の解がすべて実数ならば A はエルミート行列である.
(2) A の固有方程式の解がすべて純虚数ならば A は歪エルミート行列である.
(3) A の固有方程式の解がすべて絶対値 1 の複素数ならば A はユニタリー行列である.

証明 A を複素行列とみなせば, 定理 1.4) と定理 3.22 により, 複素数を成分とするユニタリー行列 U で $U^{-1}AU$ が対角行列になるものが存在する. そこで $D = U^{-1}AU$ とおくと $A = UDU^{-1} = UDU^*$ だから $A^* = (UDU^*)^* = (U^*)^*D^*U^* = UD^*U^{-1}$ である. また 対角行列 D の (j,j)-成分を λ_j とすれば, 命題 3.2 により $F_A(t) = F_D(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n)$ である.

(1) A の固有方程式の解がすべて実数ならば D は実数を成分とする対角行列だから $D^* = \overline{D} = D$ となるため $A^* = UD^*U^{-1} = UDU^{-1} = A$ である.

(2) A の固有方程式の解がすべて純虚数ならば D は純虚数を成分とする対角行列だから $D^* = \overline{D} = -D$ となるため $A^* = UD^*U^{-1} = U(-D)U^{-1} = -A$ である.

(3) A の固有方程式の解がすべて絶対値 1 の複素数ならば $D^*D = \overline{D}D = E_n$ だから $D^* = D^{-1}$ となるため $A^* = UD^*U^{-1} = UD^{-1}U^{-1} = (UDU^{-1})^{-1} = A^{-1}$ である. □

定理 3.25 (Cayley-Hamilton の定理) $A \in \mathrm{M}_n(\boldsymbol{C})$ に対し, A の固有多項式 $F_A(t)$ を $t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_1t + c_0$ とおくと $A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1A + c_0E_n = O$ が成り立つ.

証明　定理 3.20 により $U^{-1}AU$ が上半三角行列になるユニタリー行列 U がある. $U^{-1}AU$ の (j,j) 成分を λ_j とすれば命題 3.4 から $F_A(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n)$ となるため

$$A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1A + c_0E_n = (A-\lambda_1E_n)(A-\lambda_2E_n)\cdots(A-\lambda_nE_n)$$

である. この両辺に左から U^{-1}, 右から U をかけると

$$\begin{aligned} U^{-1}(A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1A + c_0E_n)U &= U^{-1}(A-\lambda_1E_n)(A-\lambda_2E_n)\cdots(A-\lambda_nE_n)U \\ &= U^{-1}(A-\lambda_1E_n)UU^{-1}(A-\lambda_2E_n)U\cdots U^{-1}(A-\lambda_nE_n)U \\ &= (U^{-1}AU-\lambda_1E_n)(U^{-1}AU-\lambda_2E_n)\cdots(U^{-1}AU-\lambda_nE_n) \end{aligned}$$

となるため $(U^{-1}AU-\lambda_1E_n)(U^{-1}AU-\lambda_2E_n)\cdots(U^{-1}AU-\lambda_nE_n) = O$ であることを示せばよい.

$B = U^{-1}AU$ とおくと B は (j,j) 成分が λ_j である上半三角行列だから $(B-\lambda_1E_n)\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0}$ であり, $2 \leqq j \leqq n$ ならば $(B-\lambda_jE_n)\boldsymbol{e}_j = \sum_{k=1}^{j-1} b_{kj}\boldsymbol{e}_k$ と表される. $(B-\lambda_1E_n)(B-\lambda_2E_n)\cdots(B-\lambda_{j-1}E_n)\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{0}$ が $k = 1,2,\ldots,j-1$ に対して成り立つと仮定すれば, $k = 1,2,\ldots,j-1$ のとき

$$\begin{aligned} (B-\lambda_1E_n)(B-\lambda_2E_n)\cdots(B-\lambda_jE_n)\boldsymbol{e}_k &= (B-\lambda_jE_n)(B-\lambda_1E_n)\cdots(B-\lambda_{j-1}E_n)\boldsymbol{e}_k = (B-\lambda_jE_n)\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \\ (B-\lambda_1E_n)(B-\lambda_2E_n)\cdots(B-\lambda_jE_n)\boldsymbol{e}_j &= (B-\lambda_1E_n)(B-\lambda_2E_n)\cdots(B-\lambda_{j-1}E_n)\left(\sum_{k=1}^{j-1} b_{kj}\boldsymbol{e}_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} b_{kj}(B-\lambda_1E_n)(B-\lambda_2E_n)\cdots(B-\lambda_{j-1}E_n)\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

が成り立つ. これより j による帰納法で $k = 1,2,\ldots,j$ に対して $(B-\lambda_1E_n)(B-\lambda_2E_n)\cdots(B-\lambda_jE_n)\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{0}$ が示され, とくに $j = n$ の場合, $k = 1,2,\ldots,n$ に対して $(B-\lambda_1E_n)(B-\lambda_2E_n)\cdots(B-\lambda_nE_n)\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{0}$ だから $(B-\lambda_1E_n)(B-\lambda_2E_n)\cdots(B-\lambda_nE_n) = O$ が得られる. □

3.4　実正規行列

$\boldsymbol{C}^n$ を $\boldsymbol{R}$ 上の $2n$ 次元ベクトル空間とみなせば, $\boldsymbol{R}^n$ は $\boldsymbol{C}^n$ の n 次元部分空間であることに注意する.

命題 3.26 $\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が $\boldsymbol{R}^n$ において 1 次独立であるためには, $\boldsymbol{R}^n \subset \boldsymbol{C}^n$ とみなしたとき, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は $\boldsymbol{C}^n$ において 1 次独立であることが必要十分である.

証明　$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が $\boldsymbol{R}^n$ において 1 次独立であるとして, $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \boldsymbol{C}$ に対し $z_1\boldsymbol{v}_1 + z_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + z_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ が成り立つとする. $z_j = x_j + y_ji$ $(x_j, y_j \in \boldsymbol{R},\ j = 1,2,\ldots,k)$ とおいて上式に代入すれば $x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k + i(y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_k\boldsymbol{v}_k) = \boldsymbol{0}$ が得られる. $x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k, y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_k\boldsymbol{v}_k \in \boldsymbol{R}^n$ だから, $x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k = y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ が成り立つ. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の $\boldsymbol{R}^n$ における 1 次独

立性から $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = y_1 = y_2 = \cdots = y_k = 0$, 従って $z_1 = z_2 = \cdots = z_k = 0$ となるため $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は $\boldsymbol{C}^n$ において 1 次独立である.

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が $\boldsymbol{C}^n$ において 1 次独立ならば $\boldsymbol{R}^n$ において 1 次独立であることは明らかである. □

系 3.27 $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\boldsymbol{R})$ の階数 $\mathrm{rank}_{\boldsymbol{R}} A$ は A を $\mathrm{M}_{m,n}(\boldsymbol{C})$ の要素とみなした場合の階数 $\mathrm{rank}_{\boldsymbol{C}} A$ と等しい.

証明 $\mathrm{rank}_{\boldsymbol{R}} A$ は A の列ベクトル $A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \ldots, A\boldsymbol{e}_n \in \boldsymbol{R}^m$ の中で 1 次独立なベクトルの最大個数であるが, 命題 3.26 により, この個数は $A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \ldots, A\boldsymbol{e}_n$ を $\boldsymbol{C}^m$ のベクトルとみなした場合の 1 次独立なベクトルの最大個数に等しい. さらにこの個数は $\mathrm{rank}_{\boldsymbol{C}} A$ であるため $\mathrm{rank}_{\boldsymbol{R}} A = \mathrm{rank}_{\boldsymbol{C}} A$ である. □

補題 3.28 $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\boldsymbol{R})$ に対し, $V = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$, $W = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ とおく. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が W の基底ならば, $\boldsymbol{R}^n \subset \boldsymbol{C}^n$ とみなしたとき, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は V の基底である.

証明 定理 2.13, 系 3.27 から $\dim V = n - \mathrm{rank}_{\boldsymbol{C}} A = n - \mathrm{rank}_{\boldsymbol{R}} A = \dim W = k$ である. 一方, 命題 3.26 から $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は V の 1 次独立な k 個のベクトルであるから $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は V の基底である. □

補題 3.29 λ を $A \in \mathrm{M}_n(\boldsymbol{R})$ の実数の固有値とし, W_λ を λ に対する A の固有空間 $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n \mid A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$ とする. このとき, W_λ の正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ で, $j = 1, 2, \ldots, k$ に対して $\boldsymbol{v}_j \in \boldsymbol{R}^n$ であるものが存在する.

証明 $\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_k$ を $W_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$ の基底として, これらを正規直交化したものを $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ とすれば, W_λ の正規直交基底である. さらに補題 3.28 により $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は W_λ の基底である. □

補題 3.30 μ を $A \in \mathrm{M}_n(\boldsymbol{R})$ の虚数の固有値とし, W_μ を μ に対する A の固有空間とする.

(1) μ の共役複素数 $\bar{\mu}$ も A の固有値で, $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n \mid \bar{\boldsymbol{x}} \in W_\mu\}$ は $\bar{\mu}$ に対する A の固有空間である.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が W_μ の基底ならば $\bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \bar{\boldsymbol{v}}_k$ は $W_{\bar{\mu}}$ の基底である.

(3) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が W_μ の正規直交基底ならば $\bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \bar{\boldsymbol{v}}_k$ は $W_{\bar{\mu}}$ の正規直交基底である.

証明 (1) $\boldsymbol{x}$ を μ に対する A の固有ベクトルとして $A\boldsymbol{x} = \mu\boldsymbol{x}$ の両辺の共役を考えれば命題 3.9 の (2) により $\overline{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\mu}\bar{\boldsymbol{x}}$ である. 一方 A の成分は実数だから $\overline{A} = A$ であるため, $A\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\mu}\bar{\boldsymbol{x}}$ となって $\bar{\mu}$ も A の固有値で, $\bar{\boldsymbol{x}}$ は $\bar{\mu}$ に対する A の固有ベクトルである. $\bar{\mu}$ に対する A の固有空間を $W_{\bar{\mu}}$ とすれば, $\bar{\boldsymbol{x}} \in W_\mu$ ならば $\boldsymbol{x} = \bar{\bar{\boldsymbol{x}}} \in W_{\bar{\mu}}$ である. 逆に $\boldsymbol{x} \in W_{\bar{\mu}}$ ならば $A\boldsymbol{x} = \bar{\mu}\boldsymbol{x}$ だから, 両辺の共役を考えると $A\bar{\boldsymbol{x}} = \mu\bar{\boldsymbol{x}}$ となるため $\bar{\boldsymbol{x}} \in W_\mu$ である. 故に $W_{\bar{\mu}} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n \mid \bar{\boldsymbol{x}} \in W_\mu\}$ が成り立つ.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を W_μ の基底とする. $x_1\bar{\boldsymbol{v}}_1 + x_2\bar{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_k\bar{\boldsymbol{v}}_k = \boldsymbol{0}$ ならば, 両辺の共役を考えると $\bar{x}_1\boldsymbol{v}_1 + \bar{x}_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \bar{x}_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ が得られ, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の 1 次独立性により $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \cdots = \bar{x}_k = 0$ である. 従って $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ となるため $\bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \bar{\boldsymbol{v}}_k$ は 1 次独立である. 任意の $\boldsymbol{x} \in W_{\bar{\mu}}$ に対して $\bar{\boldsymbol{x}} \in W_\mu$ だから $\bar{\boldsymbol{x}} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k$ と表される. この両辺の共役をとれば $\boldsymbol{x} = x_1\bar{\boldsymbol{v}}_1 + x_2\bar{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_k\bar{\boldsymbol{v}}_k$ と なるため, $\bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \bar{\boldsymbol{v}}_k$ は $W_{\bar{\mu}}$ を生成する. 従って $\bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \bar{\boldsymbol{v}}_k$ は $W_{\bar{\mu}}$ の基底である.

(3) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を W_μ の正規直交基底とする. (2) により $\bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \bar{\boldsymbol{v}}_k$ は $W_{\bar{\mu}}$ の基底であり, $(\bar{\boldsymbol{v}}_i, \bar{\boldsymbol{v}}_j) = {}^t\bar{\boldsymbol{v}}_i\boldsymbol{v}_j = \overline{{}^t\boldsymbol{v}_i\bar{\boldsymbol{v}}_j} = \overline{(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ だから $\bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \bar{\boldsymbol{v}}_k$ は正規直交系である. □

成分が実数である正規行列を**実正規行列**と呼ぶ. また, すべての成分が実数であるユニタリー行列を**直交行列**と呼ぶことにする.

A を n 次実正規行列とすれば, 系 1.6 により, A の固有多項式 $F_A(t)$ は $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ を相異なる実数, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ を相異なる虚数として

$$F_A(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\cdots(t-\lambda_r)^{m_r}(t-\mu_1)^{l_1}(t-\bar{\mu}_1)^{l_1}(t-\mu_2)^{l_2}(t-\bar{\mu}_2)^{l_2}\cdots(t-\mu_s)^{l_s}(t-\bar{\mu}_s)^{l_s}$$

$(m_1 + m_2 + \cdots + m_r + 2(l_1 + l_2 + \cdots + l_s) = n)$ という形に因数分解される. A を複素数を成分とする行列とみなせば $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2, \bar{\mu}_2, \ldots, \mu_s, \bar{\mu}_s$ は相異なる A の固有値であり, λ_j, μ_j, $\bar{\mu}_j$ に対する A の固有空間を

それぞれ W_{λ_j}, W_{μ_j}, $W_{\bar{\mu}_j}$ とする．このとき定理 3.8 により, $\dim W_{\lambda_j} = m_j$, $\dim W_{\mu_j} = \dim W_{\bar{\mu}_j} = j_j$ であることに注意する．λ_j は実数だから, 補題 3.29 により W_{λ_j} の正規直交基底 $\boldsymbol{v}_{j1}, \boldsymbol{v}_{j2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{j\,m_j}$ で, $\boldsymbol{R}^n$ に含まれるものがとれる．また, $\boldsymbol{w}_{j1}, \boldsymbol{w}_{j2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{j\,l_j}$ を W_{μ_j} の正規直交基底とすれば, 補題 3.30 により $\bar{\boldsymbol{w}}_{j1}, \bar{\boldsymbol{w}}_{j2}, \ldots, \bar{\boldsymbol{w}}_{j\,l_j}$ は $W_{\bar{\mu}_j}$ の正規直交基底である．そこで $j = 1, 2, \ldots, s$, $k = 1, 2, \ldots, l_j$ に対して

$$\boldsymbol{x}_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{w}_{jk} + \bar{\boldsymbol{w}}_{jk}), \qquad \boldsymbol{y}_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\boldsymbol{w}_{jk} - \bar{\boldsymbol{w}}_{jk})$$

とおくと, これらは $\boldsymbol{R}^n$ に含まれ,

$$\boldsymbol{w}_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{x}_{jk} + i\boldsymbol{y}_{jk}), \qquad \bar{\boldsymbol{w}}_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{x}_{jk} - i\boldsymbol{y}_{jk})$$

が成り立つため,

$$A\boldsymbol{x}_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A\boldsymbol{w}_{jk} + A\bar{\boldsymbol{w}}_{jk}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu_j\boldsymbol{w}_{jk} + \bar{\mu}_j\bar{\boldsymbol{w}}_{jk}) = \frac{1}{2}(\mu_j + \bar{\mu}_j)\boldsymbol{x}_{jk} - \frac{1}{2i}(\mu_j - \bar{\mu}_j)\boldsymbol{y}_{jk}$$
$$A\boldsymbol{y}_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2}i}(A\boldsymbol{w}_{jk} - A\bar{\boldsymbol{w}}_{jk}) = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\mu_j\boldsymbol{w}_{jk} - \bar{\mu}_j\bar{\boldsymbol{w}}_{jk}) = \frac{1}{2i}(\mu_j - \bar{\mu}_j)\boldsymbol{x}_{jk} + \frac{1}{2}(\mu_j + \bar{\mu}_j)\boldsymbol{y}_{jk}$$

である．従って $\mu_j = a_j + b_j i$ $(a_j, b_j \in \boldsymbol{R})$ とおくと,

$$A\boldsymbol{x}_{jk} = a_j\boldsymbol{x}_{jk} - b_j\boldsymbol{y}_{jk}, \qquad A\boldsymbol{y}_{jk} = b_j\boldsymbol{x}_{jk} + a_j\boldsymbol{y}_{jk} \quad \cdots\ (*)$$

が成り立つ．命題 3.18 により

$$\boldsymbol{v}_{11}, \boldsymbol{v}_{12}, \ldots, \boldsymbol{v}_{1m_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{r1}, \boldsymbol{v}_{r2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{r\,m_r}, \boldsymbol{w}_{11}, \bar{\boldsymbol{w}}_{11}, \ldots, \boldsymbol{w}_{1l_1}, \bar{\boldsymbol{w}}_{1l_1}, \ldots, \boldsymbol{w}_{s1}, \bar{\boldsymbol{w}}_{s1}, \ldots, \boldsymbol{w}_{s\,l_s}, \bar{\boldsymbol{w}}_{s\,l_s}$$

は正規直交系だから,

$$\boldsymbol{v}_{11}, \boldsymbol{v}_{12}, \ldots, \boldsymbol{v}_{1m_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{r1}, \boldsymbol{v}_{r2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{r\,m_r}, \boldsymbol{x}_{11}, \boldsymbol{y}_{11}, \ldots, \boldsymbol{x}_{1l_1}, \boldsymbol{y}_{1l_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{s1}, \boldsymbol{y}_{s1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{s\,l_s}, \boldsymbol{y}_{s\,l_s}$$

は $\boldsymbol{R}^n$ の正規直交系になることがわかる．これらのベクトルをこの順に列ベクトルにもつ行列を P とすれば, 命題 3.16 により, P は直交行列である．

$A\boldsymbol{v}_{jk} = \mu_j\boldsymbol{v}_{jk}$ と関係式 $(*)$ が成り立つことから, $C_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$ とおき, さらに D_j を

$$D_j = \begin{pmatrix} C_j & & & \text{\huge 0} \\ & C_j & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & C_j \end{pmatrix}$$

という形の $2l_j$ 次正方行列とすれば, $P^{-1}AP$ は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mu_1 E_{m_1} & & & & & \\ & \ddots & & & \text{\huge 0} & \\ & & \mu_r E_{m_r} & & & \\ & & & D_1 & & \\ & \text{\huge 0} & & & \ddots & \\ & & & & & D_s \end{pmatrix}$$

という形になる．以上から, 次の定理が示された．

定理 3.31 A を n 次実正規行列とするとき, 直交行列 P で $P^{-1}AP$ が 対角線上に対角行列と $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の形の行列が並ぶようになるものがある．