5. ベクトル空間

5.1 複素数

定義 5.1 複素数 $z = x + yi \ (x, y \in \boldsymbol{R})$ に対し，$x - yi$ を z の**共役複素数**といい，$\bar{z}$ で表す．

また，実数 x, y, $\sqrt{x^2 + y^2}$ をそれぞれ z の**実部**，**虚部**，**絶対値**といい，$\mathfrak{Re}\,(z)$, $\mathfrak{Im}\,(z)$, $|z|$ で表す．$\mathfrak{Im}\,(z) \neq 0$ ならば z を**虚数**といい，さらに $\mathfrak{Re}\,(z) = 0$ ならば z を**純虚数**という．

定義 5.2 複素数 $x + iy$ と実 2 次元数ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を対応させることによって，複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ を実 2 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^2$ と同一視する．このように，同一視を行った $\boldsymbol{R}^2$ を**複素平面**とよぶ．このとき，z の絶対値は複素平面における 0 と z との距離にほかならないため，$z = x + yi \neq 0$ の場合，$x = |z|\cos\theta$, $y = |z|\sin\theta$ となる $0 \leqq \theta < 2\pi$ が一意的に定まる．この θ を z の**偏角**といい $\arg z$ で表す．

命題 5.1 複素数 z, w に対し，等式 $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$ が成り立つ．また，z が実数であるためには $\bar{z} = z$ が成り立つことが必要十分である．

命題 5.2 複素数 z, w に対し, 次が成り立つ.

(1) $|z| \geqq 0$ であり，等号成立は $z = 0$ の場合に限る．

(2) $|zw| = |z||w|$

(3) $|z + w| \leqq |z| + |w|$ であり，等号成立は $zw = 0$ または
$\arg z = \arg w$ の場合に限る．

命題 5.3 0 でない複素数 z, w に対して $\arg(zw) = \begin{cases} \arg z + \arg w & (\arg z + \arg w < 2\pi) \\ \arg z + \arg w - 2\pi & (\arg z + \arg w \geqq 2\pi) \end{cases}$ が成り立つ．

定理 5.4 複素数を係数にもつ方程式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \ (a_n \neq 0)$ は $\boldsymbol{C}$ の中に解をもつ．従って，複素数を係数にもつ 1 変数の多項式は 1 次式の積に因数分解される．

定義 5.3 α が複素数を係数にもつ方程式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \ (a_n \neq 0)$ の解であるとき，正の整数 m と x の $(n - m)$ 次多項式 $p(x)$ で $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - \alpha)^m p(x)$ かつ $p(\alpha) \neq 0$ をみたすものが一通りに定まるが，このとき m を解 α の**重複度**という．また，重複度が $m \ (\geqq 2)$ である解を m **重解** (または m **重根**) とよぶ.

命題 5.5 実数を係数にもつ方程式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \ (a_n \neq 0)$ が $\alpha \in \boldsymbol{C}$ を解にもてば，$\bar{\alpha}$ も解である．

系 5.6 実数を係数にもつ 1 変数の多項式は，実数を係数とする 1 次式と 2 次式の積に因数分解される．

5.2 ベクトル空間の定義と例

定義 5.4 集合 V に，加法，スカラー倍とよばれる次の 2 種類の演算

- **加法** : V の 2 つの要素の組 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対して V の要素 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ を対応させる演算.
- **スカラー倍** : $\boldsymbol{K}$ の要素 r と V の要素 $\boldsymbol{x}$ の組 $(r, \boldsymbol{x})$ に対して V の要素 $r\boldsymbol{x}$ を対応させる演算.

が定義されていて，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$, $r, s \in \boldsymbol{K}$ に対して次の (i)〜(viii) が成り立つとき， V を $\boldsymbol{K}$ 上の**ベクトル空間**という．また V の要素を**ベクトル**とよび，それに対し $\boldsymbol{K}$ の要素を**スカラー**とよぶ.

(i) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ (**結合法則**).

(ii) V の要素 $\boldsymbol{0}$ で，すべての $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ をみたすものがある．

(iii) 各 $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ をみたす $\boldsymbol{x}' \in V$ がある．

(iv) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ (**交換法則**).

(v) $(rs)\boldsymbol{x} = r(s\boldsymbol{x})$ (**結合法則**).

(vi) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

(vii) $r(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = r\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{y}$ (**分配法則**).
(viii) $(r+s)\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{x}$ (**分配法則**).

注意 (1) 上の定義の (ii) における $\mathbf{0}$ は V の中にただ一つしか存在しない．このような V の要素を**零ベクトル**とよぶ．
(2) 上の定義の (iii) をみたす $\boldsymbol{x}'$ は各 $\boldsymbol{x} \in V$ に対してただ一つだけ存在する．このような $\boldsymbol{x}'$ を $-\boldsymbol{x}$ で表し，さらに $\boldsymbol{y} \in V$ に対して，$\boldsymbol{y}+(-\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$ で表すことにする．

命題 5.7 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする．
(1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ に対して $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$ ならば $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ である．
(2) 任意の $\boldsymbol{x} \in V$, $r \in \boldsymbol{K}$ に対して $0\boldsymbol{x} = r\mathbf{0} = \mathbf{0}$，$-\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x}$ が成り立つ．

定義 5.5 $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V の部分集合 W が条件「$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$, $r \in \boldsymbol{K}$ ならば $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, r\boldsymbol{x} \in W$」をみたすとき，$W$ を V の**部分空間**または**部分ベクトル空間**という．

$\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ に対し，$x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k$ $(x_1, x_2, \ldots, x_k \in \boldsymbol{K})$ の形に表される V のベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の**１次結合**とよぶ．

定義 5.6 $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の１次結合によって表されるベクトル全体からなる集合を $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ で表し，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ で**生成**される (張られる) V の部分空間という．これは V の部分空間である．また，$V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ が成り立つとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は V を**生成する**という．

5.3 ベクトルの１次独立性

定義 5.7 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ に対し，関係式

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k = \mathbf{0} \qquad (*)$$

をみたす $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \boldsymbol{K}$ が $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ に限るとき $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は**１次独立**であるという．
また $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が１次独立でないとき，これらは**１次従属**であるという．すなわち，関係式 $(*)$ をみたす $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \boldsymbol{K}$ で $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ 以外のものがあるとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は１次従属であるという．

命題 5.8 $\boldsymbol{K}$ 上の ベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が１次従属であるためには $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ のいずれか一つのベクトルが残りのベクトルの１次結合で表されることが必要十分である．

定理 5.9 $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V の m 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ の１次結合として表される n 個のベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ が与えられたとする．$m < n$ ならば $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ は１次従属である．

系 5.10 V が m 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ で生成されているとする．V のベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ が１次独立であれば，$n \leqq m$ である．

補題 5.11 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を V の１次独立なベクトルとする．
(1) V のベクトル $\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の１次結合ではないとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}$ は１次独立である．
(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が V を生成しないならば，V のベクトル $\boldsymbol{w}$ で $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}$ が１次独立になるものが存在する．

定理 5.12 ベクトル空間 V の $n+1$ 個以上のベクトルがつねに１次従属になるならば，n 個以下の１次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ で V を生成するものが存在する．

5.4 ベクトル空間の次元

定義 5.8 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が１次独立であり，かつ V を生成するとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の**基底**であるという．

定理 5.13 V が n 個のベクトルで生成されているならば，n 個以下のベクトルからなる V の基底が存在する．

命題 5.14 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底であるためには，V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ をみたす $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{K}$ がただ一通りに定まることが必要十分である．

命題 5.15 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ がともに V の基底ならば $n = m$ である．

定義 5.9 V が n 個のベクトルからなる基底をもつとき，V の**次元**は n であるといい，V の次元を $\dim V$ で表す．

定理 5.16 V を $\boldsymbol{K}$ 上の n 次元ベクトル空間とする．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を 1 次独立な V のベクトルとすれば $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を含む V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が存在する．

定理 5.17 V が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ で生成されているとする．$\boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_n}$ $(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqq m)$ が 1 次独立で，すべての $j = 1, 2, \ldots, m$ に対して $\boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_n}, \boldsymbol{v}_j$ が 1 次従属ならば $\boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_n}$ は V の基底である．

注意 V を生成するベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ の中で 1 次独立であるベクトルからなる極大な部分集合は V の基底である．ここで「極大」とは「一つでも他のベクトルを付け加えれば 1 次従属になってしまう」という意味である．従って，V の次元はこのような極大な部分集合の要素の個数であり，**V の次元は V を生成するベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ の中で 1 次独立であるベクトルの最大個数**である．

　また，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ の中で $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が 1 次独立ならば，$\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{v}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ のうちからベクトル $\boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_l}$ を選んで，上で述べた意味で 1 次独立であるベクトルからなる極大な部分集合 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_l}$ をつくると，これらは V の基底になる．

定理 5.18 V を $\boldsymbol{K}$ 上の n 次元ベクトル空間，W を V の部分空間とする．このとき $\dim W \leqq \dim V$ であり，等号が成立するのは $W = V$ の場合に限る．

定理 5.19 $\dim V = n$ とするとき，V の n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立であるか または V を生成すれば，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基底になる．

5.5 部分空間の和と直和

定義 5.10 $W_1, W_2, \ldots, W_k$ を V の部分空間とするとき，V の部分集合 $W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ を

$$\left\{ \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{w}_j \;\middle|\; \boldsymbol{w}_j \in W_j \ (j = 1, 2, \ldots, k) \right\}$$

によって定め，$W_1, W_2, \ldots, W_k$ の**和**とよぶ．

定理 5.20 W_1, W_2 を V の部分空間とするとき，$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$ が成り立つ．

系 5.21 V の部分空間 $W_1, W_2, \ldots, W_k$ に対し，次の関係式が成り立つ．

$$\dim(W_1 + W_2 + \cdots + W_k) = \sum_{i=1}^{k} \dim W_i - \sum_{i=1}^{k-1} \dim((W_1 + W_2 + \cdots + W_i) \cap W_{i+1})$$

定義 5.11 W_1, W_2 を V の部分空間とする．次の 2 つの条件 (1), (2) がみたされるとき，V は W_1 と W_2 の**直和**であるという．

(1) $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ をみたす $\boldsymbol{v}_1 \in W_1, \boldsymbol{v}_2 \in W_2$ は $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ に限る．

(2) $V = W_1 + W_2$．

V が W_1 と W_2 の直和であることを $V = W_1 \oplus W_2$ で表す．

命題 5.22 V の部分空間 W_1, W_2 に関して以下の条件 (1)〜(4) は同値である．

(1) $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ をみたす $\boldsymbol{v}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in W_2$ は $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ に限る．

(2) $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ を W_1 の基底，$\boldsymbol{w}_{k+1}, \boldsymbol{w}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{k+l}$ を W_2 の基底とすると，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{k+l}$ は $W_1 + W_2$ の基底である．

(3) $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$.

(4) $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$.

定義 5.12 $W_1, W_2, \ldots, W_k$ を V の部分空間とする．次の 2 つの条件 (1), (2) がみたされるとき，V は $W_1, W_2, \ldots, W_k$ の直和であるという．

(1) $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ をみたす $\boldsymbol{v}_i \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ は $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \cdots = \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ に限る．

(2) $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$.

V が $W_1, W_2, \ldots, W_k$ の直和であることを $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$ で表す．

命題 5.23 V の部分空間 $W_1, W_2, \ldots, W_k$ に対し，以下の条件 (1)〜(4) は同値である．

(1) $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ をみたす $\boldsymbol{v}_i \in W_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ は $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \cdots = \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ に限る．

(2) 各 $i = 1, 2, \ldots, k$ に対し $\boldsymbol{w}_{s_{i-1}+1}, \boldsymbol{w}_{s_{i-1}+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_i}$ $(0 = s_0 \leqq s_1 \leqq s_2 \leqq \cdots \leqq s_k)$ が W_i の基底ならば，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_k}$ は $W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ の基底である．

(3) $\dim(W_1 + W_2 + \cdots + W_k) = \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_k$.

(4) $i = 1, 2, \ldots, k-1$ に対し $(W_1 + W_2 + \cdots + W_i) \cap W_{i+1} = \{\boldsymbol{0}\}$.

6. ベクトル空間と１次写像

6.1 １次写像の定義と性質

定義 6.1 V, W を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする．V から W への写像 f が，任意の V のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ と $r \in \boldsymbol{K}$ に対して，次の (i), (ii) をみたすとき，V から W への**１次写像**という．なお，$V = W$ のときは，V の**１次変換**という．

(i) $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$

(ii) $f(r\boldsymbol{x}) = rf(\boldsymbol{x})$

注意 $f : V \to W$ が 1 次写像ならば，$f(\boldsymbol{0}) = f(0\boldsymbol{0}) = 0f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ である．また，任意の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ と $r_1, r_2, \ldots, r_k \in \boldsymbol{K}$ に対して $f(r_1\boldsymbol{v}_1 + r_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + r_k\boldsymbol{v}_k) = r_1 f(\boldsymbol{v}_1) + r_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + r_k f(\boldsymbol{v}_k)$ が成り立つ．

命題 6.1 $f : V \to W$, $g : W \to Z$ を 1 次写像とする．

(1) 合成写像 $g \circ f : V \to Z$ は 1 次写像であり, 恒等変換 $\mathbf{Id}_V : V \to V$ は 1 次変換である．

(2) f が全単射ならば，逆写像 $f^{-1} : W \to V$ も 1 次写像である．

命題 6.2 V, W を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間として，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ を W のベクトルとする．このとき，1 次写像 $f : V \to W$ で $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ をみたすものがただ一つ存在する．

補題 6.3 1 次写像 $f : V \to W$ が単射であるためには，条件「$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」が成り立つことが必要十分である．

命題 6.4 $f : V \to W$ を 1 次写像，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V のベクトルとする．

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立で f が単射ならば $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は 1 次独立である．

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V を生成し，$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が 1 次独立ならば f は単射である．

(3) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V を生成し，f が全射ならば $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は W を生成する．

(4) $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が W を生成していれば f は全射である．

定義 6.2 全単射である 1 次写像を**同型写像**という．ベクトル空間 V, W の間に同型写像があるとき，V と W は**同型**であるという．

注意 $f: V \to W$, $g: W \to Z$ が同型写像ならば，f と g の合成写像 $g\circ f: V \to W$ および f の逆写像 $f^{-1}: W \to V$ はともに１次写像であり，これらは全単射でもあるから，$g\circ f$, f^{-1} も同型写像である．

定理 6.5 $f: V \to W$ を１次写像，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とする．f が同型写像であるためには，$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が W の基底であることが必要十分である．

定理 6.6 $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V と W が同型であるためには $\dim V = \dim W$ であることが必要十分である．

注意 $\dim V = n$ ならば V と $\boldsymbol{K}^n$ は同型である．V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を定めれば $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{e}_j$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ をみたす同型写像 $f: V \to \boldsymbol{K}^n$ があるが，この写像によって (抽象的な) ベクトル空間 V の各ベクトルを，加法とスカラー倍の演算を保ったまま，具体的な数ベクトルに１対１に対応させることができる．従って，この f により V と $\boldsymbol{K}^n$ はベクトル空間としては「同じ型」であるとみなすことができる．

6.2 １次写像の階数と次元公式

定義 6.3 １次写像 $f: V \to W$ に対し，$\mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Im}f$ を

$$\mathrm{Ker}f = \{\boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}, \quad \mathrm{Im}f = \{\boldsymbol{y} \in W \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \text{ をみたす } \boldsymbol{x} \in V \text{ がある }\}$$

により定めれば，これらはそれぞれ V, W の部分空間である．$\mathrm{Ker}f$ を f の**核**，$\mathrm{Im}f$ を f の**像**という．

注意 (1) １次写像 $f: V \to W$ が単射であるためには $\mathrm{Ker}f = \{\boldsymbol{0}\}$ であることが必要十分である．また，１次写像 $f: V \to W$ が全射であるとは $\mathrm{Im}f = W$ が成り立つことにほかならないが，このことは $\dim \mathrm{Im}f = \dim W$ と同値である．

(2) $m \times n$ 行列 A を係数行列とする斉次連立１次方程式の解のベクトル全体の集合 $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ を A を係数行列とする斉次連立１次方程式の**解空間**という．A の表す１次写像 $T_A: \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ の核は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ をみたす $\boldsymbol{K}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ 全体からなる集合であるから，A を係数行列とする斉次連立１次方程式の解空間にほかならない．また，T_A の像は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ をみたす $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ が存在するような $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{K}^m$ 全体からなる集合である．いい替えれば，これは $(A \mid \boldsymbol{b})$ を拡大係数行列とする連立１次方程式が解をもつ $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{K}^m$ 全体からなる集合である．

定義 6.4 $f: V \to W$ を１次写像とするとき，$\dim \mathrm{Im}f$ を f の**階数**とよんで，$\mathrm{rank}\, f$ で表す．

命題 6.7 $f: V \to W$ を１次写像とする．V が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ で生成されるならば，$\mathrm{Im}f$ は $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ で生成される．また $\mathrm{rank}\, f$ は $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ のうちで１次独立なベクトルの最大個数に等しい．

命題 6.8 $f: V \to W$, $g: W \to Z$ を１次写像とする．

(1) f が全射ならば $\mathrm{Im}(g\circ f) = \mathrm{Im}g$ である．従って，$\mathrm{rank}(g\circ f) = \mathrm{rank}\, g$ である．

(2) g が単射ならば $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}f$ を $g(\boldsymbol{y})$ に対応させる写像は $\mathrm{Im}f$ から $\mathrm{Im}(g\circ f)$ への同型写像である．従って，$\mathrm{rank}(g\circ f) = \mathrm{rank}\, f$ である．

系 6.9 $f: V \to W$ を１次写像とする．$h: U \to V$, $g: W \to Z$ がともに同型写像ならば $\mathrm{rank}(g\circ f\circ h) = \mathrm{rank}\, f$ である．

定理 6.10 行列 A の階数 $\mathrm{rank}\, A$ は $\mathrm{rank}\, T_A$ に等しい．従って，A を行について基本変形して得られる階段行列の零ベクトルではない行ベクトルの数は，A の基本変形のやり方よらず一定である．

命題 6.11 $\boldsymbol{K}^n$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ に対し，次の等式が成り立つ．

$$\dim\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle = \mathrm{rank} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_k \end{pmatrix}$$

定理 6.12 １次写像 $f: V \to W$ に対し，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ を $\mathrm{Im}f$ の基底として，V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ で $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ をみたすものをとる．さらに $\boldsymbol{v}_{r+1}, \boldsymbol{v}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{r+k}$ を $\mathrm{Ker}f$ の基底とすれば，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{r+k}$ は V の基底である．従って，等式 $\dim \mathrm{Ker}f + \mathrm{rank}\, f = \dim V$ が成り立つ．

定理 6.13 $m \times n$ 行列 A を係数行列とする斉次連立１次方程式の解空間の次元は $n - \mathrm{rank}\, A$ である．

命題 6.14 $\dim V = \dim W$ のとき，1次写像 $f : V \to W$ が単射または全射であれば f は同型写像である．

命題 6.15 1次写像 $f : V \to W$ が単射であるためには $\operatorname{rank} f = \dim V$ が成り立つことが必要十分である．

命題 6.16 A を $m \times n$ 行列とする．A の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が $\boldsymbol{K}^m$ を生成するためには $\operatorname{rank} A = m$ であることが必要十分であり，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が1次独立であるためには $\operatorname{rank} A = n$ であることが必要十分である．従って，$m = n$ の場合 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が $\boldsymbol{K}^n$ の基底であるためには，A が正則行列であることが必要十分である．

6.3 1次写像の表現行列

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V の基底とするとき，$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ によって，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の並ぶ順序も考慮に入れた V の基底を表すことにする．すなわち，V の2つの基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ が同じであるとは，すべての $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{w}_j$ が成り立つことを意味するものとする．

定義 6.5 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ をそれぞれ $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V, W の基底とする．1次写像 $f : V \to W$ に対し，

$$f(\boldsymbol{v}_j) = a_{1j}\boldsymbol{w}_1 + a_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{w}_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i \qquad (a_{ij} \in \boldsymbol{K})$$

であるとき $m \times n$ 行列 (a_{ij}) を基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する f の**表現行列**という．とくに $V = W$ で $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n] = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ の場合，n 次正方行列 (a_{ij}) を f の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する表現行列という．

注意 (1) A を $\boldsymbol{K}$ の要素を成分にもつ $m \times n$ 行列とする．$T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定められる1次写像 $T_A : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ の基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n]$, $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m]$ に関する表現行列は A にほかならない．

(2) $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ を V の基底とすると，V の恒等写像 $\mathbf{Id}_V$ は $\mathbf{Id}_V(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{v}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ をみたすため $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する表現行列は n 次単位行列 E_n である．

定義 6.6 V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ が与えられているとする．$\boldsymbol{x} \in V$ は $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ $(x_j \in \boldsymbol{K})$ と一通りに表せるが，このとき $\boldsymbol{K}^n$ のベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する $\boldsymbol{x}$ の**座標**とよぶ．

命題 6.17 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ をそれぞれ，$\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V, W の基底とし，これらに関する1次写像 $f : V \to W$ の表現行列を A とする．基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する $\boldsymbol{x} \in V$ の座標を $\tilde{\boldsymbol{x}}$ とすれば 基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する $f(\boldsymbol{x}) \in W$ の座標は $A\tilde{\boldsymbol{x}}$ である．

系 6.18 $\psi \circ f = T_A \circ \varphi$ であり，$\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} A$ が成り立つ．とくに A が正則行列ならば f は同型写像である．

定理 6.19 $f, g : V \to W$ を1次写像とし $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ をそれぞれ V, W の基底とする．$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する f, g の表現行列を A, B とすれば，$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する $f + g$, rf $(r \in \boldsymbol{K})$ の表現行列はそれぞれ，$A + B$, rA である．

定理 6.20 $f : V \to W$, $g : W \to Z$ をともに1次写像とし，$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$, $[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l]$ をそれぞれ V, W, Z の基底とする．$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する f の表現行列を A，$[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$, $[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l]$ に関する g の表現行列を B とすれば，$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l]$ に関する $g \circ f$ の表現行列は BA である．

定理 6.21 $f : V \to W$ を同型写像とし，$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ をそれぞれ，V, W の基底とする．$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ に関する f の表現行列を A とすれば A は正則行列であり，$[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する f の逆写像 f^{-1} の表現行列は A^{-1} である．

定義 6.7 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ を V の基底とする．$j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\boldsymbol{v}'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\boldsymbol{v}_i$ と表したとき，n 次正方行列 (p_{ij}) を $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ から $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ への**基底の変換行列**という．

注意基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ から $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ への基底の変換行列は，基底 $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する V の恒等変換 $\mathbf{Id}_V : V \to V$ の表現行列にほかならない．$\mathbf{Id}_V$ は同型写像であるから，基底の変換行列は正則行列である．

命題 6.22 V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ から $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ への基底の変換行列を P とする．基底 $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ に関する $\boldsymbol{x} \in V$ の座標を $\tilde{\boldsymbol{x}}'$ とすれば，基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する $\boldsymbol{x}$ の座標は $P\tilde{\boldsymbol{x}}'$ である．

定理 6.23 $f : V \to W$ を１次写像として，$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ を V の基底，$[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$, $[\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_m]$ を W の基底とする．また，

- $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ から $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ への V の基底の変換行列を P,
- $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ から $[\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_m]$ への W の基底の変換行列を Q,
- $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する f の表現行列を A

とすれば，$[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$, $[\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_m]$ に関する f の表現行列は $Q^{-1}AP$ である．とくに $V = W$ の場合，$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n] = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ かつ $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n] = [\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_m]$ ならば $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ に関する f の表現行列は $P^{-1}AP$ である．

定義 6.8 n 次正方行列 A, B に対し，n 次正則行列 P で $P^{-1}AP = B$ をみたすものが存在するとき，A と B は**共役**であるという．

6.4 不変部分空間

定義 6.9 V の１次変換 f に対し V の部分空間 W で条件「$\boldsymbol{x} \in W$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \in W$」をみたすものを f の**不変部分空間**という．

f の不変部分空間 W $(W \neq \{\boldsymbol{0}\}, V)$ があれば，W の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k]$ をとり，これらを含むような V の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{w}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ を選ぶ．この基底に関する f の表現行列は

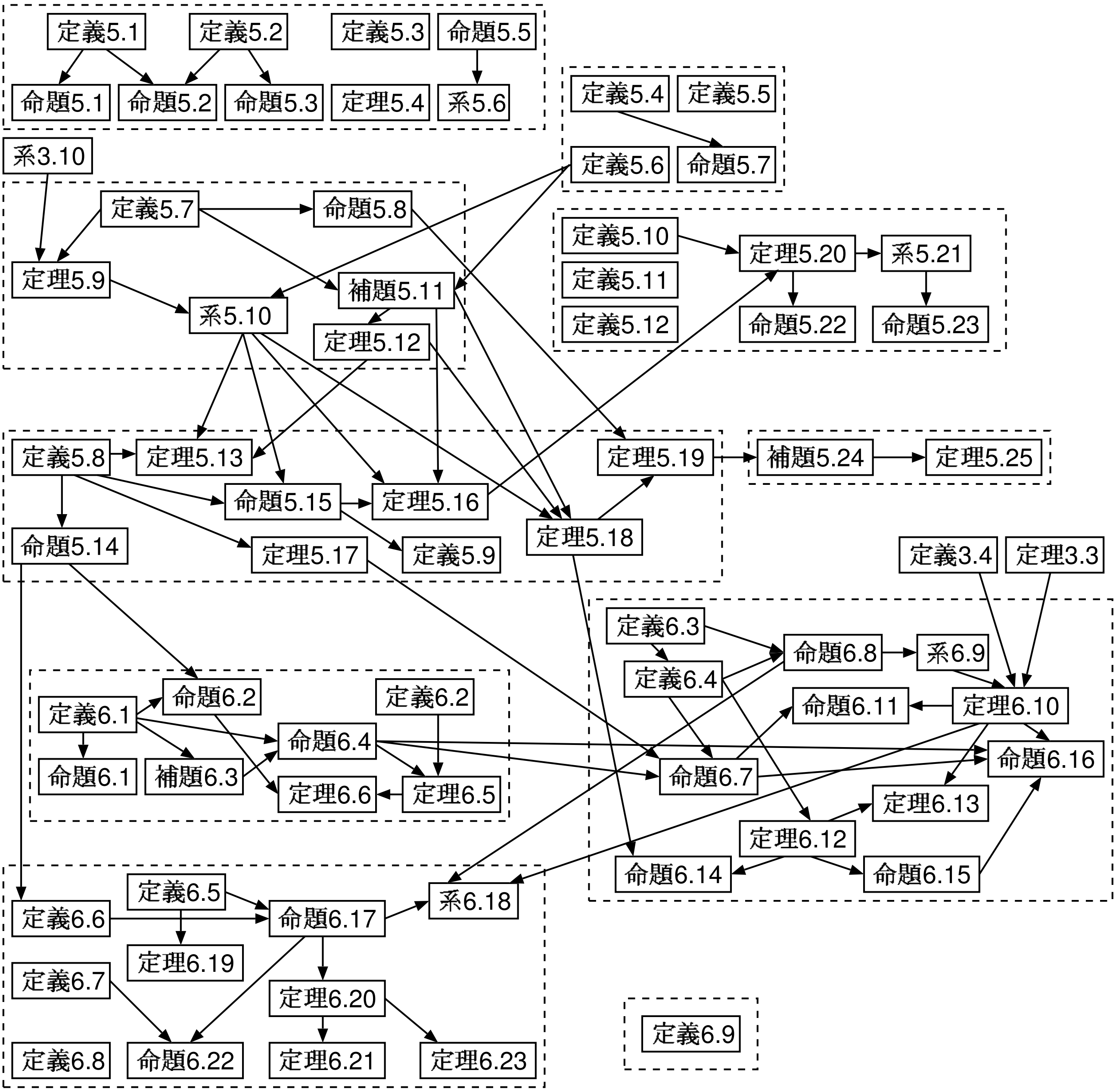
$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

という形をした n 次正方行列である．ここで A_{11}, A_{12}, A_{22} はそれぞれ k 次正方行列，$k \times (n-k)$ 行列，$n-k$ 次正方行列であり，A_{11} は $\boldsymbol{x} \in W$ を $f(\boldsymbol{x})$ に対応させる W の１次変換の $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k]$ に関する表現行列である．

V が f の k 個の不変部分空間 $W_1, W_2, \ldots, W_k$ の直和であれば，$[\boldsymbol{w}_{s_{l-1}+1}, \boldsymbol{w}_{s_{l-1}+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_l}]$ $(l = 1, 2, \ldots, k,\ 0 = s_0 \leqq s_1 \leqq \cdots \leqq s_k = n)$ が W_l の基底になるように V のベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ を選ぶと，$[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ は V の基底になる．この基底に関する f の表現行列を $A = (a_{ij})$ とすれば，A は

$$\begin{pmatrix} A_{11} & O & \cdots & O \\ O & A_{22} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix}$$

という形の正方行列で，A_{ll} は $\boldsymbol{x} \in W_l$ を $f(\boldsymbol{x})$ に対応させる W_l の１次変換の $[\boldsymbol{w}_{s_{l-1}+1}, \boldsymbol{w}_{s_{l-1}+2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_l}]$ に関する表現行列である．


定義5.1
定義5.2
定義5.3
命題5.5
命題5.1
命題5.2
命題5.3
定理5.4
系5.6
定義5.4
定義5.5
定義5.6
命題5.7
系3.10
定義5.7
命題5.8
定理5.9
補題5.11
系5.10
定理5.12
定義5.10
定理5.20
系5.21
定義5.11
定義5.12
命題5.22
命題5.23
定義5.8
定理5.13
定理5.19
補題5.24
定理5.25
命題5.15
定理5.16
命題5.14
定理5.17
定義5.9
定理5.18
定義3.4
定理3.3
定義6.3
命題6.8
系6.9
定義6.4
命題6.2
定義6.2
定義6.1
命題6.11
定理6.10
命題6.4
命題6.16
命題6.1
補題6.3
定理6.6
定理6.5
命題6.7
定理6.13
定理6.12
命題6.14
命題6.15
定義6.5
系6.18
定義6.6
命題6.17
定理6.19
定義6.7
定理6.20
定義6.8
命題6.22
定理6.21
定理6.23
定義6.9