

線形数学 I・II 演習問題

目次

線形数学 I 演習問題	第 1 回	写像	1
線形数学 I 演習問題	第 2 回	平面ベクトル・空間ベクトル	5
線形数学 I 演習問題	第 3 回	行列の積	12
線形数学 I 演習問題	第 4 回	正方行列・1 次写像	21
線形数学 I 演習問題	第 5 回	連立 1 次方程式	33
線形数学 I 演習問題	第 6 回	行列の基本変形	64
線形数学 I 演習問題	第 7 回	逆行列・行列の階数	74
線形数学 I 演習問題	第 8 回	行列式	106
線形数学 I 演習問題	第 9 回	行列式の計算法	115
線形数学 I 演習問題	第 10 回	ベクトルの外積	129
線形数学 II 演習問題	第 11 回	複素数	134
線形数学 II 演習問題	第 12 回	ベクトル空間・部分空間	142
線形数学 II 演習問題	第 13 回	ベクトル空間の基底と次元	146
線形数学 II 演習問題	第 14 回	部分空間の和・直和	159
線形数学 II 演習問題	第 15 回	1 次写像	168
線形数学 II 演習問題	第 16 回	1 次写像の表現行列	202
線形数学 II 演習問題	第 17 回	計量ベクトル空間	225
線形数学 II 演習問題	第 18 回	直交補空間	249
線形数学 II 演習問題	第 19 回	行列の対角化	270
線形数学 II 演習問題	第 20 回	正規行列の対角化	302

線形数学 I 演習問題 第 1 回 写像

1. 以下で与えられる写像が, 全射, 単射, 全単射であるかどうか, 理由とともに答えよ.

(1) $f_1: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_1(x) = \sin x$

(2) $f_2: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbf{R}, f_2(x) = \sin x$

(3) $f_3: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1], f_3(x) = \sin x$

(4) $f_4: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1], f_4(x) = \sin x$

(5) $f_5: \mathbf{R} \rightarrow (\text{平面}), f_5(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-t \end{pmatrix}$

(6) $f_6: (\text{平面}) \rightarrow (\text{平面}), f_6 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x - y + 1 \\ 4x - 2y - 1 \end{pmatrix}$

2. 実数 a, b, c (ただし $a \neq 0$) に対し, $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を $f(x) = ax^2 + bx + c$ で与えられる 2 次関数とする.

(1) $(f \circ f)(x)$ を求めよ.

(2) $(f \circ f)(x) - x$ を x の多項式とみたとき, $(f \circ f)(x) - x$ を $f(x) - x = ax^2 + (b-1)x + c$ で割ったときの商と余りを求めよ.

(3) $(f \circ f)(x) - x$ を $f(x) - x = ax^2 + (b-1)x + c$ で割ったときの商を $g(x)$ とする. 2 次方程式 $f(x) - x = 0, g(x) = 0$ の判別式をそれぞれ D, D' とするとき, D' を a と D だけを用いた式で表せ.

(4) 2 次方程式 $f(x) - x = 0$ と $g(x) = 0$ が共通の解をもつためには, $g(x) = 0$ が重解をもつことが必要十分であることを示せ.

(5) 4 次方程式 $(f \circ f)(x) - x = 0$ の相異なる実数解の個数が D の値により, どのように変化するか調べよ.

(6) 2 次方程式 $g(x) = 0$ の解を α, β とするとき, $f \circ f$ の導関数の α, β における値 $(f \circ f)'(\alpha), (f \circ f)'(\beta)$ を D だけを用いた式で表せ.

(7) 4 次関数 $f \circ f$ が相異なる 3 つの値で極値をとるための条件を D と b を用いて表せ.

3. 実数 a, b に対し, 関数 $\mu_a, \tau_b: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を $\mu_a(x) = ax, \tau_b(x) = x + b$ で定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 合成関数 $\tau_b \circ \mu_a, \mu_a \circ \tau_b$ によって, 実数 x は, それぞれどのような値に写されるか答えよ.

(2) $\mu_a \circ \tau_b = \tau_{ab} \circ \mu_a$ であることを示せ.

(3) 関数 $\sigma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を $\sigma(x) = x^2$ で定め, a, b, c を実数とする. 合成関数 $\sigma \circ \tau_b, \mu_a \circ (\sigma \circ \tau_b), \tau_c \circ (\mu_a \circ (\sigma \circ \tau_b))$ によって, 実数 x は, それぞれどのような値に写されるか答えよ.

(4) 0 でない実数 α と実数 β, γ に対し, $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ で与えられる 2 次関数 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を考える. このとき, 等式 $f = \tau_c \circ (\mu_a \circ (\sigma \circ \tau_b))$ が成り立つような a, b, c を, α, β, γ を用いて表せ.

4. 平面のベクトル \mathbf{p} と 2 次正方行列 A が与えられたとき, 写像 $f: (\text{平面}) \rightarrow (\text{平面})$ を $f(x) = Ax + \mathbf{p}$ で定める. A が逆行列をもつとき, f は全単射であることを示し, f の逆写像によるベクトル \mathbf{y} の像を $A, \mathbf{y}, \mathbf{p}$ を用いて表せ.

5. $a, b, c, d, p, q, r, s \in \mathbf{R}$ とし, $ad - bc$ と $ps - qr$ はともに 0 でないとする. 実数の部分集合 X, Y を

$$X = \begin{cases} \mathbf{R} & c = 0 \\ \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq -\frac{d}{c}\} & c \neq 0 \end{cases}, \quad Y = \begin{cases} \mathbf{R} & r = 0 \\ \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq -\frac{s}{r}\} & r \neq 0 \end{cases}$$

によって定め, 関数 $f: X \rightarrow \mathbf{R}, g: Y \rightarrow \mathbf{R}$ をそれぞれ $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, g(x) = \frac{px+q}{rx+s}$ で定義する.

(1) $f(x) \in Y$ を満たす $x \in X$ 全体からなる X の部分集合を Z とするとき, Z を求めよ.

(2) 関数 $\tilde{f}: Z \rightarrow Y$ を $\tilde{f}(x) = f(x)$ で定義する. このとき, 合成関数 $g \circ \tilde{f}: Z \rightarrow \mathbf{R}$ が定義されるが, $x \in Z$ に対して, a, b, c, d, p, q, r, s と x を用いて $(g \circ \tilde{f})(x)$ を表せ.

6. (発展問題) 平面のベクトル \mathbf{p} と 2 次正方行列 A が与えられたとき, 写像 $f: (\text{平面}) \rightarrow (\text{平面})$ を $f(x) = Ax + \mathbf{p}$ で定める. この写像が全射ならば, A は逆行列をもつことを示せ.

第 1 回の演習問題の解答

1. (1) $f_1(x) = \sin x = 2$ となる x は存在しないため、 f_1 は全射ではない。 $f_1(0) = \sin 0 = 0$, $f_1(\pi) = \sin \pi = 0$ だから $f_1(0) = f_1(\pi)$ となるため、 f_1 は単射でもない。

(2) $f_2(x) = \sin x = 2$ となる x は存在しないため、 f_2 は全射ではない。 $\sin x$ は区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ で単調に増加するため、 f_2 は単射である。

(3) $\sin x$ は -1 から 1 の間のすべての値をとるため、 f_3 は全射である。 $f_3(0) = \sin 0 = 0$, $f_3(\pi) = \sin \pi = 0$ だから $f_3(0) = f_3(\pi)$ となるため、 f_3 は単射ではない。

(4) x が $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ に増加すれば、 $\sin x$ は単調に増加して、 -1 から 1 の間のすべての値をとるため、 f_4 は全単射である。

(5) t が実数全体を動けば、 $f_5(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-t \end{pmatrix}$ を位置ベクトルとする点は、 $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \end{cases}$ によってパラメータ表示

される直線全体を動く。この直線は原点を通らないため、 $f_5(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす実数 t は存在しない。従って f は

全射ではない。 $f_5(s) = f_5(t)$ ならば $\begin{pmatrix} 1+s \\ 2-s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-t \end{pmatrix}$ だから、この等式の両辺の第 1 成分どうしは等しい。故に $1+s = 1+t$ より、 $s = t$ が得られるため、 f_5 は単射である。

(6) 平面的ベクトル $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ に対し、 $f_6\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ となるベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ があるとすれば、 f_6 の定義より、

$\begin{pmatrix} 2x - y + 1 \\ 4x - 2y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ だから、 $\begin{cases} 2x - y + 1 = p & \dots (i) \\ 4x - 2y - 1 = q & \dots (ii) \end{cases}$ が成り立つ。これを x, y の連立方程式とみて、(ii) か

ら (i) の両辺を 2 倍したものを引けば $-3 = q - 2p$ が得られる。従って、ベクトル $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ に対し、 $f_6\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

となるベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が存在すれば、 p, q は $q = 2p - 3$ を満たさなくてはならない。とくに $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の場合は

$q = 2p - 3$ が満たされないため、 $f_6\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が存在しない。故に f_6 は全射ではない。

$f_6\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f_6\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)$ ならば $\begin{pmatrix} 2x - y + 1 \\ 4x - 2y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x' - y' + 1 \\ 4x' - 2y' - 1 \end{pmatrix}$ だから $\begin{cases} 2x - y = 2x' - y' & \dots (i) \\ 4x - 2y = 4x' - 2y' & \dots (ii) \end{cases}$ が成

り立つ。(ii) は (i) の両辺を 2 倍した式だから、(i) が成り立てば (ii) も成り立ち、 $f_6\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f_6\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)$ が成り立

つ。よって $f_6\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f_6\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)$ が成り立つためには (i) が成り立つことが必要十分である。ここで、 $x = y = 0$,

$x' = 1, y' = 2$ の場合を考えると (i) が成り立つため、 $f_6\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f_6\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ となり、 f_6 は単射ではないことがわかる。

2. (1) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax^2 + bx + c) = a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c =$
 $a^3x^4 + 2a^2bx^3 + a(b^2 + 2ac + b)x^2 + b(2ac + b)x + c(ac + b + 1)$

(2) $(f \circ f)(x) - x = a^3x^4 + 2a^2bx^3 + a(b^2 + 2ac + b)x^2 + (2abc + b^2 - 1)x + c(ac + b + 1) =$
 $(ax^2 + (b-1)x + c)(a^2x^2 + a(b+1)x + ac + b + 1)$ だから $(f \circ f)(x) - x$ を $f(x) - x = ax^2 + (b-1)x + c$ で割ったときの商は $a^2x^2 + a(b+1)x + ac + b + 1$ であり、余りは 0 である。

(3) $D = (b-1)^2 - 4ac$ であり, (2) から $g(x) = a^2x^2 + a(b+1)x + ac + b + 1$ だから $D' = a^2(b+1)^2 - 4a^2(ac + b + 1) = a^2(b^2 - 2b + 1 - 4ac - 4) = a^2((b-1)^2 - 4ac - 4) = a^2(D - 4)$ である.

$$(4) f(x) - x = 0 \text{ と } g(x) = 0 \text{ は共通の解 } \alpha \text{ をもつと仮定すれば, } \begin{cases} a\alpha^2 + (b-1)\alpha + c = 0 & \dots (i) \\ a^2\alpha^2 + a(b+1)\alpha + ac + b + 1 = 0 & \dots (ii) \end{cases}$$

が成り立つ. (ii) から (i) の両辺を a 倍したものを引けば $2a\alpha + b + 1 = 0$ が得られるため $\alpha = -\frac{b+1}{2a}$ である. これを (i) に代入して, 両辺を $-4a$ 倍すれば $(b-1)^2 - 4ac - 4 = 0$ が得られる. この等式の左辺は $D - 4$ に等しいため, (3) の結果から $D' = a^2(D - 4) = 0$ となり, $g(x) = 0$ は重解をもつ.

逆に $g(x) = 0$ が重解をもつならば, (3) の結果から $a^2(D - 4) = D' = 0$ となるため, $(b-1)^2 - 4ac - 4 = D - 4 = 0$ である. このとき, $\alpha = -\frac{b+1}{2a}$ は $f(\alpha) - \alpha = 0$ と $g(\alpha) = 0$ を満たすため, $f(x) - x = 0$ と $g(x) = 0$ は共通の解 $\alpha = -\frac{b+1}{2a}$ をもつ.

(5) $(f \circ f)(x) - x$ は 2 次式 $f(x) - x$ と $g(x)$ の積に因数分解し, $f(x) - x = 0$ と $g(x) = 0$ が共通の解をもつのは $g(x) = 0$ が重解をもつ場合に限る. $f(x) - x = 0$ は $D < 0, D = 0, D > 0$ の場合にそれぞれ 0, 1, 2 個の相異なる実数解をもち, $D' = a^2(D - 4)$ だから, $g(x) = 0$ は $D < 4, D = 4, D > 4$ の場合にそれぞれ 0, 1, 2 個の相異なる実数解をもつ. $D = 4$ の場合の $g(x) = 0$ の重解は $f(x) - x = 0$ の解でもあることに注意すれば, $(f \circ f)(x) - x = 0$ の相異なる実数解の個数は, $D < 0$ ならば 0 個, $D = 0$ ならば 1 個, $0 < D \leq 4$ ならば 2 個, $D > 4$ ならば 4 個である.

(6) $(f \circ f)'(x) = 4a^3x^3 + 6a^2bx^2 + a(b^2 + 2ac + b)x + b(2ac + b)$ だから $(f \circ f)'(x)$ を $g(x)$ で割れば $(f \circ f)'(x) = (4ax + 2b - 4)g(x) - b^2 + 2b + 4ac + 4 = (4ax + 2b - 4)g(x) - D + 5$ が得られるため, $(f \circ f)'(\alpha) = (f \circ f)'(\beta) = -D + 5$ である.

(7) $(f \circ f)''(x) = 12a^3x^2 + 12a^2bx + a(b^2 + 2ac + b) = 12a^3 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a(-2b^2 + 2ac + b)$ だから $-2b^2 + 2ac + b \geq 0$ ならば $(f \circ f)'$ は単調増加または単調減少である. この場合, $(f \circ f)'$ の値が 0 になるのは 1 回だけなので, $f \circ f$ が相異なる 3 つの値で極値をとることはない. $-2b^2 + 2ac + b < 0$ の場合, $(f \circ f)''(x) = 0$ の 2 つの解を λ, μ とすれば $\lambda + \mu = -\frac{b}{a}, \lambda\mu = \frac{b^2 + 2ac + b}{12a^2}$ である. $(f \circ f)'(x) = (f \circ f)''(x) \left(\frac{x}{3} + \frac{b}{6a}\right) - \frac{D-1}{3}(2ax + b)$ だから $(f \circ f)'(\lambda)(f \circ f)'(\mu) = \frac{(D-1)^2}{9}(2a\lambda + b)(2a\mu + b) = \frac{(D-1)^2}{27}(-2b^2 + 2ac + b)$ が得られる. $(f \circ f)'(\lambda), (f \circ f)'(\mu)$ の一方が 3 次関数 $(f \circ f)'$ の極大値で他方が極小値だから $(f \circ f)'(x) = 0$ が相異なる 3 つの実数解をもつためには, これらが異符号であることが必要十分である. また, この場合 $(f \circ f)'(x) = 0$ のそれぞれの解の前後で $(f \circ f)'$ の符号が変わるため, $f \circ f$ は相異なる 3 つの値で極値をとる. 従って求める条件は $D \neq 1$ かつ $-2b^2 + 2ac + b < 0$ である. ここで, $-2b^2 + 2ac + b = -\frac{1}{2}(D + 3b^2 - 1)$ だから, この条件は D と b を用いて「 $1 - 3b^2 < D < 1$ または $D > 1$ 」と表される.

3. (1) $(\tau_b \circ \mu_a)(x) = \tau_b(\mu_a(x)) = \tau_b(ax) = ax + b, (\mu_a \circ \tau_b)(x) = \mu_a(\tau_b(x)) = \mu_a(x + b) = a(x + b)$.

(2) 上の結果から, 任意の実数 x に対して $(\mu_a \circ \tau_b)(x) = a(x + b) = ax + ab, (\tau_{ab} \circ \mu_a)(x) = ax + ab$ だから $(\mu_a \circ \tau_b)(x) = (\tau_{ab} \circ \mu_a)(x)$ が成り立つ. 従って $\mu_a \circ \tau_b = \tau_{ab} \circ \mu_a$ が成り立つ.

(3) $(\sigma \circ \tau_b)(x) = \sigma(\tau_b(x)) = \sigma(x + b) = (x + b)^2, (\mu_a \circ (\sigma \circ \tau_b))(x) = \mu_a((\sigma \circ \tau_b)(x)) = \mu_a((x + b)^2) = a(x + b)^2, (\tau_c \circ (\mu_a \circ (\sigma \circ \tau_b)))(x) = \tau_c(\mu_a \circ (\sigma \circ \tau_b))(x) = \tau_c(a(x + b)^2) = a(x + b)^2 + c$.

$$(4) f(x) = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \text{ だから (3) の結果から } a = \alpha, b = \frac{\beta}{2\alpha}, c = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \text{ である.}$$

4. 平面の任意のベクトル \mathbf{y} に対し, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ となるベクトル \mathbf{x} があれば, $A\mathbf{x} + \mathbf{p} = \mathbf{y}$ だから $A\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{p}$ であり, A は逆行列をもつため, $\mathbf{x} = A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{p})$ である. 逆に $\mathbf{x} = A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{p})$ ならば $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{p} = AA^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{p}) + \mathbf{p} = (\mathbf{y} - \mathbf{p}) + \mathbf{p} = \mathbf{y}$ だから f は全射である. $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}')$ ならば $A\mathbf{x} + \mathbf{p} = A\mathbf{x}' + \mathbf{p}$ より $A\mathbf{x} = A\mathbf{x}'$ であり, この両辺に左から A の逆行列をかければ $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ が得られるため, f は単射でもある. 故に f は全単射である.

上でみたように, 平面の任意のベクトル \mathbf{y} に対し, $\mathbf{x} = A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{p})$ によってベクトル \mathbf{x} を定めれば $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ とな

るため、 f の逆写像によるベクトル \mathbf{y} の像は $A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{p})$ である。

5. (1) $r = 0$ の場合は $Y = \mathbf{R}$ だから、 $Z = X$ である。 $r \neq 0$ の場合を考える。 $ar + cs = 0$ ならば $a = -\frac{cs}{r}$ だから $ad - bc = -\frac{c(br + ds)}{r}$ であり、仮定 $ad - bc \neq 0$ から $br + ds \neq 0$ である。 一方 $\frac{ax + b}{cx + d} = -\frac{s}{r}$ ならば $(ar + cs)x = -(br + ds)$ だから、 $ar + cs = 0$ ならば $\frac{ax + b}{cx + d} = -\frac{s}{r}$ を満たす $x \in X$ は存在しない。 従って $r \neq 0$ かつ $ar + cs = 0$ の場合も $Z = X$ である。 $ar + cs \neq 0$ ならば $\frac{ax + b}{cx + d} = -\frac{s}{r}$ を満たす x は $-\frac{br + ds}{ar + cs}$ のみで、 $r \neq 0$ かつ $ad - bc \neq 0$ ならば $-\frac{br + ds}{ar + cs} \neq -\frac{d}{c}$ だから、 $Z = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq -\frac{br + ds}{ar + cs}, -\frac{d}{c} \right\} = X - \left\{ -\frac{br + ds}{ar + cs} \right\}$ である。 以上の

結果をまとめると、 $Z = \begin{cases} X & r(ar + cs) = 0 \\ X - \left\{ -\frac{br + ds}{ar + cs} \right\} & r(ar + cs) \neq 0 \end{cases}$ となる。

$$(2) (g \circ \tilde{f})(x) = g(\tilde{f}(x)) = g(f(x)) = g\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right) = \frac{p\frac{ax+b}{cx+d} + q}{r\frac{ax+b}{cx+d} + s} = \frac{(ap + cq)x + bp + dq}{(ar + cs)x + br + ds}.$$

6. $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと、 f は全射だから、 $f(\mathbf{x}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{p}$, $f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{p}$ を満たす平面のベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ がある。 $f(\mathbf{x}_1) = A\mathbf{x}_1 + \mathbf{p}$, $f(\mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_2 + \mathbf{p}$ だから $f(\mathbf{x}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{p}$, $f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{p}$ より $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1$, $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2$ が成り立つ。 ここで、 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ とおくと $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1$ より $\begin{cases} ax + by = 1 & \dots (i) \\ cx + dy = 0 & \dots (ii) \end{cases}$ が成り立ち、

$A\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2$ より $\begin{cases} az + bw = 0 & \dots (iii) \\ cz + dw = 1 & \dots (iv) \end{cases}$ が成り立つ。 (i) の両辺を d 倍したものから (ii) の両辺を b 倍したものを引けば

$(ad - bc)x = d$ が得られ、(ii) の両辺を a 倍したものから (i) の両辺を c 倍したものを引けば $(ad - bc)y = -c$ が得られる。 同様に (iii) の両辺を d 倍したものから (iv) の両辺を b 倍したものを引けば $(ad - bc)z = -b$ が得られ、(iv) の両辺を a 倍したものから (iii) の両辺を c 倍したものを引けば $(ad - bc)w = a$ が得られる。 従って、もし $ad - bc = 0$ ならば $a = b = c = d = 0$ となり A は零行列になる。 このとき f は平面のすべてのベクトルを \mathbf{p} に写すため、 f は全射であるという仮定に反する。 故に $ad - bc \neq 0$ だから A は逆行列をもつ。

線形数学 I 演習問題 第 2 回 平面ベクトル・空間ベクトル

1. (1) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ を零でない平面のベクトルとする. $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ が \mathbf{a} の実数倍であるためには $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

(2) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ を零でない空間のベクトルとする. $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ が \mathbf{a} の実数倍であるためには $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1b_3 - a_3b_1 = a_2b_3 - a_3b_2 = 0$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

2. (1) $y = ax + b$ によって表される平面上の直線を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ の形にパラメータ表示せよ.

(2) $x = c$ によって表される平面上の直線を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ の形にパラメータ表示せよ.

(3) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ でパラメータ表示される平面上の直線の方程式を求めよ.

3. 次の 2 点 A, B を通る直線のパラメータ表示と方程式を求めよ.

(1) A(2, 1, 5), B(-1, 3, 4) (2) A(1, 1, 3), B(2, 1, -1) (3) A(1, 1, 5), B(1, 7, 5)

4. 次の 3 点 A, B, C を通る平面のパラメータ表示を求めよ.

(1) A(3, 1, 1), B(2, 0, -1), C(4, 1, 2) (2) A(1, -1, 3), B(2, -1, 4), C(3, -1, -1)

(3) A(3, 4, 5), B(-1, 4, 2), C(2, 0, 3)

5. 次の各方程式で与えられた平面のパラメータ表示を求めよ.

(1) $x + 2y - z = 3$ (2) $3x - z = 1$ (3) $x = 2$ (4) $x - y - 3z = 0$

6. 次のパラメータ表示で与えられた平面の方程式を求めよ.

(1) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (3) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

7. 次の各 3 点 A, B, C を通る平面の方程式を求めよ.

(1) A(2, 1, -2), B(1, 3, -9), C(4, 2, 2) (2) A(2, 3, 4), B(0, 9, 12), C(5, 4, 6)

(3) A(2, 1, 5), B(-1, 2, -4), C(0, -1, -1)

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) T_A によって, 直線 $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = z-5$ が写される直線の方程式を求めよ.

(2) 平面 $x + 3y + 3z + 1 = 0$ に平行な 2 つのベクトルで, 互いに他方の実数倍でないものを求め, この平面をパラメータ表示せよ.

(3) T_A によって, 平面 $x + 3y + 3z + 1 = 0$ が写される平面のパラメータ表示を求めよ.

(4) T_A によって, 平面 $x + 3y + 3z + 1 = 0$ が写される平面の方程式を求めよ.

9. 空間の 2 本の直線 l, m が $l: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = z-5, m: x-2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{3}$ で与えられているとする.

(1) l と m は同一平面上にないことを示せ.

(2) l と m の両方に垂直に交わる直線の方程式を求めよ.

10. 空間の 2 本の直線 $l: \frac{x-a}{2} = y = \frac{z-1}{3}$, $m: \frac{x-1}{5} = \frac{y-b}{-2} = \frac{z-2}{4}$ が, 原点を通る同一平面に含まれるように, 定数 a, b の値を定めよ.

11. 空間において $x-y+2z=1$, $2x+y-z=-1$ によって与えられる平面を考える. このとき以下の問いに答えよ.

(1) 与えられた 2 つの平面の交線をパラメータ表示せよ.

(2) (1) で求めた交線を l とするとき, l と xy 平面との交点を通り, l に垂直な平面の方程式を求めよ.

12. a を実数の定数とし, $A = \begin{pmatrix} 2a+3 & a+1 \\ -a-10 & -a-3 \end{pmatrix}$ とする. T_A により動かない原点以外の点が存在するような a の値を求めよ. さらに T_A により動かない原点からの距離が 1 である点の座標を求めよ.

13. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ を零でないベクトルとし, 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} ac & bc \\ ad & bd \end{pmatrix}$ を考える.

(1) T_A によって平面全体は原点を通る直線に写されることを示し, この直線の方法ベクトルを求めよ.

(2) T_A によって原点に写される点全体からなる集合は原点を通る直線であることを示し, この直線の方法ベクトルを求めよ.

14. (発展問題) a, b は実数の定数とし, 少なくとも一方は 0 でないとする. $A = \begin{pmatrix} 1-ab & a^2 \\ -b^2 & 1+ab \end{pmatrix}$ とおくと, T_A により, それ自身に写される直線をすべて求めよ.

第 2 回の演習問題の解答

1. (1) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ が成り立つとする. $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ だから a_1 か a_2 の一方は 0 でない. $a_1 \neq 0$ の場合, $t = \frac{b_1}{a_1}$ とおくと $b_1 = ta_1$ であり, $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ より, $b_2 = ta_2$ だから $\mathbf{b} = t\mathbf{a}$ が成り立つ. 同様に $a_2 \neq 0$ の場合, $t = \frac{b_2}{a_2}$ とおけば $\mathbf{b} = t\mathbf{a}$ が成り立つことがわかる. 故に \mathbf{b} は \mathbf{a} の実数倍である. 逆に $\mathbf{b} = t\mathbf{a}$ ならば $b_1 = ta_1$ かつ $b_2 = ta_2$ だから $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1ta_2 - a_2ta_1 = 0$ が成り立つ.

(2) $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1b_3 - a_3b_1 = a_2b_3 - a_3b_2 = 0$ が成り立つとする. $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ だから a_1, a_2, a_3 のいずれかは 0 でない. $a_1 \neq 0$ の場合, $t = \frac{b_1}{a_1}$ とおくと $b_1 = ta_1$ であり, $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1b_3 - a_3b_1 = 0$ より, $b_2 = ta_2$ かつ $b_3 = ta_3$ だから $\mathbf{b} = t\mathbf{a}$ が成り立つ. 同様に $a_2 \neq 0$ の場合は $t = \frac{b_2}{a_2}$ とおき, $a_3 \neq 0$ の場合は $t = \frac{b_3}{a_3}$ とおけば $\mathbf{b} = t\mathbf{a}$ が成り立つことがわかる. 故に \mathbf{b} は \mathbf{a} の実数倍である. 逆に $\mathbf{b} = t\mathbf{a}$ ならば $j = 1, 2, 3$ に対して $b_j = ta_j$ だから $a_ib_j - a_jb_i = a_itaj - a_jtai = 0$ ($1 \leq i < j \leq 3$) が成り立つ.

2. (1) $x = t$ とおけば $y = at + b$ だから $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ at + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ である.

(2) $y = t$ とおけば $x = c$ だから $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

(3) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ より $\begin{cases} x = p + ut \cdots (i) \\ y = q + vt \cdots (ii) \end{cases}$ だから (i) の両辺を v 倍したものから (ii) の両辺を u 倍したものを引けば, $vx - uy = pv - qu$ が得られるため, 求める直線の方程式は $vx - uy - pv + qu = 0$ である.

3. (1) 方向ベクトルは $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, パラメータ表示は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, 方程式は $-\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = -z+5$.

(2) 方向ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, パラメータ表示は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, 方程式は $x-1 = -\frac{z-3}{4}, y=1$.

(3) 方向ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, パラメータ表示は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 方程式は $x=1, z=3$.

4. (1) 平面に平行なベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, パラメータ表示は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) 平面に平行なベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, パラメータ表示は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(3) 平面に平行なベクトルは $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, パラメータ表示は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

5. (1) 与えられた平面は $(3, 0, 0)$ を通り, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は法線ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に垂直だから, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (2) 与えられた平面は $(0, 0, -1)$ を通り, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は法線ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に垂直だから, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- (3) 与えられた平面は $(2, 0, 0)$ を通り, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は法線ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に垂直だから, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- (4) 与えられた平面は $(0, 0, 0)$ を通り, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は法線ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ に垂直だから, $\mathbf{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. (1) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の両方に垂直で, 点 $(1, 0, 1)$ を通るため, $-2x + y + z = -1$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の両方に垂直で, 点 $(1, 2, 3)$ を通るため, $x + y - 4z = -9$.

(3) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ の両方に垂直で, 点 $(1, 2, 3)$ を通るため, $z = 3$.

7. (1) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ は平面に平行, $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ はこれらに垂直で, 与えられた平面は A を通るため, $3x - 2y - z = 6$.

(2) $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は平面に平行, $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ はこれらに垂直で, 与えられた平面は A を通るため, $x + 7y - 5z = 3$.

(3) $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$ は平面に平行, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ はこれらに垂直で, 与えられた平面は A を通るため, $3x - z = 1$.

8. (1) 与えられた直線の方角ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり, 点 $(3, 1, 5)$ を通るため, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とパラメータ表示される.

$A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 21 \\ 37 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ だから, 与えられた直線は T_A によって $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 21 \\ 37 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

でパラメータ表示される直線に写る. この直線の方程式は $x - 10 = \frac{y - 21}{2} = \frac{z - 37}{4}$ である.

(2) 与えられた平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ で, このベクトルに垂直なベクトルが与えられた平面に平行なベクトル

である. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ に垂直であるためには $x + 3y + 3z = 0$ であることが必要十分だから, 例えば $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

は $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ に垂直で、互いに他方の実数倍ではない。与えられた平面は $(-1, 0, 0)$ を通り、 $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ に平行だから

ら $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ とパラメータ表示される。

(3) $A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ だから、(2) の結果から与えられた平面は T_A に

よって $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ でパラメータ表示される平面に写される。

(4) 与えられた平面が T_A によって写された平面を H とする。 H の法線ベクトルを $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ とおけば、(3) の結果から

ら、このベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ に垂直だから、 u, v, w は連立方程式 $\begin{cases} u - w = 0 \cdots (i) \\ 2u - 3w = 0 \cdots (ii) \end{cases}$ の解である。(i),

(ii) より $u = w = 0$ で w は任意の実数だから、例えば $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は H の法線ベクトルである。(3) の結果から H は点 $(-1, -1, -1)$ を通るため、 H の方程式は $y + 1 = 0$ である。

9. (1) l, m の方向ベクトルはそれぞれ、 $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ で与えられる。これらのベクトルは平行ではなく、 l は $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

を通るため、もし、 l, m を両方とも含む平面 H が存在すれば H は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ によってパラ

メータ表示される平面である。 m は $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を通り、 H に含まれるため、 $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を満た

す実数 s, t が存在する。この等式の各成分を比較すれば、 $\begin{cases} 2s + t = -1 \cdots (i) \\ -s + 2t = -1 \cdots (ii) \\ s + 3t = -6 \cdots (iii) \end{cases}$ が得られる。(i), (ii) を s, t につ

いての連立方程式とみれば、 $s = -\frac{1}{5}$, $t = -\frac{3}{5}$ であるが、このとき $s + 3t = -2$ となって (iii) は成り立たない。従って

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を満たす実数 s, t は存在しないことになって矛盾が生じる。故に l と m は同一平面上にはない。

(2) l, m は、それぞれ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ によってパラメータ表示される直線

だから、求める直線と l, m との交点を、それぞれ A, B とすると、 $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 2s+3 \\ -s+1 \\ s+5 \end{pmatrix}$, $\vec{OB} = \begin{pmatrix} t+2 \\ 2t-1 \\ 3t-1 \end{pmatrix}$ と表せる。

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} t-2s-1 \\ 2t+s-2 \\ 3t-s-6 \end{pmatrix}$ は直線 l, m の方向ベクトルと垂直になるので、それらとの内積はともに 0 となる。 l の方向ベ

クトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と \vec{AB} の内積は $3t-6s-6$ であり、 m の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ と \vec{AB} の内積は $14t-3s-23$ だか

ら、連立方程式 $\begin{cases} 3t-6s-6=0 \\ 14t-3s-23=0 \end{cases}$ が得られる。この解は $s = -\frac{1}{5}$, $t = \frac{8}{5}$ だから、 $\vec{OA} = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{24}{5} \end{pmatrix}$, $\vec{OB} = \begin{pmatrix} \frac{18}{5} \\ \frac{11}{5} \\ \frac{19}{5} \end{pmatrix}$

である。従って $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり、求める直線は A を通って \vec{AB} を方向ベクトルとするため、求める方程式は $x - \frac{13}{5} = y - \frac{6}{5} = -z + \frac{24}{5}$ である。

10. l, m を含み、原点を通る平面を H とすると、 H の法線ベクトルは l の方向ベクトルと m の方向ベクトルの両方に垂直である。 l, m の方向ベクトルはそれぞれ、 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ で与えられるため、 H の法線ベクトルを $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ とすれ

ば $\begin{cases} 2u+v+3w=0 & \dots(i) \\ 5u-2v+4w=0 & \dots(ii) \end{cases}$ が成り立つ。(i), (ii) から v を消去すれば、 $9u+10w=0$ だから、 $u=10, w=-9$

によって u, w を定め、(i) から $v = -2u - 3w = 7$ で v を定めれば (i) と (ii) は成り立つため、 H は $\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}$ を法線

ベクトルとする、原点を通る平面である。従って H の方程式は $10x+7y-9z=0$ で与えられる。 l, m はそれぞれ点 $(a, 0, 1)$, $(1, b, 2)$ を通るため、これらの点は H の上にある。故に $10a-9=0, 10+7b-18=0$ が成り立つため、 $a = \frac{9}{10}, b = \frac{8}{7}$ である。

11. (1) 与えられた平面の交線は、連立方程式 $\begin{cases} x-y+2z=1 & \dots(i) \\ 2x+y-z=-1 & \dots(ii) \end{cases}$ を満たすベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を位置ベク

トルとする点全体からなる。(i), (ii) から z を消去すれば $5x+y=-1$ が得られ、(i), (ii) から y を消去すれば $3x+z=0$ が得られる。従って、 $x=t$ とおけば、 $y=-5t-1, z=-3t$ だから与えられた平面の交線は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -5t-1 \\ -3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ によってパラメータ表示される。

(2) l と xy 平面との交点は l の点で、 z 座標が 0 になる点である。(1) で求めた l のパラメータ表示では $-3t=0$, す

なわち $t = 0$ のときの l の点 $(0, -1, 0)$ が l と xy 平面との交点である。(1)の結果より l の方向ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ で、求める平面はこのベクトルを法線ベクトルとし、 $(0, -1, 0)$ を含むため、その方程式は $x - 5(y + 1) - 3z = 0$, 従って $x - 5y - 3z - 5 = 0$ である。

12. T_A により動かない原点以外の点の位置ベクトルを \mathbf{v} とすれば $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$ より、 A が 1 を固有値にもつことが必要十分である。 A の固有値は x についての 2 次方程式 $x^2 - ax - a^2 + 2a + 1 = 0$ の実数解であるから、 A が 1 を固有値にもつための条件は $2 + a - a^2 = 0$, すなわち $a = 2$ または $a = -1$ である。 $a = 2$ の場合、 $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$ を満たす長さが 1 のベクトルは $\pm \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ であるから、求める点の座標は $(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ および $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ である。 $a = -1$ の場合、 $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$ を満たす長さが 1 のベクトルは $\pm \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ であるから、求める点の座標は $(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}})$ および $(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$ である。

13. (1) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ とおく。任意の $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ に対し、 $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c(ax + by) \\ d(ax + by) \end{pmatrix} = (ax + by)\mathbf{b}$ だから、 $T_A(\mathbf{x})$ は原点を通過して方向ベクトルが \mathbf{b} の直線上にある。故に平面全体は T_A によって $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする、原点を通る直線に写される。

(2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ならば、(1)より $T_A(\mathbf{x}) = (ax + by)\mathbf{b}$ であり、 \mathbf{b} は零ベクトルでないので、 \mathbf{x} が T_A によって原点に写されるためには、 $ax + by = 0$ であることが必要十分である。さらに、 $ax + by = 0$ は \mathbf{x} と \mathbf{a} が垂直であることを意味するため、 $ax + by = 0$ が成り立つことは \mathbf{x} が \mathbf{a} と垂直なベクトル (例えば $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$) に平行であることと同値である。

従って T_A によって原点に写される点全体からなる集合は、 $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする原点を通る直線である。

14. A の固有値は $t^2 - 2t + 1 = 0$ の解である 1 のみである。1 に対する A に対する固有ベクトルを $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすれば、 $\begin{pmatrix} 1 - ab & a^2 \\ -b^2 & 1 + ab \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ だから、 x, y は連立方程式 $\begin{cases} a(-bx + ay) = 0 \cdots (i) \\ b(-bx + ay) = 0 \cdots (ii) \end{cases}$ の解である。 a, b の一方は 0 でないため、この連立方程式は、1 つの方程式 $-bx + ay = 0$ と同値である。とくに、 $x = a, y = b$ はこの方程式の解だから、 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は 1 に対する A に対する固有ベクトルである。故に、 T_A によってそれ自身に写される直線の方向ベクトルは \mathbf{v} である。 l を、 \mathbf{v} を方向ベクトルとする任意の直線とすれば、 l は $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ という形にパラメータ表示される。 $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ とおくと \mathbf{v} と \mathbf{w} は直交するため、平面の任意のベクトルは $x\mathbf{v} + y\mathbf{w}$

の形に表される。そこで $\mathbf{p} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}$ と表せば、 $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$, $A\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a(a^2 + b^2) - b \\ b(a^2 + b^2) + a \end{pmatrix} = (a^2 + b^2)\mathbf{v} + \mathbf{w}$ より $A\mathbf{p} = A(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) = \lambda A\mathbf{v} + \mu A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v} + \mu(a^2 + b^2)\mathbf{v} + \mu\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mu(a^2 + b^2)\mathbf{v}$ である。従って l は T_A によって $\mathbf{x} = \mathbf{p} + (t + \mu(a^2 + b^2))\mathbf{v}$ とパラメータ表示される直線に写される。この直線の方向ベクトルも \mathbf{v} で、 \mathbf{p} を位置ベクトルとする点を通るため、この直線は l と一致する。故に $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする任意の直線は T_A によってそれ自身に写される。

線形数学 I 演習問題 第 3 回 行列の積

1. 行列の積について、次の \square にあてはまる行列を以下の行列の中から選び、その記号を答えよ。

- (1) $\begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \end{matrix}$ \times $\begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix}$ はスカラー (1×1 行列) になる. (2) $\begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix}$ \times $\begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \end{matrix}$ は 1×2 行列になる.
 (3) $\begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \end{matrix}$ \times $\begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix}$ は 2 次元数ベクトル (2×1 行列) になる. (4) $\begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix}$ \times $\begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \end{matrix}$ は 1×3 行列になる.
 (5) $\begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{matrix}$ \times $\begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \end{matrix}$ は 4 次元数ベクトル (4×1 行列) になる. (6) $\begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \end{matrix}$ \times $\begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \end{matrix}$ は 2×3 行列になる.
 (7) $\begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \end{matrix}$ \times $\begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \end{matrix}$ は逆行列をもつ 2 次正方行列である. (8) $\begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{matrix}$ \times $\begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \end{matrix}$ は 4×3 行列になる.
 (9) $\begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \end{matrix}$ \times $\begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \end{matrix}$ は逆行列をもたない 2 次正方行列である.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 以下の行列の積を計算せよ. ただし a は定数とする.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

3. (1) 3 次正方行列 A の逆行列が $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ で与えられるとき, $AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ を満たす行列 X を求めよ.

(2) 3 次正方行列 B の逆行列が $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ で与えられるとき, $BY = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす行列 Y を求めよ.

4. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくとき, 以下の問いに答えよ.

(1) J^n を求めよ. (2) $(aE_3 + J)^n$ を求めよ. (3) $(J + a^t J^2)^{3n}$ を求めよ. (4) $(J^2 + a^t J)^{3n}$ を求めよ.

5. (1) e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 を \mathbf{R}^5 の基本ベクトルとし, $A = \begin{pmatrix} e_2 & e_4 & e_5 & e_3 & e_1 \end{pmatrix}$ とおくとき, A^5 を求めよ.

(2) e_1, e_2, e_3, e_4 を \mathbf{R}^4 の基本ベクトルとし, 4×5 行列 A を $A = \begin{pmatrix} e_2 & e_4 & e_1 & e_3 & e_2 \end{pmatrix}$ で定めるとき, $(AA)^5$ を求めよ.

6. A, B を 3 次交代行列とする. A が零行列でないとき, $AB = BA$ が成り立つためには B が A の実数倍であること

が必要十分であることを示せ.

7. α は 0 でない実数とし, A は $A^2 = 2\alpha A - \alpha^2 E_n$ を満たす n 次正方行列とする.

(1) $A^k = a_k A + b_k E_n$ の形に表せることを示し, a_{k+1}, b_{k+1} を a_k, b_k の式で表せ.

(2) 数列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}, \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ の一般項を求めることにより, A^k を A, E_n, k, α を用いて表せ.

(ヒント. 数列 $\{a_{k+1} - \alpha a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は等比数列になり, 数列 $\left\{\frac{a_k}{\alpha^k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ は等差数列になることを示せ.)

8. α を実数の定数とする. $P = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ とおくととき以下の問いに答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し, $AP = xA + yP + zE_2$ を満たすような実数 x, y, z が存在するためには $c = 0$ であることが必要十分であることを示せ.

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & r \end{pmatrix}$ とする. $a \neq d$ の場合, $Q = uA + vP + wE_2$ を満たす u, v, w を, α, a, b, d, p, q, r を用いて表せ.

9. X を単位行列のスカラー倍ではない 2 次正方行列とする. 2 次正方行列 A が $AX = XA$ を満たせば, $A = \alpha E_2 + \beta X$ を満たすスカラー α, β が存在することを示せ.

10. N_n を, 第 1 列が零ベクトル, $2 \leq j \leq n$ に対し, 第 j 列が n 次元基本ベクトル e_{j-1} である n 次正方行列とし, $X = (x_{ij})$ を $m \times n$ 行列とする.

(1) N_n^l を求めよ.

(2) X が $N_m X = O$ を満たすための条件を求めよ.

(3) X が $X N_n = O$ を満たすための条件を求めよ.

(4) X が $N_m X = X N_n$ を満たすための条件を求めよ.

(5) $a \neq b$ のとき, $(aE_m + N_m)X = X(bE_n + N_n)$ ならば X は零行列であることを示せ.

11. n_1, n_2, \dots, n_k を正の整数, a_1, a_2, \dots, a_k を相異なる実数とし, $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ とおく.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 E_{n_1} & & & \mathbf{0} \\ & a_2 E_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & a_k E_{n_k} \end{pmatrix}$$

とおくとき n 次正方行列 X が $AX = XA$ を満たせば, X は次のような形の行列であることを示せ.

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & & & \mathbf{0} \\ & X_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & X_k \end{pmatrix} \quad (\text{ただし, } X_i \text{ は } n_i \text{ 次正方行列})$$

12. I, J, K を次で与えられる 4 次正方行列とする.

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $I^2 = J^2 = K^2 = -E_4, IJ = -JI = K, JK = -KJ = I, KI = -IK = J$ が成り立つことを示せ.

(2) $A = aE_4 + bI + cJ + dK$ ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$) に対し, $\bar{A} = aE_4 - bI - cJ - dK$, $\|A\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ とおくと, $A\bar{A} = \bar{A}A = \|A\|^2 E_4$ が成り立つことを示せ.

(3) \mathbf{H} を $aE_4 + bI + cJ + dK$ ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$) と表される 4 次正方行列全体の集合とする. このとき $A, B \in \mathbf{H}$ ならば $AB \in \mathbf{H}$ であることを示し, $A \in \mathbf{H}$ が零行列でなければ A は正則行列で, $A^{-1} \in \mathbf{H}$ であることを示せ.

(4) $X^2 + E_4 = O$ を満たす $X \in \mathbf{H}$ をすべて求めよ.

第3回の演習問題の解答

1. (1) ア:G, イ:F (2) ウ:I, エ:E (3) オ:H, カ:B (4) キ:G, ク:H (5) ケ:E, コ:F
 (6) サ:H, シ:C (7) ス:H, セ:A (8) ソ:E, タ:H (9) チ:F, ツ:G

$$2. (1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 & 0 \\ -1 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 22 & 29 & 36 \\ 27 & 36 & 45 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aE_4$$

$$(5) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 18 \\ 1 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{pmatrix}$$

$$(6) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 18 \\ 1 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 18 & -38 & -3 & 19 \\ 15 & -28 & 3 & 14 \end{pmatrix}$$

$$(7) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 37 \\ -1 & 23 \end{pmatrix}$$

$$(8) \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -10 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$$

$$3. (1) AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{の両辺に左から } A^{-1} \text{ をかければ, } X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$(2) BY = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{の両辺に左から } B^{-1} \text{ をかければ, } Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & -5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$4. (1) J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J^3 = O \text{ だから } n \geq 3 \text{ ならば } J^n = O \text{ である.}$$

(2) aE_3 と J の積は交換可能 ($(aE_3)J = J(aE_3) = aJ$) だから二項定理 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k x^{n-k} y^k$ の x, y に, そ

それぞれ aE_3, J を代入した等式 $(aE_3 + J)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k (aE_3)^{n-k} J^k$ が成り立つ. $k \geq 3$ ならば $J^k = O$ であることに

注意すれば, $(aE_3 + J)^n = a^n E_3 + na^{n-1} J + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} J^2 = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$.

(3) (1) の結果より ${}^t J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $(J + a{}^t J^2)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aE_3$ である. 従って $(J + a{}^t J^2)^{3n} = (aE_3)^n = a^n E_3$.

(4) (1) の結果より $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $(J^2 + a{}^t J)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = a^2 E_3$ である. 従って $(J^2 + a{}^t J)^{3n} = (a^2 E_3)^n = a^{2n} E_3$.

5. (1) A が表す 1 次変換 $T_A: \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^5$ を考えれば, $j = 1, 2, 3, 4, 5$ に対し, $T_A(e_j) = Ae_j = (A$ の第 j 列) だから $T_A(e_1) = e_2, T_A(e_2) = e_4, T_A(e_3) = e_5, T_A(e_4) = e_3, T_A(e_5) = e_1$ である. 従って, 各 e_j は

$$\begin{array}{ccccccccc} e_1 & \xrightarrow{T_A} & e_2 & \xrightarrow{T_A} & e_4 & \xrightarrow{T_A} & e_3 & \xrightarrow{T_A} & e_5 & \xrightarrow{T_A} & e_1 & & e_2 & \xrightarrow{T_A} & e_4 & \xrightarrow{T_A} & e_3 & \xrightarrow{T_A} & e_5 & \xrightarrow{T_A} & e_1 & \xrightarrow{T_A} & e_2 & & e_3 & \xrightarrow{T_A} & e_5 & \xrightarrow{T_A} & e_1 & \xrightarrow{T_A} & e_2 & \xrightarrow{T_A} & e_4 & \xrightarrow{T_A} & e_3 & \xrightarrow{T_A} & e_5 \\ e_4 & \xrightarrow{T_A} & e_3 & \xrightarrow{T_A} & e_5 & \xrightarrow{T_A} & e_1 & \xrightarrow{T_A} & e_2 & \xrightarrow{T_A} & e_4 & & e_5 & \xrightarrow{T_A} & e_1 & \xrightarrow{T_A} & e_2 & \xrightarrow{T_A} & e_4 & \xrightarrow{T_A} & e_3 & \xrightarrow{T_A} & e_5 & & e_1 & \xrightarrow{T_A} & e_2 & \xrightarrow{T_A} & e_4 & \xrightarrow{T_A} & e_3 & \xrightarrow{T_A} & e_5 \end{array}$$

と写されるため, $(A^5$ の第 j 列) $= A^5 e_j = T_{A^5}(e_j) = T_A \circ T_A \circ T_A \circ T_A \circ T_A(e_j) = e_j$ が $j = 1, 2, 3, 4, 5$ に対して成り立つ. 従って $A^5 = E_5$ である.

(2) \mathbf{R}^5 の基本ベクトルを $e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5$ で表せば, ${}^t A = \begin{pmatrix} e'_3 & e'_1 + e'_5 & e'_4 & e'_2 \end{pmatrix}$ だから $A{}^t A = \begin{pmatrix} e_1 & 2e_2 & e_3 & e_4 \end{pmatrix}$ である. 従って $A{}^t A e_j = (A{}^t A$ の第 j 列) $= \begin{cases} e_j & j \neq 2 \\ 2e_j & j = 2 \end{cases}$ だから, $((A{}^t A)^5$ の第 j 列) $= (A{}^t A)^5 e_j = \begin{cases} e_j & j \neq 2 \\ 2^5 e_j & j = 2 \end{cases}$ となるため, $(A{}^t A)^5 = \begin{pmatrix} e_1 & 32e_2 & e_3 & e_4 \end{pmatrix}$ である.

6. $A = (a_{ij})$ が 3 次交代行列ならば $a_{ji} = -a_{ij}$ が任意の $i, j = 1, 2, 3$ について成り立つため, とくに $a_{ii} = -a_{ii}$ より $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ である. そこで $a_{32} = a, a_{13} = b, a_{21} = c$ とおくと $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ と表される. 同

様に, 3 次交代行列 B は $B = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$ と表される. このとき $AB = \begin{pmatrix} -bq - cr & bp & cp \\ aq & -ap - cr & cq \\ ar & br & -ap - bq \end{pmatrix}$,

$BA = \begin{pmatrix} -bq - cr & aq & ar \\ bp & -ap - cr & br \\ cp & cq & -ap - bq \end{pmatrix}$ だから成分を比較して $AB = BA$ が成り立つためには $bp - aq = ar - cp =$

$cq - br = 0$ が成り立つことが必要十分である. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とおくと, 第 2 回の演習問題の 2 番の (2) と, 上

のことから、 $AB = BA$ が成り立つためには \mathbf{b} が \mathbf{a} の実数倍であることが必要十分である。明らかに B が A の実数倍であることと、 \mathbf{b} が \mathbf{a} の実数倍であることは同値だから、 $AB = BA$ が成り立つためには B が A の実数倍であることが必要十分である。

7. (1) まず $a_1 = 1, b_1 = 0$ は明らか。また $A^2 = 2\alpha A - \alpha^2 E_n$ だから $a_2 = 2\alpha, b_2 = -\alpha^2$ 。 k による帰納法で、 $A^k = a_k A + b_k E_n$ を仮定すれば、この両辺に A をかけて $A^{k+1} = a_k A^2 + b_k A = a_k(2\alpha A - \alpha^2 E_n) + b_k A = (2\alpha a_k + b_k)A - \alpha^2 a_k E_n$ だから $a_{k+1} = 2\alpha a_k + b_k, b_{k+1} = -\alpha^2 a_k$ とおけば $A^{k+1} = a_{k+1}A + b_{k+1}E_n$ となって、 $k+1$ の場合も主張は成立する。

(2) 上の結果から $a_{k+2} = 2\alpha a_{k+1} + b_{k+1} = 2\alpha a_{k+1} - \alpha^2 a_k$ 。従って、 $a_{k+2} - \alpha a_{k+1} = \alpha(a_{k+1} - \alpha a_k)$ となるため、数列 $\{a_{k+1} - \alpha a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は初項 $a_2 - \alpha a_1 = \alpha$ 、公比 α の等比数列である。故に $a_{k+1} - \alpha a_k = \alpha^k$ であり、この両辺を α^{k+1} で割ると、 $\frac{a_{k+1}}{\alpha^{k+1}} - \frac{a_k}{\alpha^k} = \frac{1}{\alpha}$ だから、数列 $\left\{\frac{a_k}{\alpha^k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ は初項 $\frac{a_1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ 、公差 $\frac{1}{\alpha}$ の等差数列になる。従って、 $\frac{a_k}{\alpha^k} = \frac{k}{\alpha}$ だから $a_k = k\alpha^{k-1}, b_k = -\alpha^2 a_{k-1} = (1-k)\alpha^k$ 。以上から $A^k = k\alpha^{k-1}A + (1-k)\alpha^k E_n$ 。

8. (1) $AP = \begin{pmatrix} a\alpha & a + b\alpha \\ c\alpha & c + d\alpha \end{pmatrix}, xA + yP + zE_2 = \begin{pmatrix} ax + \alpha y + z & bx + y \\ cx & dx + \alpha y + z \end{pmatrix}$ より $AP = xA + yP + zE_2$ ならば $a\alpha = ax + \alpha y + z, a + b\alpha = bx + y, c\alpha = cx, c + d\alpha = dx + \alpha y + z$ である。もし c が 0 でなければ、3 番目の式から、 $\alpha = x$ となり、1 番目の式から $z = -\alpha y$ 、4 番目の式から $c = \alpha y + z = 0$ となって矛盾が生じる。従って $c = 0$ である。

$c = 0$ の場合、 $AP = \begin{pmatrix} a\alpha & a + b\alpha \\ 0 & d\alpha \end{pmatrix}, xA + yP + zE_2 = \begin{pmatrix} ax + \alpha y + z & bx + y \\ 0 & dx + \alpha y + z \end{pmatrix}$ より $x = \alpha, y = a, z = -a\alpha$ と定めれば $AP = xA + yP + zE_2$ が成り立つ。

(2) $\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & r \end{pmatrix} = uA + vP + wE_2$ とすると、 $au + \alpha v + w = p, bu + v = q, du + \alpha v + w = r$ だから $u = \frac{p-r}{a-d}, v = \frac{q(a-d) - b(p-r)}{a-d}, w = \frac{ar - dp - qa(a-d) + b\alpha(p-r)}{a-d}$ 。

9. $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とする。 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し、 $AX - XA = \begin{pmatrix} br - cq & aq + b(s-p) - dq \\ -ar + c(p-s) + dr & -br + cq \end{pmatrix}$ である。 $q = r = 0$ の場合、仮定から $p \neq s$ だから、上式から $AX = XA$ ならば $b = c = 0$ である。このとき、 $A = \frac{dp - as}{p-s} E_2 + \frac{a-d}{p-s} X$ だから、 $\alpha = \frac{dp - as}{p-s}, \beta = \frac{a-d}{p-s}$ と定めればよい。 $q \neq 0$ の場合、上式から $AX = XA$

ならば $c = \frac{br}{q}, d = a - \frac{b(p-s)}{q}$ が成り立つため、 $A = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} aq & bq \\ br & aq - bp + bs \end{pmatrix} = \frac{aq - bp}{q} E_2 + \frac{b}{q} X$ である。従って、

$q \neq 0$ の場合は $\alpha = \frac{aq - bp}{q}, \beta = \frac{b}{q}$ と定めればよい。 $r \neq 0$ の場合、 $AX = XA$ ならば $b = \frac{cq}{r}, d = a - \frac{c(p-s)}{r}$ が

成り立つため、 $A = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} ar & cq \\ cr & ar - cp + cs \end{pmatrix} = \frac{ar - cp}{r} E_2 + \frac{c}{r} X$ である。従って、 $r \neq 0$ の場合は $\alpha = \frac{ar - cp}{r}, \beta = \frac{c}{r}$ と定めればよい。

10. (1) $N_n = (\mathbf{0} \ e_1 \ \cdots \ e_{n-1})$ だから $N_n e_j = \begin{cases} \mathbf{0} & j = 1 \\ e_{j-1} & 2 \leq j \leq n \end{cases}$ である。従って $N_n^l e_j = \begin{cases} \mathbf{0} & 1 \leq j \leq l \\ e_{j-l} & l+1 \leq j \leq n \end{cases}$ だから、 $1 \leq l \leq n-1$ ならば N_n^l は第 1 行目から第 l 行目までがすべて零ベクトルで、 $l+1 \leq j \leq n$ に対し、第 j 行目が e_j である行列であり、 $l \geq n$ ならば N_n^l は零行列である。

(2) $N_m X$ の第 i 行は、 $i < m$ ならば X の第 $i+1$ 行に等しく、第 m 行は零である。従って $N_m X = O$ であるためには、 X の第 1 行以外の行がすべて零であることが必要十分である。

(3) $X N_n$ の第 j 列は、 $j > 1$ ならば X の第 $j-1$ 列に等しく、第 1 列は零である。従って $X N_n = O$ であるためには、 X の第 n 列以外の列がすべて零であることが必要十分である。

(4) $N_m X - X N_n$ は以下で与えられるため、 $N_m X = X N_n$ であるためには $2 \leq i \leq m$ に対して $x_{i1} = 0$,

$1 \leq j \leq n-1$ に対して $x_{mj} = 0$ かつ $1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n-1$ に対して $x_{i+1j+1} = x_{ij}$ が成り立つことが必要十分である。

$$N_m X - X N_n = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} - x_{11} & \cdots & x_{2j} - x_{1j-1} & \cdots & x_{2n} - x_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i+11} & x_{i+12} - x_{i1} & \cdots & x_{i+1j} - x_{ij-1} & \cdots & x_{i+1n} - x_{in-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} - x_{m-11} & \cdots & x_{mj} - x_{m-1j-1} & \cdots & x_{mn} - x_{m-1n-1} \\ 0 & -x_{m1} & \cdots & -x_{mj-1} & \cdots & -x_{mn-1} \end{pmatrix}$$

$m \leq n$ の場合, $j-i < n-m$ ならば $x_{ij} = 0$ である. 実際 $i = m$ ならば $1 \leq j \leq n-1$ に対して $x_{mj} = 0$ だから主張は成り立ち, $k < i \leq m$ かつ $j-i < n-m$ ならば $x_{ij} = 0$ が成り立つと仮定すれば, $j-k < n-m$ のとき, $k+1 \leq m$ かつ $(j+1) - (k+1) = j-k < n-m$ だから $x_{kj} = x_{k+1j+1} = 0$ である. $a_i = x_{m-in}$ とおけば, $1 \leq j \leq m$ に対して $x_{1n-m+j} = x_{2n-m+j+1} = \cdots = x_{in-m+i+j-1} = \cdots = x_{m-j+1n} = a_{j-1}$ であり, N_m^l に対して (1) の結果を用いれば, 次の等式が得られる.

$$\begin{pmatrix} x_{1n-m+1} & x_{1n-m+2} & \cdots & x_{1n-m+j} & \cdots & x_{1n} \\ x_{2n-m+1} & x_{2n-m+2} & \cdots & x_{2n-m+j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{in-m+1} & x_{in-m+2} & \cdots & x_{in-m+j} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{mn-m+1} & x_{mn-m+2} & \cdots & x_{mn-m+j} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{j-1} & \cdots & a_{m-1} \\ & a_0 & \cdots & a_{j-2} & \cdots & a_{m-2} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & a_0 & \cdots & a_{m-i} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & a_0 \end{pmatrix} = \sum_{l=0}^{m-1} a_l N_m^l$$

故に, 求める条件は $X = \left(O \quad \sum_{l=0}^{m-1} a_l N_m^l \right) = \sum_{l=0}^{m-1} a_l \left(O \quad N_m^l \right)$ と表されることである.

$m \geq n$ の場合, $i > j$ ならば $x_{ij} = 0$ である. 実際 $j = 1$ ならば $2 \leq i \leq m$ に対して $x_{i1} = 0$ だから主張は成り立ち, $1 \leq j < k$ かつ $j < i$ ならば $x_{ij} = 0$ が成り立つと仮定すれば, $k < i$ のとき, $j \leq k-1 < i-1$ だから $x_{ik} = x_{i-1k-1} = 0$ である. $b_j = x_{1j+1}$ とおけば, $1 \leq j \leq m$ に対して $b_{j-1} = x_{1j} = x_{2j+1} = \cdots = x_{ij+i-1} = \cdots = x_{n-j+1n}$ であり, N_n^l に対して (1) の結果を用いれば, 次の等式が得られる.

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{j-1} & \cdots & b_{n-1} \\ & b_0 & \cdots & b_{j-2} & \cdots & b_{n-2} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & b_0 & \cdots & b_{n-i} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & b_0 \end{pmatrix} = \sum_{l=0}^{n-1} b_l N_n^l$$

故に, 求める条件は $X = \begin{pmatrix} \sum_{l=0}^{n-1} b_l N_n^l \\ O \end{pmatrix} = \sum_{l=0}^{n-1} b_l \begin{pmatrix} N_n^l \\ O \end{pmatrix}$ と表されることである.

(5) 次の等式が成り立つため, $(aE_m + N_m)X = X(bE_n + N_n)$ ならば $(a-b)x_{i1} + x_{i+11} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m-1$), $(a-b)x_{m1} = 0$, $(a-b)x_{ij} + x_{i+1j} - x_{ij-1} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m-1, j = 2, 3, \dots, n$), $(a-b)x_{mj} = x_{mj-1}$

($j = 2, 3, \dots, n$) である.

$$(aE_m + N_m)X = \begin{pmatrix} ax_{11} + x_{21} & ax_{12} + x_{22} & \cdots & ax_{1j} + x_{2j} & \cdots & ax_{1n} + x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ax_{i1} + x_{i+1,1} & ax_{i2} + x_{i+1,2} & \cdots & ax_{ij} + x_{i+1,j} & \cdots & ax_{in} + x_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ax_{m-1,1} + x_{m1} & ax_{m-1,2} + x_{m2} & \cdots & ax_{m-1,j} + x_{mj} & \cdots & ax_{m-1,n} + x_{mn} \\ ax_{m1} & ax_{m2} & \cdots & ax_{mj} & \cdots & ax_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X(bE_n + N_n) = \begin{pmatrix} bx_{11} & bx_{12} + x_{11} & \cdots & bx_{1j} + x_{1j-1} & \cdots & bx_{1n} + x_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ bx_{i1} & bx_{i1} + x_{i1} & \cdots & bx_{ij} + x_{ij-1} & \cdots & bx_{in} + x_{in-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ bx_{m-1,1} & bx_{m-1,2} + x_{m-1,1} & \cdots & bx_{m-1,j} + x_{m-1,j-1} & \cdots & bx_{m-1,n} + x_{m-1,n-1} \\ bx_{m1} & bx_{m2} + x_{m1} & \cdots & bx_{mj} + x_{mj-1} & \cdots & bx_{mn} + x_{mn-1} \end{pmatrix}$$

従って $a \neq b$ ならば $x_{m1} = 0$, $x_{i-1,1} = -\frac{x_{i1}}{a-b}$ ($i = 2, 3, \dots, m$), $x_{mj} = \frac{x_{m,j-1}}{a-b}$ ($j = 2, 3, \dots, n$) より $x_{i1} = x_{mj} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$) である. さらに $x_{ij} = \frac{-x_{i+1,j} + x_{ij-1}}{a-b}$ ($i = 1, 2, \dots, m-1, j = 2, 3, \dots, n$) より $j-i$ による帰納法で $x_{ij} = 0$ であることが示される. 実際 $j-i = 1-m$ の場合は $(i, j) = (m, 1)$ の場合に限られるため, 主張が成り立ち, $j-i = k-1$ ($2-m \leq k \leq n-2$) ならば $x_{ij} = 0$ と仮定すれば, $j-i = k$ のとき, $j-(i+1) = (j-1) - i = k-1$ より $x_{i+1,j} = x_{ij-1} = 0$ だから $x_{ij} = \frac{-x_{i+1,j} + x_{ij-1}}{a-b} = 0$ である. 故に $(aE_m + N_m)X = X(bE_n + N_n)$ ならば X は零行列である.

11. A, X の (i, j) 成分をそれぞれ a_{ij}, x_{ij} とし, $\nu_1 = 0, \nu_s = n_1 + n_2 + \cdots + n_{s-1}$ ($s = 2, 3, \dots, k$) とおく. さらに, $a_{\nu_p+i, \nu_q+j}, x_{\nu_p+i, \nu_q+j}$ ($i = 1, 2, \dots, n_p, j = 1, 2, \dots, n_q$) を (i, j) 成分とする $n_p \times n_q$ 行列をそれぞれ A_{pq}, X_{pq} とする. AX, XA の (i, j) 成分をそれぞれ y_{ij}, z_{ij} とし, $y_{\nu_p+i, \nu_q+j}, z_{\nu_p+i, \nu_q+j}$ ($i = 1, 2, \dots, n_p, j = 1, 2, \dots, n_q$) を (i, j) 成分とする $n_p \times n_q$ 行列をそれぞれ Y_{pq}, Z_{pq} とすれば,

$$y_{\nu_p+i, \nu_q+j} = \sum_{s=1}^n a_{\nu_p+i, s} x_{s, \nu_q+j} = \sum_{t=1}^k \sum_{s=1}^{n_t} a_{\nu_p+i, \nu_t+s} x_{\nu_t+s, \nu_q+j} = \sum_{t=1}^k (A_{pt} X_{tq} \text{ の } (i, j) \text{ 成分})$$

$$z_{\nu_p+i, \nu_q+j} = \sum_{s=1}^n x_{\nu_p+i, s} a_{s, \nu_q+j} = \sum_{t=1}^k \sum_{s=1}^{n_t} x_{\nu_p+i, \nu_t+s} a_{\nu_t+s, \nu_q+j} = \sum_{t=1}^k (X_{pt} A_{tq} \text{ の } (i, j) \text{ 成分})$$

より $Y_{pq} = \sum_{t=1}^k A_{pt} X_{tq}$, $Z_{pq} = \sum_{t=1}^k X_{pt} A_{tq}$ が成り立つ. 仮定から $p \neq q$ ならば A_{pq} は零行列であり, $A_{pp} = a_p E_{n_p}$ だから, 上式より $Y_{pq} = A_{pp} X_{pq} = a_p X_{pq}$, $Z_{pq} = X_{pq} A_{qq} = a_q X_{pq}$ が得られる. $AX = XA$ ならば, すべての $p, q = 1, 2, \dots, k$ に対して $Y_{pq} = Z_{pq}$ だから $a_p X_{pq} = a_q X_{pq}$ すなわち $(a_p - a_q) X_{pq} = O$ である. 仮定から $p \neq q$ ならば $a_p \neq a_q$ だから X_{pq} は零行列である. 従って $X_i = X_{ii}$ とおけば X_i は n_i 次正方行列であり, X は

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & & & \mathbf{0} \\ & X_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & X_k \end{pmatrix} \text{ の形の行列である.}$$

12. (1) $L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおけば $L^2 = -E_2$ であり, $I = \begin{pmatrix} L & O \\ O & -L \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} O & -E_2 \\ E_2 & O \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} O & -L \\ -L & O \end{pmatrix}$ だから $I^2 = \begin{pmatrix} L & O \\ O & -L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & O \\ O & -L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^2 & O \\ O & (-L)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_2 & O \\ O & -E_2 \end{pmatrix} = -E_4$, $J^2 = \begin{pmatrix} O & -E_2 \\ E_2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -E_2 \\ E_2 & O \end{pmatrix} =$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -E_2 & O \\ O & -E_2 \end{pmatrix} &= -E_4, K^2 = \begin{pmatrix} O & -L \\ -L & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -L \\ -L & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-L)^2 & O \\ O & (-L)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_2 & O \\ O & -E_2 \end{pmatrix} = -E_4, \\ IJ &= \begin{pmatrix} L & O \\ O & -L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -E_2 \\ E_2 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -L \\ -L & O \end{pmatrix} = K, JK = \begin{pmatrix} O & -E_2 \\ E_2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -L \\ -L & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & O \\ O & -L \end{pmatrix} = I, \\ KI &= \begin{pmatrix} O & -L \\ -L & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & O \\ O & -L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & (-L)^2 \\ -L^2 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -E_2 \\ E_2 & O \end{pmatrix} = J, JI = J(JK) = J^2K = -E_4K = -K, \\ KJ &= K(KI) = K^2I = -E_4I = -I, IK = I(IJ) = I^2J = -E_4J = -J. \end{aligned}$$

(2) $A\bar{A} = (aE_4 + bI + cJ + dK)(aE_4 - bI - cJ - dK) = a(aE_4 + bI + cJ + dK)E_4 - b(aE_4 + bI + cJ + dK)I - c(aE_4 + bI + cJ + dK)J - d(aE_4 + bI + cJ + dK)K = a^2E_4^2 + abIE_4 + acJE_4 + adKE_4 - abE_4I - b^2I^2 - bcJI - bdKI - acE_4J - bcI - c^2J^2 - cdKJ - adE_4K - bdIK - cdJK - d^2K^2 = a^2E_4 + abI + acJ + adK - abI + b^2E_4 - bcJI - bdKI - acJ - bcIJ + c^2E_4 - cdKJ - adK - bdIK - cdJK + d^2E_4 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)E_4 - bc(IJ + JI) - cd(JK + KJ) - bd(KI + IK) = \|A\|E_4$. b, c, d をそれぞれ $-b, -c, -d$ で置き換えれば, 上式より $\bar{A}A = (aE_4 - bI - cJ - dK)(aE_4 + bI + cJ + dK) = (aE_4 + (-b)I + (-c)J + (-d)K)(aE_4 - (-b)I - (-c)J - (-d)K) = (a^2 + (-b)^2 + (-c)^2 + (-d)^2)E_4 = \|A\|^2E_4$.

(3) $A = aE_4 + bI + cJ + dK, B = pE_4 + qI + rJ + sK \in \mathbf{H}$ ならば $AB = (aE_4 + bI + cJ + dK)(pE_4 + qI + rJ + sK) = p(aE_4 + bI + cJ + dK)E_4 + q(aE_4 + bI + cJ + dK)I + r(aE_4 + bI + cJ + dK)J + s(aE_4 + bI + cJ + dK)K = apE_4^2 + bpIE_4 + cpJE_4 + dpKE_4 + aqE_4I + bqI^2 + cqJI + dqKI + arE_4J + brIJ + crJ^2 + drKJ + asE_4K + bsIK + csJK + dsK^2 = apE_4 + bpI + cpJ + dpK + aqI - bqE_4 - cqK + dqJ + arJ + brK - crE_4 - drI + asK - bsJ + csI - dsE_4 = (ap - bq - cr - ds)E_4 + (bp + aq - dr + cs)I + (cp + dq + ar - bs)J + (dp - cq + br + as)K \in \mathbf{H}$ である. $A \neq O$ ならば $|A| \neq 0$ だから, (2) の結果より $A \left(\frac{1}{\|A\|^2} \bar{A} \right) = \left(\frac{1}{\|A\|^2} \bar{A} \right) A = E_4$ だから, A は正則で, $A^{-1} = \frac{1}{\|A\|^2} \bar{A} = \frac{a}{\|A\|^2} E_4 + \frac{-b}{\|A\|^2} I + \frac{-c}{\|A\|^2} J + \frac{-d}{\|A\|^2} K \in \mathbf{H}$ である.

(4) $X = xE_4 + yI + zJ + wK$ ($x, y, z, w \in \mathbf{R}$) とおけば $X^2 = (x^2 - y^2 - z^2 - w^2)E_4 + 2xyI + 2xzJ + 2xwK$ だから $X^2 + E_4 = O$ であるためには $x^2 - y^2 - z^2 - w^2 = -1$ かつ $xy = xz = xw = 0$ であることが必要十分である. もし $x \neq 0$ ならば $y = z = w = 0$ であるが, このとき一つの方程式から $x^2 = -1$ となるため, x が実数であるという仮定に反する. 従って $x = 0$ であり, y, z, w が $y^2 + z^2 + w^2 = 1$ を満たすことが必要十分である. このとき, $y = \cos \varphi, \sqrt{z^2 + w^2} = \sin \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) とおけば $z^2 + w^2 = \sin^2 \varphi$ だから $z = \sin \varphi \cos \psi, w = \sin \varphi \sin \psi$ ($0 \leq \psi < 2\pi$) とおくことができる. 従って $X^2 + E_4 = O$ を満たす $X \in \mathbf{H}$ 全体からなる集合は $\{\cos \varphi I + \sin \varphi \cos \psi J + \sin \varphi \sin \psi K \mid 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \psi < 2\pi\}$ で与えられる.

線形数学 I 演習問題 第 4 回 正方行列・1 次写像

1. 次の行列の逆行列を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $A = (a_{ij})$ を n 次上半三角行列とする.

(1) $B = (b_{ij})$ も n 次上半三角行列ならば AB も上半三角行列であり, $i = 1, 2, \dots, n$ に対し, AB の (i, i) 成分は $a_{ii}b_{ii}$ であることを示せ.

(2) A が正則行列であるためには, $i = 1, 2, \dots, n$ に対して $a_{ii} \neq 0$ であることが必要十分であり, A が正則行列ならば A の逆行列も上半三角行列であることを示し, このとき $i = 1, 2, \dots, n$ に対して A の逆行列の (i, i) 成分は $\frac{1}{a_{ii}}$ であることを示せ.

3. n 次正方行列 A に対し, $A^m = O$ となる自然数 m が存在すれば, $E_n + A$ は正則行列であることを示せ.

4. 1 次写像 $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ はベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ に写すとするとき, f を表す行列を求めよ.

5. a を定数とする. $f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ は $e_1, e_1 + e_2, e_1 - e_3, e_1 - e_3 - e_4$ をそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2-a \end{pmatrix}$ に写す 1 次写像とする. このとき, f を表す行列を求めよ.

6. a, b, α, β を実数の定数とし, $ax + by + z = 0$ で表される \mathbf{R}^3 の平面を H とする. \mathbf{R}^3 の 1 次変換 f が条件「 \mathbf{x} が H に平行なベクトルならば $f(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{x}$ であり, \mathbf{x} が H に垂直ならば $f(\mathbf{x}) = \beta\mathbf{x}$ 」を満たすとき, f を表す行列を求めよ.

7. a, b, α, β を実数の定数とし, 以下で与えられる \mathbf{R}^3 のベクトル, \mathbf{u}, \mathbf{v} に平行で, 原点を通る平面を H とする. \mathbf{R}^3 の 1 次変換 f が条件「 \mathbf{x} が H に平行なベクトルならば $f(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{x}$ であり, \mathbf{x} が H に垂直ならば $f(\mathbf{x}) = \beta\mathbf{x}$ 」を満たすとき, f を表す行列を求めよ.

$$(1) \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 2a-1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ 1-a^2 \\ 2a^2-2a+1 \end{pmatrix} \quad (2) \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

8. (1) 2 次正方行列 A の表す \mathbf{R}^2 の 1 次変換 T_A は, 直線 $y = 2x$ を直線 $y = -x$ の上に写し, 点 $(1, 1)$ を $(1, 1)$ に写す. さらに A の行列式の値が 4 であるとき, これらの条件をすべて満たす行列 A を求めよ.

(2) 2 次対称行列 B の表す \mathbf{R}^2 の 1 次変換 T_B は, 直線 $y = x$ を直線 $y = \frac{1}{2}x$ の上に写し, 直線 $y = 2x$ を直線 $y = -2x$ の上に写す. さらに B の行列式の値が 5 であるとき, これらの条件をすべて満たす行列 B をすべて求めよ.

9. $\mathbf{v} = ae_1 + be_2 + ce_3$ を \mathbf{R}^3 の零でないベクトルとし, \mathbf{v} を方向ベクトルとして原点を通る \mathbf{R}^3 の直線を ℓ , \mathbf{v} に垂直で原点を通る \mathbf{R}^3 の平面を P とする.

- (1) \mathbf{R}^3 の各点 p を l に下した垂線の足に対応させる写像を表す行列を求めよ。
 (2) \mathbf{R}^3 の各点 p を P に下した垂線の足に対応させる写像を表す行列を求めよ。
 (3) l に関する対称移動を表す行列を求めよ。
 (4) P に関する対称移動を表す行列を求めよ。

10. \mathbf{R}^3 において, 方程式 $\frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z-2}{-1}$ が表す直線を l とする. このとき, 次の条件 (1), (2) を両方とも満たす \mathbf{R}^3 の 1 次変換 $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を表す行列を求めよ.

- (1) x が l に平行なベクトルならば $f(x) = 3x$ である.
 (2) x が l に垂直なベクトルならば $f(x) = -2x$ である.

11. \mathbf{R}^3 の 2 つの単位ベクトル $u = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を考える.

- (1) u と e_3 の両方に垂直で, 第 1 成分が正の単位ベクトルを求めよ. このベクトルを v とする.
 (2) w は v と e_3 の両方に垂直な単位ベクトル, z は v と u の両方に垂直な単位ベクトルであり, w, z の第 1 成分は負であるとするとき, これらの成分を求めよ.

(3) 1 次写像 $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ は $f(v) = v, f(w) = z, f(e_3) = u$ を満たすとする. このとき, f を表す行列を求めよ.

12. $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおき, u, v を含んで原点を通る平面を H とする. このとき, 次の条件 (1), (2), (3) を満たす \mathbf{R}^3 の 1 次変換 $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を表す行列を求めよ.

- (1) x が H に含まれるベクトルならば $f(x) = 2x$ である.
 (2) x が H に垂直なベクトルならば $f(x)$ も H に垂直である.
 (3) H に平行な平面 H' ($H' \neq H$) で, f によって H' は H' に写されるものがある.

13. $f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ は $2e_1 + e_4$ を e_1 に, $e_1 - e_2$ を e_2 に, $e_2 + ae_3$ を e_3 に, $(2a-1)e_3 + 2e_4$ を e_4 に写す 1 次写像とする. f を表す行列を A とするとき, A の逆行列を求めよ.

14. $\varphi, \psi \in \mathbf{R}$ に対し, S_φ を原点を中心として反時計方向に φ だけ回転させる回転移動とし, T_ψ を方向ベクトルが $\begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$ で原点を通る直線に関する対称移動とする.

(1) 合成写像 $T_\psi \circ S_\varphi, S_\varphi \circ T_\psi$ はともに原点を通る直線に関する対称移動であることを示し, それぞれの対称移動の軸となる直線の方向ベクトルで長さが 1 であるものを 1 つずつ答えよ.

(2) $\varphi', \psi' \in \mathbf{R}$ が $S_{\varphi'} \circ T_{\psi'} = T_\psi \circ S_\varphi$ を満たすための条件を求めよ.

15. (発展問題) c, d を実数の定数とする. \mathbf{R}^2 の二つのベクトル $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ に対し, u と v の積 $u * v$ を

$u * v = \begin{pmatrix} xz + cyw \\ xw + yz + dyw \end{pmatrix}$ で定めるとき, 以下の間に答えよ.

(1) v を固定したとき, 対応 $u \mapsto u * v$ は \mathbf{R}^2 の 1 次変換であり, u を固定したとき, 対応 $v \mapsto u * v$ も \mathbf{R}^2 の 1 次変換であることを示せ.

(2) ベクトル $i \in \mathbf{R}^2$ で, $i * i = -e_1$ を満たすものが存在するための条件を求め, このとき i を求めよ.

(3) 0 でないベクトル $n \in \mathbf{R}^2$ で, $n * n = 0$ を満たすものが存在するための条件を求め, このとき n を求めよ.

(4) 0 でないベクトル $p, q \in \mathbf{R}^2$ で, $p * q = 0, p * p = p, q * q = q$ を満たすものが存在することと, 0 と e_1 と異なるベクトル p で $p * p = p$ を満たすものが存在することは同値であることを示せ.

(5) $\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^2$ で, $\mathbf{p} * \mathbf{q} = \mathbf{0}$, $\mathbf{p} * \mathbf{p} = \mathbf{p}$, $\mathbf{q} * \mathbf{q} = \mathbf{q}$ を満たすものが存在するための条件を求め, このとき \mathbf{p}, \mathbf{q} を求めよ.

(6) (5) で求めた条件のもとで, \mathbf{R}^2 の任意のベクトル \mathbf{x} は $\mathbf{x} = s\mathbf{p} + t\mathbf{q}$ の形に表されることを示し, $\mathbf{a} * \mathbf{b} = \mathbf{0}$ を満たす零でないベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} の組をすべて求めよ.

第4回の演習問題の解答

1. (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $AB = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから $AB = E_2$ となるためには, $a+b=0$ が成り立つことが必要十分である. 従って, $b=-a$ だから $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & d & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば $AB = \begin{pmatrix} 1 & a+d & b+af+e \\ 0 & 1 & c+f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから $AB = E_3$ となるためには, $a+d=b+af+e=c+f=0$ が成り立つことが必要十分である. 従って, $d=-a$, $f=-c$, $e=-af-b=ac-b$ だから $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である.

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & g & h & i \\ 0 & 1 & j & k \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば $AB = \begin{pmatrix} 1 & a+g & b+aj+h & c+bl+ak+i \\ 0 & 1 & d+j & e+dl+k \\ 0 & 0 & 1 & f+l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから $AB = E_4$ となるためには, $a+g=b+aj+h=c+bl+ak+i=d+j=e+dl+k=f+l=0$ が成り立つことが必要十分である. 従って, $g=-a$, $j=-d$, $l=-f$, $h=-aj-b=ad-b$, $k=-dl-e=df-e$, $i=-bl-ak-c=ae+bf-adf-c$ だから $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ad-b & ae+bf-adf-c \\ 0 & 1 & -d & df-e \\ 0 & 0 & 1 & -f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である.

2. (1) $AB = (c_{ij})$ とおく. 仮定から $i > k$ ならば $a_{ik} = 0$ だから, $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=i}^n a_{ik}b_{kj}$ である. さらに仮定から $k > j$ ならば $b_{kj} = 0$ だから, $i > j$ ならば上式から $c_{ij} = 0$ であり, $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$ である. 故に AB は (i, i) 成分が $a_{ii}b_{ii}$ である上半三角行列である.

(2) A が正則行列のとき, $A^{-1} = (a'_{ij})$ とおけば, (i) より AA^{-1} の (i, i) 成分は $a_{ii}a'_{ii}$ である. 一方, $AA^{-1} = E_n$ だから $a_{ii}a'_{ii} = 1$ が $i = 1, 2, \dots, n$ に対して成り立つため, $a_{ii} \neq 0$ であり, $a'_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}$ が成り立つ.

$i = 1, 2, \dots, n$ に対して $a_{ii} \neq 0$ であると仮定して, $i, j = 1, 2, \dots, n$ に対して b_{ij}, b'_{ij} を次のように定める. $i > j$ ならば $b_{ij} = b'_{ij} = 0$ とおき, $i = 1, 2, \dots, n$ に対して $b_{ii} = b'_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}$ とおく. 帰納的に $j-i \leq r-1$ ($1 \leq r \leq n-1$)

を満たす i, j に対して b_{ij} と b'_{ij} が定義されたと仮定して, $j-i = r$ のとき, b_{ij} と b'_{ij} を $b_{ij} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{k=i+1}^j a_{ik}b_{kj}$,

$b'_{ij} = -\frac{1}{a_{jj}} \sum_{k=i+1}^j b_{ik}a_{kj}$ によって定義する. そこで, $B = (b_{ij})$, $B' = (b'_{ij})$, $AB = (c_{ij})$, $B'A = (c'_{ij})$ とおく. $i > k$

ならば $a_{ik} = 0$, $k > j$ ならば $b_{kj} = 0$ だから, $i > j$ ならば $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=i}^n a_{ik}b_{kj} = 0$, $i > k$ ならば $b'_{ik} = 0$,

$k > j$ ならば $a_{kj} = 0$ だから, $i > j$ ならば $c'_{ij} = \sum_{k=1}^n b'_{ik}a_{kj} = \sum_{k=i}^n b'_{ik}a_{kj} = 0$, $i = j$ ならば $b_{ii} = b'_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}$ より

$c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=i}^n a_{ik}b_{ki} = a_{ii}b_{ii} = 1$, $c'_{ii} = \sum_{k=1}^n b'_{ik}a_{ki} = \sum_{k=i}^n b'_{ik}a_{ki} = b'_{ii}a_{ii} = 1$, $i < j$ ならば b_{ij}, b'_{ij} の定義から

$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=i}^j a_{ik}b_{kj} = 0$, $c'_{ij} = \sum_{k=1}^n b'_{ik}a_{kj} = \sum_{k=i}^j b'_{ik}a_{kj} = 0$ である. 従って $AB = B'A = E_n$ が成り立つため,

$B' = B'E_n = B'(AB) = (B'A)B = E_n = B$ が得られる. 故に $AB = BA = E_n$ だから B は A の逆行列なるため, A は正則行列である.

3. $B = E_n - A + A^2 + \cdots + (-1)^k A^k + \cdots + (-1)^{m-1} A^{m-1} = E_n + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k A^k$ とおけば,

$$(E_n + A)B = B + AB = E_n + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k A^k + A \left(E_n + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k A^k \right) = E_n + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k A^k + A + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k A^{k+1}$$

$$B(E_n + A) = B + BA = E_n + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k A^k + \left(E_n + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k A^k \right) A = E_n + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k A^k + A + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k A^{k+1}$$

であり,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k A^k + A + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k A^{k+1} &= A + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k A^k + \sum_{k=2}^m (-1)^{k-1} A^k \\ &= A - A + \sum_{k=2}^{m-1} (-1)^k A^k + \sum_{k=2}^{m-1} (-1)^{k-1} A^k + (-1)^{m-1} A^m \\ &= \sum_{k=2}^{m-1} ((-1)^k + (-1)^{k-1}) A^k = \sum_{k=2}^{m-1} (-(-1)^{k-1} + (-1)^{k-1}) A^k = O \end{aligned}$$

だから, $(E_n + A)B = B(E_n + A) = E_n$ が得られる. 従って, $E_n + A$ は正則で, その逆行列は $B = E_n + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k A^k$ である.

4. $f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(2\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ だから

$$f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdots (1), \quad f(\mathbf{e}_2) + f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdots (2), \quad 2f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} \cdots (3)$$

(3) から $f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ であり, これを (1), (2) に代入して $f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ を得る. 従って, f を表す行列は $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ である.

5. 前問と同様に, $f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $f(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2-a \end{pmatrix}$ だから

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdots (1), \quad f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdots (2), \quad f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdots (3),$$

$f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_3) - f(\mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2-a \end{pmatrix} \cdots (4)$ である. (2) - (1), (1) - (3), (3) - (4) を計算すれば, $f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$,

$$f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, f(\mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ a \end{pmatrix} \text{ だから } f \text{ を表す行列は } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ である.}$$

5. $a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ は H の法線ベクトルだから、仮定と f の線形性から次の等式が成り立つ.

$$af(\mathbf{e}_1) + bf(\mathbf{e}_2) + f(\mathbf{e}_3) = \beta(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \cdots (*)$$

$\mathbf{e}_1 - a\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 - b\mathbf{e}_3$ は H の法線ベクトルに垂直なベクトルだから、 H に平行である. 従って仮定と f の線形性から次の等式 $f(\mathbf{e}_1) - af(\mathbf{e}_3) = \alpha(\mathbf{e}_1 - a\mathbf{e}_3), f(\mathbf{e}_2) - bf(\mathbf{e}_3) = \alpha(\mathbf{e}_2 - b\mathbf{e}_3)$ が成り立ち、 $f(\mathbf{e}_1) = af(\mathbf{e}_3) + \alpha(\mathbf{e}_1 - a\mathbf{e}_3), f(\mathbf{e}_2) = bf(\mathbf{e}_3) + \alpha(\mathbf{e}_2 - b\mathbf{e}_3)$ だから、これらを (*) に代入すれば次の等式が得られる.

$$(a^2 + b^2 + 1)f(\mathbf{e}_3) = a(\beta - \alpha)\mathbf{e}_1 + b(\beta - \alpha)\mathbf{e}_2 + (a^2\alpha + (b^2 + 1)\beta)\mathbf{e}_3$$

故に $f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \frac{a(\beta - \alpha)}{a^2 + b^2 + 1} \\ \frac{b(\beta - \alpha)}{a^2 + b^2 + 1} \\ \frac{(a^2 + b^2)\alpha + \beta}{a^2 + b^2 + 1} \end{pmatrix}$ だから $f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \frac{(b^2 + 1)\alpha + a^2\beta}{a^2 + b^2 + 1} \\ \frac{ab(\beta - \alpha)}{a^2 + b^2 + 1} \\ \frac{a(\beta - \alpha)}{a^2 + b^2 + 1} \end{pmatrix}, f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} \frac{ab(\beta - \alpha)}{a^2 + b^2 + 1} \\ \frac{(a^2 + 1)\alpha + b^2\beta}{a^2 + b^2 + 1} \\ \frac{b(\beta - \alpha)}{a^2 + b^2 + 1} \end{pmatrix}$ であり、 f を表す行列は以下

で与えられる.

$$\begin{pmatrix} \frac{(b^2 + 1)\alpha + a^2\beta}{a^2 + b^2 + 1} & \frac{ab(\beta - \alpha)}{a^2 + b^2 + 1} & \frac{a(\beta - \alpha)}{a^2 + b^2 + 1} \\ \frac{ab(\beta - \alpha)}{a^2 + b^2 + 1} & \frac{(a^2 + 1)\alpha + b^2\beta}{a^2 + b^2 + 1} & \frac{b(\beta - \alpha)}{a^2 + b^2 + 1} \\ \frac{a(\beta - \alpha)}{a^2 + b^2 + 1} & \frac{b(\beta - \alpha)}{a^2 + b^2 + 1} & \frac{(a^2 + b^2)\alpha + \beta}{a^2 + b^2 + 1} \end{pmatrix}$$

6. (1) $(1 - a^2)\mathbf{u} + a\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 - (a^2 - 3a + 1)\mathbf{e}_3$ と $\mathbf{v} - a\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 - (a - 1)\mathbf{e}_3$ はともに H 上のベクトルだから、仮定と f の線形性から次の等式が得られる.

$$f(\mathbf{e}_1) - (a^2 - 3a + 1)f(\mathbf{e}_3) = \alpha(\mathbf{e}_1 - (a^2 - 3a + 1)\mathbf{e}_3) \cdots (i)$$

$$f(\mathbf{e}_2) - (a - 1)f(\mathbf{e}_3) = \alpha(\mathbf{e}_2 - (a - 1)\mathbf{e}_3) \cdots (ii)$$

一方、 $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ を H の両方に垂直なベクトルとすれば $(\mathbf{w}, (1 - a^2)\mathbf{u} + a\mathbf{v}) = (\mathbf{w}, \mathbf{v} - a\mathbf{u}) = 0$ より $p = r(a^2 - 3a + 1),$

$q = r(a - 1)$ が得られるため、とくに $r = 1$ の場合を考えると $\begin{pmatrix} a^2 - 3a + 1 \\ a - 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a^2 - 3a + 1)\mathbf{e}_1 + (a - 1)\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ は平面 H に垂直である. 故に、仮定と f の線形性から次の等式が得られる.

$$(a^2 - 3a + 1)f(\mathbf{e}_1) + (a - 1)f(\mathbf{e}_2) + f(\mathbf{e}_3) = \beta((a^2 - 3a + 1)\mathbf{e}_1 + (a - 1)\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \cdots (iii)$$

(i), (ii) から $f(\mathbf{e}_1) = (a^2 - 3a + 1)f(\mathbf{e}_3) + \alpha(\mathbf{e}_1 - (a^2 - 3a + 1)\mathbf{e}_3), f(\mathbf{e}_2) = (a - 1)f(\mathbf{e}_3) + \alpha(\mathbf{e}_2 - (a - 1)\mathbf{e}_3)$ だから、これらを (iii) に代入すれば

$$((a^2 - 3a + 1)^2 + (a - 1)^2 + 1)f(\mathbf{e}_3) = (\beta - \alpha)(a^2 - 3a + 1)\mathbf{e}_1 + (\beta - \alpha)(a - 1)\mathbf{e}_2 + (\alpha(a^4 - 6a^3 + 12a^2 - 8a + 2) + \beta)\mathbf{e}_3$$

が得られるため、 $f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \frac{(\beta - \alpha)(a^2 - 3a + 1)}{(a^2 - 3a + 1)^2 + (a - 1)^2 + 1} \\ \frac{(\beta - \alpha)(a - 1)}{(a^2 - 3a + 1)^2 + (a - 1)^2 + 1} \\ \frac{\alpha((a^2 - 3a + 1)^2 + (a - 1)^2) + \beta}{(a^2 - 3a + 1)^2 + (a - 1)^2 + 1} \end{pmatrix}$ である. 従って $f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha((a - 1)^2 + 1) + \beta(a^2 - 3a + 1)^2}{(a^2 - 3a + 1)^2 + (a - 1)^2 + 1} \\ \frac{(\beta - \alpha)(a - 1)(a^2 - 3a + 1)}{(a^2 - 3a + 1)^2 + (a - 1)^2 + 1} \\ \frac{(\beta - \alpha)(a^2 - 3a + 1)}{(a^2 - 3a + 1)^2 + (a - 1)^2 + 1} \end{pmatrix},$

$f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} \frac{(\beta-\alpha)(a-1)(a^2-3a+1)}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} \\ \frac{\alpha((a^2-3a+1)^2+1)+\beta(a-1)^2}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} \\ \frac{(\beta-\alpha)(a-1)}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} \end{pmatrix}$ が得られる. 故に f を表す行列は以下で与えられる.

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha((a-1)^2+1)+\beta(a^2-3a+1)^2}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} & \frac{(\beta-\alpha)(a-1)(a^2-3a+1)}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} & \frac{(\beta-\alpha)(a^2-3a+1)}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} \\ \frac{(\beta-\alpha)(a-1)(a^2-3a+1)}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} & \frac{\alpha((a^2-3a+1)^2+1)+\beta(a-1)^2}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} & \frac{(\beta-\alpha)(a-1)}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} \\ \frac{(\beta-\alpha)(a^2-3a+1)}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} & \frac{(\beta-\alpha)(a-1)}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} & \frac{\alpha((a^2-3a+1)^2+(a-1)^2)+\beta}{(a^2-3a+1)^2+(a-1)^2+1} \end{pmatrix}$$

(2) $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3$ だから, 一般に $f(\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{u}$, $f(\mathbf{v}) = \alpha'\mathbf{v}$ ならば f の線形性から次の等式が得られる.

$$f(\mathbf{e}_1) + af(\mathbf{e}_2) + f(\mathbf{e}_3) = \alpha(\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \cdots (i), \quad f(\mathbf{e}_2) + bf(\mathbf{e}_3) = \alpha'(\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3) \cdots (ii)$$

一方, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ を \mathbf{u} , \mathbf{v} の両方に垂直なベクトルとすれば $(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = (\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$ より $p + aq + r = q + br = 0$ であ

る. 従って, $p = r(ab-1)$, $q = -br$ となるため, とくに $r = 1$ の場合を考えると $\begin{pmatrix} ab-1 \\ -b \\ 1 \end{pmatrix} = (ab-1)\mathbf{e}_1 - b\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$

は平面 H に垂直である. 故に, 仮定と f の線形性から

$$(ab-1)f(\mathbf{e}_1) - bf(\mathbf{e}_2) + f(\mathbf{e}_3) = \beta((ab-1)\mathbf{e}_1 - b\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \cdots (iii)$$

である. (i) から (ii) の両辺を a 倍したものを辺々引けば $f(\mathbf{e}_1) - (ab-1)f(\mathbf{e}_3) = \alpha\mathbf{e}_1 + a(\alpha - \alpha')\mathbf{e}_2 + (\alpha - ab\alpha')\mathbf{e}_3$ だから $f(\mathbf{e}_1) = (ab-1)f(\mathbf{e}_3) + \alpha\mathbf{e}_1 + a(\alpha - \alpha')\mathbf{e}_2 + (\alpha - ab\alpha')\mathbf{e}_3$ であり, (ii) より $f(\mathbf{e}_2) = -bf(\mathbf{e}_3) + \alpha'(\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3)$ だから, これらを (iii) に代入すれば

$$((ab-1)^2 + b^2 + 1)f(\mathbf{e}_3) = (ab-1)(\beta - \alpha)\mathbf{e}_1 + (b(\alpha' - \beta) - a(ab-1)(\alpha - \alpha'))\mathbf{e}_2 + (b^2\alpha' + \beta - (ab-1)(\alpha - ab\alpha'))\mathbf{e}_3$$

が得られるため, $f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \frac{(ab-1)(\beta-\alpha)}{(ab-1)^2+b^2+1} \\ \frac{b(\alpha'-\beta)-a(ab-1)(\alpha-\alpha')}{(ab-1)^2+b^2+1} \\ \frac{b^2\alpha'+\beta-(ab-1)(\alpha-ab\alpha')}{(ab-1)^2+b^2+1} \end{pmatrix}$ である. 従って $f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha(b^2+1)+\beta(ab-1)^2}{(ab-1)^2+b^2+1} \\ \frac{a\alpha(b^2+1)-b\beta(ab-1)-\alpha'(a+b)}{(ab-1)^2+b^2+1} \\ \frac{\alpha(b^2+1)+\beta(ab-1)-b\alpha'(a+b)}{(ab-1)^2+b^2+1} \end{pmatrix}$,

$f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} \frac{b(ab-1)(\alpha-\beta)}{(ab-1)^2+b^2+1} \\ \frac{b^2\beta+ab\alpha(ab-1)-\alpha'(ab-2)}{(ab-1)^2+b^2+1} \\ \frac{b(-\beta+\alpha(ab-1)-\alpha'(ab-2))}{(ab-1)^2+b^2+1} \end{pmatrix}$ が得られる. 故に f を表す行列は

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha(b^2+1)+\beta(ab-1)^2}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{b(ab-1)(\alpha-\beta)}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{(ab-1)(\beta-\alpha)}{(ab-1)^2+b^2+1} \\ \frac{a\alpha(b^2+1)-b\beta(ab-1)-\alpha'(a+b)}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{b^2\beta+ab\alpha(ab-1)-\alpha'(ab-2)}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{b(\alpha'-\beta)-a(ab-1)(\alpha-\alpha')}{(ab-1)^2+b^2+1} \\ \frac{\alpha(b^2+1)+\beta(ab-1)-b\alpha'(a+b)}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{b(-\beta+\alpha(ab-1)-\alpha'(ab-2))}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{b^2\alpha'+\beta-(ab-1)(\alpha-ab\alpha')}{(ab-1)^2+b^2+1} \end{pmatrix}$$

である. とくに $\alpha' = \alpha$ の場合, 上の行列は次のような対称行列になる.

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha(b^2+1)+\beta(ab-1)^2}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{b(ab-1)(\alpha-\beta)}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{(ab-1)(\beta-\alpha)}{(ab-1)^2+b^2+1} \\ \frac{b(ab-1)(\alpha-\beta)}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{\alpha(a^2b^2-2ab+2)+b^2\beta}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{b(\alpha-\beta)}{(ab-1)^2+b^2+1} \\ \frac{(ab-1)(\beta-\alpha)}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{b(\alpha-\beta)}{(ab-1)^2+b^2+1} & \frac{b^2\alpha+\beta+\alpha(ab-1)^2}{(ab-1)^2+b^2+1} \end{pmatrix}$$

7. (1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく. T_A は直線 $y = 2x$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を直線 $y = -x$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ に平行

なベクトルに写すため, $T_A \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を満たす実数 k がある. 従って $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ より $a + 2b = k$,

$c + 2d = -k$ が成り立つ. また $T_A \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ より, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから $a + b = 1, c + d = 1$ である. 故

に $\begin{cases} a + 2b = k \\ a + b = 1 \end{cases}, \begin{cases} c + 2d = -k \\ c + d = 1 \end{cases}$ であり, それぞれ a と b, c と d に関する連立方程式とみれば, $a = -k + 2,$

$b = k - 1, c = k + 2, d = -k - 1$ が得られる. さらに, A の行列式の値が 4 であることから $ad - bc = 4$ が成り立つため, 上の結果を代入して, $-2k = 4$ を得る. 従って $k = -2$ だから $a = 4, b = -3, c = 0, d = 1$ となり, $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である.

(2) B は 2 次対称行列だから $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ とおける. T_B は直線 $y = x$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を直線 $y = \frac{1}{2}x$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に平行なベクトルに写すため, $T_B \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たす実数 k が存在し, T_B は直線 $y = 2x$ の方向

ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を直線 $y = -2x$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ に平行なベクトルに写すため, $T_B \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = l \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ を満たす実数 l がある. 従って $B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ より $a + b = 2k, b + c = k$ が成り立ち, $B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ より $a + 2b = l,$

$b + 2c = -2l$ が成り立つ. 故に $\begin{cases} a + b = 2k \\ a + 2b = l \end{cases}, \begin{cases} b + c = k \\ b + 2c = -2l \end{cases}$ であり, それぞれ a と b, b と c に関する連立方

程式とみれば, 前者から $a = 4k - l, b = -2k + l$ が得られ, 後者から $b = 2k + 2l, c = -k - 2l$ が得られる. よって $b = -2k + l = 2k + 2l$ だから $l = -4k$ となるため, $a = 8k, b = -6k, c = 7k$ である. さらに, B の行列式の値が 5 であることから $ac - b^2 = 5$ が成り立つため, 上の結果を代入して, $20k^2 = 5$ を得る. 従って $k = \pm \frac{1}{2}$ だから $a = 4,$

$b = -3, c = \frac{7}{2}$ または $a = -4, b = 3, c = -\frac{7}{2}$ となり, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ または $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$ である.

8. (1) l に下した垂線の足を tv とすれば, $tv - \mathbf{p}$ と \mathbf{v} は垂直だから $(tv - \mathbf{p}, \mathbf{v}) = 0$. 従って, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすれば,

$t = \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{v})}{(\mathbf{v}, \mathbf{v})} = \frac{ax + by + cz}{a^2 + b^2 + c^2}$. このとき $tv = \frac{ax + by + cz}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a^2x + aby + acz \\ abx + b^2y + bcz \\ acx + bcy + c^2z \end{pmatrix}$ だから, 求める

行列は $\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ である.

(2) P に下した垂線の足を \mathbf{q} とすれば, $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ と \mathbf{v} は平行だから $\mathbf{q} - \mathbf{p} = s\mathbf{v}$ とおける. \mathbf{q} と \mathbf{v} は垂直だから $(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = 0$. この式に $\mathbf{q} = \mathbf{p} + s\mathbf{v}$ を代入すれば, $(\mathbf{p} + s\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$. 従って, $s = -\frac{(\mathbf{p}, \mathbf{v})}{(\mathbf{v}, \mathbf{v})} = -\frac{ax + by + cz}{a^2 + b^2 + c^2}$. この

とき $\mathbf{q} = \mathbf{p} + s\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{ax + by + cz}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} (b^2 + c^2)x - aby - acz \\ -abx + (a^2 + c^2)y - bcz \\ -acx - bcy + (a^2 + b^2)z \end{pmatrix}$ だから, 求める行列は

$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$ である.

(3) l に関して \mathbf{p} と対称なベクトルを \mathbf{r} とすれば, $\frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{r})$ が \mathbf{p} から l に下した垂線の足だから $\frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{r}) =$

$\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}\mathbf{v}$ である。従って、 $\mathbf{r} = \frac{2(ax+by+cz)}{a^2+b^2+c^2}\mathbf{v} - \mathbf{p} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} \begin{pmatrix} (a^2-b^2-c^2)x+2aby+2acz \\ 2abx+(-a^2+b^2-c^2)y+2bcz \\ 2acx+2bcy+(-a^2-b^2+c^2)z \end{pmatrix}$ だか

ら、求める行列は $\frac{1}{a^2+b^2+c^2} \begin{pmatrix} a^2-b^2-c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & -a^2+b^2-c^2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & -a^2-b^2+c^2 \end{pmatrix}$ である。

(4) P に関して \mathbf{p} と対称なベクトルを \mathbf{u} とすれば、 $\frac{1}{2}(\mathbf{p}+\mathbf{u})$ が \mathbf{p} から P に下した垂線の足だから $\frac{1}{2}(\mathbf{p}+\mathbf{u}) =$

$\mathbf{p} - \frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}\mathbf{v}$ である。従って $\mathbf{u} = \mathbf{p} - \frac{2(ax+by+cz)}{a^2+b^2+c^2}\mathbf{v} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} \begin{pmatrix} (-a^2+b^2+c^2)x-2aby-2acz \\ -2abx+(a^2-b^2+c^2)y-2bcz \\ -2acx-2bcy+(a^2+b^2-c^2)z \end{pmatrix}$

だから、求める行列は $\frac{1}{a^2+b^2+c^2} \begin{pmatrix} -a^2+b^2+c^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & a^2-b^2+c^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & a^2+b^2-c^2 \end{pmatrix}$ である。

9. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ は ℓ に平行なベクトルであり、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3$ はともに ℓ に垂直で

ある。従って仮定から $f(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = 3(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$, $f(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = -2(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$, $f(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3) = -2(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3)$ が成り立つため、 f の線形性から

$$2f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_3) = 6\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3, \quad f(\mathbf{e}_2) + f(\mathbf{e}_3) = -2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \quad f(\mathbf{e}_1) + 2f(\mathbf{e}_3) = -2\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_3$$

が得られる。2つ目の式と3つ目の式から $f(\mathbf{e}_2) = -f(\mathbf{e}_3) - 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$, $f(\mathbf{e}_1) = -2f(\mathbf{e}_3) - 2\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_3$ だから、これら

を1つ目の式に代入すれば $f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}$ が得られるため、上式から $f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}$, $f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$ を得る。故

に f を表す行列は $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{7}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$ である。

10. (1) \mathbf{v} は \mathbf{e}_3 と垂直だから $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ とおける。このとき $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{3}(a+2b)$ だから \mathbf{v} が \mathbf{u} に垂直であるため

には $a+2b=0$ であることが必要十分で、さらに \mathbf{v} が単位ベクトルであることから $a^2+b^2=1$ である。 $b = -\frac{a}{2}$ を

$a^2+b^2=1$ に代入し、仮定から $a > 0$ だから $a = \frac{2}{\sqrt{5}}$ が得られる。従って $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ だから $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。

(2) \mathbf{w} は \mathbf{e}_3 と垂直だから $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$ とおける。このとき $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2c-d)$ だから \mathbf{w} が \mathbf{v} に垂直であるため

には $2c-d=0$ であることが必要十分で、さらに \mathbf{w} が単位ベクトルであることから $c^2+d^2=1$ である。 $d = 2c$ を

$c^2+d^2=1$ に代入し、仮定から $c < 0$ だから $c = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ が得られる。従って $d = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ だから $\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ であ

る. $z = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とおけば $(\mathbf{u}, z) = \frac{1}{3}(p + 2q + 2r)$, $(\mathbf{v}, z) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2p - q)$ だから \mathbf{w} が \mathbf{u} と \mathbf{v} に垂直であるためには $p + 2q + 2r = 0$ かつ $2p - q = 0$ であることが必要十分で, さらに z が単位ベクトルであることから $p^2 + q^2 + r^2 = 1$ である. $q = 2p$, $r = -\frac{p}{2} - q = -\frac{5p}{2}$ を $p^2 + q^2 + r^2 = 1$ に代入し, 仮定から $p < 0$ だから $p = -\frac{2}{3\sqrt{5}}$ が得られる.

従って $q = -\frac{4}{3\sqrt{5}}$, $r = \frac{5}{3\sqrt{5}}$ だから $z = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ である.

(3) $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$, $\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2)$ だから, f の線形性と仮定から $\frac{1}{\sqrt{5}}(2f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_2)) = f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}(-f(\mathbf{e}_1) - 2f(\mathbf{e}_2)) = f(\mathbf{w}) = \mathbf{z}$ が成り立つ. 従って $2f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_2) = \sqrt{5}\mathbf{v}$, $f(\mathbf{e}_1) + 2f(\mathbf{e}_2) = -\sqrt{5}\mathbf{z}$ だから,

(1), (2) の結果から $f(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{v} - \mathbf{z}) = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $f(\mathbf{e}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\mathbf{v} - 2\mathbf{z}) = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -10 \end{pmatrix}$ が得られる. また,

$f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{u} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ だから f を表す行列は $\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 14 & -2 & 5 \\ -2 & 11 & 10 \\ -5 & -10 & 10 \end{pmatrix}$ である.

11. $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ を \mathbf{u}, \mathbf{v} の両方に垂直なベクトルとすれば $(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = (\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$ より $p + r = q - r = 0$ である. 従って,

$p = -r, q = r$ だから, とくに $r = 1$ の場合を考えると $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ は平面 H に垂直である. 仮定か

ら $f(\mathbf{w})$ は \mathbf{u} と \mathbf{v} に垂直だから H の法線ベクトル \mathbf{w} の実数倍で, $f(\mathbf{w}) = k\mathbf{w}$ を満たす実数 k がある. H と平行な平面 H' は $\mathbf{x} = a\mathbf{w} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ (a は 0 でない定数) の形にパラメータ表示され, $a\mathbf{w}$ を位置ベクトルとする H' 上の点は f によって $f(a\mathbf{w}) = ak\mathbf{w}$ に写されるため, H' が f によって H' に写されるならば $ak\mathbf{w} = a\mathbf{w} + b\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ を満たす実数 b, c がある. このとき $a(k-1)\mathbf{w} = b\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ で, この等式の両辺と \mathbf{w} との内積を考えれば, $(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = (\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$ より $a(k-1)\|\mathbf{w}\|^2 = b(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + c(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$ が得られるが, $a \neq 0$ で $\|\mathbf{w}\|^2 = 3$ だから, $k = 1$ である. 故に $f(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$ だから $-f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) + f(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \cdots (*)$ が成り立つ.

一方, $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ だから仮定から $f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_3) = 2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)$, $f(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_3) = 2(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$ が得られるため $f(\mathbf{e}_1) = 2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) - f(\mathbf{e}_3)$, $f(\mathbf{e}_2) = 2(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) + f(\mathbf{e}_3)$ である. これらを (*) に代入して $f(\mathbf{e}_3)$ について解けば $f(\mathbf{e}_3) = \frac{1}{3}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{5}{3}\mathbf{e}_3$ が得られるため, $f(\mathbf{e}_1) = \frac{5}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{e}_3$, $f(\mathbf{e}_2) = \frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{5}{3}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_3$ である. 以

上から f を表す行列は $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ である.

12. 仮定から $A(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_1$, $A(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2$, $A(\mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3$, $A((2a-1)\mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_4$ だから $A(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4 \quad \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3 \quad (2a-1)\mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_4) = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{e}_4) = E_4$. 従って,

$$A^{-1} = (2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4 \quad \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3 \quad (2a-1)\mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 3 \\ 1 & 0 & 2a-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

13. (1) $R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$, $Q(\psi) = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix}$ とおけば S_φ, T_ψ はそれぞれ $R(\varphi), Q(\psi)$ によって表される 1 次変換である. 従って $T_\psi \circ S_\varphi, S_{\varphi'} \circ T_{\psi'}$ は, 加法定理を用いれば, それぞれ

$$Q(\psi)R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\psi - \varphi) & \sin(2\psi - \varphi) \\ \sin(2\psi - \varphi) & -\cos(2\psi - \varphi) \end{pmatrix}$$

$$R(\varphi)Q(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\psi + \varphi) & \sin(2\psi + \varphi) \\ \sin(2\psi + \varphi) & -\cos(2\psi + \varphi) \end{pmatrix}$$

によって表される 1 次変換である. 従って $T_\psi \circ S_\varphi, S_{\varphi'} \circ T_{\psi'}$ はそれぞれ $\begin{pmatrix} \cos(\psi - \frac{\varphi}{2}) \\ \sin(\psi - \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\psi + \frac{\varphi}{2}) \\ \sin(\psi + \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする原点を通る直線に関する対称移動である.

(2) $T_\psi \circ S_\varphi, S_{\varphi'} \circ T_{\psi'}$ はそれぞれ, 行列 $\begin{pmatrix} \cos(2\psi - \varphi) & \sin(2\psi - \varphi) \\ \sin(2\psi - \varphi) & -\cos(2\psi - \varphi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(2\psi' + \varphi') & \sin(2\psi' + \varphi') \\ \sin(2\psi' + \varphi') & -\cos(2\psi' + \varphi') \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換だから $S_{\varphi'} \circ T_{\psi'} = T_\psi \circ S_\varphi$ が成り立つためには $\cos(2\psi' + \varphi') = \cos(2\psi - \varphi)$ かつ $\sin(2\psi' + \varphi') = \sin(2\psi - \varphi)$ が成り立つことが必要十分である. 従って, 求める条件は $2(\psi' - \psi) + \varphi' + \varphi$ が 2π の整数倍になることである.

14. (1) $\mathbf{u} * \mathbf{v} = \begin{pmatrix} xz + cyw \\ xw + yz + dyw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & cw \\ w & z + dw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & cy \\ y & x + dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ だから対応 $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} * \mathbf{v}, \mathbf{v} \mapsto \mathbf{u} * \mathbf{v}$ はそれぞれ行列 $\begin{pmatrix} z & cw \\ w & z + dw \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & cy \\ y & x + dy \end{pmatrix}$ で表される \mathbf{R}^2 の 1 次変換である.

(2) $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ とおく. $\mathbf{i} * \mathbf{i} = \begin{pmatrix} u^2 + cv^2 \\ 2uv + dv^2 \end{pmatrix}$ だから $\mathbf{i} * \mathbf{i} = -\mathbf{e}_1$ は $\begin{cases} u^2 + cv^2 = -1 & \dots (i) \\ 2uv + dv^2 = 0 & \dots (ii) \end{cases}$ と同値である. (ii) より $v = 0$ または $2u + dv = 0$ であるが, $v = 0$ ならば (i) より $u^2 = -1$ が得られ, u が実数であることに反する. 故に $u = -\frac{dv}{2}$ であり, (i) に代入すれば $\left(\frac{d^2}{4} + c\right)v^2 = -1$ が得られるため $\frac{d^2}{4} + c < 0$ すなわち $d^2 + 4c < 0$ であることがわかる. 逆に $d^2 + 4c < 0$ の場合, $u = -\frac{dv}{2}, (d^2 + 4c)v^2 = -4$ より $\gamma = \sqrt{\frac{-1}{d^2 + 4c}}$ とおけば $(u, v) = (\pm d\gamma, \mp 2\gamma)$ (複号同順) だから $\mathbf{i} = \pm \begin{pmatrix} d\gamma \\ -2\gamma \end{pmatrix}$ とおけば $\mathbf{i} * \mathbf{i} = -\mathbf{e}_1$ が成り立ち, $\mathbf{i} * \mathbf{i} = -\mathbf{e}_1$ を満たす \mathbf{i} は $\pm \begin{pmatrix} d\gamma \\ -2\gamma \end{pmatrix}$ に限られる. 従って $d^2 + 4c < 0$ が $\mathbf{i} * \mathbf{i} = -\mathbf{e}_1$ を満たすものがあるための条件である.

(3) $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ とおく. $\mathbf{n} * \mathbf{n} = \begin{pmatrix} u^2 + cv^2 \\ 2uv + dv^2 \end{pmatrix}$ だから $\mathbf{n} * \mathbf{n} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} u^2 + cv^2 = 0 & \dots (i) \\ 2uv + dv^2 = 0 & \dots (ii) \end{cases}$ と同値である. (ii) より $v = 0$ または $2u + dv = 0$ であるが, $v = 0$ ならば (i) より $u = 0$ が得られ, \mathbf{n} が $\mathbf{0}$ でないことに反する. 故に $u = -\frac{dv}{2}$ であり, (i) に代入すれば $\left(\frac{d^2}{4} + c\right)v^2 = 0$ が得られ, $v \neq 0$ だから $\frac{d^2}{4} + c = 0$ すなわち $d^2 + 4c = 0$ であることがわかる. このとき, $v = 2k$ とおけば $u = -dk$ だから \mathbf{n} は $\mathbf{n} = k \begin{pmatrix} -d \\ 2 \end{pmatrix}$ という形のベクトルである.

従って $d^2 + 4c = 0$ が $\mathbf{n} * \mathbf{n} = \mathbf{0}$ を満たすものがあるための条件であり, $\mathbf{n} * \mathbf{n} = \mathbf{0}$ を満たすベクトル \mathbf{n} は $k \begin{pmatrix} -d \\ 2 \end{pmatrix}$ (k は 0 でない実数) で与えられる.

(4) $\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^2$ で, $\mathbf{p} * \mathbf{q} = \mathbf{0}, \mathbf{p} * \mathbf{p} = \mathbf{p}, \mathbf{q} * \mathbf{q} = \mathbf{q}$ を満たすものが存在すれば, $\mathbf{p} \neq \mathbf{e}_1$ である. 実際, もし $\mathbf{p} \neq \mathbf{e}_1$ ならば $\mathbf{q} = \mathbf{e}_1 * \mathbf{q} = \mathbf{p} * \mathbf{q} = \mathbf{0}$ となり, \mathbf{q} が $\mathbf{0}$ でないことと矛盾する. 逆に $\mathbf{0}$ とも \mathbf{e}_1 とも異なるベクトル \mathbf{p} で $\mathbf{p} * \mathbf{p} = \mathbf{p}$ を満たすものが存在するとき, $\mathbf{q} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{p}$ とおけば $\mathbf{p} \neq \mathbf{e}_1$ より $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ であり, (1) の結果を用いると $\mathbf{p} * \mathbf{q} = \mathbf{p} * (\mathbf{e}_1 - \mathbf{p}) = \mathbf{p} * \mathbf{e}_1 - \mathbf{p} * \mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p} = \mathbf{0}, \mathbf{q} * \mathbf{q} = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{p}) * (\mathbf{e}_1 - \mathbf{p}) = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{p}) * \mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_1 - \mathbf{p}) * \mathbf{p} =$

$e_1 * e_1 - p * e_1 - e_1 * p + p * p = e_1 - p - p + p = e_1 - p = q$ が得られる.

(5) (4) の結果から $\mathbf{0}$ と e_1 と異なるベクトル p で $p * p = p$ を満たすものが存在する条件を求めればよい.

$p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とおけば $p * p = \begin{pmatrix} a^2 + cb^2 \\ 2ab + db^2 \end{pmatrix}$ だから $p * p = p$ が成り立つためには a, b が $\begin{cases} a^2 + cb^2 = a & \dots (i) \\ 2ab + db^2 = b & \dots (ii) \end{cases}$ を

満たすことが必要十分である. もし $b = 0$ ならば (i) より a は 0 または 1 となって p は $\mathbf{0}$ または e_1 に等しくなる. 従って $p \neq \mathbf{0}, e_1$ ならば $b \neq 0$ であり, (ii) より $a = \frac{1-db}{2}$ が得られる. これを (i) に代入すれば $(d^2 + 4c)b^2 = 1$ が

得られるため $d^2 + 4c > 0$ であることがわかる. 逆に $d^2 + 4c > 0$ ならば $\lambda = \frac{1}{\sqrt{d^2 + 4c}}$ とおけば $b^2 = \lambda^2, a = \frac{1-db}{2}$

だから $b = \pm\lambda, a = \frac{1 \mp d\lambda}{2}$ であり, $p * p = p$ を満たす p は $p = \begin{pmatrix} \frac{1-d\lambda}{2} \\ \lambda \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} \frac{1+d\lambda}{2} \\ -\lambda \end{pmatrix}$ で与えられ, $\lambda \neq 0$ だか

ら p は $\mathbf{0}$ と e_1 と異なる. 以上から, 求める条件は $d^2 + 4c > 0$ である.

$d^2 + 4c > 0$ のとき, $\mathbf{0}$ でないベクトル $p, q \in \mathbf{R}^2$ が $p * q = \mathbf{0}, p * p = p, q * q = q$ を満たすとき, (4) の解答の前半でみたように, p は $\mathbf{0}$ と e_1 と異なり, 同様に q も $\mathbf{0}$ と e_1 と異なるため, 上で示したことから, p, q は

$\begin{pmatrix} \frac{1-d\lambda}{2} \\ \lambda \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} \frac{1+d\lambda}{2} \\ -\lambda \end{pmatrix}$ のいずれかである. もし, $p = q$ ならば $p = p * p = p * q = \mathbf{0}$ となって $p \neq \mathbf{0}$ に矛盾する.

従って $p \neq q$ だから $p = \begin{pmatrix} \frac{1-d\lambda}{2} \\ \lambda \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} \frac{1+d\lambda}{2} \\ -\lambda \end{pmatrix}$ または $p = \begin{pmatrix} \frac{1+d\lambda}{2} \\ -\lambda \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} \frac{1-d\lambda}{2} \\ \lambda \end{pmatrix}$ である. いずれの場合にしても,

$q = e_1 - p$ が成り立つため $p * q = p * (e_1 - p) = p * e_1 - p * p = p - p = \mathbf{0}$ である.

(6) もし $q = kp$ を満たす実数 k が存在すれば $kp = k(p * p) = p * (kp) = p * q = \mathbf{0}$ が得られるため, $k = 0$ または $p = \mathbf{0}$ である. 前者の場合は $q = \mathbf{0}$ となるため, いずれにしても p, q が $\mathbf{0}$ でないことと矛盾する. 同様に $p = kq$ を満たす実数 k も存在しない. 従って \mathbf{R}^2 の任意のベクトル x は $x = sp + tq$ の形に表される. $\mathbf{0}$ でないベクトル $a, b \in \mathbf{R}^2$ が $a * b = \mathbf{0}$ を満たすとし, $a = sp + tq, b = up + vq$ と表すと (1) の結果と $q * p = p * q = \mathbf{0}$ から

$$a * b = (sp + tq) * (up + vq) = u(sp + tq) * p + v(sp + tq) * q = sup * p + tuq * p + svp * q + tvq * q = sup + tvq$$

だから $p * q = \mathbf{0}$ であるためには $su = tv = 0$ であることが必要十分である. $s = 0$ の場合, $a \neq \mathbf{0}$ だから $t \neq 0$ となるため $v = 0$ である. また $u = 0$ の場合, $b \neq \mathbf{0}$ だから $v \neq 0$ となるため $t = 0$ である. 故に $a * b = \mathbf{0}$ を満たす零でないベクトル a, b の組は $(a, b) = (xp, yq)$ または (yq, xp) (x, y は 0 でない実数) で与えられる.

線形数学 I 演習問題 第 5 回 連立 1 次方程式

1. 次の連立 1 次方程式の解を求めよ. ただし, a は定数とする.

$$(1) \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - 4y = 1 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x - 3y - 2z = -1 \\ 2x - 2y - 3z = -1 \\ x + 5y = 1 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 3x + 4y - z = 1 \\ 5x + 6y - z = 3 \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} 2x - 5y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 1 \\ 4x - 5y + z = 18 \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = -1 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$(8) \begin{cases} 2x - y - z = 12 \\ x - 3y + 2z = 1 \\ 4x - 5y + z = 18 \end{cases}$$

$$(9) \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 4y - z = 1 \\ 5x + 6y - z = 1 \end{cases}$$

$$(10) \begin{cases} 3x - y - 4z = -5 \\ x + y - z = -2 \\ x + 5y = -3 \end{cases}$$

$$(11) \begin{cases} 2x + 5y + 3z = 4 \\ 3x + 8y + 5z = 5 \\ 3x + 5y + 2z = 11 \end{cases}$$

$$(12) \begin{cases} 3x - 5y - 5z = -4 \\ 2x - 2y - 3z = -3 \\ 5x + y - 6z = -7 \end{cases}$$

$$(13) \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

$$(14) \begin{cases} x + y - z = 6 \\ 2x + 4y + 6z = -2 \\ -3x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

$$(15) \begin{cases} (a - 2)x - y - 2z = 0 \\ -x + (a - 2)y + 2z = 0 \\ -2x + 2y + (a + 1)z = 0 \end{cases}$$

$$(16) \begin{cases} x - y = -2 \\ 3x - y + z = -2 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

$$(17) \begin{cases} x + y + 2z + 3w = 6 \\ x + 2y - z + 4w = 8 \end{cases}$$

$$(18) \begin{cases} 3x + 2y + z + w = 4 \\ 5x + y + 2z + 3w = 6 \end{cases}$$

$$(19) \begin{cases} 2x - 4y - 5w = 9 \\ 4x + 3y + 11z - 2w = 4 \\ 5x + 2y + 12z - 4w = 7 \end{cases}$$

$$(20) \begin{cases} x + 2y - 3z - 2w = 3 \\ x + 3y + z - w = 2 \\ 2x + 5y - 2z - 3w = 5 \end{cases}$$

$$(21) \begin{cases} 2x + 3y - 4z - w = 1 \\ x + y - z + 2w = 2 \\ y - 2z - 5w = a \end{cases}$$

$$(22) \begin{cases} x - 2y + 4z - w = -6 \\ 3x + 12y - 6z + w = 8 \\ 5x - y + 11z - 3w = 3 \end{cases}$$

$$(23) \begin{cases} x + 2y + z + 2w = 1 \\ 2x - y - 3z - w = -3 \\ -x + 8y + 9z + 8w = 9 \end{cases}$$

$$(24) \begin{cases} x + 2y + 4z - 6w = 1 \\ 3x + y + 7z + 7w = 8 \\ x + 9y + 21z + 19w = 14 \\ 2x + 7y + 11z + 5w = -1 \end{cases}$$

$$(25) \begin{cases} x - 3y + 3z + 2w = -7 \\ 4x + 3y - 2z + w = 8 \\ 5x + 2y + z + 3w = 3 \\ 5x + 6y + z + 3w = 7 \end{cases}$$

$$(26) \begin{cases} 3x + 2y - 3z + w = -2 \\ 4x + 3y - 4z + 2w = -1 \\ 2x + y + 2z - w = 4 \\ 6x + 3y + 2z - 2w = 5 \end{cases}$$

$$(27) \begin{cases} x + 2y - w = -1 \\ -x + y + 2z = 3 \\ 2x + z + w = 8 \\ x - 2y - z + w = 2 \end{cases}$$

$$(28) \begin{cases} 3y + 3z - 2w = -4 \\ x + y + 2z + 3w = 2 \\ x + 2y + 3z + 2w = 1 \\ x + 3y + 4z + 2w = -1 \end{cases}$$

$$(29) \begin{cases} 2x + 4y + z - w = 1 \\ x + 2y - z + w = 2 \\ 2x + y + z + 2w = -2 \\ x + 3y + 2z - 3w = 0 \end{cases}$$

$$(30) \begin{cases} x + z + 2w = 6 \\ -2x + y + 4z + w = 3 \\ 4x - 3y - 4z + w = -3 \\ -x + y + 2z + w = 4 \end{cases}$$

$$(31) \begin{cases} 2x + 3y + 2z + w = 1 \\ 4x + 2y - z + w = 2 \\ -2x - y - z - 2w = -1 \\ 2x + y + 2z + 3w = 1 \end{cases}$$

$$(34) \begin{cases} 2x + y + 2z + 3w = 1 \\ -x - y + 2z + 2w = 2 \\ 3x + y + 2w = 1 \\ 4x + 2y - z + w = 0 \end{cases}$$

$$(37) \begin{cases} 2x - y - z + 2w = a \\ -x + 2y - z - w = b \\ -x - y + 2z - w = c \end{cases}$$

$$(40) \begin{cases} 3x - 2y + z + v = 2 \\ x - y + z - 2w + v = 1 \\ 2x + y - 3z + w + 3v = 2 \end{cases}$$

$$(42) \begin{cases} x + 2y - 2z + w + 3v = 2 \\ 2x + y + 2z + v = 3 \\ -2x - 3y + 2z - w + 2v = 1 \end{cases}$$

$$(44) \begin{cases} x + 2y - z + 3w - 2v = 1 \\ 2x + 4y + z + 3w - 3v = 2 \\ -x - 2y + 2z - 4w - v = 1 \\ 3x + 6y + 6w - 5v = 3 \end{cases}$$

$$(32) \begin{cases} x + y + 2z + w = -1 \\ x + y + 3z + 2w = 2 \\ 2x - 2y + 2z - w = -1 \\ -x + y + w = 1 \end{cases}$$

$$(35) \begin{cases} x + 2y - z + 3w = 3 \\ -x - y + 3z - 6w = -3 \\ 2x + 3y - z + 3w = 3 \\ x + 2y + w = 2 \end{cases}$$

$$(38) \begin{cases} x + 2y - z + 3w + 4v = 5 \\ z - 2w + 4v = -2 \\ 2x + 4y - z + 3w + 2v = 5 \end{cases}$$

$$(41) \begin{cases} 2y + 4z + 2w = 2 \\ -x + y + 3z + 2w = 2 \\ x + 2y + 3z + w = b \\ -2x - y + aw = 1 \end{cases}$$

$$(43) \begin{cases} x - 2y + z + aw = \frac{a+5}{2} \\ 2x + y - 3az = -1 \\ -x - y + 2az + 2w = 0 \\ -2x + 2y + (a-1)z - (a+2)w = b \end{cases}$$

$$(45) \begin{cases} 11x + 12y + 13z + 14u + 15v = a \\ 6x + 7y + 8z + 9u + 10v = 0 \\ x + 2y + 3z + 4u + 5v = 0 \\ x + 4y + 9z + 16u + 25v = b \end{cases}$$

$$(33) \begin{cases} y - z + w = -4 \\ x + 2y + z + w = -1 \\ 2x + y + 5z + 6w = 3 \\ x + y + 2z + 2w = 1 \end{cases}$$

$$(36) \begin{cases} x + 2y + 4z - 6w = -7 \\ 3x + y + 7z + 7w = 9 \\ x + 9y + 11z + 19w = 11 \\ 2x + 7y + 11z + 5w = a \end{cases}$$

$$(39) \begin{cases} x + 2y + 3z + w = 1 \\ 2x + 5y + 8z + 3w = 3 \\ x + 3y + 5z + 2w = a + 3 \\ 4x + 3y + 2z + aw = a \end{cases}$$

2. 以下の連立1次方程式が解をもつような、定数 a, b, p, q, r, s に関する条件を求め、解を求めよ.

$$(1) \begin{cases} 2x + z = p \\ x + 2y + z + w = q \\ -y - w = r \\ x + y - z + 4w = s \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x - 3y - 3z + w = p \\ x - 2y - 2z + 2w = q \\ 2x - 5y - 5z + 3w = r \\ x - y - z + 3w = s \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x - y + z + w = p \\ 2x - 3y + z - w = q \\ -x - y - 2z - 2w = r \\ 2x - 5y + aw = s \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x - 2y + 3z - w = p \\ 2x - 3y + az = q \\ 3x - 5y + (a + 3)z - w = r \\ 4x - 7y + (a + 6)z - 2w = s \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x + y - 2w = p \\ 2x - y + 3z - 2w = q \\ 3x + 3z - 4w = r \\ 4x + y + 3z - 6w = s \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} x - y - z = p \\ -2x + y - 2z + w = q \\ -y - 4z + w = r \\ -x - 3z + w = s \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} 2x + z = p \\ x + 4y - z + w = q \\ -y - w = r \\ x + y + z + 2w = s \end{cases}$$

$$(8) \begin{cases} x - 2y + z - w = p \\ x + y - z + 2w = q \\ -2x + y - w = r \\ 3y - 2z + 3w = s \end{cases}$$

$$(9) \begin{cases} x + y = p \\ y + w = q \\ x + z = r \\ z + w = s \end{cases}$$

$$(10) \begin{cases} x + 2y - z = p \\ y + 3z - 2w = q \\ x + 3y + 2z - 2w = r \\ x + y - 4z + 2w = s \end{cases}$$

$$(11) \begin{cases} x + 2y + 2z + w = p \\ x + 3y + z + 2w = q \\ 3x + 7y + 5z + 4w = r \\ 2x + 5y + 3z + 3w = s \end{cases}$$

$$(12) \begin{cases} x - 2y + 2z - w = p \\ x - y - z + 2w = q \\ 2x - 3y + z + w = r \\ -x + 3y - 5z + 4w = s \end{cases}$$

$$(13) \begin{cases} x + 2y + 2z + w = p \\ x - y + z + 2w = q \\ 2x + y + az + w = r \\ 3x + 2y + 4z + aw = s \end{cases}$$

$$(14) \begin{cases} x + y + az = p \\ x - z = q \\ bx - y - z = r \end{cases}$$

$$(15) \begin{cases} ax + y + z = p \\ x + ay + z = q \\ x + y + az = r \end{cases}$$

$$(16) \begin{cases} ax + y + z + w = p \\ x + ay + z + w = q \\ x + y + az + w = r \\ x + y + z + aw = s \end{cases}$$

$$(17) \begin{cases} x - y + z + 2w = p \\ y - z - w = q \\ 2x - y + az + 3w = r \\ ax - 2y + 2z + 3w = s \end{cases}$$

$$(18) \begin{cases} x + ay = p \\ y + az = q \\ z + aw = r \\ x + 3y + 3z + w = s \end{cases}$$

$$(19) \begin{cases} x + 2y - 3z - w = p \\ 2x - 3y + z = q \\ 3x - y - 2z - w = r \\ (5 - 4a)x - (a + 4)y + (5a - 1)z + (2a - 1)w = s \end{cases}$$

$$(20) \begin{cases} x + y - az + (a - 2)w = p \\ -x - y + z + (2 - a)w = q \\ -2x + (a - 3)y + 2z + 2w = r \\ (a + 1)x + 2y - 2z - 2w = s \end{cases}$$

$$(21) \begin{cases} x - y + z - w = p \\ x - 2y - 2z + 2w = q \\ 2x - 3y - z + w = r \\ (a + b)x - (a + 2b)y + (a - 2b)z - (a - 2b)w = s \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + (k + 1)y + 2kz = k + 1 \\ (k - 1)x + (3k - 1)y + kz = k - 1 \\ (2k - 1)x + (7k - 1)y + 3kz = 3k - 1 \end{cases} \quad \text{の解が 2 組以上あるような定数 } k \text{ の値を求め, その場合の解を求めよ.}$$

4. λ を定数とし, 連立 1 次方程式
$$\begin{cases} (\lambda - 3)x - y - 2z = 0 \\ -x + (\lambda - 3)y + 2z = 0 \\ -2x + 2y + \lambda z = 0 \end{cases}$$
 が $x = y = z = 0$ 以外の解をもつような λ の値を求め, 求めた λ の各値に対し, この方程式の解を求めよ.

第 5 回の演習問題の解答

1. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ より, 与えられた

方程式は $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -z = -1 \end{cases}$ と同値である. $y = t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = -2t + 4 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$ (t は任意) で与えられる.

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{2}{7} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x + \frac{10}{7}z = \frac{1}{7} \\ y + \frac{1}{7}z = -\frac{2}{7} \end{cases}$ と同値である. $z = 7t$ とおけば, 解

は $\begin{cases} x = -10t + \frac{1}{7} \\ y = -t - \frac{2}{7} \\ z = 7t \end{cases}$ (t は任意) で与えられる.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は

$\begin{cases} x = -1 \\ 0 = 5 \\ -y = -1 \end{cases}$ と同値になるが, この方程式は解を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x - \frac{5}{4}z = -\frac{1}{4} \\ y + \frac{1}{4}z = \frac{1}{4} \end{cases}$ と同値である. $z = 4t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = 5t - \frac{1}{4} \\ y = -t + \frac{1}{4} \\ z = 4t \end{cases}$

(t は任意) で与えられる.

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を引く}]{\text{第 2 行から}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x + z = -15 \\ y - z = 4 \\ 0 = 4 \end{cases}$ と同値になる

が, この方程式は解を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

(6) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 7 \\ 4 & -5 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -21 \end{pmatrix} \text{より, 与えられた方程式は} \begin{cases} x - z = 16 \\ y - z = 5 \\ 0 = -21 \end{cases} \text{と同値になるが, この方程式は解を持たないため, 与}$$

えられた方程式も解を持たない.

$$(7) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{4} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{より, 与えられた方程式は} \begin{cases} x + z = 16 \\ y - z = 1 \\ 0 = 3 \end{cases} \text{と同値になるが, この方程式は解を持たないため, 与}$$

えられた方程式も解を持たない.

$$(8) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 12 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 12 \\ 4 & -5 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{より, 与えられた方程式は} \begin{cases} x - z = 7 \\ y - z = 2 \end{cases} \text{と同値である. } z = t$$

とおけば, 解は $\begin{cases} x = t + 7 \\ y = t + 2 \\ z = t \end{cases}$ (t は任意) で与えられる.

$$(9) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{より, 与えられた方程式は} \begin{cases} x + z = -1 \\ y - z = 1 \end{cases} \text{と同値である. } z = t \text{とおけば, 解は} \begin{cases} x = -t - 1 \\ y = t + 1 \\ z = t \end{cases}$$

(t は任意) で与えられる.

$$(10) \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & -16 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{4} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -16 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{より, 与えられた方程式は} \begin{cases} x - \frac{5}{4}z = -\frac{7}{4} \\ y + \frac{1}{4}z = -\frac{1}{4} \end{cases} \text{と同値で}$$

ある. $z = 4t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = 5t - \frac{7}{4} \\ y = -t - \frac{1}{4} \\ z = 4t \end{cases}$ (t は任意) で与えられる.

$$(11) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を引く}]{\text{第 2 行から}} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-1 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{より, 与えられた方程式は}$$

$$\begin{cases} x - z = 7 \\ y + z = -2 \end{cases} \text{と同値である. } z = t \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = t + 7 \\ y = -t - 2 \\ z = t \end{cases} \quad (t \text{ は任意}) \text{ で与えられる.}$$

$$(12) \begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 & -4 \\ 2 & -2 & -3 & -3 \\ 5 & 1 & -6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行を引く}]{\text{第 1 行から}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & -3 \\ 5 & 1 & -6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{4 倍したものを引く}]{\text{第 3 行から第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{より, 与えられた方程式は } \begin{cases} x - 3y - 2z = -1 \\ 4y + z = -1 \\ 0 = 2 \end{cases} \text{と同値になるが, この方程式}$$

は解を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

$$(13) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \\ 0 & 7 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 2 行を 2 倍して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -29 \end{pmatrix} \text{より, 与えられた方程式は } \begin{cases} x + z = 18 \\ y + z = -7 \\ 0 = -29 \end{cases}$$

と同値になるが, この方程式は解を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

$$(14) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \\ -3 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & -14 \\ 0 & 1 & -2 & 23 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{\frac{1}{2} 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 23 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{-\frac{1}{6} 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \text{より, 与えられた方程式の解}$$

$$\text{は } \begin{cases} x = -12 \\ y = 13 \\ z = -5 \end{cases} \text{ で与えられる.}$$

$$(15) \begin{pmatrix} a-2 & -1 & -2 \\ -1 & a-2 & 2 \\ -2 & 2 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & (a-1)(a-3) & 2(a-3) \\ -1 & a-2 & 2 \\ 0 & -2(a-3) & a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & a-2 & 2 \\ 0 & (a-1)(a-3) & 2(a-3) \\ 0 & -2(a-3) & a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-1 倍する}]{\text{第 1 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2-a & -2 \\ 0 & (a-1)(a-3) & 2(a-3) \\ 0 & -2(a-3) & a-3 \end{pmatrix} \cdots (*) \text{より, } a = 3 \text{ ならば } (*) \text{ は}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ となり, } a \neq 3 \text{ ならば } (*) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2-a & -2 \\ 0 & -2(a-3) & a-3 \\ 0 & (a-1)(a-3) & 2(a-3) \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行を } \frac{1}{a-3} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を } -\frac{1}{2(a-3)} \text{ 倍して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2-a & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & a-1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-a-2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{a+3}{2} \end{pmatrix} \cdots (**). \quad a = -3 \text{ ならば } (**)= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \neq \pm 3 \text{ ならば}$$

$$(**) \xrightarrow[\frac{2}{a+3} \text{ 倍する}]{\text{第3行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-a+2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{以上から, } a = \pm 3 \text{ のときに } x = y = z = 0 \text{ 以外の}$$

解をもつ. $a = 3$ のとき, $x = s + 2t, y = s, z = t$ (s, t は任意) を解にもち, $a = -3$ のとき, $x = -\frac{1}{2}t, y = \frac{1}{2}t, z = t$ (t は任意) を解にもつ.

$$(16) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第2行と第4行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{より, 与えられた方程式は } \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{5}{3} \\ 3z = 2 \end{cases} \quad \text{と}$$

同値である. 従って解は $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{5}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$ で与えられる.

$$(17) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{より, 与えら}$$

$$\text{れた方程式は } \begin{cases} x + 5z + 2w = 4 \\ y - 3z + w = 2 \end{cases} \quad \text{と同値である. } z = s, w = t \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = -5s - 2t + 4 \\ y = 3s - t + 2 \\ z = s \\ w = t \end{cases} \quad (s, t \text{ は任意}) \text{ で}$$

与えられる.

$$(18) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1行を引く}]{\text{第2行から}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2行を引く}]{\text{第1行から}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{より, 与えられた方程式は } \begin{cases} x + 3y - w = 2 \\ -7y + z + 4w = -2 \end{cases} \quad \text{と同値である. } y = s, w = t \text{ とおけば, 解}$$

$$\text{は } \begin{cases} x = -3s + t + 2 \\ y = s \\ z = 7s - 4t - 2 \\ w = t \end{cases} \quad (s, t \text{ は任意}) \text{ で与えられる.}$$

$$(19) \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & -5 & 9 \\ 4 & 3 & 11 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 12 & -4 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2行を引く}]{\text{第3行から}} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & -5 & 9 \\ 4 & 3 & 11 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第1行と第3行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 11 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 6 & -8 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{3倍したもの加える}]{\text{第2行に第3行を}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5} \text{倍する}]{\text{第3行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(3,4) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{より, 与えられた方程式は}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ y + z = -2 \\ w = 1 \end{cases} \text{と同値である. } z = t \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = -t - 2 \\ z = t \\ w = 1 \end{cases} \quad (t \text{ は任意}) \text{ で与えられる.}$$

$$(20) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{より, 与えられた方程式は } \begin{cases} x - 11z - 4w = 5 \\ y + 4z + w = -1 \end{cases} \text{と同値である. } z = s, w = t \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = 11s + 4t + 5 \\ y = -4s - t - 1 \\ z = s \\ w = t \end{cases}$$

(s, t は任意) で与えられる.

$$(21) \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第1行と第2行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a + 3 \end{pmatrix} \text{より, } a \neq -3 \text{ ならば与えられた方程式は解を持たず, } a = -3 \text{ ならば与}$$

$$\text{えられた方程式は } \begin{cases} x + z + 7w = 5 \\ y - 2z - 5w = -3 \end{cases} \text{と同値である. } z = s, w = t \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = -s - 7t + 5 \\ y = 2s + 5t - 3 \\ z = s \\ w = t \end{cases} \quad (s, t \text{ は任}$$

意) で与えられる.

$$(22) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ 3 & 12 & -6 & 1 & 8 \\ 5 & -1 & 11 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 18 & -18 & 4 & 26 \\ 0 & 9 & -9 & 2 & 33 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2倍したものを引く}]{\text{第2行から第3行を}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 9 & -9 & 2 & 33 \end{pmatrix} \text{より, 与えられた方程式は } \begin{cases} x - 2y + 4z - w = -6 \\ 0 = -40 \\ 9y - 9z + 2w = 33 \end{cases} \text{と同値になるが, この方程式は解を}$$

持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

$$(23) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 & -3 \\ -1 & 8 & 9 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-}\frac{1}{5} \text{倍する}]{\text{第2行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{より, 与えられた方程式は } \begin{cases} x - z = -1 \\ y + z + w = 1 \end{cases} \text{と同値である. } z = s, w = t \text{ と}$$

おけば、解は
$$\begin{cases} x = s - 1 \\ y = -s - t + 1 \\ z = s \\ w = t \end{cases} \quad (s, t \text{ は任意}) \text{ で与えられる.}$$

$$(24) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 9 & 21 & 19 & 14 \\ 2 & 7 & 11 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 25 & 5 \\ 0 & 7 & 17 & 25 & 13 \\ 0 & 3 & 3 & 17 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-}\frac{1}{5} \text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & 17 & 25 & 13 \\ 0 & 3 & 3 & 17 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & -10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{\frac{1}{10} 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -18 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた方程式の解は } \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \\ z = 2 \\ w = 0 \end{cases} \text{ である.}$$

$$(25) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 & -7 \\ 4 & 3 & -2 & 1 & 8 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 15 & -14 & -7 & 36 \\ 0 & 17 & -14 & -7 & 38 \\ 0 & 21 & -14 & -7 & 42 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-1 倍したものを加える}]{\text{第 2 行に第 3 行を}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 17 & -14 & -7 & 38 \\ 0 & 21 & -14 & -7 & 42 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-}\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 17 & -14 & -7 & 38 \\ 0 & 21 & -14 & -7 & 42 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -14 & -7 & 21 \\ 0 & 0 & -14 & -7 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{-}\frac{1}{14} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -14 & -7 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた方程式は}$$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}w = \frac{1}{2} \\ y = 1 \\ z + \frac{1}{2}w = -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ と同値である. } w = 2t \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = -t + \frac{1}{2} \\ y = 1 \\ z = -t - \frac{3}{2} \\ w = 2t \end{cases} \quad (t \text{ は任意}) \text{ で与えられる.}$$

$$(26) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-1 倍したものを加える}]{\text{第 1 行に第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 & -6 \\ 4 & 3 & -4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 16 & -6 & 23 \\ 0 & -1 & 12 & -5 & 16 \\ 0 & -3 & 32 & -14 & 41 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-1 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -16 & 6 & -23 \\ 0 & -1 & 12 & -5 & 16 \\ 0 & -3 & 32 & -14 & 41 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -4 & 17 \\ 0 & 1 & -16 & 6 & -23 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -16 & 4 & -28 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{-}\frac{1}{14}\text{倍する}]{\text{第3行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -4 & 17 \\ 0 & 1 & -16 & 6 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & -16 & 4 & -28 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{より, 与えられた方程式は}$$

$$\begin{cases} x - \frac{5}{4}w = -\frac{9}{4} \\ y + 2w = 5 \\ z - \frac{1}{4}w = \frac{7}{4} \end{cases} \text{と同値である. } w = 4t \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = 5t - \frac{9}{4} \\ y = -8t + 5 \\ z = t + \frac{7}{4} \\ w = 4t \end{cases} \text{ (} t \text{ は任意) で与えられる.}$$

$$(27) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & -4 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を加える}]{\text{第2行に第4行}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & -4 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-1倍する}]{\text{第2行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -4 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & -4 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{-2倍したもの加える}]{\text{第4行に第3行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第3行と第4行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3)\text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-1倍する}]{\text{第4行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第4列の掃き出し}]{(4,4)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{より, 与えられた方}$$

$$\text{程式の解は } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \\ w = 1 \end{cases} \text{ である.}$$

$$(28) \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第1行と第2行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第2行と第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第4列の掃き出し}]{(3,4)\text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{より, 与えられた方程式は } \begin{cases} x + z = 7 \\ y + z = -2 \\ w = -1 \end{cases} \text{ と同値である. } z = t \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = -t + 7 \\ y = -t - 2 \\ z = t \\ w = -1 \end{cases}$$

(t は任意) で与えられる.

$$\begin{aligned}
 (29) \quad & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow[-\frac{1}{3} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, 与えられ}
 \end{aligned}$$

$$\text{た方程式は } \begin{cases} x + 2w = -1 \\ y - w = 1 \\ z - w = -1 \end{cases} \quad \text{と等値である. } w = t \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = t + 1 \\ z = t - 1 \\ w = t \end{cases} \quad (t \text{ は任意}) \text{ で与えられる.}$$

$$\begin{aligned}
 (30) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & -4 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 15 \\ 0 & -3 & -8 & -7 & -27 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 10 & 8 & 18 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 4 行を 3 倍して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4} \text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた方程式の解は } \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 1 \\ w = 1 \end{cases} \text{ である.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (31) \quad & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow[-\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

より, 与えられた方程式は $\begin{cases} 2x + 2w = 1 \\ y - w = 0 \\ z + w = 0 \end{cases}$ と同値である. $w = t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = -t + \frac{1}{2} \\ y = t \\ z = -t \\ w = t \end{cases}$ (t は任意) で与えられる.

$$(32) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行と第 4 行の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{-}\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行と第 4 行の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \text{ より, 解は } \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = -2 \\ w = 5 \end{cases} \text{ である.}$$

$$(33) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行と第 2 行の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{\frac{1}{7} 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x + 3z = 6 \\ y - z = -3 \\ w = -1 \end{cases}$ と同値である. $z = t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = -3t + 6 \\ y = t - 3 \\ z = t \\ w = -1 \end{cases}$ (t は任意) で与えられる.

$$(34) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行と第 2 行の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & -2 & 6 & 8 & 7 \\ 0 & -2 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{-1 倍する}]{\text{各行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -6 & -7 & -5 \\ 0 & 2 & -6 & -8 & -7 \\ 0 & 2 & -7 & -9 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 行を -1 倍して第 3 行に加える}]{\text{第 4 行を -1 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{より, 与えられた方程式は} \begin{cases} x+w=-1 \\ y-w=1 \\ z+w=1 \\ 0=-3 \end{cases} \text{と等値になるが, この方程式は解}$$

を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

$$(35) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & -6 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}\text{倍する}]{\text{第3行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{より, 与えられ}$$

$$\text{た方程式は} \begin{cases} x-w=-2 \\ y+w=2 \\ z-2w=-1 \end{cases} \text{と同値である. } w=t \text{ とおけば, 解は} \begin{cases} x=t-2 \\ y=-t+2 \\ z=2t-1 \\ w=t \end{cases} \text{ (} t \text{ は任意) で与えられる.}$$

$$(36) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 3 & 1 & 7 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & 11 & 19 & 11 \\ 2 & 7 & 11 & 5 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 0 & -5 & -5 & 25 & 30 \\ 0 & 7 & 7 & 25 & 18 \\ 0 & 3 & 3 & 17 & a+14 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{5}\text{倍する}]{\text{第2行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 7 & 7 & 25 & 18 \\ 0 & 3 & 3 & 17 & a+14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & a+32 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{60}\text{倍する}]{\text{第3行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & a+32 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第4列の掃き出し}]{(3,4)\text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{より, 与えられた方程式は} \begin{cases} x+2w=1 \\ y+z=-1 \\ w=1 \\ 0=a \end{cases} \text{と同値であるため, } a \neq 0 \text{ ならば解をもたず, } a=0$$

$$\text{ならば } z=s \text{ とおけば, 解は} \begin{cases} x=-2s+1 \\ y=-s-1 \\ z=s \\ w=1 \end{cases} \text{ (} s \text{ は任意) で与えられる.}$$

$$(37) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 & a \\ -1 & 2 & -1 & -1 & b \\ -1 & -1 & 2 & -1 & c \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第1行と第3行}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 & b \\ 2 & -1 & -1 & 2 & a \\ -1 & -1 & 2 & -1 & c \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 & b \\ 0 & 3 & -3 & 0 & a+2b \\ 0 & -3 & 3 & 0 & c-b \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & -\frac{2a}{3}-\frac{b}{3} \\ 0 & 3 & -3 & 0 & a+2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+b+c \end{pmatrix} \text{より, 与えられた方程式は}$$

$$\begin{cases} -x + z - w = -\frac{2a+b}{3} \\ 3y - 3z = a + 2b \\ 0 = a + b + c \end{cases} \quad \text{と同値である. 従って } a+b+c=0 \text{ ならば } z=s, w=t \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = s - t + \frac{2a+b}{3} \\ y = s + \frac{a+2b}{3} \\ z = s \\ w = t \end{cases}$$

(s, t は任意) で与えられる. $a+b+c \neq 0$ ならば上の方程式は解を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

$$(38) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -10 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(3,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 24 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -10 & -3 \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた方程式は}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 2v = 0 \\ z + 24v = 4 \\ w + 10v = 3 \end{cases} \quad \text{と同値である. } y = s, v = t \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = -2s + 2t \\ y = s \\ z = -24t + 4 \\ w = -10t + 3 \\ v = t \end{cases} \quad (s, t \text{ は任意}) \text{ で与えられる.}$$

$$(39) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & a+3 \\ 4 & 3 & 2 & a & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & a+2 \\ 0 & -5 & -10 & a-4 & a-4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix} \cdots (*) \text{ より, } a = -1 \text{ ならば } (*) \text{ は}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ となり, 与えられた方程式は } \begin{cases} x - z - w = -1 \\ y + 2z + w = 1 \end{cases} \text{ と同値であるため, } z = u, w = v \text{ とおけ}$$

$$\text{ば, 解は } \begin{cases} x = u + v - 1 \\ y = -2u - v + 1 \\ z = u \\ w = v \end{cases} \quad (u, v \text{ は任意}) \text{ で与えられる. } a \neq -1 \text{ ならば } (*) \xrightarrow[\text{を } \frac{1}{a+1} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{より, 与えられた方程式は } \begin{cases} x - z - w = -1 \\ y + 2z + w = 1 \\ w = 1 \\ 0 = 1 \end{cases} \text{ と同値になるが, この方程式は解を持たないため, 与えられた方程式も解}$$

を持たない.

$$(40) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第1行と第2行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & 7 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -20 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & 7 & 3 \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた方程式は } \begin{cases} x - 9w + 6v = 3 \\ y - 20w + 12v = 5 \\ z - 13w + 7v = 3 \end{cases} \text{ と同値である. } w = s, v = t \text{ とおけば,}$$

$$\text{解は } \begin{cases} x = 9s - 6t + 3 \\ y = 20s - 12t + 5 \\ z = 13s - 7t + 3 \\ w = s \\ v = t \end{cases} \quad (s, t \text{ は任意}) \text{ で与えられる.}$$

$$(41) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & b \\ -2 & -1 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第1行と第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & b \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & b \\ 0 & 3 & 6 & 3 & b+2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & a+2 & 2b+1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第2行と第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & b \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & b+2 \\ 0 & 3 & 6 & a+2 & 2b+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第3行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & b \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & b+2 \\ 0 & 3 & 6 & a+2 & 2b+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & b-2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 2(b-1) \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた方程式は } \begin{cases} x - z - w = b - 2 \\ y + 2z + w = 1 \\ 0 = b - 1 \\ (a - 1)w = 2(b - 1) \end{cases} \text{ と同値である. 従って } b = 1,$$

$$a \neq 1 \text{ の場合は } w = 0 \text{ であり, } z = t \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = t + b - 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = t \\ w = 0 \end{cases} \quad (t \text{ は任意}) \text{ で与えられ, } b = 1, a \neq 1 \text{ の場合は,}$$

$$z = s, w = t \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = s + t + b - 2 \\ y = -2s - t + 1 \\ z = s \\ w = t \end{cases} \quad (s, t \text{ は任意}) \text{ で与えられる. } b \neq 1 \text{ ならば上の方程式は解を持たない}$$

いため, 与えられた方程式も解を持たない.

$$(42) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 8 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第2行と第3行}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & -3 & 6 & -2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & -13 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第4列の掃き出し}]{(3,4) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -11 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 & 14 \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた方程式は } \begin{cases} x + 2z + 6v = 6 \\ y - 2z - 11v = -9 \\ w + 19v = 14 \end{cases} \text{ と同値である. } z = s, v = t \text{ とおけ}$$

$$\text{ば, 解は } \begin{cases} x = -2s - 6t + 6 \\ y = 2s + 11t - 9 \\ z = s \\ w = -19t + 14 \\ v = t \end{cases} \quad (s, t \text{ は任意}) \text{ で与えられる.}$$

$$(43) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & a & \frac{a+5}{2} \\ 2 & 1 & -3a & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2a & 2 & 0 \\ -2 & 2 & a-1 & -a-2 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & a & \frac{a+5}{2} \\ 0 & 5 & -3a-2 & -2a & -a-6 \\ 0 & -3 & 2a+1 & a+2 & \frac{a+5}{2} \\ 0 & -2 & a+1 & a-2 & a+b+5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2行に加える}]{\text{第3行を2倍して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & a & \frac{a+5}{2} \\ 0 & 1 & -a & -4 & a+2b+4 \\ 0 & -3 & 2a+1 & a+2 & \frac{a+5}{2} \\ 0 & -2 & a+1 & a-2 & a+b+5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-2a & a-8 & \frac{5a+8b+21}{2} \\ 0 & 1 & -a & -4 & a+2b+4 \\ 0 & 0 & 1-a & a-10 & \frac{7a+12b+29}{2} \\ 0 & 0 & 1-a & a-10 & 3a+5b+13 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第4行に加える}]{\text{第3行を-1倍して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-2a & a-8 & \frac{5a+8b+21}{2} \\ 0 & 1 & -a & -4 & a+2b+4 \\ 0 & 0 & 1-a & a-10 & \frac{7a+12b+29}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-a-2b-3}{2} \end{pmatrix} \text{ より } a \neq -2b-3 \text{ ならば与えられた方程式も解を持たない. } a = -2b-3 \text{ な}$$

$$\text{らば上の行列は } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4b+7 & -2b-11 & 3-b \\ 0 & 1 & 2b+3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2b+4 & -2b-13 & 4-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots (*) \text{ に等しい. } b \neq -2 \text{ の場合, } (*) \xrightarrow[\frac{1}{2b+4} \text{ 倍する}]{\text{第3行を}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4b+7 & -2b-11 & 3-b \\ 0 & 1 & 2b+3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2b+13}{2b+4} & \frac{4-b}{2b+4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4b^2+36b+47}{2b+4} & \frac{2b^2-7b-16}{2b+4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4b^2+24b+23}{2b+4} & \frac{2b^2-3b-8}{2b+4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2b+13}{2b+4} & \frac{4-b}{2b+4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた方程式}$$

$$\text{は } \begin{cases} x + \frac{4b^2+36b+47}{2b+4}w = \frac{2b^2-7b-16}{2b+4} \\ y + \frac{4b^2+24b+23}{2b+4}w = \frac{2b^2-3b-8}{2b+4} \\ z - \frac{2b+13}{2b+4}w = \frac{4-b}{2b+4} \end{cases} \text{ と同値である. } w = t \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = \frac{2b^2-7b-16}{2b+4} - \frac{4b^2+36b+47}{2b+4}t \\ y = \frac{2b^2-3b-8}{2b+4} - \frac{4b^2+24b+23}{2b+4}t \\ z = \frac{4-b}{2b+4} + \frac{2b+13}{2b+4}t \\ w = t \end{cases} \quad (t \text{ は任意})$$

$$\text{で与えられる. } b = -2 \text{ の場合, } (*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{9} \text{ 倍する}]{\text{第3行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第4列の掃き出し}]{(3,4) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{より, 与えられた方程式は } \begin{cases} x - z = \frac{1}{3} \\ y - z = -\frac{5}{3} \\ w = -\frac{2}{3} \end{cases} \text{ と同値である. } z = t \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = t + \frac{1}{3} \\ y = t - \frac{5}{3} \\ z = t \\ w = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

(t は任意) で与えられる.

$$(44) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & -4 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & -5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{10} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 5 列の掃き出し}]{(3,5) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{より, 与えられた方程式は}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 2w = 0 \\ z - w = \frac{1}{5} \\ v = -\frac{3}{5} \end{cases} \text{ と同値である. } y = s, w = t \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = -2s - 2t \\ y = s \\ z = t + \frac{1}{5} \\ w = t \\ v = -\frac{3}{5} \end{cases} \quad (s, t \text{ は任意}) \text{ で与えられる.}$$

$$(45) \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & a \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & a \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 & 0 \\ 0 & -10 & -20 & -40 & -40 & a \\ 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{5} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -10 & -20 & -30 & -40 & a \\ 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{b}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -8 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{より } a \neq 0 \text{ ならば与えられた方程式も解を持たない. } a = 0 \text{ の場合, 与}$$

$$\text{えられた方程式は } \begin{cases} x + u + 3v = \frac{b}{2} \\ y - 3u - 8v = -b \\ z + 3u + 6v = \frac{b}{2} \end{cases} \text{ と同値である. } u = s, v = t \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = -s - 3t + \frac{b}{2} \\ y = 3s + 8t - b \\ z = -3s - 6t + \frac{b}{2} \\ u = s \\ v = t \end{cases} \text{ (} s, t \text{ は任意)}$$

で与えられる.

2. (1) 与えられた連立1次方程式の拡大係数行列を行に関して基本変形する.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & p \\ 1 & 2 & 1 & 1 & q \\ 0 & -1 & 0 & -1 & r \\ 1 & 1 & -1 & 4 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を入れ換える}]{\text{第1行と第4行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & s \\ 1 & 2 & 1 & 1 & q \\ 0 & -1 & 0 & -1 & r \\ 2 & 0 & 1 & 0 & p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & s \\ 0 & 1 & 2 & -3 & q-s \\ 0 & -1 & 0 & -1 & r \\ 0 & -2 & 3 & -8 & p-2s \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 & 2s-q \\ 0 & 1 & 2 & -3 & q-s \\ 0 & 0 & 2 & -4 & q+r-s \\ 0 & 0 & 7 & -14 & p+2q-4s \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第2行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 & 2s-q \\ 0 & 1 & 2 & -3 & q-s \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{q+r-s}{2} \\ 0 & 0 & 7 & -14 & p+2q-4s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{q+3r+s}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -r \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{q+r-s}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2p-3q-7r-s}{2} \end{pmatrix} \text{ 故に, 与えられた方程式が解をもつための条件は } 2p - 3q - 7r - s = 0 \text{ である. この}$$

$$\text{とき, 与えられた方程式は } \begin{cases} x + w = \frac{q+3r+s}{2} \\ y + w = -r \\ z - 2w = \frac{q+r-s}{2} \end{cases} \text{ と同値である. } w = t \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = -t + \frac{q+3r+s}{2} \\ y = -t - r \\ z = 2t + \frac{q+r-s}{2} \\ w = t \end{cases} \text{ (} t \text{ は任意) で}$$

与えられる.

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 & p \\ 1 & -2 & -2 & 2 & q \\ 2 & -5 & -5 & 3 & r \\ 1 & -1 & -1 & 3 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 & p \\ 0 & 1 & 1 & 1 & q-p \\ 0 & 1 & 1 & 1 & r-2p \\ 0 & 2 & 2 & 2 & s-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 3q-2p \\ 0 & 1 & 1 & 1 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-2q+p \end{pmatrix}$$

従って, 与えられた方程式が解をもつための条件は $r = p + q$ かつ $s = -p + 2q$ である. このとき, 与えられた方程式

$$\text{は } \begin{cases} x + 4w = 3q - 2p \\ y + z + w = q - p \end{cases} \text{ と同値である. } z = t, w = u \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = -4u - 2p + 3q \\ y = -t - u - p + q \\ z = t \\ w = u \end{cases} \text{ (} t, u \text{ は任意) で与え}$$

られる.

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & p \\ 2 & -3 & 1 & -1 & q \\ -1 & -1 & -2 & -2 & r \\ 2 & -5 & 0 & a & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & p \\ 0 & -1 & -1 & -3 & q-2p \\ 0 & -2 & -1 & -1 & p+r \\ 0 & -3 & -2 & a-2 & s-2p \end{pmatrix} \xrightarrow[-1 \text{ 倍する}]{\text{第2行を}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2p-q \\ 0 & -2 & -1 & -1 & p+r \\ 0 & -3 & -2 & a-2 & s-2p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3p-q \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2p-q \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5p-2q+r \\ 0 & 0 & 1 & a+7 & 4p-3q+s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3)\text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 & -7p+3q-2r \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3p+q-r \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5p-2q+r \\ 0 & 0 & 0 & a+2 & -p-q-r+s \end{pmatrix} \text{より, } a \neq -2 \text{ の場合, 左の拡大係数行列の第4行を } \frac{1}{a+2} \text{ 倍して (4,4) 成分に}$$

$$\text{関して第4列の掃き出しを行えば, } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-7ap+3aq-2ar-20p-10r+6s}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-3ap+aq-ar-8p-4r+2s}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5ap-2aq+ar+15p+q+7r-5s}{a+2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-p-q-r+s}{a+2} \end{pmatrix} \text{が得られるため, 与えられた方程式の}$$

$$\text{解は } \begin{cases} x = \frac{-7ap+3aq-2ar-20p-10r+6s}{a+2} \\ y = \frac{-3ap+aq-ar-8p-4r+2s}{a+2} \\ z = \frac{5ap-2aq+ar+15p+q+7r-5s}{a+2} \\ w = \frac{-p-q-r+s}{a+2} \end{cases} \text{である. } a = -2 \text{ の場合, } s \neq p+q+r \text{ ならば与えられた方程式は解をもた}$$

$$\text{ず, } s = p+q+r \text{ ならば与えられた方程式は } \begin{cases} x-6w = -7p+3q-2r \\ y-2w = -3p+q-r \\ z+5w = 5p-2q+r \end{cases} \text{ と同値であるため, } w = t \text{ とおけば, 解は}$$

$$\begin{cases} x = 6t - 7p + 3q - 2r \\ y = 2t - 3p + q - r \\ z = -5t + 5p - 2q + r \\ w = t \end{cases} \text{ (} t \text{ は任意) で与えられる.}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & p \\ 2 & -3 & a-1 & 0 & q \\ 3 & -5 & a+2 & -1 & r \\ 4 & -7 & a+5 & -2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & p \\ 0 & 1 & a-7 & 2 & q-2p \\ 0 & 1 & a-7 & 2 & r-3p \\ 0 & 1 & a-7 & 2 & s-4p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2a-11 & 3 & -3p+2q \\ 0 & 1 & a-7 & 2 & q-2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-2p-q \end{pmatrix} \text{より, 与えられた連立1次方程式が解をもつためには } r = p+q, s = 2p+q \text{ が成}$$

$$\text{り立つことが必要十分であり, このとき与えられた連立1次方程式は } \begin{cases} x + (2a-11)z + 3w = -3p+2q \\ y + (a-7)z + 2w = -2p+q \end{cases} \text{ と同値で}$$

$$\text{ある. 従って, } z = t, w = u \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = -(2a-11)t - 3u - 3p + 2q \\ y = -(a-7)t - 2u - 2p + q \\ z = t \\ w = u \end{cases} \text{ (} t, u \text{ は任意) で与えられる.}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & p \\ 2 & -1 & 3 & -2 & q \\ 3 & 0 & 3 & -4 & r \\ 4 & 1 & 3 & -6 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & p \\ 0 & -3 & 3 & 2 & q-2p \\ 0 & -3 & 3 & 2 & r-3p \\ 0 & -3 & 3 & 2 & s-4p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & p \\ 0 & -3 & 3 & 2 & q-2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-q-2p \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた連立1次方程式が解をもつためには } r = p + q, s = 2p + q \text{ が成り立}$$

つことが必要十分であり, このとき与えられた連立1次方程式は $\begin{cases} x + y - 2w = p \\ -3y + 3z + 2w = -2p + q \end{cases}$ と同値である. 従っ

$$\text{て, } y = t, w = u \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = -t + 2u + p \\ y = t \\ z = t - \frac{2u}{3} - \frac{2p-q}{3} \\ w = u \end{cases} \quad (t, u \text{ は任意}) \text{ で与えられる.}$$

$$(6) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & p \\ -2 & 1 & -2 & 1 & q \\ 0 & -1 & -4 & 1 & r \\ -1 & 0 & -3 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & p \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 2p+q \\ 0 & -1 & -4 & 1 & r \\ 0 & -1 & -4 & 1 & p+s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & -p-q \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 2p+q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2p-q+r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -p-q+s \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた方程式が解を持つためには, } r = 2p + q, s = p + q \text{ が成り立つこ}$$

とが必要十分であり, このとき与えられた方程式は $\begin{cases} x + 3z - w = -p - q \\ -y - 3z + w = 2p + q \end{cases}$ と同値である. $z = t, w = u$ とおけば,

$$\text{解は } \begin{cases} x = -3t + u - p - q \\ y = -3t + u - 2p - q \\ z = t \\ w = u \end{cases} \quad (t, u \text{ は任意}) \text{ で与えられる.}$$

$$(7) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & p \\ 1 & 4 & -1 & 1 & q \\ 0 & -1 & 0 & -1 & r \\ 1 & 1 & 1 & 2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(4,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -4 & p-2s \\ 0 & 3 & -2 & -1 & q-s \\ 0 & -1 & 0 & -1 & r \\ 1 & 1 & 1 & 2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(3,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & p-2r-2s \\ 0 & 0 & -2 & -4 & q+3r-s \\ 0 & -1 & 0 & -1 & r \\ 1 & 0 & 1 & 1 & r+s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & p-2r-2s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q-2p+7r+3s \\ 0 & -1 & 0 & -1 & r \\ 1 & 0 & 0 & -1 & p-r-s \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた連立1}$$

次方程式が解をもつためには $q = 2p - 7r - 3s$ が成り立つことが必要十分であり, このとき与えられた連立1次方程式

$$\text{は } \begin{cases} x - w = p - r - s \\ -y - w = r \\ -z - 2w = p - 2r - 2s \end{cases} \quad \text{と同値である. 従って, } w = t \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = t + p - r - s \\ y = -t - r \\ z = -2t - p + 2r + 2s \\ w = t \end{cases} \quad (t \text{ は任意}) \text{ で与}$$

えられる.

$$(8) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & p \\ 1 & 1 & -1 & 2 & q \\ -2 & 1 & 0 & -1 & r \\ 0 & 3 & -2 & 3 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & p \\ 0 & 3 & -2 & 3 & q - p \\ 0 & -3 & 2 & -3 & r + 2p \\ 0 & 3 & -2 & 3 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{p+2q}{3} \\ 0 & 3 & -2 & 3 & q - p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r + p + q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s + p - q \end{pmatrix} \quad \text{より, 与えられた方程式が解をもつためには } r = -p - q, s = -p + q \text{ であることが必}$$

$$\text{要十分であり, このとき与えられた方程式は } \begin{cases} x - \frac{1}{3}z + w = \frac{p+2q}{3} \\ 3y - 2z + 3w = q - p \end{cases} \quad \text{と同値である. } z = t, w = u \text{ とおけば, 解は}$$

$$\begin{cases} x = \frac{t}{3} - u + \frac{p+2q}{3} \\ y = \frac{2t}{3} - u - \frac{p-q}{3} \\ z = t \\ w = u \end{cases} \quad (t, u \text{ は任意}) \text{ で与えられる.}$$

$$(9) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 1 & q \\ 1 & 0 & 1 & 0 & r \\ 0 & 0 & 1 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 1 & q \\ 0 & -1 & 1 & 0 & r - p \\ 0 & 0 & 1 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & p - q \\ 0 & 1 & 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 & 1 & r - p + q \\ 0 & 0 & 1 & 1 & s \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & p - q \\ 0 & 1 & 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 & 1 & r - p + q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s + p - q - r \end{pmatrix} \quad \text{より, 与えられた方程式が解をもつためには } s = -p + q + r \text{ であ}$$

$$\text{ることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は } \begin{cases} x - w = p - q \\ y + w = q \\ z + w = r - p + q \end{cases} \quad \text{と同値である. } w = t \text{ とおけば, 解は}$$

$$\begin{cases} x = t + p - q \\ y = -t + q \\ z = -t - p + q + r \\ w = t \end{cases} \quad (t \text{ は任意}) \text{ で与えられる.}$$

$$(10) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 3 & -2 & q \\ 1 & 3 & 2 & -2 & r \\ 1 & 1 & -4 & 2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 3 & -2 & q \\ 0 & 1 & 3 & -2 & r - p \\ 0 & -1 & -3 & 2 & s - p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 4 & p-2q \\ 0 & 1 & 3 & -2 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p+q \end{pmatrix} \text{より, 与えられた方程式が解をもつためには } r = p+q, s = p-q \text{ であることが必要}$$

十分であり, このとき与えられた方程式は $\begin{cases} x-7z+4w = p-2q \\ y+3z-2w = q \end{cases}$ と同値である. $z = t, w = u$ とおけば, 解は

$$\begin{cases} x = 7t - 4u + p - 2q \\ y = -3t + 2u + q \\ z = t \\ w = u \end{cases} \quad (t, u \text{ は任意}) \text{ で与えられる.}$$

$$(11) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & p \\ 1 & 3 & 1 & 2 & q \\ 3 & 7 & 5 & 4 & r \\ 2 & 5 & 3 & 3 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q-p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & r-3p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & s-2p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 & 3p-2q \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-2p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p-q \end{pmatrix}$$

より, 与えられた方程式が解をもつためには $r = 2p+q, s = p+q$ であることが必要十分であり, このとき与えられた

$$\text{方程式は } \begin{cases} x+4z-w = 3p-2q \\ y-z+w = q-p \end{cases} \text{ と同値である. } z = t, w = u \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = -4t + u + 3p - 2q \\ y = t - u - p + q \\ z = t \\ w = u \end{cases} \quad (t, u$$

は任意) で与えられる.

$$(12) \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & p \\ 1 & -1 & -1 & 2 & q \\ 2 & -3 & 1 & 1 & r \\ -1 & 3 & -5 & 4 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & p \\ 0 & 1 & -3 & 3 & q-p \\ 0 & 1 & -3 & 3 & r-2p \\ 0 & 1 & -3 & 3 & s+p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 5 & 2q-p \\ 0 & 1 & -3 & 3 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s+2p-q \end{pmatrix} \text{より, 与えられた方程式が解をもつためには } r = p+q, s = -2p+q \text{ であることが必}$$

要十分であり, このとき与えられた方程式は $\begin{cases} x-4z+5w = -p+2q \\ y-3z+3w = q-p \end{cases}$ と同値である. $z = t, w = u$ とおけば, 解は

$$\begin{cases} x = 4t - 5u - p + 2q \\ y = 3t - 3u - p + q \\ z = t \\ w = u \end{cases} \quad (t, u \text{ は任意}) \text{ で与えられる.}$$

$$(13) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & p \\ 1 & -1 & 1 & 2 & q \\ 2 & 1 & a & 1 & r \\ 3 & 2 & 4 & 4 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & p \\ 0 & -3 & -1 & 1 & q-p \\ 0 & -3 & a-4 & -1 & r-2p \\ 0 & -4 & -2 & 1 & s-3p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(2,4) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 & 2p-q \\ 0 & -3 & -1 & 1 & q-p \\ 0 & -6 & a-5 & 0 & r-3p+q \\ 0 & -1 & -1 & 0 & s-2p-q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(4,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -8p-6q+5s \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5p+4q-3s \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & 9p+7q+r-6s \\ 0 & -1 & -1 & 0 & s-2p-q \end{pmatrix} \cdots (*) \text{ より, } a \neq -2 \text{ の}$$

$$\text{場合, } (*) \xrightarrow[\frac{1}{a+1} \text{ 倍する}]{\text{第3行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -8p-6q+5s \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5p+4q-3s \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{9p+7q+r-6s}{a+1} \\ 0 & -1 & -1 & 0 & s-2p-q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-(8a-10)p-(6a-8)q+2r+(5a-7)s}{a+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{(5a-13)p+(4a-10)q-2r-(3a-9)s}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{9p+7q+r-6s}{a+1} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{(-2a+7)p-(a-6)q+r+(a-5)s}{a+1} \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた方程式の解は } \begin{cases} x = \frac{-(8a-10)p-(6a-8)q+2r+(5a-7)s}{a+1} \\ y = \frac{(2a-7)p+(a-6)q-r-(a-5)s}{a+1} \\ z = \frac{9p+7q+r-6s}{a+1} \\ w = \frac{(5a-13)p+(4a-10)q-2r-(3a-9)s}{a+1} \end{cases}$$

$$\text{である. } a = -1 \text{ の場合, } (*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -8p-6q+5s \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5p+4q-3s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9p+7q+r-6s \\ 0 & -1 & -1 & 0 & s-2p-q \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた方程式が解をもつためには}$$

$$r = -9p - 7q + 6s \text{ であることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は } \begin{cases} x - 2z = -8p - 6q + 5s \\ 2z + w = 5p + 4q - 3s \\ -y - z = s - 2p - q \end{cases} \text{ と同値}$$

$$\text{である. } z = t \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = 2t - 8p - 6q + 5s \\ y = -t + 2p + q - s \\ z = t \\ w = -2t + 5p + 4q - 3s \end{cases} \quad (t \text{ は任意}) \text{ で与えられる.}$$

$$(14) \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & p \\ 1 & 0 & -1 & q \\ b & -1 & -1 & r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & a+1 & p-q \\ 1 & 0 & -1 & q \\ 0 & -1 & b-1 & r-bq \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a+1 & p-q \\ 1 & 0 & -1 & q \\ 0 & 0 & a+b & p-(b+1)q+r \end{pmatrix} \cdots (*) \text{ より, } a \neq -b \text{ の場合, } (*) \xrightarrow[\frac{1}{a+b} \text{ 倍する}]{\text{第3行を}}$$

$$\xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{(b-1)p+(ab+1)q-(a+1)r}{a+b} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{p+(a-1)q+r}{a+b} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{p-(b+1)q+r}{a+b} \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた方程式の解は } \begin{cases} x = \frac{p+(a-1)q+r}{a+b} \\ y = \frac{(b-1)p+(ab+1)q-(a+1)r}{a+b} \\ z = \frac{p-(b+1)q+r}{a+b} \end{cases}$$

$$\text{である. } a = -b \text{ の場合, } (*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a+1 & p-q \\ 1 & 0 & -1 & q \\ 0 & 0 & 0 & p+(a-1)q+r \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた方程式が解をもつためには}$$

$$r = -p - (a-1)q \text{ であることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は } \begin{cases} y + (a+1)z = p - q \\ x - z = q \end{cases} \text{ と同値であ}$$

る. $z = t$ とおけば, 解は
$$\begin{cases} x = t + q \\ y = -(a+1)t + p - q \\ z = t \end{cases} \quad (t \text{ は任意}) \text{ で与えられる.}$$

$$(15) \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & p \\ 1 & a & 1 & q \\ 1 & 1 & a & r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1-a^2 & 1-a & p-aq \\ 1 & a & 1 & q \\ 0 & 1-a & a-1 & r-q \end{pmatrix} \cdots (*) \text{ より, } a \neq 1 \text{ の場合,}$$

$$(*) \xrightarrow[\frac{1}{1-a} \text{ 倍する}]{\text{第 1,3 行を}} \begin{pmatrix} 0 & 1+a & 1 & \frac{aq-p}{a-1} \\ 1 & a & 1 & q \\ 0 & 1 & -1 & \frac{q-r}{a-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a+2 & \frac{-p-q+(a+1)r}{a-1} \\ 1 & 0 & a+1 & \frac{-q+ar}{a-1} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{q-r}{a-1} \end{pmatrix} \cdots (**)$$

$$\text{て, } a \neq 1, -2 \text{ の場合, } (**) \xrightarrow[\frac{1}{a+2} \text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{-p-q+(a+1)r}{(a-1)(a+2)} \\ 1 & 0 & a+1 & \frac{-q+ar}{a-1} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{q-r}{a-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{-p-q+(a+1)r}{(a-1)(a+2)} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{(a+1)p-q-r}{(a-1)(a+2)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-p+(a+1)q-r}{(a-1)(a+2)} \end{pmatrix} \text{ よ}$$

$$\text{り, 与えられた方程式の解は } \begin{cases} x = \frac{(a+1)p-q-r}{(a-1)(a+2)} \\ y = \frac{-p+(a+1)q-r}{(a-1)(a+2)} \\ z = \frac{-p-q+(a+1)r}{(a-1)(a+2)} \end{cases} \text{ である. } a = -2 \text{ の場合, } (**) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{p+q+r}{3} \\ 1 & 0 & -1 & \frac{q+2r}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-q+r}{3} \end{pmatrix} \text{ より,}$$

与えられた方程式が解をもつためには $p = -q - r$ であることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は

$$\begin{cases} x - z = \frac{q+2r}{3} \\ y - z = \frac{-q+r}{3} \end{cases} \text{ と同値である. } z = t \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = t + \frac{q+2r}{3} \\ y = t - \frac{q-r}{3} \\ z = t \end{cases} \quad (t \text{ は任意}) \text{ で与えられる. } a = 1 \text{ の場合,}$$

$$(*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p-q \\ 1 & 1 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & r-q \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた方程式が解をもつためには } p = q = r \text{ であることが必要十分であり, こ}$$

のとき与えられた方程式は $x + y + z = p$ と同値である. $y = t, z = u$ とおけば, 解は
$$\begin{cases} x = -t - u + p \\ y = t \\ z = u \end{cases} \quad (t, u \text{ は任意})$$

意) で与えられる.

$$(16) \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & p \\ 1 & a & 1 & 1 & q \\ 1 & 1 & a & 1 & r \\ 1 & 1 & 1 & a & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a & p-aq \\ 1 & a & 1 & 1 & q \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 & r-q \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 & s-q \end{pmatrix} \cdots (*) \text{ より, } a \neq 1 \text{ の場合,}$$

$$(*) \xrightarrow[\frac{1}{1-a} \text{ 倍する}]{\text{第 1,3,4 行を}} \begin{pmatrix} 0 & 1+a & 1 & 1 & \frac{aq-p}{a-1} \\ 1 & a & 1 & 1 & q \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{q-r}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{q-s}{a-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a+2 & 1 & \frac{-p-q+(a+1)r}{a-1} \\ 1 & 0 & a+1 & 1 & \frac{-q+ar}{a-1} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{q-r}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{r-s}{a-1} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(4,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a+3 & \frac{-p-q-r+(a+2)s}{a-1} \\ 1 & 0 & 0 & a+2 & \frac{-q-r+(a+1)s}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{q-s}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{r-s}{a-1} \end{pmatrix} \cdots (**)$$

$$(**) \xrightarrow[\frac{1}{a+3} \text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-p-q-r+(a+2)s}{(a-1)(a+3)} \\ 1 & 0 & 0 & a+2 & \frac{-q-r+(a+1)s}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{q-s}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{r-s}{a-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(1,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-p-q-r+(a+2)s}{(a-1)(a+3)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{(a+2)p-q-r-s}{(a-1)(a+3)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-p+(a+2)q-r-s}{(a-1)(a+3)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-p-q+(a+2)r-s}{(a-1)(a+3)} \end{pmatrix} \text{ より, 与え}$$

$$\text{られた方程式の解は} \begin{cases} x = \frac{(a+2)p-q-r-s}{(a-1)(a+3)} \\ y = \frac{-p+(a+2)q-r-s}{(a-1)(a+3)} \\ z = \frac{-p-q+(a+2)r-s}{(a-1)(a+3)} \\ w = \frac{-p-q-r+(a+2)s}{(a-1)(a+3)} \end{cases} \text{ である. } a = -3 \text{ の場合, } (**) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p+q+r+s}{4} \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{q+r+2s}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{-q+s}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{-r+s}{4} \end{pmatrix} \text{ より, 与}$$

えられた方程式が解をもつためには $p = -q - r - s$ であることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は

$$\begin{cases} x - w = \frac{q+r+2s}{4} \\ y - w = \frac{-q+s}{4} \\ z - w = \frac{-r+s}{4} \end{cases} \text{ と同値である. } w = t \text{ とおけば, 解は} \begin{cases} x = t + \frac{q+r+2s}{4} \\ y = t - \frac{q-s}{4} \\ z = t - \frac{r-s}{4} \\ w = t \end{cases} \text{ (} t \text{ は任意) で与えられる. } a = 1 \text{ の}$$

$$\text{場合, } (*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & p - q \\ 1 & 1 & 1 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r - q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s - q \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた方程式が解をもつためには } p = q = r = s \text{ であることが必要}$$

十分であり, このとき与えられた方程式は $x + y + z + w = p$ と同値である. $y = t, z = u, w = v$ とおけば, 解は

$$\begin{cases} x = -t - u - v + p \\ y = t \\ z = u \\ w = v \end{cases} \text{ (} t, u, v \text{ は任意) で与えられる.}$$

$$(17) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & p \\ 0 & 1 & -1 & -1 & q \\ 2 & -1 & a & 3 & r \\ a & -2 & 2 & 3 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & p \\ 0 & 1 & -1 & -1 & q \\ 0 & 1 & a-2 & -1 & r-2p \\ 0 & a-2 & 2-a & 3-2a & s-ap \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & p+q \\ 0 & 1 & -1 & -1 & q \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & r-2p-q \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & s-ap-(a-2)q \end{pmatrix} \cdots (*) \text{ より, } a \neq 1 \text{ の場合, } (*) \xrightarrow[\text{第 4 行を } \frac{1}{1-a} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を } \frac{1}{a-1} \text{ 倍して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & p+q \\ 0 & 1 & -1 & -1 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{r-2p-q}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{ap+(a-2)q-s}{a-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & p+q \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{r-2p+(a-2)q}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{r-2p-q}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{ap+(a-2)q-s}{a-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-p+q+s}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{(a-2)p+2(a-2)q+r-s}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-2p-q+r}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{ap+(a-2)q-s}{a-1} \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた方程式の解は} \begin{cases} x = \frac{-p+q+s}{a-1} \\ y = \frac{(a-2)p+2(a-2)q+r-s}{a-1} \\ z = \frac{-2p-q+r}{a-1} \\ w = \frac{ap+(a-2)q-s}{a-1} \end{cases} \text{ である. } a = 1 \text{ の}$$

場合, (*) =
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & p+q \\ 0 & 1 & -1 & -1 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-2p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p+q \end{pmatrix}$$
 より, 与えられた方程式が解をもつためには $r = 2p + q, s = p - q$ で

あることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は
$$\begin{cases} x + w = p + q \\ y - z - w = q \end{cases}$$
 と同値である. $z = t, w = u$ とおけば,

解は
$$\begin{cases} x = -u + p + q \\ y = t + u + q \\ z = t \\ w = u \end{cases} \quad (t, u \text{ は任意}) \text{ で与えられる.}$$

(18)
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & a & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & a & r \\ 1 & 3 & 3 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & a & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & a & r \\ 0 & 3-a & 3 & 1 & s-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a^2 & 0 & p-aq \\ 0 & 1 & a & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & a & r \\ 0 & 0 & a^2-3a+3 & 1 & s-p+(a-3)q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^3 & p-aq+a^2r \\ 0 & 1 & 0 & -a^2 & q-ar \\ 0 & 0 & 1 & a & r \\ 0 & 0 & 0 & (1-a)^3 & s-p+(a-3)q-(a^2-3a+3)r \end{pmatrix} \cdots (*)$$

より, $a \neq 1$ の場合, (*)
$$\xrightarrow[\frac{1}{(1-a)^3} \text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^3 & p-aq+a^2r \\ 0 & 1 & 0 & -a^2 & q-ar \\ 0 & 0 & 1 & a & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{s-p+(a-3)q-(a^2-3a+3)r}{(1-a)^3} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{(3a^2-3a+1)p+(3a^2-a)q+a^2r-a^3s}{(1-a)^3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-a^2p-(3a-1)q-ar+a^2s}{(1-a)^3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{ap-(a^2-3a)q+r-as}{(1-a)^3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-p+(a-3)q-(a^2-3a+3)r+s}{(1-a)^3} \end{pmatrix}$$
 より, 与えられた方程式の解は
$$\begin{cases} x = \frac{(3a^2-3a+1)p+(3a^2-a)q+a^2r-a^3s}{(1-a)^3} \\ y = \frac{-a^2p-(3a-1)q-ar+a^2s}{(1-a)^3} \\ z = \frac{ap-(a^2-3a)q+r-as}{(1-a)^3} \\ w = \frac{-p+(a-3)q-(a^2-3a+3)r+s}{(1-a)^3} \end{cases}$$

である. $a = 1$ の場合, (*) =
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & p-q+r \\ 0 & 1 & 0 & -1 & q-r \\ 0 & 0 & 1 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p-2q-r \end{pmatrix}$$
 より, 与えられた方程式が解をもつためには

$s = p + 2q + r$ であることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は
$$\begin{cases} x + w = p - q + r \\ y - w = q - r \\ z + w = r \end{cases}$$
 と同値である.

$w = t$ とおけば, 解は
$$\begin{cases} x = -t - p + q - r \\ y = t + q - r \\ z = -t + r \\ w = t \end{cases} \quad (t \text{ は任意}) \text{ で与えられる.}$$

$$(19) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & p \\ 2 & -3 & 1 & 0 & q \\ 3 & -1 & -2 & -1 & r \\ 5-4a & -a-4 & 5a-1 & 2a-1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & p \\ 0 & -7 & 7 & 2 & q-2p \\ 0 & -7 & 7 & 2 & r-3p \\ 0 & 7(a-2) & 7(2-a) & 2(2-a) & (4a-5)p+s \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & p \\ 0 & -7 & 7 & 2 & q-2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (2a-1)p+(a-2)q+s \end{pmatrix}$$

より, 与えられた方程式が解をもつためには $r = p+q$,

$$s = (1-2a)p + (2-a)q \text{ であることが必要十分であり, このとき与えられた方程式は } \begin{cases} x - z - \frac{3}{7}w = \frac{3p+2q}{7} \\ -7y + 7z + 2w = q - 2p \end{cases} \text{ と}$$

同値である. $z = t, w = u$ とおけば, 解は
$$\begin{cases} x = t + \frac{3u}{7} + \frac{3p+2q}{7} \\ y = t + \frac{2u}{7} + \frac{2p-q}{7} \\ z = t \\ w = u \end{cases} \quad (t, u \text{ は任意}) \text{ で与えられる.}$$

$$(20) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 & p \\ -1 & -1 & 1 & 2-a & q \\ -2 & a-3 & 2 & 2 & r \\ a+1 & 2 & -2 & -2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 & p \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & p+q \\ 0 & a-1 & 2(1-a) & 2(a-1) & r+2p \\ 0 & 1-a & (a-1)(a+2) & a(1-a) & s-p(a+1) \end{pmatrix} \dots (*)$$

より, $a \neq 1$ の場合, $(*) \xrightarrow[\frac{1}{a-1} \text{ 倍する}]{\text{第2,3,4行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 & p \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{p+q}{a-1} \\ 0 & 1 & -2 & 2 & \frac{r+2p}{a-1} \\ 0 & -1 & a+2 & -a & \frac{s-p(a+1)}{a-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(3,2) \text{ 成分に関して}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-a & a-4 & \frac{p(a-3)-r}{a-1} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{p+q}{a-1} \\ 0 & 1 & -2 & 2 & \frac{r+2p}{a-1} \\ 0 & 0 & a & 2-a & \frac{s-p(a-1)+r}{a-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a-4 & \frac{-p-r+q(2-a)}{a-1} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{p+q}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{r-2q}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2-a & \frac{s+p+aq+r}{a-1} \end{pmatrix} \dots (**)$$

従って, $a \neq 1, 2$ の場合, $(**) \xrightarrow[\frac{1}{2-a} \text{ 倍する}]{\text{第4行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a-4 & \frac{-p-r+q(2-a)}{a-1} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{p+q}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{r-2q}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{s+p+aq+r}{(a-1)(2-a)} \end{pmatrix} \xrightarrow{(4,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2p-4q-2r+(a-4)s}{(a-1)(a-2)} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{p+q}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2p+4q+ar+2s}{(a-1)(a-2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{p+aq+r+s}{(a-1)(2-a)} \end{pmatrix}$

より, 与えられた方程式の解は
$$\begin{cases} x = \frac{-2p-4q-2r+(a-4)s}{(a-1)(a-2)} \\ y = \frac{2p+4q+ar+2s}{(a-1)(a-2)} \\ z = -\frac{p+q}{a-1} \\ w = -\frac{p+aq+r+s}{(a-1)(a-2)} \end{cases} \text{ である. } a = 2 \text{ の場}$$

合, $(**) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -p-r \\ 0 & 0 & -1 & 0 & p+q \\ 0 & 1 & 0 & 2 & r-2q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s+p+2q+r \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式が解をもつためには $s = -p - 2q - r$ であ

ることが必要十分であり、このとき与えられた方程式は
$$\begin{cases} x - 2w = -p - r \\ -z = p + q \\ y + 2w = -2q + r \end{cases}$$
 と同値である. $w = t$ とおけば, 解は

$$\begin{cases} x = 2t - p - r \\ y = -2t - 2q + r \\ z = -p - q \\ w = t \end{cases} \quad (t \text{ は任意}) \text{ で与えられる. } a = 1 \text{ の場合, } (*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p + q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r + 2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s - 2p \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた}$$

方程式が解をもつためには $q = -p, r = -2p, s = 2p$ であることが必要十分であり、このとき与えられた方程式は

$$x + y - z - w = p \text{ と同値である. } y = t, z = u, w = v \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x = -t + u + v + p \\ y = t \\ z = u \\ w = v \end{cases} \quad (t, u, v \text{ は任意}) \text{ で与}$$

えられる.

$$(21) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & p \\ 1 & -2 & -2 & 2 & q \\ 2 & -3 & -1 & 1 & r \\ a + b & -a - 2b & a - 2b & -a + 2b & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & p \\ 0 & -1 & -3 & 3 & q - p \\ 0 & -1 & -3 & 3 & r - 2p \\ 0 & -b & -3b & 3b & s - (a + b)p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -4 & 2p - q \\ 0 & -1 & -3 & 3 & q - p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r - p - q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s - ap - bq \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた方程式が解をもつためには } r = p + q, s = ap + bq \text{ であることが}$$

必要十分であり、このとき与えられた方程式は
$$\begin{cases} x + 4z - 4w = 2p - q \\ -y - 3z + 3w = q - p \end{cases}$$
 と同値である. $z = t, w = u$ とおけば, 解

$$\text{は } \begin{cases} x = -4t + 4u + 2p - q \\ y = -3t + 3u + p - q \\ z = t \\ w = u \end{cases} \quad (t, u \text{ は任意}) \text{ で与えられる.}$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & k + 1 & 2k & k + 1 \\ k - 1 & 3k - 1 & k & k - 1 \\ 2k - 1 & 7k - 1 & 3k & 3k - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & k + 1 & 2k & k + 1 \\ 0 & 3k - k^2 & 3k - 2k^2 & -k^2 \\ 0 & 6k - 2k^2 & 5k - 4k^2 & 2k - 2k^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-2 倍して加える}]{\text{第 3 行に第 2 行を}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k + 1 & 2k & k + 1 \\ 0 & 3k - k^2 & 3k - 2k^2 & -k^2 \\ 0 & 0 & -k & 2k \end{pmatrix} \text{ より, } k \neq 0, 3 \text{ ならば, 与えられた連立 1 次方程式は 1 組しか解がない. } k = 0 \text{ の場}$$

合, 与えられた連立 1 次方程式はただ 1 つの方程式 $x + y = 1$ と同値だから, 解は
$$\begin{cases} x = 1 - s \\ y = s \\ z = t \end{cases} \quad (s, t \text{ は任意}) \text{ で与え}$$

られ、この場合は解が2組以上ある。 $k=3$ の場合、与えられた連立1次方程式は
$$\begin{cases} x+4y+6z=4 \\ -9z=-9 \\ -3z=6 \end{cases}$$
 と同値である。

この第2式からは $z=1$ 、第3式からは $z=-2$ が得られるため、与えられた連立1次方程式は解を持たない。

$$4. \begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda-3 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(2,1)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & (\lambda-2)(\lambda-4) & 2(\lambda-4) \\ -1 & \lambda-3 & 2 \\ 0 & -2(\lambda-4) & \lambda-4 \end{pmatrix} \cdots (*) \text{である. } \lambda \neq 4 \text{ の場合,}$$

$$(*) \xrightarrow[\frac{1}{\lambda-4}\text{倍する}]{\text{第1行と第3行を}} \begin{pmatrix} 0 & \lambda-2 & 2 \\ -1 & \lambda-3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & \lambda+2 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdots (**) \text{より, } \lambda \neq -2, 4 \text{ の場合,}$$

$$(**) \xrightarrow[\frac{1}{\lambda+2}\text{倍する}]{\text{第1行を}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(1,2)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{となるため, 与えられた連立1次方程式の解は}$$

$$x=y=z=0 \text{ だけである. } \lambda=-2 \text{ の場合, } (**)= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ だから, 与えられた方程式は } \begin{cases} -x-y=0 \\ -2y+z=0 \end{cases}$$

$$\text{と同値である. } y=t \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=2t \end{cases} \text{ (} t \text{ は任意) で与えられる. } \lambda=4 \text{ の場合, } (*)= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だか}$$

$$\text{ら, 与えられた方程式は } -x+y+2z=0 \text{ と同値である. } y=s, z=t \text{ とおけば, 解は } \begin{cases} x=s+2t \\ y=s \\ z=t \end{cases} \text{ (} s, t \text{ は任意) で}$$

与えられる。

線形数学 I 演習問題 第 6 回 行列の基本変形

1. 行に関する基本変形を行うことによって、以下の行列を被約階段行列にせよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(6) \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 & 18 \end{pmatrix}$$

$$(7) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(8) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 12 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 & 18 \end{pmatrix}$$

$$(9) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(10) \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(11) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$(12) \begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 & -4 \\ 2 & -2 & -3 & -3 \\ 5 & 1 & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$(13) \begin{pmatrix} t-2 & -1 & -2 \\ -1 & t-2 & 2 \\ -2 & 2 & t+1 \end{pmatrix}$$

$$(14) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(15) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(16) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ 3 & 12 & -6 & 1 & 8 \\ 5 & -1 & 11 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(17) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 & -3 \\ -1 & 8 & 9 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(18) \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & -5 & 9 \\ 4 & 3 & 11 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 12 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(19) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 9 & 21 & 19 & 14 \\ 2 & 7 & 11 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(20) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 & -7 \\ 4 & 3 & -2 & 1 & 8 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(21) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(22) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(23) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 3 & 1 & 7 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & 11 & 19 & 11 \\ 2 & 7 & 11 & 5 & t \end{pmatrix}$$

$$(24) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & t+3 \\ 4 & 3 & 2 & t & t \end{pmatrix}$$

$$(25) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(26) \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(27) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & 0 & a \end{pmatrix}$$

2. 次の正方行列を、可能な場合に基本行列の積の形に表せ.

(1) 1 の (3) の行列

(2) 1 の (13) の行列

(3) 1 の (19) の第 1 列から第 4 列までの行列

(4) 1 の (22) の第 1 列から第 4 列までの行列

(5) 1 の (27) の行列

第 6 回の演習問題の解答

1. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1 \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}}$
- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
- (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{2}{7} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$
- $$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$
- (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1 \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $$\xrightarrow[\text{第 2 行と第 3 行の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- (4) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$
- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- (5) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を引く}]{\text{第 2 行から}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行と第 2 行の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$
- $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(3,4) \text{ 成分に関して}}$$
- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- (6) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行と第 2 行の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 7 \\ 4 & -5 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$
- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -21 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{21} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(3,4) \text{ 成分に関して}}$$
- (7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{4} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3} \text{倍する}]{\text{第3行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第4列の掃き出し}]{(3,4) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
(8) \quad & \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 12 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第1行と第2行}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 12 \\ 4 & -5 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5} \text{倍する}]{\text{第2行を}} \\
& \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
(9) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2} \text{倍する}]{\text{第2行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{成分に関して}} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
(10) \quad & \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第1行と第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & -16 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{4} \text{倍する}]{\text{第2行を}} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -16 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
(11) \quad & \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1行を引く}]{\text{第2行から}} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第1行と第2行}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{成分に関して}} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1 \text{倍する}]{\text{第2行を}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
(12) \quad & \begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 & -4 \\ 2 & -2 & -3 & -3 \\ 5 & 1 & -6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2行を引く}]{\text{第1行から}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & -3 \\ 5 & 1 & -6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & 4 & -2 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow[\frac{1}{4} \text{倍する}]{\text{第2行を}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 16 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{倍する}]{\text{第3行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(3,4) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
(13) \quad & \begin{pmatrix} t-2 & -1 & -2 \\ -1 & t-2 & 2 \\ -2 & 2 & t+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(2,1) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3) \\ -1 & t-2 & 2 \\ 0 & -2(t-3) & t-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第1行と第2行}} \\
& \begin{pmatrix} -1 & t-2 & 2 \\ 0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3) \\ 0 & -2(t-3) & t-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1 \text{倍する}]{\text{第1行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2-t & -2 \\ 0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3) \\ 0 & -2(t-3) & t-3 \end{pmatrix} \cdots (*) \text{より, } t=3 \text{ ならば } (*) \text{ は}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{となり, 被約階段行列である. } t \neq 3 \text{ ならば } (*) \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2-t & -2 \\ 0 & -2(t-3) & t-3 \\ 0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 行を } \frac{1}{t-3} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を } -\frac{1}{2(t-3)} \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} 1 & 2-t & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & t-1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-t-2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{t+3}{2} \end{pmatrix} \text{と変形されるため, } t = -3 \text{ ならば, 最後}$$

に得られた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるため, 被約階段行列である. $t \neq \pm 3$ ならば

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-t-2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{t+3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{2}{t+3} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-t+2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(14) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(15) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を引く}]{\text{第 2 行から}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行を引く}]{\text{第 1 行から}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{7} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{5}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$(16) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ 3 & 12 & -6 & 1 & 8 \\ 5 & -1 & 11 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 18 & -18 & 4 & 26 \\ 0 & 9 & -9 & 2 & 33 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2 倍したものを引く}]{\text{第 2 行から第 3 行を}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 9 & -9 & 2 & 33 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 9 & -9 & 2 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -40 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{9} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{9} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -40 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -\frac{5}{9} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{9} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -40 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{40} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -\frac{5}{9} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{9} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 5 列の掃き出し}]{(3,5) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -\frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(17) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 & -3 \\ -1 & 8 & 9 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{5} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(18) \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & -5 & 9 \\ 4 & 3 & 11 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 12 & -4 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行を引く}]{\text{第 3 行から}} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & -5 & 9 \\ 4 & 3 & 11 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 1 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 11 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 6 & -8 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{3 倍したものを加える}]{\text{第 2 行に第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5} \text{倍する}]{\text{第3行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(3,4) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 (19) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 9 & 21 & 19 & 14 \\ 2 & 7 & 11 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 25 & 5 \\ 0 & 7 & 17 & 25 & 13 \\ 0 & 3 & 3 & 17 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{5} \text{倍する}]{\text{第2行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & 17 & 25 & 13 \\ 0 & 3 & 3 & 17 & -3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & -10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{10} \text{倍する}]{\text{第3行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -18 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{倍する}]{\text{第4行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -18 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第4列の掃き出し}]{(4,4) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(20) \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 & -7 \\ 4 & 3 & -2 & 1 & 8 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 15 & -14 & -7 & 36 \\ 0 & 17 & -14 & -7 & 38 \\ 0 & 21 & -14 & -7 & 42 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1 \text{倍したもの加える}]{\text{第2行に第3行を}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 17 & -14 & -7 & 38 \\ 0 & 21 & -14 & -7 & 42 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2} \text{倍する}]{\text{第2行を}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 17 & -14 & -7 & 38 \\ 0 & 21 & -14 & -7 & 42 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -14 & -7 & 21 \\ 0 & 0 & -14 & -7 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{14} \text{倍する}]{\text{第2行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -14 & -7 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(21) \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1 \text{倍したもの加える}]{\text{第1行に第3行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 & -6 \\ 4 & 3 & -4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 16 & -6 & 23 \\ 0 & -1 & 12 & -5 & 16 \\ 0 & -3 & 32 & -14 & 41 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1 \text{倍する}]{\text{第2行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -16 & 6 & -23 \\ 0 & -1 & 12 & -5 & 16 \\ 0 & -3 & 32 & -14 & 41 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -4 & 17 \\ 0 & 1 & -16 & 6 & -23 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -16 & 4 & -28 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{14} \text{倍する}]{\text{第3行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -4 & 17 \\ 0 & 1 & -16 & 6 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & -16 & 4 & -28 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(22) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & -4 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を加える}]{\text{第 2 行に第 4 行}} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & -4 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-1 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -4 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & -4 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -17 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow[\text{-2 倍したもの加える}]{\text{第 4 行に第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-1 倍する}]{\text{第 4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
(23) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 3 & 1 & 7 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & 11 & 19 & 11 \\ 2 & 7 & 11 & 5 & t \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 0 & -5 & -5 & 25 & 30 \\ 0 & 7 & 7 & 25 & 18 \\ 0 & 3 & 3 & 17 & t+14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-}\frac{1}{5} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 7 & 7 & 25 & 18 \\ 0 & 3 & 3 & 17 & t+14 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & t+32 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{60} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & t+32 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(3,4) \text{ 成分に関して}} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix} \cdots (*) \text{ より, } t=0 \text{ ならば } (*) \text{ は } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ となるため, 被約階段行列である. } t \neq 0 \\
& \text{ならば } (*) \xrightarrow[\frac{1}{t} \text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 5 列の掃き出し}]{(4,5) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
(24) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & t+3 \\ 4 & 3 & 2 & t & t \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & t+2 \\ 0 & -5 & -10 & t-4 & t-4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+1 \\ 0 & 0 & 0 & t+1 & t+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t+1 & t+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+1 \end{pmatrix} \cdots (*) \text{ より, } t=-1 \text{ ならば } (*) \text{ は}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{となるため, 被約階段行列である. } t \neq -1 \text{ ならば } (*) \xrightarrow[\text{を } \frac{1}{t+1} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(3,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,5) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(25) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を入れ換える}]{\text{第 1 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(26) \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(27) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & a-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1 \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & a-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & a+7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \cdots (*) \text{ より,}$$

$$a = -2 \text{ ならば } (*) \text{ は } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{となるため, 被約階段行列である.}$$

$$a \neq -2 \text{ ならば, } (*) \xrightarrow[\frac{1}{a+2} \text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 基本行列の逆行列は $P_n(i, j; c)^{-1} = P_n(i, j; -c)$, $Q_n(i; c)^{-1} = Q_n(i; \frac{1}{c})$, $R_n(i, j)^{-1} = R_n(i, j)$ で与えられることに注意する.

(1) 与えられた行列を A とする. 1 の (3) の解答における行に関する変形を, 基本行列を左からかける形で表せば

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_3(3,1;-3)P_3(2,1;-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_3(2,3;-6)P_3(1,3;2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_3(3;-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow[\text{を左からかける}]{R_3(2,3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_3(3;\frac{1}{5})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_3(2,3;1)P_3(1,3;-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ だから}
\end{aligned}$$

$P_3(2,3;1)P_3(1,3;-1)Q_3(3;\frac{1}{5})R_3(2,3)Q_3(3;-1)P_3(2,3;-6)P_3(1,3;2)P_3(3,1;-3)P_3(2,1;-2)A = E_3$ が成り立つ。従って、 A は $P_3(2,3;1)P_3(1,3;-1)Q_3(3;\frac{1}{5})R_3(2,3)Q_3(3;-1)P_3(2,3;-6)P_3(1,3;2)P_3(3,1;-3)P_3(2,1;-2)$ の逆行列 $P_3(2,1;2)P_3(3,1;3)P_3(1,3;-2)P_3(2,3;6)Q_3(3;-1)R_3(2,3)Q_3(3;5)P_3(1,3;1)P_3(2,3;-1)$ に等しい。

(2) 与えられた行列を A とする。1 の (13) の解答から、 A が正則になるのは $t \neq \pm 3$ の場合である。このとき、1 の (3) の解答における行に関する変形を、基本行列を左からかける形で表せば

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} t-2 & -1 & -2 \\ -1 & t-2 & 2 \\ -2 & 2 & t+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_3(3,2;-2)P_3(1,2;t-2)} \begin{pmatrix} 0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3) \\ -1 & t-2 & 2 \\ 0 & -2(t-3) & t-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{R_3(1,2)} \\
& \begin{pmatrix} -1 & t-2 & 2 \\ 0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3) \\ 0 & -2(t-3) & t-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_3(1;-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2-t & -2 \\ 0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3) \\ 0 & -2(t-3) & t-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{R_3(2,3)} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 2-t & -2 \\ 0 & -2(t-3) & t-3 \\ 0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3) \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_3(3;\frac{1}{t-3})Q_3(2;-\frac{1}{2(t-3)})} \begin{pmatrix} 1 & 2-t & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & t-1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_3(3,2;-t+1)P_3(1,2;t-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-t-2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{t+3}{2} \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-t-2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{t+3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_3(3;\frac{2}{t+3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{t+2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_3(2,3;\frac{1}{2})P_3(1,2;\frac{t+2}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ だから}
\end{aligned}$$

$P_3(2,3;\frac{1}{2})P_3(1,2;\frac{t+2}{2})Q_3(3;\frac{2}{t+3})P_3(3,2;-t+1)P_3(1,2;t-2)Q_3(3;\frac{1}{t-3})Q_3(2;-\frac{1}{2(t-3)})R_3(2,3)Q_3(1;-1)$
 $\times R_3(1,2)P_3(3,2;-2)P_3(1,2;t-2)A = E_3$ が成り立つ。従って、 A は $P_3(2,3;\frac{1}{2})P_3(1,2;\frac{t+2}{2})Q_3(3;\frac{2}{t+3})$
 $\times P_3(3,2;-t+1)P_3(1,2;t-2)Q_3(3;\frac{1}{t-3})Q_3(2;-\frac{1}{2(t-3)})R_3(2,3)Q_3(1;-1)R_3(1,2)P_3(3,2;-2)P_3(1,2;t-2)$ の逆行列 $P_3(1,2;-t+2)P_3(3,2;2)R_3(1,2)Q_3(1;-1)R_3(2,3)Q_3(2;-2(t-3))Q_3(3;t-3)P_3(1,2;-t+2)P_3(2,3;t-1)$
 $\times Q_3(3;\frac{t+3}{2})P_3(1,2;-\frac{t+2}{2})P_3(2,3;-\frac{1}{2})$ に等しい。

(3) 与えられた行列を A とする。1 の (19) の解答における行に関する変形を、基本行列を左からかける形で表せば

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 \\ 3 & 1 & 7 & 7 \\ 1 & 9 & 21 & 19 \\ 2 & 7 & 11 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,1;-2)P_4(3,1;-1)P_4(2,1;-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & -5 & -5 & 25 \\ 0 & 7 & 17 & 25 \\ 0 & 3 & 3 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_4(2;-\frac{1}{5})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 17 & 25 \\ 0 & 3 & 3 & 17 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,2;-3)P_4(3,2;-7)P_4(1,2;-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -16 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_4(2;\frac{1}{10})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -16 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(2,3;-1)P_4(1,3;-2)} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_4(2;\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(3,4;1)P_4(2,4;-6)P_4(1,4;18)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ だから}
\end{aligned}$$

$P_4(3, 4; 1)P_4(2, 4; -6)P_4(1, 4; 18)Q_4(2; \frac{1}{2})P_4(2, 3; -1)P_4(1, 3; -2)Q_4(2; \frac{1}{10})P_4(4, 2; -3)P_4(3, 2; -7)P_4(1, 2; -2)$
 $\times Q_4(2; -\frac{1}{5})P_4(4, 1; -2)P_4(3, 1; -1)P_4(2, 1; -3)A = E_4$ が成り立つ. 従って, 与えられた行列は
 $P_4(3, 4; 1)P_4(2, 4; -6)P_4(1, 4; 18)Q_4(2; \frac{1}{2})P_4(2, 3; -1)P_4(1, 3; -2)Q_4(2; \frac{1}{10})P_4(4, 2; -3)P_4(3, 2; -7)P_4(1, 2; -2)$
 $\times Q_4(2; -\frac{1}{5})P_4(4, 1; -2)P_4(3, 1; -1)P_4(2, 1; -3)$ の逆行列 $P_4(2, 1; 3)P_4(3, 1; 1)P_4(4, 1; 2)Q_4(2; -5)P_4(1, 2; 2)$
 $\times P_4(3, 2; 7)P_4(4, 2; 3)Q_4(2; 10)P_4(1, 3; 2)P_4(2, 3; 1)Q_4(2; 2)P_4(1, 4; -18)P_4(2, 4; 6)P_4(3, 4; -1)$ に等しい.

(4) 与えられた行列を A とする. 1 の (22) の解答における行に関する変形を, 基本行列を左からかける形で表せば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,1;-1)P_4(3,1;-2)P_4(2,1;1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(2,4;1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_4(2;-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,2;4)P_4(3,2;4)P_4(1,2;-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,3;-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{を左からかける}]{R_4(3,4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,3;3)P_4(2,3;1)P_4(1,3;-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_4(4;-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(2,4;1)P_4(1,4;-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ だから } P_4(2, 4; 1)P_4(1, 4; -1)Q_4(4; -1)P_4(4, 3; 3)P_4(2, 3; 1)P_4(1, 3; -2)R_4(3, 4)$$

$\times P_4(4, 3; -2)P_4(4, 2; 4)P_4(3, 2; 4)P_4(1, 2; -2)Q_4(2; -1)P_4(2, 4; 1)P_4(4, 1; -1)P_4(3, 1; -2)P_4(2, 1; 1)A = E_4$ が成り立つ. 従って, A は $P_4(2, 4; 1)P_4(1, 4; -1)Q_4(4; -1)P_4(4, 3; 3)P_4(2, 3; 1)P_4(1, 3; -2)R_4(3, 4)P_4(4, 3; -2)P_4(4, 2; 4)$
 $\times P_4(3, 2; 4)P_4(1, 2; -2)Q_4(2; -1)P_4(2, 4; 1)P_4(4, 1; -1)P_4(3, 1; -2)P_4(2, 1; 1)$ の逆行列
 $P_4(2, 1; -1)P_4(3, 1; 2)P_4(4, 1; 1)P_4(2, 4; -1)Q_4(2; -1)P_4(1, 2; 2)P_4(3, 2; -4)P_4(4, 2; -4)P_4(4, 3; 2)R_4(3, 4)P_4(1, 3; 2)$
 $\times P_4(2, 3; -1)P_4(4, 3; -3)Q_4(4; -1)P_4(1, 4; 1)P_4(2, 4; -1)$ に等しい.

(5) 与えられた行列を A とする. 1 の (27) の解答から, A が正則になるのは $a \neq -2$ の場合である. 1 の (27) の解答における行に関する変形を, 基本行列を左からかける形で表せば

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,1;-2)P_4(3,1;1)P_4(2,1;-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & a-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_4(2;-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & a-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,2;3)P_4(3,2;2)P_4(1,2;1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & a+7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,3;-1)P_4(2,3;-1)P_4(1,3;-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_4(4; \frac{1}{a+2})}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(3,4;-5)P_4(2,4;2)P_4(1,4;6)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ だから } P_4(3, 4; -5)P_4(2, 4; 2)P_4(1, 4; 6)Q_4(4; \frac{1}{a+2})$$

$$\times P_4(4, 3; -1)P_4(2, 3; -1)P_4(1, 3; -2)P_4(4, 2; 3)P_4(3, 2; 2)P_4(1, 2; 1)Q_4(2; -1)P_4(4, 2; 3)P_4(3, 2; 2)P_4(1, 2; 1)A = E_4$$

が成り立つ。従って、 A は $P_4(3, 4; -5)P_4(2, 4; 2)P_4(1, 4; 6)Q_4\left(4; \frac{1}{a+2}\right)P_4(4, 3; -1)P_4(2, 3; -1)P_4(1, 3; -2)P_4(4, 2; 3)$
 $\times P_4(3, 2; 2)P_4(1, 2; 1)Q_4(2; -1)P_4(4, 2; 3)P_4(3, 2; 2)P_4(1, 2; 1)$ の逆行列 $P_4(1, 2; -1)P_4(3, 2; -2)P_4(4, 2; -3)Q_4(2; 1)$
 $\times P_4(1, 2; -1)P_4(3, 2; -2)P_4(4, 2; -3)P_4(1, 3; 2)P_4(2, 3; 1)P_4(4, 3; 1)Q_4(4; a+2)P_4(1, 4; -6)P_4(2, 4; -2)P_4(3, 4; 5)$ に
 等しい。

線形数学 I 演習問題 第 7 回 逆行列・行列の階数

1. 以下の行列が正則行列ならば、その逆行列を求めよ。

$$\begin{array}{l}
 (1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\
 (6) \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (7) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8) \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (10) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 (11) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (12) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (13) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (14) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 (16) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (17) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (18) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad (19) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad (20) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\
 (21) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (22) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (23) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad (24) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (25) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
 (26) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (27) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & a & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (28) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad (29) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\
 (30) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (31) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (32) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad (33) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
 (34) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (35) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (36) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (37) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
 (38) \begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (39) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (40) \begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (41) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 (42) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (43) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (44) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & -7 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$(45) \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ a & 1+a^2 & ab & ac \\ b & ab & 1+b^2 & bc \\ c & ac & bc & 1+c^2 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列の階数を求めよ. ただし, a, b, c, d は定数とする.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ a & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & -1 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & -3 \\ 3 & 1 & 0 & -8 \\ -1 & a+1 & 4 & a \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(6) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(7) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(8) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(9) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(10) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$(11) \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(12) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(13) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(14) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(15) \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$(16) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & a \\ 4 & -2 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$$

$$(17) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & a & 3 \\ a & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(18) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & a \\ 4 & 2 & -2 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$(19) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & -7 \\ 3 & 1 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & 19 & 11 \\ 2 & 7 & a^2 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$(20) \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(21) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(22) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(23) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(24) \begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(25) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(26) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(27) \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(28) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & b \\ -1 & 0 & a & a-1 \end{pmatrix}$$

$$(29) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & a+1 & a+3 \\ a & 0 & a^2+1 & 3a \\ -3 & -8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(30) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & b \\ 1 & 2 & a & a+3 \end{pmatrix}$$

$$(31) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & a+4 \\ 1 & -1 & a & 3 \end{pmatrix}$$

$$(32) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2+2a & 2a^2-3a \\ 1 & 2 & a^2-2 & a^2-1 \end{pmatrix}$$

$$(33) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & a+1 & a+3 \\ a & 0 & 4 & 3a \\ -3 & -8 & a & -1 \end{pmatrix}$$

$$(34) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 7 & 7 \\ 2 & 7 & 11 & a^2-12 \\ 2 & 7 & a+9 & -8 \end{pmatrix}$$

$$(35) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 \\ -1 & -1 & 1 & 2-a \\ -2 & a-3 & 2 & 2 \\ a+1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(36) \begin{pmatrix} 1 & -a-2 & 1 & a \\ -1 & 1 & -1 & -a \\ -2 & 2 & a-1 & 2 \\ a+3 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(37) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & a & b \\ 1 & -2 & c & d \end{pmatrix}$$

$$(38) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 3 & 1 & 7 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & a+1 & 19 & 11 \\ 2 & 7 & 11 & 15 & a \end{pmatrix}$$

$$(39) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & -10 & 10 & 7 \\ 8 & 10 & 20 & 12 & a^2-11 \\ 5 & 9 & a+15 & 13 & a-6 \end{pmatrix}$$

3. 前問の (1), (6), (31), (35) の行列をそれぞれ A, B, C, D とする.

(1) $\text{rank } A < 3$ となるように a が定められているとする. $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$ の第 i 成分を b_i とするとき, 方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解を持つための b_1, b_2, b_3 の間の関係式を求め, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解を求めよ. また, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を満たす $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ が存在するような $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$ 全体からなる集合を答えよ.

(2) $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$ の第 i 成分を b_i とするとき, 方程式 $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解を持つための b_1, b_2, b_3 の間の関係式を求め, $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解を求めよ. また, $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を満たす $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ が存在するような $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$ 全体からなる集合を答えよ.

(3) $\text{rank } C < 4$ となるように a が定められているとする. $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$ の第 i 成分を b_i とするとき, 方程式 $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解を持つための b_1, b_2, b_3, b_4 の間の関係式を求め, $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解を求めよ. また, $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を満たす $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4$ が存在するような $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$ 全体からなる集合を答えよ.

(4) $\text{rank } D < 4$ となるように a が定められているとする. $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$ の第 i 成分を b_i とするとき, 方程式 $D\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解を持つための b_1, b_2, b_3, b_4 の間の関係式を求め, $D\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解を求めよ. また, $D\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を満たす $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4$ が存在するような $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$ 全体からなる集合を答えよ.

4. (発展問題) (1) $Q_n(i; -1)R_n(i, j)$ を $P_n(k, l; c)$ の形の基本行列の積で表せ.

(2) m が 2 以上の整数で, $m \times n$ 行列 A の (p, q) 成分が 0 でないとする. また, p', p'' を $1 \leq p', p'' \leq m$ である整数として, p'' は p と異なるとする. $p' \neq p$ ならば $P_m(k, l; c)$ ($k = p$ または p') の形の基本行列の積を A の左から掛けることにより, 第 q 列が基本ベクトル $\mathbf{e}_{p'}$ になるようにでき, $p' = p$ の場合は, $P_m(k, l; c)$ ($k = p$ または p'') の形の基本行列の積を A の左から掛けることにより, 第 q 列が基本ベクトル $\mathbf{e}_{p'}$ になるようにできることを示せ.

5. (発展問題) $m \times n$ 行列 A の階数が r のとき以下のことを示せ.

(1) $r < m$ ならば $P_m(i, j; c)$ の形の m 次基本行列の積で表される行列 P で, PA が以下の条件 (i), (ii), (iii) を満たす行列 $B = (b_{ij})$ になるようなものがある.

(i) $i > r$ ならば $b_{ij} = 0$.

(ii) $i \leq r$ ならば $b_{i1} = \cdots = b_{ij(i)-1} = 0, b_{ij(i)} = 1$ となるような $1 \leq j(i) \leq n$ があって, さらに B の第 $j(i)$ 列は \mathbf{R}^m の基本ベクトル e_i になる.

(iii) $i < r$ ならば $j(i) < j(i+1)$ である.

(2) $r = m$ ならば $P_m(i, j; c)$ の形の m 次基本行列の積で表される行列 P と $d \in \mathbf{R} (d \neq 0)$ で, $Q_m(m; d)PA$ が上の条件 (i), (ii), (iii) を満たすようなものがある.

(3) $m = n$ のとき, A の行列式の値が 1 ならば, A は $P_n(i, j; c)$ の形の基本行列の積で表される.

6. (発展問題) A は $m \times n$ 行列, B は $n \times k$ 行列で $AB = O$ が成り立つとする. このとき $\text{rank } A + \text{rank } B \leq n$ であることを示せ.

第 7 回の演習問題の解答

$$\begin{aligned}
 1. (1) & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-1 倍したもの加える}]{\text{第 2 行に第 3 行を}} \\
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -8 & 6 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{3} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \\
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & 2 & -\frac{5}{3} \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & 2 & -\frac{5}{3} \end{array} \right) \text{ より } \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{8}{3} & 2 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \\
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-}\frac{1}{5} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \\
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \\
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \text{ より } \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \\
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-}\frac{1}{3} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \\
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{3} & -\frac{2}{3} & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array} \right) \text{ より } \begin{pmatrix} \frac{16}{3} & -\frac{2}{3} & -3 \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \\
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 0 & -4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{3 倍する}]{\text{第 2 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -3 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 0 & -4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-2 倍したもの加える}]{\text{第 2 行に第 3 行を}} \\
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & -7 & 0 & -4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 35 & 9 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 11 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -84 & -21 & -18 & 15 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-}\frac{1}{84} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}
 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 35 & 9 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 11 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{14} & -\frac{5}{28} \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3)\text{成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{14} & -\frac{1}{28} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{14} & -\frac{5}{28} \end{array} \right) \text{より} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & & & \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{14} & -\frac{1}{28} & & & \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{14} & -\frac{5}{28} & & & \end{array} \right).$$

$$(5) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-1倍したもの加える}]{\text{第3行に第2行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第1行と第3行}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -5 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 6 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{3倍したもの加える}]{\text{第2行に第3行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 11 & -10 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 10 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 11 & -10 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 24 & -22 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-}\frac{1}{3}\text{倍する}]{\text{第3行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 10 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 11 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{24}{5} & -\frac{22}{5} \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3)\text{成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{26}{5} & -\frac{23}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{17}{5} & \frac{16}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{24}{5} & -\frac{22}{5} \end{array} \right) \text{より} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{8}{5} & \frac{26}{5} & -\frac{23}{5} & & & \\ -\frac{6}{5} & -\frac{17}{5} & \frac{16}{5} & & & \\ \frac{7}{5} & \frac{24}{5} & -\frac{22}{5} & & & \end{array} \right).$$

$$(6) \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{2倍したもの加える}]{\text{第1行に第3行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第2行と第3行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-1倍する}]{\text{第2行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-1倍する}]{\text{第3行を}}$$

$$\xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3)\text{成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right) \text{より} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & \\ 2 & -1 & 2 & & & \end{array} \right).$$

$$(7) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第1行と第2行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{5}\text{倍する}]{\text{第2行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{倍する}]{\text{第2行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3)\text{成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \text{より} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & & & \\ -\frac{3}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} & & & \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & & \end{array} \right).$$

$$(8) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{を加える}]{\text{第1行に第3行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & | & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & | & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を加える}]{\text{第2行に第3行}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & | & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{成分に関して}} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & -5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & -5 & -2 \end{pmatrix} \text{より} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$(9) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1 \text{倍したもの加える}]{\text{第1行に第2行を}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & | & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & | & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{倍する}]{\text{第2行を}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & -4 & 8 & | & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & 1 \end{pmatrix} \text{となり, 左半分の行列の階数は2であるため, 与えられた行列の逆行列は存在しない.}$$

$$(10) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第1行と第2行}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1 \text{倍する}]{\text{第1行を}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & | & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & | & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2 \text{倍したもの加える}]{\text{第3行に第2行を}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & | & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & | & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第2行と第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & | & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & | & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 & | & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & | & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -19 & | & -5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{19} \text{倍する}]{\text{第3行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 & | & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & | & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{5}{19} & \frac{1}{19} & -\frac{3}{19} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{19} & \frac{4}{19} & \frac{7}{19} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{19} & -\frac{11}{19} & -\frac{5}{19} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{5}{19} & \frac{1}{19} & -\frac{3}{19} \end{pmatrix} \text{より} \begin{pmatrix} \frac{1}{19} & \frac{4}{19} & \frac{7}{19} \\ \frac{2}{19} & -\frac{11}{19} & -\frac{5}{19} \\ \frac{5}{19} & \frac{1}{19} & -\frac{3}{19} \end{pmatrix}.$$

$$(11) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を加える}]{\text{第2行に第3行}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & | & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1 \text{倍する}]{\text{第2行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & | & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{7} \text{倍する}]{\text{第3行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{3}{7} & \frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \text{より} \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

$$(12) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \text{より} \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -5 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(13) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第3行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \text{より} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$(14) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第1行と第2行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-1倍する}]{\text{第1行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-}\frac{1}{5} \text{ 倍する}]{\text{第2行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{より} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(15) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-1倍する}]{\text{第2行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \text{より} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(16) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-1倍したものを加える}]{\text{第3行に第2行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \text{より, 与えられた行列の階数は2だから, 逆行列をもたない.}$$

$$(17) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-1倍する}]{\text{第2行を}}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-1倍する}]{\text{第3行を}} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3)\text{成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right) \text{より} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \\
(18) & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第2行と第3行}} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-1倍する}]{\text{第2行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-1倍する}]{\text{第3行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3)\text{成分に関して}} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \text{より} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \\
(19) & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-1倍したもの加える}]{\text{第3行に第2行を}} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \text{より, 与えられた行列の階数は2だから, 逆行列をもたない.} \\
(20) & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-1倍する}]{\text{第2行を}} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3)\text{成分に関して}} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \text{より} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \\
(21) & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第3行に加える}]{\text{第2行を2倍して}} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{を入れ換える}]{\text{第2行と第3行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & -3 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-}\frac{1}{7}\text{倍する}]{\text{第3行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3)\text{成分に関して}}
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{array} \right) \text{より, 与えられた行列は正則で, その逆行列は } \left(\begin{array}{ccc} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{array} \right) \text{である.}$$

$$(22) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第3行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \text{より, 与えられた行列は正則で, その逆行列は } \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \text{である.}$$

$$(23) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{を入れ換える}]{\text{第2行と第3行}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 6 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{11} \text{ 倍する}]{\text{第2行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & \frac{2}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{5}{11} & 0 & -\frac{3}{11} \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & \frac{2}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[-1 \text{ 倍する}]{\text{第3行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{5}{11} & 0 & -\frac{3}{11} \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & \frac{2}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{10}{11} & \frac{6}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \text{より, 与えられた行列は正則で, その逆行列は } \left(\begin{array}{ccc} -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{10}{11} & \frac{6}{11} & \frac{1}{11} \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \text{である.}$$

$$(24) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{を入れ換える}]{\text{第1行と第2行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[-1 \text{ 倍する}]{\text{第1行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[-\frac{1}{5} \text{ 倍する}]{\text{第2行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{より, 求める行列は } \left(\begin{array}{ccc} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{である.}$$

$$(25) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第3行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \text{より, 与えられた行列は正則で, その逆行列は } \left(\begin{array}{ccc} -2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \text{である.}$$

$$(26) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a & | & -1 & 1 & 1-a \end{pmatrix} \cdots (*) \text{ より, } a = 2 \text{ ならば与え}$$

られた行列の階数は 2 だから, 逆行列をもたない. $a \neq 2$ の場合, (*) $\xrightarrow[\frac{1}{2-a} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{a-2} & \frac{-1}{a-2} & \frac{a-1}{a-2} \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{a-1}{a-2} & \frac{-1}{a-2} & \frac{1}{a-2} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{-1}{a-2} & \frac{1}{a-2} & \frac{-1}{a-2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{a-2} & \frac{-1}{a-2} & \frac{a-1}{a-2} \end{pmatrix} \text{ より } \begin{pmatrix} \frac{a-1}{a-2} & \frac{-1}{a-2} & \frac{1}{a-2} \\ \frac{-1}{a-2} & \frac{1}{a-2} & \frac{-1}{a-2} \\ \frac{1}{a-2} & \frac{-1}{a-2} & \frac{a-1}{a-2} \end{pmatrix}.$$

$$(27) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a+1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-1 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a+1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -a & | & 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \cdots (*) \text{ より, } a = 0 \text{ ならば与えられた行列の階数は 2 だから, 逆行列をもたない.}$$

$$a \neq 0 \text{ の場合, } (*) \xrightarrow[\text{-}\frac{1}{a} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{a+1}{a} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{a-1}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{a+1}{a} \end{pmatrix}$$

$$\text{より } \begin{pmatrix} \frac{a-1}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{a+1}{a} \end{pmatrix}.$$

$$(28) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 6 & 4 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & | & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & | & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ より } \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[-\frac{1}{2} \text{倍する}]{\text{第3行を}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{成分に関して}} \\
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[-\frac{1}{2} \text{倍する}]{\text{第4行を}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第4列の掃き出し}]{(4,4) \text{成分に関して}} \\
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \text{より} \left(\begin{array}{cccc} -1 & -2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \\
(33) & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & -6 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[-\frac{1}{2} \text{倍する}]{\text{第2行を}} \\
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & -6 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{倍する}]{\text{第3行を}} \\
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[-\frac{1}{2} \text{倍する}]{\text{第4行を}} \\
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第4列の掃き出し}]{(4,4) \text{成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \text{より} \\
& \left(\begin{array}{cccc} -1 & -2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

[注意] (32), (33) の行列をそれぞれ A, B とすれば, A は B の第2列と第3列を入れ替えた行列だから $A = BR_4(2, 3)$ である. 従って $A^{-1} = (BR_4(2, 3))^{-1} = R_4(2, 3)^{-1}B^{-1} = R_4(2, 3)B^{-1}$ だから A^{-1} は (33) で求めた B^{-1} の第2行と第3行を入れ替えた行列である.

$$(34) \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{を加える}]{\text{第2行に第4行}}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-1倍する}]{\text{第2行を}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)成分に関して} \\
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -1 & -4 & 0 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-2倍したものを加える}]{\text{第4行に第3行を}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第3行と第4行}} \\
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & -4 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3)成分に関して} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -5 & -6 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 7 & 8 & -5 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-1倍する}]{\text{第4行を}} \\
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -5 & -6 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 & -8 & 5 & -11 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第4列の掃き出し}]{(4,4)成分に関して} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & -5 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 & -8 & 5 & -11 \end{array} \right) \text{より} \\
& \left(\begin{array}{cccc} 2 & 2 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & 3 & -7 \\ 3 & 4 & -2 & 5 \\ -7 & -8 & 5 & -11 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(35) \quad & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)成分に関して} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -10 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -10 & -5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-1倍したものを加える}]{\text{第2行に第3行を}} \\
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -10 & -4 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 15 & -10 & -5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)成分に関して} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -7 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -10 & -4 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 40 & 15 & 1 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 20 & 8 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{40}倍する]{\text{第3行を}} \\
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -7 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -10 & -4 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{40} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{40} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 20 & 8 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3)成分に関して} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{7}{40} & \frac{1}{8} & \frac{7}{40} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{40} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{40} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow[\text{2倍する}]{\text{第4行を}} \\
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{7}{40} & \frac{1}{8} & \frac{7}{40} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{40} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{40} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第4列の掃き出し}]{(4,4)成分に関して} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{20} & -\frac{1}{2} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{20} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{3}倍する]{\text{第2行を}} \\
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{20} & -\frac{1}{2} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{20} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \text{より} \left(\begin{array}{cccc} -\frac{9}{20} & -\frac{1}{2} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{7}{20} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & | & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & -1 & -6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-1倍する}]{\text{第4行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & | & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第4列の掃き出し}]{(4,4)成分に関して}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 4 & 18 & -16 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \text{より, 与えられた行列は正則で, その逆行列は } \begin{pmatrix} 4 & 18 & -16 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \text{である.}$$

$$(41) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)成分に関して} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & | & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)成分に関して}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & | & -5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & -6 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3)成分に関して} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & -13 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 7 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -10 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第4列の掃き出し}]{(4,4)成分に関して}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -10 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{より, 与えられた行列は正則で, その逆行列は } \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{である.}$$

$$(42) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-1倍したもの加える}]{\text{第4行に第1行を}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第1行と第4行}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)成分に関して} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & | & 3 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 3 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第2行と第4行}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & | & 3 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)成分に関して} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & | & 3 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3)成分に関して}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 9 & 1 & 2 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-1倍する}]{\text{第4行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -9 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第4列の掃き出し}]{(4,4)成分に関して}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 18 & 2 & 3 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -6 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -9 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \text{より } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 18 & 2 & 3 & -14 \\ -6 & -1 & -1 & 5 \\ -9 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
(43) \quad & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-}\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \\
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \\
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 2 & 4 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \text{となり, 左半分の}
\end{aligned}$$

行列の階数は 3 であるため, 与えられた行列の逆行列は存在しない.

$$\begin{aligned}
(44) \quad & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \\
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-}\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \\
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & -10 & 7 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 15 & -10 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow[\text{第 5 列の掃き出し}]{(5,5) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 15 & 1 & 13 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 & -18 & 0 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \text{より} \left(\begin{array}{cccc} -6 & 15 & 1 & 13 & 4 \\ 11 & -18 & 0 & -15 & -4 \\ 2 & -4 & 0 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right). \\
(45) \quad & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & b & c & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1+a^2 & ab & ac & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & ab & 1+b^2 & bc & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & ac & bc & 1+c^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & b & c & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -c & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$\xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & b & c & 1+a^2 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -c & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & c & 1+a^2+b^2 & -a & -b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -c & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第4列の掃き出し}]{(4,4) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1+a^2+b^2+c^2 & -a & -b & -c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -c & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

より
$$\begin{pmatrix} 1+a^2+b^2+c^2 & -a & -b & -c \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 1 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ a & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a-1 \\ 0 & -a-1 & -a^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1 \text{ 倍する}]{\text{第2行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & -a-1 & -a^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix} \text{ だから、与えられた行列の階数は } a=0 \text{ ならば } 2 \text{ であり、} a \neq 0 \text{ ならば } 3 \text{ である.}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第1行と第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \cdots (*) \text{ だから } a=1 \text{ ならば与え}$$

られた行列の階数は1である. $a \neq 1$ の場合, $(*) \xrightarrow[\frac{1}{a-1} \text{ 倍する}]{\text{第2,3行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -a-2 \end{pmatrix} \text{ だから } a=-2 \text{ ならば与えられた行列の階数は } 2 \text{ であり、} a \neq -2, 1 \text{ ならば与えられた行列の階数は } 3 \text{ である.}$$

(3)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & -1 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 2a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第2行と第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & 0 & -(a+1)(2a-1) \end{pmatrix} \text{ だから、与えられた行列の階数は } a=-1 \text{ または } a=\frac{1}{2} \text{ ならば } 2 \text{ であり、} a \neq -1, \frac{1}{2} \text{ ならば } 3 \text{ である.}$$

(4)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & -3 \\ 3 & 1 & 0 & -8 \\ -1 & a+1 & 4 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & -3 \\ 0 & -5 & -3a & 1 \\ 0 & a+3 & a+4 & a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{a+3}{5} \text{ 倍したもの加える}]{\text{第3行に第2行を}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & -3 \\ 0 & -5 & -3a & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{(3a+10)(a-2)}{5} & \frac{6(a-2)}{5} \end{pmatrix} \text{ だから、与えられた行列の階数は } a=2 \text{ ならば } 2 \text{ であり、} a \neq 2 \text{ ならば } 3 \text{ である.}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{第1行と第2行} \\ \text{の入れ替え}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & -7 & 6 & 1 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{第1列の掃き出し}}]{(1,1) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{7} \text{倍する}}]{\text{第2行を}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{第2列の掃き出し}}]{(2,2) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{だから, 与えられた行列の階数は2である.}$$

$$(6) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{第1行と第2} \\ \text{行の入れ替え}}]{(1,1) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{第1列の掃き出し}}]{(1,1) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{第2列の掃き出し}}]{(2,2) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{だから, 与えられた行列の階数は2である.}$$

$$(7) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{第1列の掃き出し}}]{(1,1) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{第2列の掃き出し}}]{(2,2) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{だから, 与え}$$

られた行列の階数は2である.

$$(8) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{第1列の掃き出し}}]{(1,1) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{第2列の掃き出し}}]{(2,2) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{だから, 与え}$$

られた行列の階数は2である.

$$(9) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{第1列の掃き出し}}]{(1,1) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{第2列の掃き出し}}]{(2,2) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{だから, 与え}$$

られた行列の階数は2である.

$$(10) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{第1列の掃き出し}}]{(1,1) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{第2列の掃き出し}}]{(2,2) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{だから, 与えら}$$

れた行列の階数は2である.

$$(11) \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{第1列の掃き出し}}]{(1,1) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{第2列の掃き出し}}]{(2,2) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{だから, 与えられ}$$

た行列の階数は2である.

$$(12) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから, 与え}$$

られた行列の階数は2である.

$$(13) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから, 与えら}$$

れた行列の階数は2である.

$$(14) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-1倍したもの加える}]{\text{第2行に第4行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第3行と第4行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ だから, 与えられた行列の階数は4である.}$$

$$(15) \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第1行と第4行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \dots (*) \text{ だから}$$

$$a=1 \text{ ならば与えられた行列の階数は1である. } a \neq 1 \text{ の場合, } (*) \xrightarrow[\frac{1}{a-1} \text{ 倍する}]{\text{第2,3,4行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -a-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -a-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a+2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -a-3 \end{pmatrix} \text{ だから } a = -3 \text{ ならば与えられた}$$

行列の階数は3であり, $a \neq -3, 1$ ならば与えられた行列の階数は4である.

$$(16) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & a \\ 4 & -2 & 0 & a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 2 & -4 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 4 & a-5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第3行と第4行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & a-5 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix} \text{ だから } a = 2 \text{ ならば与えられた行列の階数は3であり, } a \neq 2 \text{ ならば与えられ}$$

た行列の階数は4である.

$$(17) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & a & 3 \\ a & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & a-2 & -1 \\ 0 & a-2 & 2-a & 3-2a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

だから $a = 1$ ならば与えられた行列の階数は 2 であり, $a \neq 1$ ならば与えられた行列の階数は 4 である.

$$(18) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & a \\ 4 & 2 & -2 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & a \\ 0 & 6 & -6 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \text{ より,}$$

$a = 1$ の場合は与えられた行列の階数は 2 である. $a \neq 1$ の場合は, 最後に得られた行列をさらに (3,4) 成分に関して第

4 列の掃き出しを行えば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が得られるため, 与えられた行列の階数は 3 である.

$$(19) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & -7 \\ 3 & 1 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & 19 & 11 \\ 2 & 7 & a^2 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & -7 \\ 0 & -5 & 25 & 30 \\ 0 & 7 & 25 & 18 \\ 0 & 3 & a^2+12 & a+15 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 25 & 30 \\ 0 & 0 & 60 & 60 \\ 0 & 0 & a^2+27 & a+33 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 60 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & -(a+2)(a-3) \end{pmatrix}$$

だから, 与えられた行列の階数は $a = -2$ または $a = 3$ ならば 3

であり, $a \neq -1, 3$ ならば 4 である.

$$(20) \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 3-a & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^2-3a+3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^3 \\ 0 & 1 & 0 & -a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & (1-a)^3 \end{pmatrix}$$

だから $a = 1$ ならば与えられた行列の階数は 3 であり, $a \neq 1$ ならば与えら

れた行列の階数は 4 である.

$$(21) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた行列の階数は 2 である.}$$

$$(22) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -9 & -3 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{3} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた行列の階数は 2 である.}$$

$$(23) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行と第 3 行の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 行に加える}]{\text{第 3 行を } \frac{4}{3} \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた行列の階数は 4 である.}$$

$$(24) \begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行と第 2 行の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & -7 & 6 & 1 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた行列の階数は 2 である.}$$

$$(25) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行と第 3 行の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 5 列の掃き出し}]{(3,5) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より,}$$

与えられた行列の階数は 3 である.

$$(26) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 行に加える}]{\text{第 3 行を } -1 \text{ 倍して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた行列の階数は 3}$$

である.

$$(27) \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行に加える}]{\text{第 1 行を } -1 \text{ 倍して}}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行と第 2 行の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行に加える}]{\text{第 4 行を } -2 \text{ 倍して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -14 & -13 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 31 & 30 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた行列の階数は 4 である.}$$

$$(28) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & b \\ -1 & 0 & a & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & b-6 \\ 0 & 2 & a & a+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & a-2 & a-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & a-2 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \text{ だから, } a = 2 \text{ かつ } b = 0 \text{ のとき階数は 2, 「} a \neq 2 \text{ かつ } b = 0 \text{」 または}$$

「 $a = 2$ かつ $b \neq 0$ 」のとき階数は 3, $a \neq 2$ かつ $b \neq 0$ のとき階数は 4 である.

$$(29) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & a+1 & a+3 \\ a & 0 & a^2+1 & 3a \\ -3 & -8 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & a+4 & a+3 \\ 0 & -3a & a^2+a+1 & 3a \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3a & a^2+a+1 & 3a \\ 0 & -8 & a+4 & a+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & (a-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & a-4 & a-5 \end{pmatrix} \text{ だから, } a \neq 1 \text{ ならば, 得られた行列の}$$

$$(3,3) \text{ 成分に関して第 3 列を掃き出せば } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & (a-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{pmatrix} \text{ となるため, 与えられた行列の階数は } a = 5 \text{ なら}$$

ば 3 であり, $a \neq 1, 5$ ならば 4 である. $a = 1$ の場合は, 上の行列の第 3 行と第 4 行を入れ替えることにより, 与えられた行列の階数は 3 であることがわかる.

$$(30) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & b \\ 1 & 2 & a & a+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & b \\ 0 & 2 & a-1 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \\ 0 & 0 & a-3 & a-3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-3 & a-3 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \end{pmatrix} \text{ だから, } a = 3 \text{ かつ } b = -2 \text{ のとき階数は 2, 「} a \neq 3 \text{ かつ } b = -2 \text{」 または}$$

「 $a = 3$ かつ $b \neq -2$ 」のとき階数は 3, $a \neq 3$ かつ $b \neq -2$ のとき階数は 4 である.

$$(31) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & a+4 \\ 1 & -1 & a & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & a-1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix} \text{ より,}$$

$a = -1$ の場合は, 与えられた行列の階数は 2 である. $a \neq -1$ の場合は, 最後に得られた行列の第 3 行と第 4 行を入れ

替えれば, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$ が得られるため, 与えられた行列の階数は 4 である.

$$(32) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2+2a & 2a^2-3a \\ 1 & 2 & a^2-2 & a^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & a^2+2a & 2a^2-3a \\ 0 & 0 & a^2-1 & a^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+3) & (a-1)(2a-1) \\ 0 & 0 & (a-1)(a+1) & (a-1)(a+1) \end{pmatrix} \text{ より } a=1 \text{ のとき階数は } 2, a=-1 \text{ のときは階数は } 3 \text{ である. } a \neq \pm 1$$

の場合, 第 3 行を $a-1$, 第 4 行を $(a-1)(a+1)$ で割り, 第 3 行と第 4 行を入れ替えると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+3 & 2a-1 \end{pmatrix}$

となり, さらに (3,3) 成分に関して第 3 列を掃き出せば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix}$ となる. 従って $a=4$ ならば階数は 3,

$a \neq \pm 1, 4$ ならば階数は 4 である.

$$(33) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & a+1 & a+3 \\ a & 0 & 4 & 3a \\ -3 & -8 & a & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & a+3 & a+3 \\ 0 & -3a & a+4 & 3a \\ 0 & 1 & a-3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 2 行と第 4 行}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-3 & -1 \\ 0 & -3a & a+4 & 3a \\ 0 & -5 & a+3 & a+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3a+8 & 3 \\ 0 & 1 & a-3 & -1 \\ 0 & 0 & (3a-2)(a-2) & 0 \\ 0 & 0 & 6(a-2) & a-2 \end{pmatrix} \text{ だから, } a \neq \frac{2}{3}, 2 \text{ ならば, 得られた行}$$

列の (3,3) 成分に関して第 3 列を掃き出せば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & (3a-2)(a-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$ となるため, 与えられた行列の階数は

4 である. また, 得られた行列の第 3 行と第 4 行を入れ換えれば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3a+8 & 3 \\ 0 & 1 & a-3 & -1 \\ 0 & 0 & 6(a-2) & a-2 \\ 0 & 0 & (3a-2)(a-2) & 0 \end{pmatrix}$ となるため, 与え

られた行列の階数は $a=2$ ならば 2, $a=\frac{2}{3}$ ならば 3 である.

$$(34) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 7 & 7 \\ 2 & 7 & 11 & a^2-12 \\ 2 & 7 & a+9 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & a^2-10 \\ 0 & 3 & a+3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 - 4 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第3行と第4行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 - 4 \end{pmatrix} \text{だから, 与えられた行列の階数は } a = 0 \text{ または}$$

$a = \pm 2$ ならば 3 であり, $a \neq 0, \pm 2$ ならば 4 である.

$$(35) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 \\ -1 & -1 & 1 & 2-a \\ -2 & a-3 & 2 & 2 \\ a+1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & a-1 & 2-2a & 2a-2 \\ 0 & 1-a & (a-1)(a+2) & a(1-a) \end{pmatrix} \text{だから, } a = 1 \text{ ならば}$$

与えられた行列の階数は 1 である. $a \neq 1$ ならば得られた行列の第 2 行と第 4 行を $\frac{1}{1-a}$ 倍し, 第 3 行を $\frac{1}{a-1}$ 倍し

$$\text{て, 基本変形を続けると} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -a-2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第2行と第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -a-2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-a & a-4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & a-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a-4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix} \text{だから, } a = 2 \text{ ならば与えられた行列の階数は 3 であ}$$

り, $a \neq 1, 2$ ならば与えられた行列の階数は 4 である.

$$(36) \begin{pmatrix} 1 & -a-2 & 1 & a \\ -1 & 1 & -1 & -a \\ -2 & 2 & a-1 & 2 \\ a+3 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -a-2 & 1 & a \\ 0 & -(a+1) & 0 & 0 \\ 0 & -2(a+1) & a+1 & 2(a+1) \\ 0 & (a+1)(a+4) & -(a+1) & -(a+1)(a+2) \end{pmatrix} \text{だから,}$$

$a = -1$ ならば与えられた行列の階数は 1 である. $a \neq -1$ ならば得られた行列の第 2 行, 第 3 行, 第 4 行を $-\frac{1}{a+1}$ 倍

$$\text{して, 基本変形を続けると} \begin{pmatrix} 1 & -a-2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -a-4 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{だから, } a = 0 \text{ ならば与えられた行列の階数は 3 であり, } a \neq -1, 0 \text{ ならば与}$$

えられた行列の階数は 4 である.

$$(37) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & a & b \\ 1 & -2 & c & d \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & a-4 & b+4 \\ 0 & -1 & c-1 & d+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1 \text{ 倍する}]{\text{第2行を}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & a-4 & b+4 \\ 0 & -1 & c-1 & d+1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & a-1 & b+1 \\ 0 & 0 & c+2 & d-2 \end{pmatrix} \dots (*). B = \begin{pmatrix} a-1 & b+1 \\ c+2 & d-2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \text{とおくと } (*) = \begin{pmatrix} E_2 & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

である. B が零行列ならば $(*)$ は階段行列で, 与えられた行列の階数は 2 である. B が正則行列ならば, B を行に関

して基本変形すれば単位行列にできるため、(*)の第3行と第4行を行に関して基本変形をすることによって、(*)を対角成分がすべて1である階段行列に変形できる。従ってこの場合は、与えられた行列の階数は4である。Bが零行列であること、 $\text{rank } B = 0$ であることは同値であり、Bが正則行列であることと $\text{rank } B = 2$ であることは同値だから、Bが正則行列でも零行列でもないことは $\text{rank } B = 1$ であることと同値である。このとき、Bを行に関して基本変形すれば第1行は零でなく第2行が零である階段行列に変形できるため、(*)の第3行と第4行を行に関して基本変形をすることによって、(*)を第3行までが零ではなく、第4行が零である階段行列に変形できるため、与えられた行列の階数は3である。以上から、 $(a, b, c, d) = (1, -1, -2, 2)$ ならば与えられた行列の階数は2、 $(a, b, c, d) \neq (1, -1, -2, 2)$ かつ $(a-1)(d-2) - (b+1)(c+2) = 0$ ならば与えられた行列の階数は3であり、 $(a-1)(d-2) - (b+1)(c+2) \neq 0$ ならば与えられた行列の階数は4である。

$$(38) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 3 & 1 & 7 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & a+1 & 19 & 11 \\ 2 & 7 & 11 & 15 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 0 & -5 & -5 & 25 & 30 \\ 0 & 7 & a-3 & 25 & 18 \\ 0 & 3 & 3 & 27 & a+14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & 25 & 30 \\ 0 & 0 & a-10 & 60 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 42 & a+32 \end{pmatrix}$$

だから、 $a \neq 10$ ならば行列の階数は4であり、 $a = 10$ ならば、得られた行列の(3,4)

成分に関して第4列を掃き出せば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & 25 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるため、与えられた行列の階数は3である。

$$(39) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & -10 & 10 & 7 \\ 8 & 10 & 20 & 12 & a^2 - 11 \\ 5 & 9 & a+15 & 13 & a-6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 & -1 \\ 0 & 10 & 0 & 20 & 5 \\ 0 & -14 & -20 & -28 & a^2 - 3 \\ 0 & -6 & a-10 & -12 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 10 & 0 & 20 & 5 \\ 0 & 0 & -20 & 0 & a^2 + 4 \\ 0 & 0 & a-10 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{a^2}{4} - \frac{1}{2} \\ 0 & 10 & 0 & 20 & 5 \\ 0 & 0 & -20 & 0 & a^2 + 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a(a-4)(a-6)}{20} \end{pmatrix}$$

だから、与えられた行列の階数は a が0, 2または6ならば3であり、 $a \neq 2, 4, 6$ ならば4である。

3. (1) $a = 0$ だから $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 1 & 0 & -1 & b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-1倍する}]{\text{第2行を}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 - b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$

より、 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつには $b_1 - b_2 + b_3 = 0$

であることが必要十分であり、この条件の下で、 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は $\begin{cases} x - z = b_2 \\ y + z = b_1 - b_2 \end{cases}$ と同値だから、 $z = t$ とおけば、

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} t + b_2 \\ -t + b_1 - b_2 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 - b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (t は任意)で与えられる。また、 $b_3 = -b_1 + b_2$ ならば

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -b_1 + b_2 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ となり, } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ が解をもつような } \mathbf{b} \text{ 全体からなる集合は, } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ に}$$

平行で原点を通る平面である.

$$(2) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 & b_1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & b_2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & b_3 \\ 3 & 0 & -2 & 3 & b_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行の入れ換え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & b_2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & b_1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & b_3 \\ 3 & 0 & -2 & 3 & b_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & b_2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & b_1 + 2b_2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & b_3 - b_2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & b_4 - 3b_2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{b_2 - b_1}{3} \\ 0 & 3 & -1 & 3 & b_1 + 2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 + b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 - b_2 + b_4 \end{pmatrix} \text{ より, } B\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ が解をもつためには}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = b_1 - b_2 + b_4 = 0 \text{ であることが必要十分であり, この条件の下で, } B\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ は } \begin{cases} x - \frac{2}{3}z + w = \frac{b_2 - b_1}{3} \\ 3y - z + 3w = b_1 + 2b_2 \end{cases}$$

$$\text{と同値だから, } z = 3s, w = t \text{ とおけば, } B\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ の解は } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2s - t + \frac{b_1 - b_2}{3} \\ s - t - \frac{b_1 + 2b_2}{3} \\ 3s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b_1 - b_2}{3} \\ -\frac{b_1 + 2b_2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(s, t \text{ は任意}) \text{ で与えられる. また, } b_3 = -b_1 - b_2 \text{ かつ } b_4 = -b_1 + b_2 \text{ ならば } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -b_1 - b_2 \\ -b_1 + b_2 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{だから, } \left\{ \mathbf{b} \in \mathbf{R}^4 \mid \mathbf{b} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (} s, t \in \mathbf{R} \text{ は任意)} \right\} \text{ が, } B\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ を満たす } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 \text{ が存在するような}$$

$\mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$ 全体からなる集合である.

$$(3) a = -1 \text{ だから } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & b_2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & b_3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & b_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & b_2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & b_4 - b_1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 - b_1 + b_2 \end{pmatrix} \text{ より, } C\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ が解をもつためには } b_3 - 2b_1 - b_2 = b_4 - b_1 + b_2 = 0 \text{ であることが}$$

$$\text{必要十分であり, この条件の下で, } C\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ は } \begin{cases} x + z + 2w = b_1 \\ y + 2z - w = b_2 \end{cases} \text{ と同値だから, } z = s, w = t \text{ とおけば } C\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\text{の解は } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -s - 2t + b_1 \\ -2s + t + b_2 \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (} s, t \text{ は任意)} \text{ で与えられる. また, } b_3 = 2b_1 + b_2 \text{ かつ}$$

$$b_4 = b_1 - b_2 \text{ ならば } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 2b_1 + b_2 \\ b_1 - b_2 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ だから, } \left\{ \mathbf{b} \in \mathbf{R}^4 \mid \mathbf{b} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ (} s, t \text{ は任意)} \right\}$$

が, $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を満たす $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4$ が存在するような $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$ 全体からなる集合である.

$$(4) a = 1 \text{ の場合, } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & b_1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & b_2 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & b_3 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & b_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2b_1 + b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 - 2b_1 \end{pmatrix} \text{ より, } D\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ が}$$

解をもつためには $b_1 + b_2 = 2b_1 + b_3 = b_4 - 2b_1 = 0$ であることが必要十分であり, この条件の下で, $D\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は

$$x + y - z - w = b_1 \text{ と同値だから, } y = s, z = t, w = u \text{ とおけば } D\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ の解は } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -s + t + u + b_1 \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} =$$

$$s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (} s, t, u \text{ は任意)} \text{ で与えられる. また, } b_2 = -b_1, b_3 = -2b_1, b_4 = 2b_1 \text{ ならば}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ -b_1 \\ -2b_1 \\ 2b_1 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ だから, } \left\{ \mathbf{b} \in \mathbf{R}^4 \mid \mathbf{b} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ (} t \text{ は任意)} \right\} \text{ が, } D\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ を満たす } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 \text{ が存在するよ}$$

うな $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$ 全体からなる集合である.

$$a = 2 \text{ の場合, } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & b_1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & b_2 \\ -2 & -1 & 2 & 2 & b_3 \\ 3 & 2 & -2 & -2 & b_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & b_1 + b_2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2b_1 + b_3 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & b_4 - 3b_1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2b_1 + b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & b_1 + b_2 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & b_4 - 3b_1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -b_1 - b_3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2b_1 + b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & b_4 - b_1 + b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-1 倍する}]{\text{第 3 行を}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -b_1 - b_3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 2b_1 + b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & b_4 - b_1 + b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -b_1 - b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & b_3 - 2b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 + b_1 + 2b_2 + b_3 \end{pmatrix} \text{ より, } D\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ が解をもつ}$$

ためには $b_4 + b_1 + 2b_2 + b_3 = 0$ であることが必要十分であり, この条件の下で, $D\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は $\begin{cases} x - 2w = -b_1 - b_3 \\ y + 2w = b_3 - 2b_2 \\ z = -b_1 - b_2 \end{cases}$

$$\text{と同値だから, } w = t \text{ とおけば } D\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ の解は } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2t - b_1 \\ -2t - 2b_2 + b_3 \\ -b_1 - b_2 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ 2b_2 - b_3 \\ b_1 + b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (} t \text{ は任意)} \text{ で与}$$

えられる。また、 $b_4 = -b_1 - 2b_2 - b_3$ ならば $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ -b_1 - 2b_2 - b_3 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ だから、

$$\left\{ \mathbf{b} \in \mathbf{R}^4 \mid \mathbf{b} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (s, t, u \text{ は任意}) \right\} \text{ が, } D\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ を満たす } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 \text{ が存在するような}$$

$\mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$ 全体からなる集合である。

4. (1) $P_n(i, j; 1)P_n(j, i; -1)P_n(i, j; 1)Q_n(i; -1)R_n(i, j) = E_n$ より $Q_n(i; -1)R_n(i, j) =$

$$(P_n(i, j; 1)P_n(j, i; -1)P_n(i, j; 1))^{-1} = P_n(i, j; 1)^{-1}P_n(j, i; -1)^{-1}P_n(i, j; 1)^{-1} = P_n(i, j; -1)P_n(j, i; 1)P_n(i, j; -1).$$

(2) B を (p, q) 成分に関して A の第 q 列を掃き出した行列とすれば、 $A = (a_{ij})$, $P_j = P_m(p, j; -\frac{a_{pj}}{a_{pq}})$ とおくと、 $B = P_1P_2 \cdots P_{p-1}P_{p+1} \cdots P_m A$ である。 $p' \neq p$ の場合、 $P_m(p, p'; -a_{pq})P_m(p', p; \frac{1}{a_{pq}})B$ の第 q 列は $e_{p'}$ である。 $p' = p$ の場合、 $P_m(p, p''; -a_{pq})P_m(p'', p; \frac{1}{a_{pq}})B$ の第 q 列は $e_{p''}$ だから、 $R_m(p'', p)P_m(p, p''; -a_{pq})P_m(p'', p; \frac{1}{a_{pq}})B$ の第 q 列は e_p である。従って $Q_m(p''; -1)R_m(p'', p)P_m(p, p''; -a_{pq})P_m(p'', p; \frac{1}{a_{pq}})B$ の第 q 列も e_p であり、(1) から $Q_m(p''; -1)R_m(p'', p) = P_m(p'', p; -1)P_m(p, p''; 1)P_m(p'', p; -1)$ だから、結果が得られる。

4. $A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 行列とする。 $a_{pq} \neq 0$ ならば (p, q) 成分に関して第 q 列を掃き出す操作は $P_m(i, p; c)$ の形の行列の積で表される行列を左からかけることによって行えることに注意する。

A の第 q 列が $a_{pq}e_p$ の場合、 $p' \neq p$ ならば $P_m(p, p'; -a_{pq})P_m(p', p; \frac{1}{a_{pq}})A$ の第 q 列は \mathbf{R}^m の基本ベクトル $e_{p'}$ になり、 $p \neq m$ ならば $P_m(m, p; 1)P_m(p, m; -1)P_m(p, m; a_{pq})P_m(m, p; \frac{-1}{a_{pq}})A$ の第 q 列は e_p になる。従って、 $a_{pq} \neq 0$ ならば $P_m(i, j; c)$ の形の行列の積で表される行列を左から A にかけることによって $p' \neq p$ または $p' = p \neq m$ ならば、第 q 列が $e_{p'}$ であるような行列にできる。 A が零行列の場合は (1), (2) の主張は明らかだから $A \neq O$ (従って、 $r \geq 1$) の場合を考え、 k ($0 \leq k < r$) に関して帰納的に次のことを仮定する。「 $P_m(i, j; c)$ の形の行列の積で表される行列 P_k と自然数の列 $1 \leq j(1) < j(2) < \cdots < j(k) \leq n$ で、 $P_k A = (a'_{ij})$ とすると、 $1 \leq i \leq k$ ならば、 $a'_{i1} = \cdots = a'_{ij(i)-1} = 0$, $a'_{ij(i)} = 1$, $P_k A$ の第 $j(i)$ 列は e_i になり、 $i > k$ ならば $a'_{i1} = \cdots = a'_{ij(k)} = 0$ が成り立つものがある。」($k=0$ の場合は $P_0 = E_m$, $j(0) = 0$ とする。) A' を $P_k A$ の第 k 行より下の行と、第 $j(k)$ 列より右の列からなる $(m-k) \times (n-j(k))$ 行列とすると、 $\text{rank } P_k A = \text{rank } A = r > k$ だから A' は零行列でない。 A' の零でない最初の列を第 $j(k+1) - j(k)$ 列として $a'_{p, j(k+1)} \neq 0$ とする。 $k+1 < m$ ならば、 $P_m(i, j; c)$ の形の行列の積で表される行列 P' で、 $P' P_k A$ の第 $j(k+1)$ 列が e_{k+1} になるものがあり、 $P_{k+1} = P' P_k$ とおけば、 $P_{k+1} A$ は $k+1$ に対して上の仮定を満たす。 $k+1 = m$ ならば、必然的に $r = m$ であり、 $P_k A$ の第 $j(m)$ 列を $(m, j(m))$ 成分に関して掃き出すことによって、 $P_m(i, m; c)$ の形の行列の積で表される行列 P'' で、 $P'' P_k A$ の第 $j(m)$ 列が $a'_{m, j(m)} e_m$ になるようなものがあり、 $Q_m(m; \frac{1}{a'_{m, j(m)}})P'' P_k A$ は (1) の 3 つの条件を満たす。以上の操作を $k+1 = r$ となるまで繰り返すことにより、 $r < m$ ならば $P_r A$ が、 $r = m$ ならば $Q_m(m; d)P_r A$ が (1) の 3 つの条件を満たすような $P_m(i, j; c)$ の形の行列の積で表される行列 P_r と $d \neq 0$ の存在がわかる。

$|P_n(i, j; c)| = 1$ だから $P_m(i, j; c)$ の形の行列の積で表される行列の行列式の値は 1 である。 $m = n$ のとき、 $|A| = 1$ ならば A の階数は n だから、(2) の結果より $Q_n(n; d)PA$ が (1) の 3 つの条件を満たすような $d \neq 0$ と $P_m(i, j; c)$ の形の行列の積で表される行列 P がある。このとき、 n 個の相異なる自然数 $j(1), j(2), \dots, j(n)$ は $1 \leq j(1) < j(2) < \cdots < j(n) \leq n$ を満たすため $i = 1, 2, \dots, n$ に対して $j(i) = i$ であり、 $Q_n(n; d)PA$ の第 $j(i)$ 列は \mathbf{R}^n の基本ベクトル e_i だから $Q_n(n; d)PA = E_n$ である。従って、 $|Q_n(n; d)PA| = |E_n| = 1$ であり、一方 $|P| = |A| = 1$, $|Q_n(n; d)| = d$ から $|Q_n(n; d)PA| = |Q_n(n; d)||P||A| = d$ となるため、 $d = 1$ である。故に $Q_n(n; d) = E_n$ だから $PA = E_n$ が得られるため $A = P^{-1}$ である。ここで、 $P = P_n(i_k, j_k; c_k)P_n(i_{k-1}, j_{k-1}; c_{k-1}) \cdots P_n(i_1, j_1; c_1)$ とすれ

ば $A = P^{-1} = P_n(i_1, j_1; c_1)^{-1} P_n(i_2, j_2; c_2)^{-1} \cdots P_n(i_k, j_k; c_k)^{-1} = P_n(i_1, j_1; -c_1) P_n(i_2, j_2; -c_2) \cdots P_n(i_k, j_k; -c_k)$ だから, A は $P_n(i, j; c)$ の形の基本行列の積で表されることがわかる.

6. $\text{rank } A = r$ とおく. 教科書の定理 3.3 から m 次基本行列の積で表される X と n 次基本行列の積で表される Y で $XAY = F_{mn}(r)$ となるものがある. $AB = O$ より $F_{mn}(r)Y^{-1}B = XAYY^{-1}B = XAB = XO = O$ である. $Y^{-1}B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ (B_1 は $r \times k$ 行列, B_2 は $(n-r) \times k$ 行列) とおくと, $F_{mn}(r)Y^{-1}B = F_{mn}(r) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix}$ だから $B_1 = O$ である. よって $Y^{-1}B = \begin{pmatrix} O \\ B_2 \end{pmatrix}$ だから, $Y^{-1}B$ は r 行の零である行を含むため, $\text{rank } Y^{-1}B \leq n-r$ である. 教科書の系 3.6 の (2) から, $\text{rank } B = \text{rank } Y^{-1}B \leq n-r = n - \text{rank } A$ となって結果が得られる.

線形数学 I 演習問題 第 8 回 行列式

1. 次の行列式の値を求めよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \\ 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(5) \begin{vmatrix} 5 & -4 & 6 \\ -3 & 9 & -5 \\ -8 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$(6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(7) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & -6 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(8) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 9 & 27 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(9) \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & -5 \\ -5 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$(10) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(11) \begin{vmatrix} 1 & 2a & 3 \\ -2 & 4 & 9 \\ 4 & 8a & 6 \end{vmatrix}$$

$$(12) \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ a & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(13) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 8 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(14) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(15) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(16) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(17) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(18) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(19) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(20) \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 7 \\ 3 & 5 & 9 & 8 \\ 7 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ll}
(21) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} & (22) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
(25) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} & (26) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & -4 \\ -7 & 1 & -8 & 6 \\ 10 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\
(29) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} & (30) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} \\
(33) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{vmatrix} & (34) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\
(37) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} & (38) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & t & 3 \\ t & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
(41) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} & (42) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\
(45) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -c & c-2 \\ -1 & -1 & 1 & -c+2 \\ -2 & c-3 & 2 & 2 \\ c+1 & 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} & (46) \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ -3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \\
& (47) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
(23) \begin{vmatrix} -3 & -2 & 2 & -5 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} & (24) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & -4 & 1 \\ 19 & 6 & 0 & -3 \\ 22 & 7 & -1 & -3 \end{vmatrix} \\
(27) \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 10 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} & (28) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\
(31) \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} & (32) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & -6 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\
(35) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & -5 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} & (36) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\
(39) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2a & 3a \\ -1 & 1 & 2a & -2a \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 4a \end{vmatrix} & (40) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
(43) \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ -5 & -4 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} & (44) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}
\end{array}$$

2. (発展問題) a, b, c を定数とし, A_n を, (i, j) 成分 a_{ij} が $a_{ii} = a$ ($1 \leq i \leq n$), $a_{i, i+1} = b$, $a_{i+1, i} = c$ ($1 \leq i \leq n-1$), $a_{ij} = 0$ ($|i-j| \geq 2$) である n 次正方行列とする. $n = 3, 4, \dots$ に対して $|A_n| = a|A_{n-1}| - bc|A_{n-2}|$ が成り立つことを示せ. また, 以下の場合に $|A_n|$ の値を求めよ.

- (1) $a = b = c = 1$ (2) $a = 0, b = -c \neq 0$ (3) $a = 0, b = c \neq 0$ (3) $a^2 = 4bc$ (4) $a = b^2 + 1, b = c$

第 8 回の演習問題の解答

$$1. (1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \\ 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 15 & 48 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 15 & 48 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 48$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -7 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & -7 \end{vmatrix} = 28$$

$$(3) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -3 & 9 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$(4) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -9 \\ 4 & 7 & -26 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & -9 \\ 7 & -26 \end{vmatrix} = 89$$

$$(5) \begin{vmatrix} 5 & -4 & 6 \\ -3 & 9 & -5 \\ -8 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & 9 & -5 \\ -8 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 7 & 34 & -5 \\ -26 & -38 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 7 & 34 \\ -26 & -38 \end{vmatrix} = 884 - 266 = 618$$

$$(6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

$$(7) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & -6 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & -8 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} = 61$$

$$(8) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 9 & 27 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -36$$

$$(9) \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & -5 \\ -5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(10) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -8 \end{vmatrix} = -9$$

$$(11) \begin{vmatrix} 1 & 2a & 3 \\ -2 & 4 & 9 \\ 4 & 8a & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2a & 3 \\ 0 & 4(a+1) & 15 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -24(a+2)$$

$$(12) \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ a & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & 0 & 0 \\ a & -1 & a-1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & a+1 \\ -1 & a-1 \end{vmatrix} = -2a$$

$$(13) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 8 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & 2 & 4 & 8 \\ 15 & 1 & 2 & 4 \\ 15 & 8 & 1 & 2 \\ 15 & 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 6 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -15 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{vmatrix} =$$

$$(14) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$(15) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$(16) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 15 & -14 & -7 \\ 5 & 17 & -14 & -7 \\ 5 & 21 & -14 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & -14 & -7 \\ 17 & -14 & -7 \\ 21 & -14 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 17 & -14 & -7 \\ 21 & -14 & -8 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -14 & -7 \\ -14 & -8 \end{vmatrix} = -28$$

$$(17) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 11 & 9 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 7 & 13 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 11 & 9 \\ 3 & 7 & 13 \\ 0 & 8 & 11 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 11 & 9 \\ 0 & 40 & 40 \\ 0 & 8 & 11 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 40 & 40 \\ 8 & 11 \end{vmatrix} = 120$$

$$(18) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 1 & 5 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -7(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 231$$

$$(19) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & 3 & -4 \\ 0 & -14 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 3 & -4 \\ -14 & 2 & -6 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 21 \\ 0 & 2 & 29 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 3 & 21 \\ 2 & 29 \end{vmatrix} = 90$$

$$(20) \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 7 \\ 3 & 5 & 9 & 8 \\ 7 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 7 & 7 \\ -2 & 5 & 9 & 8 \\ 5 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 10 & 17 & 11 \\ 0 & 11 & 19 & 12 \\ 0 & -13 & -22 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 17 & 11 \\ 11 & 19 & 12 \\ -13 & -22 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 17 & 11 \\ 1 & 2 & 1 \\ -13 & -22 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 10 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -13 & 4 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 22$$

$$(21) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 6$$

$$(22) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -2(-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$(23) \begin{vmatrix} -3 & -2 & 2 & -5 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 2 & -5 \\ -5 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \\ -9 & -2 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 2(-1)^4 \begin{vmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 7 & 1 & 3 \\ -9 & -2 & -7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 12 & 0 & 5 \\ -19 & 0 & -11 \end{vmatrix} = 2(-1)^3 \begin{vmatrix} 12 & 5 \\ -19 & -11 \end{vmatrix} = 74$$

$$(24) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & -4 & 1 \\ 19 & 6 & 0 & -3 \\ 22 & 7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 10 & 3 & -3 & 1 \\ 10 & 3 & -3 & -3 \\ 13 & 4 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -(-1)^5 \begin{vmatrix} 10 & 3 & -3 \\ 10 & 3 & -3 \\ 13 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 13 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$(25) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ -8 & 1 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & -4 & 0 \\ -7 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -8 & 1 & -5 \\ -1 & 4 & -4 \\ -7 & 3 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 31 & 4 & 16 \\ 17 & 3 & 14 \end{vmatrix} = -(-1)^3 \begin{vmatrix} 31 & 16 \\ 17 & 14 \end{vmatrix} = 162$$

$$(26) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & -4 \\ -7 & 1 & -8 & 6 \\ 10 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 43 & 14 & 29 & 0 \\ -67 & -17 & -44 & 0 \\ 10 & 3 & 6 & 1 \\ -28 & -4 & -14 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 43 & 14 & 29 \\ -67 & -17 & -44 \\ -28 & -4 & -14 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 43 & 14 & 1 \\ -67 & -17 & -10 \\ -28 & -4 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 43 & 14 & 1 \\ -67 & -17 & -10 \\ 230 & 80 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)^4 \begin{vmatrix} 363 & 123 \\ 230 & 80 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -6 & 123 \\ -10 & 80 \end{vmatrix} = -750$$

$$(27) \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 10 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & 3 & 5 & 17 \\ 10 & -2 & -3 & -7 \end{vmatrix} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & -5 & 16 \\ -12 & 3 & 17 \\ 10 & -2 & -7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -12 & 63 & -175 \\ 10 & -52 & 153 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 63 & -175 \\ -52 & 153 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -22 \\ -52 & 153 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 0 \\ -52 & 49 \end{vmatrix} = 539$$

$$(28) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -11 & -1 & -14 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -11 & -5 & -6 \\ 0 & 11 & 9 & 17 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -11 & -1 & -14 \\ -11 & -5 & -6 \\ 11 & 9 & 17 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -14 \\ 1 & -5 & -6 \\ -1 & 9 & 17 \end{vmatrix} =$$

$$11 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -14 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -836$$

$$(29) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 11 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} = -12$$

$$(30) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

$$(31) \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -3 & -2 \\ -4 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 8 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = -25$$

$$(32) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & -6 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -6 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & -6 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$(33) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & -11 & -22 & -43 \\ 11 & -6 & -18 & -38 \\ 10 & -11 & -22 & -33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11 & -22 & -43 \\ -6 & -18 & -38 \\ -11 & -22 & -33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11 & -22 & -43 \\ -6 & -18 & -38 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{3+3}10 \begin{vmatrix} -11 & -22 \\ -6 & -18 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} -11 & 0 \\ -6 & -6 \end{vmatrix} = 660$$

$$(34) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 7 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-1)^5 \begin{vmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -5 \\ 7 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -8 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -8(-1)^5 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 152$$

$$(35) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & -5 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 5 \\ 8 & 15 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 15 & -2 & 3 \\ 4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -27 & 0 & -1 \\ 15 & -2 & 3 \\ -26 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 2(-1)^4 \begin{vmatrix} -27 & -1 \\ -26 & -6 \end{vmatrix} = 272$$

$$(36) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -3(-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 20 & 5 & 15 \\ 20 & 6 & 16 \end{vmatrix} = -3(-1)^3 \begin{vmatrix} 20 & 15 \\ 20 & 16 \end{vmatrix} = 60$$

$$(37) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ -6 & 0 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -(-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 \\ -7 & 0 & -8 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3(-1)^3 \begin{vmatrix} -7 & -8 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 66$$

$$(38) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & t & 3 \\ t & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & t-1 & 3 \\ t & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}(t-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ t & -2 & 3 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{2+2}(t-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ t & 1 \end{vmatrix} = -(t-1)^2$$

$$(39) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2a & 3a \\ -1 & 1 & 2a & -2a \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 4a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2a-2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 2a-2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & a-1 \\ 2 & 2a-2 & -a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 3 & a-1 \\ 2a-2 & -a \end{vmatrix} = -2a^2 + a - 2$$

$$(40) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3(-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-3)(-2)(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 18$$

$$(41) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & -8 \\ 0 & 7 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & -7 \\ 0 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 5 & -7 \\ 7 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$2 \begin{vmatrix} -3 & 12 & -7 \\ 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6(-1)^6 \begin{vmatrix} -3 & 12 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -540$$

$$(42) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -8 \\ 6 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -12 \\ 3 & 0 & 2 & -8 \\ 6 & 2 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -12 \\ 3 & 2 & -8 \\ 6 & 5 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 28 \\ 6 & -13 & 66 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -7 & 28 \\ -13 & 66 \end{vmatrix} = 98$$

$$(43) \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ -5 & -4 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -6 & 12 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 7 & 1 \\ -5 & -4 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & -6 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 11 & 34 & -58 \\ 0 & -10 & -28 & 62 \\ -1 & -3 & -6 & 12 \end{vmatrix} = -(-1)^5 \begin{vmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 11 & 34 & -58 \\ -10 & -28 & 62 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ -10 & -28 & 62 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -29 & -23 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & 32 & 102 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -29 & -23 \\ 32 & 102 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -29 & -23 \\ 32 & 102 \end{vmatrix} = 2222$$

$$(44) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & a & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -a + 1$$

$$\begin{aligned}
(45) \quad & \begin{vmatrix} 1 & 1 & -c & c-2 \\ -1 & -1 & 1 & -c+2 \\ -2 & c-3 & 2 & 2 \\ c+1 & 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -c & c-2 \\ 0 & 0 & 1-c & 0 \\ -2 & c-3 & 2 & 2 \\ c+1 & 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^5(1-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & c-2 \\ -2 & c-3 & 2 \\ c+1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \\
(c-1) \quad & \begin{vmatrix} 1 & 1 & c-2 \\ 0 & c-1 & 2c-2 \\ c+1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (c-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & c-2 \\ 0 & 1 & 2 \\ c+1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (c-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & c-4 \\ 0 & 1 & 0 \\ c+1 & 2 & -6 \end{vmatrix} = (-1)^4(c-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & c-4 \\ c+1 & -6 \end{vmatrix} \\
= & -(c-1)^3(c-2) \\
(46) \quad & \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ -3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 5 & 4 \\ -3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & 11 & 4 \\ 8 & 0 & 3 & -14 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 5 & 4 \\ -4 & 1 & 11 & 4 \\ 8 & 3 & -14 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -14 & -8 \\ -1 & -1 & 5 & 4 \\ -5 & 0 & 16 & 8 \\ 5 & 0 & 1 & 13 \end{vmatrix} = \\
- & (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & -14 & -8 \\ -5 & 16 & 8 \\ 5 & 1 & 13 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & -14 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 13 \end{vmatrix} = -2(-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = -210 \\
(47) \quad & \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \\
(-1) \quad & \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2
\end{aligned}$$

2. $|A_n|$ を第 1 列について展開すれば

$$|A_n| = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & & 0 \\ 0 & c & & & \\ \vdots & & & A_{n-2} & \\ 0 & 0 & & & \end{vmatrix} = a|A_{n-1}| + (-1)^3 c \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ a & & & \\ 0 & & A_{n-2} & \\ & & & \end{vmatrix} = a|A_{n-1}| - bc|A_{n-2}|$$

が得られる。従って $|A_n| - a|A_{n-1}| + bc|A_{n-2}| = 0$ だから $x^2 - ax + bc = 0$ の解を α, β とおけば $bc = \alpha\beta, a = \alpha + \beta$ より $|A_n| - (\alpha + \beta)|A_{n-1}| + \alpha\beta|A_{n-2}| = 0$ である。この等式の左辺の項を移項して、次の等式を得る。

$$|A_n| - \alpha|A_{n-1}| = \beta(|A_{n-1}| - \alpha|A_{n-2}|) \cdots (i) \quad |A_n| - \beta|A_{n-1}| = \alpha(|A_{n-1}| - \beta|A_{n-2}|) \cdots (ii)$$

$|A_1| = a, |A_2| = a^2 - bc$ だから、(i) より、数列 $\{|A_{n+1}| - \alpha|A_n|\}$ は初項 $a^2 - bc - \alpha a$ 、公比 β の等比数列であり、(ii) より、数列 $\{|A_{n+1}| - \beta|A_n|\}$ は初項 $a^2 - bc - \beta a$ 、公比 α の等比数列である。従って、次の等式が成り立つ。

$$|A_{n+1}| - \alpha|A_n| = \beta^{n-1}(a^2 - bc - \alpha a) \cdots (iii) \quad |A_{n+1}| - \beta|A_n| = \alpha^{n-1}(a^2 - bc - \beta a) \cdots (iv)$$

$a^2 \neq 4bc$ の場合、 $\alpha \neq \beta$ だから (iii) から (iv) を辺々引いて、両辺を $\beta - \alpha$ で割れば、 $|A_n|$ は次の等式で与えられる。

$$|A_n| = \frac{\beta^{n-1}(a^2 - bc - \alpha a) - \alpha^{n-1}(a^2 - bc - \beta a)}{\beta - \alpha} \cdots (v)$$

$$(1) \alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \text{ だから } (v) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} |A_n| &= \frac{1}{\sqrt{3}i} (\alpha\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}i} (\beta^{n-2} - \alpha^{n-2}) = \frac{1}{\sqrt{3}i} \left(\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{n-2} - \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{n-2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}i} \left(\left(\cos \frac{(n-2)\pi}{3} - i \sin \frac{(n-2)\pi}{3} \right) - \left(\cos \frac{(n-2)\pi}{3} + i \sin \frac{(n-2)\pi}{3} \right) \right) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{(n-2)\pi}{3} \end{aligned}$$

だから, n を 6 で割った余りが 0, 1, 2, 3, 4, 5 のとき $|A_n|$ の値は, それぞれ 1, 1, 0, -1, -1, 0 である.

$$(2) \alpha = -b, \beta = b \text{ だから } (v) \text{ より } |A_n| = \frac{b^n + (-b)^n}{2}. \text{ 故に } n \text{ が奇数ならば } |A_n| = 0, n \text{ が偶数ならば } |A_n| = b^n.$$

(3) $\alpha = bi, \beta = -bi$ だから (v) より $|A_n| = \frac{b}{2i} ((-bi)^{n-1} - (bi)^{n-1}) = \frac{b^n i^{n-2}}{2} ((-1)^{n-1} - 1)$. 故に n が奇数ならば $|A_n| = 0$, n が偶数ならば $|A_n| = -i^{n-2}b^n = (-1)^{\frac{n}{2}}b^n$ である.

(4) $\alpha = \beta = \frac{a}{2}$ だから (iii) より $|A_{n+1}| - \frac{a}{2}|A_n| = \left(\frac{a}{2}\right)^{n+1}$ である. $a \neq 0$ のとき, この両辺を $\left(\frac{a}{2}\right)^{n+1}$ で割れば $\left(\frac{a}{2}\right)^{-n-1}|A_{n+1}| - \left(\frac{a}{2}\right)^{-n}|A_n| = 1$ となるため, 数列 $\left\{ \left(\frac{a}{2}\right)^{-n}|A_n| \right\}$ は初項 2, 公差 1 の等差数列である. 従って $\left(\frac{a}{2}\right)^{-n}|A_n| = n+1$ となるため, $|A_n| = (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n$ である.

(5) $\alpha = 1, \beta = b^2$ だから, $b \neq \pm 1$ ならば $\alpha \neq \beta$ である. このとき (v) より $|A_n| = \frac{b^{2n+2} - 1}{b^2 - 1}$ であり, $b = \pm 1$ ならば $a = 2$ だから $a^2 = 4b^2$ となるため, (3) より $|A_n| = n+1$ である.

線形数学 I 演習問題 第 9 回 行列式の計算法

1. 次の行列式の値を求めよ. ただし, (25) は n 次正方行列の行列式である.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 1 & b^2 & (c+a)^2 \\ 1 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} \quad (4) \begin{vmatrix} a & bc & a^3 \\ b & ca & b^3 \\ c & ab & c^3 \end{vmatrix} \quad (5) \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} \quad (6) \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$(7) \begin{vmatrix} 1 & a^2 - bc & a^3 \\ 1 & b^2 - ca & b^3 \\ 1 & c^2 - ab & c^3 \end{vmatrix} \quad (8) \begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} \quad (9) \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

$$(10) \begin{vmatrix} a & b-c & c-b \\ a-c & b & c-a \\ a-b & b-a & c \end{vmatrix} \quad (11) \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} \quad (12) \begin{vmatrix} a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ c^2-ab & a^2-bc & b^2-ca \\ b^2-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$$

$$(13) \begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ac \\ ab & (a+c)^2 & bc \\ ac & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} \quad (14) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & abc \\ 1 & a & a^2 & bc \\ 1 & b & b^2 & ac \\ 1 & c & c^2 & ab \end{vmatrix} \quad (15) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ a & b & -c & -d \\ b & a & -d & -c \end{vmatrix} \quad (16) \begin{vmatrix} a & b & 1 & 0 \\ b & a & b & 1 \\ 1 & b & a & b \\ 0 & 1 & b & a \end{vmatrix}$$

$$(17) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -a & 1 & -2a & 1 \\ b^2 & 0 & a^2 & -2a \\ -ab^2 & b^2 & 0 & a^2 \end{vmatrix} \quad (18) \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (19) \begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} \quad (20) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$(21) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix} \quad (22) \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix} \quad (23) \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} \quad (24) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & t & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$$

$$(25) \begin{vmatrix} a & b & 1 & 0 & 0 \\ b & a & b & 1 & 0 \\ 1 & b & a & b & 1 \\ 0 & 1 & b & a & b \\ 0 & 0 & 1 & b & a \end{vmatrix} \quad (26) \begin{vmatrix} 0 & a & b & c & 1 \\ a & 0 & a+b+p & a+c+q & 1 \\ b & a+b+r & 0 & b+c+s & 1 \\ c & a+c+t & b+c+u & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (27) \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1 & x_0 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1 & x_2 & x_0 & & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_0 & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_0 \end{vmatrix}$$

$$(28) \begin{vmatrix} a & & & & b \\ b & a & & & \\ & b & a & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a \\ 0 & & & & b & a \\ & & & & b & a \end{vmatrix} \quad (29) \begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ & x & -1 & & 0 \\ & & x & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & -1 \\ & & & & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} \quad (30) \begin{vmatrix} 1 & -x & & & \\ & 1 & -x & & 0 \\ & & 1 & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & -x \\ & & & & 1 & -x \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{vmatrix}$$

$$(31) \begin{vmatrix} \sin 2t & 2 \cos 2t & -4 \sin 2t \\ \cos 2t & -2 \sin 2t & -4 \cos 2t \\ -\sin t & -\cos t & \sin t \end{vmatrix}$$

2. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & x & -1 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & -a^2 - 1 & x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y & 1 & 0 & 0 \\ 1 & y & 1 & 0 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -z \\ 1 & 0 & -13 & 0 & 37 \end{vmatrix}$ の値がそれぞれ 0, 1, 1 になるような

x, y, z の値をすべて求めよ.

3. $A = (a_{ij})$ を $a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i \neq j \end{cases}$ である n 次正方行列とするととき, A の行列式の値を求めよ.

4. (1) a, b, c, t を定数とし, $\alpha = a + b + c, \beta = abc$ とおくととき, 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & 1 \\ a & 0 & a+b+t & a+c+t & 1 \\ b & a+b+t & 0 & b+c+t & 1 \\ c & a+c+t & b+c+t & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ の

値を α, β, t を用いて表わせ.

(2) $t = 0, 1$ のとき, 上の行列式の値がそれぞれ 8, 4 であるとする. このとき, α, β の値を求めよ.

5. (1) 実数を成分とする n 次正方行列 A, B は関係式 $A^p B^q A^r B^{s-q} = a B^j A^k B^{s-j} A^m$ を満たすとする. B が正則行列で, $p+r \neq k+m$ のとき, A の行列式がとりうる値をすべて求めよ.

(2) 実数を成分とする n 次正則行列 A, B は関係式 $AB^p A^q = a B A^r B^s, BAB^{-1} = b A^k B$ を満たすとする. $k+q-r \neq (k-1)(p-s)$ のとき, A, B の行列式がとりうる値をすべて求めよ.

(3) n 次正方行列 A, B は関係式 $ABA^p = a B A^q B^q$ を満たすとする. $q \neq p+1, |B| = b \neq 0$ で A が正則行列のとき, A の行列式がとりうる値をすべて求めよ.

(4) A, B はともに 4 次正則行列で, 関係式 $ABA^2 = 2BA^2B^2$ と $AB^{-1}A^2 = 3BA^2B$ が成り立つとき B の行列式の値を求めよ.

(5) A, B はともに n 次正則行列で, $A^2 B^t A = B A^t A^t B$ が成り立ち, B の行列式の値が -2 であるとき A の行列式の値を求めよ.

(6) A, B はともに n 次正則行列で, 関係式 ${}^t ABAB = {}^t BA^2 BA$ が成り立つとき A の行列式の値を求めよ.

6. \mathbf{v}_j ($j = 1, 2, 3$) を \mathbf{R}^3 の 3 つのベクトルとし, \mathbf{v}_j を第 j 列とする 3 次正方行列を P とし, P が逆行列をもつとする. 1 次写像 $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ は $f(\mathbf{v}_1) = 2\mathbf{v}_1, f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, f(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3$ を満たすとする.

(1) f を表わす行列を A とするとき, $AP = PQ$ を満たす行列 Q を求めよ. (2) A の行列式の値を求めよ.

7. λ_i を (i, i) 成分とする n 次対角行列の余因子行列は対角行列であることを示し, その対角成分を求めよ.

8. A を n 次正方行列とするととき A の余因子行列 \tilde{A} の行列式の値は $|A|^{n-1}$ であることを示せ.

9. (発展問題) k を整数とする. 正の整数を成分にもつ n 次正方行列で, 行列式の値が k である行列の例を挙げよ.

10. (発展問題) A を n 次正方行列とする. $\text{rank } A = n-1$ ならば $\text{rank } \tilde{A} \leq 1$ であることを示せ.

11. (発展問題) A, B を n 次正方行列とする.

(1) A, B がともに正則ならば $\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}$ が成り立つことを示せ.

(2) 0 に収束する数列 $\{\alpha_k\}_{k=1,2,\dots}$ で, すべての k に対して $A + \alpha_k E_n$ が正則になるものが存在することを示せ.

(3) A, B の少なくとも一方が正則でない場合も $\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}$ が成り立つことを示せ.

(4) $\text{rank } A = n-1$ ならば $\text{rank } \tilde{A} = 1$ であり, $\text{rank } A \leq n-2$ ならば $\tilde{A} = O$ であることを示せ.

(5) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{R}^n$ に対して $\det(A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2, \dots, A\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) = \det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \tilde{A}\mathbf{x}_n)$ が成り立つことを示せ. ただし, $\det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$ は \mathbf{x}_j を第 j 列とする n 次正方行列の行列式を表す.

第9回の演習問題の解答

$$\begin{aligned}
 1. (1) \quad & \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^3-a^3 \\ c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a^2+ab+b^2 \\ 1 & a^2+ac+c^2 \end{vmatrix} = \\
 & (b-a)(c-a)(c^2-b^2+a(c-b)) = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c) \\
 (2) \quad & \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 0 & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c^2-a^2 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ c^2-a^2 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a+b & a^2+ab+b^2 \\ a+c & a^2+ac+c^2 \end{vmatrix} = \\
 & (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a+b & b^2 \\ a+c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(a(c^2-b^2)+bc(c-b)) = (b-a)(c-a)(c-b)(ab+bc+ca) \\
 (3) \quad & \begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 1 & b^2 & (c+a)^2 \\ 1 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 0 & b^2-a^2 & (c+a)^2-(b+c)^2 \\ 0 & c^2-a^2 & (a+b)^2-(b+c)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2-a^2 & (a+b+2c)(a-b) \\ c^2-a^2 & (a+2b+c)(a-c) \end{vmatrix} = \\
 & (a-b)(c-a) \begin{vmatrix} -a-b & a+b+2c \\ c+a & -a-2b-c \end{vmatrix} = (a-b)(c-a) \begin{vmatrix} -a-b & 2c \\ c+a & -2b \end{vmatrix} = 2(a-b)(c-a)(b^2-c^2+ab-ac) = \\
 & 2(a-b)(c-a)(b-c)(a+b+c) \\
 (4) \quad & \begin{vmatrix} a & bc & a^3 \\ b & ca & b^3 \\ c & ab & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & bc & a^3 \\ b-a & ca-bc & b^3-a^3 \\ c-a & ab-bc & c^3-a^3 \end{vmatrix} = (a-b)(c-a) \begin{vmatrix} a & bc & a^3 \\ -1 & c & -a^2-ab-b^2 \\ 1 & -b & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix} = \\
 & (a-b)(c-a) \begin{vmatrix} 0 & ab+bc & -ac^2-a^2c \\ 0 & c-b & c^2+ca-ab-b^2 \\ 1 & -c & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix} = (-1)^4(a-b)(c-a) \begin{vmatrix} b(c+a) & -ac(c+a) \\ c-b & (c-b)(a+b+c) \end{vmatrix} = \\
 & (a-b)(c-a)(b-c)(c+a) \begin{vmatrix} b & -ac \\ -1 & -a-b-c \end{vmatrix} = -(a-b)(c-a)(b-c)(c+a)(b^2+(a+c)b+ac) = \\
 & -(a-b)(c-a)(b-c)(a+b)(b+c)(c+a) \\
 (5) \quad & \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{vmatrix} = a(a^2-1) \begin{vmatrix} a^2 & a \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2(a^2-1)^2 \\
 (6) \quad & \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix} = \\
 & (a+b+c) \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-b & a-c \end{vmatrix} = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\
 (7) \quad & \begin{vmatrix} 1 & a^2-bc & a^3 \\ 1 & b^2-ca & b^3 \\ 1 & c^2-ab & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2-bc & a^3 \\ 0 & b^2-a^2+bc-ca & b^3-a^3 \\ 0 & c^2-a^2+bc-ab & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b-a)(a+b+c) & (b-a)(a^2+ab+b^2) \\ (c-a)(a+b+c) & (c-a)(a^2+ca+c^2) \end{vmatrix} = \\
 & (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a+b+c & a^2+ab+b^2 \\ a+b+c & a^2+ca+c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a^2+ab+b^2 \\ 1 & a^2+ca+c^2 \end{vmatrix} = \\
 & (b-a)(c-a)(a+b+c)(ca+c^2-ab-b^2) = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)^2 \\
 (8) \quad & \begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & a+b & -a-b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & 0 & 0 \\ -c & a+b+2c & -a-c \\ -b & -a+b & a+c \end{vmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$(a+b) \begin{vmatrix} a+b+2c & -a-c \\ -a+b & a+c \end{vmatrix} = (a+b) \begin{vmatrix} b+c & -a-c \\ b+c & a+c \end{vmatrix} = (a+b)(b+c) \begin{vmatrix} 1 & -a-c \\ 1 & a+c \end{vmatrix} = 2(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$(9) \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = (b^2+c^2) \begin{vmatrix} c^2+a^2 & bc \\ bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} - ab \begin{vmatrix} ab & bc \\ ca & a^2+b^2 \end{vmatrix} + ca \begin{vmatrix} ab & c^2+a^2 \\ ca & bc \end{vmatrix} =$$

$$(b^2+c^2)(a^4+a^2b^2+a^2c^2) - ab(a^3b+ab^3-abc^2) + ca(ab^2c-ac^3-a^3c) = 4a^2b^2c^2$$

$$(10) \begin{vmatrix} a & b-c & c-b \\ a-c & b & c-a \\ a-b & b-a & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+b-c & c-b \\ a-c & a+b-c & c-a \\ a-b & 0 & c \end{vmatrix} = (a+b-c) \begin{vmatrix} a & 1 & c-b \\ a-c & 1 & c-a \\ a-b & 0 & c \end{vmatrix} = (a+b-c) \begin{vmatrix} c & 0 & a-b \\ a-c & 1 & c-a \\ a-b & 0 & c \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^4(a+b-c) \begin{vmatrix} c & a-b \\ a-b & c \end{vmatrix} = (a+b-c)(c^2-(a-b)^2) = (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$

$$(11) \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & b+c+2a & b \\ 2(a+b+c) & a & c+a+2b \end{vmatrix} =$$

$$2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$$

$$(12) \begin{vmatrix} a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ c^2-ab & a^2-bc & b^2-ca \\ b^2-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca & b^2-ca & c^2-ab \\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca & a^2-bc & b^2-ca \\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix} =$$

$$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \begin{vmatrix} 1 & b^2-ca & c^2-ab \\ 1 & a^2-bc & b^2-ca \\ 1 & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix} =$$

$$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \begin{vmatrix} 1 & b^2-ca & c^2-ab \\ 0 & a^2-b^2-bc+ca & b^2-c^2-ca+ab \\ 0 & c^2-b^2-ab+ca & a^2-c^2+ab-bc \end{vmatrix} =$$

$$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \begin{vmatrix} (a-b)(a+b+c) & (b-c)(a+b+c) \\ (c-b)(a+b+c) & (a-c)(a+b+c) \end{vmatrix} =$$

$$(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-b & a-c \end{vmatrix} = (a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^2$$

$$(13) \begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ac \\ ab & (a+c)^2 & bc \\ ac & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b+c)^2+ab+ac & ab & ac \\ ab+(a+c)^2+bc & (a+c)^2 & bc \\ ac+bc+(a+b)^2 & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} (b+c)(a+b+c) & ab & ac \\ (a+c)(a+b+c) & (a+c)^2 & bc \\ (a+b)(a+b+c) & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} b+c & ab & ac \\ a+c & (a+c)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} =$$

$$(a+b+c) \begin{vmatrix} 2a+2b+2c & ab+(a+c)^2+bc & ac+bc+(a+b)^2 \\ a+c & (a+c)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} =$$

$$(a+b+c) \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & (a+c)(a+b+c) & (a+b)(a+b+c) \\ a+c & (a+c)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 2 & a+c & a+b \\ a+c & (a+c)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} =$$

$$(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 2 & a+c & a+b \\ 0 & \frac{1}{2}(a+c)^2 & -\frac{1}{2}(a^2+ab+ac-bc) \\ 0 & -\frac{1}{2}(a^2+ab+ac-bc) & \frac{1}{2}(a+b)^2 \end{vmatrix} =$$

$$2(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(a+c)^2 & -\frac{1}{2}(a^2+ab+ac-bc) \\ -\frac{1}{2}(a^2+ab+ac-bc) & \frac{1}{2}(a+b)^2 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}(a+b+c)^2 ((a+b)^2(a+c)^2 - (a^2+ab+ac-bc)^2) = 2abc(a+b+c)^3$$

$$(14) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & abc \\ 1 & a & a^2 & bc \\ 1 & b & b^2 & ac \\ 1 & c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & abc \\ 0 & a-1 & a^2-1 & bc-abc \\ 0 & b-1 & b^2-1 & ac-abc \\ 0 & c-1 & c^2-1 & ab-abc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & a^2-1 & bc-abc \\ b-1 & b^2-1 & ac-abc \\ c-1 & c^2-1 & ab-abc \end{vmatrix} =$$

$$(a-1)(b-1)(c-1) \begin{vmatrix} 1 & a+1 & -bc \\ 1 & b+1 & -ac \\ 1 & c+1 & -ab \end{vmatrix} = (a-1)(b-1)(c-1) \begin{vmatrix} 1 & a+1 & -bc \\ 0 & b-a & bc-ac \\ 0 & c-a & bc-ab \end{vmatrix} = (a-1)(b-1)(c-1) \begin{vmatrix} b-a & bc-ac \\ c-a & bc-ab \end{vmatrix} =$$

$$(a-1)(b-1)(c-1)(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & b \end{vmatrix} = (a-1)(b-1)(c-1)(b-a)(c-a)(b-c)$$

$$(15) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ a & b & -c & -d \\ b & a & -d & -c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ 0 & 0 & -2c & -2d \\ b & a & -d & -c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ 0 & 0 & -2c & -2d \\ 0 & 0 & -2d & -2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2c & -2d \\ -2d & -2c \end{vmatrix} =$$

$$4(a-b)(a+b)(c-d)(c+d)$$

$$(16) \begin{vmatrix} a & b & 1 & 0 \\ b & a & b & 1 \\ 1 & b & a & b \\ 0 & 1 & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b-ab & 1-a^2 & -ab \\ 0 & a-b^2 & b-ab & 1-b^2 \\ 1 & b & a & b \\ 0 & 1 & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-ab & 1-a^2 & -ab \\ a-b^2 & b-ab & 1-b^2 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} b-ab & ab^2-a^2-b^2+1 & a^2b-2ab \\ a-b^2 & b^3-2ab+b & ab^2-a^2-b^2+1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ab^2-a^2-b^2+1 & a^2b-2ab \\ b^3-2ab+b & ab^2-a^2-b^2+1 \end{vmatrix} =$$

$$b^4 - (3a^2 - 4a + 2)b^2 + (a^2 - 1)^2 = b^4 - 2(a^2 - 1)b^2 + (a^2 - 1)^2 - (a^2 - 4a + 4)b^2 = (b^2 - a^2 + 1)^2 - ((a-2)b)^2 =$$

$$(b^2 - (a-2)b - a^2 + 1)(b^2 + (a-2)b - a^2 + 1)$$

$$(17) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -a & 1 & -2a & 1 \\ b^2 & 0 & a^2 & -2a \\ -ab^2 & b^2 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & -a & 1 \\ b^2 & 0 & a^2-b^2 & -2a \\ -ab^2 & b^2 & ab^2 & a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ 0 & a^2-b^2 & -2a \\ b^2 & ab^2 & a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ 0 & a^2-b^2 & -2a \\ 0 & 2ab^2 & a^2-b^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a^2-b^2 & -2a \\ 2ab^2 & a^2-b^2 \end{vmatrix} = (a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2 = (a^2+b^2)^2$$

$$(18) \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & -a^2 & c^2-a^2 & 1 \\ b^2 & c^2-b^2 & -b^2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & 1 \\ -a^2 & c^2-a^2 & 1 \\ c^2-b^2 & -b^2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & 1 \\ -2a^2 & c^2-a^2-b^2 & 0 \\ c^2-a^2-b^2 & -2b^2 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)^4 \begin{vmatrix} -2a^2 & c^2-a^2-b^2 \\ c^2-a^2-b^2 & -2b^2 \end{vmatrix} = (a^2+b^2-c^2)^2 - 4a^2b^2 =$$

$$(a^2+b^2+2ab-c^2)(a^2+b^2-2ab-c^2) = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$$

(19) 第2列と第3列を第4列に加えて, 第4列から第1列を $a+b+c+d$ したものを引けば,

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & a+b+c+d \\ 1 & c & d & a+b+c+d \\ 1 & d & a & a+b+c+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 1 & b & c & 0 \\ 1 & c & d & 0 \\ 1 & d & a & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(20) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ a+b+c+d & a & d & c \\ a+b+c+d & d & a & b \\ a+b+c+d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & d & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & b & a \end{vmatrix} =$$

$$(a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & a-b & d-c & c-d \\ 0 & d-b & a-c & b-d \\ 0 & c-b & b-c & a-d \end{vmatrix} = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} a-b & d-c & c-d \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & b-c & a-d \end{vmatrix} =$$

$$(a+b+c+d) \begin{vmatrix} a-b+c-d & d-c & c-d \\ 0 & a-c & b-d \\ a-b+c-d & b-c & a-d \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b+c-d) \begin{vmatrix} 1 & d-c & c-d \\ 0 & a-c & b-d \\ 1 & b-c & a-d \end{vmatrix} =$$

$$(a+b+c+d)(a-b+c-d) \begin{vmatrix} 1 & d-c & c-d \\ 0 & a-c & b-d \\ 0 & b-d & a-c \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b+c-d) \begin{vmatrix} a-c & b-d \\ b-d & a-c \end{vmatrix} =$$

$$(a+b+c+d)(a-b+c-d)((a-c)^2 - (b-d)^2) = (a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)$$

$$(21) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ a+b+c+d & a & b & c \\ a+b+c+d & d & a & b \\ a+b+c+d & c & d & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & b & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & d & a \end{vmatrix} =$$

$$(a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & a-b & b-c & c-d \\ 0 & d-b & a-c & b-d \\ 0 & c-b & d-c & a-d \end{vmatrix} = (a+b+c+d) \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-d \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & d-c & a-d \end{vmatrix} =$$

$$(a+b+c+d) \begin{vmatrix} a-b+c-d & b-c & c-d \\ 0 & a-c & b-d \\ a-b+c-d & d-c & a-d \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b+c-d) \begin{vmatrix} 1 & b-c & c-d \\ 0 & a-c & b-d \\ 1 & d-c & a-d \end{vmatrix} =$$

$$(a+b+c+d)(a-b+c-d) \begin{vmatrix} 1 & b-c & c-d \\ 0 & a-c & b-d \\ 0 & d-b & a-c \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b+c-d) \begin{vmatrix} a-c & b-d \\ d-b & a-c \end{vmatrix} =$$

$$(a+b+c+d)(a-b+c-d)((a-c)^2 + (b-d)^2)$$

$$(22) A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \text{ とおけば } {}^tAA = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)E_4 \text{ が成り立つ. この両辺の行列式を考えれば}$$

$|{}^tAA| = |{}^tA||A| = |A|^2$, $|(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)E_4| = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$ だから $|A|^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$ となるため $|A| = \pm(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ である. $A = (a_{ij})$ の行列式の定義

$$|A| = \sum_{[i_1, i_2, i_3, i_4] \text{ は } 1, 2, 3, 4 \text{ の順列}} (-1)^{[i_1, i_2, i_3, i_4] \text{ の反転数}} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} a_{i_4 4}$$

の右辺で、 a^4 の項が現れるのは $[i_1, i_2, i_3, i_4] = [1, 2, 3, 4]$ の場合のみだから、 $|A|$ を a, b, c, d の多項式とみれば、 $|A|$ の a^4 の係数は $(-1)^{[1,2,3,4] \text{ の反転数}} = (-1)^0 = 1$ である。一方、 $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ の a^4 の係数も 1 だから $|A| = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ であることがわかる。

$$\text{この方法と同じやり方で、} \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \text{ が示される.}$$

$$(23) \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & c \\ -d & 0 & f \\ -e & -f & 0 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ -e & -f & 0 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ -d & 0 & f \end{vmatrix} = a(cdf - bef + af^2) -$$

$$b(-be^2 + aef + cde) + c(adf - bde + cd^2) = af(af - be + cd) - be(af - be + cd) + cd(af - be + cd) = (af - be + cd)^2$$

$$(24) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & t & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2-t & 1 & 1 & 1 \\ a-b(t-1) & b & c & d \\ a^2-b^2(t-1) & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 2-t & 1 & 1 \\ a-b(t-1) & c & d \\ a^2-b^2(t-1) & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b(t-1)+d(t-2) & c-d & d \\ a^2-b^2(t-1)+d^2 & c^2-d^2 & d^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a-b(t-1)+d(t-2) & c-d \\ a^2-b^2(t-1)+d^2(t-2) & c^2-d^2 \end{vmatrix} =$$

$$-(c-d) \begin{vmatrix} a-b(t-1)+d(t-2) & 1 \\ a^2-b^2(t-1)+d^2(t-2) & c+d \end{vmatrix} = -(c-d) \begin{vmatrix} a-b(t-1)+d(t-2) & 1 \\ a(a-d)-b(b-d)(t-1) & c \end{vmatrix} =$$

$$(c-d)((a-c)(a-d) + (b-c)(b-d)(1-t))$$

$$(25) \begin{vmatrix} a & b & 1 & 0 & 0 \\ b & a & b & 1 & 0 \\ 1 & b & a & b & 1 \\ 0 & 1 & b & a & b \\ 0 & 0 & 1 & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b(1-a) & 1-a^2 & -ab & -a \\ 0 & a-b^2 & b(1-a) & 1-b^2 & -b \\ 1 & b & a & b & 1 \\ 0 & 1 & b & a & b \\ 0 & 0 & 1 & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b(1-a) & 1-a^2 & -ab & -a \\ a-b^2 & b(1-a) & 1-b^2 & -b \\ 1 & b & a & b \\ 0 & 1 & b & a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & (a-1)(b^2-a-1) & ab(a-2) & b^2(a-1)-a \\ 0 & b(b^2-2a+1) & (a-1)(b^2-a-1) & b(b^2-a-1) \\ 1 & b & a & b \\ 0 & 1 & b & a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} (a-1)(b^2-a-1) & ab(a-2) & b^2(a-1)-a \\ b(b^2-2a+1) & (a-1)(b^2-a-1) & b(b^2-a-1) \\ 1 & b & a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} (a-1)(b^2-a-1) & b((1-a)b^2+2a^2-2a-1) & -(1-a)^2b^2+a^3-2a \\ b(b^2-2a+1) & -b^4+(3a-2)b^2-a^2+1 & b((1-a)b^2+2a^2-2a-1) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} b((1-a)b^2+2a^2-2a-1) & -(1-a)^2b^2+a^3-2a \\ -b^4+(3a-2)b^2-a^2+1 & b((1-a)b^2+2a^2-2a-1) \end{vmatrix} =$$

$$(3a-4)b^4 + (-4a^3+6a^2-2a+2)b^2 + a(a-1)(a+1)(a^2-2) = ((3a-4)b^2 - (a+1)(a^2-2))(b^2-a(a-1))$$

$$(26) \begin{vmatrix} 0 & a & b & c & 1 \\ a & 0 & a+b+p & a+c+q & 1 \\ b & a+b+r & 0 & b+c+s & 1 \\ c & a+c+t & b+c+u & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c & 1 \\ a & -a & a+p & a+q & 0 \\ b & b+r & -b & b+s & 0 \\ c & c+t & c+u & -c & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -a & a+p & a+q \\ b & b+r & -b & b+s \\ c & c+t & c+u & -c \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & -2a & p & q \\ b & r & -2b & s \\ c & t & u & -2c \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2a & p & q \\ r & -2b & s \\ t & u & -2c \end{vmatrix} = 8abc - 2asu - 2bqt - 2cpr - pst - qru$$

$$(27) \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1 & x_0 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1 & x_2 & x_0 & & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_0 & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_0+x_1+\dots+x_n \\ x_1 & x_0 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_0+x_1+\dots+x_n \\ x_1 & x_2 & x_0 & & x_{n-1} & x_0+x_1+\dots+x_n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_0 & x_0+x_1+\dots+x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_0+x_1+\dots+x_n \end{vmatrix} =$$

$$\left(\sum_{i=0}^n x_i\right) \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & 1 \\ x_1 & x_0 & x_2 & \dots & x_{n-1} & 1 \\ x_1 & x_2 & x_0 & & x_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=0}^n x_i\right) \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & 1 \\ x_1-x_0 & x_0-x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_1-x_0 & x_2-x_1 & x_0-x_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ x_1-x_0 & x_2-x_1 & x_3-x_2 & & x_0-x_{n-1} & 0 \\ x_1-x_0 & x_2-x_1 & x_3-x_2 & \dots & x_n-x_{n-1} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^n \left(\sum_{i=0}^n x_i\right) \begin{vmatrix} x_1-x_0 & x_0-x_1 & 0 & \dots & 0 \\ x_1-x_0 & x_2-x_1 & x_0-x_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_1-x_0 & x_2-x_1 & x_3-x_2 & & x_0-x_{n-1} \\ x_1-x_0 & x_2-x_1 & x_3-x_2 & \dots & x_n-x_{n-1} \end{vmatrix}$$

$j = n, n-1, \dots, 1$ の順に第 j 列に第 $1, 2, \dots, j-1$ 列をすべて加えると

$$(上式) = (-1)^n \left(\sum_{i=0}^n x_i\right) \begin{vmatrix} x_1-x_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1-x_0 & x_2-x_0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_1-x_0 & x_2-x_0 & x_3-x_0 & & 0 \\ x_1-x_0 & x_2-x_0 & x_3-x_0 & \dots & x_n-x_0 \end{vmatrix} = (-1)^n \left(\sum_{i=0}^n x_i\right) \prod_{i=1}^n (x_i - x_0)$$

$$(28) \begin{vmatrix} a & & & & b \\ b & a & & & \\ & b & a & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & a \\ & & & & b & a \\ & & & & b & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & & & & 0 \\ b & a & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & a \\ & & & & b & a \\ & & & & b & a \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} b & a & & & 0 \\ & b & a & & \\ 0 & & & \ddots & a \\ & & & & b & a \\ & & & & b & a \end{vmatrix} = a^n - (-b)^n$$

$$(29) D_n(a_0, a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & & & 0 \\ 0 & & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} \text{とおくと,}$$

$$\begin{aligned} D_n(a_0, a_1, \dots, a_n) &= x \begin{vmatrix} x & -1 & & & 0 \\ 0 & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} + (-1)^{n+2} a_0 \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ x & -1 & & & 0 \\ 0 & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & x & -1 \end{vmatrix} = xD_{n-1}(a_1, \dots, a_n) + a_0 \\ &= x(xD_{n-2}(a_2, \dots, a_n) + a_1) + a_0 = x^2D_{n-2}(a_2, \dots, a_n) + a_1x + a_0 \\ &= x^2(xD_{n-3}(a_3, \dots, a_n) + a_2) + a_1x + a_0 = x^3D_{n-3}(a_3, \dots, a_n) + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \dots \\ &= x^{n-1}D_1(a_{n-1}, a_n) + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 \\ &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 \end{aligned}$$

$$(30) F_n(a_0, a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & -x & & & & \\ & 1 & -x & & & \\ & & 1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & -x & \\ & & & & 1 & -x \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{vmatrix} \text{とおくと,}$$

$$\begin{aligned} F_n(a_0, a_1, \dots, a_n) &= \begin{vmatrix} 1 & -x & & & 0 \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & -x & \\ & & & 1 & -x \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{vmatrix} + (-1)^n a_n \begin{vmatrix} -x & & & & \\ 1 & -x & & & 0 \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & -x & \\ & & & 1 & -x \end{vmatrix} \\ &= a_nx^n + F_{n-1}(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + F_{n-2}(a_0, a_1, \dots, a_{n-2}) = \dots \\ &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + F_1(a_0, a_1) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \end{aligned}$$

$$(30) \begin{vmatrix} \sin 2t & 2 \cos 2t & -4 \sin 2t \\ \cos 2t & -2 \sin 2t & -4 \cos 2t \\ -\sin t & -\cos t & \sin t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin 2t & 2 \cos 2t & 0 \\ \cos 2t & -2 \sin 2t & 0 \\ -\sin t & -\cos t & -3 \sin t \end{vmatrix} = 6 \sin t \begin{vmatrix} \sin 2t & -\cos 2t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{vmatrix} = 6 \sin t$$

$$2. \begin{vmatrix} 0 & 0 & x & -1 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & -a^2 - 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & x & -1 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & x^2 - a^2 - 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 0 & x & -1 \\ x & -1 & 0 \\ a^2 & 0 & x^2 - a^2 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 0 & -1 \\ x & -1 & 0 \\ a^2 & 0 & x^2 - a^2 - 1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^5 \begin{vmatrix} x^2 & -1 \\ a^2 & x^2 - a^2 - 1 \end{vmatrix} = -(x^4 - (a^2 + 1)x^2 + a^2) = -(x^2 - a^2)(x^2 - 1) \text{ より } x = \pm 1, \pm a.$$

$$\begin{vmatrix} y & 1 & 0 & 0 \\ 1 & y & 1 & 0 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-y^2 & -y & 0 \\ 1 & y & 1 & 0 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & y \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1-y^2 & -y & 0 \\ 1 & y & 1 \\ 0 & 1 & y \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1-y^2 & -y & 0 \\ 1 & y & 1 \\ -y & 1-y^2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1-y^2 & -y \\ -y & 1-y^2 \end{vmatrix} = (1-y^2)^2 - (-y)^2 = y^4 - 3y^2 + 1 \text{ だから } y^4 - 3y^2 + 1 = 1. \text{ 従って } y^4 - 3y^2 = 0 \text{ となるため } y = 0, \pm\sqrt{3}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -z \\ 1 & 0 & -13 & 0 & 37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & z & -13 & 0 & 37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ z & -13 & 0 & 37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & z^2 - 13 & 0 & 37 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -z & 0 \\ 0 & 1 & -z \\ z^2 - 13 & 0 & 37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -z & 0 \\ 0 & 1 & -z \\ 0 & z^3 - 13z & 37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -z \\ z^3 - 13z & 37 \end{vmatrix} = z^4 - 13z^2 + 37 \text{ より } z^4 - 13z^2 + 36 = 0. \text{ この左辺は } (z-2)(z+2)(z-3)(z+3) \text{ と因数分解されるため } z = \pm 2, \pm 3.$$

3. 与えられた n 次の行列式の値を D_n とおき, 第 1 列から第 2 列を引いて, 第 1 列に関して展開する. 次に, 第 2 項の行列式の (1,1) に関して第 1 行を掃き出せば

$$D_n = \begin{vmatrix} a-b & b & b & \dots & b \\ b-a & a & b & & \\ 0 & b & a & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & \ddots & a & b & b \\ & & & & b & a & b \\ 0 & \dots & & b & b & a \end{vmatrix} = (a-b)D_{n-1} - (b-a) \begin{vmatrix} b & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b & b \\ & & & b & a & b \\ b & \dots & & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)D_{n-1} + (a-b) \begin{vmatrix} b & 0 & \dots & 0 \\ b & a-b & \ddots & \vdots \\ b & 0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & & a-b & 0 & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a-b)D_{n-1} + b(a-b)^{n-1}$$

だから D_n に関する漸化式 $D_n = (a-b)D_{n-1} + b(a-b)^{n-1}$ が得られる. $a = b$ の場合は $D_n = 0$ だから, $a \neq b$ と仮定して上式の両辺を $(a-b)^n$ で割り, $x_n = \frac{D_n}{(a-b)^n}$ とおけば $x_n = x_{n-1} + \frac{b}{a-b}$ が得られるため, $\{x_n\}$ は公差 $\frac{b}{a-b}$ の等差数列である. $x_1 = \frac{D_1}{a-b} = \frac{a}{a-b}$ だから $x_n = \frac{a+(n-1)b}{a-b}$ となるため $D_n = (a-b)^n x_n = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$ である.

$$4. (1) \begin{vmatrix} 0 & a & b & c & 1 \\ a & 0 & a+b+t & a+c+t & 1 \\ b & a+b+t & 0 & b+c+t & 1 \\ c & a+c+t & b+c+t & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c & 1 \\ a & -a & a+t & a+t & 0 \\ b & b+t & -b & b+t & 0 \\ c & c+t & c+t & -c & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a & -a & a+t & a+t \\ b & b+t & -b & b+t \\ c & c+t & c+t & -c \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & -2a & t & t \\ b & t & -2b & t \\ c & t & t & -2c \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -2a & t & t \\ t & -2b & t \\ t & t & -2c \end{vmatrix} = 2t^3 - 8abc + 2at^2 + 2bt^2 + 2ct^2 = 2t^3 + 2\alpha t^2 - 8\beta.$$

(2) 仮定から $-8\beta = 8$, $2 + 2\alpha - 8\beta = 4$ だから $\beta = -1$, $\alpha = -3$.

5. (1) $A^p B^q A^r B^{s-q} = a B^j A^k B^{s-j} A^m$ の両辺の行列式を考えると, $|A^p B^q A^r B^{s-q}| = |a B^j A^k B^{s-j} A^m|$ が成り立ち, この左辺は $|A|^p |B|^q |A|^r |B|^{s-q} = |A|^{p+r} |B|^s$ に等しく, 右辺は $a^n |B|^j |A|^k |B|^{s-j} |A|^m = a^n |A|^{k+m} |B|^s$ に等しいため, $|A|^{p+r} |B|^s = a^n |A|^{k+m} |B|^s$ である. B は正則行列だから $|B| \neq 0$ より, 上式から $|A|^{p+r} = a^n |A|^{k+m}$ が得られる. 従って A が正則行列の場合は $|A|^{p+r-k-m} = a^n$ であり, $p+r-k-m$ が奇数ならば $|A| = a^{\frac{n}{p+r-k-m}}$, $p+r-k-m$ が偶数ならば $|A| = \pm a^{\frac{n}{p+r-k-m}}$ である. 故に, $p+r-k-m$ が奇数のとき, $|A|$ は 0 または $a^{\frac{n}{p+r-k-m}}$ であり, $p+r-k-m$ が偶数のとき, $|A|$ は 0 または $\pm a^{\frac{n}{p+r-k-m}}$ である.

(2) $AB^p A^q = a B A^r B^s$, $BAB^{-1} = b A^k B$ の両辺の行列式を考えると, $|AB^p A^q| = |a B A^r B^s|$, $|BAB^{-1}| = |b A^k B|$ が成り立ち, 1 つめ等式の左辺は $|A| |B|^p |A|^q = |A|^{q+1} |B|^p$ に等しく, 右辺は $a^n |B| |A|^r |B|^s = a^n |A|^r |B|^{s+1}$ に等しいため, $|A|^{q+1} |B|^p = a^n |A|^r |B|^{s+1}$ である. また, 2 つめ等式の左辺は $|B| |A| |B|^{-1} = |A|$ に等しく, 右辺は $b^n |A|^k |B|$ に等しいため, $|A| = b^n |A|^k |B|$ であり, A の正則性から $|A| \neq 0$ だから $|B| = b^{-n} |A|^{1-k}$ である. これを 1 つめの等式から得られた等式に代入すれば $b^{-pn} |A|^{p-pk+q+1} = a^n b^{-n(s+1)} |A|^{r+(1-k)(s+1)}$ が得られ, この両辺に $b^{pn} |A|^{-r-(1-k)(s+1)}$ をかければ, $|A|^{k+q-r-(k-1)(p-s)} = (ab^{p-s-1})^n$ が得られる. 故に $k+q-r-(k-1)(p-s)$ が奇数の場合は $|A| = (ab^{p-s-1})^{\frac{n}{k+q-r-(k-1)(p-s)}}$, $|B| = b^{-n} (ab^{p-s-1})^{\frac{n(1-k)}{k+q-r-(k-1)(p-s)}}$ であり, $k+q-r-(k-1)(p-s)$ が偶数の場合は $|A| = \pm (ab^{p-s-1})^{\frac{n}{k+q-r-(k-1)(p-s)}}$, $|B| = \pm b^{-n} (ab^{p-s-1})^{\frac{n(1-k)}{k+q-r-(k-1)(p-s)}}$ (複号同順) である.

(3) $ABA^p = a B A^q B^q$ の両辺の行列式を考えると, $|ABA^p| = |a B A^q B^q|$ が成り立ち, $|B| = b$ よりこの左辺は $|A| |B| |A|^p = b |A|^{p+1}$ に等しく, 右辺は $a^n |B| |A|^q |B|^q = a^n b^{q+1} |A|^q$ に等しいため, $b |A|^{p+1} = a^n b^{q+1} |A|^q$ である. A は正則行列だから $|A| \neq 0$ より, 上式から $|A|^{p-q+1} = a^n b^q$ が得られる. 従って $p-q+1$ が奇数の場合は $|A| = (a^n b^q)^{\frac{1}{p-q+1}}$, $p-q+1$ が偶数の場合は $|A| = \pm (a^n b^q)^{\frac{1}{p-q+1}}$ である.

(4) $ABA^2 = 2BA^2B^2$, $AB^{-1}A^2 = 3BA^2B$ の両辺の行列式を考えると, $|ABA^2| = |2BA^2B^2|$, $|AB^{-1}A^2| = |3BA^2B|$ が成り立ち, 1 つめ等式の左辺は $|A| |B| |A|^2 = |A|^3 |B|$ に等しく, 右辺は $2^4 |B| |A|^2 |B|^2 = 16 |A|^2 |B|^3$ に等しいため, $|A|^3 |B| = 16 |A|^2 |B|^3$ である. A, B の正則性から $|A|$ はともに 0 でないため, 上式から $|A| = 16 |B|^2$ である. また, 2 つめ等式の左辺は $|A| |B|^{-1} |A|^2 = |A|^3 |B|^{-1}$ に等しく, 右辺は $3^4 |B| |A|^2 |B| = 81 |A|^2 |B|^2$ に等しいため, $|A|^3 |B|^{-1} = 81 |A|^2 |B|^2$ であり, A の正則性から $|A| \neq 0$ だから $|A| = 81 |B|^3$ である. 故に $81 |B|^3 = 16 |B|^2$ だから $|B| = \frac{16}{81}$ である.

(5) $A^2 B^t A = B A^t A^t B$ の両辺の行列式を考えると, $|A^2 B^t A| = |B A^t A^t B|$ が成り立ち, $|B| = -2$ よりこの左辺は $|A|^2 |B|^t |A| = -2 |A|^3$ に等しく, 右辺は $|B| |A|^2 |B| = 4 |A|^2$ に等しいため, $-2 |A|^3 = 4 |A|^2$ である. A は正則行列だから $|A| \neq 0$ より, 上式から $|A| = -2$ が得られる.

(6) ${}^t ABAB = {}^t BA^2 BA$ の両辺の行列式を考えると, $|{}^t ABAB| = |{}^t BA^2 BA|$ が成り立ち, この左辺は $|{}^t A| |B| |A| |B| = |A|^2 |B|^2$ に等しく, 右辺は $|{}^t B| |A|^2 |B| |A| = |A|^3 |B|^2$ に等しいため, $|A|^2 |B|^2 = |A|^3 |B|^2$ である. B は正則行列だから $|B| \neq 0$ より, 上式から $|A| = 1$ が得られる.

6. (1) $AP = A \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{v}_1 & A\mathbf{v}_2 & A\mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\mathbf{v}_1) & f(\mathbf{v}_2) & f(\mathbf{v}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 & 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ であり, P が逆行列をもつことから, $Q = P^{-1}AP =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$(2) |Q| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6. \quad A = PQP^{-1} \text{ だから } |A| = |PQP^{-1}| = |P||Q||P^{-1}| = 6|P||P^{-1}| = 6|PP^{-1}| = 6|E_3| = 6.$$

7. D の第 i 行を除いた行列の第 i 列は零ベクトルになるため, D_{ij} は $i < j$ ならば第 i 列が, $j < i$ ならば第 $i-1$ 列が零ベクトルである行列である. 従って, $i \neq j$ ならば $|D_{ij}| = 0$ となるため, D の (i, j) 余因子は 0 である. 故に D の余因子行列は対角行列である. D の (i, i) 余因子は $(-1)^{i+i}|D_{ij}| = \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1} \lambda_{i+1} \cdots \lambda_n$ であり, これが D の余因子行列の (i, i) 成分である.

8. 教科書の命題 4.15 より $A\tilde{A} = |A|E_n$ の両辺の行列式を考えると, $|A\tilde{A}| = |A||\tilde{A}|$, $||A|E_n| = |A|^n$ より $|A||\tilde{A}| = |A|^n$ である. A が正則ならば, 教科書の定理 4.16 から $|A| \neq 0$ だから $|A||\tilde{A}| = |A|^n$ の両辺を $|A|$ で割って $|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$ が得られる. A が正則でない場合, $|A| = 0$ だから $A\tilde{A} = |A|E_n = O$ である. もし $|\tilde{A}| \neq 0$ ならば \tilde{A} の逆行列があるため, $A\tilde{A} = O$ より, $A = O$ が得られるが, このとき $\tilde{A} = O$ となるため, $|\tilde{A}| \neq 0$ と矛盾が生じる. 故に, この場合も $|\tilde{A}| = 0 = |A|^{n-1}$ である.

9. $T = (t_{ij})$ を $t_{ij} = 1 (i \leq j)$, $t_{ij} = 0 (i > j)$ で与えられる n 次上半三角行列とすると, tTT の (i, j) -成分 $\sum_{l=1}^n t_{il}t_{lj}$ は, $i \leq j$ ならば $i, i > j$ ならば j である. 従って, とくに tTT の各成分は正の整数である. また, $T, {}^tT$ はともに対角成分がすべて 1 であるような三角行列だから $|T| = |{}^tT| = 1$ である. k が正の整数の場合, tTT の第 1 列を k 倍したものを A とすれば A の各成分は正の整数で $|A| = k|{}^tTT| = k|{}^tT||T| = k$ である. また, A の第 1 列と第 2 列を入れ替えた行列を B とすれば, B は正の整数を成分にもち, 行列式の値が負の整数 $-k$ であるような行列の例になっている. また, すべての成分が 1 である n 次正方行列は正の整数を成分にもち, 行列式の値が 0 であるような行列の例になっている.

10. $\text{rank } A = n-1$ ならば教科書の系 3.4 より A は正則ではないため, 定理 4.16 から $|A| = 0$ である. よって, 教科書の命題 4.15 から $A\tilde{A} = |A|E_n = O$ となるため, 第 7 回演習問題の 6 の結果から $n-1 + \text{rank } \tilde{A} = \text{rank } A + \text{rank } \tilde{A} \leq n$ である. 従って $\text{rank } \tilde{A} \leq 1$ である.

11. (1) 教科書の命題 4.15 より $A\tilde{A} = |A|E_n$, $B\tilde{B} = |B|E_n$, $AB\tilde{A}\tilde{B} = |AB|E_n$ であるため, A, B がともに正則ならば, 第 1, 2, 3 式の両辺に左からそれぞれ $A^{-1}, B^{-1}, B^{-1}A^{-1}$ をかけて, $\tilde{A} = |A|A^{-1}$, $\tilde{B} = |B|B^{-1}$, $\tilde{A}\tilde{B} = |AB|B^{-1}A^{-1}$ を得る. この最後の式の右辺は定理 4.8 と定理 2.1 の (4) から $|AB|B^{-1}A^{-1} = |A||B|B^{-1}A^{-1} = (|B|B^{-1})(|A|A^{-1}) = \tilde{B}\tilde{A}$ に等しいため, 主張が示された.

(2) 定理 4.16 から, 0 に収束する数列 $\{\alpha_k\}_{k=1,2,\dots}$ で, すべての k に対して $|A + \alpha_k E_n| \neq 0$ であるものが存在することを示せばよい. $A = (a_{ij})$ として, x の多項式 $F(x) = |A + xE_n|$ を考える. S' を $1, 2, \dots, n$ の順列 $[i_1, i_2, \dots, i_n]$ すべての集合 S から順列 $[1, 2, \dots, n]$ を除いた集合とし, $A + xE_n$ の (i, j) 成分を a'_{ij} とおくと命題 4.5 から

$$\begin{vmatrix} x + a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & x + a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & x + a_{nn} \end{vmatrix} = (x + a_{11})(x + a_{22}) \cdots (x + a_{nn}) + \sum_{[i_1, i_2, \dots, i_n] \in S'} (-1)^{N_{[i_1, i_2, \dots, i_n]}} a'_{i_1 1} a'_{i_2 2} \cdots a'_{i_n n}$$

であり, $[i_1, i_2, \dots, i_n] \in S'$ ならば, $a'_{i_1 1}, a'_{i_2 2}, \dots, a'_{i_n n}$ のうちの少なくとも 1 つは変数 x を含まないため,

$$\sum_{[i_1, i_2, \dots, i_n] \in S'} (-1)^{N_{[i_1, i_2, \dots, i_n]}} a'_{i_1 1} a'_{i_2 2} \cdots a'_{i_n n}$$

は x の $n-1$ 次以下の多項式である。よって、上式から $F(x)$ は x^n の係数が 1 である x の n 次多項式であるため、 n 次方程式 $F(x) = 0$ の解は n 個以下である。そこで、 α を $F(x) = 0$ の正の実数解があれば、それらのうちで絶対値が最小のものとし、 $F(x) = 0$ の正の実数解がなければ、 $\alpha = 1$ とおいて、数列 $\{\alpha_k\}_{k=1,2,\dots}$ を $\alpha_k = \frac{\alpha}{k+1}$ で定める。このときすべての $k = 1, 2, \dots$ に対して $|A + \alpha_k E_n| = F(\alpha_k) \neq 0$ である。

(3) 実数 x, y に対して、 $A + xE_n, B + yE_n, (A + xE_n)(B + yE_n)$ の余因子行列をそれぞれ $A(x), B(y), C(x, y)$ とすれば、(1) によって、 $A(x)$ が正則である x と $B(y)$ が正則である y に対して $B(y)A(x) = C(x, y)$ が成り立つ。(2) から A, B に対して 0 に収束する数列 $\{\alpha_k\}_{k=1,2,\dots}, \{\beta_k\}_{k=1,2,\dots}$ で、すべての k に対して $A + \alpha_k E_n, B + \beta_k E_n$ が正則になるものがあるため、 $B(\beta_k)A(\alpha_k) = C(\alpha_k, \beta_k)$ がすべての k に対して成り立つ。 $A(x), B(y), C(x, y)$ の (i, j) 成分をそれぞれ $a_{ij}(x), b_{ij}(y), c_{ij}(x, y)$ とおくと、これらはそれぞれ x, y, x と y の多項式で、 $\{\alpha_k\}_{k=1,2,\dots}, \{\beta_k\}_{k=1,2,\dots}$ は 0 に収束するため、 $\{a_{ij}(\alpha_k)\}_{k=1,2,\dots}, \{b_{ij}(\beta_k)\}_{k=1,2,\dots}, \{c_{ij}(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1,2,\dots}$ はそれぞれ $a_{ij}(0), b_{ij}(0), c_{ij}(0, 0)$ に収束する。従って $B(\beta_k)A(\alpha_k) = C(\alpha_k, \beta_k)$ ($k = 1, 2, \dots$) より、 $B(0)A(0) = C(0, 0)$ である。一方 $A(0) = \tilde{A}, B(0) = \tilde{B}, C(0, 0) = \tilde{A}\tilde{B}$ だから主張が示された。

(4) $\text{rank } A = r$ とおくと、定理 3.3 から、 n 次基本行列の積で表される行列 X, Y で $XAY = F_{n,n}(r)$ となるものがある。系 3.4 によって、 X, Y は正則だから、 $A = X^{-1}F_{n,n}(r)Y^{-1}$ となるため、(3) によって $\tilde{A} = \widetilde{Y^{-1}F_{n,n}(r)X^{-1}}$ が成り立つ。問題 8 の結果と定理 4.16 から $\widetilde{Y^{-1}}$ と $\widetilde{X^{-1}}$ は正則行列だから、系 3.6 の (2) によって、 $\text{rank } \tilde{A} = \text{rank } \widetilde{F_{n,n}(r)}$ が成り立つ。ここで、問題 7 の結果から $\widetilde{F_{n,n}(n-1)}$ は (n, n) 成分のみが 1 で、他の対角成分はすべて 0 である対角行列であるため、 $\text{rank } \widetilde{F_{n,n}(n-1)} = 1$ であり、 $r \leq n-2$ ならば $\widetilde{F_{n,n}(r)}$ は零行列であることに注意すれば、 $\text{rank } A = n-1$ ならば $\text{rank } \tilde{A} = \text{rank } \widetilde{F_{n,n}(n-1)} = 1$ であり、 $\text{rank } A \leq n-2$ ならば $\tilde{A} = \widetilde{Y^{-1}OX^{-1}} = O$ である。

(5) $|A| \det(Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_{n-1}, x_n) = \det(Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_{n-1}, |A|x_n) = \det(Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_{n-1}, A\tilde{A}x_n) = |A| \det(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \tilde{A}x_n)$ より、 A が正則ならば $\det(Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_{n-1}, x_n) = \det(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \tilde{A}x_n)$ である。(2) より、0 に収束する数列 $\{\alpha_k\}_{k=1,2,\dots}$ で、すべての k に対して $A + \alpha_k E_n$ が正則になるものが存在する。従って $A_k = A + \alpha_k E_n$ とおけば、すべての k に対して $\det(A_k x_1, A_k x_2, \dots, A_k x_{n-1}, x_n) = \det(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \tilde{A}_k x_n)$ が成り立つ。 $k \rightarrow \infty$ のとき、 A_k の (i, j) 成分は A の (i, j) 成分に近づき、 \tilde{A}_k の (i, j) 成分は \tilde{A} の (i, j) 成分に近づくため、上式から $\det(Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_{n-1}, x_n) = \det(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \tilde{A}x_n)$ が得られる。

線形数学 I 演習問題 第 10 回 ベクトルの外積

1. 次の外積を計算せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^3$, A を 3 次正方行列とするととき, 以下の等式が成り立つことを示せ.

$$(1) (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = -(\mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{x} + (\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{y}$$

$$(2) (\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y} \times \mathbf{z}) = D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

$$(3) (\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z})(\mathbf{y}, \mathbf{w}) - (\mathbf{x}, \mathbf{w})(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

$$(4) \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2$$

$$(5) (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times (\mathbf{z} \times \mathbf{w}) = D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w})\mathbf{z} - D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{w} = D_3(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{w})\mathbf{y} - D_3(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w})\mathbf{x}$$

$$(6) D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})^2 = \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2\|\mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2(\mathbf{y}, \mathbf{z})^2 - \|\mathbf{y}\|^2(\mathbf{x}, \mathbf{z})^2 - \|\mathbf{z}\|^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{y}, \mathbf{z})(\mathbf{x}, \mathbf{z})$$

$$(7) A\mathbf{x} \times A\mathbf{y} = {}^t\tilde{A}(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$$

3. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ とする.

$$(1) ((\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \mathbf{0} \text{ となるのはどのような場合か答えよ.}$$

$$(2) (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ となるのはどのような場合か答えよ.}$$

4. \mathbf{x}, \mathbf{y} を零でない 3 次元実ベクトル, 原点を通り \mathbf{x} に垂直な平面を P とし, $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ とおく.

$$(1) (\mathbf{u} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{u} \text{ は } \mathbf{y} \text{ を位置ベクトルとする点から } P \text{ に下した垂線の足の位置ベクトルであることを示せ.}$$

$$(2) \text{上記の垂線の長さは } |(\mathbf{y}, \mathbf{u})| = \frac{|(\mathbf{y}, \mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}\|} \text{ で与えられることを示せ}$$

5. O を \mathbf{R}^3 の原点とし, A, B, C を \mathbf{R}^3 の点として, O, A, B, C は同一平面上にはないとする. $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ とおくととき, 以下の問いに答えよ.

$$(1) \text{点 } A \text{ から, 三点 } O, B, C \text{ を通る平面に下ろした垂線の足の位置ベクトルを } s\mathbf{b} + t\mathbf{c} \text{ (} s, t \in \mathbf{R} \text{) の形に表せ.}$$

$$(2) \text{点 } A \text{ から, 三点 } O, B, C \text{ を通る平面に下ろした垂線の長さを } a, b, c \text{ を用いて表せ.}$$

$$(3) \text{点 } A \text{ から, 二点 } B, C \text{ を通る直線に下ろした垂線の足の位置ベクトルを } s\mathbf{b} + t\mathbf{c} \text{ (} s + t = 1 \text{) の形に表せ.}$$

$$(4) \text{点 } A \text{ から, 二点 } B, C \text{ を通る直線に下ろした垂線の長さを } a, b, c \text{ を用いて表せ.}$$

6. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ を \mathbf{R}^3 のベクトルとし, \mathbf{u}, \mathbf{v} の一方は他方の実数倍ではないとする. $\mathbf{x} = \mathbf{a} + s\mathbf{u}$, $\mathbf{y} = \mathbf{b} + t\mathbf{v}$ によってパラメータ表示される \mathbf{R}^3 の直線を, それぞれ l, m とする. このとき, l 上の点と m 上の点の最短距離を $a, b, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ を用いて表せ. また, P, Q をそれぞれ, l, m 上の点とするととき, 線分 PQ の長さが最小になるのは \overrightarrow{PQ} が \mathbf{u}, \mathbf{v} の両方のベクトルと垂直になる場合に限ることを示せ.

第 10 回の演習問題の解答

1. (1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. (1) $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ の第 j 成分 ($j = 1, 2, 3$) をそれぞれ x_j, y_j, z_j とする. $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ -x_1y_3 + x_3y_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} &= \begin{pmatrix} (-x_1y_3 + x_3y_1)z_3 - (x_1y_2 - x_2y_1)z_2 \\ -(x_2y_3 - x_3y_2)z_3 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_1 \\ (x_2y_3 - x_3y_2)z_2 - (-x_1y_3 + x_3y_1)z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(y_2z_2 + y_3z_3)x_1 + (x_2z_2 + x_3z_3)y_1 \\ -(y_1z_1 + y_3z_3)x_2 + (x_1z_1 + x_3z_3)y_2 \\ -(y_1z_1 + y_2z_2)x_3 + (x_1z_1 + x_2z_2)y_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3)x_1 + (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)y_1 \\ -(y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3)x_2 + (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)y_2 \\ -(y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3)x_3 + (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\mathbf{y}, \mathbf{z})x_1 \\ -(\mathbf{y}, \mathbf{z})x_2 \\ -(\mathbf{y}, \mathbf{z})x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\mathbf{x}, \mathbf{z})y_1 \\ (\mathbf{x}, \mathbf{z})y_2 \\ (\mathbf{x}, \mathbf{z})y_3 \end{pmatrix} \\ &= -(\mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{x} + (\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{y} \end{aligned}$$

[別解] \mathbf{x} と \mathbf{y} が 1 次独立な場合, $\mathbf{x}, \mathbf{y} - \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|^2}\mathbf{x}, \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ は \mathbf{R}^3 の直交基底であり, $\left\| \mathbf{y} - \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|^2}\mathbf{x} \right\|^2 = \frac{\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}{\|\mathbf{x}\|^2}$ だから, $\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}, \mathbf{v} = \frac{\|\mathbf{x}\|}{\sqrt{\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}}\left(\mathbf{y} - \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|^2}\mathbf{x}\right), \mathbf{w} = \frac{1}{\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|}(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$ とおけば, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ は \mathbf{R}^3 の右手系の正規直交基底である. 従って $\mathbf{z} = (z, \mathbf{u})\mathbf{u} + (z, \mathbf{v})\mathbf{v} + (z, \mathbf{w})\mathbf{w}$ であり, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{u}, \mathbf{w} \times \mathbf{u} = \mathbf{v}$ が成り立つ. また, $\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|\mathbf{u}, \mathbf{y} = \frac{\sqrt{\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{v} + \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{u}$ だから

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} &= \left(\|\mathbf{x}\|\mathbf{u} \times \left(\frac{\sqrt{\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{v} + \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{u} \right) \right) \times ((z, \mathbf{u})\mathbf{u} + (z, \mathbf{v})\mathbf{v} + (z, \mathbf{w})\mathbf{w}) \\ &= \sqrt{\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2} \mathbf{w} \times ((z, \mathbf{u})\mathbf{u} + (z, \mathbf{v})\mathbf{v} + (z, \mathbf{w})\mathbf{w}) \\ &= \sqrt{\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2} ((z, \mathbf{u})\mathbf{v} - (z, \mathbf{v})\mathbf{u}) \\ &= (z, \mathbf{x}) \left(\mathbf{y} - \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|^2}\mathbf{x} \right) - \left(z, \mathbf{y} - \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|^2}\mathbf{x} \right) \mathbf{x} = -(\mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{x} + (\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{y} \end{aligned}$$

\mathbf{x} と \mathbf{y} が 1 次従属ならば $\mathbf{y} = k\mathbf{x}$ または $\mathbf{x} = k\mathbf{y}$ を満たす実数 k が存在する. 前者の場合は $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = (\mathbf{x} \times k\mathbf{x}) \times \mathbf{z} = k(\mathbf{x} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{z} = \mathbf{0}$ と $-(\mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{x} + (\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{y} = -(k\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{x} + (\mathbf{x}, \mathbf{z})k\mathbf{x} = -k((\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{x} + (\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ が成り立つため, $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = -(\mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{x} + (\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{y}$ である. 後者の場合も同様に $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = -(\mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{x} + (\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{y}$ が示される.

(2) $A = (\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z})$ とおき, A の (i, j) 成分を a_{ij} とすれば $i = 1, 2, 3$ に対して $a_{i1} = x_i, a_{i2} = y_i, a_{i3} = z_i$ だから, 教科書の定理 4.14 の (1) から

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (x_2y_3 - x_3y_2)z_1 - (x_1y_3 - x_3y_1)z_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_3 = a_{13}|A_{13}| - a_{23}|A_{23}| + a_{33}|A_{33}| = |A| = D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y} \times \mathbf{z}) = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1) = a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| + a_{31}|A_{31}| = |A| = D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

(3) (2) と (1) の結果から

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z} \times \mathbf{w}) = ((\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z}, \mathbf{w}) = -(\mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{x} + (\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{y}, \mathbf{w}) = -(\mathbf{y}, \mathbf{z})(\mathbf{x}, \mathbf{w}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z})(\mathbf{y}, \mathbf{w})$$

(4) (3) で, とくに $\mathbf{z} = \mathbf{x}, \mathbf{w} = \mathbf{y}$ の場合を考えれば,

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{x} \times \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - (\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2$$

(5) (1) と (2) の結果から

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times (\mathbf{z} \times \mathbf{w}) &= -(\mathbf{y}, \mathbf{z} \times \mathbf{w})\mathbf{x} + (\mathbf{x}, \mathbf{z} \times \mathbf{w})\mathbf{y} = -(\mathbf{z} \times \mathbf{w}, \mathbf{y})\mathbf{x} + (\mathbf{z} \times \mathbf{w}, \mathbf{x})\mathbf{y} \\ &= -D_3(\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{y})\mathbf{x} + D_3(\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{x})\mathbf{y} = -D_3(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w})\mathbf{x} + D_3(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{w})\mathbf{y}.\end{aligned}$$

また $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times (\mathbf{z} \times \mathbf{w}) = -(\mathbf{z} \times \mathbf{w}) \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y})$ だから、今示した結果から

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times (\mathbf{z} \times \mathbf{w}) = -(\mathbf{z} \times \mathbf{w}) \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = -(-D_3(\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{z} + D_3(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{w}) = D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w})\mathbf{z} - D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{w}$$

(6) A を (2) と同様に定めれば ${}^tAA = \begin{pmatrix} \|\mathbf{x}\|^2 & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \|\mathbf{y}\|^2 & (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ (\mathbf{x}, \mathbf{z}) & (\mathbf{y}, \mathbf{z}) & \|\mathbf{z}\|^2 \end{pmatrix}$ だから、この両辺の行列式を考えて、右辺の行列の

行列式を展開すれば、 $D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = |A| = |{}^tA|$ より

$$D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})^2 = |{}^tA| |A| = |{}^tAA| = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \|\mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 (\mathbf{y}, \mathbf{z})^2 - \|\mathbf{y}\|^2 (\mathbf{x}, \mathbf{z})^2 - \|\mathbf{z}\|^2 (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{y}, \mathbf{z})(\mathbf{x}, \mathbf{z})$$

(7) (2) と第 9 回の演習問題 11 の (5) の結果から、任意の $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^3$ に対して $(A\mathbf{x} \times A\mathbf{y}, \mathbf{z}) = D_3(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}, \mathbf{z}) = D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{A}\mathbf{z}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \tilde{A}\mathbf{z}) = (\tilde{A}\mathbf{z}, \mathbf{x} \times \mathbf{y}) = {}^t(\tilde{A}\mathbf{z})(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = {}^t\mathbf{z}{}^t\tilde{A}(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = (\mathbf{z}, {}^t\tilde{A}(\mathbf{x} \times \mathbf{y})) = ({}^t\tilde{A}(\mathbf{x} \times \mathbf{y}), \mathbf{z})$ である。従って $(A\mathbf{x} \times A\mathbf{y} - {}^t\tilde{A}(\mathbf{x} \times \mathbf{y}), \mathbf{z}) = 0$ がすべての $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^3$ に対して成り立つため、 $A\mathbf{x} \times A\mathbf{y} = {}^t\tilde{A}(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$ である。

3. (1) 前問の (1) の結果より $((\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{x}) \times \mathbf{y} = -(\mathbf{y}, \mathbf{x})\mathbf{x} + (\mathbf{x}, \mathbf{x})\mathbf{y} \times \mathbf{y} = -(\mathbf{y}, \mathbf{x})\mathbf{x} \times \mathbf{y} + (\mathbf{x}, \mathbf{x})\mathbf{y} \times \mathbf{y} = -(\mathbf{y}, \mathbf{x})\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ だから $((\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \mathbf{0}$ となるのは \mathbf{x} と \mathbf{y} が垂直であるか、または \mathbf{x} と \mathbf{y} の一方が他方の実数倍である場合である。

(2) $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ならば $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{x} = \mathbf{y}$ は成り立つ。 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ かつ $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{x} = \mathbf{y}$ であると仮定する。 $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ だから、 $\mathbf{x} \times \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ であるため、 \mathbf{x} と \mathbf{y} の一方は他方の実数倍ではない。 このとき、問題 2 の (1) の結果より $-(\mathbf{y}, \mathbf{x})\mathbf{x} + (\mathbf{x}, \mathbf{x})\mathbf{y} = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{x} = \mathbf{y}$ だから $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$ かつ $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$ が成り立つ。 逆に $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$ かつ $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$ ならば (1) の結果より $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{x} = \mathbf{y}$ が成り立つ。 以上から $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{x} = \mathbf{y}$ が成り立つのは $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ であるか、または $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ かつ \mathbf{x} が単位ベクトルの場合である。

4. (1) \mathbf{y} を位置ベクトルとする点から P に下した垂線の足の位置ベクトルを \mathbf{z} とすれば $\mathbf{z} - \mathbf{y}$ は \mathbf{u} と平行だから $\mathbf{z} - \mathbf{y} = t\mathbf{u}$ を満たす実数 t があるため、 \mathbf{z} は $\mathbf{z} = \mathbf{y} + t\mathbf{u}$ と表せる。 また、 \mathbf{z} は P 上のベクトルだから \mathbf{u} と垂直であるため $(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = 0$ である。 $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1$ だから $(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = (\mathbf{y} + t\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\mathbf{y}, \mathbf{u}) - t$ となるため、 $(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = 0$ より $t = (\mathbf{y}, \mathbf{u})$ である。 従って \mathbf{z} は $\mathbf{z} = \mathbf{y} - (\mathbf{y}, \mathbf{u})\mathbf{u}$ で与えられる。 一方、問題 2 の (1) の結果から $(\mathbf{u} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{u} = -(\mathbf{y}, \mathbf{u})\mathbf{u} + \mathbf{y}$ だから $(\mathbf{u} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{u}$ は \mathbf{y} から P に下した垂線の足の位置ベクトル \mathbf{z} に一致する。

(2) $\mathbf{z} - \mathbf{y} = -(\mathbf{y}, \mathbf{u})\mathbf{u}$ が \mathbf{y} を位置ベクトルとする点から P に下した垂線のベクトルだから、その長さは $\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| = |(\mathbf{y}, \mathbf{u})| \|\mathbf{u}\| = |(\mathbf{y}, \mathbf{u})| = \frac{|(\mathbf{y}, \mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}\|}$ である。

5. (1) 三点 O, B, C を通る平面を P とする。 仮定から O, B, C は同一直線上にないため、 \mathbf{b}, \mathbf{c} の一方は他方の実数倍ではない。 従って $\mathbf{b} \times \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ であり、 P は原点を通り、 $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ に垂直な平面である。 $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|}$ とおけば、前問の結果

から, A から P に下ろした垂線の足の位置ベクトルは, $(\mathbf{u} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{u}$ で与えられる. 問題 2 の (1), (4) の結果から

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{u} &= \left(\frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|} \times \mathbf{a} \right) \times \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|^2} ((\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|^2} (-(\mathbf{c}, \mathbf{a})\mathbf{b} + (\mathbf{b}, \mathbf{a})\mathbf{c}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\frac{1}{\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|^2} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (-(\mathbf{c}, \mathbf{a})\mathbf{b} + (\mathbf{b}, \mathbf{a})\mathbf{c}) \\ &= \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{a})}{\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|^2} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{b} - \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|^2} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{c} \\ &= \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{a})}{\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|^2} (-(\mathbf{c}, \mathbf{b})\mathbf{b} + (\mathbf{b}, \mathbf{b})\mathbf{c}) - \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|^2} (-(\mathbf{c}, \mathbf{c})\mathbf{b} + (\mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{c}) \\ &= \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})\|\mathbf{c}\|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{c})(\mathbf{b}, \mathbf{c})}{\|\mathbf{b}\|^2\|\mathbf{c}\|^2 - (\mathbf{b}, \mathbf{c})^2} \mathbf{b} + \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{c})\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})(\mathbf{b}, \mathbf{c})}{\|\mathbf{b}\|^2\|\mathbf{c}\|^2 - (\mathbf{b}, \mathbf{c})^2} \mathbf{c} \end{aligned}$$

が得られる.

(2) 点 A から, 三点 O, B, C を通る平面に下ろした垂線の長さは, 前問の (2) の結果から

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{u})| = \frac{|(\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c})|}{\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|} = \frac{|D_3(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|}{\sqrt{\|\mathbf{b}\|^2\|\mathbf{c}\|^2 - (\mathbf{b}, \mathbf{c})^2}}.$$

(3) 点 A から, 二点 B, C を通る直線に下ろした垂線の足の位置ベクトルを $(1-t)\mathbf{b} + t\mathbf{c}$ ($t \in \mathbf{R}$) とする. $(1-t)\mathbf{b} + t\mathbf{c} - \mathbf{a}$ は $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ と垂直だから $((1-t)\mathbf{b} + t\mathbf{c} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{b}) = 0$ である. 従って $t\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{b})$ だから $t = \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{b})}{\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|^2}$ である. 故に, 二点 B, C を通る直線に下ろした垂線の足の位置ベクトルは

$$\left(1 - \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{b})}{\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|^2}\right) \mathbf{b} + \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{b})}{\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|^2} \mathbf{c} = \frac{(\mathbf{c} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{b})}{\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|^2} \mathbf{b} + \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{b})}{\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|^2} \mathbf{c}.$$

(4) $\frac{(\mathbf{c} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{b})}{\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|^2} + \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{b})}{\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|^2} = 1$ であることに注意すれば, B, C を通る直線に下ろした垂線のベクトルは,

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{c} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{b})}{\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|^2} \mathbf{b} + \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{b})}{\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|^2} \mathbf{c} - \mathbf{a} &= \frac{(\mathbf{c} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{b})}{\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|^2} \mathbf{b} + \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{b})}{\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|^2} \mathbf{c} - \left(\frac{(\mathbf{c} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{b})}{\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|^2} + \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{b})}{\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|^2} \right) \mathbf{a} \\ &= \frac{(\mathbf{c} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{b})}{\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|^2} (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{b})}{\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|^2} (\mathbf{c} - \mathbf{a}) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|^2} ((\mathbf{c} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{b})(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + (\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{b})(\mathbf{c} - \mathbf{a})) \end{aligned}$$

となる. 従って, その長さの 2 乗は

$$\frac{1}{\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|^4} ((\mathbf{c} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{b})^2 \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 + 2(\mathbf{c} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{b})(\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}) + (\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{b})^2 \|\mathbf{c} - \mathbf{a}\|^2)$$

となる. $\mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{y} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$ とおけば, 上の値は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^4} ((\mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y})^2 \|\mathbf{x}\|^2 - 2(\mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y})(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{y})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{y})^2 \|\mathbf{y}\|^2) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^4} (\|\mathbf{x}\|^4 \|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^4 + 2\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 (\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \|\mathbf{x}\|^2 (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 - \|\mathbf{y}\|^2 (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 - 2(\mathbf{x}, \mathbf{y})^3) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^4} (\|\mathbf{x}\|^2 + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2) (\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^4} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 (\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2) = \frac{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}{\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2} = \frac{\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2} \end{aligned}$$

に等しくなるため, 求める垂線の長さは, 以下の値になる.

$$\frac{\sqrt{\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{c} - \mathbf{a}\|^2 - (\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a})^2}}{\|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|} = \frac{\|(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})\|}{\|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|}$$

6. $\mathbf{x} = \mathbf{a} + s\mathbf{u}$ を位置ベクトルとする l 上の点 P と $\mathbf{y} = \mathbf{b} + t\mathbf{v}$ を位置ベクトルとする m 上の点 Q の距離の 2 乗 $PQ^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$ を求める. $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + s\mathbf{u} - t\mathbf{v}$ だから $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ とおけば

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{c} + s\mathbf{u} - t\mathbf{v}\|^2 = s^2\|\mathbf{u}\|^2 - 2st(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + t^2\|\mathbf{v}\|^2 + 2s(\mathbf{c}, \mathbf{u}) - 2t(\mathbf{c}, \mathbf{v}) + \|\mathbf{c}\|^2 \\ &= \left(\|\mathbf{u}\|s - \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|}t + \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} \right)^2 + \frac{\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}, \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u}\|^2}t^2 - 2 \left((\mathbf{c}, \mathbf{v}) - \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{u})(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|^2} \right) t + \|\mathbf{c}\|^2 - \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{u})^2}{\|\mathbf{u}\|^2} \\ &= \left(\|\mathbf{u}\|s - \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|}t + \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} \right)^2 + \left(\frac{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\|}t - \frac{\|\mathbf{u}\|(\mathbf{c}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|} + \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{u})(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|} \right)^2 \\ &\quad + \left(\|\mathbf{c}\|^2 - \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{u})^2}{\|\mathbf{u}\|^2} - \frac{\|\mathbf{u}\|^2(\mathbf{c}, \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2} + 2 \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{u})(\mathbf{c}, \mathbf{v})(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2} - \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{u})^2(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2} \right) \end{aligned}$$

だから $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}, \mathbf{v})^2$ であることに注意すれば, 上式から

$$s = \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{v})(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2} - \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{u})(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2} - \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|^2} = \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{v})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \|\mathbf{v}\|^2(\mathbf{c}, \mathbf{u})}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2}, \quad t = \frac{\|\mathbf{u}\|^2(\mathbf{c}, \mathbf{v}) - (\mathbf{c}, \mathbf{u})(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2}$$

のとき, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$ は最小値 $\|\mathbf{c}\|^2 - \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{u})^2}{\|\mathbf{u}\|^2} - \frac{\|\mathbf{u}\|^2(\mathbf{c}, \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2} + 2 \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{u})(\mathbf{c}, \mathbf{v})(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2} - \frac{(\mathbf{c}, \mathbf{u})^2(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2}$ をとる. この値は

$$\frac{\|\mathbf{c}\|^2\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{c}, \mathbf{u})^2(\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 + (\mathbf{u}, \mathbf{v})^2) - \|\mathbf{u}\|^4(\mathbf{c}, \mathbf{v})^2 + 2\|\mathbf{u}\|^2(\mathbf{c}, \mathbf{u})(\mathbf{c}, \mathbf{v})(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2}$$

に等しいが, 上式の分子は $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}, \mathbf{v})^2$ を用いれば

$$\|\mathbf{c}\|^2\|\mathbf{u}\|^2(\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}, \mathbf{v})^2) - \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2(\mathbf{c}, \mathbf{u})^2 - \|\mathbf{u}\|^4(\mathbf{c}, \mathbf{v})^2 + 2\|\mathbf{u}\|^2(\mathbf{c}, \mathbf{u})(\mathbf{c}, \mathbf{v})(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

となるため, 2 の (6) の結果を用いると $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$ の最小値は

$$\frac{\|\mathbf{c}\|^2\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{c}\|^2(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 - \|\mathbf{v}\|^2(\mathbf{c}, \mathbf{u})^2 - \|\mathbf{u}\|^2(\mathbf{c}, \mathbf{v})^2 + 2(\mathbf{c}, \mathbf{u})(\mathbf{c}, \mathbf{v})(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2} = \frac{D_3(\mathbf{c}, \mathbf{u}, \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2}$$

に等しいことがわかる. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ の最小値 $\frac{|D_3(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v})|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}$ が l と m の最短距離である.

$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a} - s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ だから \overrightarrow{PQ} が \mathbf{u}, \mathbf{v} の両方のベクトルと垂直になるためには $(\mathbf{b} - \mathbf{a} - s\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\mathbf{b} - \mathbf{a} - s\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ が成り立つことが必要十分である. $(\mathbf{b} - \mathbf{a} - s\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \mathbf{u}) = -\|\mathbf{u}\|^2s + (\mathbf{u}, \mathbf{v})t - (\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{u})$, $(\mathbf{b} - \mathbf{a} - s\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -(\mathbf{u}, \mathbf{v})s + \|\mathbf{v}\|^2t - (\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{v})$ だから \overrightarrow{PQ} が \mathbf{u}, \mathbf{v} の両方のベクトルと垂直になるためには $x = s, y = t$ が連立 1 次方程式

$$(*) \begin{cases} -\|\mathbf{u}\|^2x + (\mathbf{u}, \mathbf{v})y = (\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{u}) \\ -(\mathbf{u}, \mathbf{v})x + \|\mathbf{v}\|^2y = (\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{v}) \end{cases}$$

の解であることが必要十分であるが, 上で求めた $PQ = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ が最小になる s, t の値はこの連立 1 次方程式 (*) の解である. また (*) の係数行列の行列式の値は $-\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 + (\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 = -\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2$ で 0 でないため, (*) はただ 1 つの解を持つ. 故に, \overrightarrow{PQ} が \mathbf{u}, \mathbf{v} の両方のベクトルと垂直になるためには, 線分 PQ の長さが最小になるときに限る.

線形数学Ⅱ 演習問題 第11回 複素数

1. 以下の複素数を $x + yi$ (x, y は実数) の形に表せ.

$$(1) (1 + 2i)^3 \quad (2) \frac{5}{-3 + 4i} \quad (3) \left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2 \quad (4) \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3 \quad (5) \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3 \quad (6) \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3$$

$$(7) \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3 \quad (8) (1+i)^n + (1-i)^n$$

2. $z = x + yi$ (x, y は実数) のとき, 以下の複素数の実部と虚部を x と y を用いて表せ.

$$(1) z^4 \quad (2) \frac{1}{z} \quad (3) \frac{z-1}{z+1} \quad (4) \frac{1}{z^2} \quad (5) \frac{z}{z^2+1}$$

3. 複素数 $-2i(3+i)(2+4i)(1+i)$, $\frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}$ の絶対値を求めよ.

4. 以下の方程式の解をすべて求めよ.

$$(1) z^2 = i \quad (2) z^2 = -i \quad (3) z^2 = 1 + i \quad (4) z^2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \quad (5) z^4 = -1 \quad (6) z^4 = i \quad (7) z^4 = -i$$

$$(8) z^5 = 1 \quad (9) z^{10} = 1$$

5. $\cos 3\varphi, \cos 4\varphi, \sin 5\varphi$ を $\cos \varphi$ と $\sin \varphi$ を用いて表せ.

6. $1 + \cos \varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi, \sin \varphi + \sin 2\varphi + \cdots + \sin n\varphi$ を簡単な式で表せ.

7. $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ とおく. 整数 m に対し, 次の値を求めよ.

$$(1) 1 + \omega^m + \omega^{2m} + \cdots + \omega^{(n-1)m} \quad (2) 1 - \omega^m + \omega^{2m} + \cdots + (-1)^{n-1} \omega^{(n-1)m}$$

8. (1) $a \neq b$ のとき, $|a| = 1$ または $|b| = 1$ ならば $\bar{a}b \neq 1$ であることを示し, $\frac{a-b}{1-\bar{a}b}$ の絶対値を求めよ.

(2) $|a| < 1$ かつ $|b| < 1$ ならば $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1$ であることを示せ.

9. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を実数とすると, 次の2次方程式の解を $x + yi$ (x, y は実数) の形に表せ.

$$z^2 + (\alpha + \beta i)z + \gamma + \delta i = 0$$

10. a, b, c を複素数とし, a と b の少なくとも一方は0ではないとする. このとき, z の方程式 $az + b\bar{z} + c = 0$ が解をもつための必要十分条件を求め, その条件が満たされるときに解を求めよ.

11. 複素数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ に対し, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right|^2 = \sum_{j=1}^n |a_j|^2 \sum_{j=1}^n |b_j|^2 - \sum_{1 \leq j < k \leq n} |a_j \bar{b}_k - a_k \bar{b}_j|^2$$

12. a_1, a_2, \dots, a_n を絶対値が1より小さい複素数とし, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を負でない実数とすると, $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ ならば $|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n| < 1$ であることを示せ.

13. (1) 複素数 a と負でない実数 r に対し, $|z-a| + |z+a| = 2r$ を満たす複素数 z が存在するための必要十分条件は $|a| \leq r$ であることを示せ.

(2) $|a| \leq r$ のとき, z が $|z-a| + |z+a| = 2r$ を満たしながら動くとき, $|z|$ の最大値と最小値を求めよ.

14. A, B を n 次正方行列とすると, $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+iB||A-iB|$ が成り立つことを示せ.

第 11 回の演習問題の解答

1. (1) $(1+2i)^3 = 1 + 6i - 12 - 8i = -11 - 2i$ (2) $\frac{5}{-3+4i} = \frac{5(-3-4i)}{25} = \frac{-3}{5} + \frac{-4i}{5}$

(3) $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2 = \left(\frac{(2+i)(3+2i)}{13}\right)^2 = \left(\frac{4+7i}{13}\right)^2 = \frac{-33+56i}{169} = \frac{-33}{169} + \frac{56i}{169}$

(4) $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$

(5) $\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)^3 = \cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi) = 1$

(6) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

(7) $\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^3 = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1$

(8) $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + 2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n + 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^n =$

$$2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) + 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right) = 2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4} = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}+1}(-1)^{\frac{n}{4}} & \frac{n}{2} \text{ は偶数} \\ 0 & \frac{n}{2} \text{ は奇数} \\ 2^{\frac{n+1}{2}}(-1)^{\frac{n-1}{4}} & n-1 \text{ は } 4 \text{ の倍数} \\ 2^{\frac{n+1}{2}}(-1)^{\frac{n+1}{4}} & n+1 \text{ は } 4 \text{ の倍数} \end{cases}$$

2. (1) $z^4 = (x+yi)^4 = x^4 + 4x^3yi - 6x^2y^2 - 4xy^3i + y^4 = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + (4x^3y - 4xy^3)i$ だから

$\operatorname{Re}(z^4) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, $\operatorname{Im}(z^4) = 4x^3y - 4xy^3$.

(2) $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-yi}{x^2+y^2}$ だから $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$.

(3) $\frac{z-1}{z+1} = 1 - \frac{2}{z+1}$ より, (2) の結果から $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 1 - \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+y^2}$, $\operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}$.

(4) $\frac{1}{z^2} = \frac{1}{(x+yi)^2} = \frac{(x-yi)^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-2xyi}{(x^2+y^2)^2}$ だから $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$,

$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

(5) $\frac{z}{z^2+1} = \frac{x+yi}{(x+yi)^2+1} = \frac{x+yi}{x^2-y^2+1+2xyi} = \frac{(x+yi)(x^2-y^2+1-2xyi)}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2} =$

$\frac{x^3+xy^2+x}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2} + \frac{(-x^2y-y^3+yi)}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$ だから $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z^2+1}\right) = \frac{x^3+xy^2+x}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$,

$\operatorname{Im}\left(\frac{z}{z^2+1}\right) = \frac{-x^2y-y^3+y}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}$.

3. $|-2i(3+i)(2+4i)(1+i)| = |-2i||3+i||2+4i||1+i| = 2\sqrt{10}\sqrt{20}\sqrt{2} = 40$

$\left|\frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}\right| = \frac{|3+4i||-1+2i|}{|-1-i||3-i|} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{10}} = \frac{5}{2}$

4. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ($r \geq 0$), $\arg a = \alpha$ とおくと, $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, $a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ だから, 方

程式 $z^n = a$ は $\begin{cases} r^n \cos n\varphi = |a| \cos \alpha & \dots (i) \\ r^n \sin n\varphi = |a| \sin \alpha & \dots (ii) \end{cases}$ と同値である. (i) の両辺を 2 乗したものと (ii) の両辺を 2 乗したもの

を加えれば, $r^{2n} = |a|^2$ が得られ, r は負でない実数だから $r = \sqrt[n]{|a|}$ である. このとき, (i), (ii) を満たす $0 \leq \varphi < 2\pi$

は $\varphi = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) で与えられるため, $z^n = a$ の解は $\sqrt[n]{|a|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right)$

($k = 0, 1, \dots, n-1$) で与えられる.

(1) $|i| = 1$, $\arg i = \frac{\pi}{2}$ だから, 求める解は $\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ ($k = 0, 1$), すなわち $\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ である.

(2) $|-i| = 1$, $\arg i = \frac{3\pi}{2}$ だから, 求める解は $\cos\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi\right)$ ($k = 0, 1$), すなわち $\pm \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ である.

(3) $|1+i| = \sqrt{2}$, $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ だから, 求める解は $\sqrt[4]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8} + k\pi\right) \right)$ ($k = 0, 1$), すなわち $\pm \sqrt[4]{2} \left(\cos\frac{\pi}{8} + i \sin\frac{\pi}{8} \right)$ である. ここで, $2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ であり, $\cos \frac{\pi}{8}$ と $\sin \frac{\pi}{8}$ はともに正だから $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ である. 従って, 求める解は $\pm \sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} i \right)$ である.

(4) $\left| \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \right| = 1$, $\arg \frac{1-\sqrt{3}i}{2} = \frac{5\pi}{3}$ だから, 求める解は $\cos\left(\frac{5\pi}{6} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6} + k\pi\right)$ ($k = 0, 1$), すなわち $\pm \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ である.

(5) $z^4 = -1$ は「 $z^2 = i$ または $z^2 = -i$ 」と同値だから, (1) と (2) により, 求める解は $\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\pm \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ である.

(6) $|i| = 1$, $\arg i = \frac{\pi}{2}$ だから, 求める解は $\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)$ ($k = 0, 1, 2, 3$), すなわち $\pm \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) = \pm \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} i \right)$ と $\pm \left(-\sin \frac{\pi}{8} + i \cos \frac{\pi}{8} \right) = \pm \left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} i \right)$ である.

(7) $|-i| = 1$, $\arg i = \frac{3\pi}{2}$ だから, 求める解は $\cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)$ ($k = 0, 1, 2, 3$), すなわち $\pm \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right)$ と $\pm \left(-\sin \frac{3\pi}{8} + i \cos \frac{3\pi}{8} \right)$ である. ここで, 下の演習問題 5 の結果から

$$\cos \frac{3\pi}{8} = 4 \cos^3 \frac{\pi}{8} - 3 \cos \frac{\pi}{8} = \frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2(2+\sqrt{2})}}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin \frac{3\pi}{8} = 3 \sin \frac{\pi}{8} - 4 \sin^3 \frac{\pi}{8} = \frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2(2-\sqrt{2})}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

だから, 求める解は $\pm \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} i \right)$ と $\pm \left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} i \right)$ である.

(8) 解は $\cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) で与えられる. 下の問題 5 の結果 $16 \sin^5 \varphi - 20 \sin^3 \varphi + 5 \sin \varphi = \sin 5\varphi$

において $\sin 5\varphi = 0$ かつ $\sin \varphi \neq 0$ の場合, $16 \sin^4 \varphi - 20 \sin^2 \varphi + 5 = 0$ だから $\sin \varphi = \pm \frac{\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4}$ である.

$\sin 5\varphi = 0$ かつ $\sin \varphi \neq 0$ を満たす $0 \leq \varphi < 2\pi$ は, $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}$ の 8 つで, $0 < \sin \frac{\pi}{5} < \sin \frac{2\pi}{5}$ だ

から $\sin \frac{\pi}{5} = \sin \frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $\sin \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{3\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, $\sin \frac{6\pi}{5} = \sin \frac{9\pi}{5} = -\sin \frac{\pi}{5} = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$,

$\sin \frac{7\pi}{5} = \sin \frac{8\pi}{5} = -\sin \frac{2\pi}{5} = -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ である. また $\cos \frac{2\pi}{5} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos \frac{4\pi}{5} = 2 \cos^2 \frac{2\pi}{5} - 1 =$

$-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$, $\cos \frac{6\pi}{5} = \cos \frac{4\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{4\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$, $\cos \frac{8\pi}{5} = \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ が得られるため, 求め

る解は, $1, \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i, -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i, -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i, \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i$ である.

(9) $z^{10} - 1 = -(z^5 - 1)((-z)^5 - 1)$ だから $z^{10} = 1$ の解は $z^5 = 1$ の解と, $z^5 = 1$ の解を -1 倍したものである.

従って (8) より, 求める解は $\pm 1, \pm \frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i, \pm \frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i$ (複号任意) である.

5. ド・モアブルの定理と二項定理から、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \cos^{n-k} \varphi \sin^k \varphi \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} (-1)^j \cos^{n-2j} \varphi \sin^{2j} \varphi + i \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} (-1)^j \cos^{n-2j-1} \varphi \sin^{2j+1} \varphi\end{aligned}$$

上式の実部と虚部を比較すれば

$$\cos(n\varphi) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} (-1)^j \cos^{n-2j} \varphi \sin^{2j} \varphi, \quad \sin(n\varphi) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} (-1)^j \cos^{n-2j-1} \varphi \sin^{2j+1} \varphi$$

が得られる。とくに、上式で $n = 3, 4, 5$ の場合を考えれば、以下の結果が得られる。

$$\begin{aligned}\cos 3\varphi &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi (1 - \cos^2 \varphi) = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \\ \sin 3\varphi &= 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi = 3(1 - \sin^2 \varphi) \sin \varphi - \sin^3 \varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi \\ \cos 4\varphi &= \cos^4 \varphi - 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi = \cos^4 \varphi - 6 \cos^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) + (1 - \cos^2 \varphi)^2 = 8 \cos^4 \varphi - 8 \cos^2 \varphi + 1 \\ \sin 4\varphi &= 4 \cos^3 \varphi \sin \varphi - 4 \cos \varphi \sin^3 \varphi = 4 \cos \varphi ((1 - \sin^2 \varphi) \sin \varphi - \sin^3 \varphi) = 4 \cos \varphi (\sin \varphi - 2 \sin^3 \varphi) \\ \cos 5\varphi &= \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi = \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) + 5 \cos \varphi (1 - \cos^2 \varphi)^2 \\ &= 16 \cos^5 \varphi - 20 \cos^3 \varphi + 5 \cos \varphi \\ \sin 5\varphi &= 5 \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi = 5(1 - \sin^2 \varphi)^2 \sin \varphi - 10(1 - \sin^2 \varphi) \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi \\ &= 16 \sin^5 \varphi - 20 \sin^3 \varphi + 5 \sin \varphi\end{aligned}$$

6. $I_n = 1 + \cos \varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi$, $J_n = \sin \varphi + \sin 2\varphi + \cdots + \sin n\varphi$ とおく。 φ が 2π の整数倍ならば、明らかに $I_n = n + 1$, $J_n = 0$ である。 φ が 2π の整数倍ではない場合、 $\omega = \cos \varphi + i \sin \varphi$ とおけば、 $\omega^k = \cos k\varphi + i \sin k\varphi$ であり、 $\omega \neq 1$ だから

$$\begin{aligned}I_n + iJ_n &= \sum_{k=0}^n (\cos k\varphi + i \sin k\varphi) = \sum_{k=0}^n \omega^k = \frac{\omega^{n+1} - 1}{\omega - 1} = \frac{\cos(n+1)\varphi - 1 + i \sin(n+1)\varphi}{\cos \varphi - 1 + i \sin \varphi} \\ &= \frac{(\cos \varphi - 1 - i \sin \varphi)(\cos(n+1)\varphi - 1 + i \sin(n+1)\varphi)}{(\cos \varphi - 1)^2 + \sin^2 \varphi} \\ &= \frac{(\cos \varphi - 1)(\cos(n+1)\varphi - 1) + \sin \varphi \sin(n+1)\varphi + i((\cos \varphi - 1) \sin(n+1)\varphi - \sin \varphi (\cos(n+1)\varphi - 1))}{2(1 - \cos \varphi)} \\ &= \frac{\cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi - \cos \varphi + 1 + i(\sin n\varphi - \sin(n+1)\varphi + \sin \varphi)}{2(1 - \cos \varphi)}\end{aligned}$$

が得られる。 I_n は上式の実部で、 J_n は虚部だから、次の結果が得られる。

$$I_n = \frac{\cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi - \cos \varphi + 1}{2(1 - \cos \varphi)}, \quad J_n = \frac{\sin n\varphi - \sin(n+1)\varphi + \sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)}$$

7. ド・モアブルの定理から、 $\omega^k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ だから、とくに $\omega^n = 1$ である。

(1) $\omega^m = 1$, すなわち m が n の倍数ならば $1 + \omega^m + \omega^{2m} + \cdots + \omega^{(n-1)m} = n$ であり、 $\omega^m \neq 1$, すなわち m が n の倍数ではない場合は、 $1 + \omega^m + \omega^{2m} + \cdots + \omega^{(n-1)m} = \frac{1 - \omega^{mn}}{1 - \omega^m} = 0$ である。

(2) n が偶数で、 m が $\frac{n}{2}$ の奇数倍の場合は、 $\frac{2m}{n}$ は奇数になるため、 $\omega^m = -1$ である。従って、この場合は $1 - \omega^m + \omega^{2m} + \cdots + (-1)^{n-1} \omega^{(n-1)m} = n$ である。 n が偶数で、 m が $\frac{n}{2}$ の奇数倍ではない場合は、 $\omega^m \neq -1$ だから

$1 - \omega^m + \omega^{2m} + \cdots + (-1)^{n-1} \omega^{(n-1)m} = \frac{1 - (-\omega^m)^n}{1 - (-\omega^m)} = \frac{1 - (-1)^n}{1 + \omega^m} = 0$ である。 n が奇数の場合は、 $\omega^m \neq -1$ だから $1 - \omega^m + \omega^{2m} + \cdots + (-1)^{n-1} \omega^{(n-1)m} = \frac{1 - (-\omega^m)^n}{1 - (-\omega^m)} = \frac{1 - (-1)^n}{1 + \omega^m} = \frac{2}{1 + \omega^m}$ である。

8. (1) $\bar{a}b = 1$ の両辺に a をかけると $|a|^2b = a$ が得られるため, $|a| = 1$ ならば $a = b$ である. $\bar{a}b = 1$ の両辺の共役複素数を考えれば $a\bar{b} = 1$ が得られ, この両辺に b をかけると $|b|^2a = b$ が得られるため, $|b| = 1$ ならば $a = b$ である. 故に, $|a| = 1$ または $|b| = 1$ の場合, $\bar{a}b = 1$ が成り立てば $a = b$ となるため, $a \neq b$ であれば $\bar{a}b \neq 1$ である.

$|a| = 1$ の場合, $\bar{a}a = 1$ だから $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = \left| \frac{a(a-b)}{a(1-\bar{a}b)} \right| = \left| \frac{a(a-b)}{a-b} \right| = |a| = 1$. $|b| = 1$ の場合, $\bar{b}b = 1$ だから $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = \left| \frac{\bar{b}(a-b)}{\bar{b}(1-\bar{a}b)} \right| = \left| \frac{\bar{b}(a-b)}{\bar{b}-\bar{a}} \right| = \frac{|\bar{b}||a-b|}{|\bar{b}-\bar{a}|} = \frac{|b||a-b|}{|b-a|} = |b| = 1$. 従って $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1$ である.

(2) $|a| < 1$ かつ $|b| < 1$ ならば $1 - |a|^2 > 0$ かつ $1 - |b|^2 > 0$ だから

$$\begin{aligned} |1 - \bar{a}b|^2 - |a-b|^2 &= \overline{(1 - \bar{a}b)}(1 - \bar{a}b) - \overline{(a-b)}(a-b) = (1 - a\bar{b})(1 - \bar{a}b) - (\bar{a} - \bar{b})(a-b) \\ &= 1 + |a|^2|b|^2 - |a|^2 - |b|^2 = (1 - |a|^2)(1 - |b|^2) > 0. \end{aligned}$$

従って $|a-b|^2 < |1 - \bar{a}b|^2$ だから $0 \leq |a-b| < |1 - \bar{a}b|$ が得られ, この両辺を $|1 - \bar{a}b| > 0$ で割れば $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = \frac{|a-b|}{|1-\bar{a}b|} < 1$ が得られる.

9. まず $z^2 = a + bi$ (a, b は実数) の解を $x + yi$ (x, y は実数) の形に表すことを考える.

$b = 0$ の場合は, $a \geq 0$ ならば $z = \pm\sqrt{a}$ が解であり, $a < 0$ ならば $z = \pm\sqrt{-a}i$ が解である.

$b \neq 0$ の場合, $(x + yi)^2 = a + bi$ の両辺の実部と虚部を比較して $\begin{cases} x^2 - y^2 = a & \dots (i) \\ 2xy = b & \dots (ii) \end{cases}$ を得る. (ii) より $x \neq 0$,

$y = \frac{b}{2x}$ だから, これを (i) に代入すれば $x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a$ が得られるため, $4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0$ が成り立つ. これを x^2

に関する 2 次方程式とみなせば, $x^2 \geq 0$ より $x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$, よって $x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}$ である. $y = \frac{b}{2x}$ より

$y = \pm\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$ となるため, $z^2 = a + bi$ の解は $b > 0$ ならば $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right)$,

$b < 0$ ならば $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right)$ である. ここで, $b = 0$ の場合,

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} = \sqrt{\frac{|a| + a}{2}} + i\sqrt{\frac{|a| - a}{2}} = \begin{cases} \sqrt{a} & a \geq 0 \\ \sqrt{-a}i & a < 0 \end{cases}$$

だから, $b \geq 0$ の場合, $z^2 = a + bi$ の解は $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right)$ である.

$z^2 + (\alpha + \beta i)z + \gamma + \delta i = \left(z + \frac{\alpha + \beta i}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma}{4} - \frac{\alpha\beta - 2\delta}{2}i$ だから, 与えられた方程式は

$$\left(z + \frac{\alpha + \beta i}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma}{4} + \frac{\alpha\beta - 2\delta}{2}i$$

と同値である. 従って上の結果から, $\alpha\beta \geq 2\delta$ ならば, 次の 2 つが与えられた方程式の解であり,

$$-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma)^2 + 4(\alpha\beta - 2\delta)^2} + (\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma)}{8}} + i\left(-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma)^2 + 4(\alpha\beta - 2\delta)^2} - (\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma)}{8}}\right)$$

$$-\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma)^2 + 4(\alpha\beta - 2\delta)^2} + (\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma)}{8}} + i\left(-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma)^2 + 4(\alpha\beta - 2\delta)^2} - (\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma)}{8}}\right)$$

$\alpha\beta < 2\delta$ ならば, 次の 2 つが与えられた方程式の解である.

$$-\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma)^2 + 4(\alpha\beta - 2\delta)^2} + (\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma)}{8}} + i\left(-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma)^2 + 4(\alpha\beta - 2\delta)^2} - (\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma)}{8}}\right)$$

$$-\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma)^2 + 4(\alpha\beta - 2\delta)^2} + (\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma)}{8}} + i \left(-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma)^2 + 4(\alpha\beta - 2\delta)^2} - (\alpha^2 - \beta^2 - 4\gamma)}{8}} \right)$$

10. $az + b\bar{z} + c = 0$ の両辺の共役を考えれば $\bar{b}z + \bar{a}\bar{z} + \bar{c} = 0$ だから、 z が $az + b\bar{z} + c = 0$ の解であることと、 $x = z$, $y = \bar{z}$ が連立 1 次方程式

$$(*) \begin{cases} ax + by = -c & \cdots (i) \\ \bar{b}x + \bar{a}y = -\bar{c} & \cdots (ii) \end{cases}$$

の解であることは同値である。

$|a| \neq |b|$ の場合、(*) はただ 1 つの解 $x = \frac{b\bar{c} - \bar{a}c}{|a|^2 - |b|^2}$, $y = \frac{\bar{b}c - a\bar{c}}{|a|^2 - |b|^2}$ をもつ。このとき $y = \bar{x}$ が成り立っているため、 $z = \frac{b\bar{c} - \bar{a}c}{|a|^2 - |b|^2}$ は $az + b\bar{z} + c = 0$ の唯一の解である。

$|a| = |b|$ の場合、(i) の両辺を \bar{a} 倍したのから (ii) の両辺を b 倍したものを引けば、 $b\bar{c} - \bar{a}c = 0$ が得られるため、 $b\bar{c} - \bar{a}c \neq 0$ ならば (*) は解をもたない。従って、 $|a| = |b|$ かつ $b\bar{c} - \bar{a}c \neq 0$ ならば $az + b\bar{z} + c = 0$ は解をもたない。

$|a| = |b|$ かつ $b\bar{c} - \bar{a}c = 0$ の場合、 $\frac{b}{a} = \lambda$, $\frac{c}{a} = \mu$ とおけば $|\lambda| = 1$ であり、 $b = \lambda a$, $c = \mu a$ である。これらを $b\bar{c} = \bar{a}c$ と $az + b\bar{z} + c = 0$ に代入すれば $\lambda\bar{\mu}|a|^2 = \mu|a|^2$, $az + \lambda a\bar{z} + \mu a = 0$ が得られるため、 $\lambda\bar{\mu} = \mu$, $z + \lambda\bar{z} + \mu = 0$ が成り立つ。 $c \neq 0$ のときは、 $\mu \neq 0$ であり、後者の両辺に $\bar{\mu}$ をかけて前者の等式を用いれば、 $\bar{\mu}z + \mu\bar{z} + |\mu|^2 = 0$ を得る。従って $2\text{Re}(\bar{\mu}z) = -|\mu|^2$ だから $\bar{\mu}z = -\frac{|\mu|^2}{2} + \frac{|\mu|^2}{2}ti$ を満たす実数 t がある。故に $z = -\frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2}ti = \frac{c}{2a}(ti - 1)$ は $az + b\bar{z} + c = 0$ の解になる。 $c = 0$ の場合は $\mu = 0$ だから、 $z + \lambda\bar{z} = 0$ である。 $\arg \lambda = \alpha$ とおき、 $z \neq 0$ のとき、 $\arg z = \theta$ とおいて $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, $\bar{z} = |z|(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$, $-\lambda = \cos(\pi + \alpha) + i \sin(\pi + \alpha)$ を $z = -\lambda\bar{z}$ に代入すれば $\cos \theta + i \sin \theta = \cos(\pi + \alpha - \theta) + i \sin(\pi + \alpha - \theta)$ が得られるため、 $\theta = (2k + 1)\pi + \alpha - \theta$ を満たす整数 k が存在する。故に $\theta = k\pi + \frac{\alpha + \pi}{2}$ だから $z = (-1)^k |z| \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$ となるため、 $\nu^2 = \frac{b}{a}$ を満たす複素数 ν を考えれば、 z は $z = i\nu t$ (t は実数) と表される。

以上から $az + b\bar{z} + c = 0$ が解をもつための必要十分条件は $|a| \neq |b|$ または「 $|a| = |b|$ かつ $b\bar{c} - \bar{a}c = 0$ 」である。

$|a| \neq |b|$ のとき、 $az + b\bar{z} + c = 0$ は唯一の解 $z = \frac{b\bar{c} - \bar{a}c}{|a|^2 - |b|^2}$ をもつ。

$c \neq 0$ かつ $b\bar{c} - \bar{a}c = 0$ のとき、 $|b||c| = |b||\bar{c}| = |b\bar{c}| = |\bar{a}c| = |\bar{a}||c| = |a||c|$ だから、 $|a| = |b|$ であり、 $az + b\bar{z} + c = 0$ の解は $z = \frac{c}{2a}(ti - 1)$ (t は実数) で与えられる。

$c = 0$ かつ $|a| = |b|$ のとき、 $\nu^2 = \frac{b}{a}$ を満たす複素数 ν を考えれば、 $az + b\bar{z} + c = 0$ の解は $z = i\nu t$ (t は実数) で与えられる。

11. n による数学的帰納法で主張を示す。 $n = 1$ の場合は、主張が正しいことは明らかである。 $S_n = \sum_{j=1}^n |a_j|^2$,

$T_n = \sum_{j=1}^n |b_j|^2$, $U_n = \sum_{j=1}^n a_j b_j$ とおき、 $n = l - 1$ のときに主張が正しいと仮定すれば、次の等式が成り立つ。

$$|U_{l-1}|^2 = S_{l-1}T_{l-1} - \sum_{1 \leq j < k \leq l-1} |a_j \bar{b}_k - a_k \bar{b}_j|^2$$

$S_l = S_{l-1} + |a_l|^2$, $T_l = T_{l-1} + |b_l|^2$, $U_l = U_{l-1} + a_l b_l$ だから、上の等式を用いれば

$$\begin{aligned} |U_l|^2 - S_l T_l &= \bar{U}_l U_l - S_l T_l = (\bar{U}_{l-1} + \bar{a}_l \bar{b}_l)(U_{l-1} + a_l b_l) - (S_{l-1} + |a_l|^2)(T_{l-1} + |b_l|^2) \\ &= |U_{l-1}|^2 + U_{l-1} \bar{a}_l \bar{b}_l + \bar{U}_{l-1} a_l b_l - S_{l-1} T_{l-1} - S_{l-1} |b_l|^2 - T_{l-1} |a_l|^2 \\ &= - \sum_{1 \leq j < k \leq l-1} |a_j \bar{b}_k - a_k \bar{b}_j|^2 + U_{l-1} \bar{a}_l \bar{b}_l + \bar{U}_{l-1} a_l b_l - S_{l-1} |b_l|^2 - T_{l-1} |a_l|^2 \end{aligned}$$

が得られる。ここで、

$$\begin{aligned}
 U_{l-1}\bar{a}_l\bar{b}_l + \bar{U}_{l-1}a_l b_l - S_{l-1}|b_l|^2 - T_{l-1}|a_l|^2 &= \sum_{j=1}^{l-1} a_j b_j \bar{a}_l \bar{b}_l + \sum_{j=1}^{l-1} \bar{a}_j \bar{b}_j a_l b_l - \sum_{j=1}^{l-1} |a_j|^2 |b_l|^2 - \sum_{j=1}^{l-1} |a_l|^2 |b_j|^2 \\
 &= \sum_{j=1}^{l-1} (a_j b_j \bar{a}_l \bar{b}_l + \bar{a}_j \bar{b}_j a_l b_l - a_j \bar{a}_j b_l \bar{b}_l - a_l \bar{a}_l b_j \bar{b}_j) \\
 &= - \sum_{j=1}^{l-1} (a_j \bar{b}_l - a_l \bar{b}_j) (\bar{a}_j b_l - \bar{a}_l b_j) = - \sum_{j=1}^{l-1} |a_j \bar{b}_l - a_l \bar{b}_j|^2
 \end{aligned}$$

だから、上式より

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right|^2 - \sum_{j=1}^n |a_j|^2 \sum_{j=1}^n |b_j|^2 &= |U_l|^2 - S_l T_l = - \sum_{1 \leq j < k \leq l-1} |a_j \bar{b}_k - a_k \bar{b}_j|^2 - \sum_{j=1}^{l-1} |a_j \bar{b}_l - a_l \bar{b}_j|^2 \\
 &= - \sum_{1 \leq j < k \leq n} |a_j \bar{b}_k - a_k \bar{b}_j|^2
 \end{aligned}$$

が得られて、 $n = l$ のときも主張が正しいことがわかる。

12. 三角不等式 $|z+w| \leq |z|+|w|$ から、 n による数学的帰納法で $|z_1+z_2+\cdots+z_n| \leq |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$ が成り立つことは容易に示される。また、 $|\lambda z| = |\lambda||z|$ だから、 λ が負でない実数ならば $|\lambda z| = \lambda|z|$ が成り立つ。 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ が負でない実数で、 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ ならば $\lambda_j > 0$ となる j が存在し、 $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n| < 1$ ならば、 $\lambda_j > 0$ である j に対して $\lambda_j |a_j| < \lambda_j$ である。従って

$$\begin{aligned}
 |\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n| &\leq |\lambda_1 a_1| + |\lambda_2 a_2| + \cdots + |\lambda_n a_n| = \lambda_1 |a_1| + \lambda_2 |a_2| + \cdots + \lambda_n |a_n| \\
 &< \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1.
 \end{aligned}$$

13. (1) $|z-a|+|z+a|=2r$ を満たす複素数 z が存在すれば、三角不等式より

$$2|a| = |(a-z) + (a+z)| \leq |a-z| + |a+z| = |z-a| + |z+a| = 2r$$

だから $|a| \leq r$ である。逆に $|a| \leq r$ ならば $z = \begin{cases} r & a=0 \\ \frac{ra}{|a|} & a \neq 0 \end{cases}$ のとき $|z-a|+|z+a|=2r$ が成り立つ。

(2) $a=0$ のときは $|z|$ は一定の値 r をとるため、以下では $a \neq 0$ とする。 z は $a, -a$ を焦点とする楕円の周囲を動くため、 $|z|$ が最大になるのは z が長軸上にあるときで、 $|z|$ が最小になるのは z が短軸上にあるときである。 z が長軸上にあるときは $z = at$ となる実数が存在して $|t| \geq 1$ である。このとき $|at-a|+|at+a|=2r$ だから $2|a||t|=2r$ が得られるため $t = \pm \frac{r}{|a|}$ である。従って $|z|$ が最大になるのは $z = \pm \frac{ra}{|a|}$ のときで、 $|z|$ の最大値は r である。 z が短軸上にあるときは $z = ait$ となる実数が存在する。このとき $|ait-a|+|ait+a|=2r$ だから $2|a|\sqrt{1+t^2}=2r$ が得られるため $t = \pm \frac{\sqrt{r^2-|a|^2}}{|a|}$ である。従って $|z|$ が最小になるのは $z = \pm \frac{\sqrt{r^2-|a|^2}}{|a|}i$ のときで、 $|z|$ の最小値は $\sqrt{r^2-|a|^2}$ である。

[参考] $|z-a|+|z+a|=2r$ のとき、三角不等式より $2|z| = |(z-a) + (z+a)| \leq |z-a| + |z+a| = 2r$ だから $|z| \leq r$ である。 $|z-a|+|z+a|=2r$ の両辺を 2 乗すれば $|z-a|^2 + 2|z-a||z+a| + |z+a|^2 = 4r^2$ が得られ、 $|z-a|^2 + |z+a|^2 = (\bar{z}-\bar{a})(z-a) + (\bar{z}+\bar{a})(z+a) = 2|z|^2 + 2|a|^2$ だから $2|z|^2 + 2|z-a||z+a| + 2|a|^2 = 4r^2$ が成り立つ。従って $|z^2-a^2| = 2r^2 - |z|^2 - |a|^2$ であり、この両辺を 2 乗した等式と

$$\begin{aligned}
 |z^2-a^2|^2 &= (\bar{z}^2-\bar{a}^2)(z^2-a^2) = |z^2|^2 + |a^2|^2 - \bar{z}^2 a^2 - z^2 \bar{a}^2 = |z|^4 + |a|^4 - 2\operatorname{Re}(z^2 \bar{a}^2) \\
 (2r^2 - |z|^2 - |a|^2)^2 &= 4r^4 + |z|^4 + |a|^4 - 4r^2|z|^2 - 4r^2|a|^2 + 2|z|^2|a|^2 = 4r^2(r^2 - |z|^2 - |a|^2) + |z|^4 + |a|^4 + 2|z^2 \bar{a}^2|
 \end{aligned}$$

より $2r^2 (|z|^2 + |a|^2 - r^2) = \operatorname{Re}(z^2 \bar{a}^2) + |z^2 \bar{a}^2|$ が得られる. $|z^2 \bar{a}^2| \geq |\operatorname{Re}(z^2 \bar{a}^2)|$ だから, 左式の右辺は 0 以上である. 故に $|z|^2 + |a|^2 - r^2 \geq 0$ より $|z|^2 \geq r^2 - |a|^2$ すなわち $|z| \geq \sqrt{r^2 - |a|^2}$ である.

14. $j = 1, 2, \dots, n$ に対し, $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ の第 $n+j$ 行を i 倍して第 j 行に加えて得られる行列 $\begin{pmatrix} A+iB & -B+iA \\ B & A \end{pmatrix}$ を

考え, 次に $k = 1, 2, \dots, n$ に対し, この行列の第 k 列を $-i$ 倍して第 $n+k$ 列に加えて得られる行列 $\begin{pmatrix} A+iB & O \\ B & A-iB \end{pmatrix}$

を考えれば, これらの行列式の値はもとの行列の行列式の値に等しいため, $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+iB & -B+iA \\ B & A \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} A+iB & O \\ B & A-iB \end{vmatrix} = |A+iB||A-iB|$ が得られる.

線形数学Ⅱ 演習問題 第12回 ベクトル空間・部分空間

1. 以下で与えられる \mathbf{R}^3 の部分集合 V が \mathbf{R}^3 の加法とスカラー倍で \mathbf{R}^3 の部分空間であるかどうかを, 理由とともに答えよ.

$$\begin{array}{lll}
 (1) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid xy \geq 0 \right\} & (2) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid z \neq 0 \right\} & (3) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid z = x + 2y \right\} \\
 (4) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid z = 0 \right\} & (5) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid xy = 0 \right\} & (6) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2 \right\} \\
 (7) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x^3 = y^3 \right\} & (8) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid xyz \leq 0 \right\} & (9) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x, y, z \text{ は整数} \right\} \\
 (10) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x & y \\ z & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} & (11) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
 (12) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x & y \\ y & z-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} & (13) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x & y \\ z^2 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
 (14) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \\ z & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} & &
 \end{array}$$

2. 以下で与えられる $M_n(\mathbf{C})$ の部分集合 V が $M_n(\mathbf{C})$ の加法とスカラー倍で $M_n(\mathbf{C})$ の部分空間であるかどうかを, 理由とともに答えよ. ただし, $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ に対し, \bar{a}_{ji} を (i, j) 成分とする $n \times m$ 行列を A^* で表す.

$$\begin{array}{lll}
 (1) V = \{A \in M_n(\mathbf{C}) \mid \text{tr} A = 0\} & (2) V = \{A \in M_n(\mathbf{C}) \mid A^* = A\} & (3) V = \{A \in M_n(\mathbf{C}) \mid A^* A = E_n\} \\
 (4) V = \{A \in M_n(\mathbf{C}) \mid |A| = 0\} & (5) V = \{A \in M_n(\mathbf{C}) \mid A \text{ は上半三角行列}\} &
 \end{array}$$

3. 以下で与えられるベクトル空間 V の部分集合 W が, V の加法とスカラー倍で V の部分空間であるかどうかを, 理由とともに答えよ. ただし, a, b は実数とし, 第 j 成分が x_j である $\mathbf{x} \in \mathbf{K}^n$ に対し, $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$ とおく.

$$\begin{array}{l}
 (1) V = \mathbf{K}^n, W = \{\mathbf{x} \in V \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}. (A \in M_{m,n}(\mathbf{K}), \mathbf{b} \in \mathbf{K}^m) \\
 (2) V = \mathbf{K}^n, W = \{\mathbf{x} \in V \mid \|\mathbf{x}\| = c\}. (c \text{ は負でない実数}) \\
 (3) V = M_{l,m}(\mathbf{K}), W = \{X \in V \mid AXB = C\}. (A \in M_{k,l}(\mathbf{K}), B \in M_{m,n}(\mathbf{K}), C \in M_{k,n}(\mathbf{K})) \\
 (4) V = M_{m,n}(\mathbf{K}), W = \{X \in V \mid AX - XB = C\}. (A \in M_m(\mathbf{K}), B \in M_n(\mathbf{K}), C \in M_{m,n}(\mathbf{K})) \\
 (5) V = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ は連続関数}\}, W = \left\{ f \in V \mid \int_a^b f(x)p(x)dx = 0 \right\}. (p \in V) \\
 (6) V = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ は連続関数}\}, W = \{f \in V \mid f(a) = f(b) = 0\}. \\
 (7) V = \{f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ は } C^n \text{ 級関数}\}, W = \left\{ f \in V \mid \sum_{k=0}^n \alpha_k(x)f^{(k)}(x) = \beta(x) \right\}. (\alpha_k, \beta : (a, b) \rightarrow \mathbf{R} \text{ は連続}) \\
 (8) V = \{f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ は } C^2 \text{ 級関数}\}, W = \{f \in V \mid f''(x) = -k \sin f(x)\} (k \text{ は } 0 \text{ でない実数})
 \end{array}$$

第 12 回の演習問題の解答

1. (1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$ であるが $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin V$ だから V は \mathbf{R}^3 の部分空間ではない.

(2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin V$ だから V は \mathbf{R}^3 の部分空間ではない.

(3) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in V, r \in \mathbf{R}$ とすれば $z = x + 2y, w = u + 2v$ だから, $z + w = (x + u) + 2(y + v)$,

$rz = rx + 2ry$ であり, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x + u \\ y + v \\ z + w \end{pmatrix}, r\mathbf{x} = \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix}$ より, $\mathbf{x} + \mathbf{y}, r\mathbf{x} \in V$ である. 従って V は \mathbf{R}^3 の部分空間である.

(4) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in V, r \in \mathbf{R}$ とすれば $z = w = 0$ だから, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x + u \\ y + v \\ 0 \end{pmatrix}, r\mathbf{x} = \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ 0 \end{pmatrix}$ より,

$\mathbf{x} + \mathbf{y}, r\mathbf{x} \in V$ である. 従って V は \mathbf{R}^3 の部分空間である.

(5) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$ であるが $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin V$ だから V は \mathbf{R}^3 の部分空間ではない.

(6) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$ であるが $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin V$ だから V は \mathbf{R}^3 の部分空間ではない.

(7) 実数 x, y が $x^3 = y^3$ を満たせば $(x - y) \left(\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \right) = x^3 - y^3 = 0$ より, $x = y$ だから, $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x = y \right\}$ である. 従って $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in V, r \in \mathbf{R}$ とすれば $x = y, u = v$ だから,

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x + u \\ y + v \\ z + w \end{pmatrix}, r\mathbf{x} = \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix}$ と $x + u = y + v, rx = ry$ より, $\mathbf{x} + \mathbf{y}, r\mathbf{x} \in V$ である. 従って V は \mathbf{R}^3 の部分空間である.

(8) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in V$ であるが $(-1) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin V$ だから V は \mathbf{R}^3 の部分空間ではない.

(9) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$ であるが $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin V$ だから V は \mathbf{R}^3 の部分空間ではない.

(10) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ が V に属するためには $\begin{pmatrix} x & y \\ z & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が成り立つことが必要十分であるが, これは

$x + 2y = z = 0$ が成り立つことと同値である. 従って $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in V, r \in \mathbf{R}$ とすれば $x + 2y = z = 0,$

$u + 2v = w = 0$ だから, $(x + u) + 2(y + v) = z + w = 0, rx + 2ry = rz = 0$ であり, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x + u \\ y + v \\ z + w \end{pmatrix}, r\mathbf{x} = \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix}$

より, $\mathbf{x} + \mathbf{y}, r\mathbf{x} \in V$ である. 従って V は \mathbf{R}^3 の部分空間である.

(11) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin V$ だから V は \mathbf{R}^3 の部分空間ではない.

(12) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin V$ だから V は \mathbf{R}^3 の部分空間ではない.

(13) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in V$ であるが $(-1) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \notin V$ だから V は \mathbf{R}^3 の部分空間ではない.

(14) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ が V に属するためには $\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \\ z & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が成り立つことが必要十分であるが, これは

$x - 2y = y - 2z = z - 2x = 0$ が成り立つことと同値であり, さらにこれは $x = y = z = 0$ であることと同値である. 従って V は \mathbf{R}^3 の零ベクトルのみからなる集合だから V は \mathbf{R}^3 の部分空間である.

2. (1) $A, B \in V, c \in \mathbf{C}$ ならば $\text{tr}A = \text{tr}B = 0$ だから $\text{tr}(A + B) = \text{tr}A + \text{tr}B = 0 + 0 = 0, \text{tr}(cA) = c\text{tr}A = 0$ である. 故に $A + B, cA \in V$ だから V は $M_n(\mathbf{C})$ の部分空間である.

(2) $E_n \in V$ であるが, $(iE_n)^* = -iE_n \neq iE_n$ だから, $iE_n \notin V$ である. 故に V は $M_n(\mathbf{C})$ の部分空間ではない.

(3) $O_n^* O_n = O_n \neq E_n$ だから $O_n \notin V$ となるため, V は $M_n(\mathbf{C})$ の部分空間ではない.

(4) $A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & e_2 & e_3 & \dots & e_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ とおけば, $|A| = |B| = 0$ だから $A, B \in V$ であるが, $A + B = E_n$ だから $|A + B| = 1 \neq 0$ となるため $A + B \notin V$ である. 故に V は $M_n(\mathbf{C})$ の部分空間ではない.

(5) $A = (a_{jk}), B = (b_{jk}) \in V, c \in \mathbf{C}$ ならば $1 \leq k < j \leq n$ に対し, $a_{jk} = b_{jk} = 0$ である. $A + B = (a_{jk} + b_{jk}), cA = (ca_{jk})$ であり, $1 \leq k < j \leq n$ に対し, $a_{jk} + b_{jk} = ca_{jk} = 0$ だから $A + B$ と cA も上半三角行列である. 従って $A + B, cA \in V$ となるため, V は $M_n(\mathbf{C})$ の部分空間である.

3. (1) $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ の場合, $A\mathbf{0} = \mathbf{0} \neq \mathbf{b}$ だから $\mathbf{0} \notin W$ である. 従って $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ の場合は W は V の部分空間ではない.

$\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W, r \in \mathbf{K}$ ならば $A\mathbf{x} = A\mathbf{y} = \mathbf{0}$ だから $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}, A(r\mathbf{x}) = rA\mathbf{x} = r\mathbf{0} = \mathbf{0}$ である. 故に $\mathbf{x} + \mathbf{y}, r\mathbf{x} \in W$ となるため, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合は W は V の部分空間である.

(2) $c \neq 0$ の場合, $\|\mathbf{0}\| = 0 \neq c$ だから $\mathbf{0} \notin W$ である. 従って $c \neq 0$ の場合は W は V の部分空間ではない.

$c = 0$ の場合, $\|\mathbf{x}\| = 0$ であることは, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ であることと同値だから, W は V の零ベクトルのみからなる集合になるため W は V の部分空間である.

(3) $C \neq O_{k,n}$ の場合, $AO_{l,m}B = O_{k,n} \neq C$ だから $O_{l,m} \notin W$ である. 従って $C \neq O_{k,n}$ の場合は W は V の部分空間ではない.

$C = O_{k,n}$ の場合, $X, Y \in W, r \in \mathbf{K}$ ならば $AXB = AYB = O_{k,n}$ だから $A(X + Y)B = AXB + AYB = O_{k,n} + O_{k,n} = O_{k,n}, A(rX)B = rAXB = rO_{k,n} = O_{k,n}$ である. 故に $X + Y, rX \in W$ となるため, $C = O_{k,n}$ の場合は W は V の部分空間である.

(4) $C \neq O_{m,n}$ の場合, $AO_{m,n} - O_{m,n}B = O_{m,n} \neq C$ だから $O_{m,n} \notin W$ である. 従って $C \neq O_{m,n}$ の場合は W

は V の部分空間ではない.

$C = O_{m,n}$ の場合, $X, Y \in W$, $r \in \mathbf{K}$ ならば $AX - XB = AY - YB = O_{m,n}$ だから $A(X + Y) - (X + Y)B = AX - XB + AY - YB = O_{m,n} + O_{m,n} = O_{m,n}$, $A(rX) - (rX)B = r(AX - XB) = rO_{m,n} = O_{m,n}$ である. 故に $X + Y, rX \in W$ となるため, $C = O_{m,n}$ の場合は W は V の部分空間である.

(5) $f, g \in W$, $r \in \mathbf{R}$ ならば $\int_a^b f(x)p(x)dx = \int_a^b g(x)p(x)dx = 0$ だから

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g)(x)p(x)dx &= \int_a^b (f(x) + g(x))p(x)dx = \int_a^b (f(x)p(x) + g(x)p(x))dx \\ &= \int_a^b f(x)p(x)dx + \int_a^b g(x)p(x)dx = 0 + 0 = 0, \\ \int_a^b (rf)(x)p(x)dx &= \int_a^b rf(x)p(x)dx = r \int_a^b f(x)p(x)dx = r0 = 0 \end{aligned}$$

となるため, $f + g, rf \in V$ である. 従って W は V の部分空間である.

(6) $f, g \in W$, $r \in \mathbf{R}$ ならば $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$ だから $(f + g)(a) = f(a) + g(a) = 0 + 0 = 0$, $(f + g)(b) = f(b) + g(b) = 0 + 0 = 0$, $(rf)(a) = rf(a) = r0 = 0$, $(rf)(b) = rf(b) = r0 = 0$ となるため, $f + g, rf \in V$ である. 従って W は V の部分空間である.

(7) β が (a, b) でつねに 0 の値をとる定数値関数の場合, $f, g \in W$, $r \in \mathbf{R}$ ならば $\sum_{k=0}^n \alpha_k(x)f^{(k)}(x) = 0$ かつ $\sum_{k=0}^n \alpha_k(x)g^{(k)}(x) = 0$ が任意の $x \in (a, b)$ に対して成り立つ. 1つ目の式と 2つ目の式を辺々加えれば $\sum_{k=0}^n \alpha_k(x)(f^{(k)}(x) + g^{(k)}(x)) = 0$ が得られるが, $f^{(k)}(x) + g^{(k)}(x) = (f + g)^{(k)}(x)$ だから, この等式は $f + g \in W$ であることを示している. また, 1つ目の式の両辺に $c \in \mathbf{R}$ をかければ $\sum_{k=0}^n \alpha_k(x)cf^{(k)}(x) = 0$ が得られるが, $cf^{(k)}(x) = (cf)^{(k)}(x)$ だから, この等式は $cf \in W$ であることを示している. 故に W は V の部分空間である. 区間 (a, b) で値がつねに 0 である定数値関数が V の零ベクトル $\mathbf{0}$ であり, 任意の $x \in (a, b)$ に対して $\sum_{k=0}^n \alpha_k(x)\mathbf{0}^{(k)}(x) = 0$ が成り立つため, β が (a, b) で 0 以外の値をとる関数ならば $\sum_{k=0}^n \alpha_k(x)\mathbf{0}^{(k)}(x) = \beta(x)$ を満たさない $x \in (a, b)$ がある. 従って β が (a, b) で 0 以外の値をとる関数の場合, W は V の零ベクトル $\mathbf{0}$ を含まないため, W は V の部分空間ではない.

(8) 区間 (a, b) で値がつねに π である定数値関数を f で表せば, すべての $x \in (a, b)$ に対して $f''(x) = 0 = -k \sin \pi = -k \sin f(x)$ だから $f \in W$ である. 一方 $\frac{1}{2}f$ は区間 (a, b) で値がつねに $\frac{\pi}{2}$ である定数値関数だから, $\left(\frac{1}{2}f\right)''(x) = 0$ であるが, $-k \sin\left(\frac{1}{2}f(x)\right) = -k \sin \frac{\pi}{2} = -k \neq 0$ だから $\frac{1}{2}f$ は W に属さない. 従って W は V の部分空間ではない.

線形数学 II 演習問題 第 13 回 ベクトル空間の基底と次元

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \text{ とす}$$

るとき, 以下で与えるベクトル空間の次元と一組の基底を求めよ.

- (1) $\{x \in \mathbf{K}^4 \mid Ax = 0\}$ (2) $\{b \in \mathbf{K}^3 \mid Ax = b \text{ を満たす } x \in \mathbf{K}^4 \text{ がある}\}$
 (3) $\{x \in \mathbf{K}^4 \mid Bx = 0\}$ (4) $\{b \in \mathbf{K}^4 \mid Bx = b \text{ を満たす } x \in \mathbf{K}^4 \text{ がある}\}$
 (5) $\{x \in \mathbf{K}^4 \mid Cx = 0\}$ (6) $\{b \in \mathbf{K}^4 \mid Cx = b \text{ を満たす } x \in \mathbf{K}^4 \text{ がある}\}$
 (7) $\{x \in \mathbf{K}^4 \mid Dx = 0\}$ (8) $\{b \in \mathbf{K}^4 \mid Dx = b \text{ を満たす } x \in \mathbf{K}^4 \text{ がある}\}$

2. 以下で与えるベクトル空間 V におけるベクトルの集合 S の中から, 1 次独立である極大な部分集合を 1 つ選ぶことにより, S で生成される V の部分空間の一組の基底を求めよ.

$$(1) V = \mathbf{K}^3, S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ a-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p-q \\ -ap-aq+q \\ -ap-aq+2q \end{pmatrix} \right\} \quad (2) V = \mathbf{K}^4, S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(3) V = \mathbf{K}^4, S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (4) V = \mathbf{K}^4, S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(5) V = \mathbf{K}^4, S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad (6) V = \mathbf{K}^4, S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(7) V = M_2(\mathbf{K}), S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(8) V = P(\mathbf{R}), S = \{1 + x + x^2 + x^3, 1 + x^2 + 2x^3, x - x^3\}$$

$$(9) V = P(\mathbf{R}), S = \{1 + x, 3 + 3x, 3x(1 + x), 1 + 2x + x^2, 1 + x^3\}$$

$$(10) C^\infty(0, 2\pi) \text{ における } \{1, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x, \cos 2x, \sin^3 x, \cos^3 x, \sin 3x, \cos 3x\}$$

3. \mathbf{K} 上のベクトル空間 V の k 個のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ が 1 次独立であるとき, 次の k 個のベクトルは 1 次独立であるかどうか, 理由とともに答えよ.

$$(1) \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_{k-1} + \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k + \mathbf{a}_1$$

$$(2) \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_{k-1} - \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1 \quad (3) \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_k$$

4. 以下で与えるベクトル空間の次元と一組の基底を求めよ. ただし, (6), (7) の $M_n(\mathbf{C})$ は \mathbf{R} 上のベクトル空間とみなす.

$$(9), (10) \text{ の } P \text{ は } P = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ で, (9) では } a, b, c \text{ を互いに異なり, (10) では } a = b \neq c \text{ である. また, (14)}$$

の $\text{Seq}(\mathbf{R})$ は実数列全体からなる集合で, 数列の和と実数倍によって \mathbf{R} 上のベクトル空間になる.

$$(1) \mathbf{K}^3 \text{ の部分空間 } \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (2) \mathbf{K}^3 \text{ の部分空間 } \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (3) $\{A \in M_n(\mathbf{K}) \mid \text{tr } A = 0\}$ (4) $\{A \in M_n(\mathbf{K}) \mid {}^t A = A\}$ (5) $\{A \in M_n(\mathbf{K}) \mid {}^t A = -A\}$
(6) $\{A \in M_n(\mathbf{C}) \mid A^* = A\}$ (7) $\{A \in M_n(\mathbf{C}) \mid A^* = -A\}$ (8) $\{A \in M_n(\mathbf{K}) \mid A \text{ は上半三角行列}\}$
(9) $\{A \in M_3(\mathbf{K}) \mid AP = PA\}$ (10) $\{A \in M_3(\mathbf{K}) \mid AP = PA\}$
(11) $\{f(x) \in P_3(\mathbf{K}) \mid f(-1) = f(1) = 0\}$ (12) $\{A \in M_n(\mathbf{K}) \mid A \text{ は対角成分がすべて } 0 \text{ である上半三角行列}\}$
(13) $\{f(x) \in P_4(\mathbf{K}) \mid \text{すべての自然数 } n \text{ に対し, } f(n) - 3f(n-1) + 3f(n-2) - f(n-3) = 0\}$
(14) $\{\{x_n\}_{n=0}^\infty \in \text{Seq}(\mathbf{R}) \mid \{x_n\}_{n=0}^\infty \text{ は漸化式 } x_{n+3} = x_{n+2} - x_{n+1} + x_n \text{ を満たす}\}$
(15) $\left\{f(x) \in P_4(\mathbf{R}) \mid \lambda f(x) = \int_{-1}^1 (x-t)^2 f(t) dt\right\}$ (定数 λ の値によって場合分けせよ.)

第 13 回の演習問題の解答

1. $P = A, B, C, D$ とするとき、連立 1 次方程式 $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合の解と、解をもつための \mathbf{b} が満たすべき条件を求めよ。

$$(1), (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & p \\ 2 & 1 & 1 & 0 & q \\ -3 & 0 & 1 & -1 & r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & p \\ 0 & -3 & -5 & 2 & q-2p \\ 0 & 6 & 10 & -4 & r+3p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2q}{3} - \frac{p}{3} \\ 0 & -3 & -5 & 2 & q-2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-p+2q \end{pmatrix} \text{ より, } A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ の解は } \begin{pmatrix} t-u \\ -5t+2u \\ 3t \\ 3u \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (t, u \in \mathbf{K}) \text{ と表される.}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ は 1 次独立だから、これらが (1) で与えられたベクトル空間の基底になり、その次元は 2 である。

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \text{ が解をもつ条件は } r = p - 2q \text{ だから } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ p-2q \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (p, q \in \mathbf{K}) \text{ と表される.}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は 1 次独立だから、これらが (2) で与えられたベクトル空間の基底になり、その次元は 2 である。

$$(3), (4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & p \\ 0 & 1 & 0 & 1 & q \\ 1 & 0 & -1 & -2 & r \\ 1 & -1 & 1 & 3 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & p \\ 0 & 1 & 0 & 1 & q \\ 0 & -1 & 0 & -1 & r-p \\ 0 & -2 & 2 & 4 & s-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & p-q \\ 0 & 1 & 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-p+q \\ 0 & 0 & 2 & 6 & s-p+2q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & p-q \\ 0 & 1 & 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 2 & 6 & s-p+2q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-p+q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{p}{2} + \frac{s}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 2 & 6 & s-p+2q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-p+q \end{pmatrix} \text{ より, } B\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ の解は } \begin{pmatrix} t \\ t \\ 3t \\ -t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{K}) \text{ と表される. } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ は 1 次独立だから}$$

ら、これが (3) で与えられたベクトル空間の基底になり、その次元は 1 である。

$$B\mathbf{x} = \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} \text{ が解をもつ条件は } r = p - q \text{ だから } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ p-q \\ s \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (p, q, s \in \mathbf{K}) \text{ と}$$

表される。 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立だから、これらが (3) で与えられたベクトル空間の基底になり、その次元は

3 である。

$$(5), (6) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & p \\ 0 & 1 & -1 & -1 & q \\ 2 & -1 & 1 & 3 & r \\ 1 & -2 & 2 & 3 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & p \\ 0 & 1 & -1 & -1 & q \\ 0 & 1 & -1 & -1 & r-2p \\ 0 & -1 & 1 & 1 & s-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & p+q \\ 0 & 1 & -1 & -1 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-2p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p+q \end{pmatrix} \text{ より, } C\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ の解は } \begin{pmatrix} -u \\ t+u \\ t \\ u \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t, u \in \mathbf{K}) \text{ と表される.}$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は1次独立だから, これらが (5) で与えられたベクトル空間の基底になり, その次元は2である.

$$C\mathbf{x} = \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} \text{ が解をもつ条件は } r = 2p + q \text{ かつ } s = p - q \text{ だから } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ 2p+q \\ p-q \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$(p, q \in \mathbf{K})$ と表される. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は1次独立だから, これらが (6) で与えられたベクトル空間の基底になり, その

次元は2である.

$$(7), (8) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & p \\ 2 & -1 & -1 & -1 & q \\ 1 & -3 & 0 & 1 & r \\ 3 & 1 & -2 & -3 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & p \\ 0 & -5 & 1 & 3 & q-2p \\ 0 & -5 & 1 & 3 & r-p \\ 0 & -5 & 1 & 3 & s-3p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{p}{5} + \frac{2q}{5} \\ 0 & -5 & 1 & 3 & q-2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r+p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p-q \end{pmatrix} \text{ より, } D\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ の解は } \begin{pmatrix} 3t+4u \\ t+3u \\ 5t \\ 5u \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (t, u \in \mathbf{K}) \text{ と表される.}$$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ は1次独立だから, これらが (7) で与えられたベクトル空間の基底になり, その次元は2である.

$$D\mathbf{x} = \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} \text{ が解をもつ条件は } r = -p + q \text{ かつ } s = p + q \text{ だから } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ -p+q \\ p+q \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(p, q \in \mathbf{K})$ と表される. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は1次独立だから, これらが (8) で与えられたベクトル空間の基底になり, その

次元は2である.

2. (1) $x \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ a-2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -p-q \\ -ap-aq+q \\ -ap-aq+2q \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ を満たす x, y, z を求める. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -p-q \\ a & a-1 & -ap-aq+q \\ a & a-2 & -ap-aq+2q \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -p-q \\ 0 & -1 & q \\ 0 & -2 & 2q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -p \\ 0 & -1 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, t を任意の定数とすれば $x = pt, y = qt, z = t$ である. 従って, $z = 0$ の場合は $x = y = 0$ となるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ a-2 \end{pmatrix}$ は 1 次独立であるが, $t = 1$ の場合に

$$p \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ a-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p-q \\ -ap-aq+q \\ -ap-aq+2q \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ が成り立ち, } \begin{pmatrix} -p-q \\ -ap-aq+q \\ -ap-aq+2q \end{pmatrix} = -p \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix} - q \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ a-2 \end{pmatrix} \text{ が得られる}$$

ため, $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ a-2 \end{pmatrix}$ は与えられた部分空間を生成することがわかる. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ a-2 \end{pmatrix}$ が求める基底で, 与えられた部分空間の次元は 2 である.

(2) $x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ を満たす x, y, z を求める. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, t を任意の定数とすれば $x = -2t, y = t, z = t$ である. 従って,

$z = 0$ の場合は $x = y = 0$ となるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ は 1 次独立であるが, $-2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ が

成り立つため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ は 1 次従属である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ は S の中で 1 次独立なベクトルからなる極大な集合であり, S で生成される V の部分空間の基底になる.

(3) $x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ を満たす x, y, z, w を求める. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & -5 & -5 & -14 \\ 0 & 5 & 5 & 14 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{倍する}]{\text{第4行を}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & -5 & -5 & -14 \\ 0 & 5 & 5 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第2行と第4行}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 14 \\ 0 & -5 & -5 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, } t \text{ を任意の定数とすれば } x =$$

$-t, y = -t, z = t, w = 0$ である. 従って, $z = 0$ の場合は $x = y = w = 0$ となるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次

独立である. $z = t = 1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が成り立つため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は与え

られた部分空間を生成する. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は与えられた部分空間の基底になる.

$$(4) \ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ を満たす } x, y, z, w \text{ を求める. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を } -\frac{1}{3} \text{ 倍}]{\text{第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-}\frac{1}{4} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, } t \text{ を任意の定数とすれば}$$

$x = -t, y = -t, z = t, w = 2t$ である. 従って, $w = 0$ の場合は $x = y = z = 0$ となるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は

1 次独立であるが, $-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ が成り立つため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次

従属である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は S の中で 1 次独立なベクトルからなる極大な集合であり, S で生成される V の部分空間の基底になる.

$$(5) x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ を満たす } x, y, z, w \text{ を求める. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, t を任意の定数とすれば $x = -t, y = -2t, z = -2t, w = 3t$ である. 従って, $w = 0$ の場合は $x = y = z = 0$ と

なるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は 1 次独立であるが, $-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ が成り立つため,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は 1 次従属である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は S の中で 1 次独立なベクトルから

なる極大な集合であり, S で生成される V の部分空間の基底になる.

$$(6) x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ を満たす } x, y, z, w \text{ を求める. } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(4,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ より, } s, t \text{ を任意の定数とすれば } x = -s - t, y = -s + t,$$

$z = s, w = t$ である. 従って, $z = w = 0$ の場合は $x = y = 0$ となるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立であるが,

$-\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と $-\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ が成り立つため, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

と $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ は 1 次従属である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ は S の中で 1 次独立なベクトルからなる極大

な集合であり, S で生成される V の部分空間の基底になる.

$$(7) x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ を満たす } x, y, z, w, u \text{ を求める.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第5列の掃き出し}]{(3,5)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{より, } s, t \text{ を任意の定数とすれば } x = -s - 2t, y = -s - t, z = s, w = t,$$

$u = 0$ である. 従って, $z = w = 0$ の場合は $x = y = u = 0$ となるため, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立であるが, $-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$, $-2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ が成り立つため, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は 1 次従属である. 故に $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は S の中で 1 次独立なベクトルからなる極大な集合であり, S で生成される V の部分空間の基底になる.

(8) $a(1+x+x^2+x^3)+b(1+x^2+2x^3)+c(x-x^3)=0$ とおくと, $(a+b)+(a+c)x+(a+b)x^2+(a+2b-c)x^3=0$

だから, a, b, c は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解である. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{より, } a, b, c \text{ は } t \text{ を任意の定数として } a = -t, b = c = t \text{ と}$$

表される. $c = 0$ ならば $a = b = 0$ となるため, $1+x+x^2+x^3, 1+x^2+2x^3$ は 1 次独立である. 一方, $-(1+x+x^2+x^3)+(1+x^2+2x^3)+(x-x^3)=0$ だから $1+x+x^2+x^3, 1+x^2+2x^3, x-x^3$ は 1 次従属である. 故に $1+x+x^2+x^3, 1+x^2+2x^3$ は S の中で 1 次独立なベクトルからなる極大な集合であり, S で生成される V の部分空間の基底になる.

(9) $3+3x=3(1+x)$ だから $\{1+x, 3x(1+x), 1+2x+x^2, 1+x^3\}$ の中で 1 次独立なベクトルからなる極大な部分集合を求めればよい. $a(1+x)+3bx(1+x)+c(1+2x+x^2)+d(1+x^3)=0$ とおくと, $(a+c+d)+(a+3b+$

$2c)x+(3b+c)x^2+dx^3=0$ だから, a, b, c, d, e は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解であ

る. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第4列の掃き出し}]{(3,4)\text{成分に関して}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 より, a, b, c, d は t を任意の定数として $a = -3t, b = -t, c = 3t, d = 0$ と表される. $c = 0$ ならば $a =$

$b = 0$ となるため, $1+x, 3x(1+x), x^3+1$ は 1 次独立である. 一方, $-3(1+x)-3x(1+x)+3(x^2+2x+1)+0(x^3+1) = 0$ だから $1+x, 3x(1+x), x^2+2x+1, x^3+1$ は 1 次従属である. 故に $1+x, 3x(1+x), x^3+1$ は S の中で 1 次独立なベクトルからなる極大な集合であり, S で生成される V の部分空間の基底になる.

(10) $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x, \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$ だから $1, \sin 2x, \cos 2x, \sin^3 x, \cos^3 x, \sin 3x, \cos 3x$ が 1 次独立であることを示せば, これらは S の中で 1 次独立なベクトルからなる極大な集合であることがいえる. すべての $x \in (0, 2\pi)$ に対して, $a_0 + a_1 \sin 2x + b_1 \cos 2x + a_2 \sin^3 x + b_2 \cos^3 x + a_3 \sin 3x + b_3 \cos 3x = 0$ が成り立つような実数の定数 $a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ が存在したとする. この等式に $x = \frac{\pi k}{4}$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) を代入して, $a_0 + a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{8}} + \frac{b_2}{\sqrt{8}} + \frac{a_3}{\sqrt{8}} - \frac{b_3}{\sqrt{8}} = 0, a_0 - b_1 + a_2 - a_3 = 0, a_0 - a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{8}} - \frac{b_2}{\sqrt{8}} + \frac{a_3}{\sqrt{8}} + \frac{b_3}{\sqrt{8}} = 0, a_0 + b_1 - b_2 - b_3 = 0, a_0 + a_1 - \frac{a_2}{\sqrt{8}} - \frac{b_2}{\sqrt{8}} - \frac{a_3}{\sqrt{8}} + \frac{b_3}{\sqrt{8}} = 0, a_0 - b_1 - a_2 + a_3 = 0, a_0 - a_1 - \frac{a_2}{\sqrt{8}} + \frac{b_2}{\sqrt{8}} + \frac{a_3}{\sqrt{8}} + \frac{b_3}{\sqrt{8}} = 0$ を得る. 2 番目と 6 番目の等式より $a_0 = b_1$ かつ $a_2 = a_3$, 1 番目と 5 番目の等式より $a_1 = -a_0$ かつ $b_3 = a_2 + b_2 + a_3$, 3 番目と 7 番目の等式より $a_2 = b_2$ かつ $a_0 - a_1 + \frac{a_3 + b_3}{\sqrt{8}} = 0$ が得られる. 従って $a_2 = a_3 = b_2, -a_1 = a_0 = b_1, b_3 = 3a_2, a_0 = -\frac{a_2}{\sqrt{2}}$ となり, 4 番目の等式に代入すれば, $(-\sqrt{2} - 4)a_2 = 0$ が得られるため, $a_2 = 0$ である. 故に $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ となるため, $1, \sin 2x, \cos 2x, \sin^3 x, \cos^3 x, \sin 3x, \cos 3x$ は 1 次独立であり, S で生成される V の部分空間の基底になる.

3. (1) $x_1(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + x_2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) + \cdots + x_i(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{i+1}) + \cdots + x_{k-1}(\mathbf{a}_{k-1} + \mathbf{a}_k) + x_k(\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_1) = \mathbf{0}$ とおけば, $(x_1 + x_k)\mathbf{a}_1 + (x_1 + x_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (x_{i-1} + x_i)\mathbf{a}_i + \cdots + (x_{k-1} + x_k)\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ であり, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ は 1 次独立だから, $x_1 + x_k = x_1 + x_2 = \cdots = x_{i-1} + x_i = \cdots = x_{k-1} + x_k = 0$ である. 従って $x_1 = -x_k$ であり, $x_i = -x_{i-1}$ が $i = 2, 3, \dots, k$ に対して成り立つため, $x_i = (-1)^{i-1}x_1$ ($i = 2, 3, \dots, k$) とくに $x_k = (-1)^{k-1}x_1$ だから, $x_1 = -x_k$ に代入すれば $x_1 = (-1)^k x_1$ が得られる. 故に, k が奇数ならば $x_1 = -x_1$ となるため $x_1 = 0$ であり, このことと $x_i = (-1)^{i-1}x_1$ より, $i = 1, 2, \dots, k$ に対して $x_i = 0$ だから, $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_{k-1} + \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k + \mathbf{a}_1$ は 1 次独立である. k が偶数ならば, $x_i = (-1)^{i-1}$ のとき, $x_1(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + x_2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) + \cdots + x_{k-1}(\mathbf{a}_{k-1} + \mathbf{a}_k) + x_k(\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_1) = \mathbf{0}$ が成り立つため, $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_{k-1} + \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k + \mathbf{a}_1$ は 1 次従属である.

(2) $(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) + (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3) + \cdots + (\mathbf{a}_{k-1} - \mathbf{a}_k) + (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1) = \mathbf{0}$ だから $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_{k-1} - \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1$ は 1 次従属である.

(3) $x_1\mathbf{a}_1 + x_2(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + \cdots + x_k(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_k) = \mathbf{0}$ とおけば

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)\mathbf{a}_1 + (x_2 + x_3 + \cdots + x_k)\mathbf{a}_2 + \cdots + (x_i + x_{i+1} + \cdots + x_k)\mathbf{a}_i + \cdots + x_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

だから $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = x_2 + x_3 + \cdots + x_k = \cdots = x_i + x_{i+1} + \cdots + x_k = \cdots = x_k = 0$ である. この等式から, i による帰納法で $x_{k-i+1} = 0$ が $i = 1, 2, \dots, k$ に対して成り立つことが示されるため, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_k$ は 1 次独立である.

4. (i, j) 成分が 1 で, (i, j) 成分以外の成分がすべて 0 である n 次正方行列を $E_n(i, j)$ で表すことにする.

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ -\frac{3}{5} & -4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を } \frac{1}{5} \text{ 倍する}]{\text{第 2 列と第 3 列}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 より, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ が求める基底である. 従って, 与えられたベクトル空間の次

元は 3 である.

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4} \text{ 倍する}]{\text{第 2 列を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ より,}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が求める基底である. 従って, 与えられたベクトル空間の次元は 2 である.

(3) $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ が $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii} = 0$ を満たすとき, $a_{nn} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}$ だから

$$A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} E_n(i,j) = \sum_{i \neq j} a_{ij} E_n(i,j) + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} E_n(i,i) + a_{nn} E_n(n,n) = \sum_{i \neq j} a_{ij} E_n(i,j) + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} (E_n(i,i) - E_n(n,n))$$

が成り立つ. さらに $i \neq j$ ならば $\text{tr } E_n(i,j) = \text{tr}(E_n(i,i) - E_n(n,n)) = 0$ であり, $E_n(i,j)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$), $E_n(i,i) - E_n(n,n)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) は 1 次独立だから, これらは与えられたベクトル空間の基底になる. 従って, 与えられたベクトル空間の次元は $n(n-1) + n-1 = n^2 - 1$ である.

(4) $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ が ${}^t A = A$ を満たすためには $1 \leq i < j \leq n$ に対し, $a_{ji} = a_{ij}$ であることが必要十分である. このとき,

$$A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} E_n(i,j) = \sum_{i \neq j} a_{ij} E_n(i,j) + \sum_{i=1}^n a_{ii} E_n(i,i) = \sum_{i < j} a_{ij} (E_n(i,j) + E_n(j,i)) + \sum_{i=1}^n a_{ii} E_n(i,i)$$

であり, ${}^t(E_n(i,j) + E_n(j,i)) = E_n(i,j) + E_n(j,i)$, ${}^t(E_n(i,i) - E_n(n,n)) = E_n(i,i) - E_n(n,n)$ が成り立つ. さらに $E_n(i,j) + E_n(j,i)$ ($1 \leq i < j \leq n$), $E_n(i,i) - E_n(n,n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) は 1 次独立だから, これらは与えられたベクトル空間の基底になる. 従って, 与えられたベクトル空間の次元は ${}_n C_2 + n = \frac{n(n+1)}{2}$ である.

(5) $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ が ${}^t A = -A$ を満たすためには $1 \leq i < j \leq n$ に対し, $a_{ji} = -a_{ij}$ かつ $i = 1, 2, \dots, n$ に対して $a_{ii} = 0$ であることが必要十分である. このとき,

$$A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} E_n(i,j) = \sum_{i \neq j} a_{ij} E_n(i,j) = \sum_{i < j} a_{ij} (E_n(i,j) - E_n(j,i))$$

であり, ${}^t(E_n(i,j) - E_n(j,i)) = -(E_n(i,j) + E_n(j,i))$ が成り立つ. さらに $E_n(i,j) - E_n(j,i)$ ($1 \leq i < j \leq n$) は 1 次独立だから, これらは与えられたベクトル空間の基底になる. 従って, 与えられたベクトル空間の次元は ${}_n C_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ である.

(6) $A = (a_{jk} + ib_{jk}) \in M_n(\mathbf{C})$ ($a_{jk}, b_{jk} \in \mathbf{R}$) が $A^* = A$ を満たすためには $1 \leq j < k \leq n$ に対し, $a_{ji} = a_{jk}$, $b_{ji} = -b_{jk}$ かつ $j = 1, 2, \dots, n$ に対して $b_{jj} = 0$ であることが必要十分である. このとき,

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j,k=1}^n (a_{jk} + b_{jk}i) E_n(j,k) = \sum_{j \neq k} (a_{jk} + b_{jk}i) E_n(j,k) + \sum_{j=1}^n a_{jj} E_n(j,j) \\ &= \sum_{i < j} a_{jk} (E_n(j,k) + E_n(k,j)) + \sum_{i < j} b_{jk}i (E_n(j,k) - E_n(k,j)) + \sum_{j=1}^n a_{jj} E_n(j,j) \end{aligned}$$

であり, $(E_n(j,k) + E_n(k,j))^* = E_n(j,k) + E_n(k,j)$, $(i(E_n(j,k) - E_n(k,j)))^* = i(E_n(j,k) - E_n(k,j))$, $E_n(j,j)^* = E_n(j,j)$ が成り立つ. さらに $E_n(j,k) + E_n(k,j)$, $i(E_n(j,k) - E_n(k,j))$ ($1 \leq i < j \leq n$), $E_n(j,j)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) は \mathbf{R} 上 1 次独立だから, これらは与えられたベクトル空間の基底になる. 従って, 与えられたベクトル空間の次元は ${}_n C_2 + {}_n C_2 + n = n^2$ である.

(7) $A = (a_{jk} + ib_{jk}) \in M_n(\mathbf{C})$ ($a_{jk}, b_{jk} \in \mathbf{R}$) が $A^* = A$ を満たすためには $1 \leq j < k \leq n$ に対し, $a_{ji} = -a_{jk}$, $b_{ji} = b_{jk}$ かつ $j = 1, 2, \dots, n$ に対して $a_{jj} = 0$ であることが必要十分である. このとき,

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j,k=1}^n (a_{jk} + b_{jk}i)E_n(j, k) = \sum_{j \neq k} (a_{jk} + b_{jk}i)E_n(j, k) + \sum_{j=1}^n b_{jj}iE_n(j, j) \\ &= \sum_{i < j} a_{jk}(E_n(j, k) - E_n(k, j)) + \sum_{i < j} b_{jk}i(E_n(j, k) + E_n(k, j)) + \sum_{j=1}^n b_{jj}iE_n(j, j) \end{aligned}$$

であり, $(E_n(j, k) - E_n(k, j))^* = -(E_n(j, k) - E_n(k, j))$, $(i(E_n(j, k) + E_n(k, j)))^* = -i(E_n(j, k) + E_n(k, j))$, $(iE_n(j, j))^* = -iE_n(j, j)$ が成り立つ. さらに $E_n(j, k) - E_n(k, j)$, $i(E_n(j, k) + E_n(k, j))$ ($1 \leq i < j \leq n$), $iE_n(j, j)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) は \mathbf{R} 上 1 次独立だから, これらは与えられたベクトル空間の基底になる. 従って, 与えられたベクトル空間の次元は ${}_nC_2 + {}_nC_2 + n = n^2$ である.

(8) $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ が上半三角行列であるためには $1 \leq j < i \leq n$ に対し, $a_{ij} = 0$ であることが必要十分である. このとき, $A = \sum_{i \leq j} a_{ij}E_n(i, j)$ であり, $E_n(i, j)$ ($1 \leq i \leq j \leq n$) は上半三角行列であり, これらは 1 次独立だから,

与えられたベクトル空間の基底になる. 従って, 与えられたベクトル空間の次元は ${}_nC_2 + n = \frac{n(n+1)}{2}$ である.

$$(9) A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \text{ とおくと, } AP = \begin{pmatrix} ax_{11} & bx_{12} & cx_{13} \\ ax_{21} & bx_{22} & cx_{23} \\ ax_{31} & bx_{32} & cx_{33} \end{pmatrix}, PA = \begin{pmatrix} ax_{11} & ax_{12} & ax_{13} \\ bx_{21} & bx_{22} & bx_{23} \\ cx_{31} & cx_{32} & cx_{33} \end{pmatrix} \text{ だから, } AP =$$

PA であるためには, $bx_{12} = ax_{12}$, $ax_{21} = bx_{21}$, $cx_{23} = bx_{23}$, $bx_{32} = cx_{32}$, $cx_{13} = ax_{13}$, $ax_{31} = cx_{31}$ が成り立つこと, すなわち $(a-b)x_{12} = (a-b)x_{21} = (b-c)x_{23} = (b-c)x_{32} = (a-c)x_{13} = (a-c)x_{31} = 0$ が成り立つことが必要十分である. a, b, c は相異なるため, 上式から $i \neq j$ ならば $x_{ij} = 0$ が得られ, A は対角行列である. 逆に A が 3 次対角行列ならば $AP = PA$ が成り立つため, 与えられたベクトル空間は 3 次対角行列全体からなる集合である. 故に

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が与えられたベクトル空間の一組の基底になり, その次元は 3 である.

$$(10) AP = \begin{pmatrix} ax_{11} & ax_{12} & cx_{13} \\ ax_{21} & ax_{22} & cx_{23} \\ ax_{31} & ax_{32} & cx_{33} \end{pmatrix}, PA = \begin{pmatrix} ax_{11} & ax_{12} & ax_{13} \\ ax_{21} & ax_{22} & ax_{23} \\ cx_{31} & cx_{32} & cx_{33} \end{pmatrix} \text{ だから, } AP = PA \text{ であるためには, } cx_{23} =$$

ax_{23} , $ax_{32} = cx_{32}$, $cx_{13} = ax_{13}$, $ax_{31} = cx_{31}$ が成り立つこと, すなわち $(a-c)x_{23} = (a-c)x_{32} = (a-c)x_{13} = (a-c)x_{31} = 0$ が成り立つことが必要十分である. $a \neq c$ だから, 上式から $x_{23} = x_{32} = x_{13} = x_{31} =$

0 が得られるため, 与えられたベクトル空間は $\begin{pmatrix} p & q & 0 \\ r & s & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$ という形の行列全体からなる集合である. 従って

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が与えられたベクトル空間の一組の基底になり, その次元は 5 である.

(11) $f(x) \in P_3(\mathbf{R})$ が $f(-1) = f(1) = 0$ を満たすためには, $f(x)$ が $x-1$ と $x+1$ を因数にもつことが必要十分である. 従って $f(x) = (x-1)(x+1)(ax+b) = a(x^3-x) + b(x^2-1)$ ($a, b \in \mathbf{R}$) と表され, x^3-x, x^2-1 は 1 次独立だから, これらは $f(-1) = f(1) = 0$ を満たす多項式 $f(x)$ 全体からなる $P_3(\mathbf{R})$ の部分空間の基底であり, その次元は 2 である.

(12) $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ が対角成分がすべて 0 である上半三角行列であるためには $1 \leq j \leq i \leq n$ に対し, $a_{ij} = 0$ であることが必要十分である. このとき, $A = \sum_{i < j} a_{ij} E_n(i, j)$ であり, $E_n(i, j)$ ($1 \leq i < j \leq n$) は対角成分がすべて 0 である上半三角行列であり, これらは 1 次独立だから, 与えられたベクトル空間の基底になる. 従って, 与えられたベクトル空間の次元は ${}_n C_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ である.

(13) $g(x) = f(x) - f(x-1)$ とおくと, $f(n) - 3f(n-1) + 3f(n-2) - f(n-3) = f(n) - f(n-1) - 2(f(n-1) - f(n-2)) + f(n-2) - f(n-3) = g(n) - 2g(n-1) + g(n-2)$ だから仮定から $g(n) - 2g(n-1) + g(n-2) = 0$ である. 従って, $g(n) - g(n-1) = g(n-1) - g(n-2)$ がすべての自然数 n に対して成り立つため, 数列 $g(0), g(1), \dots$ は等差数列である. $d = g(1) - g(0)$ とおくと, $f(n) - f(n-1) = g(n) = g(0) + dn$ となるため, $f(n) = f(0) + \sum_{k=1}^n (f(k) - f(k-1)) = f(0) + \sum_{k=1}^n (g(0) + dk) = f(0) + g(0)n + \frac{d}{2}n(n-1)$ が任意の自然数 n に対して成り立つ. そこで $a = \frac{d}{2}$, $b = g(0) - \frac{d}{2}$, $c = f(0)$ とおいて, x の多項式 $F(x) = f(x) - (ax^2 + bx + c)$ を考えると, すべての自然数 n に対して $F(n) = 0$ となるため, 教科書の系 4.20 によって, $F(x) = 0$ である. 故に $f(x)$ は x の 2 次以下の多項式である. 逆に $f(x)$ が x の 2 次以下の多項式のとき, $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおけば $f(n) - 3f(n-1) + 3f(n-2) - f(n-3) = an^2 + bn + c - 3(a(n-1)^2 + b(n-1) + c) + 3(a(n-2)^2 + b(n-2) + c) - (a(n-3)^2 + b(n-3) + c) = 0$ である. よって, すべての自然数 n に対して $f(n) - 3f(n-1) + 3f(n-2) - f(n-3) = 0$ を満たすような x の多項式 $f(x)$ の全体からなる $P_4(\mathbf{K})$ の部分空間は $P_2(\mathbf{K})$ に一致するため, $1, x, x^2$ が基底で, その次元は 3 である.

(14) 数列 $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ が漸化式 $x_{n+3} = x_{n+2} - x_{n+1} + x_n$ を満たすとし, $y_n = x_{n+1} - x_n$ によって数列 $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ を定める. このとき, $y_{n+2} = x_{n+3} - x_{n+2} = -x_{n+1} + x_n = -y_n$ が $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して成り立つため, 数列 $\{y_{2n}\}_{n=0}^\infty, \{y_{2n+1}\}_{n=0}^\infty$ はともに公比 -1 の等比数列である. 従って $y_{2n} = (-1)^n(x_1 - x_0)$, $y_{2n+1} = (-1)^n(x_2 - x_1)$ が $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して成り立つ. $x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} y_k$ だから

$$\begin{aligned} x_{2m} &= x_0 + \sum_{k=0}^{2m-1} y_k = x_0 + \sum_{l=0}^{m-1} y_{2l} + \sum_{l=0}^{m-1} y_{2l+1} = x_0 + \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l(x_1 - x_0) + \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l(x_2 - x_1) \\ &= x_0 + \frac{1}{2}(1 - (-1)^m)(x_2 - x_0) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^m)x_0 + \frac{1}{2}(1 - (-1)^m)x_2 = \begin{cases} x_0 & m \text{ は偶数} \\ x_2 & m \text{ は奇数} \end{cases} \\ x_{2m+1} &= x_0 + \sum_{k=0}^{2m} y_k = x_0 + \sum_{l=0}^m y_{2l} + \sum_{l=0}^{m-1} y_{2l+1} = x_0 + \sum_{l=0}^m (-1)^l(x_1 - x_0) + \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l(x_2 - x_1) \\ &= x_0 + \frac{1}{2}(1 - (-1)^m)(x_2 - x_0) + (-1)^m(x_1 - x_0) = \frac{1}{2}(1 - (-1)^m)x_0 + \frac{1}{2}(1 - (-1)^m)x_2 + (-1)^m x_1 \\ &= \begin{cases} x_1 & m \text{ は偶数} \\ x_0 - x_1 + x_2 & m \text{ は奇数} \end{cases} \end{aligned}$$

が得られる. そこで, 数列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{b_n\}_{n=0}^\infty, \{c_n\}_{n=0}^\infty$ を, 0 以上の整数 k と $r = 0, 1, 2, 3$ に対し

$$a_{4k+r} = \begin{cases} 1 & r = 0, 3 \\ 0 & r = 1, 2 \end{cases} \quad b_{4k+r} = \begin{cases} (-1)^{\frac{r+1}{2}} & r = 1, 3 \\ 0 & r = 0, 2 \end{cases} \quad c_{4k+r} = \begin{cases} 1 & r = 2, 3 \\ 0 & r = 0, 1 \end{cases}$$

によって定めれば, これらは漸化式 $x_{n+3} = x_{n+2} - x_{n+1} + x_n$ を満たし, この漸化式を満たす任意の数列 $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ に対し, $x_n = x_0 a_n + x_1 b_n + x_2 c_n$ が 0 以上の整数 n について成り立つ. 従って, ベクトル空間 $\text{Seq}(\mathbf{R})$ において, $\{x_n\}_{n=0}^\infty = x_0 \{a_n\}_{n=0}^\infty + x_1 \{b_n\}_{n=0}^\infty + x_2 \{c_n\}_{n=0}^\infty$ が成り立ち, $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{b_n\}_{n=0}^\infty, \{c_n\}_{n=0}^\infty$ は 1 次独立だから, これらが漸化式 $x_{n+3} = x_{n+2} - x_{n+1} + x_n$ を満たす数列全体からなる $\text{Seq}(\mathbf{R})$ の部分空間の基底になり, その次元は 3 である.

(15) $\int_{-1}^1 (x-t)^2 f(t) dt = x^2 \int_{-1}^1 f(t) dt - 2x \int_{-1}^1 t f(t) dt + \int_{-1}^1 t^2 f(t) dt$ より $a = \int_{-1}^1 f(t) dt$, $b = \int_{-1}^1 t f(t) dt$, $c = \int_{-1}^1 t^2 f(t) dt$ とおくと, 仮定から $\lambda f(x) = ax^2 - 2bx + c$ である.

$[\lambda \neq 0 \text{ の場合}] f(x) = \frac{a}{\lambda}x^2 - \frac{2b}{\lambda}x + \frac{c}{\lambda}$ となるため, $a = \int_{-1}^1 \left(\frac{a}{\lambda}t^2 - \frac{2b}{\lambda}t + \frac{c}{\lambda} \right) dt = \frac{2a}{3\lambda} + \frac{2c}{\lambda}$ より $c = \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{3} \right) a$,
 $b = \int_{-1}^1 \left(\frac{a}{\lambda}t^3 - \frac{2b}{\lambda}t^2 + \frac{c}{\lambda}t \right) dt = -\frac{4b}{3\lambda}$ より $(3\lambda + 4)b = 0$, $c = \int_{-1}^1 \left(\frac{a}{\lambda}t^4 - \frac{2b}{\lambda}t^3 + \frac{c}{\lambda}t^2 \right) dt = \frac{2a}{5\lambda} + \frac{2c}{3\lambda}$ より
 $-6a + (15\lambda - 10)c = 0$ が得られる. $c = \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{3} \right) a$ を $-6a + (15\lambda - 10)c = 0$ に代入すると $(45\lambda^2 - 60\lambda - 16)a = 0$

となるため $\lambda = \frac{2}{3} \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$ または $a = 0$ である. また $(3\lambda + 4)b = 0$ より $\lambda = -\frac{4}{3}$ または $b = 0$ である.

$\cdot \lambda = \frac{2}{3} \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ならば $b = 0$ であり, $c = \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{3} \right) a$ から $c = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}a$ となるため, $f(x) = a \left(x^2 \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \right)$ となる.

$\cdot \lambda = -\frac{4}{3}$ ならば $a = 0$ であり, $c = \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{3} \right) a$ から $c = 0$ となるため, $f(x) = bx$ となる.

$\cdot \lambda \neq 0, \frac{2}{3} \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{4}{3}$ ならば $a = b = 0$ であり, $c = \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{3} \right) a$ から $c = 0$ となるため, $f(x) = 0$ となる.

$[\lambda = 0 \text{ の場合}] f(x) \in P_4(x)$ だから $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ とおけて, $\int_{-1}^1 (x-t)^2 f(t) dt =$

$\int_{-1}^1 (t^2 - 2xt + x^2)(a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0) dt = 2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5}\right)x^2 - 4\left(\frac{a_1}{3} + \frac{a_3}{5}\right)x + 2\left(\frac{a_0}{3} + \frac{a_2}{5} + \frac{a_4}{7}\right)$ で

ある. これが 0 になるためには, $a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} = \frac{a_1}{3} + \frac{a_3}{5} = \frac{a_0}{3} + \frac{a_2}{5} + \frac{a_4}{7} = 0$ が成り立つことが必要十分である.

これを a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 に関する斉次連立 1 次方程式とみて解を求めることにより, $a_0 = 3s, a_1 = 3t, a_2 = -30s,$
 $a_3 = -5t, a_4 = 35s$ (s, t は任意の実数) と表せる. よって $f(x)$ は $f(x) = s(35x^4 - 30x^2 + 3) + t(-5x^3 + 3x)$ という
 形の多項式になる.

以上から求める部分空間の次元は, $\lambda = \frac{2}{3} \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{4}{3}$ ならば 1 次元, $\lambda = 0$ ならば 2 次元, それ以外の場合は 0 次元
 である.

線形数学 II 演習問題 第 14 回 部分空間の和・直和

1. \mathbf{K}^4 の部分空間 V, W が以下で与えられるとき, $V + W$ の基底を一組求めて, 次元を答えよ.

$$(1) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^4 \mid \begin{array}{l} x + y - z - 2w = 0 \\ -x + 2y + z - w = 0 \end{array} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^4 \mid \begin{array}{l} x + 2y + 2z - 3w = 0 \\ -4x + 2y - 3z + 2w = 0 \end{array} \right\}.$$

$$(2) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^4 \mid \begin{array}{l} x + y + 2z + 3w = 0 \\ 3y + 3z - 2w = 0 \end{array} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^4 \mid \begin{array}{l} x + 2y + 3z + 2w = 0 \\ x + 3y + 4z + 2w = 0 \end{array} \right\}.$$

$$(3) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^4 \mid \begin{array}{l} x + 2y + z + 3w = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{array} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^4 \mid \begin{array}{l} 2x + z + 2w = 0 \\ -2x - y - 2z + w = 0 \end{array} \right\}.$$

2. \mathbf{K}^4 の部分空間 V, W が以下で与えられるとき, $V \cap W$ の基底を一組求めて, 次元を答えよ.

$$(1) V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$(2) V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$(3) V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

3. 以下の場合について, ベクトル空間 V とその部分空間 W, Z に対し, 次の (i), (ii) が成り立っていれば, そのことを示し, そうでなければその理由を述べよ. ただし, (1), (2), (3) では $V = \mathbf{K}^4$ とする.

(i) $V = W + Z$ である. (ii) $V = W \oplus Z$ である.

$$(1) W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad Z = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (2) W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad Z = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$(3) W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^4 \mid z = w = 0 \right\}, \quad Z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^4 \mid \begin{array}{l} x + y + z + w = 0 \\ x + 2y + 3z + 4w = 0 \end{array} \right\}.$$

(4) $V = C^r(-a, a)$ ($a > 0$) とし $W = \{f \in V \mid x \in (-a, a) \text{ ならば } f(-x) = f(x)\}$,
 $Z = \{f \in V \mid x \in (-a, a) \text{ ならば } f(-x) = -f(x)\}$.

(5) V を収束する実数の数列全体からなるベクトル空間とし, W は 0 に収束する数列全体からなる V の部分空間, Z はすべての項が 1 である数列で生成される V の 1 次元部分空間.

(6) $V = M_n(\mathbf{K})$, $W = \{A \in M_n(\mathbf{K}) \mid A \text{ は上半三角行列}\}$, $Z = \{A \in M_n(\mathbf{K}) \mid A \text{ は下半三角行列}\}$.

(7) $V = M_n(\mathbf{R})$, $W = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A \text{ は上半三角行列}\}$, $Z = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid {}^tA = -A\}$.

4. (1) $P_n(\mathbf{R})$ の部分空間 V を $V = \left\{ f(x) \in P_n(\mathbf{R}) \mid \int_{-1}^1 f(t) dt = 0 \right\}$ で定めるとき, $P_n(\mathbf{R}) = V \oplus W$ を満たす $P_n(\mathbf{R})$ の部分空間 W と, V と W の基底をそれぞれ一組ずつ求めよ.

(2) $P_3(\mathbf{R})$ の部分空間 V を $V = \left\{ f(x) \in P_3(\mathbf{R}) \mid \int_{-1}^1 (x-t)^2 f(t) dt = 0 \right\}$ で定めるとき, $P_3(\mathbf{R}) = V \oplus W$ を満たす $P_3(\mathbf{R})$ の部分空間 W とその基底を一組求めよ.

第 14 回の演習問題の解答

$$1. (1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ より, 連立 1 次方程式 } \begin{cases} x + y - z - 2w = 0 \\ -x + 2y + z - w = 0 \end{cases} \text{ の解は } s, t \text{ を任意のスカラーとして,}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+t \\ t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ と表されるため, } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ は } V \text{ を生成する. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 10 & 5 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ より, 連立 1}$$

$$\text{次方程式 } \begin{cases} x + 2y + 2z - 3w = 0 \\ -4x + 2y - 3z + 2w = 0 \end{cases} \text{ の解は } s, t \text{ を任意のスカラーとして, } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s - t \\ s \\ -2s + 2t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{と表されるため, } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ は } W \text{ を生成する. 従って } V + W \text{ は } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ によって生成され}$$

$$\text{る. } x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ とおけば } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{3} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より,}$$

$$x = 0, -y = z = w \text{ だから, } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ は 1 次従属であるが, } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ は 1 次独立であ}$$

る. 従って, これらは $V + W$ の基底になるため, $\dim(V + W) = 3$ である.

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ より, 連立 1 次方程式}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z + 3w = 0 \\ 3y + 3z - 2w = 0 \end{cases} \text{ の解は } s, t \text{ を任意のスカラーとして, } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s - 11t \\ -s + 2t \\ s \\ 3t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ と表}$$

されるため, $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ は V を生成する. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$

より, 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x + 2y + 3z + 2w = 0 \\ x + 3y + 4z + 2w = 0 \end{cases}$ の解は s, t を任意のスカラーとして, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s - 2t \\ -s \\ s \\ t \end{pmatrix} =$

$s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は W を生成する. 従って $V+W$ は $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に

よって生成される. $x \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ とおけば $\begin{pmatrix} -1 & -11 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -11 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -11 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(4,3) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ より, $x = y = w = 0$ だから, $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 従って, これらは $V+W$ の

基底になるため, $\dim(V+W) = 3$ である.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ より, 連立 1 次方程式

$\begin{cases} x + 2y + z + 3w = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$ の解は s, t を任意のスカラーとして, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s - 9t \\ -s + 3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表され

るため, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は V を生成する. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ より, 連立 1 次

方程式 $\begin{cases} 2x + z + 2w = 0 \\ -2x - y - 2z + w = 0 \end{cases}$ の解は s, t を任意のスカラーとして, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s - t \\ -2s + 3t \\ 2s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

と表されるため, $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は W を生成する. 従って $V+W$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成される.

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ とおけば } \begin{pmatrix} 1 & -9 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -9 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & -3 & 2 \\ 0 & 9 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(4,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ より, } x = -\frac{16}{3}w, y = -w, z = \frac{8}{3}w \text{ だから,}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であるが, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 従って, これらは $V+W$ の基底になるため, $\dim(V+W) = 3$ である.

2. 一般に \mathbf{K}^n の部分空間 $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \rangle, W = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_l \rangle$ が与えられたとき, $\mathbf{b} \in V \cap W$ であるためには, $x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_k \mathbf{v}_k = y_1 \mathbf{w}_1 + y_2 \mathbf{w}_2 + \dots + y_l \mathbf{w}_l = \mathbf{b}$ を満たす $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_l \in \mathbf{K}$ が存在することが必要十分である. 従って, $n \times k$ 行列 $A, n \times l$ 行列 B を $A = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_k), B = (\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_l)$ で定めれば, $\mathbf{b} \in V \cap W$ であることは, $(A \ \mathbf{b}), (B \ \mathbf{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式がともに解をもつことと同値である. さらにこのことは, $\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & B & \mathbf{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつことと同値である.

$$(1) \ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} \text{ とおいて, } \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{b} \end{pmatrix} \text{ を拡大}$$

$$\text{係数行列とする連立 1 次方程式を考える. } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & p \\ 2 & 1 & 0 & 0 & q \\ 0 & 3 & 0 & 0 & r \\ 4 & -3 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & -1 & p \\ 0 & 0 & 1 & -9 & q \\ 0 & 0 & -5 & -1 & r \\ 0 & 0 & -2 & -4 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{て第 1,3 列の掃き出し}]{(1,1),(6,3) \text{ 成分に関し}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 3 & 0 & 0 & q-2p \\ 0 & 3 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s-4p \\ 0 & 0 & 0 & -1 & p \\ 0 & 0 & 1 & -9 & q \\ 0 & 0 & 0 & -46 & r+5q \\ 0 & 0 & 0 & -22 & s+2q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{て第 2,4 列の掃き出し}]{(4,2),(5,4) \text{ 成分に関し}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & s-3p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3s+10p+q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-3s+12p \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s-4p \\ 0 & 0 & 0 & -1 & p \\ 0 & 0 & 1 & 0 & q-9p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-46p+5q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-22p+2q \end{pmatrix} \text{ より, } \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{b} \end{pmatrix} \text{ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつためには,}$$

$$\begin{cases} r - 3s + 12p = 0 \\ -3s + 10p + q = 0 \\ r - 46p + 5q = 0 \\ s - 22p + 2q = 0 \end{cases} \text{ が成り立つことが必要十分である. これらを, } r, s, p, q \text{ に関する斉次連立 1 次方程式とみなし}$$

て、解を求める.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 12 & 0 \\ 0 & -3 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & -46 & 5 \\ 0 & 1 & -22 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 12 & 0 \\ 0 & -3 & 10 & 1 \\ 0 & 3 & -58 & 5 \\ 0 & 1 & -22 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(4,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -54 & 6 \\ 0 & 0 & -56 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & -22 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(3,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, 上記の条件は } \begin{cases} r - 6p = 0 \\ 8p - q = 0 \\ s - 6p = 0 \end{cases} \text{ と同値である. 従って } r = 6p, q = 8p,$$

$s = 6p$ となるため, $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & w_1 & w_2 & b \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつためには, b が

$$b = \begin{pmatrix} p \\ 8p \\ 6p \\ 6p \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ と表されることが必要十分である. 故に, } V \cap W \text{ は } \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ を基底とする } \mathbf{K}^4 \text{ の 1 次元部分空間}$$

である.

$$(2) \ v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} \text{ とおいて,}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & w_1 & w_2 & w_3 & b \end{pmatrix} \text{ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. } \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & p \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & q \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & p \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & s \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 1,4 列の掃き出し}]{(2,1),(5,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & p \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & q+r \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s-q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & q-2p \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & r-p \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & s-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2,5 列の掃き出し}]{(2,3),(6,5) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & p-2q-2r \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & q+r \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s-q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & p \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & q-2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p-2q+3r}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s+p-q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(4,3) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p-7q-2r+5s \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4q+r-3s \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s-q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & p \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & q-2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p-2q+3r}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p-q+s \end{pmatrix} \text{ より, } \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & w_1 & w_2 & w_3 & b \end{pmatrix} \text{ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をも}$$

つためには, $\begin{cases} p - 7q - 2r + 5s = 0 \\ p - 2q + 3r = 0 \\ p - q + s = 0 \end{cases}$ が成り立つことが必要十分である. これらを, p, q, r, s に関する斉次連立 1 次

方程式とみなして, 解を求める.

$$\begin{pmatrix} 1 & -7 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -7 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \\ 0 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -7 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(3,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ より, 上記の}$$

$$\text{条件は } \begin{cases} p+r=0 \\ q-r=0 \\ -2r+s=0 \end{cases} \quad \text{と同値である. 従って } p=-r, q=r, s=2r \text{ となるため, } \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 & \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

を拡大係数行列とする連立1次方程式が解をもつためには, \mathbf{b} が $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -r \\ r \\ r \\ 2r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と表されることが必要十分で

ある. 故に, $V \cap W$ は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を基底とする \mathbf{K}^4 の1次元部分空間である.

$$(3) \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} \quad \text{において,}$$

$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 & \mathbf{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立1次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & q \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & p \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & q \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & q \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & s \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第 1,4 列の掃き出し}]{(1,1),(8,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & p+r \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & s-p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & p \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & q \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2r-2s \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2,5 列の掃き出し}]{(2,2),(6,5) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & p-q \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2p-q+2r}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & s-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2p-q}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q+r-2s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & s-q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3,6 列の掃き出し}]{(3,3),(5,6) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4p-3q+2r}{2} \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2p+2q-2r \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2p-q+2r}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s-3p+q-2r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2p-q}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2p+2q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q+r-2s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{2p-3q+2s}{2} \end{pmatrix} \text{ より, } \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 & \mathbf{b} \end{pmatrix} \text{ を拡大係数行列とする連立1次方程式が解を}$$

もつためには, $\begin{cases} -3p+q-2r+s=0 \\ q+r-2s=0 \end{cases}$ が成り立つことが必要十分である. これらを, p, q, r, s に関する斉次連

立1次方程式とみなして, 解を求める. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ より, 上記の条件は

$$\begin{cases} -3p-3r+3s=0 \\ q+r-2s=0 \end{cases} \quad \text{と同値である. 従って } p=-r+s, q=-r+2s \text{ となるため, } \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 & \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

を拡大係数行列とする連立1次方程式が解をもつためには, \mathbf{b} が $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -r+s \\ -r+2s \\ r \\ s \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるこ

とが必要十分である. 故に, $V \cap W$ は $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を基底とする \mathbf{K}^4 の2次元部分空間である.

3. (1) $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく. $a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2 + c\mathbf{z}_1 + d\mathbf{z}_2 = \mathbf{0}$ が成り立つならば,

$b - d = 0$, $a + b + c + d = 0$, $c = 0$, $d = 0$ だから $a = b = c = d = 0$ となるため, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ は 1 次独立である. 教科書の定理 5.19 によって, これらは V の基底になる. 従って $V = W + Z$ であり, 教科書の命題 5.22 の (2) の条件が満たされるため, $V = W \oplus Z$ である.

(2) $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおくと $\mathbf{w}_2 = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$ だから $W + Z = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle$ であ

る. また, $a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{z}_1 + c\mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} c \\ a+b \\ a \\ b-c \end{pmatrix}$ だから, $a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{z}_1 + c\mathbf{z}_2 = \mathbf{0}$ ならば $a = b = c = 0$ となるため, $\mathbf{w}_1, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$

は 1 次独立である. 従って $\mathbf{w}_1, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ は $W + Z$ の基底になるため, $\dim(W + Z) = 3 < 4 = \dim V$ である. 故に, 教科書の定理 5.18 によって $V = W + Z$ ではない. 従って $V = W \oplus Z$ ではない.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ より, 連立 1 次方程式

$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + 2y + 3z + 4w = 0 \end{cases}$ の解は s, t を任意のスカラーとして, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + 2t \\ -2s - 3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表さ

れるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は Z を生成する. また, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は W を生成するため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

によって $W + Z$ は生成される. これらのベクトルは 1 次独立だから, 教科書の定理 5.19 によって, これらは V の基底になる. 従って $V = W + Z$ であり, 教科書の命題 5.22 の (2) の条件が満たされるため, $V = W \oplus Z$ である.

(4) 任意の $f \in V$ に対して, $g, h \in V$ を $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$, $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ で定めれば $g \in W$, $h \in Z$ であり, $f = g + h$ が成り立つため, $V = W + Z$ である. $f \in W$, $g \in Z$ が $f + g = \mathbf{0}$ を満たすならば, 任意の $x \in (-a, a)$ に対して $f(x) = -g(x)$ と $f(-x) = -g(-x)$ が成り立つ. $f \in W$ より $f(-x) = f(x)$ であり, $g \in Z$ より $g(-x) = -g(x)$ が成り立つため, 2 つめの等式から $f(x) = g(x)$ が得られる. 故に $f = g$ で, $f + g = \mathbf{0}$ から $f = g = \mathbf{0}$ となるため, $V = W \oplus Z$ である.

(5) すべての項が 1 である数列を $\mathbf{1} = \{1_n\}$ とする. 任意の $\mathbf{a} = \{a_n\} \in V$ に対し, $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\mathbf{b} = \mathbf{a} - \alpha \mathbf{1} = \{a_n - \alpha\}$ とおけば, \mathbf{b} は 0 に収束する数列であるため, $\mathbf{b} \in W$ である. 従って任意の $\mathbf{a} \in V$ は $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \alpha \mathbf{1}$ ($\mathbf{b} \in W$, $\alpha \mathbf{1} \in Z$) と表されるため, $V = W + Z$ である. $\mathbf{b} = \{b_n\} \in W$, $\mathbf{c} = \{c_n\} \in Z$ が $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ はすべての項が 0 である数列) を満たすとする. $\mathbf{c} = \{c_n\} \in Z$ より $\mathbf{c} = c \mathbf{1}$ となる実数 c があるため, すべての自然数 n に対して $c_n = c$ である. 一方 $\mathbf{b} = -\mathbf{c}$ より, すべての自然数 n に対して $b_n = -c_n$ となるため, $b_n = -c$ である. よって \mathbf{b} は $-c$ に収束するが, $\mathbf{b} \in W$ より $-c = 0$, すなわち $c = 0$ である. 故に $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{0}$ となるため, $V = W \oplus Z$ である.

(6) $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ に対し, $B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ を $b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases}$, $c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i > j \\ 0 & i \leq j \end{cases}$ で定めれば $B \in W$, $C \in Z$ であり, $A = B + C$ だから $V = W + Z$ が成り立つ. 一方, $E_n \in W \cap Z$ だから $W \cap Z \neq \{0\}$

となるため、 $V = W \oplus Z$ ではない。

$$(7) A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{K}) \text{ に対し, } B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbf{K}) \text{ を } b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + a_{ji} & i < j \\ a_{ii} & i = j \\ 0 & i > j \end{cases}, c_{ij} = \begin{cases} -a_{ji} & i < j \\ 0 & i = j \\ a_{ij} & i > j \end{cases}$$

で定めれば $B \in W, C \in Z$ であり、 $A = B + C$ だから $V = W + Z$ が成り立つ。 $A = (a_{ij}) \in W \cap Z$ とする。 $A \in Z$ より、 $i = j$ ならば $a_{ij} = 0$ であり、 $i < j$ ならば $a_{ij} = -a_{ji}$ である。 また $A \in W$ より、 $i > j$ ならば $a_{ij} = 0$ だから、 $i < j$ ならば $a_{ij} = -a_{ji} = 0$ である。 従って A は零行列になるため $W \cap Z = \{O\}$ である。 故に $V = W \oplus Z$ である。

4. (1) $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in P_n(\mathbf{R})$ ならば、 $\int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^1 \left(\sum_{k=0}^n a_k t^k \right) dt = \sum_{0 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{2a_{2i}}{2i+1}$ だから $f(x) \in V$ であるためには $\sum_{0 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{2a_{2i}}{2i+1} = 0$ であることが必要十分であり、これは $a_0 = -\sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{a_{2i}}{2i+1}$ と同値である。 このとき、

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{a_{2i}}{2i+1} = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} a_{2i-1} x^{2i-1} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} \left(x^{2i} - \frac{1}{2i+1} \right)$$

だから、 $V = \left\langle x, x^3, \dots, x^{2i-1}, \dots, x^{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}, x^2 - \frac{1}{3}, x^4 - \frac{1}{5}, \dots, x^{2i} - \frac{1}{2i+1}, \dots, x^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - \frac{1}{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \right\rangle$ である。 さらに、 $x, x^3, \dots, x^{2i-1}, \dots, x^{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}, x^2 - \frac{1}{3}, x^4 - \frac{1}{5}, \dots, x^{2i} - \frac{1}{2i+1}, \dots, x^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - \frac{1}{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$ は 1 次独立だから、これらは V の基底である。 そこで、 $W = \langle 1 \rangle$ で W を定めれば、 1 は W の基底で、

$$V + W = \left\langle x, x^3, \dots, x^{2i-1}, \dots, x^{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}, 1, x^2 - \frac{1}{3}, x^4 - \frac{1}{5}, \dots, x^{2i} - \frac{1}{2i+1}, \dots, x^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - \frac{1}{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \right\rangle = P_n(\mathbf{R})$$

であり、さらに $x, x^3, \dots, x^{2i-1}, \dots, x^{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}, 1, x^2 - \frac{1}{3}, x^4 - \frac{1}{5}, \dots, x^{2i} - \frac{1}{2i+1}, \dots, x^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - \frac{1}{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$ は 1 次独立だから $P_n(\mathbf{R}) = V \oplus W$ である。(教科書の命題 5.22 参照)

(2) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のとき $\int_{-1}^1 (x-t)^2 f(t) dt = \int_{-1}^1 (x^2 - 2tx - t^2)(at^3 + bt^2 + ct + d) dt = \int_{-1}^1 ((at^3 + bt^2 + ct + d)x^2 - 2(at^4 + bt^3 + ct^2 + dt)x + (at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2)) dt = \left(\frac{2b}{3} + 2d \right) x^2 - 2 \left(\frac{2a}{5} + \frac{2c}{3} \right) x + \left(\frac{2b}{5} + \frac{2d}{3} \right)$ だから $f(x) \in V$ であるためには $\frac{2b}{3} + 2d = \frac{2a}{5} + \frac{2c}{3} = \frac{2b}{5} + \frac{2d}{3} = 0$ が成り立つことが必要十分であり、これは $b = d = 0$ かつ $c = -\frac{3a}{5}$ であることと同値である。 従って

$$V = \left\{ f(x) \in P_3(\mathbf{R}) \mid f(x) = a \left(x^3 - \frac{3}{5}x \right) \quad (a \in \mathbf{R}) \right\} = \left\langle x^3 - \frac{3}{5}x \right\rangle$$

となるため、例えば $W = \langle 1, x, x^2 \rangle$ で W を定めれば、 $1, x, x^2$ は W の基底で、 $V + W = P_3(\mathbf{R})$ であり、さらに $1, x, x^2, x^3 - \frac{3}{5}x$ は 1 次独立だから $P_3(\mathbf{R}) = V \oplus W$ である。(教科書の命題 5.22 参照)

線形数学Ⅱ 演習問題 第15回 1次写像

1. ベクトル空間 V, W と写像 $f: V \rightarrow W$ を以下のように定義するとき, f が1次写像であるかどうかを, 理由とともに答えよ. $\mathbf{a} \in \mathbf{C}^n$ に対し $\bar{\mathbf{a}}$ は \mathbf{a} の第 j 成分の共役複素数を第 j 成分とする \mathbf{C}^n のベクトルとする. また, 写像 $\omega: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ に対し $\omega(t)$ ($t \in \mathbf{R}$) の第 j 成分を $\omega_j(t)$ とし, 関数 $\omega_j: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) が微分可能であるとき, $t \in \mathbf{R}$ を $\frac{d\omega_j}{dt}(t)$ を第 j 成分とする \mathbf{R}^n のベクトルに対応させる写像を $\frac{d\omega}{dt}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ で表す.

(1) $V = \mathbf{C}^n, W = \mathbf{C}, f(\mathbf{x}) = {}^t \mathbf{x} \bar{\mathbf{a}}$ ($\mathbf{a} \in V$).

(2) $V = \mathbf{R}^n, W = \mathbf{R}, f(\mathbf{x}) = {}^t \mathbf{x} \mathbf{x}$.

(3) $V = M_{l,m}(\mathbf{K}), W = M_{k,n}(\mathbf{K}), f(X) = AXB$ ($A \in M_{k,l}(\mathbf{K}), B \in M_{m,n}(\mathbf{K})$).

(4) $V = W = M_{m,n}(\mathbf{K}), f(X) = XAX$ ($A \in M_{n,m}(\mathbf{K})$).

(5) $V = M_n(\mathbf{K}), W = \mathbf{K}, f(X) = |X|$.

(6) $V = \{\varphi \mid \varphi \text{ は閉区間 } [a, b] \text{ で定義された実数値連続関数}\}, W = \mathbf{R}, f(\varphi) = \int_a^b \varphi(x)p(x)dx$ ($p \in V$).

(7) $V = \{\varphi \mid \varphi \text{ は閉区間 } [a, b] \text{ で定義された実数値連続関数}\}, W = \mathbf{R}, f(\varphi) = \varphi^a(c)$ ($c \in [a, b]$).

(8) $V = W = P_n(\mathbf{K}), f(\varphi(x)) = \varphi(x+a)$ ($a \in \mathbf{K}$).

(9) $A \in M_n(\mathbf{R}), V = W = \left\{ \omega \mid \omega: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n \text{ は, すべての } t \in \mathbf{R} \text{ に対し, } \frac{d\omega}{dt}(t) = A\omega(t) \text{ を満たす.} \right\}, f(\omega) = \frac{d\omega}{dt}$.

(10) $A \in M_n(\mathbf{K}), V = W = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x}: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{K}^n \text{ は, すべての } k \in \mathbf{N} \text{ に対し, } \mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) \text{ を満たす.} \}, f(\mathbf{x}) \in W$ は自然数 k を $\mathbf{x}(k+1)$ に対応させる写像.

2. 以下で与えられる行列 A に対し, $\text{Ker } T_A, \text{Im } T_A$ が0次元でない場合に, これらの基底をそれぞれ1組ずつ求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & -9 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \\ -3 & -8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(11) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(12) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(13) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(14) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(15) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

(16) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

(17) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

(18) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(19) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(20) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{llll}
(21) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} & (22) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} & (23) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix} & (24) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\
(25) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} & (26) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} & (27) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} & (28) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \\
(29) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} & (30) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} & (31) \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ a & -1 & -1 \end{pmatrix} & (32) \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
(33) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & a+4 \\ 1 & -1 & a & 3 \end{pmatrix} & (34) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 \\ -1 & -1 & 1 & -a+2 \\ -2 & a-3 & 2 & 2 \\ a+1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} & (35) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -a+3 & 2a-5 & a & -a \\ 0 & 1 & 3a-6 & -a \\ 3 & a-6 & 3a & -3a+2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

3. 以下の条件を満たす \mathbf{K}^4 の 1 次変換 f に対し, $\text{Ker } f, \text{Im } f$ の基底を 1 組ずつ求めよ.

$$(1) f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, f(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, f(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, f(\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, f(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, f(2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(3) f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, f(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, f(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, f(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2-a \end{pmatrix}$$

$$(4) f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, f(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2-a \end{pmatrix}$$

$$(5) f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ a+1 \end{pmatrix}, f(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a-1 \\ a-1 \end{pmatrix}, f(\mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -a+2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, f(\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} -2 \\ -a+3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

4. $f: V \rightarrow V$ を \mathbf{K} 上のベクトル空間 V の 1 次変換とし, $\mathbf{x} \in V$ と自然数 l に対して, $f^{m-1}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ かつ $f^m(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ が成り立つとする. このとき, m 個のベクトル $\mathbf{x}, f(\mathbf{x}), f^2(\mathbf{x}), \dots, f^{m-1}(\mathbf{x})$ は 1 次独立であることを示せ. ここで f^k は f の k 回の合成写像 $\overbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}^{k \text{ 個}}$ を表す.

5. \mathbf{K} 上のベクトル空間 V の 1 次変換 $f: V \rightarrow V$ は $f \circ f = f$ を満たすとする. このとき, 以下の等式を示せ.

$$(1) \operatorname{Im} f = \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\} \quad (2) \operatorname{Ker}(id_V - f) = \operatorname{Im} f \quad (3) V = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$$

6. A が $A^2 = A$ を満たす正方行列ならば $\operatorname{tr} A = \operatorname{rank} A$ であることを示せ.

7. \mathbf{K} 上のベクトル空間 V の 1 次変換 $f: V \rightarrow V$ で $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ を満たすものがあるとき $\dim V$ は偶数であることを示せ. さらにこのとき, V の基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ で, $f(\mathbf{v}_{2i-1}) = \mathbf{v}_{2i}, f(\mathbf{v}_{2i}) = \mathbf{0}$ ($1 \leq i \leq \frac{n}{2}$) を満たすものがとれることを示せ.

8. A を n 次正方行列とすると, $A^2 = O$ ならば $\operatorname{rank} A \leq \frac{n}{2}$ であることを示せ. また n が偶数の場合, $A^2 = O$ であり $\operatorname{rank} A = \frac{n}{2}$ を満たす行列 A の例を挙げよ.

9. $f: V \rightarrow W, g: W \rightarrow Z$ を \mathbf{K} 上のベクトル空間の間の 1 次写像とすると, $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Im} f$ であるためには, $\operatorname{rank}(g \circ f) = \operatorname{rank} f + \operatorname{rank} g - \dim W$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

10. (発展問題) 1 次写像 $f: M_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}$ に対し, $A \in M_n(\mathbf{K})$ で, すべての $X \in M_n(\mathbf{K})$ に対して $f(X) = \operatorname{tr}(AX)$ を満たすものがただ 1 つ存在することを示せ.

第 15 回の演習問題の解答

1. (1) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, r \in \mathbf{C}$ に対し, $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = {}^t(\mathbf{x} + \mathbf{y})\bar{\mathbf{a}} = ({}^t\mathbf{x} + {}^t\mathbf{y})\bar{\mathbf{a}} = {}^t\mathbf{x}\bar{\mathbf{a}} + {}^t\mathbf{y}\bar{\mathbf{a}} = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), f(r\mathbf{x}) = {}^t(r\mathbf{x})\bar{\mathbf{a}} = (r{}^t\mathbf{x})\bar{\mathbf{a}} = r({}^t\mathbf{x}\bar{\mathbf{a}}) = rf(\mathbf{x})$ だから f は 1 次写像である.

(2) $f(2\mathbf{e}_1) = 4, f(\mathbf{e}_1) = 1$ だから $f(2\mathbf{e}_1) \neq 2f(\mathbf{e}_1)$ である. 従って f は 1 次写像ではない.

(3) $X, Y \in V, r \in \mathbf{K}$ に対し, $f(X + Y) = A(X + Y)B = (AX + AY)B = AXB + AYB = f(X) + f(Y), f(rX) = A(rX)B = rAXB = rf(X)$ だから f は 1 次写像である.

(4) $A = O$ の場合は, 任意の $X \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ に対して $f(X) = O$ だから f は 1 次写像である.

$A \neq O$ の場合, $A = (a_{ij}), a_{pq} \neq 0$ とする. E_{qp} を (q, p) 成分だけが 1 で, その他の成分がすべて 0 である $m \times n$ 行列とすれば, $E_{qp}AE_{qp} = a_{pq}E_{qp}$ だから $f(2E_{qp}) = 4E_{qp}AE_{qp} = 4a_{pq}E_{qp} \neq 2a_{pq}E_{qp} = 2E_{qp}AE_{qp} = 2f(E_{qp})$ である. 従って f は 1 次写像ではない.

(5) $n = 1$ の場合, $X = (x)$ の行列式の値は x だから, f は明らかに 1 次写像である.

$n \geq 2$ の場合, n 次対角行列 A, B を $A = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \cdots \ \mathbf{e}_{n-1} \ \mathbf{0}), B = (\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \cdots \ \mathbf{0} \ \mathbf{e}_n)$ で定めれば A, B はともに対角成分に 0 を含むため $|A| = |B| = 0$ である. 一方 $A + B = E_n$ だから $f(A + B) = |A + B| = 1 \neq 0 = |A| + |B| = f(A) + f(B)$ となるため, f は 1 次写像ではない.

(6) $\varphi, \psi \in V, r \in \mathbf{R}$ に対し, $f(\varphi + \psi) = \int_a^b (\varphi + \psi)(x)p(x)dx = \int_a^b (\varphi(x) + \psi(x))p(x)dx = \int_a^b \varphi(x)p(x)dx + \int_a^b \psi(x)p(x)dx = f(\varphi) + f(\psi), f(r\varphi) = \int_a^b (r\varphi)(x)p(x)dx = \int_a^b r\varphi(x)p(x)dx = r \int_a^b \varphi(x)p(x)dx = rf(\varphi)$ だから f は 1 次写像である.

(7) $\varphi, \psi \in V, r \in \mathbf{R}$ に対し, $f(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi)(c) = \varphi(c) + \psi(c) = f(\varphi) + f(\psi), f(r\varphi) = (r\varphi)(c) = r\varphi(c) = rf(\varphi)$ だから f は 1 次写像である.

(8) $\varphi(x), \psi(x) \in V, r \in \mathbf{R}$ に対し, $f(\varphi(x) + \psi(x)) = \varphi(x + a) + \psi(x + a) = f(\varphi(x)) + f(\psi(x)), f(r\varphi(x)) = r\varphi(x + a) = rf(\varphi(x))$ だから f は 1 次写像である.

(9) $\omega \in V$ ならば, 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $\frac{d\omega}{dt}(t) = A\omega(t)$ だから, $\frac{d\omega}{dt} = \omega'$ とおけば, ω' の t における微分は $\frac{d\omega'}{dt}(t) = \frac{d}{dt}(A\omega)(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(A\omega(t+h) - A\omega(t)) = \lim_{h \rightarrow 0} A\left(\frac{1}{h}(\omega(t+h) - \omega(t))\right) = A\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(\omega(t+h) - \omega(t))\right) = A\frac{d\omega}{dt}(t) = A\omega'(t)$ となるため, $\frac{d\omega}{dt} \in W$ である. 従って, $f(\omega) = \frac{d\omega}{dt}$ によって, V から W への写像 f が定まる.

$\omega, \chi \in V, r \in \mathbf{R}$ に対し, $f(\omega + \chi) = \frac{d(\omega + \chi)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\chi}{dt} = f(\omega) + f(\chi), f(r\omega) = \frac{d(r\omega)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = rf(\omega)$ だから f は 1 次写像である.

(10) $\mathbf{x} \in V$ ならば, すべての $k \in \mathbf{N}$ に対し, $\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k)$ だから, $\tilde{\mathbf{x}}: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{K}^n$ を $\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k+1)$ で定めれば, $\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{x}(k+2) = A\mathbf{x}(k+1) = \tilde{\mathbf{x}}(k)$ が成り立つため, $\tilde{\mathbf{x}} \in W$ である. 従って, $f(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{x}}$ によって, V から W への写像 f が定まる.

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, r \in \mathbf{K}$ に対し, $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}), f(r\mathbf{x})$ は $k \in \mathbf{N}$ をそれぞれ $(\mathbf{x} + \mathbf{y})(k+1) = \mathbf{x}(k+1) + \mathbf{y}(k+1), (r\mathbf{x})(k+1) = r\mathbf{x}(k+1)$ に写す写像であり, $f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), rf(\mathbf{x})$ も $k \in \mathbf{N}$ をそれぞれ $(f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}))(k) = f(\mathbf{x})(k) + f(\mathbf{y})(k) = \mathbf{x}(k+1) + \mathbf{y}(k+1), (rf(\mathbf{x}))(k) = r(f(\mathbf{x}))(k) = r\mathbf{x}(k+1)$ に写す写像である. 故に f は 1 次写像である.

2. (1) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とし, $(A \ \mathbf{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 2 & -5 & q \\ 3 & -4 & r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 0 & -7 & q - 2p \\ 0 & -7 & r - 3p \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{7} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & \frac{2p-q}{7} \\ 0 & -7 & r - 3p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5p+q}{7} \\ 0 & 1 & \frac{2p-q}{7} \\ 0 & 0 & r - p - q \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式

が解をもつためには $r - p - q = 0$ であることが必要十分である. 従って, $\mathbf{b} \in \text{Im } T_A$ であるためには \mathbf{b} が $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ p+q \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である. $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式の解は $x = y = 0$ のみだから, $\text{Ker } T_A$ は 0 次元である.

(2) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とし, $(A \mathbf{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & p \\ 3 & -5 & -1 & q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & p \\ 0 & -8 & -4 & q-3p \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{8} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3p-q}{8} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5p+q}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3p-q}{8} \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式は常に解をもつ. 従って, $\text{Im } T_A = \mathbf{K}^2$ となるため, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ が $\text{Im } T_A$ の基底になる. $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x + \frac{1}{2}z = 0 \\ y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$ と同値であるため, $\text{Ker } T_A$ の任意のベクトル \mathbf{x} は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (t は任意の定数)

と表される. よって, $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } T_A$ の基底である.

(3) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とし, $(A \mathbf{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & p \\ -4 & 2 & -2 & q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$
 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & p \\ 0 & 0 & 0 & q+2p \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式が解をもつためには $q + 2p = 0$ であることが必要十分である. 従って, $\mathbf{b} \in \text{Im } T_A$ であるためには \mathbf{b} が $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ -2p \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である. $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $2x - y + z = 0$ と同値であるため, $\text{Ker } T_A$ の任意のベクトル \mathbf{x} は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ -2s+t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (s, t は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } T_A$ の基底である.

(4) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とし, $(A \mathbf{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & p \\ 1 & 3 & 2 & q \\ 2 & 1 & -3 & r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}}$
 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & q \\ 3 & -2 & 1 & p \\ 2 & 1 & -3 & r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & q \\ 0 & -11 & -5 & p-3q \\ 0 & -5 & -7 & r-2q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行に加える}]{\text{第 3 行を } -2 \text{ 倍して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & q \\ 0 & -1 & 9 & p+q-2r \\ 0 & -5 & -7 & r-2q \end{pmatrix}$
 $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 29 & 3p+4q-6r \\ 0 & -1 & 9 & p+q-2r \\ 0 & 0 & -52 & -5p-7q+11r \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式は常に解をもつ. 従って, $\text{Im } T_A = \mathbf{K}^3$

となるため, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ が $\text{Im } T_A$ の基底になる. $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x + 29z = 0 \\ -y + 9z = 0 \\ -52z = 0 \end{cases}$ と同値である

ため, その解は $x = y = z = 0$ のみとなり, $\text{Ker } T_A$ は 0 次元である.

(5) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とし, $(A \mathbf{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & p \\ 1 & 0 & -1 & q \\ 5 & -3 & 1 & r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & p \\ 0 & 1 & -2 & q-p \\ 0 & 2 & -4 & r-5p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & q \\ 0 & 1 & -2 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & r-3p-2q \end{pmatrix} \text{より, この連立1次方程式が解をもつために}$$

は $r-3p-2q=0$ であることが必要十分である. 従って, $\mathbf{b} \in \text{Im } T_A$ であるためには \mathbf{b} が $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ 3p+2q \end{pmatrix} =$

$p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である. $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合,

上の連立1次方程式は $\begin{cases} x-z=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$ と同値であるため, $\text{Ker } T_A$ の任意のベクトル \mathbf{x} は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は

任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } T_A$ の基底である.

$$(6) \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \text{ とし, } (A \mathbf{b}) \text{ を拡大係数行列とする連立1次方程式を考える. } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 & p \\ -1 & -9 & 3 & 2 & q \\ 2 & 8 & -1 & 1 & r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第1行と第2行}} \begin{pmatrix} -1 & -9 & 3 & 2 & q \\ 2 & 4 & 1 & 3 & p \\ 2 & 8 & -1 & 1 & r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & -9 & 3 & 2 & q \\ 0 & -14 & 7 & 7 & p+2q \\ 0 & -10 & 5 & 5 & r+2q \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{14}\text{倍する}]{\text{第2行を}} \begin{pmatrix} -1 & -9 & 3 & 2 & q \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{p+2q}{14} \\ 0 & -10 & 5 & 5 & r+2q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{-9p-4q}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{p+2q}{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7r-5p+4q}{7} \end{pmatrix} \text{より, この連立1次方程式が解をもつためには } \frac{7r-5p+4q}{7} = 0 \text{ で}$$

あることが必要十分である. 従って, $\mathbf{b} \in \text{Im } T_A$ であるためには \mathbf{b} が $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ \frac{5}{7}p - \frac{4}{7}q \end{pmatrix} = \frac{p}{7} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{q}{7} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ という形

に表されることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である. $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合, 上の連立1次方程式は

$$\begin{cases} -x - \frac{3}{2}z - \frac{5}{2}w = 0 \\ y - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}w = 0 \end{cases} \text{ と同値であるため, } \text{Ker } T_A \text{ の任意のベクトル } \mathbf{x} \text{ は } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3s-5t \\ s+t \\ 2s \\ 2t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(s, t は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } T_A$ の基底である.

$$(7) \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} \text{ とし, } (A \mathbf{b}) \text{ を拡大係数行列とする連立1次方程式を考える. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ 2 & 1 & 3 & 3 & r \\ 1 & -1 & 3 & 0 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ 0 & 1 & -1 & 1 & r-2p \\ 0 & -1 & 1 & -1 & s-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-2p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p+q \end{pmatrix} \text{より, この連立1次方程式が解をもつ}$$

ためには $r-2p-q = s-p+q = 0$ であることが必要十分である. 従って, $\mathbf{b} \in \text{Im } T_A$ であるためには \mathbf{b} が

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ 2p+q \\ p-q \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ という形に表されることが必要十分である. 故に } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ は } \text{Im } T_A \text{ の基}$$

底である. $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合, 上の連立1次方程式は $\begin{cases} x+2z+w=0 \\ y-z+w=0 \end{cases}$ と同値であるため, $\text{Ker } T_A$ の任意のベクトル \mathbf{x}

$$\text{は } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2s-t \\ s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (} s, t \text{ は任意の定数) と表される. よって, } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ は } \text{Ker } T_A \text{ の基}$$

底である.

$$(8) \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} \text{ とし, } (A \mathbf{b}) \text{ を拡大係数行列とする連立1次方程式を考える. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & p \\ -1 & -1 & 0 & -2 & q \\ 1 & 3 & 0 & 3 & r \\ -1 & 2 & 1 & -2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & 1 & -1 & p+q \\ 0 & 1 & -1 & 2 & r-p \\ 0 & 4 & 2 & -1 & p+s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -p-2q \\ 0 & 1 & 1 & -1 & p+q \\ 0 & 0 & -2 & 3 & r-2p-q \\ 0 & 0 & -2 & 3 & s-3p-4q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3)\text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{r+3q}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{q+r}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 3 & r-2p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p-3q-r \end{pmatrix} \text{ より, この連立1次方程式が解をもつためには } s-p-3q-r=0 \text{ であることが必}$$

要十分である. 従って, $\mathbf{b} \in \text{Im } T_A$ であるためには \mathbf{b} が $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ p+3q+r \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ という形に

表されることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である. $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合, 上の連立1次方程式

$$\text{は } \begin{cases} x + \frac{3}{2}w = 0 \\ y + \frac{1}{2}w = 0 \\ -2z + 3w = 0 \end{cases} \text{ と同値であるため, } \text{Ker } T_A \text{ の任意のベクトル } \mathbf{x} \text{ は } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3t \\ -t \\ 3t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ (} t \text{ は任意の定数)}$$

と表される. よって, $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } T_A$ の基底である.

(9) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $(A \mathbf{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 & p \\ 1 & 2 & 1 & 1 & q \\ -1 & -1 & -2 & 2 & r \\ 1 & 2 & 1 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{第 1 行と第 2 行} \\ \text{の入れ替え}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & q \\ 4 & 1 & -1 & 1 & p \\ -1 & -1 & -2 & 2 & r \\ 1 & 2 & 1 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1,1) \text{ 成分に関して} \\ \text{第 1 列の掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & q \\ 0 & -7 & -5 & -3 & p-4q \\ 0 & 1 & -1 & 3 & r+q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-q \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{第 2 行と第 3 行} \\ \text{の入れ替え}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & q \\ 0 & 1 & -1 & 3 & r+q \\ 0 & -7 & -5 & -3 & p-4q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-q \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{(2,2) \text{ 成分に関して} \\ \text{第 2 列の掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 & -q-r \\ 0 & 1 & -1 & 3 & r+q \\ 0 & 0 & -12 & 18 & p+3q+7r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-q \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{第 3 行を} \\ -\frac{1}{12} \text{ 倍する}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 & -q-r \\ 0 & 1 & -1 & 3 & r+q \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{-p-3q-7r}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-q \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(3,3) \text{ 成分に関して} \\ \text{第 3 列の掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{p-q+3r}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{-p+9q+5r}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{-p-3q-7r}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-q \end{pmatrix}$$

より, この連立 1 次方程式が解をもつためには $s - q = 0$ であることが必要十分である.

従って, $\mathbf{b} \in \text{Im } T_A$ であるためには \mathbf{b} が $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ q \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分

である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である. $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x - \frac{1}{2}w = 0 \\ y + \frac{3}{2}w = 0 \\ z - \frac{3}{2}w = 0 \end{cases}$ と同

値であるため, $\text{Ker } T_A$ の任意のベクトル \mathbf{x} は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} t \\ -3t \\ 3t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (t は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

は $\text{Ker } T_A$ の基底である.

(10) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $(A \mathbf{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & p \\ 2 & 1 & 3 & 5 & q \\ 2 & 0 & 4 & 6 & r \\ -3 & -8 & 2 & -1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1,1) \text{ 成分に関して} \\ \text{第 1 列の掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & p \\ 0 & -5 & 5 & 5 & q-2p \\ 0 & -6 & 6 & 6 & r-2p \\ 0 & 1 & -1 & -1 & s+3p \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{第 2 行と第 4 行} \\ \text{の入れ替え}}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & p \\ 0 & 1 & -1 & -1 & s+3p \\ 0 & -6 & 6 & 6 & r-2p \\ 0 & -5 & 5 & 5 & q-2p \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2,2) \text{ 成分に関して} \\ \text{第 2 列の掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -s-8p \\ 0 & 1 & -1 & -1 & s+3p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r+6s+16p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q+5s+13p \end{pmatrix}$$

より, この連立 1 次方程式が解をもつためには $r + 6s + 16p = q + 5s + 13p = 0$ であることが必要十分である. 従って,

$\mathbf{b} \in \text{Im } T_A$ であるためには \mathbf{b} が $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ -5s - 13p \\ -6s - 16p \\ s \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ -13 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分であ

る。故に $\begin{pmatrix} 1 \\ -13 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である。 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合、上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x + 2z + 3w = 0 \\ y - z - w = 0 \end{cases}$ と同

値であるため、 $\text{Ker } T_A$ の任意のベクトル \mathbf{x} は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2s - 3t \\ s + t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (s, t は任意の定数) と表され

る。よって、 $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } T_A$ の基底である。

(11) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし、 $(A \mathbf{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える。 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & p \\ -1 & 3 & 2 & 1 & q \\ 1 & 2 & 1 & -2 & r \\ 0 & -1 & 2 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & p \\ 0 & 4 & 1 & 3 & q+p \\ 0 & 1 & 2 & -4 & r-p \\ 0 & -1 & 2 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & p \\ 0 & 1 & 2 & -4 & r-p \\ 0 & 4 & 1 & 3 & q+p \\ 0 & -1 & 2 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 & 2p-r \\ 0 & 1 & 2 & -4 & r-p \\ 0 & 0 & -7 & 19 & q+5p-4r \\ 0 & 0 & 4 & -3 & s+r-p \end{pmatrix}$
 $\xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 4 行を 2 倍して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 & 2p-r \\ 0 & 1 & 2 & -4 & r-p \\ 0 & 0 & 1 & 13 & q+3p-2r+2s \\ 0 & 0 & 4 & -3 & s+r-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 45 & 11p+3q-7r+6s \\ 0 & 1 & 0 & -30 & 5r-7p-2q-4s \\ 0 & 0 & 1 & 13 & q+3p-2r+2s \\ 0 & 0 & 0 & -55 & -13p-4q+9r-7s \end{pmatrix}$ より、

この連立 1 次方程式は常に解をもつ。従って、 $\text{Im } T_A = \mathbf{K}^4$ となるため、 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ が $\text{Im } T_A$ の基底になる。上の計算から、係数行列 A は正則であるため、 T_A は同型写像である。従って、 $\text{Ker } T_A$ は 0 次元である。

(12) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし、 $(A \mathbf{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える。 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & p \\ -1 & 0 & -2 & 2 & q \\ 2 & 1 & 2 & 3 & r \\ -1 & 2 & 1 & 2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & p \\ 0 & 2 & 1 & 4 & q+p \\ 0 & -3 & -4 & -1 & r-2p \\ 0 & 4 & 4 & 4 & s+p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & p \\ 0 & 4 & 4 & 4 & s+p \\ 0 & -3 & -4 & -1 & r-2p \\ 0 & 2 & 1 & 4 & q+p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{p-s}{2} \\ 0 & 4 & 4 & 4 & s+p \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \frac{4r+3s-5p}{4} \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \frac{2q-s+p}{2} \end{pmatrix}$
 $\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{s+4r-3p}{4} \\ 0 & 4 & 0 & 12 & 4s-4p+4r \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \frac{4r+3s-5p}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4q+7p-4r-5s}{4} \end{pmatrix}$ より、この連立 1 次方程式が解をもつためには $\frac{4q+7p-4r-5s}{4} =$

0 であることが必要十分である. 従って, $\mathbf{b} \in \text{Im } T_A$ であるためには \mathbf{b} が $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ \frac{4q+7p-4r}{5} \end{pmatrix} = \frac{p}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{q}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} +$

$\frac{r}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である. $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合,

上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x + 2w = 0 \\ 4y + 12w = 0 \\ -z + 2w = 0 \end{cases}$ と同値であるため, $\text{Ker } T_A$ の任意のベクトル \mathbf{x} は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2t \\ -3t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(t は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } T_A$ の基底である.

(13) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $(A \mathbf{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 & p \\ -1 & 0 & 1 & 1 & q \\ 3 & 2 & -1 & 1 & r \\ 1 & 3 & 0 & -1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行と第 4 行の入れ替え}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & s \\ -1 & 0 & 1 & 1 & q \\ 3 & 2 & -1 & 1 & r \\ 2 & 3 & -1 & -2 & p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & s \\ 0 & 3 & 1 & 0 & q+s \\ 0 & -7 & -1 & 4 & r-3s \\ 0 & -3 & -1 & 0 & p-2s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -q \\ 0 & 3 & 1 & 0 & q+s \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 4 & \frac{7q+3r-2s}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p+q-s \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\frac{3}{4} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -q \\ 0 & 3 & 1 & 0 & q+s \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{7q+3r-2s}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p+q-s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{3q+3r-2s}{4} \\ 0 & 3 & 0 & -3 & \frac{-3q-3r+6s}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{7q+3r-2s}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p+q-s \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式

が解をもつためには $p + q - s = 0$ であることが必要十分である. 従って, $\mathbf{b} \in \text{Im } T_A$ であるためには \mathbf{b} が

$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ p+q \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は

$\text{Im } T_A$ の基底である. $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x + 2w = 0 \\ 3y - 3w = 0 \\ z + 3w = 0 \end{cases}$ と同値であるため, $\text{Ker } T_A$ の任意のベ

クトル \mathbf{x} は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ -3t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } T_A$ の基底である.

$$(14) \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} \text{ とし, } (A \mathbf{b}) \text{ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ -1 & 0 & -1 & -2 & r \\ 1 & 1 & 0 & 2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & -1 & r+p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & s-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & -1 & r+p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p-q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(3,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & r+2p \\ 0 & 1 & -1 & 0 & r+p+q \\ 0 & 0 & 0 & -1 & r+p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p-q \end{pmatrix}$$

だから, $(A \mathbf{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつためには $s-p-q=0$ であることが必要十分である.

$$\text{このとき, } \mathbf{b} \text{ は } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ p+q \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ と表されるため, } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ が } \text{Im } T_A \text{ の基}$$

$$\text{底になる. } \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ の場合, 上の連立 1 次方程式は } \begin{cases} x+z=0 \\ y-z=0 \\ -w=0 \end{cases} \text{ と同値であるため, } \text{Ker } T_A \text{ の任意のベクトル } \mathbf{x} \text{ は}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (} t \text{ は任意の定数) と表される. よって, } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ は } \text{Ker } T_A \text{ の基底である.}$$

$$(15) \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} \text{ とし, } (A \mathbf{b}) \text{ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & p \\ 1 & 0 & 3 & 0 & q \\ 0 & 1 & 1 & 1 & r \\ 2 & -1 & 5 & -1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & p \\ 0 & 1 & 1 & 1 & q-p \\ 0 & 1 & 1 & 1 & r \\ 0 & 1 & 1 & 1 & s-2p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & q \\ 0 & 1 & 1 & 1 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r+p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p-q \end{pmatrix}$$

より, この連立 1 次方程式が解をもつ条件は $r+p-q=s-p-q=0$ が成り立つことである. 従って, $\mathbf{b} \in \text{Im } T_A$ で

$$\text{あるためには } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ -p+q \\ p+q \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ という形に表されることが必要十分である. 故に } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{は } \text{Im } T_A \text{ の基底である. } \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ の場合の上の連立 1 次方程式は } \begin{cases} x+3z=0 \\ y+z+w=0 \end{cases} \text{ と同値であるため, } \text{Ker } T_A \text{ の任意}$$

$$\text{のベクトル } \mathbf{x} \text{ は } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3s \\ -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (} s, t \text{ は任意の定数) と表される. よって, } \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ は}$$

$\text{Ker } T_A$ の基底である.

$$(16) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \text{ とお$$

けば $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} x + 3z = 0 \\ y + z + w = 0 \end{cases}$ と同値である. 従って $z = s, w = t$ とおけば, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3s \\ -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} =$

$s \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } T_A$ の基底である.

また, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解で $s = 1, t = 0$ の場合を

考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり, $s = 0, t = 1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z = w = 0$ とおけば $x = y = 0$ が得られるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は 1 次独立であ

る. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である.

$$(17) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を入れ換える}]{\text{第1行と第4行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とおけば $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} x + w = 0 \\ y + 7w = 0 \\ 2z - 4w = 0 \end{cases}$ と同

値である. 従って $w = t$ とおけば, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -t \\ -7t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } T_A$ の基

底である.

また, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解で $t = 1$ の場合を

考えれば, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $w = 0$ とおけば $x = y = z = 0$ が得

られるため, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である.

$$(18) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

とおけば $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} x - w = 0 \\ 2y + z - w = 0 \end{cases}$ と同値である. 従って $y = s, w = t$ とおけば, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ -2s + t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ と表されるため, } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ は } \text{Ker } T_A \text{ の基底である.}$$

また, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解で $s = 1,$

$t = 0$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり, $s = 0, t = 1$ の場合を考えれば,

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $y = w = 0$ とおけば $x = z = 0$ が得られるため,

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である.

$$(19) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

とおけば $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} x - 4z - 2w = 0 \\ y - 3z - w = 0 \end{cases}$ と同値である. 従って $y = s, w = t$ とおけば, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4s + 2t \\ 3s + t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ と表されるため, } \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ は } \text{Ker } T_A \text{ の基底である.}$$

また, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解で $s = 1,$

$t = 0$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり, $s = 0, t = 1$ の場合を考えれば,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z = w = 0$ とおけば $x = y = 0$ が得られるため,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である.

$$(20) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \text{ とお$$

けば $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} x + 3z = 0 \\ y + z + w = 0 \end{cases}$ と同値である. 従って $z = s, w = t$ とおけば, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3s \\ -s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} =$

$s \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } T_A$ の基底である.

また, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解で $s = 1, t = 0$ の場合を

考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり, $s = 0, t = 1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z = w = 0$ とおけば $x = y = 0$ が得られるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 1 次独立であ

る. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である.

$$(21) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

とおけば $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} x + 2z + w = 0 \\ y - z - w = 0 \end{cases}$ と同値である. 従って $z = s, w = t$ とおけば, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2s - t \\ s + t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ と表されるため, } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ は } \text{Ker } T_A \text{ の基底である.}$$

また, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解で $s = 1,$

$t = 0$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり, $s = 0, t = 1$ の場合を考えれば,

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z = w = 0$ とおけば $x = y = 0$ が得られるため,

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である.

$$(22) \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(4,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(1,4) \text{ 成分に関して}}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ より, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とおけば $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} -2z - w = 0 \\ -y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ と同値である. 従って $z = t$ とおけば,

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \\ -2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } T_A$ の基底である.

また, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解で $t = 1$ の場合を

考えれば, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z = 0$ とおけば $x = y = w = 0$ が得

られるため, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である.

$$(23) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \text{ と}$$

おけば $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} x + 2z - 4w = 0 \\ y - 2w = 0 \end{cases}$ と同値である. 従って $z = s, w = t$ とおけば, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} =$

$$\begin{pmatrix} -2s + 4t \\ 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ と表されるため, } \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ は } \text{Ker } T_A \text{ の基底である.}$$

また, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解で $s = 1, t = 0$ の場合を

考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり, $s = 0, t = 1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z = w = 0$ とおけば $x = y = 0$ が得られるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ は 1 次独立であ

る. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である.

$$(24) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

とおけば $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} x+z+w=0 \\ -y-z+w=0 \end{cases}$ と同値である. 従って $z = s, w = t$ とおけば, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -s-t \\ -s+t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ と表されるため, } \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ は } \text{Ker } T_A \text{ の基底である.}$$

また, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解で $s = 1,$

$t = 0$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり, $s = 0, t = 1$ の場合を考えれば,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z = w = 0$ とおけば $x = y = 0$ が得られるため,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である.

$$(25) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

とおけば $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} x+z=0 \\ -y-z+2w=0 \end{cases}$ と同値である. 従って $z = s, w = t$ とおけば, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -s \\ -s+2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ と表されるため, } \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ は } \text{Ker } T_A \text{ の基底である.}$$

また, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解で $s = 1,$

$t = 0$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり, $s = 0, t = 1$ の場合を考えれば,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z = w = 0$ とおけば $x = y = 0$ が得られるため,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である.

$$(26) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(4,3) \text{ 成分に関して}}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ より, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とおけば $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} x - 2w = 0 \\ y + w = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$ と同値である. 従って $w = t$ とおけば,

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } T_A$ の基底である.

また, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解で $t = 1$ の場合を考え

れば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $w = 0$ とおけば $x = y = z = 0$ が得られるた

め, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である.

$$(27) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \text{ と}$$

おけば $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} x - 5z + 2w = 0 \\ y - 4z + w = 0 \end{cases}$ と同値である. 従って $z = s, w = t$ とおけば, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} =$

$\begin{pmatrix} 5s-2t \\ 4s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } T_A$ の基底である.

また, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解で $s = 1, t = 0$ の場合を

考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり, $s = 0, t = 1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z = w = 0$ とおけば $x = y = 0$ が得られるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ は 1 次独立であ

る. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である.

$$(28) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

とおけば $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} x - 3z + 2w = 0 \\ y - 2z + w = 0 \end{cases}$ と同値である. 従って $z = s, w = t$ とおけば, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3s-2t \\ 2s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } T_A$ の基底である.

また, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解で $s = 1,$

$t = 0$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり, $s = 0, t = 1$ の場合を考えれば,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z = w = 0$ とおけば $x = y = 0$ が得られるため,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である.

$$(29) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

とおけば $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} x - z - 2w = 0 \\ y - z + w = 0 \end{cases}$ と同値である. 従って $z = s, w = t$ とおけば, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} s + 2t \\ s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ と表されるため, } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ は } \text{Ker } T_A \text{ の基底である.}$$

また, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解で $s = 1, t = 0$ の場合を

考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり, $s = 0, t = 1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z = w = 0$ とおけば $x = y = 0$ が得られるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 1 次独立であ

る. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である.

$$(30) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

とおけば $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} x - w = 0 \\ y + z + w = 0 \end{cases}$ と同値である. 従って $z = s, w = t$ とおけば, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} =$

$$\begin{pmatrix} t \\ -s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ と表されるため, } \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ は } \text{Ker } T_A \text{ の基底である.}$$

また, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解で $s = 1$,

$t = 0$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり, $s = 0, t = 1$ の場合を考えれば,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z = w = 0$ とおけば $x = y = 0$ が得られるため,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である.

$$(31) \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ a & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ a+1 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & a+1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix} \cdots (*) \text{ より } a \neq 0 \text{ の場合}$$

(*) $\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列は正則である. 従って, $\text{Ker } T_A$ は零ベクトルのみからなり,

$\text{Im } T_A = \mathbf{K}^3$ であるため, $\text{Im } T_A$ の基底として基本ベクトル e_1, e_2, e_3 がとれる.

$a = 0$ の場合 (*) = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおけば $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ と同値である. 従って $z = t$

とおけば, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } T_A$ の基底である.

また, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解で $t = 1$ の場合を考え

れば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z = 0$ とおけば $x = y = 0$ が得られるため,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である.

$$(32) \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} \text{ とし, } (A\mathbf{b}) \text{ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. } \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & a & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & a & r \\ 1 & 3 & 3 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & a & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & a & r \\ 0 & 3-a & 3 & 1 & s-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a^2 & 0 & p-aq \\ 0 & 1 & a & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & a & r \\ 0 & 0 & a^2-3a+3 & 1 & s-p+(a-3)q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^3 & p-aq+a^2r \\ 0 & 1 & 0 & -a^2 & q-ar \\ 0 & 0 & 1 & a & r \\ 0 & 0 & 0 & (1-a)^3 & s-p+(a-3)q-(a^2-3a+3)r \end{pmatrix} \cdots (*) \text{ より, } a \neq 1 \text{ ならば } A \text{ は正則行列である. この}$$

場合は $\text{Ker } T_A = \{\mathbf{0}\}$, $\text{Im } T_A = \mathbf{K}^4$ となり, $\dim \text{Ker } T_A = 0$, $\dim \text{Im } T_A = 4$ である. $a = 1$ のとき, $(*) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & p-q+r \\ 0 & 1 & 0 & -1 & q-r \\ 0 & 0 & 1 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p-2q-r \end{pmatrix} \text{ だから, この連立1次方程式が解をもつ条件は } s-p-2q-r=0 \text{ が成り立つこ}$$

とである. 従って, $\mathbf{b} \in \text{Im } T_A$ であるためには $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ p+2q+r \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ という形に表され

ることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である. $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合の上の連立1次方程式は

$$\begin{cases} x+w=0 \\ y-w=0 \\ z+w=0 \end{cases} \text{ と同値であるため, } \text{Ker } T_A \text{ の任意のベクトル } \mathbf{x} \text{ は } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (} t \text{ は任意の定数) と表され}$$

る. よって, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } T_A$ の基底である.

$$(33) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & a+4 \\ 1 & -1 & a & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & a-1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix} \cdots (*) \text{ よ}$$

り, $a \neq -1$ の場合 $(*) \xrightarrow[\text{を } \frac{1}{a+1} \text{ 倍する}]{\text{第3行と第4行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を入れ替える}]{\text{第3行と第4行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列は正

則である. 従って, $\text{Ker } T_A$ は零ベクトルのみからなり, $\text{Im } T_A = \mathbf{K}^4$ であるため, $\text{Im } T_A$ の基底として基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ がとれる.

$$a = -1 \text{ の場合 } (*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \text{ とおけば } \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \text{ は } \begin{cases} x+z+2w=0 \\ y+2z-w=0 \end{cases} \text{ と同値であ}$$

る. 従って $z = s, w = t$ とおけば, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -s-2t \\ -2s+t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため,

$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } T_A$ の基底である.

また, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解で $s = 1,$

$t = 0$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかり, $s = 0, t = 1$ の場合を考えれば,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z = w = 0$ とおけば $x = y = 0$ が得られるため,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である.

$$(34) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 \\ -1 & -1 & 1 & -a+2 \\ -2 & a-3 & 2 & 2 \\ a+1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & a-1 & 2(1-a) & 2(a-1) \\ 0 & 1-a & (a-1)(a+2) & a(1-a) \end{pmatrix} \cdots (*) \text{ より, } a \neq 1 \text{ の場}$$

$$\text{合, } (*) \xrightarrow[\frac{1}{1-a} \text{ 倍する}]{\text{第 2,3,4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -a-2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2) \text{ 成分に関して}}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a-4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix} \cdots (**)$ である. 従って $a \neq 1, 2$ の場合は $(**)$ の行の入れ替えを行って階段行列にすれば, 階数が 4 になることがわかるため, 与えられた行列は正則である. 従って, $\text{Ker } T_A$ は零ベクトルのみからなり, $\text{Im } T_A = \mathbf{K}^4$ であるため, $\text{Im } T_A$ の基底として基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ がとれる.

$a = 2$ の場合, $(**)$ = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とおけば $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} x-2w=0 \\ z=0 \\ -y-2w=0 \end{cases}$ と同値である.

従って $w = t$ とおけば, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ -2t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } T_A$ の基底である.

また, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解で $t = 1$ の場合

を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $w = 0$ とおけば $x = y = z = 0$

が得られるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である.

$a = 1$ の場合, (*) = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とおけば $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $x + y - z - w = 0$ と同値である. 従っ

て $y = s, z = t, w = u$ とおけば, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -s+t+u \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるた

め, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } T_A$ の基底である. また, この場合, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ で A の各行は第 1 行目

の ± 1 倍になるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } T_A$ の基底である.

(35) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $(A \ \mathbf{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & p \\ -a+3 & 2a-5 & a & -a & q \\ 0 & 1 & 3a-6 & -a & r \\ 3 & a-6 & 3a & -3a+2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & p \\ 0 & 1 & 3a-6 & -a & q+(a-3)p \\ 0 & 1 & 3a-6 & -a & r \\ 0 & a & 3a-6 & -3a+2 & s-3p \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(3,2)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6a-10 & -2a & p+2r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q+(a-3)p-r \\ 0 & 1 & 3(a-2) & -a & r \\ 0 & 0 & -3(a-1)(a-2) & (a-1)(a-2) & s-3p-ar \end{pmatrix} \dots (*)$$

$$a=1 \text{ または } a=2 \text{ の場合, } (*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6a-10 & -2a & p+2r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q+(a-3)p-r \\ 0 & 1 & 3(a-2) & -a & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-3p-ar \end{pmatrix} \text{ だから, } (A \mathbf{b}) \text{ を拡大係数行}$$

列とする連立1次方程式が解をもつためには, $\begin{cases} q+(a-3)p-r=0 \\ s-3p-ar=0 \end{cases}$ が成り立つことが必要十分である. この

$$\text{とき, } \mathbf{b} \text{ は } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ (3-a)p+r \\ r \\ 3p+ar \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 3-a \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \text{ と表されるため, } \begin{pmatrix} 1 \\ 3-a \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \text{ が } \text{Im } T_A \text{ の基底にな}$$

る. $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合, 上の連立1次方程式は $\begin{cases} x+(6a-10)z-2aw=0 \\ y+3(a-2)z-aw=0 \end{cases}$ と同値であるため, $\text{Ker } T_A$ の任意のベ

$$\text{クトル } \mathbf{x} \text{ は } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -(6a-10)s+2at \\ 3(2-a)s+at \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -6a+10 \\ 3a-6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (} s, t \text{ は任意の定数) と表される. よって,}$$

$$\begin{pmatrix} -6a+10 \\ 3a-6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ は } \text{Ker } T_A \text{ の基底である.}$$

$$a \neq 1, 2 \text{ の場合, } (*) \xrightarrow[-3(a-1)(a-2)\text{倍する}]{\text{第4行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6a-10 & -2a & p+2r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q+(a-3)p-r \\ 0 & 1 & 3(a-2) & -a & r \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{s-3p-ar}{3(a-1)(a-2)} \end{pmatrix} \text{ だから, } (A \mathbf{b}) \text{ を拡大係数}$$

行列とする連立1次方程式が解をもつためには, $q+(a-3)p-r=0$ が成り立つことが必要十分である. このとき, \mathbf{b}

$$\text{は } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ (3-a)p+r \\ r \\ s \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 3-a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ と表されるため, } \begin{pmatrix} 1 \\ 3-a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ が } \text{Im } T_A \text{ の基底}$$

になる. $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合, 上の連立1次方程式は $\begin{cases} x+(6a-10)z-2aw=0 \\ y+3(a-2)z-aw=0 \\ z-\frac{1}{3}w=0 \end{cases}$ と同値であるため, $\text{Ker } T_A$ の任意のベ

$$\text{クトル } \mathbf{x} \text{ は } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 10t \\ 6t \\ t \\ 3t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ (} t \text{ は任意の定数) と表される. よって, } \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ は } \text{Ker } T_A \text{ の基底である.}$$

3. (1) 与えられた条件と f の線形性から $f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdots (i)$, $-f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdots (ii)$, $f(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_3) =$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdots (iii), f(\mathbf{e}_3) + f(\mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdots (iv) \text{ が成り立つ. } (i), (ii) \text{ より, } f(\mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_1) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ 従って } (iii) \text{ より, } f(\mathbf{e}_3) = f(\mathbf{e}_2) - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ さらに } (iv) \text{ から}$$

$$f(\mathbf{e}_4) = -f(\mathbf{e}_3) + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ が得られる. 故に, } f \text{ を表す行列は } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

である.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

とおけば $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} x - 2z - w = 0 \\ -y - z - 2w = 0 \end{cases}$ と同値である. 従って $z = s, w = t$ とおけば, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2s + t \\ -s - 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ と表されるため, } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ は Ker } f \text{ の基底である.}$$

$$\text{また, } A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ は } x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ と同値だから, 上の } A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ の解で } s = 1,$$

$$t = 0 \text{ の場合を考えれば, } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ は 1 次従属であることがわかり, } s = 0, t = 1 \text{ の場合を考えれば,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ は 1 次従属であることがわかる. 一方 } z = w = 0 \text{ とおけば } x = y = 0 \text{ が得られるため,}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } f$ の基底である.

(2) 与えられた条件と f の線形性から $f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdots (i), -f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdots (ii), f(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_3) =$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdots (iii), 2f(\mathbf{e}_3) + f(\mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \cdots (iv)$ が成り立つ. (i), (ii) より, $f(\mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_1) + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} +$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. 従って (iii) より, $f(\mathbf{e}_3) = f(\mathbf{e}_2) - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. さらに (iv) から

$f(\mathbf{e}_4) = -2f(\mathbf{e}_3) + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ が得られる. 故に, f を表す行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

である.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ より, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とおけば $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ -4w = 0 \end{cases}$ と同値である. 従って $z = t$ とおけば,

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } f$ の基底である.

また, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解で $t = 1$ の場合

を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z = 0$ とおけば $x = y = w = 0$

が得られるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } f$ の基底である.

(3) 与えられた条件と f の線形性から $f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdots (i), f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdots (ii), -f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_3) =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdots (iii), f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_3) + f(\mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2-a \end{pmatrix} \cdots (iv)$ が成り立つ. (i), (ii) より, $f(\mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_1) - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. 従って (iii) より, $f(\mathbf{e}_3) = f(\mathbf{e}_1) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. さらに (iv) か

ら $f(\mathbf{e}_4) = -f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_3) + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2-a \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix}$ が得られる. 故に, f を表す行

列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & -a \end{pmatrix}$ である.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & -a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 2-a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -a-7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -a-2 \end{pmatrix} \cdots (*)$ より, $a \neq -2$ の場合, $(*) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -a-2 \end{pmatrix}$ となり, これは対角成分が

すべて 0 ではない上半三角行列であるため, 正則行列である. 従って, $\text{Ker } f$ は零ベクトルのみからなり, $\text{Im } f = \mathbf{K}^4$ であるため, $\text{Im } f$ の基底として基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ がとれる.

$a = -2$ の場合, $(*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とおけば $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} x + 6w = 0 \\ z - 5w = 0 \\ y - 2w = 0 \end{cases}$ と同値である. 従っ

て $w = t$ とおけば, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -6t \\ 2t \\ 5t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } f$ の基底である.

また, $Ax = \mathbf{0}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と同値だから, 上の $Ax = \mathbf{0}$ の解で $t = 1$ の場合を

考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $w = 0$ とおけば $x = y = z = 0$ が得

られるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } f$ の基底である.

(4) 与えられた条件と f の線形性から $f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdots (i), f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdots (ii), f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_3) =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdots (iii), f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_3) - f(\mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2-a \end{pmatrix} \cdots (iv)$ が成り立つ. (i), (ii) より, $f(\mathbf{e}_2) = -f(\mathbf{e}_1) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} =$

$-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$. 従って (iii) より, $f(\mathbf{e}_3) = f(\mathbf{e}_1) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. さらに (iv) か

ら $f(\mathbf{e}_4) = f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_3) - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}$ が得られる. 故に, f を表す行列は

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & 0 & a \end{pmatrix}$ である.

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & a-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & a+7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \cdots (*)$ より, $a \neq -2$ の場合, (*) となり, これは対角成分がすべて 0 ではない上半三角行列であるため, 正則行列である. 従って, $\text{Ker } f$ は零ベクトルのみからなり, $\text{Im } f = \mathbf{K}^4$ であるため, $\text{Im } f$ の基底として基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ がとれる.

$a = -2$ の場合, (*) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とおけば $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} x - 6w = 0 \\ -y + 2w = 0 \\ z + 5w = 0 \end{cases}$ と同値である.

従って $w = t$ とおけば, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6t \\ 2t \\ -5t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } f$ の基底である.

また, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解で $t = 1$ の場合

を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $w = 0$ とおけば $x = y = w = 0$

が得られるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\text{Im } f$ の基底である.

(5) 与えられた条件と f の線形性から $f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ a+1 \end{pmatrix} \cdots (i), f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a-1 \\ a-1 \end{pmatrix} \cdots (ii),$

$f(\mathbf{e}_3) + 2f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -a+2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdots (iii), f(\mathbf{e}_3) + f(\mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} -2 \\ -a+3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \cdots (iv)$ が成り立つ. (i), (ii) より, $f(\mathbf{e}_2) =$

$f(\mathbf{e}_1) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a-1 \\ a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ a+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a-1 \\ a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a-1 \\ 2 \end{pmatrix}$. 従って (iii) より, $f(\mathbf{e}_3) = -2f(\mathbf{e}_2) + \begin{pmatrix} -a+2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2a+2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a+2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ -2a+2 \\ -2 \end{pmatrix}$. さらに (iv) から $f(\mathbf{e}_4) = -f(\mathbf{e}_3) + \begin{pmatrix} -2 \\ -a+3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ -2a+2 \\ -2 \end{pmatrix} +$

$\begin{pmatrix} -2 \\ -a+3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ -a+2 \\ 2a+2 \\ -2 \end{pmatrix}$ が得られる. 故に, f を表す行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 \\ -1 & -1 & 1 & -a+2 \\ -2 & a-1 & 2-2a & 2a+2 \\ a+1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ である.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 \\ -1 & -1 & 1 & -a+2 \\ -2 & a-1 & 2-2a & 2a+2 \\ a+1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & a+1 & 2-4a & 4a-2 \\ 0 & 1-a & (a-1)(a+2) & a(1-a) \end{pmatrix} \cdots (*) \text{より, } a \neq 1 \text{ の場合,}$$

$$(*) \xrightarrow[\text{を } \frac{1}{1-a} \text{ 倍する}]{\text{第2行と第4行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a+1 & 2-4a & 4a-2 \\ 0 & 1 & -a-2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(2,3)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & 4a-2 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(4,2)\text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-a)(a-2) \\ 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix} \cdots (**)$$

れば、階数が4になることがわかるため、与えられた行列は正則である。従って、 $\text{Ker } f$ は零ベクトルのみからなり、 $\text{Im } f = \mathbf{K}^4$ であるため、 $\text{Im } f$ の基底として基本ベクトル e_1, e_2, e_3, e_4 がとれる。

$$a = 2 \text{ の場合, } (**)= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ より, } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \text{ とおけば } \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \text{ は } \begin{cases} x - 2w = 0 \\ z = 0 \\ y + 2w = 0 \end{cases} \text{ と同値である。従っ}$$

$$\text{て } w = t \text{ とおけば, } \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \text{ の解は } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ -2t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ と表されるため, } \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ は } \text{Ker } f \text{ の基底である。}$$

$$\text{また, } \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \text{ は } x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ と同値だから, 上の } \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \text{ の解で } t = 1 \text{ の場合}$$

$$\text{を考えれば, } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ は1次従属であることがわかる。一方 } w = 0 \text{ とおけば } x = y = z = 0$$

$$\text{が得られるため, } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ は1次独立である。故に } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ は } \text{Im } f \text{ の基底である。}$$

$$a = 1 \text{ の場合, } (*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(3,2)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \text{ とおけば } \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

$$\text{は } \begin{cases} x - 2w = 0 \\ 2y - 2z + 2w = 0 \end{cases} \text{ と同値である。従って } z = s, w = t \text{ とおけば, } \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \text{ の解は } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} =$$

$s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\text{Ker } f$ の基底である. また, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} +$
 $z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解で $s = 1, t = 0$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

は 1 次従属であることがわかり, $s = 0, t = 1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわ

かる. 一方 $z = w = 0$ とおけば $x = y = 0$ が得られるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

は $\text{Im } f$ の基底である.

4. $a_0, a_1, \dots, a_{m-1} \in \mathbf{K}$ に対して

$$a_0\mathbf{x} + a_1f(\mathbf{x}) + a_2f^2(\mathbf{x}) + \dots + a_{m-1}f^{m-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \dots (*)$$

が成り立つと仮定して, $a_i = 0$ が $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ に対して成り立つことを i による数学的帰納法で示す. (*) の両辺を f^k で写せば, $i \geq m-k$ ならば $f^k(f^i(\mathbf{x})) = f^{i+k}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ だから, $k = 1, 2, \dots, m-1$ に対して

$$a_0f^k(\mathbf{x}) + a_1f^{k+1}(\mathbf{x}) + \dots + a_i f^{k+i}(\mathbf{x}) + \dots + a_{m-k-1}f^{m-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \dots (**)$$

が成り立つ. (**) で $k = m-1$ の場合, $a_0f^{m-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ で, $f^{m-1}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ だから $a_0 = 0$ が得られる, $j = 0, 1, \dots, i-1$ ($1 \leq i < m-1$) に対して $a_j = 0$ が成り立つと仮定すると, (**) で $k = m-i-1$ の場合を考えれば, 仮定から $a_i f^{m-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ が得られるため, $f^{m-1}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ より $a_i = 0$ である. 故に $a_i = 0$ が $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ に対して成り立つため, $\mathbf{x}, f(\mathbf{x}), f^2(\mathbf{x}), \dots, f^{m-1}(\mathbf{x})$ は 1 次独立である.

5. (1) $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}$ ならば $\mathbf{x} = f(\mathbf{x}) \in \text{Im } f$ だから $\{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\} \subset \text{Im } f$ である. $\mathbf{x} \in \text{Im } f$ ならば $\mathbf{x} = f(\mathbf{v})$ を満たす $\mathbf{v} \in V$ が存在するため, 仮定から $f(\mathbf{x}) = f(f(\mathbf{v})) = (f \circ f)(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) = \mathbf{x}$ である. 従って $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}$ だから $\text{Im } f \subset \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}$ が成り立つ. 故に $\text{Im } f = \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}$ である.

(2) $\mathbf{x} \in \text{Ker}(id_V - f)$ であることは $\mathbf{x} - f(\mathbf{x}) = (id_V - f)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ であることと同値だから, $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}$ であることと同値である. 従って (1) の結果から $\text{Ker}(id_V - f) = \text{Im } f$ が得られる.

(3) $\mathbf{x} \in V$ に対し, $f(\mathbf{x} - f(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) - f(f(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) - (f \circ f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ だから, $\mathbf{x} - f(\mathbf{x}) \in \text{Ker } f$ である. また, $f(\mathbf{x}) \in \text{Im } f$ だから $\mathbf{x} = (\mathbf{x} - f(\mathbf{x})) + f(\mathbf{x}) \in \text{Im } f + \text{Ker } f$ である. 従って $V = \text{Im } f + \text{Ker } f$ が成り立つ. $\mathbf{x} \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$ ならば $\mathbf{x} \in \text{Im } f = \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}$ だから $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$ であるが, $\mathbf{x} \in \text{Ker } f$ でもあるので, $\mathbf{x} = f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ である. 故に $\text{Im } f \cap \text{Ker } f$ は零ベクトルのみからなるので, $V = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$ である.

6. A を n 次正方行列とすれば, $A^2 = A$ ならば, A で表される \mathbf{K}^n の 1 次変換 T_A は $T_A \circ T_A = T_{A^2} = T_A$ を満たすため, $\text{rank } A = r$ とおき, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ を $\text{Im } T_A$ の基底, $\mathbf{v}_{r+1}, \mathbf{v}_{r+2}, \dots, \mathbf{v}_n$ を $\text{Ker } f$ の基底とすれば, 演習問題 5 の (3) の結果から, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ は \mathbf{K}^n の基底である. また, 演習問題 5 の (1) の結果から, $j = 1, 2, \dots, r$ に対して $T_A(\mathbf{v}_j) = \mathbf{v}_j$ であり, $j = r+1, r+2, \dots, n$ に対して $\mathbf{v}_j \in \text{Ker } T_A$ だから $T_A(\mathbf{v}_j) = \mathbf{0}$ である. 従って, \mathbf{v}_j を第 j 列と

する n 次正方行列を P とすれば, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ が \mathbf{K}^n の基底であることから, P の列ベクトルは \mathbf{K}^n を生成するため, $\text{rank } P = n$ となり, P は正則行列である. $F_{nn}(r)$ を, $j = 1, 2, \dots, r$ ならば第 j 列が \mathbf{e}_j であり, $j = r+1, r+2, \dots, n$ ならば第 j 列が $\mathbf{0}$ である n 次正方行列 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ とすれば, $\text{tr } F_{nn}(r) = r$ である. また, $j = 1, 2, \dots, r$ ならば $(AP$ の第 j 列) $= AP\mathbf{e}_j = A\mathbf{v}_j = T_A(\mathbf{v}_j) = \mathbf{v}_j = P\mathbf{e}_j = PF_{nn}\mathbf{e}_j = (PF_{nn}(r)$ の第 j 列) であり, $j = r+1, r+2, \dots, n$ ならば $(AP$ の第 j 列) $= AP\mathbf{e}_j = A\mathbf{v}_j = T_A(\mathbf{v}_j) = \mathbf{0} = P\mathbf{0} = PF_{nn}(r)\mathbf{e}_j = (PF_{nn}(r)$ の第 j 列) だから, $AP = PF_{nn}(r)$ である. 従って $A = PF_{nn}(r)P^{-1}$ であり, 一方, 一般に $m \times n$ 行列 X と $n \times m$ 行列 Y に対して $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$ が成り立つため, $\text{tr } A = \text{tr}(PF_{nn}(r)P^{-1}) = \text{tr}(F_{nn}(r)P^{-1}P) = \text{tr } F_{nn}(r) = r = \text{rank } A$ である.

7. V の 1 次変換 $f : V \rightarrow V$ で $\text{Ker } f = \text{Im } f$ を満たすならば, 次元公式より $\dim V = \dim \text{Ker } f + \text{rank } f = \dim \text{Im } f + \text{rank } f = 2\text{rank } f$ だから $\dim V$ は偶数である. $m = \frac{1}{2} \dim V$ とおけば, 上式より $\dim \text{Ker } f = \dim \text{Im } f = \text{rank } f = m$ である. そこで, $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \dots, \mathbf{v}_{2m}$ を $\text{Ker } f$ の基底とすれば, 各 $i = 1, 2, \dots, m$ に対して $\mathbf{v}_{2i} \in \text{Ker } f = \text{Im } f$ だから, $f(\mathbf{v}_{2i-1}) = \mathbf{v}_{2i}$ を満たす $\mathbf{v}_{2i-1} \in V$ が存在する. このとき, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{2m}$ は V の基底である. 実際, $f(\mathbf{v}_{2i}) = \mathbf{0}$, $f(\mathbf{v}_{2i-1}) = \mathbf{v}_{2i}$ だから, $x_j \in \mathbf{K}$ に対し, $f\left(\sum_{j=1}^{2m} x_j \mathbf{v}_j\right) = \sum_{j=1}^{2m} x_j f(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^m x_{2i-1} f(\mathbf{v}_{2i-1}) = \sum_{i=1}^m x_{2i-1} \mathbf{v}_{2i}$ となるため, $\sum_{j=1}^{2m} x_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$ が成り立つならば, この両辺の f による像を考えれば, $\sum_{i=1}^m x_{2i-1} \mathbf{v}_{2i} = \mathbf{0}$ が得られる. $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \dots, \mathbf{v}_{2m}$ は 1 次独立だから, 上式より $i = 1, 2, \dots, m$ に対して $x_{2i-1} = 0$ である. 従って $\sum_{i=1}^m x_{2i} \mathbf{v}_{2i} = \mathbf{0}$ で, 再度 $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \dots, \mathbf{v}_{2m}$ の 1 次独立性を用いると, $i = 1, 2, \dots, m$ に対して $x_{2i} = 0$ であることがわかる. 故に $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{2m}$ は 1 次独立で, $\dim V = 2m$ だから, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{2m}$ は V の基底である.

8. A で表される \mathbf{K}^n の 1 次変換 T_A を考えれば, $A^2 = O$ だから, 任意の $\mathbf{y} \in \text{Im } T_A$ に対し, $\mathbf{y} = T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ を満たす $\mathbf{x} \in \mathbf{K}^n$ をとれば, $T_A(\mathbf{y}) = A\mathbf{y} = A(A\mathbf{x}) = A^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$ である. 従って $\mathbf{y} \in \text{Ker } T_A$ が成り立つため, $\text{Im } T_A \subset \text{Ker } T_A$ である. 故に $\text{rank } A = \dim \text{Im } T_A \leq \dim \text{Ker } T_A$ であり, 一方, 次元公式から, $\dim \text{Ker } T_A = \dim \mathbf{K}^n - \text{rank } A = n - \text{rank } A$ だから, $\text{rank } A \leq n - \text{rank } A$ が得られ, $\text{rank } A \leq \frac{n}{2}$ が成り立つことがわかる.

n が偶数の場合, $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ に対して, 第 $2i-1$ 列が零ベクトルで, 第 $2i$ 列が \mathbf{K}^n の基本ベクトル \mathbf{e}_{2i-1} である n 次正方行列を A とすれば, A の零ベクトルでない $\frac{n}{2}$ 個の列ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_5, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ は 1 次独立だから

$\text{rank } A = \frac{n}{2}$ である. $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおけば, A は N_2 を $\frac{n}{2}$ 個対角線上に並べた行列 $\begin{pmatrix} N_2 & O & \cdots & O \\ O & N_2 & & O \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & N_2 \end{pmatrix}$ で,

$N_2^2 = O$ だから $A^2 = O$ である. あるいは, $A = \begin{pmatrix} O & E_{\frac{n}{2}} \\ O & O \end{pmatrix}$, すなわち, 第 1 列から第 $\frac{n}{2}$ 列まですべて零ベクトルで, $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ に対して, 第 $\left(\frac{n}{2} + i\right)$ 列が n 次元基本ベクトル \mathbf{e}_i である n 次正方行列を A としても, $\text{rank } A = \frac{n}{2}$ であり, $A^2 = O$ が成り立つ.

9. 教科書の 6 章の演習問題 6.5(4) の等式 $\text{rank}(g \circ f) = \text{rank } f - \dim(\text{Im } f \cap \text{Ker } g)$ と, g に関する次元公式 $\dim W = \text{rank } g + \dim \text{Ker } g$ から

$$\begin{aligned} \text{rank}(g \circ f) - (\text{rank } f + \text{rank } g - \dim W) &= \text{rank } f - \dim(\text{Im } f \cap \text{Ker } g) - (\text{rank } f - \dim \text{Ker } g) \\ &= \dim \text{Ker } g - \dim(\text{Im } f \cap \text{Ker } g) \end{aligned}$$

だから $\text{rank}(g \circ f) = \text{rank } f + \text{rank } g - \dim W$ が成り立つことと $\dim \text{Ker } g = \dim(\text{Im } f \cap \text{Ker } g)$ が成り立つことは同値である. $\text{Im } f \cap \text{Ker } g$ は $\text{Ker } g$ の部分空間だから $\dim \text{Ker } g = \dim(\text{Im } f \cap \text{Ker } g)$ が成り立つことと $\text{Im } f \cap \text{Ker } g = \text{Ker } g$

が成り立つことは同値であり, さらに $\text{Im } f \cap \text{Ker } g = \text{Ker } g$ は $\text{Ker } g \subset \text{Im } f$ と同値である. 故に $\text{Ker } g \subset \text{Im } f$ であるためには, $\text{rank}(g \circ f) = \text{rank } f + \text{rank } g - \dim W$ が成り立つことが必要十分である.

10. 1以上 n 以下の整数 i, j に対し, E_{ij} を (i, j) 成分だけが 1 で, その他の成分がすべて 0 である n 次正方行列とする. $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ ならば $(E_{ij}X)$ の (p, q) 成分 = $\begin{cases} x_{jq} & p = i \\ 0 & p \neq i \end{cases}$ だから, $\text{tr}(E_{ij}X) = x_{ji}$ である.

1 次写像 $f : M_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}$ に対し, $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ は $X = \sum_{i,j=1}^n x_{ij}E_{ij}$ と表されるため, $f(E_{ij}) = a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) とおけば,

$$f(X) = f\left(\sum_{i,j=1}^n x_{ij}E_{ij}\right) = \sum_{i,j=1}^n x_{ij}f(E_{ij}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ji}x_{ij} = \sum_{i,j=1}^n a_{ji}\text{tr}(E_{ji}X) = \text{tr}\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ji}E_{ji}X\right)$$

が成り立つ. そこで a_{ij} を (i, j) とする n 次正方行列を A とすれば $A = \sum_{i,j=1}^n a_{ji}E_{ji}$ だから, 上式より, すべての $X \in M_n(\mathbf{K})$ に対して $f(X) = \text{tr}(AX)$ が成り立つ. 故に $A \in M_n(\mathbf{K})$ で, すべての $X \in M_n(\mathbf{K})$ に対して $f(X) = \text{tr}(AX)$ を満たすものが存在する

$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ がすべての $X \in M_n(\mathbf{K})$ に対して $f(X) = \text{tr}(AX) = \text{tr}(BX)$ を満たすとする. このとき (AE_{ij}) の (p, q) 成分 = $\begin{cases} a_{pi} & q = j \\ 0 & q \neq j \end{cases}$, (BE_{ij}) の (p, q) 成分 = $\begin{cases} b_{pi} & q = j \\ 0 & q \neq j \end{cases}$ だから, 任意の $i, j = 1, 2, \dots, n$ に対して $a_{ji} = \text{tr}(AE_{ij}) = f(E_{ij}) = \text{tr}(BE_{ij}) = b_{ji}$ である. 従って $A = B$ となるため, すべての $X \in M_n(\mathbf{K})$ に対して $f(X) = \text{tr}(AX)$ を満たす行列 A はただ 1 つしかない.

線形数学 II 演習問題 第 16 回 1 次写像の表現行列

1. 以下で与えるベクトル空間 V と、 V の基底 $B = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ に関する V の 1 次変換 f の表現行列を求めよ.

ただし (5), (7), (8) の行列 A は $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で、(5) と (8) の A は正則であり、(6) の P は $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ とする.

$$(1) V = \mathbf{K}^3, B = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right], f = T_A, \text{ ただし } A = \begin{pmatrix} -9 & 8 & 12 \\ 8 & -9 & 12 \\ 12 & 12 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(2) V = \mathbf{K}^3, B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right], f = T_A, \text{ ただし } A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(3) V = \mathbf{K}^3, B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right], f = T_A, \text{ ただし } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$(4) V = \mathbf{K}^3, B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right], f = T_A, \text{ ただし } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 9 & -5 \\ -5 & 13 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$(5) V = \mathbf{K}^3, B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right], f = T_A, \text{ ただし } A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(6) V = \{X \in M_2(\mathbf{K}) \mid \text{tr } X = 0\}, B = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right], f(X) = AXA^{-1}.$$

$$(7) V = \{X \in M_3(\mathbf{K}) \mid {}^t X = -X\}, B = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right], f(X) = PX - XP.$$

$$(8) V = M_2(\mathbf{K}), B = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right], f(X) = AX.$$

$$(9) V = M_2(\mathbf{K}), B = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right], f(X) = AXA^{-1}.$$

$$(10) V = P_n(\mathbf{K}), B = [1, x, \dots, x^n], f(\varphi(x)) = \varphi(x+a).$$

$$(11) V = P_n(\mathbf{K}), B = [1, x, \dots, x^n], f(\varphi(x)) = \varphi'(x).$$

$$(12) V = P_n(\mathbf{R}), B = \left[1, x, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^j}{j!}, \dots, \frac{x^n}{n!} \right], f(\varphi(x)) = (ax^2 + bx + c)\varphi''(x) + (px + q)\varphi'(x) + r\varphi(x).$$

2. 以下で与えるベクトル空間 V と V の 2 組の基底 B, B' に対し、 B から B' への基底の変換行列を求めよ.

$$(1) V = \mathbf{K}^3, B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right], B' = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right]$$

$$(2) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}, B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right], B' = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$$

$$(3) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}, B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right], B' = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$$

$$(4) V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^4 \mid x + y + z + w = 0 \right\}, B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right], B' = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$(5) V = P_2(\mathbf{K}), B = [3 - 4x - x^2, -2 + 2x + x^2, -2 + 3x + x^2], B' = [1 + x + 2x^2, 2 - x - x^2, 1 + 2x + 3x^2]$$

$$(6) V = P_3(\mathbf{K}), B = \left[1, x, \frac{x(x-1)}{2}, \frac{x(x-1)(x-2)}{6} \right], B' = [1, x, x^2, x^3]$$

3. $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおく. 基底 $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ に関する \mathbf{R}^3

の 1 次変換 f の表現行列が $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ であるとき, 基底 $[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3]$ に関する f の表現行列を求めよ. また標準基底 $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ に関する f の表現行列を求めよ.

4. $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする. 基底 $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ に関する \mathbf{R}^3 の 1 次変換 f の表現行列が $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

であるとき, 標準基底 $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ に関する f を n 合成した 1 次変換 $f^n = \overbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}^{n \text{ 個}}$ の表現行列を求めよ.

5. a, b, c を実数の定数とし, $P_n(\mathbf{R})$ の 1 次変換 f を $f(\varphi(x)) = (ax + b) \frac{d\varphi}{dx}(x) + c\varphi(x)$ で定めるとき, $\dim \text{Ker } f$ を求めよ.

6. \mathbf{K} 上のベクトル空間 V の 1 次変換 f に対し, V の基底を 1 組選び, その基底に関する f の表現行列の行列式を f の行列式と呼び, $\det(f)$ で表す.

(1) B_V, B'_V を V の 2 組の基底とし, A, A' をそれぞれ B_V, B'_V に関する f の表現行列とすれば, $|A| = |A'|$ であることを示せ. 従って f の行列式の値は, V の基底の選び方に依存しない.

(2) f, g を V の 1 次変換とすると, $\det(g \circ f) = \det(g) \det(f)$ が成り立つことを示せ.

(3) V の恒等変換 id_V の行列式の値を求めよ.

(4) V の 1 次変換 f が同型写像であるためには, $\det(f) \neq 0$ であることが必要十分であることを示し, このとき $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$ であることを示せ.

7. V を \mathbf{C} 上のベクトル空間とする. V の複素数倍を与える演算 $\mathbf{C} \times V \rightarrow V$ の定義域を $\mathbf{R} \times V$ に制限することにより, V を \mathbf{R} 上のベクトル空間とみなしたものを $V_{\mathbf{R}}$ で表す. また, \mathbf{C} 上のベクトル空間の間の 1 次写像 $f: V \rightarrow W$ に対し, $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{R}}$ を $f(\mathbf{x}) \in W_{\mathbf{R}}$ に対応させる写像を $f_{\mathbf{R}}: V_{\mathbf{R}} \rightarrow W_{\mathbf{R}}$ で表すことにする.

(1) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ が V の基底ならば, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, i\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_2, \dots, i\mathbf{v}_n$ は $V_{\mathbf{R}}$ の基底であることを示せ.

(2) W を \mathbf{C} 上のベクトル空間とし, $B_V = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n], B_W = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m]$ をそれぞれ V, W の基底とする. B_V, B_W に関する f の表現行列を A とするとき, $B_{V_{\mathbf{R}}} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, i\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_2, \dots, i\mathbf{v}_n], B_{W_{\mathbf{R}}} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m, i\mathbf{w}_1, i\mathbf{w}_2, \dots, i\mathbf{w}_m]$ に関する $f_{\mathbf{R}}: V_{\mathbf{R}} \rightarrow W_{\mathbf{R}}$ の表現行列を求めよ.

(3) f を \mathbf{C} 上のベクトル空間 V の 1 次変換とすると, $V_{\mathbf{R}}$ の 1 次変換 $f_{\mathbf{R}}$ の行列式の値を, f の行列式の値を用いて表せ.

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおく. \mathbf{R}^5 の基底 $[v_1, v_2, v_3, v_4, v_5]$ と \mathbf{R}^4 の基底 $[w_1, w_2, w_3, w_4]$ で, これらの基

底に関する $T_A: \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^4$ の表現行列が $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の形になるものを 1 組ずつ求めよ.

9. a, b を \mathbf{K} の定数とし $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ とおく.

(1) $b \neq 0$ のとき, \mathbf{K}^2 の 1 次変換 T_A の 1 次元不変部分空間をすべて求めよ.

(2) \mathbf{K}^2 が T_A の 2 つの 1 次元不変部分空間の直和になるのは $b = 0$ の場合に限ることを示せ.

10. V_1, V_2 を \mathbf{K} 上のベクトル空間とすると, 集合 $V_1 \times V_2$ (教科書 p.125) に加法とスカラー倍を

$$(v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2), \quad a(v_1, v_2) = (av_1, av_2) \quad v_1, w_1 \in V_1, v_2, w_2 \in V_2, a \in \mathbf{K}$$

によって定義する.

(1) $V_1 \times V_2$ は \mathbf{K} 上のベクトル空間であることを示せ.

(2) $p_s: V_1 \times V_2 \rightarrow V_s$ ($s = 1, 2$) を $p_s((v_1, v_2)) = v_s$ によって定義すれば, p_s は 1 次写像であることを示し, $V_1 \times V_2$ は $\text{Ker } p_1$ と $\text{Ker } p_2$ の直和であることを示せ.

(3) $i_s: V_s \rightarrow V_1 \times V_2$ ($s = 1, 2$) を $i_1(v) = (v, \mathbf{0}), i_2(v) = (\mathbf{0}, v)$ で定めれば, $p_s \circ i_s$ は V_s の恒等写像, $i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2$ は $V_1 \times V_2$ の恒等写像であり, $p_2 \circ i_1$ と $p_1 \circ i_2$ は零写像であることを示せ. また, $\text{Im } i_1 = \text{Ker } p_2, \text{Im } i_2 = \text{Ker } p_1$ が成り立つことを示せ.

(4) v_1, v_2, \dots, v_n が V_1 の 1 次独立なベクトル, w_1, w_2, \dots, w_m が V_2 の 1 次独立なベクトルならば,

$$(v_1, \mathbf{0}), (v_2, \mathbf{0}), \dots, (v_n, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, w_1), (\mathbf{0}, w_2), \dots, (\mathbf{0}, w_m)$$

は $V \times W$ の 1 次独立なベクトルであることを示せ. また, v_1, v_2, \dots, v_n が V_1 を生成し, w_1, w_2, \dots, w_m が V_2 を生成すれば, 上のベクトルは $V \times W$ を生成することを示せ. 従って, $\dim(V_1 \times V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ が成り立つ.

11. \mathbf{K} 上のベクトル空間 V の部分空間 V_1, V_2 に対し, 写像 $f: V_1 \cap V_2 \rightarrow V_1 \times V_2$ と $g: V_1 \times V_2 \rightarrow V_1 + V_2$ を, それぞれ $f(x) = (x, -x), g((x, y)) = x + y$ で定める.

(1) f は単射 1 次写像, g は全射 1 次写像であり, $\text{Im } f = \text{Ker } g$ が成り立つことを示せ.

(2) 前問と上の結果と次元公式を用いて, $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$ を示せ.

(3) V が部分空間 V_1 と V_2 の直和ならば V は $V_1 \times V_2$ と同型であることを示せ.

12. (発展問題) \mathbf{K} 上のベクトル空間 V が部分空間 V_1 と V_2 の直和であるとき, 写像 $p_{V_s}: V \rightarrow V_s$ ($s = 1, 2$) を次のように定義する. V が V_1 と V_2 の直和であることから, 任意の $v \in V$ に対して $v = v_1 + v_2$ を満たす $v_1 \in V_1$ と $v_2 \in V_2$ はそれぞれただ 1 つずつ存在するが, このとき, p_{V_s} は v を v_s に対応させる写像とする. さらに, 写像 $i_{V_s}: V_s \rightarrow V$ ($s = 1, 2$) を $i_{V_s}(x) = x$ で定める.

(1) p_{V_s} は 1 次写像であることを示せ.

(2) $s = 1, 2$ に対し, $p_{V_s} \circ i_{V_s}$ は V_s の恒等写像であることを示し, p_{V_s} が全射であることを示せ.

(3) $\text{Ker } p_{V_1} = V_2, \text{Ker } p_{V_2} = V_1$ が成り立つことを示せ.

(4) $i_{V_1} \circ p_{V_1} + i_{V_2} \circ p_{V_2}$ は V の恒等写像であることを示せ.

13. (発展問題) V, V_1, V_2 を \mathbf{K} 上のベクトル空間とし, 1 次写像 $i_s: V_s \rightarrow V, p_s: V \rightarrow V_s$ ($s = 1, 2$) が与えられていて, $s = 1, 2$ に対して $p_s \circ i_s$ が V_s の恒等写像であり, かつ $i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2$ は V の恒等写像であるとする.

- (1) i_1, i_2 は単射, p_1, p_2 は全射であり, $\text{Im } i_1 = \text{Ker } p_2, \text{Im } i_2 = \text{Ker } p_1$ が成り立つことを示せ.
 (2) V は $\text{Im } i_1$ と $\text{Im } i_2$ の直和であることを示せ.
 (3) $\varphi: V \rightarrow V_1 \times V_2$ を $\varphi(\mathbf{v}) = (p_1(\mathbf{v}), p_2(\mathbf{v}))$ で定めれば, φ は同型写像であることを示せ.

14. (発展問題) V を \mathbf{K} 上のベクトル空間とする.

(1) $e: V \rightarrow V$ は $eoe = e$ を満たす 1 次写像とする. このとき, $\text{Ker } e = \text{Im}(id_V - e), \text{Im } e = \text{Ker}(id_V - e)$ が成り立つことを示し, V は $\text{Ker } e$ と $\text{Im } e$ の直和であることを示せ.

(2) 1 次写像 $r: V \rightarrow W$ と $s: W \rightarrow V$ で, ros が W の恒等写像であるものが与えられれば, V は $\text{Ker } r$ と $\text{Im } s$ の直和であることを示せ.

15. (発展問題) V, W を \mathbf{K} 上のベクトル空間, $f: V \rightarrow W$ を 1 次写像とし, V は 2 つの部分空間 V_1, V_2 の直和であり, W は 2 つの部分空間 W_1, W_2 の直和であるとする.

(1) $i_{V_r}: V_r \rightarrow V$ ($r = 1, 2$) と $p_{W_s}: W \rightarrow W_s$ ($s = 1, 2$) を問題 12 と同様に定め, $B_{V_1} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k], B_{V_2} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_l], B_{W_1} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m], B_{W_2} = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n]$ をそれぞれ V_1, V_2, W_1, W_2 の基底とし, $p_{W_s} \circ f \circ i_{V_r}: V_r \rightarrow W_s$ ($r, s = 1, 2$) の B_{V_r}, B_{W_s} に関する表現行列を A_{sr} とする. このとき, V の基底 $B_V = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_l], W$ の基底 $B_W = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n]$ に関する f の表現行列を, $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ を用いて表せ.

(2) $p_{W_2} \circ f \circ i_{V_1}: V_1 \rightarrow W_2$ と $p_{W_1} \circ f \circ i_{V_2}: V_2 \rightarrow W_1$ がともに零写像であるとき, $\text{Im } f = \text{Im}(p_{W_1} \circ f \circ i_{V_1}) \oplus \text{Im}(p_{W_2} \circ f \circ i_{V_2})$ が成り立つことを示せ. 従って $\text{rank } f = \text{rank}(p_{W_1} \circ f \circ i_{V_1}) + \text{rank}(p_{W_2} \circ f \circ i_{V_2})$ である.

(3) $V = W$ であり, $W_1 = V_1, W_2 = V_2$ の場合, $p_{W_2} \circ f \circ i_{V_1}: V_1 \rightarrow W_2$ または $p_{W_1} \circ f \circ i_{V_2}: V_2 \rightarrow W_1$ が零写像であるとき, $\det(f) = \det(p_{W_1} \circ f \circ i_{V_1}) \det(p_{W_2} \circ f \circ i_{V_2})$ が成り立つことを示せ.

16. (発展問題) \mathbf{K} 上のベクトル空間の間の 1 次写像 $f: V_1 \rightarrow W_1, g: V_2 \rightarrow W_2$ に対し, 写像 $f \times g: V_1 \times V_2 \rightarrow W_1 \times W_2$ を $(f \times g)((\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (f(\mathbf{x}), g(\mathbf{y}))$ で定める.

(1) $f \times g$ は 1 次写像であることを示せ.

(2) $\text{Im}(f \times g) = \{(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in W_1 \times W_2 \mid \mathbf{w}_1 \in \text{Im } f, \mathbf{w}_2 \in \text{Im } g\}, \text{Ker}(f \times g) = \{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in V_1 \times V_2 \mid \mathbf{v}_1 \in \text{Ker } f, \mathbf{v}_2 \in \text{Ker } g\}, \text{rank}(f \times g) = \text{rank } f + \text{rank } g$ が成り立つことを示せ.

(3) $W_1 = V_1, W_2 = V_2$ の場合は $\det(f \times g) = \det(f) \det(g)$ が成り立つことを示せ.

17. (発展問題) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく. \mathbf{R}^4 の 1 次変換 T_A の不変部分空間 W_1, W_2 で, $\mathbf{R}^4 = W_1 \oplus W_2$

となるものが存在することを, W_1, W_2 の基底を 1 組ずつ求めることにより示せ.

18. (発展問題) $A = (a_{ij}) \in M_{k,m}(\mathbf{K}), B = (b_{ij}) \in M_{n,l}(\mathbf{K})$ に対し, 1 次写像 $L_A: M_{m,n}(\mathbf{K}) \rightarrow M_{k,n}(\mathbf{K}), R_B: M_{m,n}(\mathbf{K}) \rightarrow M_{m,l}(\mathbf{K})$ を $L_A(X) = AX, R_B(X) = XB$ で定める.

(1) $\text{rank } A = r, \text{rank } B = s$ のとき, $\text{rank } L_A, \text{rank } R_B$ を求めよ.

(2) E_{ij} を, (i, j) 成分だけが 1 で, (i, j) 成分以外の成分がすべて 0 である $m \times n$ 行列として $M_{mn}(\mathbf{K})$ の基底

$$B_{m,n} = [E_{11}, E_{21}, \dots, E_{m1}, E_{12}, E_{22}, \dots, E_{m2}, \dots, E_{1j}, E_{2j}, \dots, E_{mj}, \dots, E_{1n}, E_{2n}, \dots, E_{mn}]$$

$$B'_{m,n} = [E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{i1}, E_{i2}, \dots, E_{in}, \dots, E_{m1}, E_{m2}, \dots, E_{mn}]$$

を考える. このとき, $B_{m,n}, B_{k,n}$ に関する L_A の表現行列と $B'_{m,n}, B'_{m,l}$ に関する R_B の表現行列を求めよ.

(3) $k = m, l = n$ の場合に L_A と R_B の行列式の値を求めよ.

19. (発展問題) V を \mathbf{R} 上のベクトル空間とする. V の 1 次変換 f で $f \circ f = -id_V$ を満たすものが存在するとき, 以

下の問に答えよ.

(1) v が零ベクトルでない V のベクトルならば $v, f(v)$ は 1 次独立であることを示せ. (ウォーミングアップ)

(2) $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ とし, $w \in V$ が $v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_k, f(v_k)$ の 1 次結合ではないならば, $f(w)$ は $v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_k, f(v_k), w$ の 1 次結合ではないことを示せ.

(3) V のベクトル v_1, v_2, \dots, v_n で, $v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_n, f(v_n)$ が V の基底になるものが存在することを示せ. また, このような V の基底 $[v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_n, f(v_n)]$ に関する f の表現行列はどのような行列であるか答えよ.

(4) V の次元は偶数で, $n = \frac{\dim V}{2}$ とおくと, V は f の n 個の 2 次元不変部分空間の直和であることを示せ.

第 16 回の演習問題の解答

$$1. (1) T_A(\mathbf{v}_1) = A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 34 \\ 34 \\ 51 \end{pmatrix} = 17\mathbf{v}_1, T_A(\mathbf{v}_2) = A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -17 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} = -17\mathbf{v}_2, T_A(\mathbf{v}_3) = A\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -51 \\ -51 \\ 68 \end{pmatrix} = -17\mathbf{v}_3$$

となるため、求める行列は $\begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & -17 \end{pmatrix}$ である.

$$(2) T_A(\mathbf{v}_1) = A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\mathbf{v}_1, T_A(\mathbf{v}_2) = A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_2, T_A(\mathbf{v}_3) = A\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ となるため, 求め}$$

る行列は $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である.

$$(3) T_A(\mathbf{v}_1) = A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1, T_A(\mathbf{v}_2) = A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, T_A(\mathbf{v}_3) = A\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{v}_3 \text{ となるため,}$$

求める行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である.

$$(4) T_A(\mathbf{v}_1) = A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, T_A(\mathbf{v}_2) = A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_2, T_A(\mathbf{v}_3) = A\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\mathbf{v}_3 \text{ となるため, 求め}$$

る行列は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である.

(5) 一般に A を $m \times n$ 行列, $B = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$ を \mathbf{K}^n の基底, $B' = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m]$ を \mathbf{K}^m の基底とするとき, $T_A: \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^m$ の表現行列を $A' = (a'_{ij})$ とおき, $P = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n)$, $Q = (\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \dots \ \mathbf{w}_m)$ とおけば, $\mathbf{v}_j = P\mathbf{e}_j$, $\mathbf{w}_i = Q\mathbf{e}_i$ より $AP\mathbf{e}_j = A\mathbf{v}_j = T_A(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^m a'_{ij}\mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^m a'_{ij}Q\mathbf{e}_i = Q\left(\sum_{i=1}^m a'_{ij}\mathbf{e}_i\right)$ が $j = 1, 2, \dots, n$ に対して成り立つ. ここで, $\sum_{i=1}^m a'_{ij}\mathbf{e}_i$ は A' の第 j 列 $A'\mathbf{e}_j$ に他ならないため, 上式から $AP\mathbf{e}_j = QA'\mathbf{e}_j$ が得られる. 従って, $A' = Q^{-1}AP$ が成り立つ.

$$\text{とくに } A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ の場合, } P = Q =$$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ であり, (1) の結果から, B に関する T_A の表現行列は次で与えられる.

$$P^{-1}AP = P^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 10 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 0 & -5 & -9 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(6) A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ である,}$$

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{v}_1) &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} -ac & a^2 \\ -c^2 & ac \end{pmatrix} \\
&= \frac{a^2}{ad-bc} \mathbf{v}_1 - \frac{ac}{ad-bc} \mathbf{v}_2 - \frac{c^2}{ad-bc} \mathbf{v}_3, \\
f(\mathbf{v}_2) &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad+bc & -2ab \\ 2cd & -ad-bc \end{pmatrix} \\
&= -\frac{2ab}{ad-bc} \mathbf{v}_1 + \frac{ad+bc}{ad-bc} \mathbf{v}_2 + \frac{2cd}{ad-bc} \mathbf{v}_3, \\
f(\mathbf{v}_3) &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} bd & -b^2 \\ d^2 & -bd \end{pmatrix} \\
&= -\frac{b^2}{ad-bc} \mathbf{v}_1 + \frac{bd}{ad-bc} \mathbf{v}_2 + \frac{d^2}{ad-bc} \mathbf{v}_3
\end{aligned}$$

だから、求める行列は $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} a^2 & -2ab & -b^2 \\ -ac & ad+bc & bd \\ -c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix}$ である。

(7) P, f の定義より、

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{v}_1) &= \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & -a & 0 \\ c & 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 \end{pmatrix} = c\mathbf{v}_2 - b\mathbf{v}_3, \\
f(\mathbf{v}_2) &= \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -b & 0 & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & -c & 0 \end{pmatrix} = -c\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_3, \\
f(\mathbf{v}_3) &= \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -c & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -c & 0 & a \\ 0 & -c & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & -b \\ a & b & 0 \end{pmatrix} = b\mathbf{v}_1 - a\mathbf{v}_2
\end{aligned}$$

だから、求める行列は $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = P$ である。

$$\begin{aligned}
(8) \quad f(\mathbf{v}_1) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = a\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2, \quad f(\mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = b\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2, \\
f(\mathbf{v}_3) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = a\mathbf{v}_3 + c\mathbf{v}_4, \quad f(\mathbf{v}_4) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = b\mathbf{v}_3 + d\mathbf{v}_4 \quad \text{だから、求}
\end{aligned}$$

める行列は $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}$ である。

$$(9) A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{より,}$$

$$f(\mathbf{v}_1) = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad & -ab \\ cd & -bc \end{pmatrix}$$

$$= \frac{ad}{ad-bc} \mathbf{v}_1 + \frac{cd}{ad-bc} \mathbf{v}_2 - \frac{ab}{ad-bc} \mathbf{v}_3 - \frac{bc}{ad-bc} \mathbf{v}_4,$$

$$f(\mathbf{v}_2) = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} bd & -b^2 \\ d^2 & -bd \end{pmatrix}$$

$$= \frac{bd}{ad-bc} \mathbf{v}_1 + \frac{d^2}{ad-bc} \mathbf{v}_2 - \frac{b^2}{ad-bc} \mathbf{v}_3 - \frac{bd}{ad-bc} \mathbf{v}_4,$$

$$f(\mathbf{v}_3) = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} -ac & a^2 \\ -c^2 & ac \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{ac}{ad-bc} \mathbf{v}_1 - \frac{c^2}{ad-bc} \mathbf{v}_2 + \frac{a^2}{ad-bc} \mathbf{v}_3 + \frac{ac}{ad-bc} \mathbf{v}_4,$$

$$f(\mathbf{v}_4) = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} -bc & ab \\ -cd & ad \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{bc}{ad-bc} \mathbf{v}_1 - \frac{cd}{ad-bc} \mathbf{v}_2 + \frac{ab}{ad-bc} \mathbf{v}_3 + \frac{ad}{ad-bc} \mathbf{v}_4$$

だから, 求める行列は $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad & bd & -ac & -bc \\ cd & d^2 & -c^2 & -cd \\ -ab & -b^2 & a^2 & ab \\ -bc & -bd & ac & ad \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} dA & -cA \\ -bA & aA \end{pmatrix}$ である.

(9) 2項定理より $f(x^{j-1}) = (x+a)^{j-1} = \sum_{i=1}^j \binom{j-1}{i-1} a^{j-i} x^{i-1}$ だから, 求める行列は $\binom{j-1}{i-1} a^{j-i}$ を (i, j) 成分

とする $n+1$ 次正方形行列である. ただし, $i > j$ のときは $\binom{j-1}{i-1} = 0$ とする.

(10) $f(x^{j-1}) = (x^{j-1})' = (j-1)x^{j-2}$ だから, 求める行列は, 第1列が $\mathbf{0}$, 第 j 列 ($2 \leq j \leq n+1$) が $(j-1)\mathbf{e}_{j-1}$ である $n+1$ 次正方形行列である.

(11) $f(1) = r, f(x) = q + (p+r)x$ であり, $j = 2, 3, \dots, n$ に対し,

$$f\left(\frac{x^j}{j!}\right) = (ax^2 + bx + c) \frac{x^{j-2}}{(j-2)!} + (px + q) \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} + r \frac{x^j}{j!}$$

$$= c \frac{x^{j-2}}{(j-2)!} + ((j-1)b + q) \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} + (j(j-1)a + jp + r) \frac{x^j}{j!}$$

だから, $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_{-1} = \mathbf{0}$ とおけば, 求める行列は, 第 j 列が $ce_{j-2} + ((j-2)b+q)e_{j-1} + ((j-1)(j-2)a + (j-1)p+r)e_j$ である $n+1$ 次正方形行列である.

$$\begin{pmatrix} r & q & c & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & p+r & b+q & c & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & 2a+2p+r & 2b+q & \ddots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 6a+3p+r & \ddots & c & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & (j-2)b+q & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & (j-1)(j-2)a + (j-1)p+r & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & & & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & (n-1)b+q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & n(n-1)a+p+r \end{pmatrix}$$

2. (1) 求める基底の変換行列を $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とおけば, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{31} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{32} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = a_{13} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$a_{23} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{33} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \text{ だから } \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ である.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{3} \text{ 倍する}]{\text{第3行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \text{ より } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ である. 従って, } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} & 4 & \frac{20}{3} \\ -\frac{2}{3} & -1 & -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ である.}$$

(2) 求める基底の変換行列を $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ とおけば, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix},$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \text{ だから } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ であ}$$

る. この等式の両辺の行列の第1行と第2行を比較すれば, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が得られるため,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ である.}$$

(3) 求める基底の変換行列を $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ とおけば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix},$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \text{ だから } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ であ}$$

る. この等式の両辺の行列の第1行と第2行を比較すれば, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が得られるため,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{である.}$$

(4) 求める基底の変換行列を $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とおけば, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_{31} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_{32} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = a_{13} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_{33} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \text{だから}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{である. この等式の両辺の行列の第 1,2,3 行を比較すれば,}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{であり, } \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

より $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ が得られるため, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{である.}$$

(5) $P_2(\mathbf{K})$ の基底 $[1, x, x^2]$ に関する $3-4x-x^2, -2+2x+x^2, -2+3x+x^2, 1+x+2x^2, 2-x-x^2, 1+2x+3x^2$ の座標は順に $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ だから, 求める基底の変換行列を $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ と

おけば,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{31} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{32} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a_{13} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{33} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

だから $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ である. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{第 1 行と第 3 行の入れ替え}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{-1 倍する}]{\text{第 1 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 行と第 3 行の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \text{ より } \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ が得られるため,}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 0 \\ 7 & 1 & 10 \end{pmatrix} \text{ である.}$$

(6) $\frac{x(x-1)}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$, $\frac{x(x-1)(x-2)}{6} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ だから, 基底 B' から B への基底の変換行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \text{ である. 教科書の 175 ページの注意と定理 6.21 により, 基底 } B \text{ から } B' \text{ への基底の変換行列は}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ である.}$$

3. 標準基底に関する f の表現行列を A , 基底 $[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3]$ に関する f の表現行列を B とし, 標準基底 $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ から

基底 $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3], [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3]$ への基底の変換行列をそれぞれ P, Q とすれば, 教科書の問 6.9 から $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ である. さらに, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ とおくと教科書の定理 6.23 により, $P^{-1}AP = D, Q^{-1}AQ =$

B が成り立つ. $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから $A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 10 \\ 0 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$,

$$B = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} -35 & 38 & -16 \\ 0 & 23 & -10 \\ 4 & 52 & -26 \end{pmatrix}.$$

4. $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, 教科書の定理 6.20 により, 基底 $[v_1, v_2, v_3]$ に関する f^n の表現行列は $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である. 標準基底 $[e_1, e_2, e_3]$ から基底 $[v_1, v_2, v_3]$ への基底の変換行列を P とすれば, 教科書の

問 6.9 から $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ である. 標準基底に関する f^n の表現行列を A とすれば教科書の定理 6.23 により,

$$P^{-1}AP = D^n \text{ が成り立つ. } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから, } A = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2 \cdot 3^n - 2 & 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n \\ 1 - 2^n & 2 \cdot 3^n - 1 & 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n \\ 1 - 2^n & -1 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

5. f の表現行列を A とすれば, 問題 1 の (11) で, $a = b = c = 0, p = a, q = b, r = c$ とすれば, A は第 1 列が ce_1 , 第 j 列 ($2 \leq j \leq n+1$) が $be_{j-1} + ((j-1)a+c)e_j$ である行列である. すなわち

$$A = \begin{pmatrix} c & b & 0 & \cdots & 0 \\ & a+c & b & \ddots & \vdots \\ & & 2a+c & \ddots & 0 \\ \mathbf{0} & & & \ddots & b \\ & & & & na+c \end{pmatrix}.$$

だから A は対角成分が $c, a+c, 2a+c, \dots, na+c$ である上半三角行列である. 従って, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ に対して $c \neq -ak$ ならば $|A| = c(a+c) \cdots (na+c) \neq 0$ となり A は正則行列である. 故に f は同型写像で, この場合は $\dim \text{Ker } f = 0$ である. $c = -ak$ となる整数 $0 \leq k \leq n$ がある場合, $|A| = c(a+c) \cdots (na+c) = 0$ より A は正則行列ではないので $\text{rank } A \leq n$ である. このとき $a = 0$ ならば $c = 0$ で $A = b \begin{pmatrix} \mathbf{0} & e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix}$ だから $b \neq 0$ ならば $\text{rank } A = n$ である. $a \neq 0$ ならば A の第 $k+1$ 列以外の n 個の列ベクトル

$$-ake_1, be_1 - a(k-1)e_2, \dots, be_{k-1} - ae_k, be_{k+1} + ae_{k+2}, \dots, be_n + a(n-k)e_{n+1}$$

は 1 次独立だから $\text{rank } A \geq n$ でもある. 従って, $c = -ak$ となる整数 $0 \leq k \leq n$ がある場合, $a \neq 0$ または $b \neq 0$ ならば $\text{rank } A = n$ であり, $\text{rank } F = \text{rank } A = n$ となるため, 次元公式によって $\dim \text{Ker } F = \dim P_n(\mathbf{R}) - \text{rank } F = n+1 - n = 1$ である. $a = b = c = 0$ の場合は明らかに $\dim \text{Ker } F = \dim P_n(\mathbf{R}) = n+1$ である.

[注意] 微分方程式 $(ax+b)\frac{dy}{dx} + cy = 0$ の解は $a \neq 0, c = -ak$ ならば C を任意定数として $y = C(ax+b)^k$ で与えられるため k が $0 \leq k \leq n$ を満たす整数ならば上の解答における $\text{Ker } f$ は $(ax+b)^k$ で生成される. 一方 $a = c = 0, b \neq 0$ ならば $\text{Ker } f$ は 1 で生成される.

6. (1) B_V から B'_V への基底の変換行列を P とすれば, $A' = P^{-1}AP$ だから $|A'| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = |P^{-1}||P||A| = |P^{-1}P||A| = |E_n||A| = |A|$ である.

(2) B_V を V の基底とし, B_V に関する f, g の表現行列をそれぞれ A, B とすれば, B_V に関する $g \circ f$ の表現行列は BA だから $\det(g \circ f) = |BA| = |B||A| = \det(g) \det(f)$ が得られる.

(3) V の次元を n とし, B_V を V の基底とすれば, B_V に関する id_V の表現行列は n 次単位行列 E_n だから $\det(id_V) = |E_n| = 1$ である.

(4) f が同型写像ならば, f の逆写像 f^{-1} が存在して $f^{-1} \circ f = id_V$ が成り立つため, (2) と (3) の結果から $\det(f^{-1}) \det(f) = \det(f^{-1} \circ f) = \det(id_V) = 1$ が得られる. よって $\det(f) \neq 0$ であり, $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$ が成り立つことがわかる.

$\det(f) \neq 0$ であると仮定する. $B_V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ を V の基底とし, B_V に関する f の表現行列を A とすれば $|A| = \det(f) \neq 0$ だから A は正則行列である. 従って A で表される \mathbf{K}^n の 1 次変換 T_A は同型写像である. $\varphi: V \rightarrow \mathbf{K}^n$ を $\varphi(v_j) = e_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) で定まる 1 次写像とすれば, φ は V の基底を \mathbf{K}^n の基底に写すため, 同型写像である. また, A の (i, j) 成分を a_{ij} とすれば, $\varphi \circ f: V \rightarrow \mathbf{K}^n$ と $T_A \circ \varphi: V \rightarrow \mathbf{K}^n$ はともに v_j ($j = 1, 2, \dots, n$) を $\sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ に写す 1 次写像だから, $\varphi \circ f = T_A \circ \varphi$ が成り立つ. ここで $\varphi^{-1} \circ \varphi = id_V$ だから $f = id_V \circ f = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ f = \varphi^{-1} \circ T_A \circ \varphi$ が得られ, φ^{-1}, T_A および φ はすべて同型写像だから, これらの合成写像である f も同型写像である.

7. (1) V は v_1, v_2, \dots, v_n で生成されるため, 任意の $x \in V$ は $x = \sum_{j=1}^n z_j v_j$ ($z_j \in \mathbf{C}$) と表される. $z_j = x_j + y_j i$ ($x_j, y_j \in \mathbf{R}$) とおけば $x = \sum_{j=1}^n (x_j + y_j i) v_j = \sum_{j=1}^n x_j v_j + \sum_{j=1}^n y_j i v_j$ だから $v_1, v_2, \dots, v_n, i v_1, i v_2, \dots, i v_n$ は $V_{\mathbf{R}}$ を生成する. $x_j, y_j \in \mathbf{R}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) に対して $\sum_{j=1}^n x_j v_j + \sum_{j=1}^n y_j i v_j = \mathbf{0}$ ならば $\sum_{j=1}^n (x_j + y_j i) v_j = \mathbf{0}$ であり, v_1, v_2, \dots, v_n は V の 1 次独立なベクトルだから $x_j + y_j i = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) が成り立つ. 従って $j = 1, 2, \dots, n$ に対して $x_j = y_j = 0$ だから $v_1, v_2, \dots, v_n, i v_1, i v_2, \dots, i v_n$ は $V_{\mathbf{R}}$ の 1 次独立なベクトルである. 故に $v_1, v_2, \dots, v_n, i v_1, i v_2, \dots, i v_n$ は $V_{\mathbf{R}}$ の基底である.

(2) $A = (a_{jk} + b_{jk} i)$ ($a_{jk}, b_{jk} \in \mathbf{R}$) とおけば $(a_{jk}) = \frac{1}{2}(A + \bar{A})$, $(b_{jk}) = \frac{1}{2i}(A - \bar{A})$ であり,

$$f(v_k) = \sum_{j=1}^n (a_{jk} + b_{jk} i) v_j = \sum_{j=1}^n a_{jk} v_j + \sum_{j=1}^n b_{jk} i v_j, \quad f(i v_k) = i f(v_k) = \sum_{j=1}^n (-b_{jk}) v_j + \sum_{j=1}^n a_{jk} i v_j$$

だから $B_{V_{\mathbf{R}}}, B_{W_{\mathbf{R}}}$ に関する $f_{\mathbf{R}}: V_{\mathbf{R}} \rightarrow W_{\mathbf{R}}$ の表現行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(A + \bar{A}) & -\frac{1}{2i}(A - \bar{A}) \\ \frac{1}{2i}(A - \bar{A}) & \frac{1}{2}(A + \bar{A}) \end{pmatrix}$ である.

(3) V の基底 B_V をとり, B_V に関する f の表現行列を A とする. $V_{\mathbf{R}}$ の基底 $B_{V_{\mathbf{R}}}$ を (2) と同様に定めれば, $B_{V_{\mathbf{R}}}$ に関する $f_{\mathbf{R}}$ の表現行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(A + \bar{A}) & -\frac{1}{2i}(A - \bar{A}) \\ \frac{1}{2i}(A - \bar{A}) & \frac{1}{2}(A + \bar{A}) \end{pmatrix}$ だから, 第 12 回の演習問題 14 の結果から

$$\det(f_{\mathbf{R}}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(A + \bar{A}) & -\frac{1}{2i}(A - \bar{A}) \\ \frac{1}{2i}(A - \bar{A}) & \frac{1}{2}(A + \bar{A}) \end{vmatrix} = |A| |\bar{A}| = |A| |\overline{A}| = \det(f) \overline{\det(f)} = |\det(f)|^2 \text{ である.}$$

8. 教科書の 177 ページの注意の方法に従って \mathbf{R}^5 と \mathbf{R}^4 の基底を求める. $b = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $(A \ b)$ を拡大係数行列とする

$$\text{連立 1 次方程式を考える. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & q \\ 2 & 1 & 3 & 3 & -1 & r \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & q \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & r - 2p \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & r-2p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & s-2q \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{3} \text{倍する}]{\text{第4行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2p+q-r}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & s-2q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第5列の掃き出し}]{(3,5) \text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & \frac{q-4p+2r}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2p+q-r}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2p-q+s-r \end{pmatrix} \text{より, この連立1次方程式が解をもつ条件は } 2p-q+s-r=0 \text{ が成り立つこ}$$

とである. 従って, $\mathbf{b} \in \text{Im } T_A$ であるためには $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ -2p+q+r \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ という形に表され

ることが必要十分である. 故に $\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$ は $\text{Im } T_A$ の基底である. この基底に \mathbf{e}_4 を加えた \mathbf{R}^4 の基底 $[\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4]$ が求める \mathbf{R}^4 の基底である. $2p - q + s - r = 0$ の場合, 上の連立1次方程式

$$\text{は, } \begin{cases} x + 2z + w = p \\ y - z + w = \frac{q-4p+2r}{3} \\ u = \frac{2p+q-r}{3} \end{cases} \text{ と同値であるため, } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ を満たす } \mathbf{x} \text{ は } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} p-2s-t \\ \frac{q-4p+2r}{3} + s-t \\ s \\ t \\ \frac{2p+q-r}{3} \end{pmatrix} \text{ (} s, t \text{ は任意の定}$$

数) と表される. とくに, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \mathbf{0}$ の場合を考えて, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$

$$\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とおくと } T_A(\mathbf{v}_1) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_4, T_A(\mathbf{v}_2) = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4, T_A(\mathbf{v}_3) = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, T_A(\mathbf{v}_4) = T_A(\mathbf{v}_5) = \mathbf{0}$$

であり, $\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ は $\text{Ker } T_A$ の基底である. 教科書の定理 6.9 により $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5]$ は \mathbf{R}^5 の基底で, これが求めるものである.

9. 成分がすべて \mathbf{K} に属する n 次正方行列 A に対し, \mathbf{K}^n の 1 次変換 T_A を考え, V を T_A の 1 次元不変部分空間とする. $\mathbf{v} \in V$ かつ $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ すると V は 1 次元だから \mathbf{v} によって生成され, $A\mathbf{v} = T_A(\mathbf{v}) \in V$ より $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ を満たす $\lambda \in \mathbf{K}$ がある. このとき $(\lambda E_n - A)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} - A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ であり, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ だから教科書の命題 4.18 により $|\lambda E_n - A| = 0$ が成り立ち, \mathbf{v} は $\lambda E_n - A$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の零ベクトルでない解である.

逆に $|\lambda E_n - A| = 0$ を満たす $\lambda \in \mathbf{K}$ に対して, $(\lambda E_n - A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ を満たす零ベクトルでない $\mathbf{v} \in \mathbf{K}^n$ が教科書の命題 4.18 により存在するが, このとき $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ が成り立つため, \mathbf{v} は T_A の 1 次元不変部分空間の基底になる.

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ に対し, $|\lambda E_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ 0 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a)^2$ だから, $|\lambda E_2 - A| = 0$ を満たす λ は a のみである. $aE_2 - A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ であり, $b \neq 0$ だから $aE_2 - A$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間の基底は

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. よって, 上で示したことから, $\langle e_1 \rangle$ は T_A の 1 次元不変部分空間であり, T_A の 1 次元不変部分空間は $\langle e_1 \rangle$ 以外に存在しない.

(2) $b \neq 0$ の場合は, (1) の結果から T_A の 1 次元不変部分空間は 1 つしか存在しないため, \mathbf{K}^2 は T_A の 2 つの 1 次元不変部分空間の直和にはなりえない. $b = 0$ の場合は, $T_A(e_2) = ae_2$ だから $\langle e_2 \rangle$ も T_A の 1 次元不変部分空間であり \mathbf{K}^2 は T_A の 2 つの 1 次元不変部分空間 $\langle e_1 \rangle$ と $\langle e_2 \rangle$ の直和になっている.

10. (1) 任意の $(x, y), (v, w), (u, z) \in V \times W$, $a, b \in \mathbf{K}$ に対し, V, W がベクトル空間であることを用いて, $V \times W$ の加法とスカラー倍が教科書の定義 5.4 の 8 つの条件を満たすことを確かめればよい.

$((x, y) + (v, w)) + (u, z) = (x + v, y + w) + (u, z) = ((x + v) + u, (y + w) + z) = (x + (v + u), y + (w + z)) = (x, y) + (v + u, w + z) = (x, y) + ((v, w) + (u, z))$ より, 教科書の定義 5.4 の (i) が成り立つ.

$(x, y) + (\mathbf{0}, \mathbf{0}) = (x + \mathbf{0}, y + \mathbf{0}) = (x, y)$, $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) + (x, y) = (\mathbf{0} + x, \mathbf{0} + y) = (x, y)$ より, $\mathbf{0} = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ とおくと, 教科書の定義 5.4 の (ii) が成り立つ.

$(x, y) + (-x, -y) = (x + (-x), y + (-y)) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $(-x, -y) + (x, y) = ((-x) + x, (-y) + y) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ より, 教科書の定義 5.4 の (iii) が成り立つ.

$(x, y) + (v, w) = (x + v, y + w) = (v + x, w + y) = (v, w) + (x, y)$ より, 教科書の定義 5.4 の (iv) が成り立つ.

$(ab)(x, y) = ((ab)x, (ab)y) = (a(bx), a(by)) = a(bx, by) = a(b(x, y))$ より, 教科書の定義 5.4 の (v) が成り立つ.

$1(x, y) = (1x, 1y) = (x, y)$ より, 教科書の定義 5.4 の (vi) が成り立つ.

$a((x, y) + (v, w)) = a(x + v, y + w) = (a(x + v), a(y + w)) = (ax + av, ay + aw) = (ax, ay) + (av, aw) = a(x, y) + a(v, w)$ より, 教科書の定義 5.4 の (vii) が成り立つ.

$(a + b)(x, y) = ((a + b)x, (a + b)y) = (ax + bx, ay + by) = (ax, ay) + (bx, by) = a(x, y) + b(x, y)$ より, 教科書の定義 5.4 の (viii) が成り立つ.

(2) $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in V_1 \times V_2$, $a \in \mathbf{K}$ に対し, $p_s((v_1, v_2) + (w_1, w_2)) = p_s((v_1 + w_1, v_2 + w_2)) = v_s + w_s = p_s((v_1, v_2)) + p_s((w_1, w_2))$, $p_s(a(v_1, v_2)) = p_s((av_1, av_2)) = av_s = ap_s((v_1, v_2))$ だから p_s は 1 次写像である.

p_s の定義から $(v_1, v_2) \in \text{Ker } p_s$ であるためには $v_s = \mathbf{0}$ であることが必要十分である. 任意の $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ は $(v_1, v_2) = (\mathbf{0}, v_2) + (v_1, \mathbf{0})$ と表され $(\mathbf{0}, v_2) \in \text{Ker } p_1$, $(v_1, \mathbf{0}) \in \text{Ker } p_2$ だから $V_1 \times V_2 = \text{Ker } p_1 + \text{Ker } p_2$ である. また, $(v_1, v_2) \in \text{Ker } p_1 \cap \text{Ker } p_2$ であるためには $v_1 = \mathbf{0}$ かつ $v_2 = \mathbf{0}$ であることが必要十分だから, $\text{Ker } p_1 \cap \text{Ker } p_2 = \{\mathbf{0}\}$ である. 故に $V_1 \times V_2$ は $\text{Ker } p_1$ と $\text{Ker } p_2$ の直和である.

(3) $v \in V_1$ ならば $p_s \circ i_1(v) = p_s(i_1(v)) = p_s(v, \mathbf{0}) = \begin{cases} v & s = 1 \\ \mathbf{0} & s = 2 \end{cases}$, $v \in V_2$ ならば $p_s \circ i_2(v) = p_s(i_2(v)) =$

$p_s(\mathbf{0}, v) = \begin{cases} v & s = 2 \\ \mathbf{0} & s = 1 \end{cases}$ だから, $p_s \circ i_s$ は V_s の恒等写像, $p_2 \circ i_1$ と $p_1 \circ i_2$ は零写像である. $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ に

対して $(i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2)((v_1, v_2)) = (i_1 \circ p_1)((v_1, v_2)) + (i_2 \circ p_2)((v_1, v_2)) = i_1(p_1((v_1, v_2))) + i_2(p_2((v_1, v_2))) = i_1(v_1) + i_2(v_2) = (v_1, \mathbf{0}) + (\mathbf{0}, v_2) = (v_1, v_2)$ だから $i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2$ は $V_1 \times V_2$ の恒等写像である. $(v_1, v_2) \in \text{Ker } p_s$ であるためには $v_s = \mathbf{0}$ であることが必要十分であり, i_s の定義から $(v_1, v_2) \in \text{Im } i_1$ であるためには $v_2 = \mathbf{0}$ であることが必要十分で, $(v_1, v_2) \in \text{Im } i_2$ であるためには $v_1 = \mathbf{0}$ であることが必要十分だから, $\text{Im } i_1 = \text{Ker } p_2$, $\text{Im } i_2 = \text{Ker } p_1$ である.

(4) $x_i, y_j \in \mathbf{K}$ ($i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$) に対して $\sum_{i=1}^n x_i(v_i, \mathbf{0}) + \sum_{j=1}^m y_j(\mathbf{0}, w_j) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ が成り立つとする. $V \times W$ の加法とスカラー倍の定義により, この左辺は $\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^m y_j w_j \right)$ に等しいため, $\sum_{i=1}^n x_i v_i = \mathbf{0}$ と $\sum_{j=1}^m y_j w_j = \mathbf{0}$ が成り立つ. v_1, v_2, \dots, v_n および w_1, w_2, \dots, w_m が 1 次独立ならば $x_1 = x_2 = \dots = x_n = y_1 = y_2 = \dots = y_m = 0$ が得られ, $(v_1, \mathbf{0}), (v_2, \mathbf{0}), \dots, (v_n, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, w_1), (\mathbf{0}, w_2), \dots, (\mathbf{0}, w_m)$ は 1 次独立であるこ

とがわかる. 任意の $(x, y) \in V \times W$ に対し, $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i, y = \sum_{j=1}^m y_j w_j$ を満たす $x_i, y_j \in K$ ($i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$) が存在する. このとき $(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^m y_j w_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i (v_i, \mathbf{0}) + \sum_{j=1}^m y_j (\mathbf{0}, w_j)$ が成り立つため, $(v_1, \mathbf{0}), (v_2, \mathbf{0}), \dots, (v_n, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, w_1), (\mathbf{0}, w_2), \dots, (\mathbf{0}, w_m)$ は V を生成することがわかる.

11. (1) $x, v \in V_1 \cap V_2, r \in K$ に対して $f(x+v) = (x+v, -(x+v)) = (x+v, -x+(-v)) = (x, -x) + (v, -v) = f(x) + f(v), f(rx) = (rx, -rx) = r(x, -x) = rf(x)$ だから f は 1 次写像である. $f(x) = \mathbf{0}$ ならば $(x, -x) = f(x) = \mathbf{0} = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ より $x = \mathbf{0}$ となるため, 教科書の補題 6.3 により, f は単射である.

$(x, y), (v, w) \in V_1 \times V_2, r \in K$ に対し, $g((x, y) + (v, w)) = g((x+v, y+w)) = (x+v) + (y+w) = (x+y) + (v+w) = g((x, y)) + g((v, w)), g(r(x, y)) = g((rx, ry)) = rx + ry = r(x+y) = rg((x, y))$ だから g は 1 次写像である. 任意の $w \in V_1 + V_2$ に対して $w = x+y$ を満たす $x \in V_1, y \in V_2$ が存在するため, $(x, y) \in V_1 \times V_2$ であり $g((x, y)) = x+y = w$ が成り立つ. 故に g は全射である.

$(x, y) \in \text{Ker } g$ ならば $x+y = g((x, y)) = \mathbf{0}$ だから $y = -x$ である. また, $x \in V_1$ であり, $y \in V_2$ より $x = -y \in V_2$ でもあるので, $x \in V_1 \cap V_2$ である. 従って $f(x) = (x, -x) = (x, y)$ となるため, $(x, y) \in \text{Im } f$ である. 逆に $(x, y) \in \text{Im } f$ ならば $v \in V_1 \cap V_2$ で $f(v) = (x, y)$ を満たすものがあるが, $f(v) = (v, -v)$ だから $x = v, y = -v$ である. 故に $g((x, y)) = x+y = v+(-v) = \mathbf{0}$ より, $(x, y) \in \text{Ker } g$ である. 従って $\text{Im } f = \text{Ker } g$ が成り立つ.

(2) (1) より g は全射だから, $\text{rank } g = \dim \text{Im } g = \dim(V_1 + V_2)$ であり, f は $V_1 \cap V_2$ から $\text{Im } f = \text{Ker } g$ への同型写像を与えるため, 教科書の定理 6.6 から $\dim(V_1 \cap V_2) = \dim \text{Ker } g$ が成り立つ. さらに, (2) より $\dim(V_1 \times V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ であることに注意して, g に次元公式を用いると, $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ が得られる. この等式の左辺の $\dim(V_1 \cap V_2)$ を移項して結果を得る.

(3) 仮定より $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$ であることと, (1) より $\text{Ker } g = \text{Im } f = \{\mathbf{0}\}$ だから, g は単射である. さらに, 仮定より $V = V_1 + V_2$ であることと, (1) より g は $V_1 \times V_2$ から V への全射でもある. 従って g は $V_1 \times V_2$ から V への同型写像になるため, V は $V_1 \times V_2$ と同型である.

12. (1) $v, w \in V, a \in K$ とする. $v = v_1 + v_2, w = w_1 + w_2$ ($v_1, w_1 \in V_1, v_2, w_2 \in V_2$) と表せているとすれば, $v+w = (v_1+v_2) + (w_1+w_2) = (v_1+w_1) + (v_2+w_2), av = a(v_1+v_2) = av_1 + av_2$ であり, $v_1+w_1, av_1 \in V_1, v_2+w_2, av_2 \in V_2$ だから $p_{V_s}(v+w) = v_s + w_s = p_{V_s}(v) + p_{V_s}(w), p_{V_s}(av) = av_1 = ap_{V_s}(v)$ が成り立つ.

(2) $x \in V_1$ ならば $i_1(x) = x = v_1 + v_2$ ($v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$) と表す方法は一通りで, $v_1 = x, v_2 = \mathbf{0}$ のときに $x = v_1 + v_2$ ($v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$) が成り立つため, p_1 の定義から $(p_1 \circ i_1)(x) = p_1(i_1(x)) = p_1(x) = v_1 = x$ である. よって, $p_1 \circ i_1$ は V_1 の恒等写像であり, $p_1(x) = x$ だから p_1 が全射であることがわかる. 同様にして, $p_2 \circ i_2$ が V_2 の恒等写像であり, p_2 が全射であることも示される.

(3) $v \in \text{Ker } p_1$ ならば $v = v_1 + v_2$ ($v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$) と表したとき, $v_1 = \mathbf{0}$ だから $v = v_2 \in V_2$ である. 従って $\text{Ker } p_1 \subset V_2$ である. 逆に $v \in V_2$ ならば $v = \mathbf{0} + v$ ($\mathbf{0} \in V_1, v \in V_2$) と表せて, $v = v_1 + v_2$ ($v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$) と表す表し方は一通りだから, $p_1(v) = \mathbf{0}$ である. 故に $v \in \text{Ker } p_1$ となるため, $V_2 \subset \text{Ker } p_1$ である. 以上から $\text{Ker } p_1 = V_2$ であり, $\text{Ker } p_2 = V_1$ も同様に示される.

(4) $v \in V$ に対し, $v = v_1 + v_2$ ($v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$) とすれば, $s = 1, 2$ に対し, $v_s = i_s(v_s) = i_s(p_s(v)) = (i_s \circ p_s)(v)$ だから, $(i_{V_1} \circ p_{V_1} + i_{V_2} \circ p_{V_2})(v) = (i_{V_1} \circ p_{V_1})(v) + (i_{V_2} \circ p_{V_2})(v) = v_1 + v_2 = v$ が成り立つ. 故に $i_{V_1} \circ p_{V_1} + i_{V_2} \circ p_{V_2}$ は V の恒等写像である.

13. (1) $x, y \in V_s$ に対し, $i_s(x) = i_s(y)$ とすれば, $p_s \circ i_s = \text{id}_{V_s}$ より, $x = \text{id}_{V_s}(x) = (p_s \circ i_s)(x) = p_s(i_s(x)) = p_s(i_s(y)) = (p_s \circ i_s)(y) = \text{id}_{V_s}(y) = y$ だから i_s は単射である. $x \in V_s$ に対し, $p_s \circ i_s = \text{id}_{V_s}$ より, $x = \text{id}_{V_s}(x) = (p_s \circ i_s)(x) = p_s(i_s(x))$ だから, p_s は全射である.

$i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = \text{id}_V$ より $p_2 \circ i_1 = p_2 \circ \text{id}_V \circ i_1 = p_2 \circ (i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2) \circ i_1 = p_2 \circ i_1 \circ p_1 \circ i_1 + p_2 \circ i_2 \circ p_2 \circ i_1 = p_2 \circ i_1 \circ \text{id}_{V_1} +$

$id_{V_2} \circ p_2 \circ i_1 = p_2 \circ i_1 + p_2 \circ i_1 = 2(p_2 \circ i_1)$ だから、任意の $\mathbf{x} \in V_1$ に対して $2(p_2 \circ i_1)(\mathbf{x}) = (p_2 \circ i_1)(\mathbf{x})$ が成り立つため、 $p_2(i_1(\mathbf{x})) = (p_2 \circ i_1)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ である。従って、任意の $\mathbf{x} \in V_1$ に対して $i_1(\mathbf{x}) \in \text{Ker } p_2$ が成り立つため、 $\text{Im } i_1 \subset \text{Ker } p_2$ である。 $i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = id_V$ より、任意の $\mathbf{x} \in V$ に対して $\mathbf{x} = id_V(\mathbf{x}) = (i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2)(\mathbf{x}) = (i_1 \circ p_1)(\mathbf{x}) + (i_2 \circ p_2)(\mathbf{x}) = i_1(p_1(\mathbf{x})) + i_2(p_2(\mathbf{x}))$ だから、 $\mathbf{x} \in \text{Ker } p_2$ ならば $\mathbf{x} = i_1(p_1(\mathbf{x})) \in \text{Im } i_1$ である。故に $\text{Ker } p_2 \subset \text{Im } i_1$ が成り立つため、 $\text{Im } i_1 = \text{Ker } p_2$ である。 $\text{Im } i_2 = \text{Ker } p_1$ も同様に示される。

(2) $i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = id_V$ より、任意の $\mathbf{x} \in V$ に対し、 $\mathbf{x} = id_V(\mathbf{x}) = (i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2)(\mathbf{x}) = (i_1 \circ p_1)(\mathbf{x}) + (i_2 \circ p_2)(\mathbf{x}) = i_1(p_1(\mathbf{x})) + i_2(p_2(\mathbf{x}))$ であり、 $i_1(p_1(\mathbf{x})) \in \text{Im } i_1$ 、 $i_2(p_2(\mathbf{x})) \in \text{Im } i_2$ だから $V = \text{Im } i_1 + \text{Im } i_2$ が成り立つ。 $\mathbf{x} \in \text{Im } i_1 \cap \text{Im } i_2$ ならば $\mathbf{x} = i_1(\mathbf{v}_1)$ を満たす $\mathbf{v}_1 \in V_1$ が存在する。(1)の結果から、 $\mathbf{x} \in \text{Im } i_2 = \text{Ker } p_1$ だから $p_1(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ である。さらに、仮定から $\mathbf{v}_1 = id_{V_1}(\mathbf{v}_1) = (p_1 \circ i_1)(\mathbf{v}_1) = p_1(i_1(\mathbf{v}_1)) = p_1(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ だから $\mathbf{x} = i_1(\mathbf{v}_1) = i_1(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ となるため、 $\text{Im } i_1 \cap \text{Im } i_2 = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ。以上から、 V は $\text{Im } i_1$ と $\text{Im } i_2$ の直和である。

(3) $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, a \in \mathbf{K}$ ならば $\varphi(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (p_1(\mathbf{v} + \mathbf{w}), p_2(\mathbf{v} + \mathbf{w})) = (p_1(\mathbf{v}) + p_1(\mathbf{w}), p_2(\mathbf{v}) + p_2(\mathbf{w})) = (p_1(\mathbf{v}), p_2(\mathbf{v})) + (p_1(\mathbf{w}), p_2(\mathbf{w})) = \varphi(\mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{w})$ 、 $\varphi(a\mathbf{v}) = (p_1(a\mathbf{v}), p_2(a\mathbf{v})) = (ap_1(\mathbf{v}), ap_2(\mathbf{v})) = a(p_1(\mathbf{v}), p_2(\mathbf{v})) = a\varphi(\mathbf{v})$ だから φ は 1 次写像である。 $\psi : V_1 \times V_2 \rightarrow V$ を $\psi((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)) = i_1(\mathbf{v}_1) + i_2(\mathbf{v}_2)$ によって定義すれば、仮定から $\mathbf{v} \in V$ に対し $\psi \circ \varphi(\mathbf{v}) = \psi((p_1(\mathbf{v}), p_2(\mathbf{v}))) = i_1(p_1(\mathbf{v})) + i_2(p_2(\mathbf{v})) = i_1 \circ p_1(\mathbf{v}) + i_2 \circ p_2(\mathbf{v}) = (i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2)(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ となるため、 $\psi \circ \varphi$ は V の恒等写像である。(1)で示したように、 $p_2(i_1(\mathbf{v}_1)) = \mathbf{0}$ 、 $p_1(i_2(\mathbf{v}_2)) = \mathbf{0}$ が任意の $\mathbf{v}_1 \in V_1$ 、 $\mathbf{v}_2 \in V_2$ に対して成り立つことと、仮定から $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in V_1 \times V_2$ に対し、 $\varphi \circ \psi((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)) = \varphi(i_1(\mathbf{v}_1) + i_2(\mathbf{v}_2)) = (p_1(i_1(\mathbf{v}_1) + i_2(\mathbf{v}_2)), p_2(i_1(\mathbf{v}_1) + i_2(\mathbf{v}_2))) = (p_1(i_1(\mathbf{v}_1)) + p_1(i_2(\mathbf{v}_2)), p_2(i_1(\mathbf{v}_1)) + p_2(i_2(\mathbf{v}_2))) = (p_1 \circ i_1(\mathbf{v}_1), p_2 \circ i_2(\mathbf{v}_2)) = (id_{V_1}(\mathbf{v}_1), id_{V_2}(\mathbf{v}_2)) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ となるため、 $\varphi \circ \psi$ は $V_1 \times V_2$ の恒等写像である。故に ψ は φ の逆写像である。従って φ は逆写像をもつ 1 次写像であるため、同型写像である。

14. (1) $\mathbf{x} \in \text{Ker } e$ ならば $(id_V - e)(\mathbf{x}) = id_V(\mathbf{x}) - e(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{0} = \mathbf{x}$ だから $\mathbf{x} = (id_V - e)(\mathbf{x}) \in \text{Im}(id_V - e)$ である。 $\mathbf{y} \in \text{Im}(id_V - e)$ ならば $\mathbf{y} = (id_V - e)(\mathbf{x})$ を満たす $\mathbf{x} \in V$ が存在する。このとき、 $e \circ e = e$ より $e(\mathbf{y}) = e((id_V - e)(\mathbf{x})) = e(\mathbf{x} - e(\mathbf{x})) = e(\mathbf{x}) - e(e(\mathbf{x})) = e(\mathbf{x}) - (e \circ e)(\mathbf{x}) = e(\mathbf{x}) - e(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ だから $\mathbf{x} \in \text{Ker } e$ である。従って $\text{Ker } e = \text{Im}(id_V - e)$ が成り立つ。

$\mathbf{y} \in \text{Im } e$ ならば $\mathbf{y} = e(\mathbf{x})$ を満たす $\mathbf{x} \in V$ が存在する。このとき、 $e \circ e = e$ より $(id_V - e)(\mathbf{y}) = (id_V - e)(\mathbf{y}) = \mathbf{y} - e(\mathbf{y}) = e(\mathbf{x}) - e(e(\mathbf{x})) = e(\mathbf{x}) - (e \circ e)(\mathbf{x}) = e(\mathbf{x}) - e(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ だから $\mathbf{y} \in \text{Ker}(id_V - e)$ である。 $\mathbf{x} \in \text{Ker}(id_V - e)$ ならば $(id_V - e)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ であり、この等式の左辺は $id_V(\mathbf{x}) - e(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - e(\mathbf{x})$ に等しいため、 $\mathbf{x} = e(\mathbf{x}) \in \text{Im } e$ である。従って $\text{Im } e = \text{Ker}(id_V - e)$ が成り立つ。 $\mathbf{x} \in \text{Ker } e \cap \text{Im } e$ ならば $\mathbf{x} \in \text{Im } e$ より $\mathbf{x} = e(\mathbf{v})$ を満たす $\mathbf{v} \in V$ が存在する。 $e \circ e = e$ であり、 $\mathbf{x} \in \text{Ker } e$ より $e(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ だから、 $\mathbf{x} = e(\mathbf{v}) = (e \circ e)(\mathbf{v}) = e(e(\mathbf{v})) = e(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ が得られる。従って $\text{Ker } e \cap \text{Im } e = \{\mathbf{0}\}$ である。任意の $\mathbf{x} \in V$ に対し、 $\mathbf{x} = (\mathbf{x} - e(\mathbf{x})) + e(\mathbf{x}) = (id_V - e)(\mathbf{x}) + e(\mathbf{x})$ であり、 $(id_V - e)(\mathbf{x}) \in \text{Im}(id_V - e) = \text{Ker } e$ 、 $e(\mathbf{x}) \in \text{Im } e$ だから $V = \text{Ker } e + \text{Im } e$ が成り立つ。以上から、 $V = \text{Ker } e \oplus \text{Im } e$ である。

(2) $e : V \rightarrow V$ を $e = sor$ で定めれば $ros = id_V$ だから $e \circ e = (sor) \circ (sor) = so(ros)or = so id_V or = sor = e$ だから、(1)の結果により V は $\text{Ker } e$ と $\text{Im } e$ の直和である。 $\mathbf{x} \in \text{Ker } e$ ならば $r(\mathbf{x}) = (id_V \circ r)(\mathbf{x}) = (rosor)(\mathbf{x}) = (roe)(\mathbf{x}) = r(e(\mathbf{x})) = r(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ となるため、 $\mathbf{x} \in \text{Ker } r$ である。 $\mathbf{x} \in \text{Ker } r$ ならば $e(\mathbf{x}) = (sor)(\mathbf{x}) = s(r(\mathbf{x})) = s(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ だから $\mathbf{x} \in \text{Ker } e$ である。故に $\text{Ker } e = \text{Ker } r$ である。 $\mathbf{x} \in \text{Im } s$ ならば $\mathbf{x} = s(\mathbf{w})$ を満たす $\mathbf{w} \in W$ が存在する。このとき、 $\mathbf{x} = s(\mathbf{w}) = (so id_V)(\mathbf{w}) = (soros)(\mathbf{w}) = (eos)(\mathbf{w}) = e(s(\mathbf{w})) \in \text{Im } e$ である。 $\mathbf{x} \in \text{Im } e$ ならば $\mathbf{x} = e(\mathbf{v})$ を満たす $\mathbf{v} \in V$ が存在する。このとき、 $\mathbf{x} = e(\mathbf{v}) = (sor)(\mathbf{v}) = s(r(\mathbf{v})) \in \text{Im } s$ である。故に $\text{Im } e = \text{Im } s$ である。以上から、 $V = \text{Ker } r \oplus \text{Im } s$ が得られる。

15. (1) $A_{11} = (a_{ij})$, $A_{12} = (b_{ij})$, $A_{21} = (c_{ij})$, $A_{22} = (d_{ij})$ とおけば、

$$p_1(f(\mathbf{u}_j)) = p_1 \circ f \circ i_1(\mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{w}_i, \quad p_1(f(\mathbf{v}_j)) = p_1 \circ f \circ i_2(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^m b_{ij} \mathbf{w}_i,$$

$$p_2(f(\mathbf{u}_j)) = p_2 \circ f \circ i_1(\mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^n c_{ij} \mathbf{z}_i, \quad p_2(f(\mathbf{v}_j)) = p_2 \circ f \circ i_2(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^n d_{ij} \mathbf{z}_i$$

だから、任意の $\mathbf{w} \in W$ は $\mathbf{w} = p_1(\mathbf{w}) + p_2(\mathbf{w})$ と表されることに注意すれば、

$$f(\mathbf{u}_j) = p_1(f(\mathbf{u}_j)) + p_2(f(\mathbf{u}_j)) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{w}_i + \sum_{i=1}^n c_{ij} \mathbf{z}_i, \quad f(\mathbf{v}_j) = p_1(f(\mathbf{v}_j)) + p_2(f(\mathbf{v}_j)) = \sum_{i=1}^m b_{ij} \mathbf{w}_i + \sum_{i=1}^n d_{ij} \mathbf{z}_i$$

が得られる。従って、 B_V, B_W に関する f の表現行列は $(m+n) \times (k+l)$ 行列 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ である。

(2) $\mathbf{y} \in \text{Im } f$ に対して $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ を満たす $\mathbf{x} \in V$ を選べば、 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ ($\mathbf{x}_s \in V_s$) と表せて、さらに $s = 1, 2$ に対し、 $f(\mathbf{x}_s) = p_1(f(\mathbf{x}_s)) + p_2(f(\mathbf{x}_s))$ と表せるため、 $i_s(\mathbf{x}_s) = \mathbf{x}_s$ ($s = 1, 2$) に注意すれば、仮定から

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) = p_1(f(\mathbf{x}_1)) + p_2(f(\mathbf{x}_1)) + p_1(f(\mathbf{x}_2)) + p_2(f(\mathbf{x}_2)) \\ &= (p_1 \circ f \circ i_1)(\mathbf{x}_1) + (p_2 \circ f \circ i_2)(\mathbf{x}_2) \end{aligned}$$

が得られる。従って $\text{Im } f \subset \text{Im}(p_1 \circ f \circ i_1) + \text{Im}(p_2 \circ f \circ i_2)$ である。 $\mathbf{y} \in \text{Im}(p_1 \circ f \circ i_1)$ ならば $\mathbf{y} = (p_1 \circ f \circ i_1)(\mathbf{x}_1)$ を満たす $\mathbf{x}_1 \in V_1$ が存在する。 $(f \circ i_1)(\mathbf{x}_1) \in W$ は $(f \circ i_1)(\mathbf{x}_1) = p_1((f \circ i_1)(\mathbf{x}_1)) + p_2((f \circ i_1)(\mathbf{x}_1))$ と表されるが、仮定より $p_2((f \circ i_1)(\mathbf{x}_1)) = (p_2 \circ f \circ i_1)(\mathbf{x}_1) = \mathbf{0}$ だから $(f \circ i_1)(\mathbf{x}_1) = p_1((f \circ i_1)(\mathbf{x}_1)) = (p_1 \circ f \circ i_1)(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}$ が成り立つ。故に $\mathbf{y} = (f \circ i_1)(\mathbf{x}_1) \in \text{Im } f$ だから $\text{Im}(p_1 \circ f \circ i_1) \subset \text{Im } f$ である。同様に $\text{Im}(p_2 \circ f \circ i_2) \subset \text{Im } f$ も示されるため、 $\text{Im}(p_1 \circ f \circ i_1) + \text{Im}(p_2 \circ f \circ i_2) \subset \text{Im } f$ が得られる。以上から $\text{Im } f = \text{Im}(p_1 \circ f \circ i_1) + \text{Im}(p_2 \circ f \circ i_2)$ である。 $\text{Im}(p_s \circ f \circ i_s) \subset \text{Im } p_s = W_s$ ($s = 1, 2$) であり、 W は W_1 と W_2 の直和だから $\text{Im}(p_1 \circ f \circ i_1) \cap \text{Im}(p_2 \circ f \circ i_2) \subset W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つため、 $\text{Im}(p_1 \circ f \circ i_1) \cap \text{Im}(p_2 \circ f \circ i_2) = \{\mathbf{0}\}$ である。従って $\text{Im } f = \text{Im}(p_1 \circ f \circ i_1) \oplus \text{Im}(p_2 \circ f \circ i_2)$ が成り立つ。

(3) V_1 の基底 $B_{V_1} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k]$ と V_2 の基底 $B_{V_2} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_l]$ を考えて、 B_{V_r}, B_{V_s} に関する $p_s \circ f \circ i_r : V_r \rightarrow V_s$ の表現行列を A_{sr} とすれば、(2) の結果より、 V の基底 $B_V = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_l]$ に関する f の表現行列は $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ であるため、 $p_2 \circ f \circ i_1 : V_1 \rightarrow W_2$ または $p_1 \circ f \circ i_2 : V_2 \rightarrow W_1$ が零写像であるとき、 A_{12} また

は A_{21} は零行列であるため、 $\det(f) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}| |A_{22}| = \det(p_1 \circ f \circ i_1) \det(p_2 \circ f \circ i_2)$ が成り立つ。

16. (1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}), (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in V_1 \times V_2$, $a \in \mathbf{K}$ に対し、 f, g の線形性から $(f \times g)((\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})) = (f \times g)((\mathbf{x} + \mathbf{v}, \mathbf{y} + \mathbf{w})) = (f(\mathbf{x} + \mathbf{v}), g(\mathbf{y} + \mathbf{w})) = (f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{v}), g(\mathbf{y}) + g(\mathbf{w})) = (f(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})) + (f(\mathbf{v}), g(\mathbf{w})) = (f \times g)((\mathbf{x}, \mathbf{y})) + (f \times g)((\mathbf{v}, \mathbf{w}))$, $(f \times g)(a(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (f \times g)((a\mathbf{x}, a\mathbf{y})) = (f(a\mathbf{x}), g(a\mathbf{y})) = (af(\mathbf{x}), ag(\mathbf{y})) = a(f(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})) = a(f \times g)((\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ が得られるため、 $f \times g$ は 1 次写像である。

(2) $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \in \text{Im}(f \times g)$ ならば $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = (f \times g)((\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ を満たす $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V_1 \times V_2$ が存在する。このとき、 $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = (f \times g)((\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (f(\mathbf{x}), g(\mathbf{y}))$ だから $\mathbf{w} = f(\mathbf{x}) \in \text{Im } f$, $\mathbf{z} = g(\mathbf{y}) \in \text{Im } g$ となるため、 $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \in \{(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in W_1 \times W_2 \mid \mathbf{w}_1 \in \text{Im } f, \mathbf{w}_2 \in \text{Im } g\}$ である。 $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \in \{(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in W_1 \times W_2 \mid \mathbf{w}_1 \in \text{Im } f, \mathbf{w}_2 \in \text{Im } g\}$ ならば $\mathbf{w} \in \text{Im } f$, かつ $\mathbf{z} \in \text{Im } g$ だから $\mathbf{w} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{z} = g(\mathbf{y})$ を満たす $\mathbf{x} \in V_1$ と $\mathbf{y} \in V_2$ が存在する。このとき、 $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = (f(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})) = (f \times g)((\mathbf{x}, \mathbf{y})) \in \text{Im}(f \times g)$ である。以上から $\text{Im}(f \times g) = \{(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in W_1 \times W_2 \mid \mathbf{w}_1 \in \text{Im } f, \mathbf{w}_2 \in \text{Im } g\}$ が成り立つ。

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \text{Ker}(f \times g)$ ならば $(f(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})) = (f \times g)((\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ だから $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ かつ $g(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ である。従って $\mathbf{x} \in \text{Ker } f$ かつ $\mathbf{y} \in \text{Ker } g$ となるため $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in V_1 \times V_2 \mid \mathbf{v}_1 \in \text{Ker } f, \mathbf{v}_2 \in \text{Ker } g\}$ である。 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in V_1 \times V_2 \mid \mathbf{v}_1 \in \text{Ker } f, \mathbf{v}_2 \in \text{Ker } g\}$ ならば $\mathbf{x} \in \text{Ker } f$ かつ $\mathbf{y} \in \text{Ker } g$ だから $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ かつ $g(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ である。従って $(f \times g)((\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (f(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ だから $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \text{Ker}(f \times g)$ である。以上から $\text{Ker}(f \times g) = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in W_1 \times W_2 \mid \mathbf{x}_1 \in \text{Ker } f, \mathbf{x}_2 \in \text{Ker } g\}$ が成り立つ。

一般に Z_1, Z_2 をそれぞれ W_1, W_2 の部分空間とすれば, $(z_1, z_2) \in Z_1 \times Z_2$ を $W_1 \times W_2$ の部分空間 $\{(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in W_1 \times W_2 \mid \mathbf{w}_1 \in Z_1, \mathbf{w}_2 \in Z_2\}$ のベクトル (z_1, z_2) に対応させる写像は同型写像だから, 上の結果より $\text{Im}(f \times g), \text{Ker}(f \times g)$ はそれぞれ $\text{Im} f \times \text{Im} g, \text{Ker} f \times \text{Ker} g$ と同型である. 従って $\text{rank}(f \times g) = \dim \text{Im}(f \times g) = \dim(\text{Im} f \times \text{Im} g)$ であり, 問題 9 の (4) の結果より $\dim(\text{Im} f \times \text{Im} g) = \dim \text{Im} f + \dim \text{Im} g = \text{rank} f + \text{rank} g$ だから $\text{rank}(f \times g) = \text{rank} f + \text{rank} g$ が成り立つ.

(3) $B_1 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m], B_2 = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n]$ をそれぞれ V_1, V_2 の基底とする. このとき, 問題 9 の (4) から $[(\mathbf{v}_1, \mathbf{0}), (\mathbf{v}_2, \mathbf{0}), \dots, (\mathbf{v}_m, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, \mathbf{w}_1), (\mathbf{0}, \mathbf{w}_2), \dots, (\mathbf{0}, \mathbf{w}_n)]$ は $V_1 \times V_2$ の基底である. この基底を B とする. f の B_1 に関する表現行列を $A = (a_{ij})$, g の B_2 に関する表現行列を $B = (b_{ij})$ とすれば, $f(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{v}_i, g(\mathbf{w}_j) = \sum_{i=1}^n b_{ij} \mathbf{w}_i$ だから

$$\begin{aligned} (f \times g)(\mathbf{v}_j, \mathbf{0}) &= (f(\mathbf{v}_j), g(\mathbf{0})) = \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{v}_i, \mathbf{0} \right) = \sum_{i=1}^m a_{ij} (\mathbf{v}_i, \mathbf{0}) + \sum_{i=1}^n 0(\mathbf{0}, \mathbf{w}_i) \\ (f \times g)(\mathbf{0}, \mathbf{w}_j) &= (f(\mathbf{0}), g(\mathbf{w}_j)) = \left(\mathbf{0}, \sum_{i=1}^n b_{ij} \mathbf{w}_i \right) = \sum_{i=1}^m 0(\mathbf{v}_i, \mathbf{0}) + \sum_{i=1}^n b_{ij} (\mathbf{0}, \mathbf{w}_i) \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って B に関する $f \times g$ の表現行列は $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ となるため, $\det(f \times g) = \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B| = \det(f) \det(g)$ が得られる.

17. 一般に A を成分がすべて実数である n 次正方行列とし, \mathbf{C}^n の 1 次変換 T_A を考える. 前問の解答でみたように, V が T_A の 1 次元不変部分空間ならば, \mathbf{v} を V の零でないベクトルとすれば, $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ を満たす $\lambda \in \mathbf{C}$ がある. この両辺の共役を考え, A の成分はすべて実数だから $A\bar{\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}$ を得る.

λ が実数でないならば, $\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}$ が 1 次独立であることを示す. $a\mathbf{v} + b\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ ($a, b \in \mathbf{C}$) が成り立つとする. この両辺に左から A をかけると, $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ と $A\bar{\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}$ から, $a\lambda\mathbf{v} + b\bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ が得られるが, この両辺から $a\mathbf{v} + b\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ の両辺に $\lambda, \bar{\lambda}$ をかけたものを辺々引いて $b(\bar{\lambda} - \lambda)\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ と $a(\lambda - \bar{\lambda})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ を得る. $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ より $\bar{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0}$ であり, 仮定から $\bar{\lambda} \neq \lambda$ だから, $a = b = 0$ となって, $\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}$ が 1 次独立であることがわかる.

$\mathbf{x} = \mathbf{v} + \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{y} = i(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}})$ とおく. λ が実数でないならば, \mathbf{x}, \mathbf{y} が 1 次独立であることを示す. $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ($a, b \in \mathbf{C}$) が成り立つならば, これに上式を代入すれば $(a + bi)\mathbf{v} + (a - bi)\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ が得られる. 上でみたように, $\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}$ は 1 次独立だから, $a + bi = a - bi = 0$ であるが, これより $a = b = 0$ が得られ, \mathbf{x}, \mathbf{y} は 1 次独立である.

ベクトル \mathbf{x}, \mathbf{y} の定義から $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}$ となるため, \mathbf{x}, \mathbf{y} の成分はすべて実数である. T_A を \mathbf{R}^n の 1 次変換とみなし, \mathbf{R}^n の 2 つのベクトル \mathbf{x} と \mathbf{y} で生成される \mathbf{R}^n の部分空間を W とすると, W は T_A の不変部分空間である. 実際, 任意の $\mathbf{w} \in W$ は $\mathbf{w} = s\mathbf{x} + t\mathbf{y}$ ($s, t \in \mathbf{R}$) と表されるが, $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - i\mathbf{y}), \bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + i\mathbf{y})$ だから $\lambda = \alpha + \beta i$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$) とおくと, $A\mathbf{x} = A\mathbf{v} + A\bar{\mathbf{v}} = \lambda\mathbf{v} + \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, A\mathbf{y} = iA\mathbf{v} - iA\bar{\mathbf{v}} = i\lambda\mathbf{v} - i\bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}} = -\beta\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ が得られるため, $T_A(\mathbf{w}) = A\mathbf{w} = sA\mathbf{x} + tA\mathbf{y} = (s\alpha - t\beta)\mathbf{x} + (t\alpha + s\beta)\mathbf{y} \in W$ である. ここで, λ が実数でないならば, W は \mathbf{R}^n の 1 次変換 T_A の 2 次元不変部分空間であることに注意する.

以上の議論をふまえ, 与えられた 4 次正方行列 A に対し, まず T_A を \mathbf{C}^4 の 1 次変換とみなした場合の 1 次元不変部分空間を前問の解答の方法に従って求める. $|\lambda E_n - A| = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 12\lambda^2 - 16\lambda + 16 = (\lambda^2 - 2\lambda + 4)^2$ だから $\lambda = 1 + \sqrt{3}i$ は $|\lambda E_n - A| = 0$ を満たす. $A\mathbf{v} = (1 + \sqrt{3}i)\mathbf{v}$ を満たす $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^4$ は $(1 + \sqrt{3}i)E_4 - A$ を係

数行列とする斉次連立 1 次方程式の解だから, これを解けば $\mathbf{v} = s \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{3}i \\ 1 + \sqrt{3}i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3}i \\ 1 - \sqrt{3}i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ($s, t \in \mathbf{C}$) と表

されることがわかる。そこで、 $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{3}i \\ 1 + \sqrt{3}i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3}i \\ 1 - \sqrt{3}i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ とおき、 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1 + \bar{\mathbf{v}}_1$, $\mathbf{y}_1 = i(\mathbf{v}_1 - \bar{\mathbf{v}}_1)$,

$\mathbf{x}_2 = \mathbf{v}_2 + \bar{\mathbf{v}}_2$, $\mathbf{y}_2 = i(\mathbf{v}_2 - \bar{\mathbf{v}}_2)$ とおけば、 $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。さ

らに $W_1 = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 \rangle$, $W_2 = \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2 \rangle$ とおけば、上の議論から、 W_1, W_2 はともに T_A の 2 次元不変部分空間である。ここで、 $a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{y}_1 + c\mathbf{x}_2 + d\mathbf{y}_2 = \mathbf{0}$ ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$) が成り立つとすれば、左辺の第 3 成分と第 4 成分に注目すれば、 $a = c = 0$ がわかるため、 $-2\sqrt{3}b - 2\sqrt{3}d = 0$ かつ $-2\sqrt{3}b + 2\sqrt{3}d = 0$ である。従って、 $b = d = 0$ も成り立つため、 $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2$ は 1 次独立である。教科書の定理 5.19 によって、これらは \mathbf{R}^4 の基底であるため、 $\mathbf{R}^4 = W_1 + W_2$ である。故に教科書の定理 5.20 によって、 $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = 2 + 2 - \dim \mathbf{R}^4 = 0$ だから $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ となるため、教科書の命題 5.22 から、 $\mathbf{R}^4 = W_1 \oplus W_2$ である。(W_1 の基底 $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1$ と W_2 の基底 $\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2$ をとりなおして $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ とした方が、見栄えがよいかも。)

18. (1) $\dim \operatorname{Im} T_A = \operatorname{rank} T_A = \operatorname{rank} A = r$ だから、 $\operatorname{Im} T_A$ の基底 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$ をとり、各 $j = 1, 2, \dots, r$ に対して $A\mathbf{a}_j = T_A(\mathbf{a}_j) = \mathbf{b}_j$ を満たす $\mathbf{a}_j \in \mathbf{K}^m$ を選ぶ。 $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, r$ に対し、 A_{ij} を第 i 列が \mathbf{a}_j で、第 i 列以外の列はすべて零ベクトルである $m \times n$ 行列とし、 B_{ij} を第 i 列が \mathbf{b}_j で、第 i 列以外の列はすべて零ベクトルである $k \times n$ 行列とすると、教科書の定理 2.3 の (1) により、 $L_A(A_{ij}) = AA_{ij} = B_{ij}$ が成り立つため、 $B_{ij} \in \operatorname{Im} L_A$ である。

$Y \in \operatorname{Im} L_A$ に対し、 $L_A(X) = Y$ を満たす $X \in M_{mn}(\mathbf{K})$ をとり、 X の第 i 列を \mathbf{x}_i とすれば、 $Y = AX$ の第 i 列は $A\mathbf{x}_i = T_A(\mathbf{x}_i) \in \operatorname{Im} T_A$ だから、 $A\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^r c_{ji}\mathbf{b}_j$ ($c_{ji} \in \mathbf{K}$) と表される。このとき、 $Y = \begin{pmatrix} A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 & \cdots & A\mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^r c_{j1}\mathbf{b}_j & \sum_{j=1}^r c_{j2}\mathbf{b}_j & \cdots & \sum_{j=1}^r c_{jn}\mathbf{b}_j \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r c_{ji}B_{ij}$ となるため、 $B_{11}, B_{12}, \dots, B_{nr}$ は $\operatorname{Im} f$ を生成する。

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r x_{ji}B_{ij} = \mathbf{0}$ が成り立つとする。この両辺の第 i 列を比較すれば、 $\sum_{j=1}^r x_{ji}\mathbf{b}_j = \mathbf{0}$ だから $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$ の 1 次独立性から、 $x_{1i} = x_{2i} = \cdots = x_{ri} = 0$ である。これが $i = 1, 2, \dots, n$ に対して成り立つため、 $B_{11}, B_{12}, \dots, B_{nr}$ は 1 次独立である。故に $\operatorname{Im} L_A$ は nr 個のベクトルからなる基底 $B_{11}, B_{12}, \dots, B_{nr}$ をもつため、 $\operatorname{rank} L_A = \dim \operatorname{Im} L_A = nr$ である。

$\tau_{m,n} : M_{m,n}(\mathbf{K}) \rightarrow M_{n,m}(\mathbf{K})$ を $\tau_{m,n}(X) = {}^tX$ で定めれば $\tau_{m,n}$ は 1 次写像であり、 $\tau_{n,m} \circ \tau_{m,n}$, $\tau_{m,n} \circ \tau_{n,m}$ はそれぞれ $M_{m,n}(\mathbf{K})$, $M_{n,m}(\mathbf{K})$ の恒等写像だから、 $\tau_{m,n}$ は同型写像である。 $XB = \tau_{l,m}({}^t(XB)) = \tau_{l,m}({}^tB{}^tX) = \tau_{l,m}(L_{tB}(\tau_{m,n}(X)))$ より、 $R_B = \tau_{l,m} \circ L_{tB} \circ \tau_{m,n}$ が成り立つ。 $\tau_{l,m}$, $\tau_{m,n}$ は同型写像だから、上の結果から $\operatorname{rank} R_B = \operatorname{rank}(\tau_{l,m} \circ L_{tB} \circ \tau_{m,n}) = \operatorname{rank} L_{tB} = ms$ である。

(2) $L_A(E_{ij}) = AE_{ij}$ は第 j 列が A の第 i 列に等しく、第 j 列以外の列はすべて零ベクトルである $k \times n$ 行列だから $L_A(E_{ij}) = \sum_{s=1}^k a_{si}E_{sj}$ である。 $E_{ij} \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ は $B_{m,n}$ の $m(j-1) + i$ 番目の基底であり、 $E_{sj} \in M_{k,n}(\mathbf{K})$ は $B_{k,n}$ の $k(j-1) + s$ 番目の基底だから、 $B_{m,n}$, $B_{k,n}$ に関する L_A の表現行列の (p, q) 成分を L_{pq} とすれば、 L_{pq} は

$$L_{pq} = \begin{cases} a_{p-m[\frac{p-1}{m}]q-k[\frac{q-1}{k}]} & [\frac{p-1}{m}] = [\frac{q-1}{k}] \\ 0 & [\frac{p-1}{m}] \neq [\frac{q-1}{k}] \end{cases}$$

によって与えられる。

$R_B(E_{ij}) = E_{ij}B$ は第 i 行が B の第 j 行に等しく、第 i 行以外の行はすべて零である $m \times l$ 行列だから $R_B(E_{ij}) =$

$\sum_{s=1}^l b_{js} E_{is}$ である. $E_{ij} \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ は $B_{m,n}$ の $n(i-1)+j$ 番目の基底であり, $E_{is} \in M_{m,l}(\mathbf{K})$ は $B_{m,l}$ の $l(i-1)+s$ 番目の基底だから, $B'_{m,n}, B'_{n,l}$ に関する R_B の表現行列の (p,q) 成分を R_{pq} とすれば, R_{pq} は

$$R_{pq} = \begin{cases} b_{p-n[\frac{p-1}{n}]} q^{-l[\frac{q-1}{l}]} & [\frac{p-1}{n}] = [\frac{q-1}{l}] \\ 0 & [\frac{p-1}{n}] \neq [\frac{q-1}{l}] \end{cases}$$

によって与えられる.

(3) $B_{m,n}$ に関する L_A の表現行列は A が対角線に n 個並んだ mn 次正方行列だから, その行列式の値は $|A|^n$ である. $B'_{m,n}$ に関する R_B の表現行列は B が対角線に m 個並んだ mn 次正方行列だから, その行列式の値は $|B|^m$ である. 従って問題 5 により, L_A, R_B の行列式の値はそれぞれ, $|A|^n, |B|^m$ である.

19. (1) 実数 a, b に対して $av + bf(v) = \mathbf{0}$ が成り立つとする. この両辺を f で写すと, f の線形性と, 仮定 $f \circ f = -id_V$ から $-bv + af(v) = \mathbf{0}$ が得られる. この式の両辺に $-b$ をかけたものと, はじめの式の両辺に a をかけたものを辺々加えれば $(a^2 + b^2)v = \mathbf{0}$ が得られるが, $v \neq \mathbf{0}$ だから $a^2 + b^2 = 0$ である. a, b は実数だから $a = b = 0$ となり, $v, f(v)$ は 1 次独立である.

(2) $f(w) = \sum_{i=1}^k (a_i v_i + b_i f(v_i)) + cw$ ($a_i, b_i, c \in \mathbf{R}$) と表せるとする. この両辺を f で写すと, f の線形性と, 仮定 $f \circ f = -id_V$ から $-w = \sum_{i=1}^k (-b_i v_i + a_i f(v_i)) + cf(w)$ が得られる. この式の右辺の $f(w)$ に, 最初の式の右辺を代入して整理すれば, $-(c^2 + 1)w = \sum_{i=1}^k ((a_i c - b_i)v_i + (a_i + b_i c)f(v_i))$ が得られるが, c は実数だから $-(c^2 + 1)$ は 0 でないため, この両辺を $-(c^2 + 1)$ で割ると, w が $v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_k, f(v_k)$ の 1 次結合で表されることになって仮定と矛盾する. 故に $f(w)$ は $v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_k, f(v_k), w$ の 1 次結合ではない.

(3) $\dim V = 0$ ならば, 主張は明らかだから, $\dim V > 0$ と仮定する. このとき, $2k - 1 \leq \dim V$ ならば $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ で, $v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_k, f(v_k)$ が 1 次独立になるものが選べることを k による数学的帰納法で示す. $\dim V > 0$ より, 零ベクトルでない $v_1 \in V$ をとれば, (1) から $v_1, f(v_1)$ は 1 次独立であるため, $k = 1$ のときは上の主張は成り立つ. $k = l - 1$ のとき, 上の主張が成り立つと仮定すれば, $v_1, v_2, \dots, v_{l-1} \in V$ で, $v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_{l-1}, f(v_{l-1})$ が 1 次独立になるものが選べる. $2l - 1 \leq \dim V$ ならば, $2l - 2$ 個のベクトル $v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_{l-1}, f(v_{l-1})$ は V を生成しないため, これらの 1 次結合では表されない V のベクトルがある. v_l をそのようなベクトルとすれば, 教科書の補題 5.11 の (1) より, $v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_{l-1}, f(v_{l-1}), v_l$ は 1 次独立であり, (2) の結果から $f(v_l)$ は $v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_{l-1}, f(v_{l-1}), v_l$ の 1 次結合ではない. 再び教科書の補題 5.11 の (1) より, $v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_{l-1}, f(v_{l-1}), v_l, f(v_l)$ は 1 次独立である. 従って $k = l$ の場合も上の主張が成り立つ.

n を $\frac{\dim V + 1}{2}$ 以下の最大の整数とすれば, $2n - 1 \leq \dim V$ であるため, 上で示したことから $2n$ 個の 1 次独立なベクトル $v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_n, f(v_n)$ が選べる. もし, これらのベクトルの 1 次結合で表されない V のベクトル w が存在すれば, 教科書の補題 5.11 の (1) より, $2n + 1$ 個のベクトル $v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_n, f(v_n), w$ が 1 次独立になるため, $\dim V \geq 2n + 1$ である. このとき, $n + 1 \leq \frac{\dim V + 1}{2}$ となるため, n が $\frac{\dim V + 1}{2}$ 以下の最大の整数であるという仮定に反する. 従って $v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_n, f(v_n)$ は V を生成するため, これらは V の基底である.

$w_{2i-1} = v_i, w_{2i} = f(v_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) とおくと $f(w_{2i-1}) = w_{2i}, f(w_{2i}) = -w_{2i-1}$ だから, 2 次正方行列 I を $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で定めれば $[v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_n, f(v_n)]$ に関する f の表現行列は $\begin{pmatrix} I & O & \cdots & O \\ O & I & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & I \end{pmatrix}$ という

形の $2n$ 次正方行列である.

(4) V の次元が偶数であることは (3) で示された. (3) で存在を示した V の基底 $\mathbf{v}_1, f(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_2, f(\mathbf{v}_2), \dots, \mathbf{v}_n, f(\mathbf{v}_n)$ を考え, $W_i = \langle \mathbf{v}_i, f(\mathbf{v}_i) \rangle$ とおくと, $f(f(\mathbf{v}_i)) = -\mathbf{v}_i$ より, W_i は f の不変部分空間である. 教科書の問 5.15 の (2) から, $W_1 + W_2 + \dots + W_n = \langle \mathbf{v}_1, f(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_2, f(\mathbf{v}_2), \dots, \mathbf{v}_n, f(\mathbf{v}_n) \rangle = V$ であり, 各 W_i は 2 次元だから $\dim(W_1 + W_2 + \dots + W_n) = \dim V = 2n = \dim W_1 + \dim W_2 + \dots + \dim W_n$ が成り立つ. よって, 教科書の命題 5.23 により V は W_1, W_2, \dots, W_n の直和である.

線形数学 II 演習問題 第 17 回 計量ベクトル空間

1. $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in C^3$ とするとき, 以下の等式が成り立つことを示せ. ただし, $D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ は 3 次正方行列 $(\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z})$ の行列式を表す.

$$(1) (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = -(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{z}})\mathbf{x} + (\mathbf{x}, \bar{\mathbf{z}})\mathbf{y} \quad (2) (\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \bar{\mathbf{z}}) = (\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}} \times \bar{\mathbf{z}}) = D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

$$(3) (\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z})(\mathbf{y}, \mathbf{w}) - (\mathbf{x}, \mathbf{w})(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (4) \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - |(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2$$

$$(5) (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times (\mathbf{z} \times \mathbf{w}) = D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w})\mathbf{z} - D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{w} = D_3(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{w})\mathbf{y} - D_3(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w})\mathbf{x}$$

$$(6) |D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})|^2 = \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2\|\mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2|(\mathbf{y}, \mathbf{z})|^2 - \|\mathbf{y}\|^2|(\mathbf{x}, \mathbf{z})|^2 - \|\mathbf{z}\|^2|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 + 2\operatorname{Re}((\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{y}, \mathbf{z})(\mathbf{z}, \mathbf{x}))$$

2. 以下で与える計量ベクトル空間 V に対し, 与えられた V の基底 $B = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$ をシュミットの直交化法によって正規直交化せよ. ただし (1)~(14) の内積は標準内積とする.

$$(1) V = \mathbf{R}^3, B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right].$$

$$(2) V = \mathbf{R}^3, B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right].$$

$$(3) V = \mathbf{R}^3, B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right].$$

$$(4) V = \mathbf{R}^3, B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

$$(5) V = \mathbf{R}^3, B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

$$(6) V = \mathbf{R}^3, B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right].$$

$$(7) V = \mathbf{R}^3, B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

$$(8) V = \mathbf{R}^3, B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

$$(9) V = C^3, B = \left[\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -i \\ -i \end{pmatrix} \right].$$

$$(10) V = \mathbf{R}^4, B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right].$$

$$(11) V = \mathbf{R}^4, B = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

$$(12) V = \mathbf{R}^4, B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

$$(13) V = \mathbf{R}^4, B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

$$(14) V = \mathbf{R}^4, B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

$$(15) V = P_3(\mathbf{R}), (f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x) dx \ (a < b, f(x), g(x) \in V), B = [1, x, x^2, x^3].$$

3. \mathbf{K}^3 の基底 $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$ をシュミットの直交化法によって正規直交化して得られる \mathbf{K}^3 の基底を $[\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}']$ とするとき, 基底 $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$ から $[\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}']$ への基底の変換行列の各成分を, $\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\|, \|\mathbf{z}\|, (\mathbf{x}, \mathbf{y}), (\mathbf{y}, \mathbf{z}), (\mathbf{z}, \mathbf{x})$ および 3 次正方行列 $(\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z})$ の行列式 $D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ を用いて表せ.

4. 以下で与えられる \mathbf{R}^3 の基底を \mathbf{R}^3 の標準内積に関して正規直交化し, 与えられた基底から, 正規直交化して得られる基底への変換行列を求めよ.

$$(1) \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \quad (2) \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \quad (3) \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \quad (4) \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right]$$

5. 以下の連立 1 次方程式の解全体からなる \mathbf{R}^4 の部分空間の正規直交基底を 1 組求めよ.

$$(1) \begin{cases} x + y - 2z - w = 0 \\ y - z + w = 0 \\ 2x + 3y - 5z - w = 0 \\ x - z - 2w = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - y - z + 2w = 0 \\ y + z - w = 0 \\ 2x - y - z + 3w = 0 \\ x - 2y - 2z + 3w = 0 \end{cases}$$

6. (1) $(A, B) \in M_{m,n}(\mathbf{K}) \times M_{m,n}(\mathbf{K})$ を $\text{tr}(AB^*)$ に対応させる関数 $M_{m,n}(\mathbf{K}) \times M_{m,n}(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}$ は $M_{m,n}(\mathbf{K})$ の内積であることを示せ.

(2) 実数 $a < b$ に対し, $C[a, b]$ を閉区間 $[a, b]$ で定義され, 実数値をとる連続関数全体からなる, \mathbf{R} 上のベクトル空間とする. 有限個の $x \in [a, b]$ を除いて $p(x) > 0$ である $p \in C[a, b]$ に対し, $(f, g) \in C[a, b] \times C[a, b]$ を $\int_a^b f(x)g(x)p(x)dx$ に対応させる関数 $C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ は $C[a, b]$ の内積であることを示せ.

7. (1) V を \mathbf{K} 上のベクトル空間, W を \mathbf{K} 上の計量ベクトル空間とし, $f: V \rightarrow W$ を単射である 1 次写像とする. W のベクトル \mathbf{w} と \mathbf{z} の内積を $(\mathbf{w}, \mathbf{z})_W$ で表して $\beta_f: V \times V \rightarrow \mathbf{K}$ を $\beta_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))_W$ で定めれば, β_f は V の内積になることを示せ.

(2) a_1, a_2, \dots, a_{n+1} を \mathbf{K} の相異なる要素とし, $f: P_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}^{n+1}$ を $f(\varphi(x)) = \sum_{k=1}^{n+1} \varphi(a_k)e_k$ により定めれば, f は単射である 1 次写像であることを示せ. \mathbf{K}^{n+1} の標準内積を考えれば, (1) によって $P_n(\mathbf{K})$ の内積 β_f が $\beta_f(\varphi(x), \psi(x)) = \sum_{k=1}^{n+1} \varphi(a_k)\overline{\psi(a_k)}$ が定義される.

(3) $P_2(\mathbf{R})$ の基底 $[1, x, x^2]$ を, $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2$ の場合と $a_1 = -1, a_2 = 0, a_3 = 1$ の場合に, (2) で定めた $P_2(\mathbf{R})$ の内積に関してシュミットの直交化法によって正規直交化せよ.

8. (発展問題) $B_1 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n], B_2 = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n]$ を \mathbf{K} 上の計量ベクトル空間 V の 2 組の基底とし, B_1, B_2 に対してシュミットの直交化を行って得られる V の正規直交基底をそれぞれ $B'_1 = [\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_n], B'_2 = [\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \dots, \mathbf{w}'_n]$ とする.

(1) B'_1 から B_1 への基底の変換行列の成分を, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_n$ の内積を用いて表し, 対角成分がすべて正の実数である上半三角行列であることを示せ.

(2) $B'_1 = B'_2$ であるためには, B_1 から B_2 への基底の変換行列が, 対角成分がすべて正の実数である上半三角行列であることが必要十分であることを示せ.

9. (発展問題) $P(\mathbf{R})$ における内積を $(f(x), g(x))_P = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ で定め, $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ とおくと, 以下の問いに答えよ.

(1) $m \neq n$ ならば $(P_m(x), P_n(x))_P = 0$ であることを示せ. また, $(P_n(x), P_n(x))_P$ を求めよ.

(2) $\rho_k = \|P_k(x)\|$ とおく. $P_n(\mathbf{R})$ の基底 $[1, x, \dots, x^n]$ を上で定めた内積に関し, シュミットの直交化法によって正規直交化すれば $\left[\frac{1}{\rho_0} P_0(x), \frac{1}{\rho_1} P_1(x), \dots, \frac{1}{\rho_n} P_n(x) \right]$ が得られることを示せ.

(3) 0 以上の任意の整数 n に対して $P_{n+2}(x) = \frac{2n+3}{n+2} x P_{n+1}(x) - \frac{n+1}{n+2} P_n(x)$ が成り立つことを示せ.

10. (発展問題) x の多項式 $L_n(x)$ を $L_n(x) = \frac{(-1)^n e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$ で定める.

(1) $p(x) \in P(\mathbf{R})$ ならば, 広義積分 $\int_0^\infty p(x)e^{-x} dx$ は収束することを示せ.

(2) $f(x), g(x) \in P(\mathbf{R})$ に対し, $(f(x), g(x))_L = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x} dx$ とおく. $(f(x), g(x)) \in P(\mathbf{R}) \times P(\mathbf{R})$ を $(f(x), g(x))_L$ に対応させる関数 $P(\mathbf{R}) \times P(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ は $P(\mathbf{R})$ の内積であることを示せ.

(3) $[L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)]$ は $P_n(\mathbf{R})$ の基底 $[1, x, \dots, x^n]$ を (2) の内積に関し, シュミットの直交化法によって正規直交化して得られる $P_n(\mathbf{R})$ の基底であることを示せ.

(4) 0 以上の任意の整数 n に対して $L_{n+2}(x) = \frac{x-2n-3}{n+2}L_{n+1}(x) - \frac{n+1}{n+2}L_n(x)$ が成り立つことを示せ.

11. (発展問題) x の多項式 $H_n(x)$ を $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$ で定める.

(1) $p(x) \in P(\mathbf{R})$ ならば, 広義積分 $\int_{-\infty}^\infty p(x)e^{-x^2} dx$ は絶対収束することを示せ.

(2) $f(x), g(x) \in P(\mathbf{R})$ に対し, $(f(x), g(x))_H = \int_{-\infty}^\infty f(x)g(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx$ とおく. $(f(x), g(x)) \in P(\mathbf{R}) \times P(\mathbf{R})$ を $(f(x), g(x))_H$ に対応させる関数 $P(\mathbf{R}) \times P(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ は $P(\mathbf{R})$ の内積であることを示せ.

(3) $H_n(x)$ は x^n の係数が 2^n である x の n 次多項式であることを示せ.

(4) 0 以上の任意の整数 n に対して $H_{n+2}(x) = 2xH_{n+1}(x) - 2(n+1)H_n(x)$ が成り立つことを示せ.

(5) $m \neq n$ ならば $(H_m(x), H_n(x))_H = 0$ であることを示し, $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いて $(H_n(x), H_n(x))_H$ を求めよ.

(6) $\eta_k = \|H_k(x)\|$ とおく. $P_n(\mathbf{R})$ の基底 $[1, x, \dots, x^n]$ を (2) で定めた内積に関し, シュミットの直交化法によって正規直交化すれば $\left[\frac{1}{\eta_0} H_0(x), \frac{1}{\eta_1} H_1(x), \dots, \frac{1}{\eta_n} H_n(x) \right]$ が得られることを示せ.

12. (発展問題) x の多項式 $T_n(x), U_n(x)$ を帰納的に $T_1(x) = x, U_1(x) = 1, T_{n+1}(x) = xT_n(x) + (x^2 - 1)U_n(x), U_{n+1}(x) = T_n(x) + xU_n(x)$ で定める.

(1) $T_n(x)$ は x^n の係数が 2^{n-1} である x の n 次多項式であり, $U_n(x)$ は x^{n-1} の係数が 2^{n-1} である x の $n-1$ 次多項式であることを示せ.

(2) 任意の自然数 n に対して $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x), U_{n+2}(x) = 2xU_{n+1}(x) - U_n(x)$ が成り立つことを示せ.

(3) 任意の $\theta \in \mathbf{R}$ に対して $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta, U_n(\cos \theta) \sin \theta = \sin n\theta$ が成り立つことを示せ.

(4) $p(x) \in P(\mathbf{R})$ ならば, 広義積分 $\int_{-1}^1 \frac{p(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ は絶対収束することを示せ.

(5) $f(x), g(x) \in P(\mathbf{R})$ に対し, $(f(x), g(x))_T = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ とおく. $(f(x), g(x)) \in P(\mathbf{R}) \times P(\mathbf{R})$ を $(f(x), g(x))_T$ に対応させる関数 $P(\mathbf{R}) \times P(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ は $P(\mathbf{R})$ の内積であることを示せ.

(6) $f(x), g(x) \in P(\mathbf{R})$ に対し, $(f(x), g(x))_U = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\sqrt{1-x^2} dx$ とおく. $(f(x), g(x)) \in P(\mathbf{R}) \times P(\mathbf{R})$ を $(f(x), g(x))_U$ に対応させる関数 $P(\mathbf{R}) \times P(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ は $P(\mathbf{R})$ の内積であることを示せ.

(7) $T_0(x) = 1$ とおく. $m \neq n$ ならば $(T_m(x), T_n(x))_T = (U_m(x), U_n(x))_U = 0$ であることを示し, $(T_n(x), T_n(x))_T, (U_n(x), U_n(x))_U$ を求めよ.

(8) $\tau_k = \|T_k(x)\|$ とおく. $P_n(\mathbf{R})$ の基底 $[1, x, \dots, x^n]$ を (5) で定めた内積 $(f(x), g(x))_T$ に関してシュミットの直交化法によって正規直交化すれば, $\left[\frac{1}{\tau_0} T_0(x), \frac{1}{\tau_1} T_1(x), \dots, \frac{1}{\tau_n} T_n(x) \right]$ が得られることを示せ.

(9) $v_k = \|U_k(x)\|$ とおく. $P_n(\mathbf{R})$ の基底 $[1, x, \dots, x^n]$ を (6) で定めた内積 $(f(x), g(x))_U$ に関してシュミットの直交化法によって正規直交化すれば, $\left[\frac{1}{v_1} U_1(x), \frac{1}{v_2} U_2(x), \dots, \frac{1}{v_{n+1}} U_{n+1}(x) \right]$ が得られることを示せ.

13. (発展問題) V を \mathbf{R} 上の計量ベクトル空間とする. V の単位ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ に対して不等式

$$\cos^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \cos^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \cos^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

が成り立つことを示せ. また, この不等式の等号が成立するための条件を求めよ.

第 17 回の演習問題の解答

1. (1) $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ の第 j 成分 ($j = 1, 2, 3$) をそれぞれ x_j, y_j, z_j とする. $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ -x_1y_3 + x_3y_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} &= \begin{pmatrix} (-x_1y_3 + x_3y_1)z_3 - (x_1y_2 - x_2y_1)z_2 \\ -(x_2y_3 - x_3y_2)z_3 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_1 \\ (x_2y_3 - x_3y_2)z_2 - (-x_1y_3 + x_3y_1)z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(y_2z_2 + y_3z_3)x_1 + (x_2z_2 + x_3z_3)y_1 \\ -(y_1z_1 + y_3z_3)x_2 + (x_1z_1 + x_3z_3)y_2 \\ -(y_1z_1 + y_2z_2)x_3 + (x_1z_1 + x_2z_2)y_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3)x_1 + (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)y_1 \\ -(y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3)x_2 + (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)y_2 \\ -(y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3)x_3 + (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{z}})x_1 \\ -(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{z}})x_2 \\ -(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{z}})x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\mathbf{x}, \bar{\mathbf{z}})y_1 \\ (\mathbf{x}, \bar{\mathbf{z}})y_2 \\ (\mathbf{x}, \bar{\mathbf{z}})y_3 \end{pmatrix} \\ &= -(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{z}})\mathbf{x} + (\mathbf{x}, \bar{\mathbf{z}})\mathbf{y} \end{aligned}$$

(2) $A = (\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z})$ とおき, A の (i, j) 成分を a_{ij} とすれば $i = 1, 2, 3$ に対して $a_{i1} = x_i, a_{i3} = z_i$ だから, 教科書の定理 4.14 の (1) から

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \bar{\mathbf{z}}) = (x_2y_3 - x_3y_2)z_1 - (x_1y_3 - x_3y_1)z_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_3 = a_{13}|A_{13}| - a_{23}|A_{23}| + a_{33}|A_{33}| = |A| = D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

$$(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}} \times \bar{\mathbf{z}}) = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1) = a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| + a_{31}|A_{31}| = |A| = D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

(3) (2) と (1) の結果から

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{z} \times \mathbf{w}) = ((\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \bar{\mathbf{z}}, \mathbf{w}) = -(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{z}})\mathbf{x} + (\mathbf{x}, \bar{\mathbf{z}})\mathbf{y}, \mathbf{w}) = -(\mathbf{y}, \mathbf{z})(\mathbf{x}, \mathbf{w}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z})(\mathbf{y}, \mathbf{w})$$

(4) (3) で, とくに $\mathbf{z} = \mathbf{x}, \mathbf{w} = \mathbf{y}$ の場合を考えれば,

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{x} \times \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - (\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})\overline{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - |(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2$$

(5) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C^n$ に対して $(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \overline{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}})$ が成り立つことに注意すれば, (1) と (2) の結果から

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times (\mathbf{z} \times \mathbf{w}) &= -(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{w}})\mathbf{x} + (\mathbf{x}, \bar{\mathbf{z}} \times \bar{\mathbf{w}})\mathbf{y} = -(\mathbf{z} \times \mathbf{w}, \bar{\mathbf{y}})\mathbf{x} + (\mathbf{z} \times \mathbf{w}, \bar{\mathbf{x}})\mathbf{y} \\ &= -D_3(\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{y})\mathbf{x} + D_3(\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{x})\mathbf{y} = -D_3(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w})\mathbf{x} + D_3(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{w})\mathbf{y}. \end{aligned}$$

また $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times (\mathbf{z} \times \mathbf{w}) = -(\mathbf{z} \times \mathbf{w}) \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y})$ だから, 今示した結果から

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times (\mathbf{z} \times \mathbf{w}) = -(\mathbf{z} \times \mathbf{w}) \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = -(-D_3(\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{z} + D_3(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{w}) = D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w})\mathbf{z} - D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{w}.$$

$$(6) A = (\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z}) \text{ とおけば } {}^tA\bar{A} = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{x} \\ {}^t\mathbf{y} \\ {}^t\mathbf{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} & \bar{\mathbf{y}} & \bar{\mathbf{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{x}\|^2 & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \\ (\mathbf{y}, \mathbf{x}) & \|\mathbf{y}\|^2 & (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ (\mathbf{z}, \mathbf{x}) & (\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \|\mathbf{z}\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{x}\|^2 & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \overline{(\mathbf{z}, \mathbf{x})} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \|\mathbf{y}\|^2 & (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ (\mathbf{z}, \mathbf{x}) & \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{z})} & \|\mathbf{z}\|^2 \end{pmatrix} \text{ だ}$$

から, ${}^tA\bar{A}$ の行列式を展開すると

$$\begin{aligned} |{}^tA\bar{A}| &= \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2\|\mathbf{z}\|^2 + (\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{y}, \mathbf{z})(\mathbf{z}, \mathbf{x}) + \overline{(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{y}, \mathbf{z})(\mathbf{z}, \mathbf{x})} - \|\mathbf{x}\|^2|(\mathbf{y}, \mathbf{z})|^2 - \|\mathbf{y}\|^2|(\mathbf{x}, \mathbf{z})|^2 - \|\mathbf{z}\|^2|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \\ &= \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2\|\mathbf{z}\|^2 + 2\operatorname{Re}((\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{y}, \mathbf{z})(\mathbf{z}, \mathbf{x})) - \|\mathbf{x}\|^2|(\mathbf{y}, \mathbf{z})|^2 - \|\mathbf{y}\|^2|(\mathbf{x}, \mathbf{z})|^2 - \|\mathbf{z}\|^2|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \end{aligned}$$

が得られる. 一方, $D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = |A| = |{}^tA|, \overline{D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})} = \overline{|A|} = \overline{|A|}$ より $|D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})|^2 = |{}^tA|\overline{|A|} = |{}^tA\bar{A}|$ だから, 結果が得られる.

$$2. (1) \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{w}_1\|^2 = 2, (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1) = 1 \text{ より } \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1) = -1, (\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2) = -\frac{3}{2}, \|\mathbf{w}_2\|^2 = \frac{3}{2} \text{ より } \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2)}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\|\mathbf{w}_3\|^2 = 12$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは

$\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ である.

$$(2) \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{w}_1\|^2 = 2, (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1) = 1 \text{ より } \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1) = -1, (\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2) = \frac{15}{2}, \|\mathbf{w}_2\|^2 = \frac{11}{2} \text{ より } \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2)}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} -$$

$\frac{15}{22} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{6}{11} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\|\mathbf{w}_3\|^2 = \frac{36}{11}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは

$\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$ である.

$$(3) \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \|\mathbf{w}_1\|^2 = 3, (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1) = -1 \text{ より } \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1) = 4, (\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2) = \frac{19}{3}, \|\mathbf{w}_2\|^2 = \frac{14}{3} \text{ より } \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2)}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} -$$

$\frac{19}{42} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\|\mathbf{w}_3\|^2 = \frac{1}{14}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは

$\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ である.

$$(4) \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \|\mathbf{w}_1\|^2 = 9, (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1) = 3 \text{ より } \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1) = 4, (\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2) = \frac{2}{3}, \|\mathbf{w}_2\|^2 = 1 \text{ より } \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2)}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$\frac{5}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\|\mathbf{w}_3\|^2 = \frac{25}{9}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは

$\left[\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$ である.

$$(5) \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{w}_1\|^2 = 2, (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1) = 1 \text{ より } \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1) = 1, (\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2) = \frac{1}{2}, \|\mathbf{w}_2\|^2 = \frac{3}{2} \text{ より } \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2)}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \|\mathbf{w}_3\|^2 = \frac{4}{3} \text{ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは}$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \text{ である.}$$

$$(6) \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{w}_1\|^2 = 2, (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1) = -1 \text{ より } \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1) = -1, (\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2) = -\frac{1}{2}, \|\mathbf{w}_2\|^2 = \frac{11}{2} \text{ より } \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2)}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$\frac{1}{22} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{7}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \|\mathbf{w}_3\|^2 = \frac{49}{11} \text{ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは}$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right] \text{ である.}$$

$$(7) \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \|\mathbf{w}_1\|^2 = 3, (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1) = -1 \text{ より } \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1) = 0, (\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2) = 2, \|\mathbf{w}_2\|^2 = \frac{8}{3} \text{ より } \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2)}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\|\mathbf{w}_3\|^2 = \frac{1}{2} \text{ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは}$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \text{ である.}$$

$$(8) \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \|\mathbf{w}_1\|^2 = 6, (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1) = 3 \text{ より } \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1) = 7, (\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2) = -\frac{5}{2}, \|\mathbf{w}_2\|^2 = \frac{25}{2} \text{ より } \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2)}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{7}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} +$$

$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{7}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\|\mathbf{w}_3\|^2 = \frac{49}{3}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは

$\left[\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$ である.

$$(9) \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \|\mathbf{w}_1\|^2 = 4, (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1) = 2 - 2i \text{ より } \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} - \frac{1-i}{2} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 1+3i \end{pmatrix}. (\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1) = 2, (\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2) = -2, \|\mathbf{w}_2\|^2 = 4 \text{ より } \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2)}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ -i \end{pmatrix} -$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 1+3i \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2i \\ -1-3i \\ 1+i \end{pmatrix}, \|\mathbf{w}_3\|^2 = 1 \text{ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規}$$

直交化したものは $\left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 1+3i \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2i \\ -1-3i \\ 1+i \end{pmatrix} \right]$ である.

$$(10) \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \|\mathbf{w}_1\|^2 = 4, (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1) = -4 \text{ より } \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1) = (\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2) = 0, \|\mathbf{w}_2\|^2 = 16 \text{ より } \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2)}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. (\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1) = 4,$$

$$(\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2) = -16, (\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_3) = 0, \|\mathbf{w}_3\|^2 = 4 \text{ より } \mathbf{w}_4 = \mathbf{v}_4 - \frac{(\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 - \frac{(\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2)}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 - \frac{(\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_3)}{\|\mathbf{w}_3\|^2} \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} -$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \|\mathbf{w}_4\|^2 = 4 \text{ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは}$$

$\left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ である.

$$(11) \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \|\mathbf{w}_1\|^2 = 9, (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1) = 3 \text{ より } \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. (\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1) =$$

$$6, (\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2) = -2, \|\mathbf{w}_2\|^2 = 2 \text{ より } \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2)}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1) = 3, (\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2) = 1, (\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_3) = -1, \|\mathbf{w}_3\|^2 = 3 \text{ より } \mathbf{w}_4 = \mathbf{v}_4 - \frac{(\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 - \frac{(\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2)}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 - \frac{(\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_3)}{\|\mathbf{w}_3\|^2} \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \|\mathbf{w}_4\|^2 = \frac{1}{6} \text{ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法に}$$

$$\text{より正規直交化したものは } \left[\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \text{ である.}$$

$$(12) \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{w}_1\|^2 = 2, (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1) = 0 \text{ より } \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. (\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1) = (\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2) = 1,$$

$$\|\mathbf{w}_2\|^2 = 3 \text{ より } \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2)}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}. (\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1) =$$

$$(\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2) = 1, (\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_3) = \frac{1}{6}, \|\mathbf{w}_3\|^2 = \frac{7}{6} \text{ より } \mathbf{w}_4 = \mathbf{v}_4 - \frac{(\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 - \frac{(\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2)}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 - \frac{(\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_3)}{\|\mathbf{w}_3\|^2} \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} -$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \|\mathbf{w}_4\|^2 = \frac{1}{7} \text{ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正}$$

$$\text{規直交化したものは } \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \text{ である.}$$

$$(13) \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \|\mathbf{w}_1\|^2 = 4, (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1) = 4 \text{ より } \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. (\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1) = 4,$$

$$(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2) = -3, \|\mathbf{w}_2\|^2 = 6 \text{ より } \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2)}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1) = 2, (\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2) = 3, (\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_3) = -\frac{5}{2}, \|\mathbf{w}_3\|^2 = \frac{1}{2} \text{ より } \mathbf{w}_4 = \mathbf{v}_4 - \frac{(\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 - \frac{(\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2)}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 - \frac{(\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_3)}{\|\mathbf{w}_3\|^2} \mathbf{w}_3 =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \|\mathbf{w}_4\|^2 = 3 \text{ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法に}$$

より正規直交化したものは $\left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ である.

$$(14) \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \|\mathbf{w}_1\|^2 = 4, (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1) = -1 \text{ より } \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1) = -2, (\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2) = \frac{1}{2}, \|\mathbf{w}_2\|^2 = \frac{11}{4} \text{ より } \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2)}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} -$$

$$\frac{1}{22} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}. (\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1) = -1, (\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2) = \frac{7}{4}, (\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_3) = \frac{2}{11}, \|\mathbf{w}_3\|^2 = \frac{10}{11} \text{ より } \mathbf{w}_4 = \mathbf{v}_4 - \frac{(\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 -$$

$$\frac{(\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2)}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 - \frac{(\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_3)}{\|\mathbf{w}_3\|^2} \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{7}{44} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{55} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \|\mathbf{w}_4\|^2 = \frac{32}{5} \text{ だから, 与えられ}$$

た基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{110}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$

である.

$$(15) \mathbf{w}_1 = 1, \|\mathbf{w}_1\|^2 = \int_a^b 1^2 dx = b - a, (x, \mathbf{w}_1) = \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2} \text{ より } \mathbf{w}_2 = x - \frac{(x, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = x - \frac{a+b}{2}.$$

$$(x^2, \mathbf{w}_1) = \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}, (x^2, x) = \int_a^b x^3 dx = \frac{b^4 - a^4}{4}, \|\mathbf{w}_2\|^2 = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^3}{12} \text{ より } \mathbf{w}_3 =$$

$$x^2 - \frac{(x^2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 - \frac{(x^2, \mathbf{w}_2)}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \left(x - \frac{a+b}{2}\right) = x^2 - \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - (a+b) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$(x^3, 1) = \int_a^b x^3 dx = \frac{b^4 - a^4}{4}, (x^3, x) = \int_a^b x^4 dx = \frac{b^5 - a^5}{5}, (x^3, x^2) = \int_a^b x^5 dx = \frac{b^6 - a^6}{6},$$

$$\|\mathbf{w}_3\|^2 = \int_a^b \left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(b-a)^2}{12} \right)^2 dx = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \left(y^2 - \frac{(b-a)^2}{12}\right)^2 dy = \frac{(b-a)^5}{180} \text{ より}$$

$$\mathbf{w}_4 = x^3 - \frac{(x^3, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 - \frac{(x^3, \mathbf{w}_2)}{\|\mathbf{w}_2\|^2} \mathbf{w}_2 - \frac{(x^3, \mathbf{w}_3)}{\|\mathbf{w}_3\|^2} \mathbf{w}_3 = x^3 - \frac{(a+b)(a^2 + b^2)}{4} - \frac{9a^2 + 12ab + 9b^2}{10} \left(x - \frac{a+b}{2}\right) -$$

$$\frac{3(a+b)}{2} \left(x^2 - (a+b)x + \frac{a^2 + 4ab + b^2}{6}\right) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 - \frac{3(a-b)^2}{20} \left(x - \frac{a+b}{2}\right).$$

$\|w_4\|^2 = \int_a^b \left(\left(x - \frac{a+b}{2} \right)^3 - \frac{3(a-b)^2}{20} \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \right)^2 dx = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \left(y^3 - \frac{3(a-b)^2}{20} y \right)^2 dy = \frac{(b-a)^7}{2800}$ だから、与えられた基底ををシュミットの直交化法により正規直交化して得られる基底は以下ようになる。

$$\left[\frac{1}{\sqrt{b-a}}, \frac{\sqrt{3}(2x-a-b)}{(b-a)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\sqrt{5}(3(2x-a-b)^2 - (b-a)^2)}{2(b-a)^{\frac{5}{2}}}, \frac{\sqrt{7}(5(2x-a-b)^3 - 3(b-a)^2(2x-a-b))}{2(b-a)^{\frac{7}{2}}} \right]$$

3. $\tilde{y} = y - \frac{(y, x)}{\|x\|^2} x = -\frac{\overline{(x, y)}}{\|x\|^2} x + y$ とおけば,

$$\begin{aligned} \|\tilde{y}\|^2 &= \left(-\frac{\overline{(x, y)}}{\|x\|^2} x + y, -\frac{\overline{(x, y)}}{\|x\|^2} x + y \right) = -\frac{|(x, y)|^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2 = \frac{\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2}{\|x\|^2} \\ (z, \tilde{y}) &= \left(z, -\frac{\overline{(x, y)}}{\|x\|^2} x + y \right) = -\frac{(x, y)(z, x)}{\|x\|^2} + (z, y) = \frac{\|x\|^2 \overline{(y, z)} - (x, y)(z, x)}{\|x\|^2} \end{aligned}$$

が成り立つ。さらに $\tilde{z} = z - \frac{(z, x)}{\|x\|^2} x - \frac{(z, \tilde{y})}{\|\tilde{y}\|^2} \tilde{y}$ とおけば、上式より

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= z - \frac{(z, x)}{\|x\|^2} x - \frac{\|x\|^2 \overline{(y, z)} - (x, y)(z, x)}{\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2} \left(-\frac{\overline{(x, y)}}{\|x\|^2} x + y \right) \\ &= z - \frac{(z, x)}{\|x\|^2} x + \frac{\|x\|^2 \overline{(x, y)(y, z)} - |(x, y)|^2 (z, x)}{\|x\|^2 (\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2)} x - \frac{\|x\|^2 \overline{(y, z)} - (x, y)(z, x)}{\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2} y \\ &= \frac{\overline{(x, y)(y, z)} - \|y\|^2 (z, x)}{\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2} x + \frac{(x, y)(z, x) - \|x\|^2 \overline{(y, z)}}{\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2} y + z \end{aligned}$$

が得られる。(x, y) = 0 に注意し、問題 1 の (6) の結果を用いると

$$\begin{aligned} \|\tilde{z}\|^2 &= \left(z - \frac{(z, x)}{\|x\|^2} x - \frac{(z, \tilde{y})}{\|\tilde{y}\|^2} \tilde{y}, z - \frac{(z, x)}{\|x\|^2} x - \frac{(z, \tilde{y})}{\|\tilde{y}\|^2} \tilde{y} \right) = \|z\|^2 - \frac{|(z, x)|^2}{\|x\|^2} - \frac{|(z, \tilde{y})|^2}{\|\tilde{y}\|^2} \\ &= \|z\|^2 - \frac{|(z, x)|^2}{\|x\|^2} - \frac{(\|x\|^2 \overline{(y, z)} - (x, y)(z, x))(\|x\|^2 (y, z) - \overline{(x, y)(z, x)})}{\|x\|^2 (\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2)} \\ &= \|z\|^2 - \frac{|(z, x)|^2}{\|x\|^2} - \frac{\|x\|^4 |(y, z)|^2 - \|x\|^2 (x, y)(y, z)(z, x) - \|x\|^2 \overline{(x, y)(y, z)(z, x)} + |(x, y)|^2 |(z, x)|^2}{\|x\|^2 (\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2)} \\ &= \|z\|^2 - \frac{|(z, x)|^2 \|y\|^2 + \|x\|^2 |(y, z)|^2 - 2\operatorname{Re}((x, y)(y, z)(z, x))}{\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2} \\ &= \frac{\|x\|^2 \|y\|^2 \|z\|^2 - \|z\|^2 |(x, y)|^2 - \|y\|^2 |(z, x)|^2 - \|x\|^2 |(y, z)|^2 + 2\operatorname{Re}((x, y)(y, z)(z, x))}{\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2} \\ &= \frac{|D_3(x, y, z)|^2}{\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2} \end{aligned}$$

である。故に $\|\tilde{y}\| = \frac{\sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2}}{\|x\|}$, $\|\tilde{z}\| = \frac{|D_3(x, y, z)|}{\sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2}}$ が成り立つため、次の等式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\tilde{y}\|} \tilde{y} &= -\frac{\overline{(x, y)}}{\|x\| \sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2}} x + \frac{\|x\|}{\sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2}} y \\ \frac{1}{\|\tilde{z}\|} \tilde{z} &= \frac{\overline{(x, y)(y, z)} - \|y\|^2 (z, x)}{|D_3(x, y, z)| \sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2}} x + \frac{(x, y)(z, x) - \|x\|^2 \overline{(y, z)}}{|D_3(x, y, z)| \sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2}} y + \frac{\sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2}}{|D_3(x, y, z)|} z \end{aligned}$$

$[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$ をシュミットの直交化法によって正規直交化したものは $\left[\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{x}, \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{y}}\|} \tilde{\mathbf{y}}, \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{z}}\|} \tilde{\mathbf{z}} \right]$ だから、求める基底の変換行列は、次で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} & \frac{-\overline{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}}{\|\mathbf{x}\| \sqrt{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - |(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2}} & \frac{\overline{(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{y}, \mathbf{z})} - \|\mathbf{y}\|^2 (\mathbf{z}, \mathbf{x})}{|D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})| \sqrt{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - |(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2}} \\ 0 & \frac{\|\mathbf{x}\|}{\sqrt{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - |(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2}} & \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{z}, \mathbf{x}) - \|\mathbf{x}\|^2 (\mathbf{y}, \mathbf{z})}{|D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})| \sqrt{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - |(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - |(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2}}{|D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})|} \end{pmatrix}$$

4. 各問で与えられた基底を $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$ とし、これを直交化して得られる正規直交基底を $[\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}']$ とする。

(1) $\|\mathbf{x}\| = 1, \|\mathbf{y}\| = \sqrt{29}, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2, (\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 37, (\mathbf{z}, \mathbf{x}) = 1, D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = -5$ だから、前問の結果から求める基底の変換行列は $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。従って $\mathbf{x}' = \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y}' = -\frac{2}{5}\mathbf{x} + \frac{1}{5}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \mathbf{z}' = \frac{9}{5}\mathbf{x} - \frac{7}{5}\mathbf{y} + \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ 。

(2) $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{2}, \|\mathbf{y}\| = \sqrt{2}, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1, (\mathbf{y}, \mathbf{z}) = -1, (\mathbf{z}, \mathbf{x}) = -1, D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = -2$ だから、前問の結果から求める基底の変換行列は $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ である。従って $\mathbf{x}' = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y}' = -\frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{x} + \frac{\sqrt{6}}{3}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix},$

$$\mathbf{z}' = \frac{\sqrt{3}}{6}\mathbf{x} + \frac{\sqrt{3}}{6}\mathbf{y} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}.$$

(3) $\|\mathbf{x}\| = 3, \|\mathbf{y}\| = \sqrt{10}, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1, (\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 5, (\mathbf{z}, \mathbf{x}) = -5, D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 3$ だから、前問の結果から求める基底の変換行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{89}}{267} & \frac{55\sqrt{89}}{267} \\ 0 & \frac{3\sqrt{89}}{89} & -\frac{50\sqrt{89}}{267} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{89}}{3} \end{pmatrix}$ である。従って $\mathbf{x}' = \frac{1}{3}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \mathbf{y}' = -\frac{\sqrt{89}}{267}\mathbf{x} + \frac{3\sqrt{89}}{89}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -\frac{11\sqrt{89}}{267} \\ \frac{26\sqrt{89}}{267} \\ -\frac{2\sqrt{89}}{267} \end{pmatrix},$

$$\mathbf{z}' = \frac{55\sqrt{89}}{267}\mathbf{x} - \frac{50\sqrt{89}}{267}\mathbf{y} + \frac{\sqrt{89}}{3}\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -\frac{6\sqrt{89}}{89} \\ -\frac{2\sqrt{89}}{89} \\ \frac{7\sqrt{89}}{89} \end{pmatrix}.$$

(4) $\|\mathbf{x}\| = 7, \|\mathbf{y}\| = \sqrt{146}, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 48, (\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 84, (\mathbf{z}, \mathbf{x}) = 64, D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = -94$ だから、前問の結果から求める基底の変換行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{24\sqrt{194}}{3395} & -\frac{1328\sqrt{194}}{22795} \\ 0 & \frac{7\sqrt{194}}{970} & -\frac{261\sqrt{194}}{22795} \\ 0 & 0 & \frac{5\sqrt{194}}{94} \end{pmatrix}$ である。従って $\mathbf{x}' = \frac{1}{7}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}, \mathbf{y}' = \frac{-48}{35\sqrt{194}}\mathbf{x} + \frac{7}{5\sqrt{194}}\mathbf{y} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{69\sqrt{194}}{1358} \\ \frac{124\sqrt{194}}{3395} \\ -\frac{239\sqrt{194}}{6790} \end{pmatrix}, \mathbf{z}' = -\frac{1328\sqrt{194}}{22795}\mathbf{x} - \frac{261\sqrt{194}}{22795}\mathbf{y} + \frac{5\sqrt{194}}{94}\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{194}}{194} \\ -\frac{26\sqrt{194}}{485} \\ \frac{11\sqrt{194}}{970} \end{pmatrix}.$$

5. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より、与えられた方

程式は $\begin{cases} x - z - 2w = 0 \\ y - z + w = 0 \end{cases}$ と同値である。 $z = s, w = t$ とおくと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + 2t \\ s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と

なるため, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ が W の基底になる. そこで, $\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{w}'_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{w}'_2\|}\mathbf{w}'_2 = \frac{1}{\sqrt{51}}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおけば $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ は W の

正規直交基底になる.

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, 与えられた方}$$

程式は $\begin{cases} x + w = 0 \\ y + z - w = 0 \end{cases}$ と同値である. $z = s, w = t$ とおくと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -s + t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とな

るため, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ が W の基底になる. そこで, $\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{w}'_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{w}'_2\|}\mathbf{w}'_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とおけば $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ は W

の正規直交基底になる.

6. (1) 正方行列 X に対し, $\text{tr}({}^t X) = \text{tr}(X)$, $\text{tr}(\overline{X}) = \overline{\text{tr}(X)}$ が成り立つことは容易に確かめられる. $A, B \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ に対して $(A, B)_{\text{tr}} = \text{tr}(AB^*)$ とおく. $A, B, C \in M_{m,n}(\mathbf{K})$, $r \in \mathbf{R}$ に対し, ${}^t A^* = \overline{A}$, $\overline{B^*} = {}^t B$ が成り立つことに注意すれば, 以下の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} (A + B, C)_{\text{tr}} &= \text{tr}((A + B)C^*) = \text{tr}(AC^* + BC^*) = \text{tr}(AC^*) + \text{tr}(BC^*) = (A, C)_{\text{tr}} + (B, C)_{\text{tr}}, \\ (rA, B)_{\text{tr}} &= \text{tr}(rAB^*) = r\text{tr}(AB^*) = r(A, B)_{\text{tr}}, \\ (B, A)_{\text{tr}} &= \text{tr}(BA^*) = \text{tr}({}^t(BA^*)) = \text{tr}({}^t(A^*){}^t B) = \text{tr}(\overline{AB^*}) = \overline{\text{tr}(AB^*)} = \overline{(A, B)_{\text{tr}}} \end{aligned}$$

$A \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ の (i, j) 成分を a_{ij} とすれば, $(A, A)_{\text{tr}} = \text{tr}(AA^*) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2$ だから $(A, A)_{\text{tr}} \geq 0$ であり, $(A, A)_{\text{tr}} = 0$ であることと, A が零行列であることは同値である.

(2) $f, g \in C[a, b]$ に対し, $(f, g)_p = \int_a^b f(x)g(x)p(x)dx$ とおく. $f, g, h \in C[a, b]$, $r \in \mathbf{R}$ に対し, 次の等式が成り

立つ.

$$\begin{aligned}
 (f+g, h)_p &= \int_a^b (f(x)+g(x))h(x)p(x)dx = \int_a^b (f(x)h(x)+g(x)h(x))p(x)dx \\
 &= \int_a^b f(x)h(x)p(x)dx + \int_a^b g(x)h(x)p(x)dx = (f, h)_p + (g, h)_p, \\
 (rf, g)_p &= \int_a^b rf(x)g(x)p(x)dx = r \int_a^b f(x)g(x)p(x)dx = r(f, g)_p, \\
 (g, f)_p &= \int_a^b g(x)f(x)p(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)p(x)dx = (f, g)_p
 \end{aligned}$$

もし、 $p(\alpha) < 0$ となる $\alpha \in [a, b]$ が存在すれば、 p の連続性から $r_1 > 0$ で、 $x \in (\alpha - r_1, \alpha + r_1) \cap [a, b]$ ならば $|p(x) - p(\alpha)| < \frac{p(\alpha)}{2}$ を満たすものがあるため、 $x \in (\alpha - r_1, \alpha + r_1) \cap [a, b]$ ならば $p(x) < \frac{3p(\alpha)}{2} < 0$ となるが、 $(\alpha - r_1, \alpha + r_1) \cap [a, b]$ は無限集合だから、「有限個の $x \in [a, b]$ を除いて $p(x) > 0$ である。」という仮定と矛盾する。故に、任意の $x \in [a, b]$ に対して $p(x) \geq 0$ である。

f が常に値が 0 である定数値関数でないならば、 $f(\beta) \neq 0$ となる $\beta \in [a, b]$ が存在し、 f の連続性から $r_2 > 0$ で、 $x \in (\beta - r_2, \beta + r_2) \cap [a, b]$ ならば $|f(x) - f(\beta)| < \frac{f(\beta)}{2}$ を満たすものがある。従って $x \in (\beta - r_2, \beta + r_2) \cap [a, b]$ ならば $\frac{f(\beta)}{2} < f(x) < \frac{3f(\beta)}{2}$ となるため、 $f(\beta) > 0$ ならば $f(x)^2 > \frac{f(\beta)^2}{4}$ であり、 $f(\beta) < 0$ ならば $f(x)^2 > \frac{9f(\beta)^2}{4} > \frac{f(\beta)^2}{4}$ である。故に $x \in (\beta - r_2, \beta + r_2) \cap [a, b]$ ならば $f(x)^2 > \frac{f(\beta)^2}{4}$ である。

一方、 $c = \max\{a, \beta - r_2\}$ 、 $d = \min\{b, \beta + r_2\}$ とおけば、 $(\beta - r_2, \beta + r_2) \cap (a, b) = (c, d)$ であり、 (c, d) は無限集合だから、 $p(\gamma) > 0$ となる $\gamma \in (c, d)$ が存在し、さらに p の連続性から $0 < r_3 < \min\{\gamma - c, d - \gamma\}$ で、 $x \in [\gamma - r_3, \gamma + r_3]$ ならば $|p(x) - p(\gamma)| < \frac{p(\gamma)}{2}$ となるものがある。このとき、 $p(x) > \frac{p(\gamma)}{2}$ であり、 $[\gamma - r_3, \gamma + r_3] \subset (c, d) = (\beta - r_2, \beta + r_2) \cap (a, b)$ だから、 $x \in [\gamma - r_3, \gamma + r_3]$ ならば $f(x)^2 p(x) > \frac{f(\beta)^2 p(\gamma)}{8}$ が成り立つ。故に

$$\begin{aligned}
 (f, f)_p &= \int_a^b f(x)^2 p(x) dx = \int_a^{\gamma - r_3} f(x)^2 p(x) dx + \int_{\gamma - r_3}^{\gamma + r_3} f(x)^2 p(x) dx + \int_{\gamma + r_3}^b f(x)^2 p(x) dx \\
 &\geq \int_{\gamma - r_3}^{\gamma + r_3} f(x)^2 p(x) dx \geq \int_{\gamma - r_3}^{\gamma + r_3} \frac{f(\beta)^2 p(\gamma)}{8} dx = \frac{r_3 f(\beta)^2 p(\gamma)}{4} > 0
 \end{aligned}$$

である。

7. (1) f の線形性と $(\ , \)_W$ が W の内積であることから、 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ 、 $r \in \mathbf{K}$ に対し、以下の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 \beta_f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= (f(\mathbf{x} + \mathbf{y}), f(\mathbf{z}))_W = (f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), f(\mathbf{z}))_W = (f(\mathbf{x}), f(\mathbf{z}))_W + (f(\mathbf{y}), f(\mathbf{z}))_W \\
 &= \beta_f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta_f(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \\
 \beta_f(r\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (f(r\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))_W = (rf(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))_W = r(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))_W = r\beta_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\
 \beta_f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) &= (f(\mathbf{y}), f(\mathbf{x}))_W = \overline{(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))_W} = \overline{\beta_f(\mathbf{x}, \mathbf{y})}
 \end{aligned}$$

$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ならば、 f が単射であることから $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ であるため、 $\beta_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}))_W > 0$ が成り立つ。以上から、 β_f は V の内積である。

(2) $\varphi(x), \psi(x) \in P_n(\mathbf{K})$ 、 $r, s \in \mathbf{K}$ に対し、次の等式が成り立つため、 f は 1 次写像である。

$$f(r\varphi(x) + s\psi(x)) = \sum_{k=1}^{n+1} (r\varphi(a_k) + s\psi(a_k))e_k = r \sum_{k=1}^{n+1} \varphi(a_k)e_k + s \sum_{k=1}^{n+1} \psi(a_k)e_k = r f(\varphi(x)) + s f(\psi(x))$$

$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n+1} c_j x^{j-1} \in P_n(\mathbf{R})$ が $f(\varphi(x)) = \mathbf{0}$ を満たせば $\sum_{k=1}^{n+1} \varphi(a_k)e_k = \mathbf{0}$ だから、 $\sum_{j=1}^{n+1} a_k^{j-1} c_j = \varphi(a_k) = 0$ が $k = 1, 2, \dots, n+1$ に対して成り立つ。そこで、 a_k^{j-1} を (k, j) 成分とする $n+1$ 次正方行列を A とし、 c_j を第 j 成

分とする \mathbf{K}^{n+1} のベクトルを \mathbf{c} とすれば、上式から $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$ である。一方、 $|A|$ は Vandermonde の行列式であり、 a_1, a_2, \dots, a_{n+1} は相異なるため、 $|A| = \prod_{1 \leq j < k \leq n+1} (a_k - a_j) \neq 0$ である。従って A は正則行列だから、 $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$ より $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ が得られるため、 $c_1 = c_2 = \dots = c_{n+1} = 0$ 、すなわち $\varphi(x) = 0$ である。故に、 f は単射である。

(3) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2$ の場合; $\beta_f(1, 1) = \beta_f(x, 1) = 3, \beta_f(x, x) = \beta_f(x^2, 1) = 5, \beta_f(x^2, x) = 9$ だから $\varphi_1(x) = x - \frac{\beta_f(x, 1)}{\beta_f(1, 1)}, \varphi_2(x) = x^2 - \frac{\beta_f(x^2, 1)}{\beta_f(1, 1)} - \frac{\beta_f(x^2, \varphi_1(x))}{\beta_f(\varphi_1(x), \varphi_1(x))}\varphi_1(x)$ とおけば、 $\varphi_1(x) = x - 1, \varphi_2(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{3}$ である。さらに $\beta_f(\varphi_1(x), \varphi_1(x)) = 2, \beta_f(\varphi_2(x), \varphi_2(x)) = \frac{2}{3}$ だから、求める正規直交基底は $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(3x^2-6x+1) \right]$ である。

$a_1 = -1, a_2 = 0, a_3 = 1$ の場合; $\beta_f(1, 1) = 3, \beta_f(x, 1) = 0, \beta_f(x, x) = \beta_f(x^2, 1) = 2, \beta_f(x^2, x) = 0$ だから $\psi_1(x) = x - \frac{\beta_f(x, 1)}{\beta_f(1, 1)}, \psi_2(x) = x^2 - \frac{\beta_f(x^2, 1)}{\beta_f(1, 1)} - \frac{\beta_f(x^2, \psi_1(x))}{\beta_f(\psi_1(x), \psi_1(x))}\psi_1(x)$ とおけば、 $\psi_1(x) = x, \psi_2(x) = x^2 - \frac{2}{3}$ である。さらに $\beta_f(\psi_1(x), \psi_1(x)) = 2, \beta_f(\psi_2(x), \psi_2(x)) = \frac{2}{3}$ だから、求める正規直交基底は $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}x, \frac{1}{\sqrt{6}}(3x^2-2) \right]$ である。

8. (1) $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_n \in V$ を $\tilde{v}_1 = v_1, \tilde{v}_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(v_j, \tilde{v}_i)}{\|\tilde{v}_i\|^2} \tilde{v}_i$ によって帰納的に定めれば、 v'_1, v'_2, \dots, v'_n は $v'_j = \frac{1}{\|\tilde{v}_j\|} \tilde{v}_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) で与えられるため、 $\|\tilde{v}_j\|v'_j = \tilde{v}_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(v_j, \tilde{v}_i)}{\|\tilde{v}_i\|^2} \tilde{v}_i = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} (v_j, v'_i)v'_i$ が $j = 1, 2, \dots, n$ に対して成り立つ。故に $v_j = \sum_{i=1}^{j-1} (v_j, v'_i)v'_i + \|\tilde{v}_j\|v'_j$ であり、 B'_1 が正規直交基底であることに注意すれば、 $(v_j, v'_j) = \left(\sum_{i=1}^{j-1} (v_j, v'_i)v'_i + \|\tilde{v}_j\|v'_j, v'_j \right) = \sum_{i=1}^{j-1} (v_j, v'_i)(v'_i, v'_j) + \|\tilde{v}_j\|(v'_j, v'_j) = \|\tilde{v}_j\|$ が得られる。従って $v_j = \sum_{i=1}^j (v_j, v'_i)v'_i$ となるため、 B'_1 から B_1 への基底の変換行列の (i, j) 成分は $i \leq j$ ならば (v_j, v'_i) であり、 $i > j$ ならば 0 である。 B'_1 から B_1 への基底の変換行列の (j, j) 成分は $(v_j, v'_j) = \|\tilde{v}_j\|$ で、 $\tilde{v}_i \neq \mathbf{0}$ だから、対角成分は 0 でない実数である。

(2) B'_1 から B_1 への基底の変換行列を P, B'_2 から B_2 への基底の変換行列を Q とし、さらに B_1 から B_2 への基底の変換行列を A, B'_1 から B'_2 への基底の変換行列を B とする。このとき、 B は V の恒等写像 $id_V : V \rightarrow V$ の B'_2, B'_1 に関する表現行列であり、 P は id_V の B_1, B'_1 に関する表現行列だから、 P^{-1} は id_V の B'_1, B_1 に関する表現行列であり、 $P^{-1}B$ は $id_V \circ id_V = id_V$ の B'_2, B_1 に関する表現行列である。一方、 Q は id_V の B_2, B'_2 に関する表現行列だから、 Q^{-1} は id_V の B'_2, B_2 に関する表現行列であり、 A は id_V の B_2, B_1 に関する表現行列だから、 AQ^{-1} も $id_V \circ id_V = id_V$ の B'_2, B_1 に関する表現行列であるため $P^{-1}B = AQ^{-1}$ が成り立つ。

$B'_1 = B'_2$ ならば $B = E_n$ だから、 $P^{-1}B = AQ^{-1}$ から $A = P^{-1}Q$ が得られる。(1) より、 P, Q は対角成分がすべて正の実数である上半三角行列だから、第 4 回の演習問題 8 の (2) から P^{-1} も対角成分がすべて正の実数である上半三角行列であり、さらに第 4 回の演習問題 8 の (1) から $A = P^{-1}Q$ も対角成分がすべて正の実数である上半三角行列である。

A が対角成分がすべて正の実数である上半三角行列であると仮定して、 $v'_j = w'_j$ が $j = 1, 2, \dots, k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) に対して成り立つことを k による数学的帰納法で示す。

$A = (a_{ij})$ とおけば、仮定から $i > j$ ならば $a_{ij} = 0$ であり、 a_{ii} は正の実数である。従って $w_1 = a_{11}v_1$ かつ $a_{11} > 0$ であり、 $v'_1 = \frac{1}{\|v_1\|}v_1, w'_1 = \frac{1}{\|w_1\|}w_1$ だから $w'_1 = \frac{a_{11}}{\|a_{11}v_1\|}v_1 = \frac{1}{\|v_1\|}v_1 = v'_1$ が成り立つため、 $k = 1$ の場合には帰納法の仮定は成り立つ。 $j = 1, 2, \dots, n$ に対して $\tilde{w}_j = \|\tilde{w}_j\|w'_j$ であり、 $v'_j = w'_j$ が $j = 1, 2, \dots, k-1$ に対して成り立つと仮定して、 $w_k = \sum_{i=1}^k a_{ik}v_i$ および、(1) で得た等式 $v_i = \sum_{j=1}^i (v_i, v'_j)v'_j$ を用いて、 B'_1 が正規直交基底であることに注意すれば、 $j \geq i+1$ ならば $(v_i, v'_j) = \left(\sum_{l=1}^i (v_i, v'_l)v'_l, v'_j \right) = \sum_{l=1}^i (v_i, v'_l)(v'_l, v'_j) = 0$ が成り立ち、(1) で得た等

式 $(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}'_k) = \|\tilde{\mathbf{v}}_k\|$ を用いると、次の等式が得られる。

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{w}}_k\|\mathbf{w}'_k &= \tilde{\mathbf{w}}_k = \mathbf{w}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(\mathbf{w}_k, \tilde{\mathbf{w}}_j)}{\|\tilde{\mathbf{w}}_j\|^2} \tilde{\mathbf{w}}_j = \mathbf{w}_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{w}_k, \mathbf{w}'_j) \mathbf{w}'_j = \mathbf{w}_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{w}_k, \mathbf{v}'_j) \mathbf{v}'_j \\ &= \sum_{i=1}^k a_{ik} \mathbf{v}_i - \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^k a_{ik} (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}'_j) \mathbf{v}'_j = \sum_{i=1}^k a_{ik} \left(\mathbf{v}_i - \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}'_j) \mathbf{v}'_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^k a_{ik} \left(\sum_{j=1}^i (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}'_j) \mathbf{v}'_j - \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}'_j) \mathbf{v}'_j \right) = \sum_{i=1}^{k-1} a_{ik} \left(- \sum_{j=i+1}^{k-1} (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}'_j) \mathbf{v}'_j \right) + (\mathbf{v}_k, \mathbf{v}'_k) \mathbf{v}'_k = \|\tilde{\mathbf{v}}_k\| \mathbf{v}'_k \end{aligned}$$

\mathbf{v}'_k と \mathbf{w}'_k はともに単位ベクトルだから、 $\|\tilde{\mathbf{w}}_k\|\mathbf{w}'_k = \|\tilde{\mathbf{v}}_k\|\mathbf{v}'_k$ の両辺の長さを考えれば $\|\tilde{\mathbf{w}}_k\| = \|\tilde{\mathbf{v}}_k\|$ が得られる。 $\|\tilde{\mathbf{v}}_k\|$ は 0 でないので、 $\|\tilde{\mathbf{w}}_k\|\mathbf{w}'_k = \|\tilde{\mathbf{v}}_k\|\mathbf{v}'_k$ の両辺に $\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{w}}_k\|} = \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{v}}_k\|}$ をかければ $\mathbf{w}'_k = \mathbf{v}'_k$ が得られ、帰納法が進む。

9. (1) $f_m(x) = \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^n$ とおくと、 $f_m(x)$ は $(x^2 - 1)^{n-m}$ で割り切れることを m による数学的帰納法で示す。 $f_0(x) = (x^2 - 1)^n$ だから $m = 0$ のときは、主張が成り立つ。 $f_{m-1}(x)$ が $(x^2 - 1)^{n-m+1}$ で割り切れると仮定して $f_{m-1}(x) = (x^2 - 1)^{n-m+1} g(x)$ ($g(x)$ は x の多項式) とおく。

$$\begin{aligned} f_m(x) &= f'_{m-1}(x) = 2(n-m+1)x(x^2-1)^{n-m}g(x) + (x^2-1)^{n-m+1}g'(x) \\ &= (x^2-1)^{n-m}(2(n-m+1)xg(x) + (x^2-1)g'(x)) \end{aligned}$$

だから $f_m(x)$ は $(x^2 - 1)^{n-m}$ で割り切れる。

従って $m < n$ ならば $f_m(1) = f_m(-1) = 0$ となるため、 $m \geq 1$ のとき部分積分法により

$$\int_{-1}^1 x^k f_m(x) dx = [x^k f_{m-1}(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 kx^{k-1} f_{m-1}(x) dx = -k \int_{-1}^1 x^{k-1} f_{m-1}(x) dx$$

である。この等式を繰り返し用いると $k \leq n$ ならば

$$\int_{-1}^1 x^k f_n(x) dx = -k \int_{-1}^1 x^{k-1} f_{n-1}(x) dx = (-k)(-k+1) \int_{-1}^1 x^{k-2} f_{n-2}(x) dx = \cdots = (-1)^k k! \int_{-1}^1 f_{n-k}(x) dx$$

が成り立つ。 $k < n$ の場合、上式は $(-1)^k k! [f_{n-k-1}(x)]_{-1}^1 = (-1)^k k! (f_{n-k-1}(1) - f_{n-k-1}(-1)) = 0$ に等しい。 $k = n$ の場合は $x = \sin t$ とおいて置換積分をすれば、 $\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ より

$$\int_{-1}^1 x^n f_n(x) dx = (-1)^n n! \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = 2n! \int_0^1 (1 - x^2)^n dx = \frac{2n!(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

が得られ、 $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} f_n(x)$ だから、上の結果から次の等式が得られる。

$$(x^k, P_n(x))_P = \int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & k = 0, 1, \dots, n-1 \\ \frac{(2n)!!}{2^{n-1}(2n+1)!!} & k = n \end{cases} \cdots (*)$$

$\frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m$ は x^{2m} の係数が 1 である $2m$ 次多項式を m 回微分した多項式だから、 m 次多項式で、 x^m の係数は $(2m)(2m-1)\cdots(m+1) = \frac{(2m)!}{m!}$ である。従って $P_m(x) = \sum_{k=0}^m c_{m,k} x^k$ とおくと、 $c_{m,m} = \frac{(2m)!}{2^m (m!)^2}$ である。(*) より

り $m < n$ ならば

$$(P_m(x), P_n(x))_P = \left(\sum_{k=0}^m c_{m,k} x^k, P_n(x) \right)_P = \sum_{k=0}^m c_{m,k} (x^k, P_n(x))_P = 0$$

$$\begin{aligned} (P_n(x), P_n(x))_P &= \left(\sum_{k=0}^n c_{n,k} x^k, P_n(x) \right)_P = \sum_{k=0}^n c_{n,k} (x^k, P_n(x))_P = c_{n,n} (x^n, P_n(x))_P = \frac{(2n)!(2n)!!}{2^{2n-1}(n!)^2(2n+1)!!} \\ &= \frac{2(2n)!(2n)!!}{(2^n n!)^2(2n+1)!!} = \frac{2(2n)!}{(2n+1)!} = \frac{2(2n)!(2n)!!}{((2n)!!)^2(2n+1)!!} = \frac{2(2n)!}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から $\frac{1}{\rho_0}P_0(x), \frac{1}{\rho_1}P_1(x), \dots, \frac{1}{\rho_n}P_n(x)$ は $P_n(\mathbf{R})$ の正規直交系だから 1 次独立である. $\dim P_n(\mathbf{R}) = n+1$ だから $\frac{1}{\rho_0}P_0(x), \frac{1}{\rho_1}P_1(x), \dots, \frac{1}{\rho_n}P_n(x)$ は $P_n(\mathbf{R})$ の正規直交基底になる. そこで, $B_1 = [1, x, \dots, x^n]$, $B_2 = \left[\frac{1}{\rho_0}P_0(x), \frac{1}{\rho_1}P_1(x), \dots, \frac{1}{\rho_n}P_n(x) \right]$ とおく. (1) の解答で $P_m(x) = \sum_{k=0}^m c_k x^k$ とおけば c_m は正の実数 $\frac{(2m)!}{2^m(m!)^2}$ であることを示したため, B_1 から B_2 への基底の変換行列は, 対角成分がすべて正の実数である上半三角行列である. B_1, B_2 に対してシュミットの直交化を行って得られる V の正規直交基底をそれぞれ B'_1, B'_2 とすれば, B_2 はすでに V の正規直交基底だから $B'_2 = B_2$ である. 従って問題 8 の (2) から $B'_1 = B_2$ である.

(3) $\left(x^k, \frac{2n+3}{n+2}xP_{n+1}(x) - \frac{n+1}{n+2}P_n(x) \right)_P = \frac{2n+3}{n+2} \int_{-1}^1 x^{k+1}P_{n+1}(x) dx - \frac{n+1}{n+2} \int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx$ だから, (*) により $k = 0, 1, \dots, n-1$ ならば $\left(x^k, \frac{2n+3}{n+2}xP_{n+1}(x) - \frac{n+1}{n+2}P_n(x) \right)_P = 0$ であり,

$$\begin{aligned} \left(x^n, \frac{2n+3}{n+2}xP_{n+1}(x) - \frac{n+1}{n+2}P_n(x) \right)_P &= \frac{2n+3}{n+2} \frac{(2n+2)!!}{2^n(2n+3)!!} - \frac{n+1}{n+2} \frac{(2n)!!}{2^{n-1}(2n+1)!!} \\ &= \frac{1}{n+2} \frac{(2n+2)!!}{2^n(2n+1)!!} - \frac{1}{n+2} \frac{(2n+2)!!}{2^n(2n+1)!!} = 0 \end{aligned}$$

が成り立つため, $P_{n+2}(\mathbf{R})$ において, $\frac{2n+3}{n+2}xP_{n+1}(x) - \frac{n+1}{n+2}P_n(x) \in \langle 1, x, x^2, \dots, x^n \rangle^\perp$ が成り立つ. 一方 (1) の結果から $\langle 1, x, x^2, \dots, x^n \rangle^\perp = \langle P_{n+1}(x), P_{n+2}(x) \rangle$ だから $\frac{2n+3}{n+2}xP_{n+1}(x) - \frac{n+1}{n+2}P_n(x) = aP_{n+1}(x) + bP_{n+2}(x)$ を満たす実数 a, b が存在する. $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$ は x の n 次多項式で x^n の係数は $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$, x^{n-1} の係数は 0 である. 従って $\frac{2n+3}{n+2}xP_{n+1}(x) - \frac{n+1}{n+2}P_n(x)$ の x^{n+2} の係数は $\frac{2n+3}{n+2} \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2} = \frac{(2n+4)!}{2^{n+2}((n+2)!)^2}$, x^{n+1} の係数は 0 であり, $aP_{n+1}(x) + bP_{n+2}(x)$ の x^{n+2} の係数は $\frac{b(2n+4)!}{2^{n+2}((n+2)!)^2}$, x^{n+1} の係数は $\frac{a(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2}$ となるため, $a = 0, b = 1$ である.

10. (1) 0 以上の整数 k に対して $I_k(t) = \int_0^t x^k e^{-x} dx$ とおけば, $I_0(t) = \int_0^t e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^t = 1 - e^{-t}$ であり, $k \geq 1$ ならば部分積分法により $I_k(t) = [-x^k e^{-x}]_0^t + k \int_0^t x^{k-1} e^{-x} dx = kI_{k-1}(t) - t^k e^{-t}$ が得られる. 従って $\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} I_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-t}) = 1$ であり, 帰納的に $\int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} dx = (k-1)!$ が成り立つと仮定すれば, $\int_0^\infty x^k e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} I_k(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (kI_{k-1}(t) - t^k e^{-t}) = k \lim_{t \rightarrow \infty} I_{k-1}(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} t^k e^{-t} = k(k-1)! = k!$ である. 故に, $p(x) \in P(\mathbf{R})$ に対して $p(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ とおけば,

$$\int_0^\infty p(x) e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \left(\sum_{k=0}^n c_k x^k \right) e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_0^t c_k x^k e^{-x} dx = \sum_{k=0}^n c_k \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^k e^{-x} dx \right) = \sum_{k=0}^n k! c_k$$

だから, $\int_0^\infty p(x) e^{-x} dx$ は $\sum_{k=0}^n k! c_k$ に収束する.

(2) $f(x), g(x), h(x) \in P(\mathbf{R})$, $r \in \mathbf{R}$ に対し, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}(f(x) + g(x), h(x))_L &= \int_0^\infty (f(x) + g(x))h(x)e^{-x} dx = \int_0^\infty (f(x)h(x) + g(x)h(x))e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty f(x)h(x)e^{-x} dx + \int_0^\infty g(x)h(x)e^{-x} dx = (f(x), h(x))_L + (g(x), h(x))_L, \\ (rf(x), g(x))_L &= \int_0^\infty rf(x)g(x)e^{-x} dx = r \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x} dx = r(f(x), g(x))_L, \\ (g(x), f(x))_L &= \int_0^\infty g(x)f(x)e^{-x} dx = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x} dx = (f(x), g(x))_L\end{aligned}$$

f が常に値が 0 である定数値関数でないならば, f が多項式関数であることから, $f(x) = 0$ を満たす $x \in \mathbf{R}$ は有限個である. 従って f が常に値が 0 である定数値関数でないならば, $f(\alpha) \neq 0$ となる $\alpha \in [0, \infty)$ が存在し, f の連続性から $r_2 > 0$ で, $x \in (\alpha - r_2, \alpha + r_2) \cap [0, \infty)$ ならば $|f(x) - f(\alpha)| < \frac{f(\alpha)}{2}$ を満たすものがある. そこで, $\max\{0, \alpha - r_2\} < a < b < \alpha + r_2$ を満たす a, b を選べば, $x \in [a, b]$ ならば $\frac{f(\alpha)}{2} < f(x) < \frac{3f(\alpha)}{2}$ となるため, $f(\alpha) > 0$ ならば $f(x)^2 > \frac{f(\alpha)^2}{4}$ であり, $f(\alpha) < 0$ ならば $f(x)^2 > \frac{9f(\alpha)^2}{4} > \frac{f(\alpha)^2}{4}$ である. 故に $x \in [a, b]$ ならば $f(x)^2 > \frac{f(\alpha)^2}{4}$ であり, このとき $e^{-x} \geq e^{-b}$ だから, $x \in [a, b]$ ならば $f(x)^2 e^{-x} > \frac{f(\alpha)^2 e^{-b}}{4}$ が成り立つ. 故に

$$\begin{aligned}(f(x), f(x))_L &= \int_0^\infty f(x)^2 e^{-x} dx = \int_0^a f(x)^2 e^{-x} dx + \int_a^b f(x)^2 e^{-x} dx + \int_b^\infty f(x)^2 e^{-x} dx \\ &\geq \int_a^b f(x)^2 e^{-x} dx \geq \int_a^b \frac{f(\alpha)^2 e^{-b}}{4} dx = \frac{f(\alpha)^2 e^{-b}(b-a)}{4} > 0\end{aligned}$$

である.

(3) $f_k(x) = \frac{(-1)^n e^x}{n!} \frac{d^k}{dx^k} (e^{-x} x^n)$ とおくと, ライブニッツの公式より

$$f_k(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{(-1)^{k+n-i}}{(n-i)!} x^{n-i} \dots (*)$$

となる. よって, $k < n$ ならば $f_k(x)$ は x^{n-k} で割り切れる x の n 次多項式であるため $f_k(0) = 0$ である. また, $(f_{k-1}(x)e^{-x})' = \left(\frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} (x^n e^{-x}) \right)' = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^k}{dx^k} (x^n e^{-x}) = f_k(x)e^{-x}$ であり, 任意の $n \geq 0$ に対して $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0$ だから, x の任意の多項式 $p(x)$ に対して $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x)e^{-x} = 0$ であるから $m \geq 0, 1 \leq k \leq n$ のとき, 部分積分法により

$$\int_0^\infty x^m f_k(x) e^{-x} dx = [x^m f_{k-1}(x) e^{-x}]_0^\infty - \int_0^\infty m x^{m-1} f_{k-1}(x) e^{-x} dx = -m \int_0^\infty x^{m-1} f_{k-1}(x) e^{-x} dx$$

である. この等式を繰り返し用いると $m \leq k \leq n$ ならば

$$\int_0^\infty x^m f_k(x) e^{-x} dx = -m \int_0^\infty x^{m-1} f_{k-1}(x) e^{-x} dx = \dots = (-1)^m m! \int_0^\infty f_{k-m}(x) e^{-x} dx$$

が成り立つ. $m < k$ の場合, 上式は $(-1)^m m! [f_{k-m-1}(x) e^{-x}]_0^\infty = 0$ に等しい. $m = n$ の場合は, (1) の解答で得た結果を用いると

$$\int_0^\infty x^n f_n(x) e^{-x} dx = (-1)^n n! \int_0^\infty \frac{(-1)^n x^n}{n!} e^{-x} dx = n!$$

が得られる. $L_n(x) = f_n(x)$ だから, 上の結果から次の等式が得られる.

$$(x^m, L_n(x))_L = \int_0^\infty x^m L_n(x) e^{-x} dx = \begin{cases} 0 & m = 0, 1, \dots, n-1 \dots (**) \\ n! & m = n \end{cases}$$

(*) より $L_m(x) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{(-1)^{2m-i}}{(m-i)!} x^{m-i} = \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^{m-i}}{i!} \binom{m}{i} x^i$ だから, (**) によって $m < n$ ならば

$$(L_m(x), L_n(x))_L = \left(\sum_{i=0}^m \frac{(-1)^{m-i}}{i!} \binom{m}{i} x^i, L_n(x) \right)_L = \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^{m-i}}{i!} \binom{m}{i} (x^i, L_n(x))_L = 0$$

$$(L_n(x), L_n(x))_L = \left(\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}}{i!} \binom{n}{i} x^i, L_n(x) \right)_L = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}}{i!} \binom{n}{i} (x^i, L_n(x))_L = \frac{1}{n!} (x^n, L_n(x))_L = \frac{1}{n!} n! = 1.$$

となるため, $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ は $P_n(\mathbf{R})$ の正規直交系である. 従って, これらは 1 次独立であり, $\dim P_n(\mathbf{R}) = n + 1$ だから $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ は $P_n(\mathbf{R})$ の正規直交基底になる. そこで, $B_1 = [1, x, \dots, x^n]$, $B_2 = [L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)]$ とおく. $L_j(x) = \sum_{i=0}^j \frac{(-1)^{j-i}}{i!} \binom{j}{i} x^i$ だから, B_1 から B_2 への基底の変換行列は, 対角成分がすべて正の実数である上半三角行列である. B_1, B_2 に対してシュミットの直交化を行って得られる V の正規直交基底をそれぞれ B'_1, B'_2 とすれば, B_2 はすでに V の正規直交基底だから $B'_2 = B_2$ である. 従って問題 8 の (2) から $B'_1 = B_2$ である.

(4) 上でみたように $L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!} \binom{n}{k} x^k$ だから, 次の等式が成り立つ.

$$L_{n+2}(x) = \frac{1}{(n+2)!} x^{n+2} - \frac{n+2}{(n+1)!} x^{n+1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2n!} x^n + (x \text{ の } n-1 \text{ 次以下の項})$$

$$\frac{x}{n+2} L_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+2)!} x^{n+2} - \frac{n+1}{(n+2)n!} x^{n+1} + \frac{n(n+1)}{2(n+2)(n-1)!} x^n + (x \text{ の } n-1 \text{ 次以下の項})$$

故に $L_{n+2}(x) - \frac{x}{n+2} L_{n+1}(x) = -\frac{2n+3}{(n+2)!} x^{n+1} + \frac{2(n+1)^2}{(n+2)n!} x^n + (x \text{ の } n-1 \text{ 次以下の項})$ であり,

$$\frac{2n+3}{n+2} L_{n+1}(x) = \frac{2n+3}{(n+2)!} x^{n+1} - \frac{(n+1)(2n+3)}{(n+2)n!} x^n + (x \text{ の } n-1 \text{ 次以下の項})$$

が成り立つため, $L_{n+2}(x) - \frac{x-2n-3}{n+2} L_{n+1}(x) = -\frac{n+1}{(n+2)n!} x^n + (x \text{ の } n-1 \text{ 次以下の項})$ が得られる. さらに, $\frac{n+1}{n+2} L_n(x) = \frac{n+1}{(n+2)n!} x^n + (x \text{ の } n-1 \text{ 次以下の項})$ だから $L_{n+2}(x) - \frac{x-2n-3}{n+2} L_{n+1}(x) + \frac{n+1}{n+2} L_n(x)$ は x の $n-1$ 次以下の多項式である. 一方, $(x^k, x L_m(x))_L = \int_0^\infty x^{k+1} L_m(x) e^{-x} dx = (x^{k+1}, L_m(x))_L$ であることに注意すれば, $k \leq n-1$ の場合, (**) から次の等式が得られる.

$$\begin{aligned} \left(x^k, L_{n+2}(x) - \frac{x-2n-3}{n+2} L_{n+1}(x) + \frac{n+1}{n+2} L_n(x) \right)_L &= (x^k, L_{n+2}(x))_L - \frac{1}{n+2} (x^k, x L_{n+1}(x))_L \\ &\quad + \frac{2n+3}{n+2} (x^k, L_{n+1}(x))_L + \frac{n+1}{n+2} (x^k, L_n(x))_L = 0 \end{aligned}$$

従って $P_{n-1}(\mathbf{R})$ において, $L_{n+2}(x) - \frac{x-2n-3}{n+2} L_{n+1}(x) + \frac{n+1}{n+2} L_n(x) \in (1, x, x^2, \dots, x^{n-1})^\perp = \{0\}$ が成り立つため, $L_{n+2}(x) - \frac{x-2n-3}{n+2} L_{n+1}(x) + \frac{n+1}{n+2} L_n(x) = 0$ である.

11. (1) $J_n(t) = \int_0^t x^n e^{-x^2} dx$ によって関数 $J_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ を定めれば, $J'_n(t) = t^n e^{-t^2} \geq 0$ だから, $J_n(t)$ は単調増加関数である. $x \geq 1$ ならば $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ だから, 問題 10 の (1) の解答で示したことから $t \geq 1$ ならば

$$\begin{aligned} J_n(t) &= \int_0^t x^n e^{-x^2} dx = \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx + \int_1^t x^n e^{-x^2} dx \leq \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx + \int_1^t x^n e^{-x} dx \\ &= \int_0^1 x^n (e^{-x^2} - e^{-x}) dx + \int_0^t x^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^n (e^{-x^2} - e^{-x}) dx + \int_0^\infty x^n e^{-x} dx \\ &\leq \int_0^1 x^n (e^{-x^2} - e^{-x}) dx + n! \end{aligned}$$

が成り立つ。故に $J_n(t)$ は上に有界だから $\int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx$ は収束する。 $s < 0$ に対し、 $y = -x$ と変数変換を行えば $\int_s^0 |x^n e^{-x^2}| dx = \int_0^{-s} y^n e^{-y^2} dy = J_n(-s)$ となるため、上で示したことから、 $\int_{-\infty}^0 |x^n e^{-x^2}| dx$ は収束する。従って $\int_{-\infty}^0 x^n e^{-x^2} dx$ は絶対収束するため、 $\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 x^n e^{-x^2} dx + \int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx$ も絶対収束する。
 $p(x) \in P(\mathbf{R})$ に対して $p(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ とおけば、

$$\int_{-\infty}^\infty p(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^\infty \left(\sum_{k=0}^n c_k x^k \right) e^{-x^2} dx = \sum_{k=0}^n \int_{-\infty}^\infty c_k x^k e^{-x^2} dx = \sum_{k=0}^n c_k \left(\int_{-\infty}^\infty x^k e^{-x^2} dx \right)$$

だから、 $\int_{-\infty}^\infty p(x) e^{-x^2} dx$ も絶対収束する。

(2) $f(x), g(x), h(x) \in P(\mathbf{R})$, $r \in \mathbf{R}$ に対し、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x), h(x))_H &= \int_{-\infty}^\infty (f(x) + g(x))h(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^\infty (f(x)h(x) + g(x)h(x)) \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty f(x)h(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx + \int_{-\infty}^\infty g(x)h(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = (f(x), h(x))_H + (g(x), h(x))_H, \\ (rf(x), g(x))_H &= \int_{-\infty}^\infty rf(x)g(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = r \int_{-\infty}^\infty f(x)g(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = r(f(x), g(x))_H, \\ (g(x), f(x))_H &= \int_{-\infty}^\infty g(x)f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^\infty f(x)g(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = (f(x), g(x))_H \end{aligned}$$

f が常に値が 0 である定数値関数でないならば、 $f(\alpha) \neq 0$ となる $\alpha \in \mathbf{R}$ が存在し、 f の連続性から $r_2 > 0$ で、 $x \in (\alpha - r_2, \alpha + r_2)$ ならば $|f(x) - f(\alpha)| < \frac{f(\alpha)}{2}$ を満たすものがある。そこで、 $\alpha - r_2 < a < b < \alpha + r_2$ を満たす a, b を選べば、 $x \in [a, b]$ ならば $\frac{f(\alpha)}{2} < f(x) < \frac{3f(\alpha)}{2}$ となるため、 $f(\alpha) > 0$ ならば $f(x)^2 > \frac{f(\alpha)^2}{4}$ であり、 $f(\alpha) < 0$ ならば $f(x)^2 > \frac{9f(\alpha)^2}{4} > \frac{f(\alpha)^2}{4}$ である。故に $x \in [a, b]$ ならば $f(x)^2 > \frac{f(\alpha)^2}{4}$ であり、このとき $c = \max\{|a|, |b|\}$ とおけば $e^{-x^2} \geq e^{-c^2}$ だから、 $x \in [a, b]$ ならば $f(x)^2 e^{-x^2} > \frac{f(\alpha)^2 e^{-c^2}}{4}$ が成り立つ。故に

$$\begin{aligned} (f(x), f(x))_H &= \int_{-\infty}^\infty f(x)^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^a f(x)^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx + \int_a^b f(x)^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx + \int_b^\infty f(x)^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx \\ &\geq \int_a^b f(x)^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx \geq \int_a^b \frac{f(\alpha)^2 e^{-c^2}}{4} dx = \frac{f(\alpha)^2 e^{-c^2} (b-a)}{4} > 0 \end{aligned}$$

である。

(3) $(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) = e^{-x^2} H_n(x)$ の両辺を微分すると $(-1)^n \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-x^2}) = -2xe^{-x^2} H_n(x) + e^{-x^2} H'_n(x)$ となる。この両辺に $-e^{x^2}$ をかけて $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$ を得る。

n による数学的帰納法で、 $H_n(x)$ は x^n の係数が 2^n である x の n 次多項式であることを示す。 $H_1(x) = 2x$ だから $n = 1$ のとき、主張は正しい。 $n = k$ のときに主張が正しいと仮定すると、 $2xH_k(x)$ は x^{k+1} の係数が 2^{k+1} である x の $k+1$ 次多項式であり、 $H'_k(x)$ は x の $k-1$ 次多項式だから、 $H_{k+1}(x) = 2xH_k(x) - H'_k(x)$ は x^{k+1} の係数が 2^{k+1} である x の $k+1$ 次多項式である。

(4) $\frac{d}{dx} (e^{-x^2}) = -2xe^{-x^2}$ よりライプニッツの公式から

$$\begin{aligned} H_{n+2}(x) &= (-1)^{n+2} e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (-2xe^{-x^2}) = (-1)^{n+1} 2e^{x^2} \left(x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-x^2}) + (n+1) \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \right) \\ &= 2xH_{n+1}(x) - 2(n+1)H_n(x) \end{aligned}$$

(5) 任意の $n \geq 0$ に対して $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^{-x^2} = 0$ だから, x の任意の多項式 $p(x)$ に対して $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x)e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x)e^{-x^2} = 0$ であることに注意する. $m \geq 0, n \geq 1$ のとき部分積分法により

$$\begin{aligned}(x^m, H_n(x))_H &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n x^m}{\sqrt{\pi}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) dx = \left[\frac{(-1)^n x^m}{\sqrt{\pi}} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n m x^{m-1}}{\sqrt{\pi}} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) dx \\ &= m \int_{-\infty}^{\infty} x^{m-1} H_{n-1}(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = m(x^{m-1}, H_{n-1}(x))_H\end{aligned}$$

である. この等式を繰り返し用いると $m \leq n$ ならば次の等式が成り立つ.

$$(x^m, H_n(x))_H = m(x^{m-1}, H_{n-1}(x))_H = \cdots = m!(1, H_{n-m}(x))_H = m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n-m}}{\sqrt{\pi}} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (e^{-x^2}) dx$$

$m < n$ の場合, 上式は $m! \left[\frac{(-1)^{n-m}}{\sqrt{\pi}} \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} (e^{-x^2}) \right]_{-\infty}^{\infty} = m! \left[-\frac{1}{\sqrt{\pi}} H_{n-m-1}(x) e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0$ に等しく, $m = n$ の場合は $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ より, 上式は $n! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = 2n! \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = n!$ に等しい. 故に次の等式が成り立つ.

$$(x^m, H_n(x))_H = \begin{cases} 0 & m = 0, 1, \dots, n-1 \\ n! & m = n \end{cases}$$

(3) より $H_m(x) = \sum_{k=0}^m c_{m,k} x^k$ ($c_{m,m} = 2^m$) と表せるため, 上式により $m < n$ ならば次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}(H_m(x), H_n(x))_H &= \left(\sum_{k=0}^m c_{m,k} x^k, H_n(x) \right)_H = \sum_{k=0}^m c_{m,k} (x^k, H_n(x))_H = 0 \\ (H_n(x), H_n(x))_H &= \left(\sum_{k=0}^n c_{n,k} x^k, H_n(x) \right)_H = \sum_{k=0}^n c_{n,k} (x^k, H_n(x))_H = c_{n,n} (x^n, H_n(x))_H = 2^n n!\end{aligned}$$

(6) 上の結果から $\frac{1}{\eta_0} H_0(x), \frac{1}{\eta_1} H_1(x), \dots, \frac{1}{\eta_n} H_n(x)$ は $P_n(\mathbf{R})$ の正規直交系だから 1 次独立である. $\dim P_n(\mathbf{R}) = n+1$ だから $\frac{1}{\eta_0} H_0(x), \frac{1}{\eta_1} H_1(x), \dots, \frac{1}{\eta_n} H_n(x)$ は $P_n(\mathbf{R})$ の正規直交基底になる. そこで, $B_1 = [1, x, \dots, x^n]$, $B_2 = \left[\frac{1}{\eta_0} H_0(x), \frac{1}{\eta_1} H_1(x), \dots, \frac{1}{\eta_n} H_n(x) \right]$ とおく. (3) より $H_m(x) = \sum_{k=0}^m c_{m,k} x^k$ とおけば $c_{m,m}$ は正の実数 2^m だから, B_1 から B_2 への基底の変換行列は, 対角成分がすべて正の実数である上半三角行列である. B_1, B_2 に対してシュミットの直交化を行って得られる V の正規直交基底をそれぞれ B'_1, B'_2 とすれば, B_2 はすでに V の正規直交基底だから $B'_2 = B_2$ である. 従って問題 8 の (2) から $B'_1 = B_2$ である.

12. (1) n による数学的帰納法によって主張を示す. $T_1(x) = x, U_1(x) = 1$ だから, $n = 1$ の場合は主張は成り立つ. n のときに主張が成り立つならば, $T_{n+1}(x) = xT_n(x) + (x^2 - 1)U_n(x)$ だから $T_{n+1}(x)$ の x^{n+1} の係数は $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ であり, $U_{n+1}(x) = T_n(x) + xU_n(x)$ だから $U_{n+1}(x)$ の x^n の係数も $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ である. 従って $n+1$ のときも主張が成り立つ.

(2) $T_n(x), U_n(x)$ の定義から $T_{n+1}(x) = x(T_n(x) + xU_n(x)) - U_n(x) = xU_{n+1}(x) - U_n(x)$ である. 従って

$$\begin{aligned}T_{n+2}(x) - 2xT_{n+1}(x) + T_n(x) &= xU_{n+2}(x) - U_{n+1}(x) + T_n(x) - 2xT_{n+1}(x) \\ &= x(U_{n+2}(x) - U_n(x) - 2T_{n+1}(x)) \\ &= x(T_{n+1}(x) + xU_{n+1}(x) - U_n(x) - 2T_{n+1}(x)) \\ &= x(xU_{n+1}(x) - U_n(x) - T_{n+1}(x)) = 0 \\ U_{n+2}(x) - 2xU_{n+1}(x) + U_n(x) &= T_{n+1}(x) + xU_{n+1}(x) - 2xU_{n+1}(x) + U_n(x) \\ &= xU_{n+1}(x) - U_n(x) - xU_{n+1}(x) + U_n(x) = 0.\end{aligned}$$

(3) n による数学的帰納法によって主張を示す. $T_1(\cos \theta) = \cos \theta$, $U_1(\cos \theta) \sin \theta = \sin \theta$ だから, $n = 1$ の場合は主張は成り立つ. $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$, $U_n(\cos \theta) \sin \theta = \sin n\theta$ が成り立つと仮定すれば,

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos \theta) &= \cos \theta T_n(\cos \theta) + (\cos^2 \theta - 1)U_n(\cos \theta) = \cos \theta \cos n\theta + \sin \theta \sin n\theta = \cos((n+1)\theta) \\ U_{n+1}(\cos \theta) \sin \theta &= T_n(\cos \theta) \sin \theta + \cos \theta U_n(\cos \theta) \sin \theta = \cos n\theta \sin \theta + \cos \theta \sin n\theta = \sin((n+1)\theta) \end{aligned}$$

だから, $n+1$ のときも主張が成り立つ.

(4) $x = \sin \theta$ と変数変換を行えば,

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{t \rightarrow 1-0} \int_0^t \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{t \rightarrow 1-0} \int_0^{\sin^{-1} t} \sin^n \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$$

となるため, 広義積分 $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$ は収束する. 同様に, $x = -\sin \theta$ と変数変換を行えば,

$$\int_{-1}^0 \frac{|x|^n}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{t \rightarrow -1+0} \int_t^0 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{t \rightarrow -1+0} \int_{-\sin^{-1} t}^0 |\sin^n \theta| d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$$

となるため, 広義積分 $\int_{-1}^0 \frac{|x|^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$ も収束する. 従って, 広義積分 $\int_{-1}^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$ は絶対収束するため, 任意の

$p(x) \in P(\mathbf{R})$ に対して, 広義積分 $\int_{-1}^1 \frac{p(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ は絶対収束する.

(5) $f(x), g(x), h(x) \in P(\mathbf{R})$, $r \in \mathbf{R}$ に対し, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x), h(x))_T &= \int_{-1}^1 \frac{(f(x) + g(x))h(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{f(x)h(x) + g(x)h(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{f(x)h(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_{-1}^1 \frac{g(x)h(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = (f(x), h(x))_T + (g(x), h(x))_T, \\ (rf(x), g(x))_T &= \int_{-1}^1 \frac{rf(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = r \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = r(f(x), g(x))_T, \\ (g(x), f(x))_T &= \int_{-1}^1 \frac{g(x)f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = (f(x), g(x))_T \end{aligned}$$

f が常に値が 0 である定数値関数でないならば, f が多項式関数であることから, $f(x) = 0$ を満たす $x \in \mathbf{R}$ は有限個である. 従って $f(\alpha) \neq 0$ となる $\alpha \in [-1, 1]$ が存在し, f の連続性から $r > 0$ で, $x \in (\alpha - r, \alpha + r) \cap [-1, 1]$ ならば $|f(x) - f(\alpha)| < \frac{f(\alpha)}{2}$ を満たすものがある. そこで, $\alpha - r < a < b < \alpha + r$ を満たす $a, b \in (-1, 1)$ を選べば, $x \in [a, b]$ ならば $\frac{f(\alpha)}{2} < f(x) < \frac{3f(\alpha)}{2}$ となるため, $f(\alpha) > 0$ ならば $f(x)^2 > \frac{f(\alpha)^2}{4}$ であり, $f(\alpha) < 0$ ならば $f(x)^2 > \frac{9f(\alpha)^2}{4} > \frac{f(\alpha)^2}{4}$ である. 故に $x \in [a, b]$ ならば $f(x)^2 > \frac{f(\alpha)^2}{4}$ であり, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geq 1$ であることに注意すれば, 次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} (f(x), f(x))_T &= \int_{-1}^1 \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^a \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_a^b \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_b^1 \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &\geq \int_a^b \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \geq \int_a^b \frac{f(\alpha)^2}{4} dx = \frac{f(\alpha)^2(b-a)}{4} > 0 \end{aligned}$$

(6) $f(x), g(x), h(x) \in P(\mathbf{R})$, $r \in \mathbf{R}$ に対し, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}(f(x) + g(x), h(x))_U &= \int_{-1}^1 (f(x) + g(x))h(x)\sqrt{1-x^2} dx = \int_{-1}^1 f(x)h(x)\sqrt{1-x^2} dx + \int_{-1}^1 g(x)h(x)\sqrt{1-x^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x)h(x)\sqrt{1-x^2} dx + \int_{-1}^1 g(x)h(x)\sqrt{1-x^2} dx = (f(x), h(x))_U + (g(x), h(x))_U, \\ (rf(x), g(x))_U &= \int_{-1}^1 rf(x)g(x)\sqrt{1-x^2} dx = r \int_{-1}^1 f(x)g(x)\sqrt{1-x^2} dx = r(f(x), g(x))_U, \\ (g(x), f(x))_U &= \int_{-1}^1 g(x)f(x)\sqrt{1-x^2} dx = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\sqrt{1-x^2} dx = (f(x), g(x))_U\end{aligned}$$

f が常に値が 0 である定数値関数でないならば, f が多項式関数であることから, $f(x) = 0$ を満たす $x \in \mathbf{R}$ は有限個である. 従って $f(\alpha) \neq 0$ となる $\alpha \in [-1, 1]$ が存在し, f の連続性から $r > 0$ で, $x \in (\alpha - r, \alpha + r) \cap [-1, 1]$ ならば $|f(x) - f(\alpha)| < \frac{f(\alpha)}{2}$ を満たすものがある. そこで, $\alpha - r < a < b < \alpha + r$ を満たす $a, b \in (-1, 1)$ を選べば, $x \in [a, b]$ ならば $\frac{f(\alpha)}{2} < f(x) < \frac{3f(\alpha)}{2}$ となるため, $f(\alpha) > 0$ ならば $f(x)^2 > \frac{f(\alpha)^2}{4}$ であり, $f(\alpha) < 0$ ならば $f(x)^2 > \frac{9f(\alpha)^2}{4} > \frac{f(\alpha)^2}{4}$ である. 故に $x \in [a, b]$ ならば $f(x)^2 > \frac{f(\alpha)^2}{4}$ であり, $c = \max\{|a|, |b|\}$ とおけば $\sqrt{1-x^2} \geq \sqrt{1-c^2} > 0$ であることに注意すれば, 次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}(f(x), f(x))_U &= \int_{-1}^1 f(x)^2 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-1}^a f(x)^2 \sqrt{1-x^2} dx + \int_a^b f(x)^2 \sqrt{1-x^2} dx + \int_b^1 f(x)^2 \sqrt{1-x^2} dx \\ &\geq \int_a^b f(x)^2 \sqrt{1-x^2} dx \geq \int_a^b \frac{f(\alpha)^2}{4} \sqrt{1-c^2} dx = \frac{f(\alpha)^2(b-a)\sqrt{1-c^2}}{4} > 0\end{aligned}$$

(7) $x = \cos \theta$ と変数変換を行い, (3) の結果を用いると次の等式が得られる.

$$(T_m(x), T_n(x))_T = \int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)) dx$$

従って $m \neq n$ ならば $(T_m(x), T_n(x))_T = 0$ であり, $(T_n(x), T_n(x))_T = \frac{\pi}{2}$ である. 同様に次の等式が得られる.

$$\begin{aligned}(U_m(x), U_n(x))_U &= \int_{-1}^1 U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2} dx = \int_0^\pi \sin mx \sin nx dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}\end{aligned}$$

(8) 上の結果から $\frac{1}{\tau_0}T_0(x), \frac{1}{\tau_1}T_1(x), \dots, \frac{1}{\tau_n}T_n(x)$ は $P_n(\mathbf{R})$ の正規直交系だから 1 次独立である. $\dim P_n(\mathbf{R}) = n+1$ だから $\frac{1}{\tau_0}T_0(x), \frac{1}{\tau_1}T_1(x), \dots, \frac{1}{\tau_n}T_n(x)$ は $P_n(\mathbf{R})$ の正規直交基底になる. そこで, $B_1 = [1, x, \dots, x^n]$, $B_2 = \left[\frac{1}{\tau_0}T_0(x), \frac{1}{\tau_1}T_1(x), \dots, \frac{1}{\tau_n}T_n(x) \right]$ とおく. (1) より $T_m(x) = \sum_{k=0}^m c_k x^k$ とおけば c_m は正の実数 2^{m-1} だから, B_1 から B_2 への基底の変換行列は, 対角成分がすべて正の実数である上半三角行列である. B_1, B_2 に対してシュミットの直交化を行って得られる V の正規直交基底をそれぞれ B'_1, B'_2 とすれば, B_2 はすでに V の正規直交基底だから $B'_2 = B_2$ である. 従って問題 8 の (2) から $B'_1 = B_2$ である.

(9) (7) より $\frac{1}{v_1}U_1(x), \frac{1}{v_2}U_2(x), \dots, \frac{1}{v_{n+1}}U_{n+1}(x)$ は $P_n(\mathbf{R})$ の正規直交系だから 1 次独立である. $\dim P_n(\mathbf{R}) = n+1$ だから $\frac{1}{v_1}U_1(x), \frac{1}{v_2}U_2(x), \dots, \frac{1}{v_{n+1}}U_{n+1}(x)$ は $P_n(\mathbf{R})$ の正規直交基底になる. そこで, $B_1 = [1, x, \dots, x^n]$, $B_2 = \left[\frac{1}{v_1}U_1(x), \frac{1}{v_2}U_2(x), \dots, \frac{1}{v_{n+1}}U_{n+1}(x) \right]$ とおく. (1) より $U_m(x) = \sum_{k=1}^m c_k x^{k-1}$ とおけば c_m は正の実数 2^{m-1} だから, B_1 から B_2 への基底の変換行列は, 対角成分がすべて正の実数である上半三角行列である. B_1, B_2 に対して

シュミットの直交化を行って得られる V の正規直交基底をそれぞれ B'_1, B'_2 とすれば, B_2 はすでに V の正規直交基底だから $B'_2 = B_2$ である. 従って問題 8 の (2) から $B'_1 = B_2$ である.

13. まず $\alpha, \beta, \gamma \in [-1, 1]$ に対し, $\cos^{-1} \alpha \leq \cos^{-1} \beta + \cos^{-1} \gamma$ が成り立つためには $\alpha \geq \beta\gamma - \sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}$ または $\beta + \gamma < 0$ が成り立つことが必要十分である. 実際, $\cos^{-1} \beta + \cos^{-1} \gamma > \pi$ は $\pi - \cos^{-1} \beta < \cos^{-1} \gamma$ と同値で, これはさらに $-\beta > \gamma$, すなわち $\beta + \gamma < 0$ と同値である. $\cos^{-1} \beta + \cos^{-1} \gamma \leq \pi$ の場合, $\beta + \gamma \geq 0$ であり, $\cos^{-1} \alpha \leq \cos^{-1} \beta + \cos^{-1} \gamma$ は

$$\alpha \geq \cos(\cos^{-1} \beta + \cos^{-1} \gamma) = \beta\gamma - \sin(\cos^{-1} \beta) \sin(\cos^{-1} \gamma) = \beta\gamma - \sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}$$

と同値である. また, $\cos^{-1} \alpha = \cos^{-1} \beta + \cos^{-1} \gamma$ が成り立つことは $\cos^{-1} \beta + \cos^{-1} \gamma \leq \pi$ すなわち $\beta + \gamma \geq 0$ かつ $\alpha = \beta\gamma - \sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}$ が成り立つことが必要十分である.

$\mathbf{y} = \mathbf{z}$ ならば $(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 1$ だから $\cos^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0$ となり, $\cos^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \cos^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \cos^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ が成り立つ. $\mathbf{y} = -\mathbf{z}$ ならば $(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = -1$ だから $\cos^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \pi$ であり, $|x| \leq 1$ ならば $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$ が成り立つため, $\cos^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \cos^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = 2\pi - \cos^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \geq \cos^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ が成り立つ. このとき等号が成立するのは $\cos^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \pi$ すなわち $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = -1$ の場合で, $\mathbf{x} = -\mathbf{z} = \mathbf{y}$ が成り立つ場合である. 以後, $\mathbf{y} \neq \pm \mathbf{z}$ と仮定する.

\mathbf{y}, \mathbf{z} がともに単位ベクトルであることと, シュワルツの不等式の等号が成立する条件から, $|(\mathbf{y}, \mathbf{z})| = 1$ となるのは $\mathbf{y} = \pm \mathbf{z}$ の場合に限る. 従って $\mathbf{y} \neq \pm \mathbf{z}$ ならば \mathbf{y}, \mathbf{z} は 1 次独立で, $\varphi = \cos^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ とおけば $0 < \varphi < \pi$ である. $\mathbf{u} = \frac{1}{\sin \varphi} \mathbf{z} - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \mathbf{y}$ とおくと, \mathbf{u}, \mathbf{y} は正規直交系で, $\mathbf{z} = \cos \varphi \mathbf{y} + \sin \varphi \mathbf{u}$ が成り立つ.

$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ が 1 次独立ならば $\mathbf{x} \neq (\mathbf{x}, \mathbf{u})\mathbf{u} + (\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{y}$ であり, $\mathbf{v}' = \mathbf{x} - (\mathbf{x}, \mathbf{u})\mathbf{u} - (\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{y}$, $\mathbf{v} = \frac{1}{\|\mathbf{v}'\|} \mathbf{v}'$ とおくと, $\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ は正規直交系である. このとき $\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{y} + (\mathbf{x}, \mathbf{u})\mathbf{u} + \|\mathbf{v}'\|\mathbf{v}$ であり, $\|\mathbf{x}\| = 1$ だから

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sin \theta \cos \psi, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sin \theta \sin \psi, \quad \|\mathbf{v}'\| = \cos \theta$$

を満たす $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \psi < 2\pi$ が存在する. 従って $\mathbf{x} = \sin \theta \cos \psi \mathbf{y} + \sin \theta \sin \psi \mathbf{u} + \cos \theta \mathbf{v}$ だから

$$(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = (\sin \theta \cos \psi \mathbf{y} + \sin \theta \sin \psi \mathbf{u} + \cos \theta \mathbf{v}, \cos \varphi \mathbf{y} + \sin \varphi \mathbf{u}) = \sin \theta (\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi) \cdots (i)$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\sin \theta \cos \psi \mathbf{y} + \sin \theta \sin \psi \mathbf{u} + \cos \theta \mathbf{v}, \mathbf{y}) = \sin \theta \cos \psi \cdots (ii)$$

が成り立つ. $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ が 1 次従属ならば $\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{u})\mathbf{u} + (\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{y}$ であり, $\|\mathbf{x}\| = 1$ だから, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \cos \psi$, $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sin \psi$ を満たす $0 \leq \psi < 2\pi$ が存在する. このとき $\mathbf{x} = \cos \psi \mathbf{y} + \sin \psi \mathbf{u}$ だから $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \cos \psi$ が成り立ち, これらはそれぞれ上の (i), (ii) において $\theta = \frac{\pi}{2}$ として得られる等式に他ならない. さらに $(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \cos \varphi$ だから

$$\begin{aligned} & (\mathbf{x}, \mathbf{z}) - (\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{y}, \mathbf{z}) + \sqrt{1 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2} \sqrt{1 - (\mathbf{y}, \mathbf{z})^2} \\ &= \sin \theta (\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi) - \sin \theta \cos \psi \cos \varphi + \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi} \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} \\ &= \sin \varphi \left(\sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi} + \sin \theta \sin \psi \right) = \frac{\sin \varphi \cos^2 \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi} - \sin \theta \sin \psi} \end{aligned}$$

が得られる. $0 \leq \psi \leq \pi$ の場合は $\sin \varphi \left(\sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi} + \sin \theta \sin \psi \right) \geq 0$ であり, $\pi < \psi < 2\pi$ の場合は $\frac{\sin \varphi \cos^2 \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi} - \sin \theta \sin \psi} \geq 0$ である. 従って上の等式から

$$(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \geq (\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - \sqrt{1 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2} \sqrt{1 - (\mathbf{y}, \mathbf{z})^2}$$

が得られる. 故に $\alpha = (\mathbf{x}, \mathbf{z})$, $\beta = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\gamma = (\mathbf{y}, \mathbf{z})$ とおけば $\cos^{-1} \alpha \leq \cos^{-1} \beta + \cos^{-1} \gamma$ が成り立つ. この等号が成立するのは初めに示した結果から, $(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y}) \geq 0$ かつ $\sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi} = -\sin \theta \sin \psi$ の場合であ

る。後者の条件は $\theta = \frac{\pi}{2}$ かつ $\pi \leq \psi < 2\pi$ と同値で、このとき $\mathbf{x} = \cos \psi \mathbf{y} + \sin \psi \mathbf{u}$ が成り立つ。この等式と $z = \cos \varphi \mathbf{y} + \sin \varphi \mathbf{u}$ を $(\mathbf{x} + z, \mathbf{y}) \geq 0$ に代入すれば $\cos \psi + \cos \varphi \geq 0$ が得られる。この不等式は $\cos \varphi \geq \cos(\psi - \pi)$ と同値で、 $\varphi, \psi - \pi \in [0, \pi]$ だから、 $\varphi \leq \psi - \pi$ と同値であることがわかる。さらに $\mathbf{u} = \frac{1}{\sin \varphi} z - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \mathbf{y}$ より $\mathbf{x} = \frac{\sin \psi}{\sin \varphi} z + \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin \varphi} \mathbf{y}$ が成り立つため、 $\varphi = \psi - \pi$ ならば $\mathbf{x} = -z$ であり、 $\varphi < \psi - \pi$ ならば $\mathbf{y} = p\mathbf{x} + qz$ ($p, q > 0$) の形になる、逆に $\mathbf{y} = p\mathbf{x} + qz$ ($p, q > 0$) の形ならば $\mathbf{x}, \mathbf{y}, z$ は 1 次従属で、 $\mathbf{x} = \cos \psi \mathbf{y} + \sin \psi \mathbf{u} = \frac{\sin \psi}{\sin \varphi} z + \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin \varphi} \mathbf{y}$ の形に表され、 z の係数が負になることから $\pi < \psi < 2\pi$ である。従って上の議論から $(\mathbf{x}, z) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{y}, z) + \sqrt{1 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2} \sqrt{1 - (\mathbf{y}, z)^2}$ が成り立つ。また $\mathbf{y} = p\mathbf{x} + qz = \frac{p \sin \psi + q \sin \varphi}{\sin \varphi} z + \frac{p \sin(\varphi - \psi)}{\sin \varphi} \mathbf{y}$ で、 \mathbf{y}, z は 1 次独立だから $p \sin(\varphi - \psi) = \sin \varphi > 0$ が得られるため、 $p > 0$ より $-2\pi < \varphi - \psi < -\pi$ すなわち $\varphi < \psi - \pi$ が成り立つ。故に $(\mathbf{x} + z, \mathbf{y}) = \cos \psi + \cos \varphi > 0$ となり、 $\cos^{-1}(\mathbf{x}, z) = \cos^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \cos^{-1}(\mathbf{y}, z)$ が成り立つ。以上の議論をまとめると、 $\cos^{-1}(\mathbf{x}, z) \leq \cos^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \cos^{-1}(\mathbf{y}, z)$ が成り立つための条件は $\mathbf{y} = p\mathbf{x} + qz$ ($p, q \geq 0$) または $z = -\mathbf{x}$ である。

線形数学Ⅱ 演習問題 第18回 直交補空間

1. 以下で与えられるベクトル空間 V の部分空間 W とその直交補空間 W^\perp の正規直交基底をそれぞれ求めよ. なお, 数ベクトル空間は標準内積をもつ計量ベクトル空間とする. ただし, (1) と (2) の a, b, c は実数の定数で $(a, b) \neq (0, 0)$ とする.

$$(1) V = \mathbf{R}^3, W = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(2) V = \mathbf{R}^3, W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid ax + by + cz = 0 \right\}$$

$$(3) V = \mathbf{K}^4, W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x + y - z - 2w = 0 \\ -x + 2y + z - w = 0 \end{array} \right\}$$

$$(4) V = \mathbf{K}^4, W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x + 2y + 2z - 3w = 0 \\ -4x + 2y - 3z + 2w = 0 \end{array} \right\}$$

$$(5) V = \mathbf{K}^4, W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x + y + 2z + 3w = 0 \\ 3y + 3z - 2w = 0 \end{array} \right\}$$

$$(6) V = \mathbf{K}^4, W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x + 2y + 3z + 2w = 0 \\ x + 3y + 4z + 2w = 0 \end{array} \right\}$$

$$(7) V = \mathbf{K}^4, W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(8) V = \mathbf{K}^4, W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

2. \mathbf{K}^n のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ が以下で与えられるとき, \mathbf{K}^n の部分空間 V, W を $V = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle, W = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$ で定める. $V^\perp \cap W^\perp$ の正規直交基底を求め, その基底を含むような V^\perp, W^\perp および $V^\perp + W^\perp$ の正規直交基底を一組ずつ求めよ.

$$(1) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$(4) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

3. $a, b, c, p, q, r, \alpha, \beta$ を実数の定数とする. 以下 (1) から (3) で与えられる \mathbf{R}^3 の部分空間 W に対し, \mathbf{R}^3 の 1 次変換 f は W の任意のベクトル \mathbf{x} を $\alpha\mathbf{x}$ に写し, W^\perp の任意のベクトル \mathbf{y} を $\beta\mathbf{y}$ に写すとする. このとき, \mathbf{R}^3 の正規直交基底 $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ で, $1 \leq i \leq \dim W$ に対して $\mathbf{v}_i \in W$ であるものを 1 組求め, \mathbf{R}^3 の標準基底 $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ に関する f の表現行列を求めよ.

$$(1) W = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle \quad (2) W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid ax + by + cz = 0 \right\} \quad (3) W = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \right\rangle. \text{ただし } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \text{ は 1 次独立.}$$

4. $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$ に対して, \mathbf{R}^3 の 1 次変換 $f_{\mathbf{a}}: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を $f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ で定める.

(1) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ のとき, \mathbf{R}^3 の標準基底 $[e_1, e_2, e_3]$ に関する $f_{\mathbf{a}}$ の表現行列を求めよ.

(2) $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ のとき, $\text{Ker } f_{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a} \rangle$, $\text{Im } f_{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a} \rangle^\perp$ であることを示せ.

(3) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ かつ \mathbf{a} と \mathbf{b} が垂直ならば $\text{Im}(f_{\mathbf{b}} \circ f_{\mathbf{a}}) = \langle \mathbf{a} \rangle$ であることを示せ.

(4) $\text{rank}(f_{\mathbf{b}} \circ f_{\mathbf{a}}) = 1$ であるためには, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ かつ \mathbf{a} と \mathbf{b} が垂直であることが必要十分であることを示せ.

5. (1) 実数を成分とする n 次正方行列 A で表される \mathbf{R}^n の 1 次変換 T_A が, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して $(T_A(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0$ を満たすためには, ${}^t A = -A$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

(2) \mathbf{R}^3 の 1 次変換 f が, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ に対して $(f(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0$ を満たすためには, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ に対して $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ が成り立つような $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$ が存在することが必要十分であることを示せ.

6. W を \mathbf{K}^n の部分空間とし, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$ を W の正規直交基底とする.

(1) \mathbf{K}^n から W への正射影 pr_W を表す行列を求めよ. また, W^\perp への正射影 pr_{W^\perp} を表す行列を求めよ.

(2) W に関する対称移動を表す行列を求めよ.

7. (発展問題) $V = \{A \in M_2(\mathbf{C}) \mid A^* = -A\}$ とおき, V を行列の加法と実数倍により \mathbf{R} 上のベクトル空間とみなして, V における内積を $(A, B) = \frac{1}{2} \text{tr}(AB^*)$ によって定義する (第 17 回の問題 6 の (1) 参照). また, V の部分空間 $W = \{A \in V \mid \text{tr } A = 0\}$ で定める.

(1) $B = \left[\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right]$, $B' = \left[\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right]$ は, それぞれ V , W の正規直交基底であることを示せ.

(2) 2 次正方行列 A に対し, $X \in V$ ならば $AXA^* \in V$ であることを示せ. また A が 2 次のユニタリー行列であり, $X \in W$ ならば $AXA^* \in W$ であることを示せ.

(3) 2 次正方行列 A に対して V の 1 次変換 f_A を $f_A(X) = AXA^*$ で定めるとき, V の基底 B に関する f_A の表現行列を求めよ. また, A を 2 次のユニタリー行列として, W の 1 次変換 g_A を $g_A(X) = AXA^*$ で定めるとき, W の基底 B' に関する g_A の表現行列を求めよ.

(4) f_A の行列式の値を求めよ. また, A が 2 次のユニタリー行列のとき, g_A の行列式の値を求めよ.

(5) A がユニタリー行列ならば任意の $X, Y \in V$ に対して $(f_A(X), f_A(Y)) = (X, Y)$ が成り立つことを示せ.

8. (発展問題) (1) \mathbf{K} の要素を成分にもつ n 正則行列 A に対し, $A = UT$ を満たすユニタリー行列 U と対角成分がすべて正の実数である上半三角行列 T が存在することを示せ.

(2) 上半三角行列であるユニタリー行列は, 対角成分の絶対値がすべて 1 である対角行列であることを示せ.

(3) U と U' がともにユニタリー行列で, T と T' がともに対角成分がすべて正の実数である上半三角行列であり, $UT = U'T'$ が成り立てば $U = U'$ かつ $T = T'$ であることを示せ.

9. (発展問題) V を \mathbf{K} 上の計量ベクトル空間とし, V の有限個のベクトルの列 $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$, $T = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$ に対して $(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j)$ を (i, j) 成分とする $m \times n$ 行列を $G(S, T)$ で表す.

(1) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_l$ を $\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^m p_{ij} \mathbf{v}_i$, $\mathbf{z}_j = \sum_{i=1}^n q_{ij} \mathbf{w}_i$ ($p_{ij}, q_{ij} \in \mathbf{K}$) で与えられる V のベクトルとする. $S' = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$, $T' = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_l)$ とおき, p_{ij} を (i, j) 成分とする $m \times k$ 行列を P とし, q_{ij} を (i, j) 成分とする $n \times l$ 行列を Q とするとき, $G(S', T')$ を P, Q と $G(S, T)$ を用いて表し, $\text{rank } P = m$ かつ $\text{rank } Q = n$ ならば $\text{rank } G(S, T) = \text{rank } G(S', T')$ であることを示せ.

(2) $G(T, S) = G(S, T)^*$ を示し, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ が V の正規直交基底のとき $U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$ とおけば, $G(S, T) = G(S, U)G(U, T)$ が成り立つことを示せ.

(3) 不等式 $\min\{\dim\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \rangle, \dim\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n \rangle\} \geq \text{rank } G(S, T)$ が成り立つことを示せ.

(4) 等式 $\dim\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \rangle = \text{rank } G(S, S)$ を示せ. とくに, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ が 1 次独立であるためには, $G(S, S)$ が正則行列であることが必要十分である.

(5) 不等式 $\dim(\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \rangle \cap \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n \rangle) \leq \text{rank } G(S, T)$ が成り立つことを示せ.

10. (発展問題) 実数 $a < b$ に対し, $P_n(\mathbf{R})$ の内積を $(f(x), g(x))_{a,b} = \int_a^b f(x)g(x) dx$ で定めるとき, $1, x, \dots, x^{n-1}$ で生成される $P_n(\mathbf{R})$ の部分空間の直交補空間の基底で長さが 1 のものを求めよ.

第 18 回の演習問題の解答

1. (1) $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ は W の正規直交基底である. $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ は単位ベクトル $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に

垂直な単位ベクトルだから, 外積 $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} -ac \\ -bc \\ a^2+b^2 \end{pmatrix}$ は

$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ と $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ の両方に垂直な単位ベクトルである.

従って $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} -ac \\ -bc \\ a^2+b^2 \end{pmatrix}$ は W^\perp の正規直交基底である.

(2) W は $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に垂直なベクトル全体からなるため, $\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle$ の直交補空間である. 従って, (1) の結果より

$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} -ac \\ -bc \\ a^2+b^2 \end{pmatrix}$ は W の正規直交基底である. W の直交補空間は $\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle$ だ

から $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ はその正規直交基底である.

(3) 与えられた部分空間 W は第 4 回の演習問題 1 の (1) の W と同じものだから, W は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を基底にもつ.

前者のベクトルを \mathbf{v}_1 , 後者のベクトルを \mathbf{v}_2 とおけば, $\mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ より, W の正

規直交基底 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が得られる. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in W^\perp$ であるためには $(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{x}, \mathbf{v}_2) = 0$ であること

が必要十分だから, W^\perp は連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+z=0 \\ x+y+w=0 \end{cases}$ の解空間である. この方程式の解は, s, t を任意のスカラーとして

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ -s \\ -s-t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ は W^\perp の基底である. 前

者のベクトルを \mathbf{w}_1 , 後者のベクトルを \mathbf{w}_2 とおけば, $\mathbf{w}_2 - \frac{(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ より, W^\perp

の正規直交基底 $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ が得られる.

(4) 与えられた部分空間 W は第 4 回の演習問題 1 の (1) の W と同じものだから, W は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を基底に

もつ. 前者のベクトルを \mathbf{v}_1 , 後者のベクトルを \mathbf{v}_2 とおけば, $\mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ より,

W の正規直交基底 $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ が得られる. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in W^\perp$ であるためには $(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{x}, \mathbf{v}_2) = 0$ で

あることが必要十分だから, W^\perp は連立 1 次方程式 $\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ -x + 2z + w = 0 \end{cases}$ の解空間である. この方程式の解は, s, t を

任意のスカラーとして $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -2s + 2t \\ t \\ s - 2t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ で与えられるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は W^\perp の基

底である. 前者のベクトルを \mathbf{w}_1 , 後者のベクトルを \mathbf{w}_2 とおけば, $\mathbf{w}_2 - \frac{(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

より, W^\perp の正規直交基底 $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が得られる.

(5) 与えられた部分空間 W は第 4 回の演習問題 1 の (2) の W と同じものだから, W は $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ を基底に

もつ. 前者のベクトルを \mathbf{v}_1 , 後者のベクトルを \mathbf{v}_2 とおけば, $\mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ より,

W の正規直交基底 $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{107}} \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ が得られる. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in W^\perp$ であるためには $(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{x}, \mathbf{v}_2) = 0$

であることが必要十分だから, W^\perp は連立 1 次方程式 $\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -11x + 2y + 3w = 0 \end{cases}$ の解空間である. この方程式の

解は, s, t を任意のスカラーとして $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s \\ 3t \\ 3s + 3t \\ 11s - 2t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (t - s) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ で

与えられるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ は W^\perp の基底である. 前者のベクトルを \mathbf{w}_1 , 後者のベクトルを \mathbf{w}_2 とおけば,

$\mathbf{w}_2 - \frac{(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 14 \\ 13 \\ -13 \end{pmatrix}$ より, W^\perp の正規直交基底 $\frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{562}} \begin{pmatrix} -1 \\ 14 \\ 13 \\ -13 \end{pmatrix}$ が得ら

れる.

(6) 与えられた部分空間 W は第 4 回の演習問題 1 の (2) の W と同じものだから, W は $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を基底に

もつ. 前者のベクトルを \mathbf{v}_1 , 後者のベクトルを \mathbf{v}_2 とおけば, $\mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ より,

W の正規直交基底 $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{33}} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ が得られる. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in W^\perp$ であるためには $(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{x}, \mathbf{v}_2) = 0$ で

あることが必要十分だから, W^\perp は連立 1 次方程式 $\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -2x + w = 0 \end{cases}$ の解空間である. この方程式の解は, s, t を任

意のスカラーとして $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ s + t \\ 2s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられるため, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は W^\perp の基底である. 前

者のベクトルを \mathbf{w}_1 , 後者のベクトルを \mathbf{w}_2 とおけば, $\mathbf{w}_2 - \frac{(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ より, W^\perp の

正規直交基底 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ が得られる.

(7) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおけば, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0, \|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = 2$ だから $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は W の正規直

交基底である. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in W^\perp$ であるためには $(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{x}, \mathbf{v}_2) = 0$ であることが必要十分だから, W^\perp は連立

1 次方程式 $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x - y + z - w = 0 \end{cases}$ の解空間である. $s = \frac{x+y}{2}, t = \frac{x-y}{2}$ とおけば, $x = s+t, y = s-t$ であり,

$\begin{cases} z + w = -2s \\ z - w = -2t \end{cases}$ だから $z = -s+t, w = -s-t$ である. 従って上の連立 1 次方程式の解は, s, t を任意のスカラールと

して $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+t \\ s-t \\ -s-t \\ -s+t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は W^\perp の基底である. 前者のベ

クトルを \mathbf{w}_1 , 後者のベクトルを \mathbf{w}_2 とおけば, $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = 0, \|\mathbf{w}_1\| = \|\mathbf{w}_2\| = 2$ だから $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は W^\perp

の正規直交基底である.

(8) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $\mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ より, W の正規直交基底

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が得られる. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in W^\perp$ であるためには $(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{x}, \mathbf{v}_2) = 0$ であることが必要十分

だから, W^\perp は連立 1 次方程式 $\begin{cases} x - z = 0 \\ x + 2y + w = 0 \end{cases}$ の解空間である. この方程式の解は, s, t を任意のスカラールとして

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ s \\ -s-2y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ で与えられるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ は W^\perp の基底である. 前者のベクト

ルを w_1 , 後者のベクトルを w_2 とおけば, $w_2 - \frac{(w_2, w_1)}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ より, W^\perp の正規直

交基底 $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{33}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ が得られる.

2. $A = (a_1 \ a_2), B = (b_1 \ b_2)$ とおくと, $x \in K^n$ に対し, 次の等式が成り立つ

$$A^*x = \begin{pmatrix} {}^t\bar{a}_1x \\ {}^t\bar{a}_2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\bar{x}\bar{a}_1 \\ {}^t\bar{x}\bar{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, a_1) \\ (x, a_2) \end{pmatrix}, \quad B^*x = \begin{pmatrix} {}^t\bar{b}_1x \\ {}^t\bar{b}_2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\bar{x}\bar{b}_1 \\ {}^t\bar{x}\bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, b_1) \\ (x, b_2) \end{pmatrix}$$

従って $x \in V^\perp$ は $A^*x = \mathbf{0}$ と同値, $x \in W^\perp$ は $B^*x = \mathbf{0}$ と同値であり, $x \in V^\perp \cap W^\perp$ は $\begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix} x = \mathbf{0}$ と同値である.

$$(1) A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, B^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ だから } \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4} \text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, } \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix} x = \mathbf{0} \text{ は } \begin{cases} x + 2w = 0 \\ y + 3w = 0 \\ -z + 2w = 0 \end{cases} \text{ と同値である. この方}$$

程式の解は $x = t \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($t \in K$ は任意) だから, $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $V^\perp \cap W^\perp$ の基底である. よって $u = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とお

けば, u は $V^\perp \cap W^\perp$ の正規直交基底である. $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -10 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ より, $A^*x = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} x - 4y - 10w = 0 \\ 2y + z + 4w = 0 \end{cases}$ と同値である. この方程式の解は

$x = \begin{pmatrix} 4s + 10t \\ s \\ -2s - 4t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($s, t \in K$ は任意) で与えられるため, $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ は V^\perp の基底になり,

$\dim V^\perp = 2$ である. また $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4s + 10t \\ s \\ -2s - 4t \\ t \end{pmatrix}$ と \mathbf{u} が直交するためには, $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{-1}{\sqrt{2}}(5s + 9t)$ より, $t = -\frac{5s}{9}$ である

ことが必要十分である. このとき, $\mathbf{x} = -\frac{s}{9} \begin{pmatrix} 14 \\ -9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ だから, $\frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 14 \\ -9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ は V^\perp の正規直交基底である.

$$B^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ より, $B^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} -x - \frac{3}{5}z - \frac{4}{5}w = 0 \\ 5y + 4z + 7w = 0 \end{cases}$ と同値である. この方程式の解は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3s - 4t \\ -4s - 7t \\ 5s \\ 5t \end{pmatrix} =$

$s \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ ($s, t \in \mathbf{K}$ は任意) で与えられるため, $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ は W^\perp の基底になり, $\dim W^\perp = 2$ であ

る. また $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3s - 4t \\ -4s - 7t \\ 5s \\ 5t \end{pmatrix}$ と \mathbf{u} が直交するためには, $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(28s + 34t)$ より, $t = -\frac{14s}{17}$ であることが必要十

分である. このとき, $\mathbf{x} = \frac{5s}{17} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 17 \\ -14 \end{pmatrix}$ だから, $\frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{58}} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 17 \\ -14 \end{pmatrix}$ は W^\perp の正規直交基底である. 以上から,

$\dim(V^\perp + W^\perp) = \dim V^\perp + \dim W^\perp - \dim(V^\perp \cap W^\perp) = 3$ であり, $\frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 14 \\ -9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{58}} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 17 \\ -14 \end{pmatrix}$

は $V^\perp + W^\perp$ を生成するため, これらのベクトルは $V^\perp + W^\perp$ の基底になる. 2つ目のベクトルを \mathbf{v}' , 3つ目のベクトル

を \mathbf{w}' とおけば, $\|\mathbf{v}'\| = 1, (\mathbf{w}', \mathbf{u}) = 0, (\mathbf{w}', \mathbf{v}') = -\frac{8}{\sqrt{493}}$ より $\mathbf{w}' - \frac{(\mathbf{w}', \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u} - \frac{(\mathbf{w}', \mathbf{v}')}{\|\mathbf{v}'\|^2}\mathbf{v}' = \frac{1}{17\sqrt{58}} \begin{pmatrix} 43 \\ 10 \\ 91 \\ -66 \end{pmatrix}$ と

なるため, $\frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 14 \\ -9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14586}} \begin{pmatrix} 43 \\ 10 \\ 91 \\ -66 \end{pmatrix}$ は $V^\perp + W^\perp$ の正規直交基底である.

$$(2) A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, B^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ だから } \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(4,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ より, } \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ は}$$

$$\begin{cases} x - w = 0 \\ -7z = 0 \\ y + w = 0 \end{cases} \text{ と同値である. この方程式の解は } \mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (} t \in \mathbf{K} \text{ は任意) だから, } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ は } V^\perp \cap W^\perp \text{ の基底}$$

$$\text{である. よって } \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ とおけば, } \mathbf{u} \text{ は } V^\perp \cap W^\perp \text{ の正規直交基底である. } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \text{ より, } A^* \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ は } \begin{cases} x - \frac{1}{2}z - w = 0 \\ 2y + 3z + 2w = 0 \end{cases}$$

$$\text{と同値である. この方程式の解は } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} s+t \\ -3s-t \\ 2s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (} s, t \in \mathbf{K} \text{ は任意) で与えられるため,$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ は } V^\perp \text{ の基底になり, } \dim V^\perp = 2 \text{ である. また } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} s+t \\ -3s-t \\ 2s \\ t \end{pmatrix} \text{ と } \mathbf{u} \text{ が直交するためには, } (\mathbf{x}, \mathbf{u}) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(4s+3t) \text{ より, } t = -\frac{4s}{3} \text{ であることが必要十分である. このとき, } \mathbf{x} = -\frac{s}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ だから, } \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{78}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{は } V^\perp \text{ の正規直交基底である. } B^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ より, } B^* \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ は } \begin{cases} x - 3z - w = 0 \\ y + 2z + w = 0 \end{cases} \text{ と同値である. この方程式の解は } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3s+t \\ -2s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} =$$

$$s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (} s, t \in \mathbf{K} \text{ は任意) で与えられるため, } \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ は } W^\perp \text{ の基底になり, } \dim W^\perp = 2 \text{ で}$$

ある. また $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3s+t \\ -2s-t \\ s \\ t \end{pmatrix}$ と \mathbf{u} が直交するためには, $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(5s+3t)$ より, $t = -\frac{5s}{3}$ であることが必要

十分である. このとき, $\mathbf{x} = \frac{s}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ だから, $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{51}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ は W^\perp の正規直交基底である. 以上から,

$\dim(V^\perp + W^\perp) = \dim V^\perp + \dim W^\perp - \dim(V^\perp \cap W^\perp) = 3$ であり, $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{78}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{51}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ は

$V^\perp + W^\perp$ を生成するため, これらのベクトルは $V^\perp + W^\perp$ の基底になる. 2つ目のベクトルを \mathbf{v}' , 3つ目のベクトルを \mathbf{w}' とおけば, $\|\mathbf{v}'\| = 1, (\mathbf{w}', \mathbf{u}) = 0, (\mathbf{w}', \mathbf{v}') = -\frac{13}{\sqrt{442}}$ より $\mathbf{w}' - \frac{(\mathbf{w}', \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} - \frac{(\mathbf{w}', \mathbf{v}')}{\|\mathbf{v}'\|^2} \mathbf{v}' = \frac{3}{2\sqrt{51}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ となる

ため, $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{78}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ は $V^\perp + W^\perp$ の正規直交基底である.

$$(3) A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \text{ だから } \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(4,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & -8 & -20 \\ 0 & -1 & -3 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ より, } \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\text{は } \begin{cases} x - w = 0 \\ 6z + 15w = 0 \\ -y - \frac{1}{2}w = 0 \end{cases} \text{ と同値である. この方程式の解は } \mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ (} t \in \mathbf{K} \text{ は任意) だから, } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ は } V^\perp \cap W^\perp \text{ の}$$

基底である. よって $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ とおけば, \mathbf{u} は $V^\perp \cap W^\perp$ の正規直交基底である. $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第4列の掃き出し}]{(2,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ より, } A^* \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ は } \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ -2y - w = 0 \end{cases} \text{ と}$$

同値である. この方程式の解は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3s-t \\ s \\ t \\ -2s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($s, t \in \mathbf{K}$ は任意) で与えられるため,

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は V^\perp の基底になり, $\dim V^\perp = 2$ である. また $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3s-t \\ s \\ t \\ -2s \end{pmatrix}$ と \mathbf{u} が直交するためには, $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) =$

$\frac{1}{\sqrt{34}}(s-7t)$ より, $s = 7t$ であることが必要十分である. このとき, $\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 20 \\ 7 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix}$ だから, $\frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{646}} \begin{pmatrix} 20 \\ 7 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix}$

は V^\perp の正規直交基底である. $B^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ より, $B^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ -5y + z = 0 \end{cases}$ と同値である. この方程式の解は $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2s+2t \\ s \\ 5s \\ t \end{pmatrix} =$

$s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($s, t \in \mathbf{K}$ は任意) で与えられるため, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は W^\perp の基底になり, $\dim W^\perp = 2$ である.

また $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2s+2t \\ s \\ 5s \\ t \end{pmatrix}$ と \mathbf{u} が直交するためには, $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{34}}(-22s+6t)$ より, $t = \frac{11s}{3}$ であることが必要十

分である. このとき, $\mathbf{x} = \frac{s}{3} \begin{pmatrix} 28 \\ 3 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix}$ だから, $\frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1139}} \begin{pmatrix} 28 \\ 3 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix}$ は W^\perp の正規直交基底である. 以上から,

$\dim(V^\perp + W^\perp) = \dim V^\perp + \dim W^\perp - \dim(V^\perp \cap W^\perp) = 3$ であり, $\frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{646}} \begin{pmatrix} 20 \\ 7 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1139}} \begin{pmatrix} 28 \\ 3 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix}$

は $V^\perp + W^\perp$ を生成するため, これらのベクトルは $V^\perp + W^\perp$ の基底になる. 2つ目のベクトルを \mathbf{v}' , 3つ目のベクトル

を \mathbf{w}' とおけば, $\|\mathbf{v}'\| = 1, (\mathbf{w}', \mathbf{u}) = 0, (\mathbf{w}', \mathbf{v}') = \frac{26}{\sqrt{2546}}$ より $\mathbf{w}' - \frac{(\mathbf{w}', \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} - \frac{(\mathbf{w}', \mathbf{v}')}{\|\mathbf{v}'\|^2} \mathbf{v}' = \frac{17}{19\sqrt{1139}} \begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ 16 \\ 23 \end{pmatrix}$ と

なるため, $\frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{646}} \begin{pmatrix} 20 \\ 7 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1045}} \begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ 16 \\ 23 \end{pmatrix}$ は $V^\perp + W^\perp$ の正規直交基底である.

$$(4) A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 7 & -1 \end{pmatrix}, B^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \text{ だから } \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & -9 \\ 0 & 2 & 7 & 7 & -3 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(3,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 9 & 9 & -9 \\ 0 & 2 & 7 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -9 & -9 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & -9 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, } \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ は } \begin{cases} x + v = 0 \\ 9z + 9v - 9w = 0 \\ 2y + 4w = 0 \end{cases} \text{ と同値である. この方程式の解は } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} s \\ -2t \\ s+t \\ -s \\ t \end{pmatrix} =$$

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (} s, t \in \mathbf{K} \text{ は任意) だから, } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ は } V^\perp \cap W^\perp \text{ の基底である. } \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とおき,}$$

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ とおけば, } \|\mathbf{u}'\| = 1, (\mathbf{u}', \mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ より, } \mathbf{u}' - \frac{(\mathbf{u}', \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}'\|} \mathbf{u} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ だから, } \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{51}} \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ とおけば,}$$

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ は } V^\perp \cap W^\perp \text{ の正規直交基底である. } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & -9 \end{pmatrix} \text{ より, } A^* \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ は } \begin{cases} x + y + v + 2w = 0 \\ 9z + 9v - 9w = 0 \end{cases} \text{ と同値である. この方程式の解は}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -s-t-2u \\ s \\ -t+u \\ t \\ u \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (} s, t, u \in \mathbf{K} \text{ は任意) で与えられるため, } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{は } V^\perp \text{ の基底になり, } \dim V^\perp = 3 \text{ である. また } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -s-t-2u \\ s \\ -t+u \\ t \\ u \end{pmatrix} \text{ と } \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ が直交するためには, } (\mathbf{x}, \mathbf{u}) =$$

$$\frac{-s-3t-u}{\sqrt{3}}, (\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{-5s+7u}{\sqrt{51}} \text{ より, } u = \frac{5s}{7}, t = -\frac{4s}{7} \text{ であることが必要十分である. このとき, } \mathbf{x} = \frac{s}{7} \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ 9 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ だ}$$

$$\text{から, } \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{51}} \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{85}} \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ 9 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ は } V^\perp \text{ の正規直交基底である. } B^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} (1,1) \text{ 成分に関して} \\ \text{第 1 列の掃き出し} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (2,2) \text{ 成分に関して} \\ \text{第 2 列の掃き出し} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 9 & -8 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \text{ より, } B^* \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ は}$$

$$\begin{cases} x + 8z + 9v - 8w = 0 \\ 2y - 2z - 2v + 6z = 0 \end{cases} \text{ と同値である. この方程式の解は } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -8s - 9t + 8u \\ s + t - 3u \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(s, t, u \in \mathbf{K} \text{ は任意}) \text{ で与えられるため, } \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ は } W^\perp \text{ の基底になり, } \dim W^\perp = 3 \text{ である. また } \mathbf{x} =$$

$$\begin{pmatrix} -8s - 9t + 8u \\ s + t - 3u \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} \text{ と } \mathbf{u} \text{ が直交するためには, } (\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{-7s - 10t + 8u}{\sqrt{3}}, (\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{4s + 4t + 13u}{\sqrt{51}} \text{ より, } s = -\frac{27u}{2},$$

$$t = \frac{41u}{4} \text{ であることが必要十分である. このとき, } \mathbf{x} = \frac{u}{4} \begin{pmatrix} 95 \\ -25 \\ -54 \\ 41 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ だから, } \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{51}} \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14263}} \begin{pmatrix} 95 \\ -25 \\ -54 \\ 41 \\ 4 \end{pmatrix}$$

は W^\perp の正規直交基底である. 以上から, $\dim(V^\perp + W^\perp) = \dim V^\perp + \dim W^\perp - \dim(V^\perp \cap W^\perp) = 4$ であ

$$\text{り, } \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{51}} \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{85}} \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ 9 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14263}} \begin{pmatrix} 95 \\ -25 \\ -54 \\ 41 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ は } V^\perp + W^\perp \text{ を生成するため, これらのベクトル}$$

は $V^\perp + W^\perp$ の基底になる. 3つ目のベクトルを \mathbf{v}' , 4つ目のベクトルを \mathbf{w}' とおけば, $\|\mathbf{v}'\| = 1, (\mathbf{w}', \mathbf{u}) =$

$$(\mathbf{w}', \mathbf{v}) = 0, (\mathbf{w}', \mathbf{v}') = -\frac{60}{\sqrt{4195}} \text{ より } \mathbf{w}' - \frac{(\mathbf{w}', \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} - \frac{(\mathbf{w}', \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{w}', \mathbf{v}')}{\|\mathbf{v}'\|^2} \mathbf{v}' = \frac{17}{\sqrt{14263}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ となるため,}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{51}} \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{85}} \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ 9 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ は } V^\perp + W^\perp \text{ の正規直交基底である.}$$

$$3. (1) (a, b) \neq (0, 0) \text{ の場合, 問題 1 の (1) より, } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{-ac}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{-bc}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{pmatrix}$$

とおけば, \mathbf{v}_1 は W の正規直交基底で, $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は W^\perp の正規直交基底である. 従って $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ が求める \mathbf{R}^3 の正規直交基底である. $\mathbf{v}_1 \in W, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in W^\perp$ だから, 仮定から $f(\mathbf{v}_1) = \alpha \mathbf{v}_1, f(\mathbf{v}_2) = \beta \mathbf{v}_2, f(\mathbf{v}_3) = \beta \mathbf{v}_3$ である. 従っ

て $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ に関する f の表現行列は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ である. \mathbf{R}^3 の標準基底 $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ から $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ への基底

$$\text{の変換行列を } P \text{ とおけば } P = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-ac}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-bc}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 & \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{pmatrix} \text{ であり, } \mathbf{R}^3 \text{ の標準基底}$$

$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ に関する f の表現行列を A とすれば $P^{-1}AP$ は $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ に関する f の表現行列だから, A は以下で与えられる.

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha a^2 + \beta(b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} & \frac{ab(\alpha-\beta)}{a^2+b^2+c^2} & \frac{ac(\alpha-\beta)}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{ab(\alpha-\beta)}{a^2+b^2+c^2} & \frac{\alpha b^2 + \beta(a^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} & \frac{bc(\alpha-\beta)}{a^2+b^2+c^2} \\ \frac{ac(\alpha-\beta)}{a^2+b^2+c^2} & \frac{bc(\alpha-\beta)}{a^2+b^2+c^2} & \frac{\alpha c^2 + \beta(a^2+b^2)}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix}$$

$a = b = 0$ の場合は, \mathbf{e}_1 は W の正規直交基底で, $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ は W^\perp の正規直交基底だから, $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ が求める \mathbf{R}^3 の正規直交基底である. このとき, f の表現行列は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ である.

$$(2) (a, b) \neq (0, 0) \text{ の場合, 問題 1 の (2) より, } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-ac}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{-bc}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{pmatrix}$$

とおけば, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ は W の正規直交基底で, \mathbf{v}_3 は W^\perp の正規直交基底である. 従って $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ が求める \mathbf{R}^3 の正規直交基底である. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W, \mathbf{v}_3 \in W^\perp$ だから, 仮定から $f(\mathbf{v}_1) = \alpha \mathbf{v}_1, f(\mathbf{v}_2) = \alpha \mathbf{v}_2, f(\mathbf{v}_3) = \beta \mathbf{v}_3$ である. 従っ

て $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ に関する f の表現行列は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ である. \mathbf{R}^3 の標準基底 $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ から $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ への基底

$$\text{の変換行列を } P \text{ とおけば } P = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-ac}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-bc}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ 0 & \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{pmatrix} \text{ であり, } \mathbf{R}^3 \text{ の標準基底}$$

$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ に関する f の表現行列を A とすれば $P^{-1}AP$ は $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ に関する f の表現行列だから, A は以下で与

えられる。

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta a^2 + \alpha(b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} & -\frac{ab(\alpha - \beta)}{a^2 + b^2 + c^2} & -\frac{ac(\alpha - \beta)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ -\frac{ab(\alpha - \beta)}{a^2 + b^2 + c^2} & \frac{\beta b^2 + \alpha(a^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} & -\frac{bc(\alpha - \beta)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ -\frac{ac(\alpha - \beta)}{a^2 + b^2 + c^2} & -\frac{bc(\alpha - \beta)}{a^2 + b^2 + c^2} & \frac{\beta c^2 + \alpha(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2 + c^2} \end{pmatrix}$$

$a = b = 0$ の場合は, e_1, e_2 は W の正規直交基底で, e_3 は W^\perp の正規直交基底だから, $[e_1, e_2, e_3]$ が求める \mathbf{R}^3 の正規直交基底である. このとき, f の表現行列は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ である.

$$(3) \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \text{ とおけば, } \mathbf{w}_2 - \frac{(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} - \frac{ap + bq + cr}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c(cp - ar) - b(aq - bp)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ \frac{a(aq - bp) - c(br - cq)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ \frac{b(br - cq) - a(cp - ar)}{a^2 + b^2 + c^2} \end{pmatrix}$$

である. $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ は 1 次独立だから $\mathbf{w}_2 - \frac{(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1$ と $\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2$ は零ベクトルではなく, $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{w}_1\|} \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{w}_2 - \frac{(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1\|} \left(\mathbf{w}_2 - \frac{(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 \right), \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2\|} \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2$ とおけば, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ は W の正規直交基底で, \mathbf{v}_3 は W^\perp の正規直交基底であり, $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ が求める \mathbf{R}^3 の正規直交基底である. $\|\mathbf{w}_1\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \|\mathbf{w}_2 - \frac{(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1\| = \frac{\sqrt{(br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \|\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2\| = \sqrt{(br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2}$ だから, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ の成分は以下で与えられる.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{c(cp - ar) - b(aq - bp)}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)((br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2)}} \\ \frac{a(aq - bp) - c(br - cq)}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)((br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2)}} \\ \frac{b(br - cq) - a(cp - ar)}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)((br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2)}} \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{br - cq}{\sqrt{(br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2}} \\ \frac{cp - ar}{\sqrt{(br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2}} \\ \frac{aq - bp}{\sqrt{(br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2}} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W, \mathbf{v}_3 \in W^\perp$ だから, 仮定から $f(\mathbf{v}_1) = \alpha \mathbf{v}_1, f(\mathbf{v}_2) = \alpha \mathbf{v}_2, f(\mathbf{v}_3) = \beta \mathbf{v}_3$ となるため, $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ に関する f の表現行列を B とおけば $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ である. 標準基底 $[e_1, e_2, e_3]$ から $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ への基底の変換行列を P

$$\text{とおけば } P = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} & \frac{c(cp - ar) - b(aq - bp)}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)((br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2)}} & \frac{br - cq}{\sqrt{(br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} & \frac{a(aq - bp) - c(br - cq)}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)((br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2)}} & \frac{cp - ar}{\sqrt{(br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} & \frac{a(aq - bp) - c(br - cq)}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)((br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2)}} & \frac{aq - bp}{\sqrt{(br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2}} \end{pmatrix}$$

であり, \mathbf{R}^3 の標準基底 $[e_1, e_2, e_3]$ に関する f の表現行列を A とすれば $P^{-1}AP$ は $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ に関する f の表現行列だから, A は以下で与えられる.

$$A = PBP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha((cp - ar)^2 + (aq - bp)^2) + \beta(br - cq)^2}{(br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2} & -\frac{(\alpha - \beta)(br - cq)(cp - ar)}{(br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2} & -\frac{(\alpha - \beta)(br - cq)(aq - bp)}{(br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2} \\ -\frac{(\alpha - \beta)(br - cq)(cp - ar)}{(br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2} & \frac{\alpha((br - cq)^2 + (aq - bp)^2) + \beta(cp - ar)^2}{(br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2} & -\frac{(\alpha - \beta)(cp - ar)(aq - bp)}{(br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2} \\ -\frac{(\alpha - \beta)(br - cq)(aq - bp)}{(br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2} & -\frac{(\alpha - \beta)(cp - ar)(aq - bp)}{(br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2} & \frac{\alpha((br - cq)^2 + (cp - ar)^2) + \beta(aq - bp)^2}{(br - cq)^2 + (cp - ar)^2 + (aq - bp)^2} \end{pmatrix}$$

4. (1) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ に対し, $f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -cy + bz \\ cx - az \\ -bx + ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ だから $[e_1, e_2, e_3]$ に関する $f_{\mathbf{a}}$ の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ である.

(2) $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ より, 外積の性質から $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$ となるためには \mathbf{x} が \mathbf{a} の実数倍であることが必要十分だから $\text{Ker } f_{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a} \rangle$ である. また $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ はつねに \mathbf{a} と垂直なベクトルだから $\text{Im } f_{\mathbf{a}}$ は $\langle \mathbf{a} \rangle^\perp$ に含まれる. $\dim \text{Ker } f_{\mathbf{a}} = 1$ だから, 次元公式により $\dim \text{Im } f_{\mathbf{a}} = \text{rank } f_{\mathbf{a}} = 2$ となり $\text{Im } f_{\mathbf{a}}$ の次元は $\langle \mathbf{a} \rangle^\perp$ の次元に等しくなるため, $\text{Im } f_{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a} \rangle^\perp$ である.

(3) 第10回の問題2の(1)より $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ に対し,

$$(f_{\mathbf{b}} \circ f_{\mathbf{a}})(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{b}}(f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})) = f_{\mathbf{b}}(\mathbf{a} \times \mathbf{x}) = \mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) = -(\mathbf{a} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{b} = (\mathbf{x}, \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{x}$$

が得られる. 従って, \mathbf{a} と \mathbf{b} が垂直ならば $(f_{\mathbf{b}} \circ f_{\mathbf{a}})(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{b})\mathbf{a} \in \langle \mathbf{a} \rangle$ だから $\text{Im}(f_{\mathbf{b}} \circ f_{\mathbf{a}}) \subset \langle \mathbf{a} \rangle$ である. また, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ だから, $\bar{\mathbf{b}} = \frac{1}{(\mathbf{b}, \mathbf{b})}\mathbf{b}$ とおけば, $(\bar{\mathbf{b}}, \mathbf{b}) = 1$ だから $t \in \mathbf{R}$ に対し, $(f_{\mathbf{b}} \circ f_{\mathbf{a}})(t\bar{\mathbf{b}}) = (t\bar{\mathbf{b}}, \mathbf{b})\mathbf{a} = t(\bar{\mathbf{b}}, \mathbf{b})\mathbf{a} = t\mathbf{a}$ となって, $\text{Im}(f_{\mathbf{b}} \circ f_{\mathbf{a}}) \supset \langle \mathbf{a} \rangle$ であることがわかる. 故に $\text{Im}(f_{\mathbf{b}} \circ f_{\mathbf{a}}) = \langle \mathbf{a} \rangle$ である.

(4) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ならば $f_{\mathbf{a}}$ はすべてのベクトルを零ベクトルに写す写像になるため, $f_{\mathbf{b}} \circ f_{\mathbf{a}}$ の階数が1ならば $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ である. 従って(2)により $\text{rank } f_{\mathbf{a}} = \dim \langle \mathbf{a} \rangle^\perp = 2$, $\text{rank } f_{\mathbf{b}} = \dim \langle \mathbf{b} \rangle^\perp = 2$ だから, $\text{rank}(f_{\mathbf{b}} \circ f_{\mathbf{a}}) = \text{rank } f_{\mathbf{a}} + \text{rank } f_{\mathbf{b}} - \dim \mathbf{R}^3$ が成り立つ. 故に第15回の問題8の結果と(1)により $\langle \mathbf{b} \rangle = \text{Ker } f_{\mathbf{b}} \subset \text{Im } f_{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a} \rangle^\perp$ だから $\mathbf{b} \in \langle \mathbf{a} \rangle^\perp$ となるため, \mathbf{a} と \mathbf{b} は垂直である. 逆に \mathbf{a} と \mathbf{b} が垂直ならば $f_{\mathbf{b}} \circ f_{\mathbf{a}}$ の階数が1になることは(3)から明らかである.

5. (1) 任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して $(T_A(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0$ が成り立つと仮定する. $A = (a_{ij})$ とおけば, $(T_A(\mathbf{e}_j), \mathbf{e}_k) = (A\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = a_{kj}$ だから, $j = 1, 2, \dots, n$ に対して $a_{jj} = (T_A(\mathbf{e}_j), \mathbf{e}_j) = 0$ である. また, $(T_A(\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k), \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k) = 0$ が $j, k = 1, 2, \dots, n$ に対して成り立ち, この左辺は $(A(\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k), \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k) = (A\mathbf{e}_j + A\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k) = (A\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j) + (A\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) + (A\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) + (A\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k) = a_{jj} + a_{jk} + a_{kj} + a_{kk} = a_{jk} + a_{kj}$ に等しいため $j, k = 1, 2, \dots, n$ に対して $a_{jk} = -a_{kj}$ が成り立つ. 故に ${}^tA = -A$ である. 逆に ${}^tA = -A$ が成り立つと仮定すると, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して $(T_A(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, {}^tA\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, -A\mathbf{x}) = -(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = -(T_A(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ だから, $(T_A(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0$ が成り立つ.

(2) f を表す3次正方行列を $A = (a_{ij})$ とおき, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{32} \\ a_{13} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ とおけば, (1)の結果より $j, k = 1, 2, 3$ に対して $a_{jj} = 0$, $a_{jk} = -a_{kj}$ だから, 任意の $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ に対して $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & -a_{32} \\ -a_{13} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13}z - a_{21}y \\ -a_{32}z + a_{21}x \\ a_{32}y - a_{13}x \end{pmatrix} = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ が成り立つ. 逆に, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ に対して $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ が成り立つような $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$ が存在すれば, $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ はつねに \mathbf{x} と垂直なベクトルだから $(f(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0$ が任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ に対して成り立つ.

6. (1) $\mathbf{x} \in \mathbf{K}^n$ に対し, $\text{pr}_W(\mathbf{x})$ は W に含まれるベクトルだから $\text{pr}_W(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k y_i \mathbf{w}_i$ を満たす $y_i \in \mathbf{K}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) がある. 各 $j = 1, 2, \dots, k$ に対して $\text{pr}_W(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = \sum_{i=1}^k y_i \mathbf{w}_i - \mathbf{x}$ と \mathbf{w}_j は垂直だから $\left(\sum_{i=1}^k y_i \mathbf{w}_i - \mathbf{x}, \mathbf{w}_j \right) = 0$ である. $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$ は W の正規直交基底だから, この左辺は $\sum_{i=1}^k (y_i, \mathbf{w}_j) y_i = y_j$ に等しいため, $y_j = (\mathbf{x}, \mathbf{w}_j)$ である. 故に $\text{pr}_W(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k (\mathbf{x}, \mathbf{w}_i) \mathbf{w}_i$ だから, pr_W を表す行列の第 j 列は $\sum_{i=1}^k (\mathbf{e}_j, \mathbf{w}_i) \mathbf{w}_i$ である. 従って, pr_W を表す行列は, \mathbf{w}_j の第 i 成分を w_{ij} とすれば, $\sum_{l=1}^k w_{il} w_{jl}$ を (i, j) 成分とする n 次正方行列となるため, $P = (\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \cdots \ \mathbf{w}_k)$ とおけば PP^* で与えられる.

$\mathbf{x} \in \mathbf{K}^n$ に対し, $\mathbf{x} - \text{pr}_W(\mathbf{x})$ は W^\perp に垂直だから $(W^\perp)^\perp = W$ に含まれる. さらに $\mathbf{x} - (\mathbf{x} - \text{pr}_W(\mathbf{x})) = \text{pr}_W(\mathbf{x})$ は W^\perp に含まれるため, W と垂直である. 従って $\mathbf{x} - \text{pr}_W(\mathbf{x})$ は \mathbf{x} の W への正射影だから $\mathbf{x} - \text{pr}_W(\mathbf{x}) =$

$\text{pr}_W(\mathbf{x})$ が成り立つ。故に $\text{pr}_{W^\perp}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \text{pr}_W(\mathbf{x}) = (id_V - \text{pr}_W)(\mathbf{x})$ がすべての $\mathbf{x} \in \mathbf{K}^n$ に対して成り立つため、 $\text{pr}_{W^\perp} = id_V - \text{pr}_W$ である。従って、 pr_{W^\perp} を表す行列は $E_n - PP^*$ である。

(2) W に関する対称移動を $\rho_W : \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^n$ とすれば、各 $\mathbf{x} \in \mathbf{K}^n$ に対して $\rho_W(\mathbf{x})$ と \mathbf{x} の中点 $\frac{1}{2}(\rho_W(\mathbf{x}) + \mathbf{x})$ は $\text{pr}_W(\mathbf{x})$ に一致するため、(1) の結果から $\rho_W(\mathbf{x}) = 2\text{pr}_W(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = 2PP^*\mathbf{x} - E_n\mathbf{x} = (2PP^* - E_n)\mathbf{x}$ である。従って、 ρ_W を表す行列は $2PP^* - E_n$ である。

7. (1) $A_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ とおくと、これらの行列の列のベクトルはすべて単位行列で、第 1 列と第 2 列の内積はすべて 0 であるため、これらはすべてユニタリ行列である。従って $A_j^* = A_j^{-1}$ だから $A_j A_j^* = E_2$ となるため、 $(A_j, A_j) = \frac{1}{2}\text{tr}(A_j A_j^*) = \frac{1}{2}\text{tr}(E_2) = 1$ ($j = 1, 2, 3, 4$) である。

また、 $A_1 A_2^* = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -A_3$, $A_2 A_3^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -A_1$,

$A_3 A_1^* = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -A_2$ だから $(A_j, A_k) = \frac{1}{2}\text{tr}(A_j A_k^*) = \frac{1}{2}\text{tr}(-A_l) = 0$ ($(j, k, l) =$

$(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$) であり、 $A_4 = iE_2$ だから $(A_j, A_4) = \frac{1}{2}\text{tr}(A_j A_4^*) = \frac{1}{2}\text{tr}(-iA_j) = 0$ ($j = 1, 2, 3$) である。

また $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ が $X^* = -X$ を満たすことと、 $\frac{x}{i}, \frac{w}{i} \in \mathbf{R}$ であり、 $z = -\bar{y}$ が成り立つことと同値であるため、

$V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & w \end{pmatrix} \mid \frac{x}{i}, \frac{w}{i} \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{C} \right\}$ である。ここで、 $\begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & w \end{pmatrix} = \frac{x-w}{2i}A_1 + \text{Re}(y)A_2 + \text{Im}(y)A_3 + \frac{x+w}{2i}A_4$ だから、 A_1, A_2, A_3, A_4 は V を生成する。故に B は V の正規直交基底である。

$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ が $X^* = -X$ かつ $\text{tr}X = 0$ を満たすことと、 $\frac{x}{i} \in \mathbf{R}$ であり、 $z = -\bar{y}$ かつ $w = -x$ が成り立つこと

と同値であるため、 $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & -x \end{pmatrix} \mid \frac{x}{i} \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{C} \right\}$ であり、 $\begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & -x \end{pmatrix} = \frac{x}{i}A_1 + \text{Re}(y)A_2 + \text{Im}(y)A_3$ だから、 A_1, A_2, A_3 は W を生成する。故に B' は W の正規直交基底である。

(2) 2次正方行列 A に対し、 $X \in V$ ならば $X^* = -X$ だから $(AXA^*)^* = (A^*)^* X^* A^* = A(-X)A^* = -AXA^*$ となるため、 $AXA^* \in V$ である。一般に $m \times n$ 行列 X と $n \times m$ 行列 Y に対して $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$ が成り立つため、 A が 2次のユニタリ行列ならば $A^* = A^{-1}$ だから、 $X \in W$ ならば $\text{tr}(AXA^*) = \text{tr}((AX)A^{-1}) = \text{tr}(A^{-1}(AX)) = \text{tr}((A^{-1}A)X) = \text{tr}(E_2X) = \text{tr}X = 0$ である。故に $AXA^* \in W$ である。

(3) $\operatorname{Re}(iz) = \frac{iz - i\bar{z}}{2} = -\frac{z - \bar{z}}{2i} = -\operatorname{Im}(z)$, $\operatorname{Im}(iz) = \frac{iz + i\bar{z}}{2i} = \frac{z + \bar{z}}{2} = \operatorname{Re}(z)$ だから, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき,

$$\begin{aligned} f_A(A_1) &= AA_1A^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ia & -ib \\ ic & -id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(|a|^2 - |b|^2) & i(a\bar{c} - b\bar{d}) \\ i(\bar{a}c - \bar{b}d) & i(|c|^2 - |d|^2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{|a|^2 - |b|^2 - |c|^2 + |d|^2}{2} A_1 + \frac{\bar{a}c - a\bar{c} + b\bar{d} - \bar{b}d}{2i} A_2 + \frac{\bar{a}c + a\bar{c} - b\bar{d} - \bar{b}d}{2} A_3 + \frac{|a|^2 - |b|^2 + |c|^2 - |d|^2}{2} A_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_A(A_2) &= AA_2A^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\bar{b} - \bar{a}b & a\bar{d} - \bar{a}d \\ -a\bar{d} + \bar{a}d & c\bar{d} - \bar{c}d \end{pmatrix} \\ &= \frac{a\bar{b} - \bar{a}b - c\bar{d} + \bar{c}d}{2i} A_1 + \frac{a\bar{d} + \bar{a}d - b\bar{c} - \bar{b}c}{2} A_2 + \frac{a\bar{d} - \bar{a}d - b\bar{c} + \bar{b}c}{2i} A_3 + \frac{a\bar{b} - \bar{a}b + c\bar{d} - \bar{c}d}{2i} A_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_A(A_3) &= AA_3A^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bi & ai \\ di & ci \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(a\bar{b} + \bar{a}b) & i(a\bar{d} + \bar{a}d) \\ i(\bar{a}d + \bar{b}c) & i(c\bar{d} + \bar{c}d) \end{pmatrix} \\ &= \frac{a\bar{b} + \bar{a}b - c\bar{d} - \bar{c}d}{2} A_1 + \frac{-a\bar{d} + \bar{a}d - b\bar{c} + \bar{b}c}{2i} A_2 + \frac{a\bar{d} + \bar{a}d + b\bar{c} + \bar{b}c}{2} A_3 + \frac{a\bar{b} + \bar{a}b + c\bar{d} + \bar{c}d}{2} A_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_A(A_4) &= AA_4A^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ia & ib \\ ic & id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(|a|^2 + |b|^2) & i(a\bar{c} + b\bar{d}) \\ i(\bar{a}c + \bar{b}d) & i(|c|^2 + |d|^2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2}{2} A_1 + \frac{\bar{a}c - a\bar{c} - b\bar{d} + \bar{b}d}{2i} A_2 + \frac{\bar{a}c + a\bar{c} + b\bar{d} + \bar{b}d}{2} A_3 + \frac{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2}{2} A_4 \end{aligned}$$

である. 従って B に関する f_A の表現行列は

$$\begin{pmatrix} \frac{|a|^2 - |b|^2 - |c|^2 + |d|^2}{2} & \frac{a\bar{b} - \bar{a}b - c\bar{d} + \bar{c}d}{2i} & \frac{a\bar{b} + \bar{a}b - c\bar{d} - \bar{c}d}{2} & \frac{|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2}{2} \\ \frac{\bar{a}c - a\bar{c} + b\bar{d} - \bar{b}d}{2i} & \frac{a\bar{d} + \bar{a}d - b\bar{c} - \bar{b}c}{2} & \frac{-a\bar{d} + \bar{a}d - b\bar{c} + \bar{b}c}{2i} & \frac{\bar{a}c - a\bar{c} - b\bar{d} + \bar{b}d}{2i} \\ \frac{\bar{a}c + a\bar{c} - b\bar{d} - \bar{b}d}{2} & \frac{a\bar{d} - \bar{a}d - b\bar{c} + \bar{b}c}{2i} & \frac{a\bar{d} + \bar{a}d + b\bar{c} + \bar{b}c}{2} & \frac{\bar{a}c + a\bar{c} + b\bar{d} + \bar{b}d}{2} \\ \frac{|a|^2 - |b|^2 + |c|^2 - |d|^2}{2} & \frac{a\bar{b} - \bar{a}b + c\bar{d} - \bar{c}d}{2i} & \frac{a\bar{b} + \bar{a}b + c\bar{d} + \bar{c}d}{2} & \frac{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2}{2} \end{pmatrix}$$

である. A がユニタリ行列ならば $|a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1$, $a\bar{b} + c\bar{d} = 0$ が成り立ち, $A^* = A^{-1}$ もユニタリ行列だから $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1$, $\bar{a}c + \bar{b}d = 0$ が成り立つ. 故に, 上式から

$$\begin{aligned} AA_1A^* &= (|a|^2 - |c|^2)A_1 + \frac{\bar{a}c - a\bar{c}}{i}A_2 + (\bar{a}c + a\bar{c})A_3 \\ AA_2A^* &= \frac{a\bar{b} - \bar{a}b}{i}A_1 + \frac{a\bar{d} + \bar{a}d - b\bar{c} - \bar{b}c}{2}A_2 + \frac{a\bar{d} - \bar{a}d - b\bar{c} + \bar{b}c}{2i}A_3 \\ AA_3A^* &= (a\bar{b} + \bar{a}b)A_1 + \frac{-a\bar{d} + \bar{a}d - b\bar{c} + \bar{b}c}{2i}A_2 + \frac{a\bar{d} + \bar{a}d + b\bar{c} + \bar{b}c}{2}A_3 \end{aligned}$$

が得られるため, B' に関する g_A の表現行列は, $\begin{pmatrix} |a|^2 - |c|^2 & \frac{a\bar{b} - \bar{a}b}{i} & a\bar{b} + \bar{a}b \\ \frac{\bar{a}c - a\bar{c}}{i} & \frac{a\bar{d} + \bar{a}d - b\bar{c} - \bar{b}c}{2} & \frac{-a\bar{d} + \bar{a}d - b\bar{c} + \bar{b}c}{2i} \\ \bar{a}c + a\bar{c} & \frac{a\bar{d} - \bar{a}d - b\bar{c} + \bar{b}c}{2i} & \frac{a\bar{d} + \bar{a}d + b\bar{c} + \bar{b}c}{2} \end{pmatrix}$ である.

(4) $L_A : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$, $R_{A^*} : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ を $L_A(X) = AX$, $R_{A^*}(X) = XA^*$ で定義すれば, 第 17 回の問題 18 の (3) の結果から $\det(L_A) = |A|^2$, $\det(R_{A^*}) = |A^*|^2 = |\overline{|A|}|^2 = |\overline{|A|}|^2 = |A|^2$ が成り立つ. 従って第 16 回の問題 7 の (2) の結果から, $\det(R_{A^*} \circ L_A) = \det(R_{A^*}) \det(L_A) = |\overline{|A|}|^2 |A|^2 = (|\overline{|A|}| |A|)^2 = |\det A|^4$ が得られる. B は \mathbb{C} 上のベクトル空間 $M_2(\mathbb{C})$ の基底であり, $(R_{A^*} \circ L_A)(A_j) = f_A(A_j)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) だから, B に関する $R_{A^*} \circ L_A$ の表現行列は B に関する f_A の表現行列と一致する. 故に $\det(f_A) = \det(R_{A^*} \circ L_A) = |\det A|^4$ である.

A が 2 次のユニタリ行列のとき, $f_A(A_4) = A_4$ であり, B' に関する g_A の表現行列を P とすれば, (3) の結果から B に関する f_A の表現行列は $\begin{pmatrix} P & \mathbf{0} \\ t\mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$ となるため, ユニタリ行列の行列式の値は絶対値が 1 である複素数であること

に注意すれば, $\det(g_A) = |P| = \begin{vmatrix} P & \mathbf{0} \\ t\mathbf{0} & 1 \end{vmatrix} = |\det A|^4 = 1$ である.

(5) A がユニタリー行列ならば $A^* = A^{-1}$ だから, $X, Y \in V$ に対して次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}(f_A(X), f_A(Y)) &= (AXA^*, AY A^*) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(AXA^*(AY A^*)^*) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(AXA^*(A^*)^* Y^* A^*) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}((AXA^* A)(Y^* A^*)) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}((Y^* A^*)(AXA^* A)) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(Y^* A^{-1} A X A^{-1} A) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(Y^* X) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(X Y^*) = (X, Y)\end{aligned}$$

8. (1) A は正則行列だから, A の列ベクトルからなる \mathbf{K}^n の基底 $B = [Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n]$ が考えられる. シュミットの直交化法により, B を直交化して得られる \mathbf{K}^n の正規直交基底を $B' = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n]$ とし, \mathbf{u}_j を第 j 列とする n 次正方行列を U とすれば, U はユニタリー行列である. B' から B への基底の変換行列を $T = (p_{ij})$ とすれば, 第 17 回の問題 8 の (1) により, T は対角成分がすべて正の実数である上半三角行列である. さらに $Ae_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \mathbf{u}_i$ であり, この等式の右辺は UT の第 j 列だから $A = UT$ が成り立つ.

(2) $U = (u_{ij})$ を n 次ユニタリー行列かつ上半三角行列である行列とする. j による帰納法で $|u_{jj}| = 1$ かつ U の第 j 列が $u_{jj} \mathbf{e}_j$ に等しいことを示す. $i > 1$ ならば $u_{i1} = 0$ だから $Ue_1 = u_{11} \mathbf{e}_1$ であり, Ue_1 は単位ベクトルだから $|u_{11}| = \|u_{11} \mathbf{e}_1\| = \|Ue_1\| = 1$ が得られる. 故に $j = 1$ の場合は主張が成り立つ. $j \leq k-1$ ならば $|u_{jj}| = 1$ かつ U の第 j 列が $u_{jj} \mathbf{e}_j$ に等しいと仮定すれば, $j \leq k-1$ のとき, U の第 k 列と第 j 列の内積 (Ue_k, Ue_j) は $(Ue_k, u_{jj} \mathbf{e}_j) = u_{jk} \bar{u}_{jj}$ に等しく, 一方 U がユニタリー行列であることから Ue_j と Ue_k は直交するため, $u_{jk} \bar{u}_{jj} = 0$ である. ここで, $|u_{jj}| = 1 \neq 0$ だから, 上式から $u_{jk} = 0$ ($j \leq k-1$) が得られる. U は上半三角行列だから $j > k$ ならば $u_{jk} = 0$ であるため, U の第 k 列は $u_{kk} \mathbf{e}_k$ に等しい. さらに U がユニタリー行列であることから U の第 k 列は単位ベクトルだから $|u_{kk}| = \|u_{kk} \mathbf{e}_k\| = \|Ue_k\| = 1$ である. 従って $j = k$ の場合も主張が成り立つ.

(3) 仮定から, $(U')^{-1}$ もユニタリー行列であり, $(U')^{-1}U$ もユニタリー行列である. 一方, 仮定から T^{-1} は対角成分がすべて正の実数である上半三角行列であり, $T^{-1}T'$ も対角成分がすべて正の実数である上半三角行列である. U', T は正則行列だから $UT = U'T'$ より $(U')^{-1}U = T^{-1}T'$ が得られ, この左辺はユニタリー行列であり, 右辺は対角成分がすべて正の実数である上半三角行列だから, (2) の結果から $(U')^{-1}U = T^{-1}T'$ は対角成分がすべて 1 である対角行列, すなわち単位行列である. 従って $(U')^{-1}U = E_n$ かつ $T^{-1}T' = E_n$ だから $U = U'$ かつ $T = T'$ である.

9. (1) $G(S', T')$ の (i, j) 成分は $(\mathbf{u}_i, \mathbf{z}_j) = \left(\sum_{s=1}^m p_{si} \mathbf{v}_s, \sum_{t=1}^n q_{tj} \mathbf{w}_t \right) = \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^n p_{si} (\mathbf{v}_s, \mathbf{w}_t) \bar{q}_{tj}$ であり, $\sum_{t=1}^n (\mathbf{v}_s, \mathbf{w}_t) \bar{q}_{tj}$ は $G(S, T)\bar{Q}$ の (s, j) 成分だから, 上式より $(\mathbf{u}_i, \mathbf{z}_j)$ は ${}^tPG(S, T)\bar{Q}$ の (i, j) 成分に等しいことがわかる. 従って $G(S', T') = {}^tPG(S, T)\bar{Q}$ が成り立つ.

$\operatorname{rank} P = m$ かつ $\operatorname{rank} Q = n$ ならば $\operatorname{rank} {}^tP = \operatorname{rank} P = m$ かつ $\operatorname{rank} \bar{Q} = \operatorname{rank} Q = n$ であり, tP は $k \times m$ 行列, \bar{Q} は $n \times l$ 行列だから, 1 次写像 $T_P: \mathbf{K}^m \rightarrow \mathbf{K}^k$ は単射であり, $T_{\bar{Q}}: \mathbf{K}^l \rightarrow \mathbf{K}^n$ は全射である. 従って

$$\operatorname{rank} G(S', T') = \operatorname{rank} {}^tPG(S, T)\bar{Q} = \operatorname{rank} T_P G(S, T) T_{\bar{Q}} = \operatorname{rank} (T_P \circ T_{G(S, T)} \circ T_{\bar{Q}}) = \operatorname{rank} T_{G(S, T)} = \operatorname{rank} G(S, T).$$

(2) $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$, $T = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$ のとき, $G(T, S)$ の (i, j) 成分は $(\mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j) = \overline{(\mathbf{v}_j, \mathbf{w}_i)}$ だから, $G(S, T)^*$ の (i, j) 成分と一致する. 従って $G(T, S) = G(S, T)^*$ が成り立つ.

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ は V の正規直交基底だから $G(U, U)$ は k 次単位行列であり, $\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^k (\mathbf{v}_j, \mathbf{u}_i) \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^k \overline{(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j)} \mathbf{u}_i$, $\mathbf{w}_j = \sum_{i=1}^k (\mathbf{w}_j, \mathbf{u}_i) \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^k \overline{(\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_j)} \mathbf{u}_i$ だから $P = \overline{G(U, S)}$, $Q = \overline{G(U, T)}$ とおけば, (1) と上で示したことから, $G(S, T) = {}^tPG(U, U)\bar{Q} = G(U, S)^* G(U, T) = G(S, U)G(U, T)$ が得られる.

(3) $r = \operatorname{rank} G(S, T)$ とおき, $G(S, T)e_{n_1}, G(S, T)e_{n_2}, \dots, G(S, T)e_{n_r}$ が 1 次独立であるとする. このとき, $\mathbf{v}_{n_1}, \mathbf{v}_{n_2}, \dots, \mathbf{v}_{n_r}$ が 1 次従属であると仮定すれば, $a_1 \mathbf{v}_{n_1} + a_2 \mathbf{v}_{n_2} + \dots + a_r \mathbf{v}_{n_r} = \mathbf{0}$ を満たす $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbf{K}$ で, ある s に対して $a_s \neq 0$ であるものが存在する. \mathbf{w}_j との内積を考えれば $j = 1, 2, \dots, n$ に対して $a_1 (\mathbf{v}_{n_1}, \mathbf{w}_j) + a_2 (\mathbf{v}_{n_2}, \mathbf{w}_j) + \dots + a_r (\mathbf{v}_{n_r}, \mathbf{w}_j) = 0$ が得られるが, これより $a_1 G(S, T)e_{n_1} + a_2 G(S, T)e_{n_2} + \dots + a_r G(S, T)e_{n_r} = \mathbf{0}$ が得られ, $G(S, T)e_{n_1}, G(S, T)e_{n_2}, \dots, G(S, T)e_{n_r}$ が 1 次独立であることと矛盾する. 故に $\mathbf{v}_{n_1}, \mathbf{v}_{n_2}, \dots, \mathbf{v}_{n_r}$ は 1 次独立であるため, $\dim \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \rangle \geq r$ である. 従って, $\dim \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n \rangle \geq \operatorname{rank} G(T, S)$ であり, (2) より

$G(T, S) = G(S, T)^* = \overline{^t G(S, T)}$ だから $\text{rank } G(T, S) = \text{rank } \overline{^t G(S, T)} = \text{rank } ^t G(S, T) = \text{rank } G(S, T)$ となるため、 $\dim \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n \rangle \geq \text{rank } G(S, T)$ が得られる。

(4) $d = \dim \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \rangle$ とおき、 $\mathbf{v}_{n_1}, \mathbf{v}_{n_2}, \dots, \mathbf{v}_{n_d}$ は 1 次独立であるとする。 $a_1, a_2, \dots, a_d \in \mathbf{K}$ が

$$a_1 G(S, S) \mathbf{e}_{n_1} + a_2 G(S, S) \mathbf{e}_{n_2} + \dots + a_d G(S, S) \mathbf{e}_{n_d} = \mathbf{0}$$

を満たすとすれば、すべての $i = 1, 2, \dots, m$ に対して $a_1(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{n_1}) + a_2(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{n_2}) + \dots + a_d(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{n_d}) = 0$ が成り立つ。 $\mathbf{a} = \bar{a}_1 \mathbf{v}_{n_1} + \bar{a}_2 \mathbf{v}_{n_2} + \dots + \bar{a}_d \mathbf{v}_{n_d}$ とおけば、この等式の右辺は $(\mathbf{v}_i, \mathbf{a})$ に等しいため、 $(\mathbf{v}_i, \mathbf{a}) = 0$ である。従って $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = (\bar{a}_1 \mathbf{v}_{n_1} + \bar{a}_2 \mathbf{v}_{n_2} + \dots + \bar{a}_d \mathbf{v}_{n_d}, \mathbf{a}) = \bar{a}_1(\mathbf{v}_{n_1}, \mathbf{a}) + \bar{a}_2(\mathbf{v}_{n_2}, \mathbf{a}) + \dots + \bar{a}_d(\mathbf{v}_{n_d}, \mathbf{a}) = 0$ だから $\bar{a}_1 \mathbf{v}_{n_1} + \bar{a}_2 \mathbf{v}_{n_2} + \dots + \bar{a}_d \mathbf{v}_{n_d} = \mathbf{a} = \mathbf{0}$ が得られる。故に $\mathbf{v}_{n_1}, \mathbf{v}_{n_2}, \dots, \mathbf{v}_{n_d}$ の 1 次独立性から $a_1 = a_2 = \dots = a_d = 0$ となるため、 $G(S, S) \mathbf{e}_{n_1}, G(S, S) \mathbf{e}_{n_2}, \dots, G(S, S) \mathbf{e}_{n_d}$ は 1 次独立である。よって $\text{rank } G(S, S) \geq d$ であり、一方 (3) より $\text{rank } G(S, S) \leq d$ だから $\text{rank } G(S, S) = d$ である。

(5) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k \in V$ を $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \rangle \cap \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n \rangle$ を生成するように選び、 $U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k)$ とおく。 $\mathbf{u}_j \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \rangle$ だから $\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^m p_{ij} \mathbf{v}_i$ ($p_{ij} \in \mathbf{K}$) と表され、 $\mathbf{u}_j \in \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n \rangle$ だから $\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^n q_{ij} \mathbf{w}_i$ ($q_{ij} \in \mathbf{K}$) と表される。 p_{ij} を (i, j) 成分とする $m \times k$ 行列を P とし、 q_{ij} を (i, j) 成分とする $n \times l$ 行列を Q とすれば、(1) の結果から $G(U, U) = {}^t P G(S, T) \bar{Q}$ が成り立つため、 $\text{rank } G(U, U) = \text{rank } {}^t P G(S, T) \bar{Q} \leq \text{rank } G(S, T)$ である。一方、(4) の結果から $\dim(\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \rangle \cap \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n \rangle) = \dim \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k \rangle = \text{rank } G(U, U)$ だから、 $\dim(\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \rangle \cap \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n \rangle) \leq \text{rank } G(S, T)$ が成り立つ。

10. 変数変換 $y = \frac{2x - a - b}{b - a}$ を行くと、 x が a から b まで動けば、 y は -1 から 1 まで動き、 $x = \frac{b - a}{2} y + \frac{a + b}{2}$ だから $(f(x), g(x))_{a,b} = \int_a^b f(x)g(x) dx = \frac{b - a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b - a}{2} y + \frac{a + b}{2}\right) g\left(\frac{b - a}{2} y + \frac{a + b}{2}\right) dy$ が成り立つ。写像 $\varphi: P_n(\mathbf{R}) \rightarrow P_n(\mathbf{R})$ を $\varphi(f(x)) = \frac{\sqrt{b - a}}{\sqrt{2}} f\left(\frac{b - a}{2} x + \frac{a + b}{2}\right)$ で定めれば、 φ は 1 次写像で、任意の $f(x), g(x) \in P_n(\mathbf{R})$ に対して $(f(x), g(x))_{a,b} = (\varphi(f(x)), \varphi(g(x)))_{-1,1}$ が成り立つため、 φ は内積 $(\ , \)_{a,b}$ をもつ計量ベクトル空間 $P_n(\mathbf{R})$ から内積 $(\ , \)_{-1,1}$ をもつ計量ベクトル空間 $P_n(\mathbf{R})$ への内積を保つ 1 次写像だから、単射であり、故に φ は次元が等しいベクトル空間の間の単射である 1 次写像であるため同型写像である。 $1, x, \dots, x^{n-1}$ で生成される $P_n(\mathbf{R})$ の部分空間は $P_{n-1}(\mathbf{R})$ であり、 φ は $P_{n-1}(\mathbf{R})$ を $P_{n-1}(\mathbf{R})$ 全体に写すため、 $j = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ に対して $(f(x), x^j)_{a,b} = 0$ であることは、任意の $g(x) \in P_{n-1}(\mathbf{R})$ に対して $(\varphi(f(x)), g(x))_{-1,1} = 0$ であること同値である。第 17 回の問題 9 の結果から $P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k$ とおけば、 $\left[\frac{1}{\sqrt{2}} P_0(x), \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} P_1(x), \dots, \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}} P_n(x) \right]$ は $P_n(\mathbf{R})$ の内積 $(\ , \)_{-1,1}$ に関する正規直交基底であり、 $\frac{1}{\sqrt{2}} P_0(x), \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} P_1(x), \dots, \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}} P_{n-1}(x)$ は $P_{n-1}(\mathbf{R})$ を生成する。従って、 $P_n(\mathbf{R})$ の内積 $(\ , \)_{-1,1}$ に関する $P_{n-1}(\mathbf{R})$ の直交補空間は $\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}} P_n(x)$ で生成される 1 次元部分空間だから、任意の $g(x) \in P_{n-1}(\mathbf{R})$ に対して $(\varphi(f(x)), g(x))_{-1,1} = 0$ が成り立つためには $\varphi(f(x)) = \frac{c\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}} P_n(x)$ を満たす実数 c が存在することが必要十分である。ここで、 φ の逆写像 φ^{-1} は $\varphi^{-1}(g(x)) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b - a}} g\left(\frac{2x - a - b}{b - a}\right)$ で与えられるため、 $f(x)$ が $j = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ に対して $(f(x), x^j)_{a,b} = 0$ であることは、 $f(x) = \frac{c\sqrt{2n+1}}{\sqrt{b - a}} P_n\left(\frac{2x - a - b}{b - a}\right)$ を満たす実数 c が存在することが必要十分である。一般に関数 f が関数 g の n 次導関数 $f(x) = g^{(n)}(x)$ ならば $f(px + q) = \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{p^n} g(px + q) \right)$ だから、 $P_n\left(\frac{2x - a - b}{b - a}\right) = \frac{1}{n!(b - a)^n} \frac{d^n}{dx^n} (x - a)^n (x - b)^n$ である。 φ が内積を保つことと、 $\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}} P_n(x)$ の長さが 1 であることから、 $\varphi(f(x)) = \frac{c\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}} P_n(x)$ を満たす $f(x)$ の、内積 $(\ , \)_{a,b}$ に関する長さは $|c|$ であるため、 $1, x, \dots, x^{n-1}$ のすべてと直交して長さが 1 である $P_n(\mathbf{R})$ の要素は $\pm \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{b - a}} P_n\left(\frac{2x - a - b}{b - a}\right) = \pm \frac{\sqrt{2n+1}}{n!(b - a)^{n+\frac{1}{2}}} \frac{d^n}{dx^n} (x - a)^n (x - b)^n$ である。

線形数学 II 演習問題 第 19 回 行列の対角化

1. 次の行列の固有値と固有空間の基底を求め、対角化可能ならば対角化せよ。

- (1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \\ -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
- (7) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -5 & 17 & 10 \\ 7 & -21 & -12 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix} -6 & -2 & -6 \\ 4 & 3 & 3 \\ 8 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ (10) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$
- (11) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ (12) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}$ (13) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (14) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
- (15) $\begin{pmatrix} -5 & 6 & 4 \\ -7 & 8 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (16) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (17) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (18) $\begin{pmatrix} 3 & -6 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
- (19) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (20) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (21) $\begin{pmatrix} 0 & -5 & -7 \\ -1 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ (22) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ -5 & 0 & -7 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
- (23) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 7 & 7 & 3 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ (24) $\begin{pmatrix} -5 & 5 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (25) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ (26) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- (27) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (28) $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & -3 \\ -7 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ (29) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ (30) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$
- (31) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -6 & -8 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (32) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (33) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -6 & -5 & 3 \\ -8 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ (34) $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 3 & 5 & 3 \\ -12 & -12 & -10 \end{pmatrix}$
- (35) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ -1 & 2 & a \\ -1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$ (36) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$ (37) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ a & 1-a & a \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (38) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & a-1 \\ 1 & 0 & a-1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$
- (39) $\begin{pmatrix} a & -2 & 1 \\ -a+5 & 7 & -1 \\ a-5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ (40) $\begin{pmatrix} 2 & a & -2a \\ 0 & 8 & -18 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ (41) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ (42) $\begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 3a-1 & 0 \\ 0 & 3a-3 & -1 \end{pmatrix}$
- (43) $\begin{pmatrix} 2b-a & 0 & 2a-2b \\ b-a & c & a-b \\ b-a & 0 & 2a-b \end{pmatrix}$ (44) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 7 & -7 & 1 \\ 2 & 10 & -10 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ (45) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -9 & -3 \\ 1 & 3 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ (46) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
(47) \begin{pmatrix} -3a+4 & -4a+2 & -2a+1 \\ 8a-4 & 9a-2 & 4a-2 \\ -4a+2 & -4a+2 & -a+3 \end{pmatrix} & (48) \begin{pmatrix} ab-2 & a^2 & 3a \\ b^2 & ab-2 & 3b \\ -b & -a & -5 \end{pmatrix} & (49) \begin{pmatrix} -3a+9 & -2 & -a+2 \\ -3a+1 & 0 & -a \\ 9a-18 & 6 & 3a-3 \end{pmatrix} \\
(50) \begin{pmatrix} -6a+5 & 6 & -2a+3 \\ -3a+6 & 5 & -a+3 \\ 18a-18 & -18 & 6a-10 \end{pmatrix} & (51) \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} & (52) \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\
(53) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ -5 & -2 & -8 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 8 & -1 \end{pmatrix} & (54) \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} & (55) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & -8 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. 次の行列の n 乗を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} \lambda+ac & ad \\ bc & \lambda+bd \end{pmatrix}$$

3. f を \mathbf{K} 上のベクトル空間 V の 1 次変換, A を V の基底 $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$ に関する f の表現行列とする. $\lambda \in \mathbf{K}$ が f の固有値であるためには, λ が A の固有値であることが必要十分であり, $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{v}_j$ が λ に対する f の固有ベクトルであるためには, x_j を第 j 成分とする n 次元ベクトル $\hat{\mathbf{x}}$ が λ に対する A の固有ベクトルであることが必要十分であることを示せ.

4. A を n 次正方行列, P を n 次正則行列とし, P の第 j 列を \mathbf{v}_j とする. $P^{-1}AP$ が, λ_j を (j, j) 成分とする対角行列であるためには, λ_j が A の固有値で, \mathbf{v}_j が λ_j に対する固有ベクトルであることが必要十分であることを示せ.

5. \mathbf{R}^3 の 1 次変換 f は \mathbf{R}^3 の基底 $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をそれぞれ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に写す.

(1) $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ に関する f の表現行列を求めよ.

(2) f の固有値を求め, f の固有空間の基底を $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ の 1 次結合で表せ.

6. a を $\frac{2}{3}$ と異なる実数の定数とする. \mathbf{R}^3 の 1 次変換 f は $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ 2a-1 \end{pmatrix}$ をそれぞれ

$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1-2a \\ 2a \\ a-1 \end{pmatrix}$ に写す.

(1) \mathbf{R}^3 の基底 $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ に関する f の表現行列を求めよ.

(2) f の固有値をすべて求めよ.

(3) f の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ. f の固有ベクトルからなる \mathbf{R}^3 の基底が存在するか?

7. V を x を変数とする 2 次以下の実数係数多項式全体からなる集合とし, 多項式の加法と実数倍によって \mathbf{R} 上のベクトル空間とみなすことにする. 1 次写像 $f: V \rightarrow V$ を $f(P(x)) = 2P(x) + P'(x)$ で定める.

(1) V の基底 $[1, x, x^2]$ に関する f の表現行列を求めよ.

(2) 上で求めた行列が対角化可能であれば対角化し, そうでなければその理由を述べよ.

8. A を n 次複素正行列とする.

(1) A の固有多項式と A の転置行列 tA の固有多項式は一致することを示せ.

(2) A の固有多項式 $F_A(x)$ における x^k の係数を $c_k(A)$ とおく. A の (i, j) 成分 a_{ij} の共役複素数 \bar{a}_{ij} を (i, j) 成分とする n 次正行列 \bar{A} の固有多項式は, $c_k(A)$ の共役複素数を x^k の係数とする n 次多項式であることを示せ.

(3) λ が A の固有値ならば, λ の共役複素数は A の随伴行列の固有値であることを示せ.

9. λ を n 次正行列 A の固有値とする. λ に対する A の固有空間の次元が m ならば, A の固有多項式は $(t - \lambda)^m$ を因数にもつことを示せ.

10. $A = (a_{ij})$ を \mathbf{K} の要素を成分とする n 次正行列とし, $j = 1, 2, \dots, n$ に対して $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ が成り立つとする.

(1) A は 1 を固有値にもつことを示せ.

(2) $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \mathbf{e}_j$ とおき, $k \in \mathbf{K}$ に対し, \mathbf{K}^n の部分集合 H_k を $H_k = \{\mathbf{x} \in \mathbf{K}^n \mid (\mathbf{x}, \mathbf{v}) = k\}$ で定めるとき, $T_A: \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^n$ は H_k のベクトルを H_k のベクトルに写すことを示せ.

11. (発展問題) m を $n - 1$ 以下の自然数とし, P, Q はそれぞれ \mathbf{K} の要素を成分とする $n \times m$ 行列, $m \times n$ 行列で, $\text{rank } P = \text{rank } Q = m$ であるとする. $\lambda \in \mathbf{K}$ に対し, $A = \lambda E_n + PQ$ とおく. このとき A が対角化可能であるためには m 次正行列 QP が正則であり, かつ対角化可能であることが必要十分であることを示せ.

12. (発展問題) $\lambda \in \mathbf{K}$ と零ベクトルではない $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{K}^n$ (n は 2 以上の整数) に対し, $A = \lambda E_n + \mathbf{a}{}^t\mathbf{b}$ とおく.

(1) A の固有多項式は $(t - \lambda)^{n-1}(t - \lambda - {}^t\mathbf{b}\mathbf{a})$ であり, 固有値 λ に対する A の固有空間は ${}^t\mathbf{b}\mathbf{x} = 0$ を満たすベクトル \mathbf{x} 全体からなることを示せ.

(2) A の最小多項式を求めよ.

(3) ${}^t\mathbf{b}\mathbf{a} \neq 0$ の場合, 固有値 $\lambda + {}^t\mathbf{b}\mathbf{a}$ に対する A の固有空間は \mathbf{a} で生成される 1 次元部分空間であることを示せ. さらに \mathbf{b} の第 j 成分を b_j とするとき, A を対角化せよ.

13. (発展問題) $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{K}$ に対し, n 次正行列 A を次で定める.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & \end{pmatrix}$$

(1) $\mathbf{e}_n, A\mathbf{e}_n, A^2\mathbf{e}_n, \dots, A^{n-1}\mathbf{e}_n$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) A の最小多項式は A の固有多項式に一致することを示せ.

第 19 回の演習問題の解答

1. (1) $\begin{vmatrix} t-2 & -3 \\ -1 & t-4 \end{vmatrix} = t^2 - 6t + 5 = (t-1)(t-5)$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 5 である. $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ だから 5 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は

$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(2) $\begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -4 & t-3 \end{vmatrix} = t^2 - 4t - 5 = (t+1)(t-5)$ より, 与えられた行列の固有値は -1 と 5 である. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 5 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(3) $\begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ 0 & t-1 \end{vmatrix} = t^2 - 4t - 5 = (t-1)^2$ より, 与えられた行列の固有値は 1 のみである. このとき, 1 に対する固

有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(4) $\begin{vmatrix} t-3 & -8 & -12 \\ -2 & t-3 & -6 \\ 2 & 4 & t+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & -8 & -12 \\ -2 & t-3 & -6 \\ 0 & t+1 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & 4 & -12 \\ -2 & t+3 & -6 \\ 0 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t-3 & 4 \\ -2 & t+3 \end{vmatrix} = (t+1)^2(t-1)$

より, 与えられた行列の固有値は ± 1 である. $\begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ -2 & -2 & -6 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -6 & -6 \\ -2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -4 & -8 & -12 \\ -2 & -4 & -6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は

$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(5) $\begin{vmatrix} t-4 & 1 & 2 \\ -2 & t-1 & 2 \\ -1 & 1 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & -(t-2) & 0 \\ -2 & t-1 & 2 \\ -1 & 1 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & 0 \\ -2 & t-3 & 2 \\ -1 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-2) \begin{vmatrix} t-3 & 2 \\ 0 & t-1 \end{vmatrix} =$

$(t-1)(t-2)(t-3)$ より, 与えられた行列の固有値は 1, 2, 3 である. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底

は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 3

に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対角化

される.

$$(6) \begin{vmatrix} t-4 & -1 & -1 \\ -2 & t-4 & -1 \\ 0 & -1 & t-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-4 & -1 & 0 \\ -2 & t-4 & -(t-3) \\ 0 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-4 & -1 & 0 \\ -2 & t-5 & 0 \\ 0 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-3) \begin{vmatrix} t-4 & -1 \\ -2 & t-5 \end{vmatrix} =$$

$(t-3)(t^2-9t+18) = (t-3)^2(t-6)$ より, 与えられた行列の固有値は 3 と 6 である.

$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の

基底は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だ

から 6 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

$$(7) \begin{vmatrix} t-1 & -3 & -2 \\ 5 & t-17 & -10 \\ -7 & 21 & t+12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -3 & -2 \\ 5 & t-17 & -10 \\ 7(t-2) & 0 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+13 & -3 & -2 \\ 75 & t-17 & -10 \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2) \begin{vmatrix} t+13 & -3 \\ 75 & t-17 \end{vmatrix} =$$

$(t-2)(t^2-4t+4) = (t-2)^3$ より, 与えられた行列の固有値は 2 のみである. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 5 & -15 & -10 \\ -7 & 21 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -12 & -12 \\ 0 & 18 & 18 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可

能である.

$$(8) \begin{vmatrix} t-4 & 4 & -2 \\ -2 & t+2 & -1 \\ 4 & -4 & t+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 4 & -2 \\ t & t+2 & -1 \\ 0 & -4 & t+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 4 & -2 \\ 0 & t-2 & 1 \\ 0 & -4 & t+2 \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ -4 & t+2 \end{vmatrix} = t^3 \text{ より, 与えられた行列}$$

の固有値は 0 のみである. $\begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 0 に対する固有空間の基底は

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

$$(9) \begin{vmatrix} t+6 & 2 & 6 \\ -4 & t-3 & -3 \\ -8 & -2 & t-8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 2(t-2) & 0 \\ -4 & t-3 & -3 \\ -8 & -2 & t-8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & 0 \\ -4 & t+5 & -3 \\ -8 & 14 & t-8 \end{vmatrix} = (t-2) \begin{vmatrix} t+5 & -3 \\ 14 & t-8 \end{vmatrix} =$$

$(t-2)(t^2-3t+2) = (t-1)(t-2)^2$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 2 である. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 \\ -4 & -2 & -3 \\ -8 & -2 & -7 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & -3 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で

与えられる. $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ -4 & -1 & -3 \\ -8 & -2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対角化される.

$$(10) \begin{vmatrix} t-1 & -2 & -1 \\ 1 & t-4 & -1 \\ -2 & 4 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & -(t-2) & 0 \\ 1 & t-4 & -1 \\ -2 & 4 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & 0 \\ 1 & t-3 & -1 \\ -2 & 2 & t \end{vmatrix} = (t-2) \begin{vmatrix} t-3 & -1 \\ 2 & t \end{vmatrix} = (t-2)(t^2-3t+2) =$$

$(t-1)(t-2)^2$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 2 である. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる.

故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対角化される.

$$(11) \begin{vmatrix} t-6 & 3 & 7 \\ 1 & t-2 & -1 \\ -5 & 3 & t+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -(t-1) \\ 1 & t-2 & -1 \\ -5 & 3 & t+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 1 & t-2 & 0 \\ -5 & 3 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t-2 & 0 \\ 3 & t+1 \end{vmatrix} =$$

$(t+1)(t-1)(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は ± 1 と 2 である. $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -5 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } 1 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ で与えられる.}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -18 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & -12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -18 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } -1 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ で与えられる.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ で与えられる. } \begin{pmatrix} -4 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } 2$$

$$\text{に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ で与えられる. 故に, 与えられた行列は } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ によって } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ に}$$

対角化される.

$$(12) \begin{vmatrix} t-1 & -3 & 2 \\ 3 & t-13 & 7 \\ 5 & -19 & t+10 \end{vmatrix} = (t-1)(t-13)(t+10) - 114 - 105 + 9(t+10) + 133(t-1) - 10(t-13) =$$

$t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = (t-1)(t^2 - 3t + 2) = (t-1)^2(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 2 である.

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & -12 & 7 \\ 5 & -19 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 2 行を } -2 \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & -12 & 7 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{だから } 1 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ で与えられる. } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -11 & 7 \\ 5 & -19 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } 2 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ で与えられる. 故に, 与えられた行列は}$$

対角化不可能である.

$$(13) \begin{vmatrix} t-5 & 2 & -4 \\ -2 & t & -2 \\ 2 & -1 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-5 & 2 & -4 \\ -2 & t & -2 \\ 0 & t-1 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-5 & 6 & -4 \\ -2 & t+2 & -2 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t-5 & 6 \\ -2 & t+2 \end{vmatrix} =$$

$$(t-1)(t^2 - 3t + 2) = (t-1)^2(t-2) \text{ より, 与えられた行列の固有値は } 1 \text{ と } 2 \text{ である. } \begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } 1 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ で与えられる. } \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ だから } 2 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ で}$$

$$\text{与えられる. 故に, 与えられた行列は } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ によって } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ に対角化される.}$$

$$(14) \begin{vmatrix} t+1 & -2 & -2 \\ -3 & t+1 & 4 \\ 2 & -2 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & -2 & -2 \\ -3 & t+1 & 4 \\ -(t-1) & 0 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & -2 \\ 1 & t+1 & 4 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ 1 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1)(t^2+1)$$

より、与えられた行列の固有値は $1, \pm i$ である。 $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる。 $\begin{pmatrix} i+1 & -2 & -2 \\ -3 & i+1 & 4 \\ 2 & -2 & i-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 1 行を } -1 \text{ 倍して}}$

$\begin{pmatrix} i+1 & -2 & -2 \\ -3 & i+1 & 4 \\ -(i-1) & 0 & i-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{i-1} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} i+1 & -2 & -2 \\ -3 & i+1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} i-1 & -2 & 0 \\ 1 & i+1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & i+1 & 0 \\ 0 & i+1 & 1 \end{pmatrix}$ だから i に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$ で与えられる。 $\begin{pmatrix} -i+1 & -2 & -2 \\ -3 & -i+1 & 4 \\ 2 & -2 & -i-3 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 1 行を } -1 \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} -i+1 & -2 & -2 \\ -3 & -i+1 & 4 \\ i+1 & 0 & -(i+1) \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{i+1} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} -i+1 & -2 & -2 \\ -3 & -i+1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} -i-1 & -2 & 0 \\ 1 & -i+1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i+1 & 0 \\ 0 & i-1 & -1 \end{pmatrix}$ だから $-i$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \\ 1-i \end{pmatrix}$ で与

えられる。故に、与えられた行列は $\begin{pmatrix} 2 & 1+i & 1-i \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1+i & 1-i \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ に対角化される。

$$(15) \begin{vmatrix} t+5 & -6 & -4 \\ 7 & t-8 & -4 \\ 2 & -2 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & -(t-2) & 0 \\ 7 & t-8 & -4 \\ 2 & -2 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & 0 \\ 7 & t-1 & -4 \\ 2 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t-2) \begin{vmatrix} t-1 & -4 \\ 0 & t-3 \end{vmatrix} =$$

$(t-1)(t-2)(t-3)$ より、与えられた行列の固有値は $1, 2, 3$ である。 $\begin{pmatrix} 6 & -6 & -4 \\ 7 & -7 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる。 $\begin{pmatrix} 7 & -6 & -4 \\ 7 & -6 & -4 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与

えられる。 $\begin{pmatrix} 8 & -6 & -4 \\ 7 & -5 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる。故に、与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対角化される。

$$(16) \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 2 \\ -2 & t+1 & 2 \\ 2 & -2 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 2 \\ -(t+1) & t+1 & 0 \\ 2 & -2 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 2 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 0 & -2 & t \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t-1 & 2 \\ 0 & t \end{vmatrix} = t(t+1)(t-1) \text{ より, 与えら}$$

れた行列の固有値は $0, \pm 1$ である. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間

の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

だから 0 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は

$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対角化される.

$$(17) \begin{vmatrix} t-1 & -2 & 3 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -2 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & 3 \\ 1 & t & -1 \\ 0 & -(t+2) & t+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 1 & 3 \\ 1 & t-1 & -1 \\ 0 & 0 & t+2 \end{vmatrix} = (t+2) \begin{vmatrix} t-1 & 1 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix} = (t+2)(t^2-2t) =$$

$t(t+2)(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は $-2, 0, 2$ である. $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから -2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 0 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与

えられる. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} D \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固

有空間の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対角化さ

れる.

$$(18) \begin{vmatrix} t-3 & 6 & 4 \\ -1 & t+2 & 2 \\ 1 & -3 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & 6 & 4 \\ -1 & t+2 & 2 \\ 0 & t-1 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & 2 & 4 \\ -1 & t & 2 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t-3 & 2 \\ -1 & t \end{vmatrix} = (t-1)(t^2-3t+2) =$$

$(t-1)^2(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 2 である.

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } 1 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ で与えられる.}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } 2 \text{ に対する固有空間}$$

の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対角化される.

$$(19) \begin{vmatrix} t & 0 & -1 \\ -1 & t & 0 \\ -3 & -2 & t \end{vmatrix} = t^3 - 3t - 2 = (t+1)^2(t-2) \text{ より, 与えられた行列の固有値は } -1 \text{ と } 2 \text{ である.}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } -1 \text{ に対する固有空間}$$

の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

$$(20) \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ 2 & -3 & t \end{vmatrix} = t^3 - 3t + 2 = (t-1)^2(t+2) \text{ より, 与えられた行列の固有値は } 1 \text{ と } -2 \text{ である. } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } 1 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ で与えられる.}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(3,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } -2 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.}$$

$$(21) \begin{vmatrix} t & 5 & 7 \\ 1 & t+1 & 4 \\ -1 & -3 & t-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 5 & 7 \\ 1 & t+1 & 4 \\ 0 & t-2 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & -2 & 7 \\ 1 & t-3 & 4 \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2) \begin{vmatrix} t & -2 \\ 1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-2)^2(t-1) \text{ より, 与えら}$$

れた行列の固有値は 1 と 2 である. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は

対角化不可能である.

$$(22) \begin{vmatrix} t+1 & 1 & 4 \\ 5 & t & 7 \\ -3 & -1 & t-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & 1 & 4 \\ 5 & t & 7 \\ t-2 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & 1 & 4 \\ -2 & t & 7 \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2) \begin{vmatrix} t-3 & 1 \\ -2 & t \end{vmatrix} = (t-2)^2(t-1) \text{ より, 与えら}$$

れた行列の固有値は 1 と 2 である. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ -3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角

化不可能である.

$$(23) \begin{vmatrix} t+1 & 2 & 1 \\ -7 & t-7 & -3 \\ 5 & 4 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & 0 & 1 \\ -7 & t-1 & -3 \\ 5 & -2t+2 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & 0 & 1 \\ -7 & t-1 & -3 \\ -9 & 0 & t-5 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t+1 & 1 \\ -9 & t-5 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)^2$$

より, 与えられた行列の固有値は 1 と 2 である. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -7 & -5 & -3 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えら

れた行列は対角化不可能である.

$$(24) \begin{vmatrix} t+5 & -5 & 1 \\ 2 & t-1 & 0 \\ 1 & -1 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+5 & -5 & 1 \\ 0 & t+1 & -2t-2 \\ 1 & -1 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+5 & -5 & -9 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 1 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t+5 & -9 \\ 1 & t-1 \end{vmatrix} = (t+1)(t+2)^2$$

より, 与えられた行列の固有値は -1 と -2 である. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから -2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

$$(25) \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 0 \\ 1 & t-3 & 0 \\ 1 & -4 & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ 1 & t-3 \end{vmatrix} = (t+1)(t-2)^2 \text{ より, 与えられた行列の固有値は } -1 \text{ と}$$

2 である. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } -1 \text{ に対する固有空間の基底}$$

は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

$$(26) \begin{vmatrix} t-2 & 0 & 0 \\ 0 & t-4 & -1 \\ 0 & 1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2) \begin{vmatrix} t-4 & -1 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)(t-3)^2 \text{ より, 与えられた行列の固有値は } 2 \text{ と } 3$$

である. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } 2 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ で与えられる. 故に, 与え}$$

られた行列は対角化不可能である.

$$(27) \begin{vmatrix} t-3 & -1 & 1 \\ -2 & t-3 & 2 \\ -1 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & -(t-2) \\ -2 & t-3 & 2 \\ -1 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & 0 \\ -2 & t-3 & 0 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2) \begin{vmatrix} t-3 & 0 \\ -1 & t-2 \end{vmatrix} =$$

$(t-2)^2(t-3)$ より, 与えられた行列の固有値は 2 と 3 である. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから

2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

$$(28) \begin{vmatrix} t-6 & 1 & -5 \\ 3 & t-2 & 3 \\ 7 & -1 & t+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & 0 & t+1 \\ 3 & t-2 & 3 \\ 7 & -1 & t+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & 0 & 0 \\ 3 & t-2 & 0 \\ 7 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t-2 & 0 \\ -1 & t-1 \end{vmatrix} =$$

$(t+1)(t-1)(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は $\pm 1, 2$ である. $\begin{pmatrix} -7 & 1 & -5 \\ 3 & -3 & 3 \\ 7 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}}$
 $\begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 だから -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -5 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 7 & -1 & 7 \end{pmatrix}$
 $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}}$
 $\begin{pmatrix} -5 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
 $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}}$
 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる.
 $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & 8 \end{pmatrix}$
 $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}}$
 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
 $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}}$
 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対角化される.

$$(29) \begin{vmatrix} t-2 & 1 & -1 \\ -1 & t+2 & -1 \\ -1 & 5 & t-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 1 & 0 \\ -1 & t+2 & t+1 \\ -1 & 5 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 1 & 0 \\ 0 & t-3 & 0 \\ -1 & 5 & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t+1)(t-2)(t-3)$$

より, 与えられた行列の固有値は $-1, 2, 3$ である. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$
 $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}}$
 $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$
 $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}}$
 $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 だから -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$
 $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}}$
 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる.
 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
 $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}}$
 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$
 $\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}}$
 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 だから 3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対角化される.

$$(30) \begin{vmatrix} t-4 & 5 & -1 \\ -3 & t+4 & -1 \\ -3 & 5 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -(t-1) & 0 \\ -3 & t+4 & -1 \\ -3 & 5 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ -3 & t+1 & -1 \\ -3 & 2 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t+1 & -1 \\ 2 & t-2 \end{vmatrix} =$$

$(t-1)(t^2-t) = t(t-1)^2$ より, 与えられた行列の固有値は 0 と 1 である. $\begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$
 $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$
 $\begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -4 & 5 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$
 $\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}}$
 $\begin{pmatrix} -4 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 0 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対角化される.

$$(31) \begin{vmatrix} t-3 & -3 & 1 \\ 6 & t+8 & -3 \\ -2 & -3 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -(t-1) \\ 6 & t+8 & -3 \\ -2 & -3 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 6 & t+8 & 3 \\ -2 & -3 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t+8 & 3 \\ -3 & t-2 \end{vmatrix} =$$

$(t-1)(t^2+6t-7) = (t-1)^2(t+7)$ より, 与えられた行列の固有値は -7 と 1 である.

$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 6 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$\begin{pmatrix} -10 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} -10 & -3 & 1 \\ -24 & -8 & 0 \\ -72 & -24 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -24 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから -7 に対する固有

空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ に対角化される.

$$(32) \begin{vmatrix} t-4 & -6 & -2 \\ 1 & t-4 & -2 \\ -2 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-4)^2(t-1)+2-24+6(t-1)-2(t-4)-4(t-4) = t^3-9t^2+24t-20 = (t-2)(t^2-7t+10)$$

$= (t-2)^2(t-5)$ より, 与えられた行列の固有値は 2 と 5 である. $\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & -10 & -6 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 5 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与え

られる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

$$(33) \begin{vmatrix} t-3 & -2 & 1 \\ 6 & t+5 & -3 \\ 8 & 8 & t-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & 1 \\ -(t-1) & t+5 & -3 \\ 0 & 8 & t-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & 1 \\ 0 & t+3 & -2 \\ 0 & 8 & t-5 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t+3 & -2 \\ 8 & t-5 \end{vmatrix} =$$

$(t-1)(t^2-2t+1) = (t-1)^3$ より, 与えられた行列の固有値は 1 のみである. $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 6 & 6 & -3 \\ 8 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

$$(34) \begin{vmatrix} t-8 & -6 & -6 \\ -3 & t-5 & -3 \\ 12 & 12 & t+10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-8 & 0 & -6 \\ -3 & t-2 & -3 \\ 12 & -(t-2) & t+10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-8 & 0 & -6 \\ -3 & t-2 & -3 \\ 9 & 0 & t+7 \end{vmatrix} = (t-2) \begin{vmatrix} t-8 & -6 \\ 9 & t+7 \end{vmatrix} =$$

$(t-2)(t^2-t-2) = (t+1)(t-2)^2$ より, 与えられた行列の固有値は -1 と 2 である. $\begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ -3 & -3 & -3 \\ 12 & 12 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$

$$\begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } 2 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ で与えられる. } \begin{pmatrix} -9 & -6 & -6 \\ -3 & -6 & -3 \\ 12 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 0 & -12 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 3 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } -1 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対角化される.

$$(35) \begin{vmatrix} t-2 & 1 & -a \\ 1 & t-2 & -a \\ 1 & -1 & t-a-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & t-1 & -a \\ 1 & t-1 & -a \\ 1 & 0 & t-a-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & 0 & 0 \\ 1 & t-1 & -a \\ 1 & 0 & t-a-2 \end{vmatrix} = (t-3) \begin{vmatrix} t-1 & -a \\ 0 & t-a-2 \end{vmatrix} =$$

$(t-1)(t-3)(t-a-2)$ より, 与えられた行列の固有値は $1, 3, a+2$ である. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -a \\ 1 & -1 & -a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -a \\ 0 & 0 & -2a \\ 0 & 0 & -2a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 2 行を } -1 \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -a \\ 0 & 0 & -2a \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ だから } 1 \text{ に対する固有空間}$$

$$\text{の基底は } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ で与えられる. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & -1 & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1-2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{だから } 3 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 2a-1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ で与えられる. } \begin{pmatrix} a & 1 & -a \\ 1 & a & -a \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & a+1 & -a \\ 0 & a+1 & -a \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 行に加える}]{\text{第 1 行を } -1 \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} 0 & a+1 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } a+2 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} a \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} \text{ で与えられる. } a \neq \pm 1 \text{ なら}$$

$$\text{ば, 与えられた行列の固有値 } 1, 3, a+2 \text{ は相異なるため, } \begin{pmatrix} 1 & 2a-1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & a+1 \end{pmatrix} \text{ によって } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \text{ に対角化さ}$$

れる. $a = \pm 1$ ならば, 与えられた行列の固有値は 1 と 3 のみで, どちらの固有値に対する固有空間も 1 次元だから, 与えられた行列は対角化不可能である.

$$(36) \begin{vmatrix} t-1 & -a & 0 \\ 0 & t-1 & 0 \\ -a & -a & t-2 \end{vmatrix} = (t-2) \begin{vmatrix} t-1 & -a \\ 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2(t-2) \text{ より, 与えられた行列の固有値は } 1 \text{ と } 2 \text{ であ}$$

る. $a = 0$ ならば, 与えられた行列は対角行列である. $a \neq 0$ の場合,
$$\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & -a & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{-1}{a} \text{倍する}]{\text{第1行を}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & -a & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(1,2) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
 だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -a & 0 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a^2 - a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 だから 2 に対する固有空間の基底は e_3 で与えら

れる. 故に, $a \neq 0$ ならば与えられた行列は対角化不可能である.

$$(37) \begin{vmatrix} t-2 & 1 & -1 \\ -a & t-1+a & -a \\ -1 & 1 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & -1 \\ -a & t-1 & -a \\ -1 & t-1 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & -1 \\ -a & t-1 & -a \\ a-1 & 0 & t-2+a \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t-2 & -1 \\ a-1 & t-2+a \end{vmatrix} =$$

$(t-1)^2(t+a-3)$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と $-a+3$ である.
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -a & a & -a \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 1-a & 1 & -1 \\ -a & 2 & -a \\ -1 & 1 & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(1,2) \text{成分に関して}}$

$$\begin{pmatrix} 1-a & 1 & -1 \\ a-2 & 0 & 2-a \\ a-2 & 0 & 2-a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3行に加える}]{\text{第2行を}-1 \text{倍して}} \begin{pmatrix} 1-a & 1 & -1 \\ a-2 & 0 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 だから, $a \neq 2$ ならば $-a+3$ に対する固有空間の基底は

$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 従って $a \neq 2$ ならば与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a+3 \end{pmatrix}$ に対角化され

る. $a = 2$ ならば, 与えられた行列の固有値は 1 のみで, 1 に対する固有空間の次元は 2 だから, 与えられた行列は対角化不可能である.

$$(38) \begin{vmatrix} t-2 & 1 & -a+1 \\ -1 & t & -a+1 \\ -1 & 1 & t-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 1 & -a+1 \\ t-1 & t & -a+1 \\ 0 & 1 & t-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 1 & -a+1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 1 & t-a \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t-1 & 0 \\ 1 & t-a \end{vmatrix} = (t-1)^2(t-a)$$

より, 与えられた行列の固有値は 1 と a である.
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1-a \\ -1 & 1 & 1-a \\ -1 & 1 & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{成分に関して}}$$

する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $a \neq 1$ の場合, $\begin{pmatrix} a-2 & 1 & 1-a \\ -1 & a & 1-a \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(2,3) \text{成分に関して}}$

$$\begin{pmatrix} a-1 & 1-a & 0 \\ -1 & a & 1-a \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{a-1} \text{倍する}]{\text{第1行を}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & a & 1-a \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{a-1} \text{倍する}]{\text{第2行を}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 だから a に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, $a \neq 1$ ならば, 与えられた行列は

$\begin{pmatrix} 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ に対角化され、 $a = 1$ ならば、与えられた行列は対角化不可能である。

$$(39) \begin{vmatrix} t-a & 2 & -1 \\ a-5 & t-7 & 1 \\ -a+5 & 2 & t-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-a & 2 & -1 \\ a-5 & t-7 & 1 \\ 0 & t-5 & t-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-a & 3 & -1 \\ a-5 & t-8 & 1 \\ 0 & 0 & t-5 \end{vmatrix} = (t-5) \begin{vmatrix} t-a & 3 \\ a-5 & t-8 \end{vmatrix} =$$

$(t-5)(t^2 - (a+8)t + 5(a+3)) = (t-5)^2(t-a-3)$ より、与えられた行列の固有値は 5 と $a+3$ である。

$$\begin{pmatrix} 5-a & 2 & -1 \\ a-5 & -2 & 1 \\ 5-a & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 5-a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } 5 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5-a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ で与}$$

$$\text{えられる. } a \neq 2 \text{ の場合, } \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a-5 & a-4 & 1 \\ -a+5 & 2 & a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a-2 & a-2 & 0 \\ 2a-4 & 2a-4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{a-2} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2a-4 & 2a-4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } a+3 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ で与えられ}$$

る. 故に、 $a \neq 2$ ならば、与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5-a & 2 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix}$ に対角化され、 $a = 2$ ならば、

与えられた行列は対角化不可能である。

$$(40) \begin{vmatrix} t-2 & -a & 2a \\ 0 & t-8 & 18 \\ 0 & -3 & t+7 \end{vmatrix} = (t-2) \begin{vmatrix} t-8 & 18 \\ -3 & t+7 \end{vmatrix} = (t-2)^2(t+1) \text{ より, 与えられた行列の固有値は } 2 \text{ と } -1 \text{ であ}$$

$$\text{る. } \begin{pmatrix} 0 & -a & 2a \\ 0 & -6 & 18 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} \text{ だから } 2 \text{ に対する固有空間の基底は, } a \neq 0 \text{ ならば } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ で与}$$

$$\text{えられ, } a = 0 \text{ ならば } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ で与えられる. } \begin{pmatrix} -3 & -a & 2a \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \text{ だから } -1 \text{ に対}$$

$$\text{する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ で与えられる. 故に, } a = 0 \text{ ならば与えられた行列は } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ によって } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

に対角化され、 $a \neq 0$ ならば固有値は 2, -1 に対する固有空間の次元はともに 1 次元であるため、与えられた行列は対角化不可能である。

$$(41) \begin{vmatrix} t-a & 0 & 0 \\ 0 & t-b & -c \\ 0 & 0 & t-b \end{vmatrix} = (t-a)(t-b)^2 \text{ より, 与えられた行列の固有値は } a \text{ と } b \text{ である. } c = 0 \text{ ならば, 与え}$$

られた行列はすでに対角行列だから、 $c \neq 0$ の場合を考える。 $a = b$ ならば、与えられた行列の a に対する固有空間は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間だから, その基底は } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ で与えられる. } a \neq b \text{ な}$$

らば $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & -c \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$ だから a に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えら

れ、 b に対する固有空間は $\begin{pmatrix} b-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立1次方程式の解空間だから、その基底は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

で与えられる。故に、 $c \neq 0$ の場合は、与えられた行列は対角化不可能である。

$$(42) \begin{vmatrix} t-2 & -a & 0 \\ 0 & t-3a+1 & 0 \\ 0 & -3a+3 & t+1 \end{vmatrix} = (t-2)(t-3a+1)(t+1) \text{ より、与えられた行列の固有値は } 2, -1, 3a-1 \text{ である。}$$

$\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ 0 & -3a+3 & 0 \\ 0 & -3a+3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2行に加える}]{\text{第1行を}-3 \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3a+3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間

の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる。 $\begin{pmatrix} -3 & -a & 0 \\ 0 & -3a & 0 \\ 0 & -3a+3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2行に加える}]{\text{第3行を}-1 \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} -3 & -a & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3a+3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる。 $a=0$ ならば $3a-1=-1$ であり、 $a=1$

ならば $3a-1=2$ だから、いずれにしても、与えられた行列の固有値は -1 と 2 のみで、それぞれの固有値に対する固有空間の次元はともに1次元だから、与えられた行列は対角化不可能である。 $a \neq 0, 1$ の場合、 $3a-1$ に対する固有空間

は $\begin{pmatrix} 3a-3 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-3a & 3a \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立1次方程式の解空間だから、その基底は $\begin{pmatrix} a^2 \\ a(a-1) \\ (a-1)^2 \end{pmatrix}$ で与えら

れる。故に、 $a \neq 0, 1$ ならば、与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & a(a-1) \\ 0 & 1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3a-1 \end{pmatrix}$ に対角化され、 $a=0$

または $a=1$ ならば、与えられた行列は対角化不可能である。

$$(43) \begin{vmatrix} t+a-2b & 0 & -2a+2b \\ a-b & t-c & -a+b \\ a-b & 0 & t-2a+b \end{vmatrix} = (t-c) \begin{vmatrix} t+a-2b & -2a+2b \\ a-b & t-2a+b \end{vmatrix} = (t-c)(t^2 - (a+b)t + ab) \text{ より、与えられ}$$

た行列の固有値は a, b, c である。 $\begin{pmatrix} 2a-2b & 0 & -2a+2b \\ a-b & a-c & -a+b \\ a-b & 0 & -a+b \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(3,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-c & 0 \\ a-b & 0 & -a+b \end{pmatrix}$ だから

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は a に対する固有ベクトルである。 $\begin{pmatrix} a-b & 0 & -2a+2b \\ a-b & b-c & -a+b \\ a-b & 0 & -2a+2b \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} a-b & 0 & -2a+2b \\ 0 & b-c & a-b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

だから $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は b に対する固有ベクトルである。また、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は c に対する固有ベクトルである。 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は

1次独立であり、与えられた行列の固有ベクトルからなる \mathbf{K}^3 の基底だから、与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ によって

$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ に対角化される.

$$(44) \begin{vmatrix} t-3 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & t-7 & 7 & -1 \\ -2 & -10 & t+10 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & t+3 & -(t+3) & 0 \\ -2 & -10 & t+10 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & t+3 & 0 & 0 \\ -2 & -10 & t & -1 \\ 0 & 4 & 0 & t-1 \end{vmatrix} =$$

$$(t+3) \begin{vmatrix} t-3 & 1 & -1 \\ -2 & t & -1 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t+3)(t-1) \begin{vmatrix} t-3 & 1 \\ -2 & t \end{vmatrix} = (t+3)(t-1)(t^3 - 3t + 2) = (t+3)(t-1)^2(t-2) \text{ より, 与えられ}$$

た行列の固有値は $-3, 1, 2$ である. $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & -6 & 7 & -1 \\ -2 & -10 & 11 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第4列の掃き出し}]{(1,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -6 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & -10 & 7 & -1 \\ -2 & -10 & 7 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第4列の掃き出し}]{(4,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -6 & -3 & 4 & 0 \\ -2 & -11 & 8 & 0 \\ -2 & -11 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -6 & -3 & 4 & 0 \\ 10 & -5 & 0 & 0 \\ 10 & -5 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -12 & 0 & 4 & 0 \\ 10 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

だから -3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 7 & -1 \\ -2 & -10 & 12 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第4列の掃き出し}]{(4,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ だから 2 に対す

る固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に

対角化される.

$$(45) \begin{vmatrix} t-4 & -6 & 9 & 3 \\ -1 & t-3 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & t+5 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -6 & 9 & 3 \\ 0 & t-3 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & t+5 & 2 \\ t-1 & -2 & 3 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -6 & 9 & 3 \\ 0 & t-3 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & t+5 & 2 \\ 0 & 4 & -6 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t-3 & 3 & 1 \\ -4 & t+5 & 2 \\ 4 & -6 & t-3 \end{vmatrix} =$$

$$(t-1) \begin{vmatrix} t-3 & 3 & 1 \\ -4 & t+5 & 2 \\ 0 & t-1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t-3 & 2 & 1 \\ -4 & t+3 & 2 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2 \begin{vmatrix} t-3 & 2 \\ -4 & t+3 \end{vmatrix} = (t-1)^2(t^2-1) = (t-1)^3(t+1) \text{ よ}$$

り, 与えられた行列の固有値は 1 と -1 である.
$$\begin{pmatrix} -3 & -6 & 9 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 6 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 だから 1 に対

する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる.
$$\begin{pmatrix} -5 & -6 & 9 & 3 \\ -1 & -4 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 14 & -6 & -2 \\ -1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 12 & -6 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
 だから -1 に対する固有空間の基底は

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対角化される.

$$(46) \begin{vmatrix} t & 0 & 0 & -1 \\ 2 & t & 2 & 0 \\ -3 & -1 & t-3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & t & 2 & 0 \\ t-3 & -1 & t-3 & 1 \\ t^2-3t+2 & 0 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & t & 2 \\ t-3 & -1 & t-3 \\ t^2-3t+2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (t^2-3t+2) \begin{vmatrix} t & -1 \\ 2 & t-3 \end{vmatrix} =$$

$(t-1)(t-2)(t^2-3t+2) = (t-1)^2(t-2)^2$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 2 である.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 だから 1 に対する固有空間の基底は

$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる.
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(1,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対角化される.

$$(47) \begin{vmatrix} t+3a-4 & 4a-2 & 2a-1 \\ -8a+4 & t-9a+2 & -4a+2 \\ 4a-2 & 4a-2 & t+a-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+3a-4 & 0 & 2a-1 \\ -8a+4 & t-a-2 & -4a+2 \\ 4a-2 & -2(t-a-2) & t+a-3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} t+3a-4 & 0 & 2a-1 \\ -8a+4 & t-a-2 & -4a+2 \\ -12a+6 & 0 & t-7a+1 \end{vmatrix} = (t-a-2) \begin{vmatrix} t+3a-4 & 2a-1 \\ -12a+6 & t-7a+1 \end{vmatrix} = (t-a-2)^2(t-3a-1) \text{ より, 与えられた行}$$

列の固有値は $a+2$ と $3a+1$ である. $\begin{pmatrix} 4a-2 & 4a-2 & 2a-1 \\ -8a+4 & -8a+4 & -4a+2 \\ 4a-2 & 4a-2 & 2a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 4a-2 & 4a-2 & 2a-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

だから $a+2$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 6a-3 & 4a-2 & 2a-1 \\ -8a+4 & -6a+3 & -4a+2 \\ 4a-2 & 4a-2 & 4a-2 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 6a-3 & 4a-2 & 2a-1 \\ 4a-2 & 2a-1 & 0 \\ -8a+4 & -4a+2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -2a+1 & 0 & 2a-1 \\ 4a-2 & 2a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } 3a+1 \text{ に対する固}$$

有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} a+2 & 0 & 0 \\ 0 & a+2 & 0 \\ 0 & 0 & 3a+1 \end{pmatrix}$

に対角化される.

$$(48) \begin{vmatrix} t-ab+2 & -a^2 & -3a \\ -b^2 & t-ab+2 & -3b \\ b & a & t+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+2 & 0 & a(t+2) \\ -b^2 & t-ab+2 & -3b \\ b & a & t+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+2 & 0 & 0 \\ -b^2 & t-ab+2 & ab^2-3b \\ b & a & t-ab+5 \end{vmatrix} =$$

$$(t+2) \begin{vmatrix} t-ab+2 & ab^2-3b \\ a & t-ab+5 \end{vmatrix} = (t+2)^2(t-2ab+5) \text{ より, 与えられた行列の固有値は } -2 \text{ と } 2ab-5 \text{ である.}$$

$$\begin{pmatrix} -ab & -a^2 & -3a \\ -b^2 & -ab & -3b \\ b & a & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b & a & 3 \end{pmatrix} \text{ だから } -2 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -a \end{pmatrix} \text{ で与えら}$$

れる. $\begin{pmatrix} ab-3 & -a^2 & -3a \\ -b^2 & ab-3 & -3b \\ b & a & 2ab \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行に加える}]{\text{第 3 行を } -a \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} -3 & -2a^2 & -2a^2b-3a \\ -b^2 & ab-3 & -3b \\ b & a & 2ab \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2a^2 & -2a^2b-3a \\ 0 & \frac{2}{3}a^2b+ab-3 & b(\frac{2}{3}a^2b^2+ab-3) \\ 0 & -\frac{2}{3}a^2b+a & b(-\frac{2}{3}a^2b+a) \end{pmatrix} \text{ だから } 2ab-5 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix} \text{ で与えられる. 故に,}$$

与えられた行列は $\begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & 3 & b \\ -b & -a & -1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2ab-5 \end{pmatrix}$ に対角化される.

$$(49) \begin{vmatrix} t+3a-9 & 2 & a-2 \\ 3a-1 & t & a \\ -9a+18 & -6 & t-3a+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+3a-9 & 2 & a-2 \\ 3a-1 & t & a \\ 3(t-3) & 0 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & 2 & a-2 \\ -1 & t & a \\ 0 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t-3) \begin{vmatrix} t-3 & 2 \\ -1 & t \end{vmatrix} =$$

$$(t-3)(t^2-3t+2) = (t-1)(t-2)(t-3) \text{ より, 与えられた行列の固有値は } 1, 2, 3 \text{ である. } \begin{pmatrix} 3a-8 & 2 & a-2 \\ 3a-1 & 1 & a \\ -9a+18 & -6 & -3a+4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow[\text{第2行を第3行に加える}]{\text{第1行を2倍したものと}} \begin{pmatrix} 3a-8 & 2 & a-2 \\ 3a-1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(3,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3a-6 & 0 & a-2 \\ 3a & 0 & a \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1行に加える}]{\text{第2行を}-1 \text{ 倍して}} \\ & \begin{pmatrix} -6 & 0 & -2 \\ 3a & 0 & a \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -6 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } 1 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ で与えられる.} \\ & \begin{pmatrix} 3a-7 & 2 & a-2 \\ 3a-1 & 2 & a \\ -9a+18 & -6 & -3a+5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2行を第3行に加える}]{\text{第1行を2倍したものと}} \begin{pmatrix} 3a-7 & 2 & a-2 \\ 3a-1 & 2 & a \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -6 & 0 & -2 \\ 3a-1 & 2 & a \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ だから } 2 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ で与えられる.} \begin{pmatrix} 3a-6 & 2 & a-2 \\ 3a-1 & 3 & a \\ -9a+18 & -6 & -3a+6 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[\text{第2行を第3行に加える}]{\text{第1行を2倍したものと}} \begin{pmatrix} 3a-6 & 2 & a-2 \\ 3a-1 & 3 & a \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(3,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3a-16 & 0 & a-6 \\ 3a-16 & 0 & a-6 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1行に加える}]{\text{第2行を}-1 \text{ 倍して}} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3a-16 & 0 & a-6 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ だから } 3 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} -a+6 \\ -a+2 \\ 3a-16 \end{pmatrix} \text{ で与えられる. 故に, 与えられた行列は} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a+6 \\ 1 & 1 & -a+2 \\ -3 & -6 & 3a-16 \end{pmatrix} \text{ によって } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ に対角化される.} \end{aligned}$$

$$(50) \begin{vmatrix} t+6a-5 & -6 & 2a-3 \\ 3a-6 & t-5 & a-3 \\ -18a+18 & 18 & t-6a+10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+6a-5 & -6 & 2a-3 \\ 3a-6 & t-5 & a-3 \\ 3(t+1) & 0 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+4 & -6 & 2a-3 \\ 3 & t-5 & a-3 \\ 0 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t+4 & -6 \\ 3 & t-5 \end{vmatrix} =$$

$$(t+1)(t^2-t-2) = (t+1)^2(t-2) \text{ より, 与えられた行列の固有値は } -1 \text{ と } 2 \text{ である.} \begin{pmatrix} 6a-6 & -6 & 2a-3 \\ 3a-6 & -6 & a-3 \\ -18a+18 & 18 & -6a+9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 6a-6 & -6 & 2a-3 \\ -3a & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots (*) \text{ だから, } a=0 \text{ ならば } -1 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{で与えられる. } a \neq 0 \text{ ならば } (*) \xrightarrow[-\frac{1}{a} \text{ 倍する}]{\text{第2行を}} \begin{pmatrix} 6a-6 & -6 & 2a-3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } -1 \text{ に対す}$$

$$\text{る固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ で与えられる.} \begin{pmatrix} 6a-3 & -6 & 2a-3 \\ 3a-6 & -3 & a-3 \\ -18a+18 & 18 & -6a+12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 3a-6 & -3 & a-3 \\ -18 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } 2 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ で与えられる. 故に, 与えられた行列は}$$

$$a=0 \text{ ならば } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \text{ によって } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ に対角化され, } a \neq 0 \text{ ならば対角化不可能である.}$$

$$(51) \begin{vmatrix} t+4 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & t+1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & t+1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & t-5 \end{vmatrix} = (t+1)^2 \begin{vmatrix} t+4 & -3 \\ 6 & t-5 \end{vmatrix} = (t+1)^2(t^2-t+2) = (t+1)^3(t-2) \text{ より, 与えられ}$$

た行列の固有値は -1 と 2 である. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間

間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(1,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する

固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

に対角化される.

$$(52) \begin{vmatrix} t+3 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & t-3 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & t-2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 & -(t-1) \\ -2 & t-3 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & t-2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & t-3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & t-2 & -2 \\ 4 & 2 & 2 & t+2 \end{vmatrix} =$$

$$(t-1) \begin{vmatrix} t-3 & -2 & -2 \\ -1 & t-2 & -2 \\ 2 & 2 & t+2 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t-1 & -2 & -2 \\ -(t-1) & t-2 & -2 \\ 0 & 2 & t+2 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t-1 & -2 & -2 \\ 0 & t-4 & -4 \\ 0 & 2 & t+2 \end{vmatrix} = (t-1)^2 \begin{vmatrix} t-4 & -4 \\ 2 & t+2 \end{vmatrix} =$$

$t(t-1)^2(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は $0, 1, 2$ である. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(1,4) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 0 に対する固有

空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(1,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(3,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(4,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから 2 に対}$$

する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

に対角化される.

$$(53) \begin{vmatrix} t-3 & -2 & -4 & -1 \\ 5 & t+2 & 8 & -1 \\ -2 & 0 & t-4 & 2 \\ -5 & -2 & -8 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & -2 & -4 & -1 \\ 5 & t+2 & 8 & -1 \\ -2 & 0 & t-4 & 2 \\ 0 & t & 0 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & -1 & -4 & -1 \\ 5 & t+3 & 8 & -1 \\ -2 & -2 & t-4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} t-3 & -1 & -4 \\ 5 & t+3 & 8 \\ -2 & -2 & t-4 \end{vmatrix} =$$

$$t \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -4 \\ -(t-2) & t+3 & 8 \\ 0 & -2 & t-4 \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -4 \\ 0 & t+2 & 4 \\ 0 & -2 & t-4 \end{vmatrix} = t(t-2) \begin{vmatrix} t+2 & 4 \\ -2 & t-4 \end{vmatrix} = t^2(t-2)^2 \text{ より, 与えられた行列の固有値}$$

は 0 と 2 である. $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 & -1 \\ 5 & 2 & 8 & -1 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ -5 & -2 & -8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

だから 0 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -1 \\ 5 & 4 & 8 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ -5 & -2 & -8 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & -6 & -12 & -6 \\ 0 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 8 & 12 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから 2 に}$$

対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

$$(54) \begin{vmatrix} t+1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & t-1 & -1 & 0 \\ -a & -1 & t-a & -2 \\ -1 & -1 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & t-1 & -1 & 0 \\ t-a+1 & 0 & t-a+1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 0 & t-1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & t-a+1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & t-3 \end{vmatrix} =$$

$$(t-a+1) \begin{vmatrix} t & 1 & 2 \\ 0 & t-1 & 0 \\ -1 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-a+1)(t-1) \begin{vmatrix} t & 2 \\ -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-a+1)(t-1)(t^2-3t+2) = (t-a+1)(t-1)^2(t-2) \text{ よ}$$

り、与えられた行列の固有値は $1, 2, a-1$ である.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -a & -1 & 1-a & -2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$(1,3)$ 成分に関して
第 1 列の掃き出し $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -a & -1 & 2-a & -2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -a-1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -a+3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

だから 2 に対する固有空間の基底は、 $a=3$ ならば $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられ、 $a \neq 3$ ならば $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$a \neq 2, 3$ の場合、 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ -1 & a-2 & -1 & 0 \\ -a & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & a-4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & a^2-2a+1 & -a+1 & 2 \\ -1 & a-2 & -1 & 0 \\ 0 & -a^2+2a-1 & a-1 & -2 \\ 0 & -a+1 & 1 & a-4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{に加える}]{\text{第 1 行を第 3 行}}$

$$\begin{pmatrix} 0 & a^2-2a+1 & -a+1 & 2 \\ -1 & a-2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a+1 & 1 & a-4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{して第 1 行に加える}]{\text{第 4 行を } a-1 \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (a-2)(a-3) \\ -1 & a-2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a+1 & 1 & a-4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (a-2)(a-3) \\ -1 & a-2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(4,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (a-2)(a-3) \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } a-1 \text{ に対する}$$

固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. 以上から、 $a=3$ の場合、与えられた行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ によつ

て $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対角化され、 $a=2$ の場合、与えられた行列は対角化不可能、 $a \neq 2, 3$ の場合、与えられた行列は

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ によつて } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \text{ に対角化される.}$$

$$(55) \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & t+3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & t-1 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & t-3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & t+3 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & t-1 & -4 \\ -2 & -4 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t+1)(t-1) \begin{vmatrix} t+3 & 0 & 2 \\ 8 & t-1 & -4 \\ -4 & 0 & t-3 \end{vmatrix} =$$

$(t+1)(t-1)^2 \begin{vmatrix} t+3 & 2 \\ -4 & t-3 \end{vmatrix} = (t+1)^2(t-1)^3$ より, 与えられた行列の固有値は $1, -1$ である.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(3,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 5 列の掃き出し}]{(5,5) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ だから } 1 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ で与えられる.}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 8 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{だから } -1 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ で与えられる. 故に, 与えられた行列は } \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{によって } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ に対角化される.}$$

2. (1) 与えられた行列を A とする. $p=q=0$ の場合は, $A=E_2$ だから $(p,q) \neq (0,0)$ と仮定する. A の固有多項式は $t^2 - (2-p-q)t + 1-p-q = (t-1)(t-1+p+q)$ だから, A の固有値は 1 と $1-p-q$ である. $E_2 - A = \begin{pmatrix} p & -q \\ -p & q \end{pmatrix}$, $(1-p-q)E_2 - A = \begin{pmatrix} -q & -q \\ -p & -p \end{pmatrix}$ だから, $1, 1-p-q$ に対する A の固有ベクトルとして, それぞれ $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ. $p+q \neq 0$ の場合, $P = \begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p+q} & \frac{1}{p+q} \\ \frac{-p}{p+q} & \frac{q}{p+q} \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix}$ だから, A^n は次で与えられる.

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{q+p(1-p-q)^n}{2} & \frac{q-q(1-p-q)^n}{2} \\ \frac{p-p(1-p-q)^n}{2} & \frac{p+q(1-p-q)^n}{2} \end{pmatrix}$$

$p+q=0$ の場合, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -2p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから, A^n は次で与えられる.

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & -2p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2np \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-np & -np \\ np & 1+np \end{pmatrix}$$

(2) 与えられた行列を A とする. A の固有多項式は $t^2 - (2\lambda + ac + bd)t + \lambda(\lambda + ac + bd) = (t - \lambda)(t - \lambda - ac - bd)$ だから, A の固有値は λ と $\lambda + ac + bd$ である. $\lambda E_2 - A = \begin{pmatrix} -ac & -ad \\ -bc & -bd \end{pmatrix}$, $(\lambda + ac + bd)E_2 - A = \begin{pmatrix} bd & -ad \\ -bc & ac \end{pmatrix}$

だから, $ac + bd \neq 0$ の場合は, λ , $\lambda + ac + bd$ に対する A の固有ベクトルとして, それぞれ $\begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を選ぶ.

$P = \begin{pmatrix} a & -d \\ b & c \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda + ac + bd & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{c}{ac+bd} & \frac{d}{ac+bd} \\ -\frac{b}{ac+bd} & \frac{a}{ac+bd} \end{pmatrix}$ だから, A^n は次で与えられる.

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda + ac + bd & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{ac(\lambda+ac+bd)^n + bd\lambda^n}{ac+bd} & \frac{ad((\lambda+ac+bd)^n - \lambda^n)}{ac+bd} \\ \frac{bc((\lambda+ac+bd)^n - \lambda^n)}{ac+bd} & \frac{bd(\lambda+ac+bd)^n + ac\lambda^n}{ac+bd} \end{pmatrix}$$

$a = b = 0$ の場合は $A = \lambda E_2$ だから $A^n = \lambda^n E_2$ である. $ac + bd = 0$ かつ $(a, b) \neq (0, 0)$ の場合, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は λ に

対する固有ベクトルで, $P = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ とおけば P は正則行列である. このとき, $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{a}}{|a|^2 + |\bar{b}|^2} & \frac{\bar{b}}{|a|^2 + |\bar{b}|^2} \\ -\frac{b}{|a|^2 + |\bar{b}|^2} & \frac{a}{|a|^2 + |\bar{b}|^2} \end{pmatrix}$,

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & \bar{a}d - \bar{b}c \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ であり, n による数学的帰納法で $\begin{pmatrix} \lambda & \bar{a}d - \bar{b}c \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n(\bar{a}d - \bar{b}c)\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$ が示されるため, A^n は以下で与えられる.

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda & \bar{a}d - \bar{b}c \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^n + acn\lambda^{n-1} & adn\lambda^{n-1} \\ bcn\lambda^{n-1} & \lambda^n + bdn\lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$

3. $A = (a_{ij})$ とすれば, $f(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}\mathbf{v}_i$ だから

$$f(\mathbf{v}) = f\left(\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{v}_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j f(\mathbf{v}_j) = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}\mathbf{v}_i\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}x_j \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right) \mathbf{v}_i$$

である. 一方 $\lambda \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \lambda x_i \mathbf{v}_i$ より $f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ が成り立つことと, $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right) \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \lambda x_i \mathbf{v}_i$ が成り立つことは同

値である. さらに, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ の 1 次独立性から, $f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ が成り立つためには $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \lambda x_i$ が $i = 1, 2, \dots, n$ に対して成り立つことが必要十分である. この等式の左辺は $A\tilde{\mathbf{x}}$ の第 i 成分に他ならないため, $f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ が成り立つためには $A\tilde{\mathbf{x}} = \lambda \tilde{\mathbf{x}}$ が成り立つことが必要十分である. また, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ は 1 次独立だから $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ であることと $\tilde{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ であることは同値である. 従って λ が f の固有値であり, かつ \mathbf{x} が λ に対する f の固有ベクトルであるためには, λ が A の固有ベクトルであり, かつ $\tilde{\mathbf{x}}$ が λ に対する A の固有ベクトルであることが必要十分である.

4. $P^{-1}AP$ が, λ_j を (j, j) 成分とする対角行列ならば, $P^{-1}AP = (\lambda_1 \mathbf{e}_1 \ \lambda_2 \mathbf{e}_2 \ \cdots \ \lambda_j \mathbf{e}_j \ \cdots \ \lambda_n \mathbf{e}_n)$ だから, $P\mathbf{e}_j = \mathbf{v}_j$ に注意すれば $AP = P(\lambda_1 \mathbf{e}_1 \ \lambda_2 \mathbf{e}_2 \ \cdots \ \lambda_j \mathbf{e}_j \ \cdots \ \lambda_n \mathbf{e}_n) = (P(\lambda_1 \mathbf{e}_1) \ P(\lambda_2 \mathbf{e}_2) \ \cdots \ P(\lambda_j \mathbf{e}_j) \ \cdots \ P(\lambda_n \mathbf{e}_n)) = (\lambda_1 \mathbf{v}_1 \ \lambda_2 \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \lambda_j \mathbf{v}_j \ \cdots \ \lambda_n \mathbf{v}_n)$ が得られるため, $j = 1, 2, \dots, n$ に対して AP の第 j 列は $\lambda_j \mathbf{v}_j$ である. 一方, P の第 j 列は \mathbf{v}_j だから, AP の第 j 列は $A\mathbf{v}_j$ である. 従って $A\mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j$ が成り立ち, P が正則行列であることから, P の各列ベクトルは零ベクトルではないため, λ_j は A の固有値で, \mathbf{v}_j が λ_j に対する固有ベクトルである.

逆に λ_j が A の固有値で、 \mathbf{v}_j が λ_j に対する固有ベクトルであるとする。このとき $A\mathbf{v}_j = \lambda_j\mathbf{v}_j$ だから $AP = A(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_j \cdots \mathbf{v}_n) = (A\mathbf{v}_1 A\mathbf{v}_2 \cdots A\mathbf{v}_j \cdots A\mathbf{v}_n) = (\lambda_1\mathbf{v}_1 \lambda_2\mathbf{v}_2 \cdots \lambda_j\mathbf{v}_j \cdots \lambda_n\mathbf{v}_n)$ である。 $\mathbf{v}_j = P\mathbf{e}_j$ に注意すれば、上式から $AP = (\lambda_1P\mathbf{e}_1 \lambda_2P\mathbf{e}_2 \cdots \lambda_jP\mathbf{e}_j \cdots \lambda_nP\mathbf{e}_n) = P(\lambda_1\mathbf{e}_1 \lambda_2\mathbf{e}_2 \cdots \lambda_j\mathbf{e}_j \cdots \lambda_n\mathbf{e}_n)$ が得られ、 P が正則行列であることから、 $P^{-1}AP = (\lambda_1\mathbf{e}_1 \lambda_2\mathbf{e}_2 \cdots \lambda_j\mathbf{e}_j \cdots \lambda_n\mathbf{e}_n)$ が成り立ち、 $P^{-1}AP$ は λ_j を (j, j) 成分とする対角行列である。

5. (1) $f(\mathbf{u}) = a_{11}\mathbf{u} + a_{21}\mathbf{v} + a_{31}\mathbf{w}$, $f(\mathbf{v}) = a_{12}\mathbf{u} + a_{22}\mathbf{v} + a_{32}\mathbf{w}$, $f(\mathbf{w}) = a_{13}\mathbf{u} + a_{23}\mathbf{v} + a_{33}\mathbf{w}$ とおき、各等式の両辺の

$$\text{成分を比較すれば, } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{31} \\ a_{11} + a_{21} \\ a_{21} + a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} + a_{32} \\ a_{12} + a_{22} \\ a_{22} + a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} + a_{33} \\ a_{13} + a_{23} \\ a_{23} + a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \text{ が得られるため, } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{が成り立つ. ここで, } \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\text{より, } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ だから, } [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] \text{ に関する } f \text{ の表現行列は } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ である.}$$

(2) (1) で求めた f の表現行列を A とすれば、問題 3 の結果から、 f の固有値は A の固有値である。

$$\begin{vmatrix} t-1 & 0 & 1 \\ 0 & t-1 & 1 \\ 1 & 1 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -(t-1) & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ 1 & 1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ 1 & 1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ 1 & 2 & t-2 \end{vmatrix} =$$

$$(t-1) \begin{vmatrix} t-1 & 1 \\ 2 & t-2 \end{vmatrix} = t(t-1)(t-3) \text{ だから, } f \text{ の固有値は } 0, 1, 3 \text{ である. } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } A \text{ の } 0 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ で与えられ}$$

$$\text{る. } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } A \text{ の } 1 \text{ に対する固有空間の基底は } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ で与えられる.}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(2,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから } A \text{ の } 3 \text{ に対する固有空間の基}$$

基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ で与えられる。故に問題 3 の結果から、 f の固有値 0, 1, 3 に対する固有空間の基底はそれぞれ $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w}$ で与えられる。

6. (1) 求める表現行列を $A = (a_{ij})$ とおくと、 $j = 1, 2, 3$ に対し、 $f(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^3 a_{ij}\mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} a_{1j} - a_{3j} \\ -a_{1j} + a_{2j} + aa_{3j} \\ -a_{2j} + (2a-1)a_{3j} \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 2a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{pmatrix}$ である。従って $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 2a-1 \end{pmatrix}$ とおけば $PA = (f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2) f(\mathbf{v}_3))$ が成り

立つ。ここで、 $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2a-1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2a-1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3a-2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{3a-2} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} \end{array} \right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3a-1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2a-1}{3a-2} & \frac{2a-1}{3a-2} & -\frac{a-1}{3a-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} \end{array} \right)$ より、 $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3a-1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} \\ \frac{2a-1}{3a-2} & \frac{2a-1}{3a-2} & -\frac{a-1}{3a-2} \\ \frac{1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} \end{pmatrix}$ だから $A = P^{-1}(f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2) f(\mathbf{v}_3)) =$

$\begin{pmatrix} \frac{3a-1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} \\ \frac{2a-1}{3a-2} & \frac{2a-1}{3a-2} & -\frac{a-1}{3a-2} \\ \frac{1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} & \frac{1}{3a-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1-2a \\ -2 & 1 & 2a \\ 0 & -2 & a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{6a^2-8a+2}{3a-2} \\ 0 & 2 & -\frac{a^2-4a+2}{3a-2} \\ 0 & 0 & \frac{a}{3a-2} \end{pmatrix}$ である。

(2) $|tE_3 - A| = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & \frac{6a^2-8a+2}{3a-2} \\ 0 & t-2 & \frac{a^2-4a+2}{3a-2} \\ 0 & 0 & t - \frac{a}{3a-2} \end{vmatrix} = (t-2)^2 \left(t - \frac{a}{3a-2} \right)$ だから A の固有値は固有値は 2 と $\frac{a}{3a-2}$ で

ある。故に、問題 3 の結果から f の固有値は 2 と $\frac{a}{3a-2}$ である。

(3) $2E_3 - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{6a^2-8a+2}{3a-2} \\ 0 & 0 & \frac{a^2-4a+2}{3a-2} \\ 0 & 0 & \frac{5a-4}{3a-2} \end{pmatrix}$ であり、 $\frac{a^2-4a+2}{3a-2}$ と $\frac{5a-4}{3a-2}$ の少なくとも一方は 0 でないため、 A

の固有値 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる。 $a \neq \frac{4}{5}$ の場合、 A の固有値 $\frac{a}{3a-2}$ は 2 と異なる。

り、 $\frac{a}{3a-2}E_3 - A = \begin{pmatrix} \frac{-5a+4}{3a-2} & -1 & \frac{6a^2-8a+2}{3a-2} \\ 0 & \frac{-5a+4}{3a-2} & \frac{a^2-4a+2}{3a-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} \frac{-5a+4}{3a-2} & 0 & \frac{27a^3-50a^2+28a-4}{(3a-2)(5a-4)} \\ 0 & \frac{-5a+4}{3a-2} & \frac{a^2-4a+2}{3a-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから

A の固有値 $\frac{a}{3a-2}$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 27a^3 - 50a^2 + 28a - 4 \\ (5a-4)(a^2-4a+2) \\ (5a-4)^2 \end{pmatrix}$ で与えられる。問題 3 の結果から f の固有

値 2 に対する固有空間の基底は $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられ、 $a \neq \frac{4}{5}$ の場合、 f の固有値 $\frac{a}{3a-2}$ に対する固有空間の基底

は $(27a^3 - 50a^2 + 28a - 4)\mathbf{v}_1 + (5a - 4)(a^2 - 4a + 2)\mathbf{v}_2 + 2 + (5a - 4)^2\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 27a^3 - 75a^2 + 68a - 20 \\ 3a^3 - 14a^2 + 14a - 4 \\ 45a^3 - 81a^2 + 46a - 8 \end{pmatrix}$ で与えられる.

以上から, f の固有ベクトルからなる \mathbf{R}^3 の基底は存在しない.

7. (1) $f(1) = 2, f(x) = 2x + 1, f(x^2) = 2x^2 + 2x$ だから, 求める行列は $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) 上で求めた行列を A とすると A の固有多項式は $(t - 2)^3$ となるため A の固有値は 2 だけである. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を 2

に対する A の固有ベクトルとすれば $2E_3 - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから $y = z = 0$ となるため, A の固有ベクトルは \mathbf{e}_1

のスカラー倍である. 従って, A の固有ベクトルからなる \mathbf{R}^3 の基底は存在しないため, A は対角化不可能である.

8. (1) 正方行列 X に対して $|{}^tX| = |X|$ だから $F_A(x) = |xE_n - A| = |{}^t(xE_n - A)| = |x{}^tE_n - {}^tA| = |xE_n - {}^tA| = F_{{}^tA}(x)$.

(2) $F_A(x) = |xE_n - A| = \sum_{k=0}^n c_k(A)x^k$ とおけば, 行列式の定義から, 各 $c_k(A)$ は a_{ij} の整数係数の多項式である. すなわち, x_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) を変数とし, 各単項式の係数が整数である n^2 変数多項式 $f_k(x_{11}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{nn})$ で, 任意の n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して $c_k(A) = f_k(a_{11}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{nn})$ となるものがある. 共役複素数に関して $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$ が成り立ち, $f_k(x_{11}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{nn})$ の各単項式の係数が整数であることから, $c_k(\overline{A}) = f_k(\overline{a_{11}}, \dots, \overline{a_{ij}}, \dots, \overline{a_{nn}}) = \overline{f_k(a_{11}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{nn})} = \overline{c_k(A)}$ が得られる.

(3) $F_A(x) = \sum_{k=0}^n c_k(A)x^k$ とおけば, (1) と (2) の結果から A^* の固有多項式 $F_{A^*}(x)$ は $F_{A^*}(x) = \sum_{k=0}^n \overline{c_k(A)}x^k$ である. λ が A の固有値ならば $F_A(\lambda) = \sum_{k=0}^n c_k(A)\lambda^k = 0$ だから $F_{A^*}(\overline{\lambda}) = \sum_{k=0}^n \overline{c_k(A)}\overline{\lambda}^k = \overline{\sum_{k=0}^n c_k(A)\lambda^k} = \overline{0} = 0$ となるため, $\overline{\lambda}$ は A^* の固有値である.

9. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ を λ に対する A の固有空間の基底として, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ が \mathbf{K}^n 基底になるようにベクトル $\mathbf{v}_{m+1}, \mathbf{v}_{m+2}, \dots, \mathbf{v}_n$ を選ぶ. \mathbf{v}_j を第 j 列とする n 次正方行列を P とし, $A\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^n c_{ij}\mathbf{v}_i$ とおいて, c_{ij} を (i, j) 成分とする n 次正方行列を A' とすれば, $P^{-1}AP = A'$ が成り立つ. $j = 1, 2, \dots, m$ ならば $A\mathbf{v}_j = \lambda\mathbf{v}_j$ だから $c_{jj} = 1, c_{ij} = 0$ ($i \neq j$) となるため, A' は $\begin{pmatrix} \lambda E_m & B \\ O & C \end{pmatrix}$ という形になる. $P^{-1}AP = A'$ より A の固有多項式は A' の固有多項式と一致し, A' の固有多項式は

$$|tE_n - A'| = \begin{vmatrix} (t - \lambda)E_m & -B \\ O & tE_{n-m} - C \end{vmatrix} = |(t - \lambda)E_m| |tE_{n-m} - C| = (t - \lambda)^m |tE_{n-m} - C|$$

となって $(t - \lambda)^m$ を因数にもつことがわかる.

10. (1) 第 $2, 3, \dots, n$ 行を第 1 行に加えれば, $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ より A の固有多項式 $|xE_n - A|$ は

$$\begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 1 & x - 1 & \cdots & x - 1 \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix} = (x - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix}$$

に等しい. 従って A の固有多項式は $x - 1$ を因数にもつため, A は 1 を固有値にもつ.

(2) 仮定から $\sum_{i=1}^n \bar{a}_{ij} = 1$ だから $A^*v = v$ が成り立つ. 従って $(Ax, v) = (x, A^*v) = (x, v)$ だから, $x \in H_k$ ならば $Ax \in H_k$ である.

11. まず $\text{rank } P = m$ だから $\text{rank } PQ \leq m < n$ であるため, $A - \lambda E_n = PQ$ は正則行列ではないため, λ は A の固有値である. 再び $\text{rank } P = m$ より $T_P: \mathbf{K}^m \rightarrow \mathbf{K}^n$ は単射であるため, λ に対する A の固有空間は $\text{Ker } T_Q$ である. 従って次元公式から λ に対する A の固有空間の次元は $n - m$ であるため, A が対角化可能ならば λ 以外の固有値に対する m 個の 1 次独立な A の固有ベクトル v_1, v_2, \dots, v_m が存在する. v_j は A の固有値 μ_j に対する固有ベクトルであるとすれば, $Av_j = \mu_j v_j$ より $PQv_j = (\mu_j - \lambda)v_j$ が成り立つため, v_j は P の列ベクトルの 1 次結合である.

そこで, P の第 i 列を p_i とし $v_j = \sum_{i=1}^m c_{ij} p_i$ と表し, c_{ij} を第 i 成分とする \mathbf{K}^m のベクトルを c_j とすれば $v_j = Pc_j$ が成り立つ. ここで, v_1, v_2, \dots, v_m が 1 次独立で $v_j = Pc_j$ より, c_1, c_2, \dots, c_m も 1 次独立であることに注意する. $v_j = Pc_j$ を $PQv_j = (\mu_j - \lambda)v_j$ に代入すれば $PQPc_j = P((\mu_j - \lambda)c_j)$ が得られるが, T_P が単射であることから, $QPc_j = (\mu_j - \lambda)c_j$ が成り立つ. これは $\mu_j - \lambda$ が m 次正方形行列 QP の固有値で, c_j が固有値 $\mu_j - \lambda$ に関する QP の固有ベクトルであることを意味し, c_1, c_2, \dots, c_m は \mathbf{K}^m の基底であるから, QP が c_j を第 j 列とする m 次正方形行列によって $\mu_j - \lambda$ を (j, j) 成分とする対角行列に対角化されることがわかる. さらに, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ はすべて λ と異なるため, $\mu_j - \lambda$ を (j, j) 成分とする対角行列は正則行列である. 従って QP も正則行列である.

逆に, QP は正則行列で, m 次正則行列 C によって対角化されると仮定する. 対角行列 $C^{-1}QPC$ を D とおき, ν_j を D の (j, j) 成分とする. このとき, D は正則だから, $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ はどれも 0 ではないことに注意する. $\text{rank } P = m$ で C は正則だから $\text{rank } PC = m$ となるため, PC の第 j 列を v_j とすれば, v_1, v_2, \dots, v_m 1 次独立である. $C^{-1}QPC = D$ の両辺に左から PC をかけると $PQPC = PCD$ であり, この両辺の第 j 列をみると, $PQv_j = \nu_j v_j$ が成り立つことがわかる. 従って $Av_j = (\lambda + \nu_j)v_j$ となるため, $\lambda + \nu_j$ は A の固有値で, v_j は $\lambda + \nu_j$ に対する A の固有ベクトルである. 一方 T_P は単射だから $\text{Ker } T_{PQ} = \text{Ker}(T_P \circ T_Q) = \text{Ker } T_Q$ である. 従って $x \in \mathbf{K}^n$ が $Ax = \lambda x$ を満たすことと $x \in \text{Ker } T_Q$ であることは同値だから, λ は A の固有値で λ に対する A の固有空間は $\text{Ker } T_Q$ である. $\text{rank } Q = m$ だから, $\dim \text{Ker } T_Q = n - m$ であるため, $v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_n$ を $\text{Ker } T_Q$ の基底とすれば, $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ はどれも 0 ではないため, $\lambda + \nu_1, \lambda + \nu_2, \dots, \lambda + \nu_m$ はどれも λ とは異なることから A の固有ベクトルからなる $v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_n$ は 1 次独立であり, \mathbf{K}^n の基底となる. 故に A は対角化可能である.

12. (1) ${}^t b x = 0$ を満たすベクトル x 全体からなる \mathbf{K}^n の部分空間を Z とする. $a \neq 0$ より, $n \times 1$ 行列 a で表される 1 次写像 $T_a: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}^n$ は単射であり, $x \in \mathbf{K}^n$ に対し, $(\lambda E_n - A)x = a^t b x = T_a({}^t b x)$ だから $(\lambda E_n - A)x = 0$ であることと ${}^t b x = 0$ であることは同値であるため, $\text{Ker } T_b = Z = \{x \in \mathbf{K}^n \mid (\lambda E_n - A)x = 0\}$ が成り立つ. $b \neq 0$ だから $T_b: \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}$ は全射であるため, 次元公式から $\dim Z = \dim \text{Ker } T_b = n - 1$ である. 故に λ は A の固有値であり, λ に対する A の固有空間は Z に一致して, その次元は $n - 1$ である. 従って, 問題 9 により A の固有多項式は $(t - \lambda)^{n-1}$ を因数にもつため, A の固有多項式は $(t - \lambda)^{n-1}(t - \mu)$ ($\mu \in \mathbf{K}$) の形に因数分解される. ここで, $\text{tr } A = n\lambda + {}^t b a$ であり, A の固有多項式の t^{n-1} の係数 $-((n - 1)\lambda + \mu)$ は $-\text{tr } A$ に等しいことから, $(n - 1)\lambda + \mu = n\lambda + {}^t b a$ が成り立ち, $\mu = \lambda + {}^t b a$ が得られる.

(2) a, b はともに零ベクトルではないため $a^t b$ は零行列ではなく, $a^t b$ が表す \mathbf{K}^n の 1 次変換は階数が 1 の 1 次写像 $T_b: \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}$ と $T_a: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}^n$ の合成写像だから, $a^t b$ の階数は 1 である. 従って $a^t b$ は単位行列のスカラー倍ではないため, $A = \lambda E_n + a^t b$ も単位行列のスカラー倍ではない. 故に A の最小多項式は 2 次以上の多項式になる. 一方, ${}^t b a$ がスカラーであることに注意すれば

$$(A - \lambda E_n)(A - (\lambda + {}^t b a)E_n) = a^t b(a^t b - {}^t b a E_n) = a^t b a - ({}^t b a)a^t b = ({}^t b a)a^t b - ({}^t b a)a^t b = 0$$

だから, $(t - \lambda)(t - \lambda - {}^t b a)$ が A の最小多項式である.

(3) $(\lambda E_n + a^t b)a = (\lambda + {}^t b a)a$ だから, a は $\lambda + {}^t b a$ に対する固有ベクトルである. W を $\lambda + {}^t b a$ に対する A の固有

空間とすれば, ${}^t\mathbf{ba} \neq 0$ の場合, $\lambda + {}^t\mathbf{ba} \neq \lambda$ だから $Z \cap W = \{\mathbf{0}\}$ である. 従って $\dim Z + \dim W = \dim(Z+W) \leq n$ が成り立ち, $\dim Z = n-1$ だから $1 \leq \dim W \leq 1$ となり, W の次元は 1 で, \mathbf{a} によって生成されることがわかる.

$b_k \neq 0$ となる k を選んで, 各 $j = 1, 2, \dots, n$ に対し, $\mathbf{v}_j = b_j \mathbf{e}_k - b_k \mathbf{e}_j$ によって $\mathbf{v}_j \in \mathbf{K}^n$ を定めると, ${}^t\mathbf{bv}_j = 0$ だから $\mathbf{v}_j \in V$ であり, さらに $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ は 1 次独立でもあるため, V の基底である. そこで, $P = (\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_{k-1} \ \mathbf{v}_{k+1} \ \dots \ \mathbf{v}_n \ \mathbf{a})$ とおけば, P は正則で, P の第 1 列から第 $n-1$ 列までは $\lambda E_n + \mathbf{a}{}^t\mathbf{b}$ の固有値 λ に対する固有ベクトルで, P の第 n 列は $\lambda E_n + \mathbf{a}{}^t\mathbf{b}$ の固有値 $\lambda + {}^t\mathbf{ba}$ に対する固有ベクトルだから, $P^{-1}(\lambda E_n + \mathbf{a}{}^t\mathbf{b})P$ は対角行列 $\begin{pmatrix} \lambda E_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda + {}^t\mathbf{ba} \end{pmatrix}$ である.

13. (1) $i = 0, 1, \dots, n-1$ に対し, $A^i \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_{n-i} + \sum_{j=n-i+1}^n b_j \mathbf{e}_j$ という形になることを示せば, $A^{i-1} \mathbf{e}_n$ を第 i 列とする n 次正方行列は対角成分がすべて 1 の下半三角行列になるため $\mathbf{e}_n, A\mathbf{e}_n, A^2\mathbf{e}_n, \dots, A^{n-1}\mathbf{e}_n$ は 1 次独立である. まず, $i = 0$ のときは上の主張は明らかである. $A\mathbf{e}_1 = -a_0 \mathbf{e}_n$, $A\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i-1} - a_{i-1} \mathbf{e}_n$ ($i = 2, 3, \dots, n$) だから, $A^{i-1} \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_{n-i+1} + \sum_{j=n-i+2}^n b_j \mathbf{e}_j$ と仮定すれば, $i < n$ ならば

$$\begin{aligned} A^i \mathbf{e}_n &= A \left(\mathbf{e}_{n-i+1} + \sum_{j=n-i+2}^n b_j \mathbf{e}_j \right) = A\mathbf{e}_{n-i+1} + \sum_{j=n-i+2}^n b_j A\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_{n-i} - a_{n-i} \mathbf{e}_n + \sum_{j=n-i+2}^n b_j (\mathbf{e}_{j-1} - a_{j-1} \mathbf{e}_n) \\ &= \mathbf{e}_{n-i} + \sum_{j=n-i+1}^{n-1} b_{j+1} \mathbf{e}_j - \left(\sum_{j=n-i+2}^n b_j a_{j-1} - a_{n-i} \right) \mathbf{e}_n \end{aligned}$$

となるため, 数学的帰納法により主張が示される.

(2) $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$ として $f(A) = O$ と仮定すれば, $\sum_{i=0}^{n-1} c_i A^i \mathbf{e}_n = f(A) \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$ となるため, (1) で示したことにより $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$ である. 従って $n-1$ 次以下の零でない任意の多項式 $f(x)$ に対して $f(A) \neq O$ だから, A の最小多項式の次数は n 以上であり, A の固有多項式が最小多項式になる.

線形数学 II 演習問題 第 20 回 正規行列の対角化

1. 以下の行列はそれぞれ次のいずれの場合にあてはまるか答え、その理由も述べよ。

(a) ユニタリー行列で対角化可能 (b) ユニタリー行列では対角化できないが、対角化可能 (c) 対角化不可能

$$\begin{array}{llll}
 (1) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} & (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} & (3) \begin{pmatrix} 8 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 4 \\ -6 & -2 & -6 \end{pmatrix} & (4) \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
 (5) \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} & (6) \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -2 & -6 & -6 \\ 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} & (7) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & (8) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

2. 次の対称行列を対角化する直交行列を求めよ。ただし (1), (2) では $ab \neq 0$ とし, (9) では $(a, b) \neq (0, 0)$ かつ $\varepsilon \neq 0$, (10) では $(b, c) \neq (0, 0)$, (13) では $c \neq 0$ とする。

$$\begin{array}{llll}
 (1) \begin{pmatrix} a^2 + c & ab \\ ab & b^2 + c \end{pmatrix} & (2) \begin{pmatrix} a^2 + c & 0 & ab \\ 0 & d & 0 \\ ab & 0 & b^2 + c \end{pmatrix} & (3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & (4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
 (5) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} & (6) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} & (7) \begin{pmatrix} 8 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 6 & -7 \end{pmatrix} & (8) \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} & 4 \\ \sqrt{2} & 3 & 2\sqrt{2} \\ 4 & 2\sqrt{2} & 15 \end{pmatrix} \\
 (9) \begin{pmatrix} \lambda + \varepsilon a^2 & \varepsilon ab & \varepsilon ac \\ \varepsilon ab & \lambda + \varepsilon b^2 & \varepsilon bc \\ \varepsilon ac & \varepsilon bc & \lambda + \varepsilon c^2 \end{pmatrix} & (10) \begin{pmatrix} a & 2bc & b^2 - 8c^2 \\ 2bc & a & 2bc \\ b^2 - 8c^2 & 2bc & a \end{pmatrix} & (11) \begin{pmatrix} 3 & -2a & 2a - 2 \\ -2a & a + 1 & -2 \\ 2a - 2 & -2 & -a + 2 \end{pmatrix} \\
 (12) \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & -3 & 7 \end{pmatrix} & (13) \begin{pmatrix} a & br & cr & crs \\ br & a + b(1 - r^2) & c & cs \\ cr & c & p + (1 - s^2)q & qs \\ crs & cs & qs & p \end{pmatrix} & (14) \begin{pmatrix} a & c & d & b \\ c & a & b & d \\ d & b & a & c \\ b & d & c & a \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$(15) a_{ij} = \begin{cases} b & i = j \\ a & i \neq j \end{cases} \text{ を } (i, j) \text{ 成分とする } n \text{ 次対称行列}$$

$$(16) a_{ij} = \begin{cases} 1 & i + j = n + 1 \\ 0 & i + j \neq n + 1 \end{cases} \text{ を } (i, j) \text{ 成分とする } n \text{ 次対称行列}$$

3. 複素数 a, b, c に対し, 2 次正方行列 A を $A = \begin{pmatrix} a - bc & b^2 \\ -c^2 & a + bc \end{pmatrix}$ で定める。

(1) 2 次ユニタリー行列 P で, $P^{-1}AP$ が上半三角行列になるようなものを求めよ。

(2) A^n を求めよ。

4. (1) A が n 次正規行列ならば, $\lambda \in \mathbf{C}$ に対し, $\lambda E_n + A$ も正規行列であることを示せ。

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ が正規行列ならば, $|b| = |c|$ であり, $|b| = |c| \neq 0$ のとき, b, c の偏角をそれぞれ β, γ とすれば,

$a = \pm|a| \left(\cos \frac{\beta + \gamma}{2} + i \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \right)$ が成り立つことを示せ。

(3) $\lambda, \xi, \zeta \in \mathbf{C}, \kappa, \rho \in \mathbf{R}$ とする。 $\rho > 0, |\xi| = |\zeta| = 1$ のとき, $\begin{pmatrix} \lambda + 2\kappa\xi\zeta & \rho\xi^2 \\ \rho\zeta^2 & \lambda \end{pmatrix}$ をユニタリー行列で対角化せよ。

5. $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ を 1 次独立な \mathbf{R}^3 ベクトル, α, β を実数の定数とし, $V = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle, W = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \right\rangle$ とおく.

(1) \mathbf{R}^3 の 1 次変換 f は, $\mathbf{x} \in V$ ならば $f(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in V^\perp$ ならば $f(\mathbf{x}) = \beta\mathbf{x}$ を満たすとする. このとき, \mathbf{R}^3 の標準基底に関する f の表現行列を対角化する直交行列を求めよ.

(2) \mathbf{R}^3 の 1 次変換 g は, $\mathbf{x} \in W$ ならば $g(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in W^\perp$ ならば $g(\mathbf{x}) = \beta\mathbf{x}$ を満たすとする. このとき, \mathbf{R}^3 の標準基底に関する g の表現行列を対角化する直交行列を求めよ.

6. λ を複素数, \mathbf{a} を \mathbf{C}^n の零ベクトルでないベクトル, ε を 1 または -1 とし, $A = \lambda E_n + \varepsilon \mathbf{a} \mathbf{a}^*$ とおく.

(1) $\lambda, \mathbf{a}, \varepsilon$ を用いて, A の固有値とそれらに対する固有空間を表せ.

(2) \mathbf{a} の第 j 成分を a_j とする. $a_1 \neq 0$ のとき $n = 2, 3, 4$ の場合に, A を対角化するユニタリ行列の一つを求めよ.

7. 次の正規行列を対角化するユニタリ行列を求めよ. ただし $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とする.

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & i & -1 \\ -i & 5 & i \\ -1 & -i & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

8. $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$), $B = \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix}$, $c = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$ とする.

(1) B の固有値は $0, ci, -ci$ であることを示せ.

(2) \mathbf{u} を ci に対する長さ 1 の固有ベクトルとし, $\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}})$, $\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})$, $\mathbf{z} = \frac{1}{c}\mathbf{b}$ とおけば, \mathbf{x}, \mathbf{y} の各成分は実数で, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ は \mathbf{R}^3 の正規直交基底であることを示せ.

(3) $B\mathbf{x}, B\mathbf{y}, B\mathbf{z}$ を, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ の 1 次結合で表せ.

(4) P を $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ をそれぞれ第 1 列, 第 2 列, 第 3 列にもつ行列とすると, $P^{-1}BP$ を求めよ.

9. (発展問題) 直交行列に関する以下の命題を示せ.

(1) 直交行列 P の実数の固有値は 1 または -1 であることを示し, P の固有方程式が -1 を s 重根にもてば $|P| = (-1)^s$ である.

(2) 対称行列ではない直交行列は虚数の固有値をもつ.

(3) 行列式の値が 1 である奇数次の直交行列は 1 を固有値にもつ.

10. (発展問題) A を行列式の値が 1 である 3 次実直交行列とし, 対称行列ではないとする.

(1) $0 < \theta < \pi$ を満たす θ と行列式の値が 1 である直交行列 P で, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるものが

存在することを示し, θ は $\cos \theta = \frac{1}{2}(\text{tr}A - 1)$ を満たすことを示せ. (従って, θ は $0 < \theta < \pi$ の範囲で直交行列 P の選び方によらずに通りに定まる.)

(2) $\frac{1}{2}(A - {}^tA) = \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ とおけば \mathbf{b} は長さが $\sin \theta$ で, $A\mathbf{b} = \mathbf{b}$ を満たし, \mathbf{b} を方向ベクトル

ルとして原点を通る直線を ℓ とすれば, A が表す \mathbf{R}^3 の 1 次変換は, ℓ を軸に \mathbf{b} の方向を向いて時計回りに θ だけ回転する 1 次変換であることを示せ.

11. (発展問題) 原点を通り, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする直線を軸として, \mathbf{v} の方向を向いて $\frac{\pi}{3}$ だけ時計回りに回転する \mathbf{R}^3 の 1 次変換を表す行列を求めよ.

12. (発展問題) A を 3 次実直交行列かつ対称行列であり, $A \neq \pm E_3$ である行列とする.

(1) A の行列式の値が 1 の場合, A が表す \mathbf{R}^3 の 1 次変換は, A の固有値 1 に対する固有ベクトルを方向ベクトルとし, 原点を通る直線を軸とした角度 π の回転移動であることを示せ.

(2) A の行列式の値が -1 の場合, A が表す \mathbf{R}^3 の 1 次変換は, A は -1 を固有値にもち, A が表す \mathbf{R}^3 の 1 次変換は, -1 に対する固有ベクトルを法線ベクトルとし, 原点を通る平面に関する対称移動であることを示せ.

13. (発展問題) 以下の行列は回転を表すことを示し, その回転軸と回転角を求めよ.

$$\begin{array}{llll}
 (1) \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -3 & \sqrt{6} \\ 3 & 1 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} &
 (2) \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix} &
 (3) \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 \\ -14 & 5 & 2 \\ -2 & -10 & 11 \end{pmatrix} &
 (4) \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -9 & 8 & 12 \\ 8 & -9 & 12 \\ 12 & 12 & 1 \end{pmatrix} \\
 (5) \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2\sqrt{2} \\ 1 & 4 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} &
 (6) \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 6 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix} &
 (7) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} &
 (8) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
 (9) \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 2 & \sqrt{6} \\ -2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} & & &
 \end{array}$$

14. (発展問題) A を $2n$ 次正方形行列とし, A の成分はすべて実数であるとする. 虚数 λ と n 個の \mathbf{C}^{2n} のベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ で, $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ であり, 次の等式を満たすものが存在すると仮定する.

$$A\mathbf{v}_j = \begin{cases} \lambda\mathbf{v}_1 & j=1 \\ \lambda\mathbf{v}_j + \mathbf{v}_{j-1} & j=2, 3, \dots, n \end{cases}$$

(1) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n$ は \mathbf{C}^{2n} の基底であることを示せ.

(3) $f: \mathbf{C}^{2n} \rightarrow \mathbf{C}^{2n}$ を A で表される \mathbf{C}^{2n} の 1 次変換とする. $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{2n} \in \mathbf{C}^{2n}$ を $\mathbf{w}_{2k-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_k + \bar{\mathbf{v}}_k)$, $\mathbf{w}_{2k} = \frac{1}{2i}(\mathbf{v}_k - \bar{\mathbf{v}}_k)$ ($k=1, 2, \dots, n$) によって定めるとき, \mathbf{C}^{2n} の基底 $[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{2n}]$ に関する f の表現行列を求めよ.

第 20 回の演習問題の解答

1. (1) と (8) は対称行列だから (a). (4) と (5) は正規行列になっているためこれらも (a). (3) は固有値 1, 2 をもち、これらに対する固有ベクトルはそれぞれ, $k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, l \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ の形になり, 固有ベクトルからなる \mathbf{K}^3 の基

底 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれるため, この行列は対角化可能である. しかし, 相異なる固有値に対する固有ベクトル (たとえば $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$) は直交しないため, ユニタリ行列では対角化不可能である. (6) は固有値 1, 2 をもち,

これらに対する固有ベクトルはそれぞれ, $k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, l \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の形になり, 固有ベクトルからなる \mathbf{K}^3

の基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれるため, この行列は対角化可能である. しかし, 相異なる固有値に対する固有ベクトル (たとえば $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$) は直交しないため, ユニタリ行列では対角化不可能である. 従って, (3) と (6)

は (b) の場合に当てはまる. (2) は固有値 1, 2 をもち, これらに対する固有ベクトルはそれぞれ, $k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, l \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の形

になるが, \mathbf{K}^3 を生成しないため, 対角化不可能. (7) は固有値 1, 3 をもち, これらに対する固有ベクトルはそれぞれ, $k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, l \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の形になるが, \mathbf{K}^3 を生成しないため, 対角化不可能. 従って, (2) と (7) は (c) の場合に当てはまる.

2. (1) $\begin{vmatrix} t-a^2-c & -ab \\ -ab & t-b^2-c \end{vmatrix} = (t-a^2-c)(t-b^2-c) - a^2b^2 = t^2 - (a^2+b^2+2c)t + c(a^2+b^2+c) = (t-c)(t-a^2-b^2-c)$

だから, 与えられた行列の固有値は c と a^2+b^2+c である. $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -a^2 & -ab \\ -ab & -b^2 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1

次方程式の解空間の基底であり, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間の基底だから,

$\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は, それぞれ c, a^2+b^2+c に対する固有ベクトルである. 故に, 与えられた行列は $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} b & a \\ -a & b \end{pmatrix}$

によって $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c \end{pmatrix}$ に対角化される.

(2) $\begin{vmatrix} t-a^2-c & 0 & -ab \\ 0 & t-d & 0 \\ -ab & 0 & t-b^2-c \end{vmatrix} = (t-d) \begin{vmatrix} t-a^2-c & -ab \\ -ab & t-b^2-c \end{vmatrix} = (t-d)(t-c)(t-a^2-b^2-c)$ だから, 与

えられた行列の固有値は $c, d, a^2 + b^2 + c$ である. $d \neq c, a^2 + b^2 + c$ の場合, $\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -a^2 & 0 & -ab \\ 0 & c-d & 0 \\ -ab & 0 & -b^2 \end{pmatrix}$ を係

数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間の基底, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} d-a^2-c & 0 & -ab \\ 0 & 0 & 0 \\ -ab & 0 & d-b^2-c \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立

1 次方程式の解空間の基底であり, $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} b^2 & 0 & -ab \\ 0 & a^2+b^2+c-d & 0 \\ -ab & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の

解空間の基底である. $d = c$ の場合, $\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -a^2 & 0 & -ab \\ 0 & 0 & 0 \\ -ab & 0 & -b^2 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空

間の基底であり, $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} b^2 & 0 & -ab \\ 0 & a^2+b^2+c-d & 0 \\ -ab & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間の基底であ

る. $d = a^2 + b^2 + c$ の場合, $\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -a^2 & 0 & -ab \\ 0 & -a^2-b^2 & 0 \\ -ab & 0 & -b^2 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間の基

底であり, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} b^2 & 0 & -ab \\ 0 & 0 & 0 \\ -ab & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間の基底である. 以上から,

$\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ は, それぞれ $c, d, a^2 + b^2 + c$ に対する固有ベクトルであり, 互いに直交するため, 与えられた行

列は $\begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 + c \end{pmatrix}$ に対角化される.

$$(3) \begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ -1 & t & 0 \\ -1 & 0 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 0 \\ -1 & t & -t \\ -1 & 0 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 0 \\ -2 & t & 0 \\ -1 & 0 & t \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ -2 & t \end{vmatrix} = t(t^2 - t - 2) = t(t-2)(t+1) \text{ より, 与}$$

えられた行列の固有値は $-1, 0, 2$ である. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 0 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間

の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に

対角化される.

$$(4) \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -2 \\ 0 & t-1 & -2 \\ -2 & -2 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -2 \\ -t+1 & t-1 & -2 \\ 0 & -2 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -2 \\ 0 & t-1 & -4 \\ 0 & -2 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t-1 & -4 \\ -2 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1)(t^2-9) =$$

$(t-1)(t-3)(t+3)$ より, 与えられた行列の固有値は $-3, 1, 3$ である. $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから -3 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与

えられる. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有

空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

に対角化される.

$$(5) \begin{vmatrix} t-1 & 1 & 3 \\ 1 & t+1 & 1 \\ 3 & 1 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-4 & 1 & 3 \\ 0 & t+1 & 1 \\ -t+4 & 1 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-4 & 1 & 3 \\ 0 & t+1 & 1 \\ 0 & 2 & t+2 \end{vmatrix} = (t-4) \begin{vmatrix} t+1 & 1 \\ 2 & t+2 \end{vmatrix} = (t-4)(t^2+3t) =$$

$t(t-4)(t+3)$ より, 与えられた行列の固有値は $-3, 0, 4$ である. $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -7 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから -3 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 0 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

で与えられる. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -14 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & -14 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -14 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 4 に対する

固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ によって

$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ に対角化される.

$$(6) \begin{vmatrix} t-1 & -3 & -2 \\ -3 & t-1 & -2 \\ -2 & -2 & t+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+2 & -3 & -2 \\ -t-2 & t-1 & -2 \\ 0 & -2 & t+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+2 & -3 & -2 \\ 0 & t-4 & -4 \\ 0 & -2 & t+3 \end{vmatrix} = (t+2) \begin{vmatrix} t-4 & -4 \\ -2 & t+3 \end{vmatrix} = (t+2)(t^2 - t - 20) =$$

$(t+2)(t+4)(t-5)$ より, 与えられた行列の固有値は $-4, -2, 5$ である. $\begin{pmatrix} -5 & -3 & -2 \\ -3 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ だから -4 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ で与

えられる. $\begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ -3 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -7 & -7 & 0 \\ -7 & -7 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ だから -2 に対

する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ -3 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -7 & 14 \\ 0 & 7 & -14 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ だから 5 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えら

れた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ に対角化される.

$$(7) \begin{vmatrix} t-8 & -3 & 2 \\ -3 & t & -6 \\ 2 & -6 & t+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-8 & 3t-27 & 2 \\ -3 & t-9 & -6 \\ 2 & 0 & t+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & 0 & 20 \\ -3 & t-9 & -6 \\ 2 & 0 & t+7 \end{vmatrix} = (t-9) \begin{vmatrix} t+1 & 20 \\ 2 & t+7 \end{vmatrix} = (t-9)(t^2 + 8t - 33) =$$

$(t-9)(t-3)(t+11)$ より, 与えられた行列の固有値は $-11, 3, 9$ である. $\begin{pmatrix} -19 & -3 & 2 \\ -3 & -11 & -6 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} -19 & -3 & 2 \\ -60 & -20 & 0 \\ -36 & -12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -10 & 0 & 2 \\ -60 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから -11 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ で

与えられる. $\begin{pmatrix} -5 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \\ 2 & -6 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -8 & 12 \\ -3 & 3 & -6 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ だから 3 に対する

固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -6 \\ 2 & -6 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ だから 9 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与え

られた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{35}} & -\frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{35}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{5}{\sqrt{35}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & 0 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ に対角化される.

$$(8) \begin{vmatrix} t-4 & -\sqrt{2} & -4 \\ -\sqrt{2} & t-3 & -2\sqrt{2} \\ -4 & -2\sqrt{2} & t-15 \end{vmatrix} = (t-4)(t-3)(t-15) - 16 - 16 - 2(t-15) - 8(t-4) - 16(t-3) = t^3 - 22t^2 +$$

$91t - 102 = (t-2)(t^2 - 20t + 51) = (t-2)(t-3)(t-17)$ より, 与えられた行列の固有値は 2, 3, 17 である.
 $\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} & -4 \\ -\sqrt{2} & -1 & -2\sqrt{2} \\ -4 & -2\sqrt{2} & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & -1 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ だから 2 に

対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & -4 \\ -\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} \\ -4 & -2\sqrt{2} & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & -4 \\ -\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

で与えられる. $\begin{pmatrix} 13 & -\sqrt{2} & -4 \\ -\sqrt{2} & 14 & -2\sqrt{2} \\ -4 & -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 5 & -5\sqrt{2} & 0 \\ -5\sqrt{2} & 10 & 0 \\ -4 & -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 5 & -5\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ だから

17 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{21}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}$

によって $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(9) 与えられた行列を A とおき, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とおけば, $A = \lambda E_3 + \varepsilon \mathbf{a} \mathbf{a}^t$ である. $A\mathbf{a} = \lambda E_3 \mathbf{a} + \varepsilon \mathbf{a} \mathbf{a}^t \mathbf{a} =$

$(\lambda + \varepsilon \|\mathbf{a}\|^2) \mathbf{a}$ だから, $\lambda + \varepsilon \|\mathbf{a}\|^2$ は A の固有値であり, \mathbf{a} はこの固有値に対する固有ベクトルである. $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{a} \rangle^\perp$

ならば $\mathbf{a}^t \mathbf{x} = (\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 0$ だから, $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ となるため, λ は A の固有値であり, $\langle \mathbf{a} \rangle^\perp$ は λ に対する固有空間である. そこで, $\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ とおけば $\mathbf{b}, \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は $\langle \mathbf{a} \rangle^\perp$ の正規直交基底である. 故に A は直交行列

$\left(\frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a} \times \mathbf{b} \right) = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{-ac}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2)}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{-bc}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2)}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} & 0 & \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2)}} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} \lambda - \varepsilon(a^2 + b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ に

対角化される.

$$(10) \begin{vmatrix} t-a & -2bc & -b^2 + 8c^2 \\ -2bc & t-a & -2bc \\ -b^2 + 8c^2 & -2bc & t-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-a+b^2-8c^2 & -2bc & -b^2+8c^2 \\ 0 & t-a & -2bc \\ -t+a-b^2+8c^2 & -2bc & t-a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} t-a+b^2-8c^2 & -2bc & -b^2+8c^2 \\ 0 & t-a & -2bc \\ 0 & -4bc & t-a-b^2+8c^2 \end{vmatrix} = (t-a+b^2-8c^2) \begin{vmatrix} t-a & -2bc \\ -4bc & t-a-b^2+8c^2 \end{vmatrix} =$$

$(t-a+b^2-8c^2)(t^2-(2a+b^2-8c^2)t+(a+b^2)(a-8c^2)) = (t-a+b^2-8c^2)(t-a-b^2)(t-a+8c^2)$ より, 与えられた行列の固有値は $a-b^2+8c^2, a+b^2, a-8c^2$ である.

$$\begin{pmatrix} -b^2+8c^2 & -2bc & -b^2+8c^2 \\ -2bc & -b^2+8c^2 & -2bc \\ -b^2+8c^2 & -2bc & -b^2+8c^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3行に加える}]{\text{第1行を}-1\text{倍して}}$$

$$\begin{pmatrix} -b^2+8c^2 & -2bc & -b^2+8c^2 \\ -2bc & -b^2+8c^2 & -2bc \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ は固有値 } a-b^2+8c^2 \text{ に対する固有ベクトルである.}$$

$$\begin{pmatrix} b^2 & -2bc & -b^2+8c^2 \\ -2bc & b^2 & -2bc \\ -b^2+8c^2 & -2bc & b^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1行に加える}]{\text{第3行を}-1\text{倍して}} \begin{pmatrix} 2b^2-8c^2 & 0 & -2b^2+8c^2 \\ -2bc & b^2 & -2bc \\ -b^2+8c^2 & -2bc & b^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3行に加える}]{\text{第1行を}\frac{1}{2}\text{倍して}}$$

$$\begin{pmatrix} 2b^2-8c^2 & 0 & -2b^2+8c^2 \\ -2bc & b^2 & -2bc \\ 4c^2 & -2bc & 4c^2 \end{pmatrix} \text{ より, } \begin{pmatrix} b \\ 4c \\ b \end{pmatrix} \text{ は固有値 } a+b^2 \text{ に対する固有ベクトルである.}$$

$$\begin{pmatrix} -8c^2 & -2bc & -b^2+8c^2 \\ -2bc & -8c^2 & -2bc \\ -b^2+8c^2 & -2bc & -8c^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1行に加える}]{\text{第3行を}-1\text{倍して}} \begin{pmatrix} b^2-16c^2 & 0 & -b^2+16c^2 \\ -2bc & -8c^2 & -2bc \\ -b^2+8c^2 & -2bc & -8c^2 \end{pmatrix} \text{ より, } \begin{pmatrix} 2c \\ -b \\ 2c \end{pmatrix} \text{ は固有値 } a-8c^2$$

に対する固有ベクトルである. さらに, $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2b^2+16c^2}} \begin{pmatrix} b \\ 4c \\ b \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{b^2+8c^2}} \begin{pmatrix} 2c \\ -b \\ 2c \end{pmatrix}$ は \mathbf{R}^3 の正規直交基底に

なるため, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{b}{\sqrt{2b^2+16c^2}} & \frac{2c}{\sqrt{b^2+8c^2}} \\ 0 & \frac{4c}{\sqrt{2b^2+16c^2}} & -\frac{b}{\sqrt{b^2+8c^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{b}{\sqrt{2b^2+16c^2}} & \frac{2c}{\sqrt{b^2+8c^2}} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} a-b^2+8c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a-8c^2 \end{pmatrix}$ に対角化

される.

$$(11) \begin{vmatrix} t-3 & 2a & -2a+2 \\ 2a & t-a-1 & 2 \\ -2a+2 & 2 & t+a-2 \end{vmatrix} = (t-3)(t-a-1)(t+a-2) - 16a(a-1) - 4(t-3) - 4(a-1)^2(t-a-1) - 4a^2(t+a-2) = t^3 - 6t^2 - 3(3a^2 - 3a + 1)t - 9a^2 + 9a + 10 = (t+1)(t^2 - 7t - (3a-5)(3a+2)) =$$

$(t+1)(t+3a-5)(t-3a-2)$ より, 与えられた行列の固有値は $-1, -3a+5, 3a+2$ である.

$$\begin{pmatrix} -4 & 2a & -2a+2 \\ 2a & -a-2 & 2 \\ -2a+2 & 2 & a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-}\frac{1}{2}\text{倍する}]{\text{第1行を}} \begin{pmatrix} 2 & -a & a-1 \\ 2a & -a-2 & 2 \\ -2a+2 & 2 & a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -a & a-1 \\ 0 & (a+1)(a-2) & -(a+1)(a-2) \\ 0 & -(a+1)(a-2) & (a+1)(a-2) \end{pmatrix} \text{ だから, } -1 \text{ に対する固有空間の基底は, } a \neq -1, 2 \text{ ならば } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ で与えら}$$

れ, $a = -1$ または 2 ならば $\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a+1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -3a+2 & 2a & -2a+2 \\ 2a & -4a+4 & 2 \\ -2a+2 & 2 & -2a+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3行に加える}]{\text{第1行を}-1\text{倍して}}$

$$\begin{pmatrix} -3a+2 & 2a & -2a+2 \\ 2a & -4a+4 & 2 \\ a & -2a+2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} (2a-1)(a-2) & -2(2a-1)(a-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & -2a+2 & 1 \end{pmatrix} \text{ だから, } -3a+5 \text{ に}$$

対する固有空間の基底は, $a \neq \frac{1}{2}, 2$ ならば $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ で与えられ, $a = \frac{1}{2}$ または 2 ならば $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$ で与えられ

る. $\begin{pmatrix} 3a-1 & 2a & -2a+2 \\ 2a & 2a+1 & 2 \\ -2a+2 & 2 & 4a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3行に加える}]{\text{第1行を2倍して}}$ $\begin{pmatrix} 3a-1 & 2a & -2a+2 \\ 2a & 2a+1 & 2 \\ 4a & 4a+2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(2,3) \text{成分に関して}}$
 $\begin{pmatrix} (2a-1)(a+1) & (2a-1)(a+1) & 0 \\ 2a & 2a+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, $3a+2$ に対する固有空間の基底は, $a \neq -1, \frac{1}{2}$ ならば $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与

えられ, $a = -1$ または $\frac{1}{2}$ ならば $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2a-1 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$a \neq -1, \frac{1}{2}, 2$ の場合, $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ はそれぞれ, 固有値 $-1, -3a+5, 3a+2$ に対する固有空間の正

規直交基底だから, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3a+5 & 0 \\ 0 & 0 & 3a+2 \end{pmatrix}$ に対角化される.

$a = -1$ の場合, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ は固有値 -1 に対する固有空間の基底であり, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は固有値 8 に対する固有空間

の基底である. $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ とおけば, $\mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ だから -1 に

対する固有空間の正規直交基底 $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ が得られる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ に

よって $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ に対角化される.

$a = \frac{1}{2}$ の場合, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ は固有値 -1 に対する固有空間の基底であり, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は固有値 $\frac{7}{2}$ に対する固有空間の

基底である. $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおけば, $\mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ だから $\frac{7}{2}$ に

対する固有空間の正規直交基底 $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ が得られる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

によって $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ に対角化される.

$a = 2$ の場合, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は固有値 -1 に対する固有空間の基底であり, $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 8 に対する固有空間の基底である. $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とおけば, $\mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間の正規直交基底 $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ が得られる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ によつ

て $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ に対角化される.

$$(12) \begin{vmatrix} t-10 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & t-7 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & t-6 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & t-7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-10 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & t-11 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & t-6 & 3 \\ 1 & t-11 & 3 & t-7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-12 & 2 & 0 & 1 \\ -t+12 & t-11 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & t-6 & 3 \\ -t+12 & t-11 & 3 & t-7 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} t-12 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & t-9 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & t-6 & 3 \\ 0 & t-9 & 3 & t-6 \end{vmatrix} = (t-12) \begin{vmatrix} t-9 & -3 & -3 \\ 0 & t-6 & 3 \\ t-9 & 3 & t-6 \end{vmatrix} = (t-12) \begin{vmatrix} t-9 & -3 & -3 \\ 0 & t-6 & 3 \\ 0 & 6 & t-3 \end{vmatrix} = (t-9)(t-12) \begin{vmatrix} t-6 & 3 \\ 6 & t-3 \end{vmatrix} =$$

$t(t-9)^2(t-12)$ より, 与えられた行列の固有値は $0, 9, 12$ である. $\begin{pmatrix} -10 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -7 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(4,1) \text{ 成分に関して}}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -39 & 30 & -69 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 108 & -108 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 11 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 108 & -108 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから, } 0 \text{ に対す}$$

る固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(4,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だから, } 9 \text{ に対する固有空間の基底}$$

は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $\mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ より,

9 に対する固有空間の正規直交基底 $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が得られる. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & 6 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(4,1) \text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 0 & 9 & -6 & -9 \\ 0 & 9 & -6 & -9 \\ 0 & -3 & 6 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから, 12 に対する

固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ によって

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(13)
$$\begin{vmatrix} t-a & -br & -cr & -crs \\ -br & t-a+b(r^2-1) & -c & -cs \\ -cr & -c & t-p+q(s^2-1) & -qs \\ -crs & -cs & -qs & t-p \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} t-a+br^2 & -br & -cr & 0 \\ -r(t-a+br^2) & t-a+b(r^2-1) & -c & 0 \\ 0 & -c & t-p+q(s^2-1) & -s(t-p+qs^2) \\ 0 & -cs & -qs & t-p+qs^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} t-a+br^2 & -br & -cr & 0 \\ 0 & t-a-b & -c(r^2+1) & 0 \\ 0 & -c(s^2+1) & t-p-q & 0 \\ 0 & -cs & -qs & t-p+qs^2 \end{vmatrix} = (t-a+br^2)(t-p+qs^2) \begin{vmatrix} t-a-b & -c(r^2+1) \\ -c(s^2+1) & t-p-q \end{vmatrix} =$$

$(t-a+br^2)(t-p+qs^2)(t^2-(a+b+p+q)t+(a+b)(p+q)-c^2(r^2+1)(s^2+1))$ より, $D = (a+b-p-q)^2+4c^2(r^2+1)(s^2+1)$ とおけば, 与えられた行列の固有値は $a-br^2, p-qs^2, \frac{a+b+p+q \pm \sqrt{D}}{2}$ である.

$$\begin{pmatrix} -br^2 & -br & -cr & -crs \\ -br & -b & -c & -cs \\ -cr & -c & a-br^2-p+q(s^2-1) & -qs \\ -crs & -cs & -qs & a-br^2-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 だから $\begin{pmatrix} 1 \\ -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $a-br^2$ に対する固有ベク

トルである.
$$\begin{pmatrix} p-qs^2-a & -br & -cr & -crs \\ -br & p-qs^2-a+b(r^2-1) & -c & -cs \\ -cr & -c & -q & -qs \\ -crs & -cs & -qs & -qs^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -s \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 だから $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -s \\ 1 \end{pmatrix}$ は $p-cs^2$ に対

する固有ベクトルである. $\begin{pmatrix} 1 \\ -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -s \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成される部分空間の直交補空間のベクトルは $\begin{pmatrix} ru \\ u \\ v \\ sv \end{pmatrix}$ と表され, $\lambda =$

$$\frac{a+b+p+q \pm \sqrt{D}}{2} \text{ に対し, } \begin{pmatrix} \lambda - a & -br & -cr & -crs \\ -br & \lambda - a + b(r^2 - 1) & -c & -cs \\ -cr & -c & \lambda - p + q(s^2 - 1) & -qs \\ -crs & -cs & -qs & \lambda - p \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{第 2 行を } -r \text{ 倍して第 1 行に加え,}} \\ \xrightarrow{\text{第 3 行を } -s \text{ 倍して第 4 行に加える}} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda - a + br^2 & -r(\lambda - a + br^2) & 0 & 0 \\ -br & \lambda - a + b(r^2 - 1) & -c & -cs \\ -cr & -c & \lambda - p + q(s^2 - 1) & -qs \\ 0 & 0 & -s(\lambda - p + qs^2) & \lambda - p + qs^2 \end{pmatrix} \text{ だから, } \begin{pmatrix} ru \\ u \\ v \\ sv \end{pmatrix} \text{ が } \lambda \text{ に対する固有空間に属す}$$

$$\text{るためには, } \begin{pmatrix} -br & \lambda - a + b(r^2 - 1) & -c & -cs \\ -cr & -c & \lambda - p + q(s^2 - 1) & -qs \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ru \\ u \\ v \\ sv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ が成り立つことが必要十分である.}$$

$$\text{これは, } \begin{pmatrix} \lambda - a - b & -c(s^2 + 1) \\ -c(r^2 + 1) & \lambda - p - q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ と同値だから, } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(s^2 + 1) \\ -\frac{a+b-p-q+\sqrt{D}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{a+b-p-q+\sqrt{D}}{2} \\ c(r^2 + 1) \end{pmatrix} \text{ として}$$

$$\begin{pmatrix} cr(s^2 + 1) \\ c(s^2 + 1) \\ -\frac{a+b-p-q+\sqrt{D}}{2} \\ -\frac{s(a+b-p-q+\sqrt{D})}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{r(a+b-p-q+\sqrt{D})}{2} \\ \frac{a+b-p-q+\sqrt{D}}{2} \\ c(r^2 + 1) \\ cs(r^2 + 1) \end{pmatrix} \text{ は, それぞれ } \frac{a+b+p+q-\sqrt{D}}{2}, \frac{a+b+p+q+\sqrt{D}}{2} \text{ に対する固有}$$

$$\text{ベクトルである. 故に, 与えられた行列は } \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{r^2+1}} & \frac{cr\sqrt{2(s^2+1)}}{\sqrt[4]{D}\sqrt{a+b-p-q+\sqrt{D}}} & \frac{r\sqrt{a+b-p-q+\sqrt{D}}}{\sqrt[4]{D}\sqrt{2(r^2+1)}} & 0 \\ -\frac{r}{\sqrt{r^2+1}} & \frac{c\sqrt{2(s^2+1)}}{\sqrt[4]{D}\sqrt{a+b-p-q+\sqrt{D}}} & \frac{\sqrt{a+b-p-q+\sqrt{D}}}{\sqrt[4]{D}\sqrt{2(r^2+1)}} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{a+b-p-q+\sqrt{D}}}{\sqrt[4]{D}\sqrt{2(s^2+1)}} & \frac{c\sqrt{2(r^2+1)}}{\sqrt[4]{D}\sqrt{a+b-p-q+\sqrt{D}}} & -\frac{s}{\sqrt{s^2+1}} \\ 0 & -\frac{s\sqrt{a+b-p-q+\sqrt{D}}}{\sqrt[4]{D}\sqrt{2(s^2+1)}} & \frac{cs\sqrt{2(r^2+1)}}{\sqrt[4]{D}\sqrt{a+b-p-q+\sqrt{D}}} & \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \end{pmatrix} \text{ によって}$$

$$\begin{pmatrix} a - br^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a+b+p+q-\sqrt{D}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a+b+p+q+\sqrt{D}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p - qs^2 \end{pmatrix} \text{ に対角化される.}$$

$$(14) \begin{vmatrix} t-a & -c & -d & -b \\ -c & t-a & -b & -d \\ -d & -b & t-a & -c \\ -b & -d & -c & t-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-a-b-c-d & -c & -d & -b \\ t-a-b-c-d & t-a & -b & -d \\ t-a-b-c-d & -b & t-a & -c \\ t-a-b-c-d & -d & -c & t-a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} t-a-b-c-d & -c & -d & -b \\ 0 & t-a+c & -b+d & b-d \\ 0 & -b+c & t-a+d & b-c \\ 0 & c-d & -c+d & t-a+b \end{vmatrix} = (t-a-b-c-d) \begin{vmatrix} t-a+c & -b+d & b-d \\ -b+c & t-a+d & b-c \\ c-d & -c+d & t-a+b \end{vmatrix} =$$

$$(t-a-b-c-d) \begin{vmatrix} t-a-b+c+d & -b+d & b-d \\ t-a-b+c+d & t-a+d & b-c \\ 0 & -c+d & t-a+b \end{vmatrix} = (t-a-b-c-d) \begin{vmatrix} t-a-b+c+d & -b+d & b-d \\ 0 & t-a+b & -c+d \\ 0 & -c+d & t-a+b \end{vmatrix} =$$

$$(t-a-b-c-d)(t-a-b+c+d) \begin{vmatrix} t-a+b & -c+d \\ -c+d & t-a+b \end{vmatrix} = (t-a-b-c-d)(t-a-b+c+d)(t-a+b-c+d)(t-a+b+c-d)$$

より, 与えられた行列の固有値は $a+b+c+d, a+b-c-d, a-b+c-d, a-b-c+d$ である.

$$\begin{pmatrix} b+c+d & -c & -d & -b \\ -c & b+c+d & -b & -d \\ -d & -b & b+c+d & -c \\ -b & -d & -c & b+c+d \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第4行に加える}]{\text{第1,2,3行を}} \begin{pmatrix} b+c+d & -c & -d & -b \\ -c & b+c+d & -b & -d \\ -d & -b & b+c+d & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{だから, } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{は}$$

$$a+b+c+d \text{ に対する固有ベクトルである. } \begin{pmatrix} b-c-d & -c & -d & -b \\ -c & b-c-d & -b & -d \\ -d & -b & b-c-d & -c \\ -b & -d & -c & b-c-d \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{と第1行を第4行に加える}]{\text{第2,3行を}-1\text{倍したもの}}$$

$$\begin{pmatrix} b-c-d & -c & -d & -b \\ -c & b-c-d & -b & -d \\ -d & -b & b-c-d & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{だから, } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{は } a+b-c-d \text{ に対する固有ベクトルである.}$$

$$\begin{pmatrix} -b+c-d & -c & -d & -b \\ -c & -b+c-d & -b & -d \\ -d & -b & -b+c-d & -c \\ -b & -d & -c & -b+c-d \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{と第3行を第4行に加える}]{\text{第1,2行を}-1\text{倍したもの}} \begin{pmatrix} -b+c-d & -c & -d & -b \\ -c & -b+c-d & -b & -d \\ -d & -b & -b+c-d & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{だから, } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{は } a-b+c-d \text{ に対する固有ベクトルである. } \begin{pmatrix} -b-c+d & -c & -d & -b \\ -c & -b-c+d & -b & -d \\ -d & -b & -b-c+d & -c \\ -b & -d & -c & -b-c+d \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{と第2行を第4行に加える}]{\text{第1,3行を}-1\text{倍したもの}} \begin{pmatrix} -b-c+d & -c & -d & -b \\ -c & -b-c+d & -b & -d \\ -d & -b & -b-c+d & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{だから, } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{は } a-b-c+d \text{ に対する固有}$$

$$\text{ベクトルである. } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{は } \mathbf{K}^4 \text{ の正規直交系だから 1 次独立であるため, これらは}$$

$$\mathbf{K}^4 \text{ の正規直交基底である. 故に, 与えられた行列は } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ によって}$$

$$\begin{pmatrix} a+b+c+d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+b-c-d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b+c-d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b-c+d \end{pmatrix} \text{ に対角化される.}$$

(15) 与えられた行列を A とおく. $tE_n - A$ の第 2, 3, ..., n 列をすべて第 1 列に加えた行列の行列式を考える.

$$|tE_n - A| = \begin{vmatrix} t - (n-1)a - b & -a & -a & \cdots & -a \\ t - (n-1)a - b & t - b & -a & \cdots & -a \\ \vdots & & \ddots & & \\ t - (n-1)a - b & -a & -a & \cdots & t - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t - (n-1)a - b & -a & -a & \cdots & -a \\ 0 & t + a - b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t + a - b \end{vmatrix} =$$

$(t - (n-1)a - b)(t + a - b)^{n-1}$ だから A の固有値は $b - a$, $(n-1)a + b$ である. $((b-a)E_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間

の基底は $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{j+1}$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) で与えられ, $((n-1)a + b)E_n - A$ の解空間の基底は $\sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i$ で与えられる. \mathbf{R}^n のベクトル \mathbf{v}_j ($j = 1, 2, \dots, n-1$) を帰納的に $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{v}_j = \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{j+1} - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{j+1}, \mathbf{v}_i)}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \mathbf{v}_i$ で定めれば, $\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|} \mathbf{v}_1, \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|} \mathbf{v}_2, \dots, \frac{1}{\|\mathbf{v}_{n-1}\|} \mathbf{v}_{n-1}$ は固有値 $b-a$ に対する A の固有空間の正規直交基底である. ここで, $\mathbf{v}_j = \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{j+1}$ であることを j による帰納法で示す. $j=1$ のとき, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ だから, 主張は成り立つ. $i \leq j-1$ のとき, $\mathbf{v}_i = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{i+1}$ が成り立つと仮定すれば, $\|\mathbf{v}_i\|^2 = \frac{i+1}{i}$, $(\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{j+1}, \mathbf{v}_i) = \left(\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{j+1}, \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{i+1} \right) = \begin{cases} 0 & i < j-1 \\ -1 & i = j-1 \end{cases}$ だから

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{j+1} - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{j+1}, \mathbf{v}_i)}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \mathbf{v}_i = \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{j+1} + \frac{j-1}{j} \left(\frac{1}{j-1} \sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_j \right) = \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{j+1}$$

が成り立つ. \mathbf{p}_j ($j = 1, 2, \dots, n$) を $j \leq n-1$ ならば $\mathbf{p}_j = \frac{1}{\|\mathbf{v}_j\|} \mathbf{v}_j = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} \left(\sum_{k=1}^j \mathbf{e}_k - j\mathbf{e}_{j+1} \right)$, $\mathbf{p}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i$ で定め, \mathbf{p}_j を第 j 列とする行列を P とすれば, P は A を対角化する直交行列である.

(16) 与えられた行列を A_n とおき, $p_n(t) = |tE_n - A_n|$ とおけば, $p_1(t) = t-1$, $p_2(t) = (t-1)(t+1)$ であり,

$$\begin{aligned} p_n(t) &= t \left| tE_{n-1} - \begin{pmatrix} A_{n-2} & \mathbf{0} \\ t\mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \right| + (-1)^n \left| \begin{pmatrix} t\mathbf{0} & 0 \\ tE_{n-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} - A_{n-1} \right| \\ &= t^2 |tE_{n-2} - A_{n-2}| - |tE_{n-2} - A_{n-2}| = (t^2 - 1)p_{n-2}(t) \end{aligned}$$

だから $p_{2m-1}(t) = (t-1)^m(t+1)^{m-1}$, $p_{2m}(t) = (t-1)^m(t+1)^m$ となるため, A_n の固有値は $1, -1$ である. $(E_{2m-1} - A_{2m-1})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間の基底は $\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_{2m-j}$ ($j = 1, 2, \dots, m-1$) と \mathbf{e}_m で与えられ, $(-E_{2m-1} - A_{2m-1})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間の基底は $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{2m-j}$ ($j = 1, 2, \dots, m-1$) で与えられる. $(E_{2m} - A_{2m})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間の基底は $\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_{2m-j+1}$ ($j = 1, 2, \dots, m$) で与えられ, $(-E_{2m} - A_{2m})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間の基底は $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{2m-j+1}$ ($j = 1, 2, \dots, m$) で与えられる.

\mathbf{R}^{2m-1} のベクトル \mathbf{p}_j ($j = 1, 2, \dots, 2m-1$) を $\mathbf{p}_j = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_{2m-j}) & 1 \leq j \leq m-1 \\ \mathbf{e}_m & j = m \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_{j-m} - \mathbf{e}_{3m-j}) & m+1 \leq j \leq 2m-1 \end{cases}$ で定めて \mathbf{p}_j を

第 j 列とする行列を P とすれば, P は A_{2m-1} を対角化する直交行列である. \mathbf{R}^{2m} のベクトル \mathbf{p}_j ($j = 1, 2, \dots, 2m$) を $\mathbf{p}_j = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_{2m-j+1}) & 1 \leq j \leq m \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_{j-m} - \mathbf{e}_{3m-j+1}) & m+1 \leq j \leq 2m \end{cases}$ で定めて \mathbf{p}_j を第 j 列とする行列を P とすれば, P は A_{2m} を対角化する直交行列である.

3. (1) $b=c=0$ の場合は, $A = aE_2$ だから $P = E_2$ とすればよい. 以後 b, c の少なくとも一方は 0 でないとする.

$A = aE_2 + \begin{pmatrix} b & \\ & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c & b \end{pmatrix}$ だから $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ とおけば, $A\mathbf{v}_1 = \left(aE_2 + \begin{pmatrix} b & \\ & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c & b \end{pmatrix} \right) \mathbf{v}_1 = a\mathbf{v}_1$ となるため, a は

A の固有値で, \mathbf{v}_1 は a に対する A の固有ベクトルである. $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\bar{c} \\ \bar{b} \end{pmatrix}$ とおき, $P = \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|} \mathbf{v}_1 \quad \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|} \mathbf{v}_2 \right)$ とおけば,

$\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|} \mathbf{v}_1, \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|} \mathbf{v}_2$ は \mathbf{C}^2 の正規直交基底だから P はユニタリ行列で, $\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|} \mathbf{v}_1 = P\mathbf{e}_1$, $\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{|b|^2 + |c|^2}$

だから $A \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|} \mathbf{v}_2 \right) = \frac{a}{\|\mathbf{v}_2\|} \mathbf{v}_2 + \sqrt{|b|^2 + |c|^2} \mathbf{v}_1 = (|b|^2 + |c|^2)P\mathbf{e}_1 + aP\mathbf{e}_2 = P((|b|^2 + |c|^2)\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2)$ が成り立つ.

従って $AP = \left(A \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|} \mathbf{v}_1 \right) \quad A \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|} \mathbf{v}_2 \right) \right) = \left(aP\mathbf{e}_1 \quad P((|b|^2 + |c|^2)\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2) \right) = P \left(a\mathbf{e}_1 \quad (|b|^2 + |c|^2)\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 \right)$ よ

り $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & |b|^2 + |c|^2 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ は上半三角行列となり, $P = \frac{1}{\sqrt{|b|^2 + |c|^2}} \begin{pmatrix} b & -\bar{c} \\ c & \bar{b} \end{pmatrix}$ が求めるユニタリ行列である.

(2) $P^{-1}A^nP = (P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} a & |b|^2 + |c|^2 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}(|b|^2 + |c|^2) \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ が成り立つことが, n による数学的

帰納法で示される. 従って $A^n = P \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}(|b|^2 + |c|^2) \\ 0 & a^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} a^n - na^{n-1}bc & na^{n-1}b^2 \\ -na^{n-1}c^2 & a^n + na^{n-1}bc \end{pmatrix}$ である.

4. (1) $(\lambda E_n + A)^*(\lambda E_n + A) = |\lambda|^2 E_n + \bar{\lambda}A + \lambda A^* + A^*A$, $(\lambda E_n + A)(\lambda E_n + A)^* = |\lambda|^2 E_n + \bar{\lambda}A + \lambda A^* + AA^*$ であり, 仮定から $A^*A = AA^*$ だから, $(\lambda E_n + A)^*(\lambda E_n + A) = (\lambda E_n + A)(\lambda E_n + A)^*$ が成り立つため, $\lambda E_n + A$ も正規行列である.

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |c|^2 & \bar{a}b \\ a\bar{b} & |b|^2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\bar{c} \\ \bar{a}c & |c|^2 \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ が正規行列であるためには $|b| = |c|$ かつ $\bar{a}b = a\bar{c}$ が成り立つことが必要十分である. $a = 0$ の場合は主張は明らかである. $a \neq 0$ の場合, a の偏角を α として $a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $b = |b|(\cos \beta + i \sin \beta)$, $c = |c|(\cos \gamma + i \sin \gamma)$ を $\bar{a}b = a\bar{c}$ に代入すれば, $|a| \neq 0$ かつ $|b| = |c| \neq 0$ だから $\cos(\beta - \alpha) + i \sin(\beta - \alpha) = \cos(\alpha - \gamma) + i \sin(\alpha - \gamma)$ が得られる. 従って $\alpha - \gamma = \beta - \alpha + 2n\pi$ を満たす整数 n が存在する. このとき, $\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2} + n\pi$ だから次の等式が成り立つ.

$$a = |a| \left(\cos \left(\frac{\beta + \gamma}{2} + n\pi \right) + i \sin \left(\frac{\beta + \gamma}{2} + n\pi \right) \right) = \begin{cases} |a| \left(\cos \frac{\beta + \gamma}{2} + i \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \right) & n \text{ は偶数} \\ -|a| \left(\cos \frac{\beta + \gamma}{2} + i \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \right) & n \text{ は奇数} \end{cases}$$

(3) 与えられた行列の固有方程式は $(t - \lambda)^2 - 2\kappa\xi\zeta(t - \lambda) - \rho^2\xi^2\zeta^2 = 0$ であり, $\rho > 0$ だから, 2つの相異なる固有値 $\lambda + \xi\zeta(\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 + \rho^2})$ がある. このとき, $\begin{pmatrix} \rho\xi \\ \zeta(\kappa - \sqrt{\kappa^2 + \rho^2}) \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda + \xi\zeta(\kappa + \sqrt{\kappa^2 + \rho^2})$ に対する固有

ベクトルであり, $\begin{pmatrix} \rho\xi \\ \zeta(\kappa + \sqrt{\kappa^2 + \rho^2}) \end{pmatrix}$ は $\lambda + \xi\zeta(\kappa - \sqrt{\kappa^2 + \rho^2})$ に対する固有ベクトルである. これらの固有ベクトル

は直交し, 長さはそれぞれ $\sqrt{2\sqrt{\kappa^2 + \rho^2}(\sqrt{\kappa^2 + \rho^2} - \kappa)}$, $\sqrt{2\sqrt{\kappa^2 + \rho^2}(\sqrt{\kappa^2 + \rho^2} + \kappa)}$ だから, 与えられた行列

はユニタリ行列 $\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{\kappa^2 + \rho^2}}} \begin{pmatrix} \xi\sqrt{\sqrt{\kappa^2 + \rho^2} + \kappa} & \xi\sqrt{\sqrt{\kappa^2 + \rho^2} - \kappa} \\ -\zeta\sqrt{\sqrt{\kappa^2 + \rho^2} - \kappa} & \zeta\sqrt{\sqrt{\kappa^2 + \rho^2} + \kappa} \end{pmatrix}$ によって

$\begin{pmatrix} \lambda + \xi\zeta(\kappa + \sqrt{\kappa^2 + \rho^2}) & 0 \\ 0 & \lambda + \xi\zeta(\kappa - \sqrt{\kappa^2 + \rho^2}) \end{pmatrix}$ に対角化される.

5. (1) 仮定から α, β は f の固有値で, V, V^\perp がそれぞれ α, β の固有空間である. 第 18 回の問題 3 の (1) より, $(a, b) \neq (0, 0)$ の場合,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{-ac}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \frac{-bc}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{pmatrix}$$

とおけば, $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ は $\mathbf{v}_1 \in V, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V^\perp$ を満たす f の固有ベクトルからなる \mathbf{R}^3 の正規直交基底である. 従って $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ に関する f の表現行列を D とし, \mathbf{R}^3 の標準基底 $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ から $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ への基底の変換行列を P

とすれば D は対角行列 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ であり,

$$P = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-ac}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-bc}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 & \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{pmatrix}$$

で, P は \mathbf{R}^3 の標準基底 $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ に関する f の表現行列を対角化する行列である. また, P は正規直交基底を列ベクトルにもつため, 直交行列である. 故に $(a, b) \neq (0, 0)$ の場合は上記の P が求める行列である. $a = b = 0$ の場合は, \mathbf{e}_1 は V の正規直交基底で, $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ は V^\perp の正規直交基底だから, $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ は f の固有ベクトルからなる \mathbf{R}^3 の基底である. 従って $a = b = 0$ の場合は 3 次単位行列 E_n が求める行列である.

(2) 仮定から α, β は g の固有値で, W, W^\perp がそれぞれ α, β の固有空間である. 第 18 回の問題 3 の (3) より, $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{w}_1\|} \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{w}_2 - \frac{(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1\|} \left(\mathbf{w}_2 - \frac{(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1)}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \mathbf{w}_1 \right), \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2\|} \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2$ とおけば, $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ は $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W, \mathbf{v}_3 \in W^\perp$ を満たす f の固有ベクトルからなる \mathbf{R}^3 の正規直交基底である. 従って $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ に関する g の表現行列を D とし, \mathbf{R}^3 の標準基底 $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ から $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ への基底の変換行列を P とすれば D は対角行列 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ であり,

$$P = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{c(cp-ar)-b(aq-bp)}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)((br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2)}} & \frac{br-cq}{\sqrt{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{a(aq-bp)-c(br-cq)}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)((br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2)}} & \frac{cp-ar}{\sqrt{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & \frac{a(aq-bp)-c(br-cq)}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)((br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2)}} & \frac{aq-bp}{\sqrt{(br-cq)^2+(cp-ar)^2+(aq-bp)^2}} \end{pmatrix}$$

で, P は \mathbf{R}^3 の標準基底 $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ に関する g の表現行列を対角化する行列である. また, P は正規直交基底を列ベクトルにもつため, 直交行列である. 故に上記の P が求める行列である.

6. (1) $A\mathbf{a} = (\lambda E_n + \varepsilon \mathbf{a} \mathbf{a}^*)\mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \varepsilon \|\mathbf{a}\|^2 \mathbf{a} = (\lambda + \varepsilon \|\mathbf{a}\|^2) \mathbf{a}$ だから, $\lambda + \varepsilon \|\mathbf{a}\|^2$ は A の固有値で, \mathbf{a} はこの固有値に対する固有ベクトルである. $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{a} \rangle^\perp$ ならば $\mathbf{a}^* \mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$ だから $A\mathbf{x} = (\lambda E_n + \varepsilon \mathbf{a} \mathbf{a}^*)\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{a} \mathbf{a}^* \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ が得られる. 従って, λ は A の固有値で, $\langle \mathbf{a} \rangle^\perp$ はこの固有値に対する固有空間に含まれる. $\lambda + \varepsilon \|\mathbf{a}\|^2, \lambda$ に対する A の固有空間をそれぞれ V, W とすれば, $\langle \mathbf{a} \rangle \subset V, \langle \mathbf{a} \rangle^\perp \subset W$ である. $\mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W$ とすれば, $\mathbf{C}^n = \langle \mathbf{a} \rangle \oplus \langle \mathbf{a} \rangle^\perp$ より $\mathbf{v} = p\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{w} = q\mathbf{a} + \mathbf{c}$ を満たす $p, q \in \mathbf{C}$ と $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \langle \mathbf{a} \rangle^\perp$ が存在する. このとき $p(\lambda + \varepsilon \|\mathbf{a}\|^2)\mathbf{a} + (\lambda + \varepsilon \|\mathbf{a}\|^2)\mathbf{b} = (\lambda + \varepsilon \|\mathbf{a}\|^2)\mathbf{v} = A\mathbf{v} = A(p\mathbf{a} + \mathbf{b}) = pA\mathbf{a} + A\mathbf{b} = p(\lambda + \varepsilon \|\mathbf{a}\|^2)\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$ と $q\lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{c} = \lambda \mathbf{w} = A\mathbf{w} = A(q\mathbf{a} + \mathbf{c}) = qA\mathbf{a} + A\mathbf{c} = q(\lambda + \varepsilon \|\mathbf{a}\|^2)\mathbf{a} + \lambda \mathbf{c}$ が成り立つ. 前者から $\varepsilon \|\mathbf{a}\|^2 \mathbf{b} = \mathbf{0}$, 後者から $q\varepsilon \|\mathbf{a}\|^2 \mathbf{a} = \mathbf{0}$ が得られ, $\varepsilon = \pm 1$ かつ $\|\mathbf{a}\| \neq 0$ だから $\mathbf{b} = \mathbf{0}, q = 0$ であることがわかる. 故に $\mathbf{v} = p\mathbf{a} \in \langle \mathbf{a} \rangle, \mathbf{w} = \mathbf{c} \in \langle \mathbf{a} \rangle^\perp$ となるため, $V \subset \langle \mathbf{a} \rangle, W \subset \langle \mathbf{a} \rangle^\perp$ が成り立つ. 以上から $V = \langle \mathbf{a} \rangle, W = \langle \mathbf{a} \rangle^\perp$ である.

(2) $j = 1, 2, \dots, n-1$ に対して $\mathbf{v}_j = -\bar{a}_{j+1} \mathbf{e}_1 + \bar{a}_1 \mathbf{e}_{j+1}$ とおけば $a_1 \neq 0$ だから, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ は 1 次独立であり, $(\mathbf{a}, \mathbf{v}_j) = 0$ だから $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1} \in \langle \mathbf{a} \rangle^\perp$ である. 従って, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ は $\langle \mathbf{a} \rangle^\perp$ の基底であり, これらを直交化して得られる $\langle \mathbf{a} \rangle^\perp$ の正規直交基底を $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n-1}$ として $P = \left(\frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a} \ \mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \cdots \ \mathbf{w}_{n-1} \right)$ とおけば P は A を対角化するユニタリ行列である. このとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda + \varepsilon \|\mathbf{a}\|^2 & & & \\ & \mathbf{0} & & \\ & & \mathbf{0} & \\ & & & \lambda E_{n-1} \end{pmatrix}$ である.

$n = 2$ の場合: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -\bar{a}_2 \\ \bar{a}_1 \end{pmatrix}$ だから $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-\bar{a}_2}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} \\ \frac{\bar{a}_1}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} \end{pmatrix}$ である. 従って $P = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} & \frac{-\bar{a}_2}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} \\ \frac{a_2}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} & \frac{\bar{a}_1}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} \end{pmatrix}$ は

A を対角化するユニタリ行列であり, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda + \varepsilon \|\mathbf{a}\|^2 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ である.

$$n = 3 \text{ の場合: } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -\bar{a}_2 \\ \bar{a}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\bar{a}_3 \\ 0 \\ \bar{a}_1 \end{pmatrix} \text{ だから } \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-\bar{a}_2}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} \\ \frac{\bar{a}_1}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ であり, } \mathbf{z}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)} \mathbf{v}_1 \text{ とおけば}$$

$$\mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-|a_1|^2 \bar{a}_3}{|a_1|^2 + |a_2|^2} \\ \frac{-\bar{a}_1 a_2 \bar{a}_3}{|a_1|^2 + |a_2|^2} \\ \bar{a}_1 \end{pmatrix}, \|\mathbf{z}_2\| = \frac{|a_1| \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2}}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} \text{ である. 故に } P = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|} & \frac{-\bar{a}_2}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} & \frac{-|a_1| \bar{a}_3}{\|\mathbf{a}\| \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} \\ \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|} & \frac{\bar{a}_1}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} & \frac{-\bar{a}_1 a_2 \bar{a}_3}{|a_1| \|\mathbf{a}\| \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} \\ \frac{a_3}{\|\mathbf{a}\|} & 0 & \frac{\bar{a}_1 \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}}{|a_1| \|\mathbf{a}\|} \end{pmatrix}$$

は A を対角化するユニタリ行列であり, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda + \varepsilon \|\mathbf{a}\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ である.

$$n = 4 \text{ の場合: } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -\bar{a}_2 \\ \bar{a}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\bar{a}_3 \\ 0 \\ \bar{a}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ だから } \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-\bar{a}_2}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} \\ \frac{\bar{a}_1}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ であり, } \mathbf{z}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)} \mathbf{v}_1 \text{ とおけば}$$

$$\mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-|a_1|^2 \bar{a}_3}{|a_1|^2 + |a_2|^2} \\ \frac{-\bar{a}_1 a_2 \bar{a}_3}{|a_1|^2 + |a_2|^2} \\ \bar{a}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{z}_2\| = \frac{|a_1| \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2}}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} \text{ である. } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -\bar{a}_4 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{a}_1 \end{pmatrix} \text{ だから } \mathbf{z}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)} \mathbf{v}_1 -$$

$$\frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{z}_2)}{(\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_2)} \mathbf{z}_2 \text{ とおけば } \mathbf{z}_3 = \begin{pmatrix} \frac{-|a_1|^2 \bar{a}_4}{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2} \\ \frac{-\bar{a}_1 a_2 \bar{a}_4}{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2} \\ \frac{-\bar{a}_1 a_3 \bar{a}_4}{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2} \\ \bar{a}_1 \end{pmatrix}, \|\mathbf{z}_3\| = \frac{|a_1| \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 + |a_4|^2}}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2}} \text{ である. 従って}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|} & \frac{-\bar{a}_2}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} & \frac{-|a_1| \bar{a}_3}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2} \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2}} & \frac{-|a_1| \bar{a}_4}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2} \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 + |a_4|^2}} \\ \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|} & \frac{\bar{a}_1}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} & \frac{-\bar{a}_1 a_2 \bar{a}_3}{|a_1| \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2} \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2}} & \frac{-\bar{a}_1 a_2 \bar{a}_4}{|a_1| \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2} \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 + |a_4|^2}} \\ \frac{a_3}{\|\mathbf{a}\|} & 0 & \frac{\bar{a}_1 \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}}{|a_1| \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2}} & \frac{-\bar{a}_1 a_3 \bar{a}_4}{|a_1| \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2} \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 + |a_4|^2}} \\ \frac{a_4}{\|\mathbf{a}\|} & 0 & 0 & \frac{\bar{a}_1 \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2}}{|a_1| \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 + |a_4|^2}} \end{pmatrix}$$

は A を対角化するユニタリ行列であり, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda + \varepsilon \|\mathbf{a}\|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ である.

$$7. (1) \begin{vmatrix} t-3 & -i & 1 \\ i & t-5 & -i \\ 1 & i & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & -i & 1 \\ 0 & t-5 & -i \\ t-2 & i & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & -i & 1 \\ 0 & t-5 & -i \\ 0 & 2i & t-4 \end{vmatrix} = (t-2) \begin{vmatrix} t-5 & -i \\ 2i & t-4 \end{vmatrix} =$$

$$(t-2) \begin{vmatrix} t-5 & -i \\ 2i & t-4 \end{vmatrix} = (t-2)(t^2 - 9t + 18) = (t-2)(t-3)(t-6) \text{ より, 与えられた行列の固有値は } 2, 3, 6 \text{ である.}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -i & 1 \\ i & -3 & -i \\ 1 & i & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & -i & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから、2 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 1 \\ i & -2 & -i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 1 \\ i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから、3 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$$\begin{pmatrix} 3 & -i & 1 \\ i & 1 & -i \\ 1 & i & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -i & 1 \\ 4i & 2 & 0 \\ -8 & 4i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから、6 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられ

る. 故に、与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{2i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ に対角化される.

$$(2) \begin{vmatrix} t-2+i & 0 & -i \\ 0 & t-1-i & 0 \\ -i & 0 & t-2+i \end{vmatrix} = (t-1-i) \begin{vmatrix} t-2+i & -i \\ -i & t-2+i \end{vmatrix} = (t-1-i)((t-2+i)^2 + 1) =$$

$(t-1-i)(t-2+2i)(t-2)$ より、与えられた行列の固有値は $2, 1+i, 2-2i$ である.

$$\begin{pmatrix} i & 0 & -i \\ 0 & 1-i & 0 \\ -i & 0 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$$

だから、2 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$$\begin{pmatrix} -1+2i & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -1+2i \end{pmatrix}$$

だから、 $1+i$ に対する固有空間の正規直交基底は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられ

$$\begin{pmatrix} -1+2i & 0 & -4+2i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -1+2i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}}$$

る.

$$\begin{pmatrix} -i & 0 & -i \\ 0 & 1-3i & 0 \\ -i & 0 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -i & 0 & -i \\ 0 & 1-3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから、 $2-2i$ に対する固有空間の正規直交基底は

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に、与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-2i \end{pmatrix}$ に対角化される.

$$(3) \begin{vmatrix} t & 1 & 2 \\ -1 & t & 2 \\ -2 & -2 & t \end{vmatrix} = t^3 + 4 - 4 + 4t + t + 4t = t(t^2 + 9)$$

より、与えられた行列の固有値は $3i, -3i, 0$ であ

る.

$$\begin{pmatrix} 3i & 1 & 2 \\ -1 & 3i & 2 \\ -2 & -2 & 3i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -8 & 2+6i \\ -1 & 3i & 2 \\ 0 & -2-6i & -4+3i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -8 & 2+6i \\ -1 & 0 & \frac{-1+3i}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから、 $3i$

に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1+3i \\ 1+3i \\ 4 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$$\begin{pmatrix} -3i & 1 & 2 \\ -1 & -3i & 2 \\ -2 & -2 & -3i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -8 & 2-6i \\ -1 & -3i & 2 \\ 0 & -2+6i & -4-3i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(1,2)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -8 & 2-6i \\ -1 & 0 & \frac{-1-3i}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{だから, } -3i \text{ に対する固有空間の正規直交基底は}$$

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1-3i \\ 1-3i \\ 4 \end{pmatrix} \text{ で与えられる. } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(2,1)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(1,2)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ だ}$$

から, 0 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{-1+3i}{6} & \frac{-1-3i}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1+3i}{6} & \frac{1-3i}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

によって $\begin{pmatrix} 3i & 0 & 0 \\ 0 & -3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対角化される.

$$(4) \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -2 \\ -1 & t-2 & 2 \\ 2 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & -1 & -2 \\ t-3 & t-2 & 2 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & -1 & -2 \\ 0 & t-1 & 4 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = (t-3) \begin{vmatrix} t-1 & 4 \\ -2 & t-1 \end{vmatrix} =$$

$(t-3)((t-1)^2+8)$ より, 与えられた行列の固有値は $1+2\sqrt{2}i, 1-2\sqrt{2}i, 3$ である. $\begin{pmatrix} -1+2\sqrt{2}i & -1 & -2 \\ -1 & -1+2\sqrt{2}i & 2 \\ 2 & -2 & 2\sqrt{2}i \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(2,1)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -8-4\sqrt{2}i & -4+4\sqrt{2}i \\ -1 & -1+2\sqrt{2}i & 2 \\ 0 & -4+4\sqrt{2}i & 4+2\sqrt{2}i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(3,2)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & -4+4\sqrt{2}i & 4+2\sqrt{2}i \end{pmatrix} \text{ だから, } 1+2\sqrt{2}i$$

に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i \\ i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -1-2\sqrt{2}i & -1 & -2 \\ -1 & -1-2\sqrt{2}i & 2 \\ 2 & -2 & -2\sqrt{2}i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(2,1)\text{成分に関して}}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -8+4\sqrt{2}i & -4-4\sqrt{2}i \\ -1 & -1-2\sqrt{2}i & 2 \\ 0 & -4-4\sqrt{2}i & 4-2\sqrt{2}i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列の掃き出し}]{(3,2)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & -4-4\sqrt{2}i & 4-2\sqrt{2}i \end{pmatrix} \text{ だから, } 1-2\sqrt{2}i \text{ に対する固有}$$

空間の正規直交基底は $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列の掃き出し}]{(1,1)\text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列の掃き出し}]{(3,3)\text{成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ だから, 3 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は

$$\begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \text{ によって } \begin{pmatrix} 1+2\sqrt{2}i & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\sqrt{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ に対角化される.}$$

8. (1) B の固有多項式は $|tE_3 - B| = t^3 + c^2t = t(t+ci)(t-ci)$ だから固有値は $0, ci, -ci$.

(2) 複素行列 $A = (a_{jk}) \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ に対し $\bar{A} = (\bar{a}_{jk})$ とすれば, $A, B \in M_{m,n}(\mathbf{C}), C \in M_{n,l}(\mathbf{C}), \lambda \in \mathbf{C}$ に対して $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}, \overline{AC} = \bar{A}\bar{C}, \overline{\lambda A} = \bar{\lambda}\bar{A}$ が成り立ち, $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ であるためには $\bar{A} = A$ であることが必要十分である. $Bu = ciu$ の両辺の共役を考えると $B\bar{u} = -ci\bar{u}$ だから \bar{u} は $-ci$ に対する長さ 1 の固有ベクトルである. また, $\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u} + \bar{\bar{u}}) = x, \bar{y} = -\frac{1}{\sqrt{2}i}(\bar{u} - \bar{\bar{u}}) = y$ より $x, y \in \mathbf{R}^3$ である. $Bb = 0$ だけ

ら \mathbf{b} は B の固有値 0 に対する固有ベクトルである. $\mathbf{z}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}$ は長さが 1 であり, 正規行列 B の相異なる固有値 $0, ci, -ci$ に対する固有ベクトルであるため互いに直交する. このことから $(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = (\mathbf{z}, \mathbf{y}) = 0$ は明らかで, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2i}(\mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{2i}((\mathbf{u}, \mathbf{u}) - (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}})) = 0$, $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}((\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}})) = 1$, $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}((\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}})) = 1$. 故に $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ は \mathbf{R}^3 の正規直交基底である.

$$(3) \quad B\mathbf{x} = B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}})\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B\mathbf{u} + B\bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(ci\mathbf{u} - ci\bar{\mathbf{u}}) = \frac{ci}{\sqrt{2}}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) = -c\mathbf{y}, \quad B\mathbf{y} = B\left(\frac{1}{\sqrt{2}i}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\right) = \frac{1}{\sqrt{2}i}(B\mathbf{u} - B\bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{\sqrt{2}i}(ci\mathbf{u} + ci\bar{\mathbf{u}}) = \frac{c}{\sqrt{2}}(\mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}}) = c\mathbf{x}, \quad B\mathbf{z} = \mathbf{0}.$$

$$(4) \quad (3) \text{ の結果から } BP = B(\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z}) = (B\mathbf{x} \ B\mathbf{y} \ B\mathbf{z}) = (-c\mathbf{y} \ c\mathbf{x} \ \mathbf{0}) = (-cPe_2 \ cPe_1 \ \mathbf{0}) = P(-ce_2 \ ce_1 \ \mathbf{0}) \text{ だけ}$$

$$\text{ら, } P^{-1}BP = (-ce_2 \ ce_1 \ \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. (1) 直交行列 P はユニタリ行列だから固有値の絶対値は 1 である. 従って実数の固有値は 1 または -1 である. P の固有多項式の係数は実数だから

$$|tE_n - P| = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_r)(t - \mu_1)(t - \mu_2) \cdots (t - \mu_l)(t - \bar{\mu}_1)(t - \bar{\mu}_2) \cdots (t - \bar{\mu}_l)$$

(ただし $r + 2l = n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l \in \mathbf{R}$, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$) のように因数分解される. このとき, $t = 0$ を代入すれば

$$|P| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_l \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_l \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \cdots \bar{\mu}_l = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_l |\mu_1|^2 |\mu_2|^2 \cdots |\mu_l|^2$$

が得られる. P の固有方程式は -1 を s 重根にもつから, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_s = -1$ とすれば, $\lambda_{s+1} = \lambda_{s+2} = \cdots = \lambda_r = 1$, $|\mu_1| = |\mu_2| = \cdots = |\mu_l| = 1$ だから $|P| = (-1)^s$ である.

(2) 直交行列は正規行列だから, すべての固有値が実数であれば対称行列になるため, 対称行列ではない直交行列は虚数の固有値をもつ.

(3) P を行列式の値が 1 である奇数次の直交行列とすると, P の固有多項式は奇数次の実係数多項式だから, 重複度もこめて奇数個の実数解をもつ. すなわち実数である P の固有値は重複度もこめて奇数個であり $|P| = 1$ だから (1) の結果より -1 の重複度は偶数である. P の実数の固有値は 1 か -1 に限るため P は 1 を固有値にもつ.

10. (1) 問題 8 の結果から, A は 1 を固有値にもち, A の 1 以外の固有値は絶対値が 1 の一組の共役な虚数だから, それらを $\cos \theta + i \sin \theta, \cos \theta - i \sin \theta$ ($0 < \theta < \pi$) であるとしてよい. A の固有値 $\cos \theta - i \sin \theta$ に対する長さ 1 の固有ベクトルを \mathbf{u} とすれば $A\mathbf{u} = (\cos \theta - i \sin \theta)\mathbf{u}$ だから, $A\bar{\mathbf{u}} = \bar{A}\bar{\mathbf{u}} = \overline{A\mathbf{u}} = \overline{(\cos \theta - i \sin \theta)\mathbf{u}} = (\cos \theta + i \sin \theta)\bar{\mathbf{u}}$ となるため, $\bar{\mathbf{u}}$ は $\cos \theta + i \sin \theta$ に対する長さ 1 の固有ベクトルである. \mathbf{u} と $\bar{\mathbf{u}}$ は正規行列 A の相異なる固有値に対する固有ベクトルだから, 互いに直交することに注意する. $\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}})$, $\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})$ とおけば, $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}) = \mathbf{x}$, $\bar{\mathbf{y}} = -\frac{1}{\sqrt{2}i}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) = \mathbf{y}$ だから $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ であり, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2i}(\mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{2i}((\mathbf{u}, \mathbf{u}) - (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}})) = 0$, $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}((\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}})) = 1$, $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}((\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}})) = 1$ となるため, \mathbf{x}, \mathbf{y} は正規直交系である. さらに, $\mathbf{v} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ とおくと, \mathbf{v} は \mathbf{x} と \mathbf{y} の両方に垂直な単位ベクトルであり, $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}]$ は \mathbf{R}^3 の右手系の正規直交基底である. \mathbf{C}^3 の中で A の固有値 1 に対する固有空間を Z とすると, $\langle \mathbf{u} \rangle, \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle$ はそれぞれ 1 と異なる固有値 $\cos \theta + i \sin \theta, \cos \theta - i \sin \theta$ に対する固有空間だから, $\langle \mathbf{u} \rangle, \langle \bar{\mathbf{u}} \rangle, Z$ は互いに直交する \mathbf{C}^3 の 1 次元部分空間であり, \mathbf{C}^3 の 3 つの 2 次元部分空間 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \langle \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}} \rangle, Z^\perp$ は一致する. $V = Z \cap \mathbf{R}^3$ とおけば, V は \mathbf{R}^3 における A の固有値 1 に対する固有空間であり, \mathbf{C}^3 において $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = Z^\perp$ であることから, \mathbf{x} と \mathbf{y} によって生成される \mathbf{R}^3 の 2 次元部分空間は V の直交補空間である. 従って V は \mathbf{x} と \mathbf{y} の両方に垂直なベクトル全体からなる \mathbf{R}^3 の 1 次元部分空間であり, 一方 \mathbf{v} は \mathbf{x} と \mathbf{y} の両方に垂直なベクトルだから, \mathbf{v} は V の基底であり, A の固有値 1 に対する固有ベクトルである.

$A\mathbf{u} = (\cos\theta - i\sin\theta)\mathbf{u}$, $A\bar{\mathbf{u}} = (\cos\theta + i\sin\theta)\bar{\mathbf{u}}$ から, $A\mathbf{x} = \cos\theta\mathbf{x} + \sin\theta\mathbf{y}$, $A\mathbf{y} = -\sin\theta\mathbf{x} + \cos\theta\mathbf{y}$ が得られる. 従って, P を \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{v} をそれぞれ第 1 列, 第 2 列, 第 3 列にもつ行列とすれば, $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}]$ は \mathbf{R}^3 の右手系の正規直交基底だから, P は行列式の値が 1 である直交行列である.

$$\begin{aligned} AP &= A(\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{v}) = (A\mathbf{x} \ A\mathbf{y} \ A\mathbf{v}) = (\cos\theta\mathbf{x} + \sin\theta\mathbf{y} \quad -\sin\theta\mathbf{x} + \cos\theta\mathbf{y} \quad \mathbf{v}) \\ &= (\cos\theta P\mathbf{e}_1 + \sin\theta P\mathbf{e}_2 \quad -\sin\theta P\mathbf{e}_1 + \cos\theta P\mathbf{e}_2 \quad P\mathbf{e}_3) \\ &= P(\cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2 \quad -\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3) = P \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

だから $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つ. このとき, $\text{tr}A = \text{tr}(P^{-1}AP) = 2\cos\theta + 1$ から $\cos\theta =$

$\frac{1}{2}(\text{tr}A - 1)$ が得られるため, θ は $0 < \theta < \pi$ の範囲で直交行列 P の選び方によらずに一通りに定まることがわかる.

(2) $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を, 各 $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$ を ℓ を軸として, \mathbf{v} の方向を向いて θ だけ時計回りに回転したベクトルに対応させる写像とする. ℓ に垂直な平面で, 原点を通るものをそれぞれ H_0 とすれば, H_0 は \mathbf{x} と \mathbf{y} で生成される部分空間である. このとき, f_0 は H_0 の点を H_0 の点に写すため, f の定義域を H_0 に制限して得られる写像を $f_0: H_0 \rightarrow H_0$ とすると, f_0 は原点を中心とし, ℓ を軸として, \mathbf{v} の方向を向いて θ だけ時計回りに回転させる H_0 上の回転移動である. $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}]$ は \mathbf{R}^3 の右手系である正規直交基底だから, \mathbf{x} を, ℓ を軸として, \mathbf{v} の方向を向いて $\frac{\pi}{2}$ だけ時計回りに回転すれば \mathbf{y} である. 従って, H_0 の基底 $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ に関する f_0 の表現行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となるため, $\mathbf{q} \in H_0$ ならば $\mathbf{q} = (\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{x} + (\mathbf{q}, \mathbf{y})\mathbf{y}$ より, 次の等式が成り立つ.

$$f_0(\mathbf{q}) = ((\mathbf{q}, \mathbf{x})\cos\theta - (\mathbf{q}, \mathbf{y})\sin\theta)\mathbf{x} + ((\mathbf{q}, \mathbf{x})\sin\theta + (\mathbf{q}, \mathbf{y})\cos\theta)\mathbf{y} \cdots (*)$$

$[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}]$ は \mathbf{R}^3 の正規直交基底だから $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$ は $\mathbf{p} = (\mathbf{p}, \mathbf{x})\mathbf{x} + (\mathbf{p}, \mathbf{y})\mathbf{y} + (\mathbf{p}, \mathbf{v})\mathbf{v}$ と表されるため, \mathbf{p} を位置ベクトルとする点を P とし, P から ℓ に下した垂線の足を C とすれば, C の位置ベクトルは $(\mathbf{p}, \mathbf{v})\mathbf{v}$ である. ℓ に垂直な平面で, C を通るものを H とすれば, H 上を C を中心として P を \mathbf{v} の方向を向いて θ だけ時計回りに回転した点の位置ベクトルが $f(\mathbf{p})$ だから, $f(\mathbf{p}) - (\mathbf{p}, \mathbf{v})\mathbf{v}$ は ℓ に垂直で H_0 に含まれ, H_0 内で $\mathbf{p} - (\mathbf{p}, \mathbf{v})\mathbf{v} = (\mathbf{p}, \mathbf{x})\mathbf{x} + (\mathbf{p}, \mathbf{y})\mathbf{y}$ を, 原点を中心として \mathbf{v} の方向を向いて θ だけ時計回りに回転したベクトルである. 故に, $(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = (\mathbf{v}, \mathbf{y}) = 0$ であることに注意すれば, (*) より

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}) - (\mathbf{p}, \mathbf{v})\mathbf{v} &= f_0(\mathbf{p} - (\mathbf{p}, \mathbf{v})\mathbf{v}) \\ &= ((\mathbf{p} - (\mathbf{p}, \mathbf{v})\mathbf{v}, \mathbf{x})\cos\theta - (\mathbf{p} - (\mathbf{p}, \mathbf{v})\mathbf{v}, \mathbf{y})\sin\theta)\mathbf{x} + ((\mathbf{p} - (\mathbf{p}, \mathbf{v})\mathbf{v}, \mathbf{x})\sin\theta + (\mathbf{p} - (\mathbf{p}, \mathbf{v})\mathbf{v}, \mathbf{y})\cos\theta)\mathbf{y} \\ &= ((\mathbf{p}, \mathbf{x})\cos\theta - (\mathbf{p}, \mathbf{y})\sin\theta)\mathbf{x} + ((\mathbf{p}, \mathbf{x})\sin\theta + (\mathbf{p}, \mathbf{y})\cos\theta)\mathbf{y} \end{aligned}$$

だから, $f(\mathbf{p}) = ((\mathbf{p}, \mathbf{x})\cos\theta - (\mathbf{p}, \mathbf{y})\sin\theta)\mathbf{x} + ((\mathbf{p}, \mathbf{x})\sin\theta + (\mathbf{p}, \mathbf{y})\cos\theta)\mathbf{y} + (\mathbf{p}, \mathbf{v})\mathbf{v}$ が成り立つ. 一方 (1) の結果から

$$\begin{aligned} A\mathbf{p} &= (\mathbf{p}, \mathbf{x})A\mathbf{x} + (\mathbf{p}, \mathbf{y})A\mathbf{y} + (\mathbf{p}, \mathbf{v})A\mathbf{v} = (\mathbf{p}, \mathbf{x})(\cos\theta\mathbf{x} + \sin\theta\mathbf{y}) + (\mathbf{p}, \mathbf{y})(-\sin\theta\mathbf{x} + \cos\theta\mathbf{y}) + (\mathbf{p}, \mathbf{v})\mathbf{v} = \\ &= ((\mathbf{p}, \mathbf{x})\cos\theta - (\mathbf{p}, \mathbf{y})\sin\theta)\mathbf{x} + ((\mathbf{p}, \mathbf{x})\sin\theta + (\mathbf{p}, \mathbf{y})\cos\theta)\mathbf{y} + (\mathbf{p}, \mathbf{v})\mathbf{v} \end{aligned}$$

が成り立つため, $f(\mathbf{p}) = A\mathbf{p}$ となり, A が表す \mathbf{R}^3 の 1 次変換は ℓ を軸に \mathbf{v} の方向を向いて時計回りに θ だけ回転する回転移動であることがわかる. 故に, $\mathbf{b} = \sin\theta\mathbf{v}$ であることが示されれば, \mathbf{b} の長さは $\sin\theta$ で, $\sin\theta > 0$ より, A が表す \mathbf{R}^3 の 1 次変換は ℓ を軸に \mathbf{b} の方向を向いて時計回りに θ だけ回転する回転移動であることが示される.

$A^2\mathbf{u} = (\cos\theta - i\sin\theta)^2\mathbf{u} = (\cos 2\theta - i\sin 2\theta)\mathbf{u}$, $A^2\bar{\mathbf{u}} = (\cos\theta + i\sin\theta)^2\bar{\mathbf{u}} = (\cos 2\theta + i\sin 2\theta)\bar{\mathbf{u}}$, $A^2\mathbf{v} = \mathbf{v}$ より, A^2 の固有値は $\cos 2\theta + i\sin 2\theta$, $\cos 2\theta - i\sin 2\theta$, 1 であり, $0 < 2\theta < 2\pi$ だから 1 に対する A^2 の固有空間は \mathbf{v} で生成される 1 次元部分空間である. 一方, $\frac{1}{2}(A - {}^tA)\mathbf{b} = 0$ で, ${}^tA = A^{-1}$ だから $A^2\mathbf{b} = \mathbf{b}$ となるため, \mathbf{b} は A^2 の固有値 1 に対する固有ベクトルである. 従って $\mathbf{b} = r\mathbf{v}$ となる $r \in \mathbf{R}$ が存在する.

$Ax = \cos \theta x + \sin \theta y$, $Ay = -\sin \theta x + \cos \theta y$ より $A^{-1}x = \cos \theta x - \sin \theta y$ が得られ, 任意の $w \in \mathbf{R}^3$ に対して $\frac{1}{2}(A - {}^tA)w = b \times w$ が成り立つ. さらに v は単位ベクトルで, ${}^tA = A$ であることに注意すれば

$$\begin{aligned} r &= r(v, v) = (v, rv) = (v, b) = (x \times y, b) = D_3(x, y, b) = D_3(b, x, y) = (b \times x, y) \\ &= \frac{1}{2}((A - {}^tA)x, y) = \frac{1}{2}(Ax - A^{-1}x, y) = (\sin \theta y, y) = \sin \theta (y, y) = \sin \theta \end{aligned}$$

が得られる. 故に $r = \sin \theta > 0$ で $b = rv$ だから $\|b\| = \|\sin \theta v\| = \sin \theta \|v\| = \sin \theta$ である.

11. v に直交する単位ベクトルの一つとして $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選び, $v_2 = \frac{1}{\|v\|} v \times v_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \frac{1}{\|v\|} v$

とおくと, $[v_1, v_2, v_3]$ は右手系の \mathbf{R}^3 の正規直交基底である. 求める行列を A とすれば, T_A は v_3 を方向ベクトルとする直線を軸として v_1, v_2 を含む平面を, v_3 の方向を向いて $\frac{\pi}{3}$ だけ時計回りに回転する 1 次変換だから,

$Av_1 = \cos \frac{\pi}{3} v_1 + \sin \frac{\pi}{3} v_2 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} v_2$, $Av_2 = -\sin \frac{\pi}{3} v_1 + \cos \frac{\pi}{3} v_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2$, $Av_3 = v_3$ である. v_1, v_2, v_3 をこの順に列ベクトルにもつ行列を P とすれば, P は直交行列であり, $AP = (Av_1 Av_2 Av_3) =$

$$\left(\frac{1}{2} v_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} v_2 \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2 \quad v_3 \right) = \left(\frac{1}{2} P e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} P e_2 \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} P e_1 + \frac{1}{2} P e_2 \quad P e_3 \right) = P \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ より, } A =$$

$$P \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tP = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 10 & 2 - 6\sqrt{3} & 2 + 6\sqrt{3} \\ 2 + 6\sqrt{3} & 13 & 4 - 3\sqrt{3} \\ 2 - 6\sqrt{3} & 4 + 3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}.$$

12. A は対称行列だから, A の固有値はすべて実数である. 従って, 問題 8 の結果より, A の固有値は 1 または -1 である. もし, A の固有方程式が ε ($\varepsilon = \pm 1$) を 3 重根にもてば, A は対角化可能だから $P^{-1}AP = \varepsilon E_3$ を満たす正則行列 P が存在するが, このとき $A = P(\varepsilon E_3)P^{-1} = \varepsilon PP^{-1} = \varepsilon E_3$ となって, $A \neq \pm E_3$ であるという仮定に反する. 従って A の固有多項式は $(t-1)(t+1)^2$ か $(t-1)^2(t+1)$ のいずれかで, A の行列式の値は A の固有方程式のすべて解の重複度も込めた積に等しいため, 前者の場合は $|A| = 1$ であり, 後者の場合は $|A| = -1$ である.

(1) 上の議論から, A の固有方程式は -1 を重根にもち, A の固有値 -1 に対する固有空間の次元は 2 次元である. x, y を -1 に対する固有空間の正規直交基底とし, 固有値 1 に対する A の固有ベクトルで単位ベクトルであるものを v とすれば, $[x, y, v]$ は \mathbf{R}^3 の正規直交基底である. $Ax = -x$, $Ay = -y$, $Av = v$ だから, $[x, y, v]$ に関する A の表現行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となり, A が表す \mathbf{R}^3 の 1 次変換は, v を方向ベクトルとして, 原点を通る直線を軸とした角度 π の回転移動であることがわかる.

(2) 初めの議論から, A の固有方程式は 1 を重根にもち, A の固有値 1 に対する固有空間の次元は 2 次元である. x, y を 1 に対する固有空間の正規直交基底とし, 固有値 -1 に対する A の固有ベクトルで単位ベクトルであるものを v とすれば, $[x, y, v]$ は \mathbf{R}^3 の正規直交基底であり, とくに v は原点を通過して x と y に平行な平面の法線ベクトルである.

$Ax = x$, $Ay = y$, $Av = -v$ だから, $[x, y, v]$ に関する A の表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となり, A が表す \mathbf{R}^3 の 1 次変換は, v を法線ベクトルとして, 原点を通る平面に関する対称移動であることがわかる.

13. 各問で与えられた行列を A とする.

$$(1) {}^tAA = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -3 & 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & \sqrt{6} \\ 3 & 1 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} = E_3 \text{ だから, } A \text{ は直交行列であり,}$$

$$|A| = \frac{1}{4^3} \begin{vmatrix} -1 & -3 & \sqrt{6} \\ 3 & 1 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{64} \begin{vmatrix} -1 & -3 & \sqrt{6} \\ 0 & -8 & 4\sqrt{6} \\ 0 & 4\sqrt{6} & -4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{64} \begin{vmatrix} -8 & 4\sqrt{6} \\ 4\sqrt{6} & -4 \end{vmatrix} = 1 \text{ だから, 問題 9 の結果から } A \text{ は回転を}$$

$$\text{表す. } \frac{1}{2}(A - {}^tA) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -3 & \sqrt{6} \\ 3 & 0 & 0 \\ -\sqrt{6} & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ であり, 回転角を } \theta \text{ とすれば } \cos \theta = \frac{1}{2}(\text{tr } A - 1) = \frac{1}{4} \text{ だから, 問題 9 の}$$

$$\text{結果により, } A \text{ は原点を通り, } \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6} \\ 3 \end{pmatrix} \text{ を方向ベクトルとする直線を軸として, } \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6} \\ 3 \end{pmatrix} \text{ の方向に向かって時計回りに}$$

$\cos^{-1} \frac{1}{4}$ だけ回転させる回転を表す.

$$(2) {}^tAA = \frac{1}{81} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \\ 1 & -8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix} = E_3 \text{ だから, } A \text{ は直交行列であり, } |A| = \frac{1}{9^3} \begin{vmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{9^3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 36 & -63 & -8 \\ -9 & 36 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \text{ だから, 問題 9 の結果から } A \text{ は回転を表す. } \frac{1}{2}(A - {}^tA) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & -6 & -3 \\ 6 & 0 & -6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{であり, 回転角を } \theta \text{ とすれば } \cos \theta = \frac{1}{2}(\text{tr } A - 1) = 0 \text{ だから, 問題 9 の結果により, } A \text{ は原点を通り, } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ を方向ベ}$$

クトルとする直線を軸として, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の方向に向かって時計回りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させる回転を表す.

$$(3) {}^tAA = \frac{1}{225} \begin{pmatrix} 5 & -14 & -2 \\ 10 & 5 & -10 \\ 10 & 2 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 \\ -14 & 5 & 2 \\ -2 & -10 & 11 \end{pmatrix} = E_3 \text{ だから, } A \text{ は直交行列であり,}$$

$$|A| = \frac{1}{15^3} \begin{vmatrix} 5 & 10 & 10 \\ -14 & 5 & 2 \\ -2 & -10 & 11 \end{vmatrix} = \frac{1}{3375} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -14 & 33 & 30 \\ -2 & -6 & 15 \end{vmatrix} = \frac{1}{675} \begin{vmatrix} 33 & 30 \\ -6 & 15 \end{vmatrix} = 1 \text{ だから, 問題 9 の結果から } A \text{ は回転を表す.}$$

$$\frac{1}{2}(A - {}^tA) = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 6 \\ -12 & 0 & 6 \\ -6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \text{ であり, 回転角を } \theta \text{ とすれば } \cos \theta = \frac{1}{2}(\text{tr } A - 1) = \frac{1}{5} \text{ だから, 問題 9 の結果によ}$$

り, A は原点を通り, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする直線を軸として, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ の方向に向かって時計回りに $\cos^{-1} \frac{1}{5}$ だ

だけ回転させる回転を表す.

$$(4) {}^tAA = \frac{1}{289} \begin{pmatrix} -9 & 8 & 12 \\ 8 & -9 & 12 \\ 12 & 12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 8 & 12 \\ 8 & -9 & 12 \\ 12 & 12 & 1 \end{pmatrix} = E_3, {}^tA = A \text{ だから, } A \text{ は直交行列かつ対称行列であり,}$$

$$|A| = \frac{1}{17^3} \begin{vmatrix} -9 & 8 & 12 \\ 8 & -9 & 12 \\ 12 & 12 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4913} \begin{vmatrix} -153 & -136 & 0 \\ -136 & -153 & 0 \\ 12 & 12 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4913} \begin{vmatrix} -153 & -136 \\ -136 & -153 \end{vmatrix} = 1 \text{ だから, 問題 11 の結果から } A \text{ は回転}$$

$$\text{角 } \pi \text{ の回転を表す. } \begin{pmatrix} -26 & 8 & 12 \\ 8 & -26 & 12 \\ 12 & 12 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -17 & 17 & 0 \\ 17 & -17 & 0 \\ 12 & 12 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 17 & -17 & 0 \\ 24 & 0 & -16 \end{pmatrix} \text{ だけ}$$

ら, $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ は 1 に対する固有ベクトルであり, A は原点を通り, このベクトルを方向ベクトルとする直線を軸にした回転

角 π の回転を表す.

$$(5) {}^tAA = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2\sqrt{2} \\ 1 & 4 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2\sqrt{2} \\ 1 & 4 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} = E_3 \text{ だから, } A \text{ は直交行列であり,}$$

$$|A| = \frac{1}{125} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2\sqrt{2} \\ 1 & 4 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{125} \begin{vmatrix} 0 & -15 & 10\sqrt{2} \\ 1 & 4 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 10\sqrt{2} & -5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{125} \begin{vmatrix} -15 & 10\sqrt{2} \\ 10\sqrt{2} & -5 \end{vmatrix} = 1 \text{ だから, 問題 9 の結果から}$$

$$A \text{ は回転を表す. } \frac{1}{2}(A - {}^tA) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ であり, 回転角を } \theta \text{ とすれば } \cos \theta = \frac{1}{2}(\text{tr } A - 1) = \frac{3}{5} \text{ だ}$$

から, 問題 9 の結果により, A は原点を通り, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする直線を軸として, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の方向に向かって時

計回りに $\cos^{-1} \frac{3}{5}$ だけ回転させる回転を表す.

$$(6) {}^tAA = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 6 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 6 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix} = E_3, {}^tA = A \text{ だから, } A \text{ は直交行列かつ対称行列であり,}$$

$$|A| = \frac{1}{7^3} \begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 6 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = \frac{1}{343} \begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & -21 & -7 \\ 0 & -7 & -\frac{21}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{343} \begin{vmatrix} -21 & -7 \\ -14 & -21 \end{vmatrix} = 1 \text{ だから, 問題 11 の結果から } A \text{ は回転角}$$

$$\pi \text{ の回転を表す. } \begin{pmatrix} -5 & 6 & 3 \\ 6 & -10 & 2 \\ 3 & 2 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -14 & 0 & 42 \\ 21 & 0 & -63 \\ 3 & 2 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -14 & 0 & 42 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ だから,}$$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 に対する固有ベクトルであり, A は原点を通り, このベクトルを方向ベクトルとする直線を軸にした回転角

π の回転を表す.

$$(7) {}^tAA = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = E_3 \text{ だから, } A \text{ は直交行列であり, } |A| = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{27} \begin{vmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -\frac{1}{27} \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \text{ だから, 問題 9 の結果から } A \text{ は回転を表す.}$$

$\frac{1}{2}(A - {}^tA) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ だから、問題 9 の結果により、回転軸は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする直線であり、回

転角を θ とすれば $\cos \theta = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A - 1) = \frac{1}{2}$ だから、 A は原点を通り、 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする直線を軸として、

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の方向に向かって時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させる回転を表す。

$$(8) {}^tAA = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = E_3 \text{ だから、} A \text{ は直交行列であり、} |A| = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2\sqrt{2} \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = 1 \text{ だから、問題 9 の結果から } A \text{ は回転を表す。}$$

$$\frac{1}{2}(A - {}^tA) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

であり、回転角を θ とすれば $\cos \theta = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A - 1) = -\frac{1}{2}$ だから、問題 9 の結果により、 A は原点を通り、 $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ を方

向ベクトルとする直線を軸として、 $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ の方向に向かって時計回りに $\frac{2\pi}{3}$ だけ回転させる回転を表す。

$$(9) {}^tAA = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{3} & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{6} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 2 & \sqrt{6} \\ -2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = E_3 \text{ だから、} A \text{ は直交行列であり、}$$

$$|A| = \frac{1}{64} \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -2\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 2 & \sqrt{6} \\ -2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{64} \begin{vmatrix} 4\sqrt{2} & 0 & 4\sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 2 & \sqrt{6} \\ -2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{32} \begin{vmatrix} 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = 1 \text{ だから、問題 9 の結果から } A \text{ は}$$

回転を表す。 $\frac{1}{2}(A - {}^tA) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} - \sqrt{6} & 3\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} + \sqrt{6} & 0 & \sqrt{6} \\ -3\sqrt{2} & -\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$ であり、回転角を θ とすれば $\cos \theta = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A - 1) =$

$\frac{3\sqrt{2} - 2}{8}$ だから、問題 9 の結果により、 A は原点を通り、 $\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする直線を軸として、 $\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}$

の方向に向かって時計回りに $\cos^{-1} \frac{3\sqrt{2} - 2}{8}$ だけ回転させる回転を表す。

14. (1) 仮定から $\mathbf{v}_{j-1} = (A - \lambda E_{2n})\mathbf{v}_j$ が $j = 2, 3, \dots, n$ について成り立ち、 $(A - \lambda E_{2n})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ である。従って

$$(A - \lambda E_{2n})^k \mathbf{v}_j = \begin{cases} \mathbf{v}_{j-k} & k = 0, 1, \dots, j-1 \\ \mathbf{0} & k \geq j \end{cases} \dots (i)$$

が成り立つ。 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{C}$ に対して $\sum_{j=1}^n a_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$ が成り立つとき、この両辺に $(A - \lambda E_{2n})^{n-1}$ をかけると、上式から $a_n \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ が得られ、 $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ だから $a_n = 0$ である。帰納的に $a_n = a_{n-1} = \dots = a_{n-k+1} = 0$ が示されたと仮定すると $\sum_{j=1}^{n-k} a_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$ だから、この両辺に $(A - \lambda E_{2n})^{n-k-1}$ をかければ $a_{n-k} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ が得られ、 $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ だから

$a_{n-k} = 0$ である. 故に, 帰納法によって $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ であることがわかるため, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ は 1 次独立である.

(2) (i) より $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \text{Ker } T_{(A-\lambda E_{2n})^n}$ であり, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ は 1 次独立だから $\dim \text{Ker } T_{(A-\lambda E_{2n})^n} \geq n$ である. 従って, 次元公式から $\text{rank}(A - \lambda E_{2n})^n \leq n$ である.

$\tau: \mathbf{C}^{2n} \rightarrow \mathbf{C}^{2n}$ を $\tau(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{x}}$ で定めれば, \mathbf{C}^{2n} を \mathbf{R} 上の $4n$ 次元ベクトル空間とみなしたとき, τ は同型写像である \mathbf{C}^{2n} の 1 次変換である. 従って (1) の結果から $\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n$ は 1 次独立である. A の成分はすべて実数だから, 仮定から

$$A\bar{\mathbf{v}}_j = \begin{cases} \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}_1 & j = 1 \\ \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}_j + \bar{\mathbf{v}}_{j-1} & j = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

が成り立つ. 従って

$$(A - \bar{\lambda}E_{2n})^k \bar{\mathbf{v}}_j = \begin{cases} \bar{\mathbf{v}}_{j-k} & k = 0, 1, \dots, j-1 \\ \mathbf{0} & k \geq j \end{cases}$$

となるため, $\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n \in \text{Ker } T_{(A-\bar{\lambda}E_{2n})^n}$ である. 故に $\dim \text{Ker } T_{(A-\bar{\lambda}E_{2n})^n} \geq n$ となるため, 次元公式から $\text{rank}(A - \bar{\lambda}E_{2n})^n \leq n$ である.

$\lambda \neq \bar{\lambda}$ より, $(x - \lambda)^n$ と $(x - \bar{\lambda})^n$ は互いに素な多項式だから $(x - \lambda)^n F(x) + (x - \bar{\lambda})^n G(x) = 1$ を満たす x の多項式 $F(x)$ と $G(x)$ が存在する. 従って $(A - \lambda E_{2n})^n F(A) + (A - \bar{\lambda} E_{2n})^n G(A) = E_{2n}$ が成り立つため, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^{2n}$ に対して

$$\mathbf{x} = (A - \lambda E_{2n})^n F(A)\mathbf{x} + (A - \bar{\lambda} E_{2n})^n G(A)\mathbf{x} \cdots (ii)$$

である. ここで, $(A - \lambda E_{2n})^n F(A) \in \text{Im } T_{(A-\lambda E_{2n})^n}$, $(A - \bar{\lambda} E_{2n})^n G(A) \in \text{Im } T_{(A-\bar{\lambda} E_{2n})^n}$ だから, 上式から $\mathbf{C}^{2n} = \text{Im } T_{(A-\lambda E_{2n})^n} + \text{Im } T_{(A-\bar{\lambda} E_{2n})^n}$ であることがわかる. また, $(A - \lambda E_{2n})^n F(A) = F(A)(A - \lambda E_{2n})^n$, $(A - \bar{\lambda} E_{2n})^n G(A) = G(A)(A - \bar{\lambda} E_{2n})^n$ だから (ii) より $j = 1, 2, \dots, n$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_j &= (A - \lambda E_{2n})^n F(A)\mathbf{v}_j + (A - \bar{\lambda} E_{2n})^n G(A)\mathbf{v}_j = F(A)(A - \lambda E_{2n})^n \mathbf{v}_j + (A - \bar{\lambda} E_{2n})^n G(A)\mathbf{v}_j \\ &= (A - \bar{\lambda} E_{2n})^n G(A)\mathbf{v}_j \in \text{Im } T_{(A-\bar{\lambda} E_{2n})^n} \\ \bar{\mathbf{v}}_j &= (A - \lambda E_{2n})^n F(A)\bar{\mathbf{v}}_j + (A - \bar{\lambda} E_{2n})^n G(A)\bar{\mathbf{v}}_j = (A - \lambda E_{2n})^n F(A)\bar{\mathbf{v}}_j + G(A)(A - \bar{\lambda} E_{2n})^n \bar{\mathbf{v}}_j \\ &= (A - \lambda E_{2n})^n F(A)\bar{\mathbf{v}}_j \in \text{Im } T_{(A-\lambda E_{2n})^n} \end{aligned}$$

$\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n$ は 1 次独立だから, $\text{rank}(A - \lambda E_{2n})^n = \dim \text{Im } T_{(A-\lambda E_{2n})^n} \geq n$ であり, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ は 1 次独立だから, $\text{rank}(A - \bar{\lambda} E_{2n})^n = \dim \text{Im } T_{(A-\bar{\lambda} E_{2n})^n} \geq n$ が得られるため, $\dim \text{Im } T_{(A-\lambda E_{2n})^n} = \dim \text{Im } T_{(A-\bar{\lambda} E_{2n})^n} = n$ であり, $\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n$ は $\text{Im } T_{(A-\lambda E_{2n})^n}$ の基底, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ は $\text{Im } T_{(A-\bar{\lambda} E_{2n})^n}$ の基底である.

$\mathbf{C}^{2n} = \text{Im } T_{(A-\lambda E_{2n})^n} + \text{Im } T_{(A-\bar{\lambda} E_{2n})^n}$ は $2n$ 個のベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n$ で生成されるため, これらは \mathbf{C}^{2n} の基底である

(3) $\mathbf{v}_k = \mathbf{w}_{2k-1} + i\mathbf{w}_{2k}$, $\bar{\mathbf{v}}_k = \mathbf{w}_{2k-1} - i\mathbf{w}_{2k}$ だから $\lambda = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) とおけば

$$\begin{aligned} A\mathbf{w}_j &= \begin{cases} \frac{1}{2}(A\mathbf{v}_k + A\bar{\mathbf{v}}_k) & j = 2k-1 \ (k = 1, 2, \dots, n) \\ \frac{1}{2i}(A\mathbf{v}_k - A\bar{\mathbf{v}}_k) & j = 2k \ (k = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}(\lambda\mathbf{v}_1 + \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}_1) & j = 1 \\ \frac{1}{2i}(\lambda\mathbf{v}_1 - \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}_1) & j = 2 \\ \frac{1}{2}(\lambda\mathbf{v}_k + \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}_k + \mathbf{v}_{k-1} + \bar{\mathbf{v}}_{k-1}) & j = 2k-1 \ (k = 2, 3, \dots, n) \\ \frac{1}{2i}(\lambda\mathbf{v}_k - \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}_k + \mathbf{v}_{k-1} - \bar{\mathbf{v}}_{k-1}) & j = 2k \ (k = 2, 3, \dots, n) \end{cases} \\ &= \begin{cases} a\mathbf{w}_1 - b\mathbf{w}_2 & j = 1 \\ b\mathbf{w}_1 + a\mathbf{w}_2 & j = 2 \\ a\mathbf{w}_{2k-1} - b\mathbf{w}_{2k} + \mathbf{w}_{2k-3} & j = 2k-1 \ (k = 2, 3, \dots, n) \\ b\mathbf{w}_{2k-1} + a\mathbf{w}_{2k} + \mathbf{w}_{2k-2} & j = 2k \ (k = 2, 3, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

が得られる. 従って $\lambda = a + bi \in \mathbf{C}$ ($a, b \in \mathbf{R}$) に対して $M(\lambda) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ とおけば, 上式から $[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{2n}]$ に関する f の表現行列は次のような $2n$ 次正方行列になる.

$$\begin{pmatrix} M(\lambda) & E_2 & & & \mathbf{0} \\ & M(\lambda) & E_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & E_2 \\ & & & & M(\lambda) \end{pmatrix}$$