線形数学 I 演習問題

目 次

線形数学 I 演習問題　第 1 回　写像

1. 以下で与えられる写像が, 全射, 単射, 全単射であるかどうか, 理由とともに答えよ.

(1) $f_1 : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f_1(x) = \sin x$　(2) $f_2 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \boldsymbol{R}$, $f_2(x) = \sin x$

(3) $f_3 : \boldsymbol{R} \to [-1, 1]$, $f_3(x) = \sin x$　(4) $f_4 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, $f_4(x) = \sin x$

(5) $f_5 : \boldsymbol{R} \to$ (平面), $f_5(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-t \end{pmatrix}$　(6) $f_6 :$ (平面) $\to$ (平面), $f_6\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x-y+1 \\ 4x-2y-1 \end{pmatrix}$

2. 実数 a, b, c (ただし $a \neq 0$) に対し, $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = ax^2 + bx + c$ で与えられる 2 次関数とする.

(1) $(f \circ f)(x)$ を求めよ.

(2) $(f \circ f)(x) - x$ を x の多項式とみたとき, $(f \circ f)(x) - x$ を $f(x) - x = ax^2 + (b-1)x + c$ で割ったときの商と余りを求めよ.

(3) $(f \circ f)(x) - x$ を $f(x) - x = ax^2 + (b-1)x + c$ で割ったときの商を $g(x)$ とする. 2 次方程式 $f(x) - x = 0$, $g(x) = 0$ の判別式をそれぞれ D, D' とするとき, D' を a と D だけを用いた式で表せ.

(4) 2 次方程式 $f(x) - x = 0$ と $g(x) = 0$ が共通の解をもつためには, $g(x) = 0$ が重解をもつことが必要十分であることを示せ.

(5) 4 次方程式 $(f \circ f)(x) - x = 0$ の相異なる実数解の個数が D の値により, どのように変化するか調べよ.

(6) 2 次方程式 $g(x) = 0$ の解を α, β とするとき, $f \circ f$ の導関数の α, β における値 $(f \circ f)'(\alpha)$, $(f \circ f)'(\beta)$ を D だけを用いた式で表せ.

(7) 4 次関数 $f \circ f$ が相異なる 3 つの値で極値をとるための条件を D と b を用いて表せ.

3. 実数 a, b に対し, 関数 $\mu_a, \tau_b : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $\mu_a(x) = ax$, $\tau_b(x) = x + b$ で定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 合成関数 $\tau_b \circ \mu_a$, $\mu_a \circ \tau_b$ によって, 実数 x は, それぞれどのような値に写されるか答えよ.

(2) $\mu_a \circ \tau_b = \tau_{ab} \circ \mu_a$ であることを示せ.

(3) 関数 $\sigma : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $\sigma(x) = x^2$ で定め, a, b, c を実数とする. 合成関数 $\sigma \circ \tau_b$, $\mu_a \circ (\sigma \circ \tau_b)$, $\tau_c \circ (\mu_a \circ (\sigma \circ \tau_b))$ によって, 実数 x は, それぞれどのような値に写されるか答えよ.

(4) 0 でない実数 α と実数 β, γ に対し, $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ で与えられる 2 次関数 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を考える. このとき, 等式 $f = \tau_c \circ (\mu_a \circ (\sigma \circ \tau_b))$ が成り立つような a, b, c を, α, β, γ を用いて表せ.

4. 平面のベクトル $\boldsymbol{p}$ と 2 次正方行列 A が与えられたとき, 写像 $f :$ (平面) $\to$ (平面) を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ で定める. A が逆行列をもつとき, f は全単射であることを示し, f の逆写像によるベクトル $\boldsymbol{y}$ の像を $A, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}$ を用いて表せ.

5. (発展問題) 平面のベクトル $\boldsymbol{p}$ と 2 次正方行列 A が与えられたとき, 写像 $f :$ (平面) $\to$ (平面) を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ で定める. この写像が全射ならば, A は逆行列をもつことを示せ.

第 1 回の演習問題の解答

1. (1) $f_1(x)=\sin x=2$ となる x は存在しないため, f_1 は全射ではない. $f_1(0)=\sin 0=0$, $f_1(\pi)=\sin\pi=0$ だから $f_1(0)=f_1(\pi)$ となるため, f_1 は単射でもない.

(2) $f_2(x)=\sin x=2$ となる x は存在しないため, f_2 は全射ではない. $\sin x$ は区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ で単調に増加するため, f_2 は単射である.

(3) $\sin x$ は -1 から 1 の間のすべての値をとるため, f_3 は全射である. $f_3(0)=\sin 0=0$, $f_3(\pi)=\sin\pi=0$ だから $f_3(0)=f_3(\pi)$ となるため, f_3 は単射ではない.

(4) x が $-\dfrac{\pi}{2}$ から $\dfrac{\pi}{2}$ に増加すれば, $\sin x$ は 単調に増加して, -1 から 1 の間のすべての値をとるため, f_4 は全単射である.

(5) t が実数全体を動けば, $f_5(t)=\begin{pmatrix}1+t\\2-t\end{pmatrix}$ を位置ベクトルとする点は, $\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\end{cases}$ によってパラメータ表示される直線全体を動く. この直線は原点を通らないため, $f_5(t)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ を満たす実数 t は存在しない. 従って f は全射ではない. $f_5(s)=f_5(t)$ ならば $\begin{pmatrix}1+s\\2-s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+t\\2-t\end{pmatrix}$ だから, この等式の両辺の第 1 成分どうしは等しい. 故に $1+s=1+t$ より, $s=t$ が得られるため, f_5 は単射である.

(6) 平面のベクトル $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ に対し, $f_6\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ となるベクトル $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ があるとすれば, f_6 の定義より, $\begin{pmatrix}2x-y+1\\4x-2y-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ だから, $\begin{cases}2x-y+1=p & \cdots(i)\\4x-2y-1=q & \cdots(ii)\end{cases}$ が成り立つ. これを x, y の連立方程式とみて, (ii) から (i) の両辺を 2 倍したものを引けば $-3=q-2p$ が得られる. 従って, ベクトル $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ に対し, $f_6\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ となるベクトル $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ が存在すれば, p, q は $q=2p-3$ を満たさなくてはならない. とくに $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ の場合は $q=2p-3$ が満たされないため, $f_6\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ となるベクトル $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ が存在しない. 故に f_6 は全射ではない. $f_6\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=f_6\left(\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right)$ ならば $\begin{pmatrix}2x-y+1\\4x-2y-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x'-y'+1\\4x'-2y'-1\end{pmatrix}$ だから $\begin{cases}2x-y=2x'-y' & \cdots(i)\\4x-2y=4x'-2y' & \cdots(ii)\end{cases}$ が成り立つ. (ii) は (i) の両辺を 2 倍した式だから, (i) が成り立てば (ii) も成り立ち, $f_6\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=f_6\left(\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right)$ が成り立つ. よって $f_6\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=f_6\left(\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right)$ が成り立つためには (i) が成り立つことが必要十分である. ここで, $x=y=0$, $x'=1$, $y'=2$ の場合を考えると (i) が成り立つため, $f_6\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)=f_6\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$ となり, f_6 は単射ではないことがわかる.

2. (1) $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax^2+bx+c)=a(ax^2+bx+c)^2+b(ax^2+bx+c)+c=$
$a^3x^4+2a^2bx^3+a(b^2+2ac+b)x^2+b(2ac+b)x+c(ac+b+1)$

(2) $(f\circ f)(x)-x=a^3x^4+2a^2bx^3+a(b^2+2ac+b)x^2+(2abc+b^2-1)x+c(ac+b+1)=$
$(ax^2+(b-1)x+c)(a^2x^2+a(b+1)x+ac+b+1)$ だから $(f\circ f)(x)-x$ を $f(x)-x=ax^2+(b-1)x+c$ で割ったときの商は $a^2x^2+a(b+1)x+ac+b+1$ であり, 余りは 0 である.

(3) $D=(b-1)^2-4ac$ であり, (2) から $g(x)=a^2x^2+a(b+1)x+ac+b+1$ だから $D'=a^2(b+1)^2-4a^2(ac+b+1)=a^2(b^2-2b+1-4ac-4)=a^2((b-1)^2-4ac-4)=a^2(D-4)$ である.

(4) $f(x)-x=0$ と $g(x)=0$ は共通の解 α をもつと仮定すれば, $\begin{cases} a\alpha^2+(b-1)\alpha+c=0 & \cdots(i) \\ a^2\alpha^2+a(b+1)\alpha+ac+b+1=0 & \cdots(ii) \end{cases}$ が成り立つ. (ii) から (i) の両辺を a 倍したものを引けば $2a\alpha+b+1=0$ が得られるため $\alpha=-\dfrac{b+1}{2a}$ である. これを (i) に代入して, 両辺を $-4a$ 倍すれば $(b-1)^2-4ac-4=0$ が得られる. この等式の左辺は $D-4$ に等しいため, (3) の結果から $D'=a^2(D-4)=0$ となり, $g(x)=0$ は重解をもつ.

逆に $g(x)=0$ が重解をもつならば, (3) の結果から $a^2(D-4)=D'=0$ となるため, $(b-1)^2-4ac-4=D-4=0$ である. このとき, $\alpha=-\dfrac{b+1}{2a}$ は $f(\alpha)-\alpha=0$ と $g(\alpha)=0$ を満たすため, $f(x)-x=0$ と $g(x)=0$ は共通の解 $\alpha=-\dfrac{b+1}{2a}$ をもつ.

(5) $(f\circ f)(x)-x$ は 2 次式 $f(x)-x$ と $g(x)$ の積に因数分解し, $f(x)-x=0$ と $g(x)=0$ が共通の解をもつのは $g(x)=0$ が重解をもつ場合に限る. $f(x)-x=0$ は $D<0$, $D=0$, $D>0$ の場合にそれぞれ 0, 1, 2 個の相異なる実数解をもち, $D'=a^2(D-4)$ だから, $g(x)=0$ は $D<4$, $D=4$, $D>4$ の場合にそれぞれ 0, 1, 2 個の相異なる実数解をもつ. $D=4$ の場合の $g(x)=0$ の重解は $f(x)-x=0$ の解でもあることに注意すれば, $(f\circ f)(x)-x=0$ の相異なる実数解の個数は, $D<0$ ならば 0 個, $D=0$ ならば 1 個, $0<D\leqq 4$ ならば 2 個, $D>4$ ならば 4 個である.

(6) $(f\circ f)'(x)=4a^3x^3+6a^2bx^2+a(b^2+2ac+b)x+b(2ac+b)$ だから $(f\circ f)'(x)$ を $g(x)$ で割れば $(f\circ f)'(x)=(4ax+2b-4)g(x)-b^2+2b+4ac+4=(4ax+2b-4)g(x)-D+5$ が得られるため, $(f\circ f)'(\alpha)=(f\circ f)'(\beta)=-D+5$ である.

(7) $(f\circ f)''(x)=12a^3x^2+12a^2bx+a(b^2+2ac+b)=12a^3\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+a(-2b^2+2ac+b)$ だから $-2b^2+2ac+b\geqq 0$ ならば $(f\circ f)'$ は単調増加または単調減少である. この場合, $(f\circ f)'$ の値が 0 になるのは 1 回だけなので, $f\circ f$ が相異なる 3 つの値で極値をとることはない. $-2b^2+2ac+b<0$ の場合, $(f\circ f)''(x)=0$ の 2 つの解を λ, μ とすれば $\lambda+\mu=-\dfrac{b}{a}$, $\lambda\mu=\dfrac{b^2+2ac+b}{12a^2}$ である. $(f\circ f)'(x)=(f\circ f)''(x)\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{b}{6a}\right)-\dfrac{D-1}{3}(2ax+b)$ だから $(f\circ f)'(\lambda)(f\circ f)'(\mu)=\dfrac{(D-1)^2}{9}(2a\lambda+b)(2a\mu+b)=\dfrac{(D-1)^2}{27}(-2b^2+2ac+b)$ が得られる. $(f\circ f)'(\lambda)$, $(f\circ f)'(\mu)$ の一方が 3 次関数 $(f\circ f)'$ の極大値で他方が極小値だから $(f\circ f)'(x)=0$ が相異なる 3 つの実数解をもつためには, これらが異符号であることが必要十分である. また, この場合 $(f\circ f)'(x)=0$ のそれぞれの解の前後で $(f\circ f)'$ の符号が変わるため, $f\circ f$ は相異なる 3 つの値で極値をとる. 従って求める条件は $D\neq 1$ かつ $-2b^2+2ac+b<0$ である. ここで, $-2b^2+2ac+b=-\dfrac{1}{2}(D+3b^2-1)$ だから, この条件は D と b を用いて「$1-3b^2<D<1$ または $D>1$」と表される.

3. (1) $(\tau_b\circ\mu_a)(x)=\tau_b(\mu_a(x))=\tau_b(ax)=ax+b$, $(\mu_a\circ\tau_b)(x)=\mu_a(\tau_b(x))=\mu_a(x+b)=a(x+b)$.

(2) 上の結果から, 任意の実数 x に対して $(\mu_a\circ\tau_b)(x)=a(x+b)=ax+ab$, $(\tau_{ab}\circ\mu_a)(x)=ax+ab$ だから $(\mu_a\circ\tau_b)(x)=(\tau_{ab}\circ\mu_a)(x)$ が成り立つ. 従って $\mu_a\circ\tau_b=\tau_{ab}\circ\mu_a$ が成り立つ.

(3) $(\sigma\circ\tau_b)(x)=\sigma(\tau_b(x))=\sigma(x+b)=(x+b)^2$, $(\mu_a\circ(\sigma\circ\tau_b))(x)=\mu_a((\sigma\circ\tau_b)(x))=\mu_a((x+b)^2)=a(x+b)^2$, $(\tau_c\circ(\mu_a\circ(\sigma\circ\tau_b)))(x)=\tau_c(\mu_a\circ(\sigma\circ\tau_b))(x))=\tau_c(a(x+b)^2)=a(x+b)^2+c$.

(4) $f(x)=\alpha\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ だから (3) の結果から $a=\alpha$, $b=\dfrac{\beta}{2\alpha}$, $c=\dfrac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ である.

4. 平面の任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ に対し, $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ となるベクトル $\boldsymbol{x}$ があれば, $A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}=\boldsymbol{y}$ だから $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{p}$ であり, A は逆行列をもつため, $\boldsymbol{x}=A^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{p})$ である. 逆に $\boldsymbol{x}=A^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{p})$ ならば $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}=AA^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{p})+\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{p})+\boldsymbol{p}=\boldsymbol{y}$ だから f は全射である. $f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}')$ ならば $A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}=A\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{p}$ より $A\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}'$ であり, この両辺に左から A の逆行列をかければ $vx=\boldsymbol{x}'$ が得られるため, f は単射でもある. 故に f は全単射である.

上でみたように, 平面の任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ に対し, $\boldsymbol{x}=A^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{p})$ によってベクトル $\boldsymbol{x}$ を定めれば $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ となるため, f の逆写像によるベクトル $\boldsymbol{y}$ の像は $A^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{p})$ である.

5. $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とおくと, f は全射だから, $f(\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{p}$, $f(\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{p}$ を満たす平面のベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ がある. $f(\boldsymbol{x}_1)=A\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{p}$, $f(\boldsymbol{x}_2)=A\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{p}$ だから $f(\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{p}$, $f(\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{p}$ より $A\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{e}_1$, $A\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{e}_2$

が成り立つ．ここで, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ とおくと $A\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{e}_1$ より $\begin{cases} ax+by=1 & \cdots(i) \\ cx+dy=0 & \cdots(ii) \end{cases}$ が成り立ち, $A\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{e}_2$ より $\begin{cases} az+bw=0 & \cdots(iii) \\ cz+dw=1 & \cdots(iv) \end{cases}$ が成り立つ．(i) の両辺を d 倍したものから (ii) の両辺を b 倍したものを引けば $(ad-bc)x=d$ が得られ, (ii) の両辺を a 倍したものから (i) の両辺を c 倍したものを引けば $(ad-bc)y=-c$ が得られる．同様に (iii) の両辺を d 倍したものから (iv) の両辺を b 倍したものを引けば $(ad-bc)z=-b$ が得られ, (iv) の両辺を a 倍したものから (iii) の両辺を c 倍したものを引けば $(ad-bc)w=a$ が得られる．従って, もし $ad-bc=0$ ならば $a=b=c=d=0$ となり A は零行列になる．このとき f は平面のすべてのベクトルを $\boldsymbol{p}$ に写すため, f は全射であるという仮定に反する．故に $ad-bc\neq 0$ だから A は逆行列をもつ.

第 1 回小テストと解答

1. 座標平面の原点を O とし, 点 $(2,1)$, $(1,3)$ をそれぞれ A, B とする．四角形 OPAB が平行四辺形になるような点 P の座標を求めよ.

[解答例] $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ だから P の座標は $(1,-2)$ である.

2. 空間の点 $\mathrm{P}(0,-3,4)$, $\mathrm{Q}(5,2,-11)$ を $3:2$ に内分する点の座標を求めよ.

[解答例] P, Q を $3:2$ に内分する点の位置ベクトルは $\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{5}=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ だから, P, Q を $3:2$ に内分する点の座標は $(3,0,-5)$ である.

3. 空間の 3 つの点 $\mathrm{A}(2,3,-4)$, $\mathrm{B}(3,1,-1)$, $\mathrm{C}(x,7,y-1)$ が同一直線上にあるように, x, y の値を定めよ.

[解答例] A, B, C が同一直線上にあるためには, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 k が存在することが必要十分である. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix} x-2 \\ 4 \\ y+3 \end{pmatrix}$ だから, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は $\begin{cases} x-2=k & \cdots(i) \\ 4=-2k & \cdots(ii) \\ y+3=3k & \cdots(iii) \end{cases}$ と同値である．(ii) より $k=-2$ だから, (i) より $x=0$, (iii) より $y=-9$ が得られる.

4. k を定数とし, 平面のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} k \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$ で与えられるとする.
  (1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が垂直になるような k を求めよ.
  (2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角が 60° なるような k を求めよ.

[解答例] (1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sqrt{3}k-2\sqrt{3}$ だから $\sqrt{3}k-2\sqrt{3}=0$ となるような k は 2 である.

(2) $\|\boldsymbol{a}\|=2$, $\|\boldsymbol{b}\|=\sqrt{k^2+12}$ だから $\dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}=\dfrac{\sqrt{3}k-2\sqrt{3}}{2\sqrt{k^2+12}}$ である．従って $\dfrac{\sqrt{3}k-2\sqrt{3}}{2\sqrt{k^2+12}}=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$ を満たす k を求めればよい．$\sqrt{3}(k-2)=\sqrt{k^2+12}$ だから, 両辺を 2 乗して移項すれば $2k^2-12k=0$ が得られるが, $\sqrt{3}(k-2)=\sqrt{k^2+12}>0$ より $k>2$ だから $k=6$ である.

線形数学 I 演習問題　第 2 回　平面ベクトル・空間ベクトル

1. (1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ を零でない平面のベクトルとする. $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{a}$ の実数倍であるためには $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ を零でない空間のベクトルとする. $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{a}$ の実数倍であるためには $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1b_3 - a_3b_1 = a_2b_3 - a_2b_1 = 0$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

2. (1) $y = ax + b$ によって表される平面上の直線を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ の形にパラメータ表示せよ.

(2) $x = c$ によって表される平面上の直線を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ の形にパラメータ表示せよ.

(3) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ でパラメータ表示される平面上の直線の方程式を求めよ.

3. 次の 2 点 A, B を通る直線のパラメータ表示と方程式を求めよ.
(1) $\mathrm{A}(2,1,5)$, $\mathrm{B}(-1,3,4)$　(2) $\mathrm{A}(1,1,3)$, $\mathrm{B}(2,1,-1)$　(3) $\mathrm{A}(1,1,5)$, $\mathrm{B}(1,7,5)$

4. 次の 3 点 A, B, C を通る平面のパラメータ表示を求めよ.
(1) $\mathrm{A}(3,1,1)$, $\mathrm{B}(2,0,-1)$, $\mathrm{C}(4,1,2)$　(2) $\mathrm{A}(1,-1,3)$, $\mathrm{B}(2,-1,4)$, $\mathrm{C}(3,-1,-1)$
(3) $\mathrm{A}(3,4,5)$, $\mathrm{B}(-1,4,2)$, $\mathrm{C}(2,0,3)$

5. 次の各方程式で与えられた平面のパラメータ表示を求めよ.
(1) $x + 2y - z = 3$　(2) $3x - z = 1$　(3) $x = 2$　(4) $x - y - 3z = 0$

6. 次のパラメータ表示で与えられた平面の方程式を求めよ.
(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$　(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$　(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

7. 次の各 3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を通る平面の方程式を求めよ.
(1) $\mathrm{A}(2,1,-2)$, $\mathrm{B}(1,3,-9)$, $\mathrm{C}(4,2,2)$　(2) $\mathrm{A}(2,3,4)$, $\mathrm{B}(0,9,12)$, $\mathrm{C}(5,4,6)$
(3) $\mathrm{A}(2,1,5)$, $\mathrm{B}(-1,2,-4)$, $\mathrm{C}(0,-1,-1)$

8. 空間の 2 本の直線 l, m が $l : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = z - 5$, $m : x - 2 = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+1}{3}$ で与えられているとする.
(1) l と m は同一平面上にないことを示せ.
(2) l と m の両方に垂直に交わる直線の方程式を求めよ.

9. 空間の 2 本の直線 $l : \dfrac{x-a}{2} = y = \dfrac{z-1}{3}$, $m : \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-b}{-2} = \dfrac{z-2}{4}$ が, 原点を通る同一平面に含まれるように, 定数 a, b の値を定めよ.

10. 空間において $x - y + 2z = 1$, $2x + y - z = -1$ によって与えられる平面を考える. このとき以下の問いに答えよ.
(1) 与えられた 2 つの平面の交線をパラメータ表示せよ.
(2) (1) で求めた交線を l とするとき, l と xy 平面との交点を通り, l に垂直な平面の方程式を求めよ.

第 2 回の演習問題の解答

1. (1) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ が成り立つとする．$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ だから a_1 か a_2 の一方は 0 でない．$a_1 \neq 0$ の場合, $t = \dfrac{b_1}{a_1}$ とおくと $b_1 = ta_1$ であり, $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ より, $b_2 = ta_2$ だから $\boldsymbol{b} = t\boldsymbol{a}$ が成り立つ．同様に $a_2 \neq 0$ の場合, $t = \dfrac{b_2}{a_2}$ とおけば $\boldsymbol{b} = t\boldsymbol{a}$ が成り立つことがわかる．故に $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ の実数倍である．逆に $\boldsymbol{b} = t\boldsymbol{a}$ ならば $b_1 = ta_1$ かつ $b_2 = ta_2$ だから $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1ta_2 - a_2ta_1 = 0$ が成り立つ．

(2) $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1b_3 - a_3b_1 = a_2b_3 - a_2b_1 = 0$ が成り立つとする．$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ だから a_1, a_2, a_3 のいずれかは 0 でない．$a_1 \neq 0$ の場合, $t = \dfrac{b_1}{a_1}$ とおくと $b_1 = ta_1$ であり, $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1b_3 - a_3b_1 = 0$ より, $b_2 = ta_2$ かつ $b_3 = ta_3$ だから $\boldsymbol{b} = t\boldsymbol{a}$ が成り立つ．同様に $a_2 \neq 0$ の場合は $t = \dfrac{b_2}{a_2}$ とおき, $a_3 \neq 0$ の場合は $t = \dfrac{b_3}{a_3}$ とおけば $\boldsymbol{b} = t\boldsymbol{a}$ が成り立つことがわかる．故に $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ の実数倍である．逆に $\boldsymbol{b} = t\boldsymbol{a}$ ならば $j = 1, 2, 3$ に対して $b_j = ta_j$ だから $a_ib_j - a_jb_i = a_ita_j - a_jta_i = 0$ $(1 \leqq i < j \leqq 3)$ が成り立つ．

2. (1) $x = t$ とおけば $y = at + b$ だから $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ at+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ である．

(2) $y = t$ とおけば $x = c$ だから $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

(3) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ より $\begin{cases} x = p + ut \cdots (i) \\ y = q + vt \cdots (ii) \end{cases}$ だから (i) の両辺を v 倍したものから (ii) の両辺を u 倍したものを引けば, $vx - uy = pv - qu$ が得られるため, 求める直線の方程式は $vx - uy - pv + qu = 0$ である．

3. (1) 方向ベクトルは $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, パラメータ表示は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, 方程式は $-\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = -z + 5$.

(2) 方向ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, パラメータ表示は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, 方程式は $x - 1 = -\dfrac{z-3}{4}$, $y = 1$.

(3) 方向ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, パラメータ表示は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 方程式は $x = 1$, $z = 3$.

4. (1) 平面に平行なベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, パラメータ表示は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) 平面に平行なベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, パラメータ表示は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(3) 平面に平行なベクトルは $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, パラメータ表示は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

5. (1) 与えられた平面は $(3, 0, 0)$ を通り, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は法線ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に垂直だから, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) 与えられた平面は $(0, 0, -1)$ を通り, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は法線ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に垂直だから, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(3) 与えられた平面は $(2,0,0)$ を通り, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ は法線ベクトル $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ に垂直だから, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

(4) 与えられた平面は $(0,0,0)$ を通り, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ は法線ベクトル $\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$ に垂直だから, $\boldsymbol{x}=s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$.

6. (1) $\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ の両方に垂直で, 点 $(1,0,1)$ を通るため, $-2x+y+z=-1$.

(2) $\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ の両方に垂直で, 点 $(1,2,3)$ を通るため, $x+y-4z=-9$.

(3) $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ の両方に垂直で, 点 $(1,2,3)$ を通るため, $z=3$.

7. (1) $\begin{pmatrix}-1\\2\\-7\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$ は平面に平行, $\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$ はこれらに垂直で, 与えられた平面は A を通るため, $3x-2y-z=6$.

(2) $\begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ は平面に平行, $\begin{pmatrix}1\\7\\-5\end{pmatrix}$ はこれらに垂直で, 与えられた平面は A を通るため, $x+7y-5z=3$.

(3) $\begin{pmatrix}-3\\1\\-9\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\-2\\-6\end{pmatrix}$ は平面に平行, $\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$ はこれらに垂直で, 与えられた平面は A を通るため, $3x-z=1$.

8. (1) l, m の方向ベクトルはそれぞれ, $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ で与えられる. これらのベクトルは平行ではなく, l は $\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$ を通るため, もし, l, m を両方とも含む平面 H が存在すれば H は $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ によってパラメータ表示される平面である. m は $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ を通り, H に含まれるため, $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ を満たす実数 s, t が存在する. この等式の各成分を比較すれば, $\begin{cases}2s+t=-1\cdots(i)\\-s+2t=-1\cdots(ii)\\s+3t=-6\cdots(iii)\end{cases}$ が得られる. (i), (ii) を s, t についての連立方程式とみれば, $s=-\dfrac{1}{5}$, $t=-\dfrac{3}{5}$ であるが, このとき $s+3t=-2$ となって (iii) は成り立たない. 従って $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ を満たす実数 s, t は存在しないことになって矛盾が生じる. 故に l と m は同一平面上にはない.

(2) l, m は, それぞれ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ によってパラメータ表示される直線だから, 求める直線と l, m との交点を, それぞれ A, B とすると, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 2s+3 \\ -s+1 \\ s+5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} t+2 \\ 2t-1 \\ 3t-1 \end{pmatrix}$ と表せる. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} t-2s-1 \\ 2t+s-2 \\ 3t-s-6 \end{pmatrix}$ は直線 l, m の方向ベクトルと垂直になるので, それらとの内積はともに 0 となる. l の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の内積は $3t-6s-6$ であり, m の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の内積は $14t-3s-23$ だから, 連立方程式 $\begin{cases} 3t-6s-6=0 \\ 14t-3s-23=0 \end{cases}$ が得られる. この解は $s=-\dfrac{1}{5}$, $t=\dfrac{8}{5}$ だから, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{24}{5} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} \frac{18}{5} \\ \frac{11}{5} \\ \frac{19}{5} \end{pmatrix}$ である. 従って $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり, 求める直線は A を通って $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を方向ベクトルとするため, 求める方程式は $x-\dfrac{13}{5} = y-\dfrac{6}{5} = -z+\dfrac{24}{5}$ である.

9. l, m を含み, 原点を通る平面を H とすると, H の法線ベクトルは l の方向ベクトルと m の方向ベクトルの両方に垂直である. l, m の方向ベクトルはそれぞれ, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ で与えられるため, H の法線ベクトルを $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ とすれば $\begin{cases} 2u+v+3w=0 & \cdots(i) \\ 5u-2v+4w=0 & \cdots(ii) \end{cases}$ が成り立つ. (i), (ii) から v を消去すれば, $9u+10w=0$ だから, $u=10$, $w=-9$ によって u, w を定め, (i) から $v=-2u-3w=7$ で v を定めれば (i) と (ii) は成り立つため, H は $\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする, 原点を通る平面である. 従って H の方程式は $10x+7y-9z=0$ で与えられる. l, m はそれぞれ点 $(a,0,1)$, $(1,b,2)$ を通るため, これらの点は H の上にある. 故に $10a-9=0$, $10+7b-18=0$ が成り立つため, $a=\dfrac{9}{10}$, $b=\dfrac{8}{7}$ である.

10. (1) 与えられた平面の交線は, 連立方程式 $\begin{cases} x-y+2z=1 & \cdots(i) \\ 2x+y-z=-1 & \cdots(ii) \end{cases}$ を満たすベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を位置ベクトルとする点全体からなる. (i), (ii) から z を消去すれば $5x+y=-1$ が得られ, (i), (ii) から y を消去すれば $3x+z=0$ が得られる. 従って, $x=t$ とおけば, $y=-5t-1$, $z=-3t$ だから与えられた平面の交線は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -5t-1 \\ -3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ によってパラメータ表示される.

(2) l と xy 平面との交点は l の点で, z 座標が 0 になる点である. (1) で求めた l のパラメータ表示では $-3t=0$, すなわち $t=0$ のときの l の点 $(0,-1,0)$ が l と xy 平面との交点である. (1) の結果より l の方向ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ で, 求める平面はこのベクトルを法線ベクトルとし, $(0,-1,0)$ を含むため, その方程式は $x-5(y+1)-3z=0$, 従っ

て $x-5y-3z-5=0$ である.

第 2 回小テストと解答

1. (1) ベクトル $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ の両方に垂直なベクトルを 1 つ求めよ.

[解答例] $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{u}$ の両方に垂直であるためには $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})=0$ であることが必要十分であり, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=x+y+z$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})=y+z$ より $\begin{cases}x+y+z=0 & \cdots(i)\\ y+z=0 & \cdots(ii)\end{cases}$ である. (i) から (ii) を辺々引けば $x=0$ が得られ, 例えば $y=1$, $z=-1$ は (ii) を満たすため, $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の両方に垂直であるベクトルの 1 つである.

(2) 点 A$(1,2,1)$, B$(2,3,2)$, C$(1,3,2)$ を通る平面のパラメータ表示と, 方程式を求めよ.

[解答例] $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ だから, A, B, C を通る平面のパラメータ表示は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ である. また, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直なベクトルとして (1) より $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ がとれるため, このベクトルは与えられた平面の法線ベクトルである. 従って求める平面の方程式は $0(x-1)+1(y-2)+(-1)(z-1)=0$, すなわち $y-z=1$ である.

(3) (1) の $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の両方に垂直で, 点 A$(1,2,1)$ を通る直線のパラメータ表示と, 方程式を求めよ.

[解答例] (1) より, $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の両方に垂直なベクトルとして $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ がとれるため, このベクトルは与えられた直線の方向ベクトルである. 従って, そのパラメータ表示は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ であり, $x=1$, $\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ すなわち $x=1$, $y-2=\dfrac{z-1}{-1}$ が求める方程式である.

2. 平面 $x-y+z=1$ のパラメータ表示を求めよ.

[解答例] $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ は与えられた平面の法線ベクトルであり, このベクトルに垂直で, 互いにスカラー倍でない 2 つのベクトルとして $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ がとれる. これらのベクトルは与えられた平面に平行で, 与えられた平面は点 $(1,0,0)$ を通るため, 例えば $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ が与えられた平面のパラメータ表示である.

線形数学 I 演習問題　第 3 回　行列の積

1. 行列の積について, 次の $\boxed{}$ にあてはまる行列を以下の行列の中から選び, その記号を答えよ.

(1) $\boxed{ア}\times\boxed{イ}$ はスカラー (1×1 行列) になる.　(2) $\boxed{ウ}\times\boxed{エ}$ は 1×2 行列になる.

(3) $\boxed{オ}\times\boxed{カ}$ は 2 次元数ベクトル (2×1 行列) になる.　(4) $\boxed{キ}\times\boxed{ク}$ は 1×3 行列になる.

(5) $\boxed{ケ}\times\boxed{コ}$ は 4 次元数ベクトル (4×1 行列) になる.　(6) $\boxed{サ}\times\boxed{シ}$ は 2×3 行列になる.

(7) $\boxed{ス}\times\boxed{セ}$ は逆行列をもつ 2 次正方行列である.　(8) $\boxed{ソ}\times\boxed{タ}$ は 4×3 行列になる.

(9) $\boxed{チ}\times\boxed{ツ}$ は逆行列をもたない 2 次正方行列である.

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&-2\\1&-3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&-1&2\\0&1&0\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}-2&1&0&1\\2&1&-4&10\\0&1&2&0\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}-3&1\\-1&2\\0&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}1&-2\end{pmatrix}\quad H=\begin{pmatrix}1&3&0\\2&-1&3\end{pmatrix}\quad I=\begin{pmatrix}0&-1&-3&1\end{pmatrix}$$

2. A, B を 3 次交代行列とする. A が零行列でないとき, $AB=BA$ が成り立つためには B が A の実数倍であることが必要十分であることを示せ.

3. J を 3 次正方行列 $\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\end{pmatrix}$ とするとき J^n を求め, $(aE_3+J)^n$ を求めよ.

4. α は 0 でない実数とし, A は $A^2=2\alpha A-\alpha^2 E_n$ を満たす n 次正方行列とする.

(1) $A^k=a_kA+b_kE_n$ の形に表せることを示し, a_{k+1}, b_{k+1} を a_k, b_k の式で表せ.

(2) 数列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ の一般項を求めることにより, A^k を A, E_n, k, α を用いて表せ.

(ヒント. 数列 $\{a_{k+1}-\alpha a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は等比数列になり, 数列 $\left\{\dfrac{a_k}{\alpha^k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ は等差数列になることを示せ.)

5. α を実数の定数とする. $P=\begin{pmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{pmatrix}$ とおくとき以下の問いに答えよ.

(1) $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ に対し, $AP=xA+yP+zE_2$ を満たすような 実数 x, y, z が存在するためには $c=0$ であることが必要十分であることを示せ.

(2) $A=\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}p&q\\0&r\end{pmatrix}$ とする. $a\neq d$ の場合, $Q=uA+vP+wE_2$ を満たす u, v, w を, α, a, b, d, p, q, r を用いて表せ.

6. $N=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \mathbf{0}\end{pmatrix}$ とおく. 3 次正方行列 A が $AN=NA$ を満たせば, $A=xE_3+yN+zN^2$ を満たす実数 x, y, z が存在することを示せ.

7. $n_1,n_2,\ldots,n_k$ を正の整数, $a_1,a_2,\ldots,a_k$ を相異なる実数とし, $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$ とおく.

$$A=\begin{pmatrix}a_1E_{n_1} & & & \text{\Large 0}\\ & a_2E_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & a_kE_{n_k}\end{pmatrix}$$

とおくとき n 次正方行列 X が $AX=XA$ を満たせば, X は次のような形の行列であることを示せ.

$$X=\begin{pmatrix}X_1 & & & \text{\Large 0}\\ & X_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & X_k\end{pmatrix}\qquad (\text{ただし, } X_i \text{ は } n_i \text{ 次正方行列})$$

8. I, J, K を次で与えられる 4 次正方行列とする.

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $I^2 = J^2 = K^2 = -E_4$, $IJ = -JI = K$, $JK = -KJ = I$, $KI = -IK = J$ が成り立つことを示せ.

(2) $A = aE_4 + bI + cJ + dK$ $(a, b, c, d \in \boldsymbol{R})$ に対し, $\overline{A} = aE_4 - bI - cJ - dK$, $\|A\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ とおくと, $A\overline{A} = \overline{A}A = \|A\|^2 E_4$ が成り立つことを示せ.

(3) $\boldsymbol{H}$ を $aE_4 + bI + cJ + dK$ $(a, b, c, d \in \boldsymbol{R})$ と表される 4 次正方行列全体の集合とする. このとき $A, B \in \boldsymbol{H}$ ならば $AB \in \boldsymbol{H}$ であることを示し, $A \in \boldsymbol{H}$ が零行列でなければ A は正則行列で, $A^{-1} \in \boldsymbol{H}$ であることを示せ.

(4) $X^2 + E_4 = O$ を満たす $X \in \boldsymbol{H}$ をすべて求めよ.

第 3 回の演習問題の解答

1. (1) ア：G, イ：F　(2) ウ：I, エ：E　(3) オ：H, カ：B　(4) キ：G, ク：H　(5) ケ：E, コ：F
(6) サ：H, シ：C　(7) ス：H, セ：A　(8) ソ：E, タ：H　(9) チ：F, ツ：G

2. $A=(a_{ij})$ が 3 次交代行列ならば $a_{ji}=-a_{ij}$ が任意の $i,j=1,2,3$ について成り立つため, とくに $a_{ii}=-a_{ii}$ より $a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$ である．そこで $a_{32}=a$, $a_{13}=b$, $a_{21}=c$ とおくと $A=\begin{pmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{pmatrix}$ と表される．同様に, 3 次交代行列 B は $B=\begin{pmatrix}0&-r&q\\r&0&-p\\-q&p&0\end{pmatrix}$ と表される．このとき $AB=\begin{pmatrix}-bq-cr&bp&cp\\aq&-ap-cr&cq\\ar&br&-ap-bq\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}-bq-cr&aq&ar\\bp&-ap-cr&br\\cp&cq&-ap-bq\end{pmatrix}$ だから成分を比較して $AB=BA$ が成り立つためには $bp-aq=ar-cp=cq-br=0$ が成り立つことが必要十分である．$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ とおくと, 第 2 回の演習問題の 2 番の (2) と, 上のことから, $AB=BA$ が成り立つためには $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}$ の実数倍であることが必要十分である．明らかに B が A の実数倍であることと, $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}$ の実数倍であることは同値だから, $AB=BA$ が成り立つためには B が A の実数倍であることが必要十分である.

3. $J^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $J^3=O$ だから $n\geqq 3$ ならば $J^n=O$ である．$\begin{pmatrix}a&1&0\\0&a&1\\0&0&a\end{pmatrix}=aE_3+J$ であり, aE_3 と J の積は交換可能 $((aE_3)J=J(aE_3)=aJ)$ だから二項定理 $(x+y)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}{}_nC_kx^{n-k}y^k$ の x, y に, それぞれ aE_3, J を代入した等式 $(aE_3+J)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}{}_nC_k(aE_3)^{n-k}J^k$ が成り立つ．$k\geqq 3$ ならば $J^k=O$ であることに注意すれば,

$$\begin{pmatrix}a&1&0\\0&a&1\\0&0&a\end{pmatrix}^n=(aE_3+J)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k(aE_3)^{n-k}(aE_3)^{n-k}J^k=a^nE_3+na^{n-1}J+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}J^2$$
$$=\begin{pmatrix}a^n&na^{n-1}&\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}\\0&a^n&na^{n-1}\\0&0&a^n\end{pmatrix}.$$

4. (1) まず $a_1=1$, $b_1=0$ は明らか．また $A^2=2\alpha A-\alpha^2E_n$ だから $a_2=2\alpha$, $b_2=-\alpha^2$．k による帰納法で, $A^k=a_kA+b_kE_n$ を仮定すれば, この両辺に A をかけて $A^{k+1}=a_kA^2+b_kA=a_k(2\alpha A-\alpha^2E_n)+b_kA=(2\alpha a_k+b_k)A-\alpha^2a_kE_n$ だから $a_{k+1}=2\alpha a_k+b_k$, $b_{k+1}=-\alpha^2a_k$ とおけば $A^{k+1}=a_{k+1}A+b_{k+1}E_3$ となって, $k+1$ の場合も主張は成立する.
(2) 上の結果から $a_{k+2}=2\alpha a_{k+1}+b_{k+1}=2\alpha a_{k+1}-\alpha^2a_k$．従って, $a_{k+2}-\alpha a_{k+1}=\alpha(a_{k+1}-\alpha a_k)$ となるため, 数列 $\{a_{k+1}-\alpha a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は初項 $a_2-\alpha a_1=\alpha$, 公比 α の等比数列である．故に $a_{k+1}-\alpha a_k=\alpha^k$ であり, この両辺を α^{k+1} で割ると, $\dfrac{a_{k+1}}{\alpha^{k+1}}-\dfrac{a_k}{\alpha^k}=\dfrac{1}{\alpha}$ だから, 数列 $\left\{\dfrac{a_k}{\alpha^k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ は初項 $\dfrac{a_1}{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$, 公差 $\dfrac{1}{\alpha}$ の等差数列になる．従って, $\dfrac{a_k}{\alpha^k}=\dfrac{k}{\alpha}$ だから $a_k=k\alpha^{k-1}$, $b_k=-\alpha^2a_{k-1}=(1-k)\alpha^k$．以上から $A^k=k\alpha^{k-1}A+(1-k)\alpha^kE_n$.

5. (1) $AP=\begin{pmatrix} a\alpha & a+b\alpha \\ c\alpha & c+d\alpha \end{pmatrix}$, $xA+yP+zE_2=\begin{pmatrix} ax+\alpha y+z & bx+y \\ cx & dx+\alpha y+z \end{pmatrix}$ より $AP=xA+yP+zE_2$ ならば $a\alpha=ax+\alpha y+z$, $a+b\alpha=bx+y$, $c\alpha=cx$, $c+d\alpha=dx+\alpha y+z$ である．もし c が 0 でなければ, 3 番目の式から, $\alpha=x$ となり, 1 番目の式から $z=-\alpha y$, 4 番目の式から $c=\alpha y+z=0$ となって矛盾が生じる．従って $c=0$ である．

$c=0$ の場合, $AP=\begin{pmatrix} a\alpha & a+b\alpha \\ 0 & d\alpha \end{pmatrix}$, $xA+yP+zE_2=\begin{pmatrix} ax+\alpha y+z & bx+y \\ 0 & dx+\alpha y+z \end{pmatrix}$ より $x=\alpha$, $y=a$, $z=-a\alpha$ と定めれば $AP=xA+yP+zE_2$ が成り立つ．

(2) $\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & r \end{pmatrix}=uA+vP+wE_2$ とすると, $au+\alpha v+w=p$, $bu+v=q$, $du+\alpha v+w=r$ だから $u=\dfrac{p-r}{a-d}$, $v=\dfrac{q(a-d)-b(p-r)}{a-d}$, $w=\dfrac{ar-dp-q\alpha(a-d)+b\alpha(p-r)}{a-d}$.

6. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とおくと, $AN=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \end{pmatrix}$, $NA=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ だから, $AN=NA$ ならば, 両辺の成分を比較して $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$, $a_{11}=a_{22}=a_{33}$, $a_{21}=a_{32}$ が成り立つ．そこで, $x=a_{11}$, $y=a_{21}$, $z=a_{31}$ とおくと $A=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ z & y & x \end{pmatrix}$ である．一方 $N^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $xE_3+yN+zN^2=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ z & y & x \end{pmatrix}$ だから $A=xE_3+yN+zN^2$ と表せる．

7. A, X の (i,j) 成分をそれぞれ a_{ij}, x_{ij} とし, $\nu_1=0$, $\nu_s=n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}$ $(s=2,3,\dots,k)$ とおく．さらに, $a_{\nu_p+i\,\nu_q+j}$, $x_{\nu_p+i\,\nu_q+j}$ $(i=1,2,\dots,n_p,\ j=1,2,\dots,n_q)$ を (i,j) 成分とする $n_p\times n_q$ 行列をそれぞれ A_{pq}, X_{pq} とする．AX, XA の (i,j) 成分をそれぞれ y_{ij}, z_{ij} とし, $y_{\nu_p+i\,\nu_q+j}$, $z_{\nu_p+i\,\nu_q+j}$ $(i=1,2,\dots,n_p,\ j=1,2,\dots,n_q)$ を (i,j) 成分とする $n_p\times n_q$ 行列をそれぞれ Y_{pq}, Z_{pq} とすれば,

$$y_{\nu_p+i\,\nu_q+j}=\sum_{s=1}^{n}a_{\nu_p+i\,s}x_{s\,\nu_q+j}=\sum_{t=1}^{k}\sum_{s=1}^{n_t}a_{\nu_p+i\,\nu_t+s}x_{\nu_t+s\,\nu_q+j}=\sum_{t=1}^{k}(A_{pt}X_{tq}\text{ の }(i,j)\text{ 成分})$$
$$z_{\nu_p+i\,\nu_q+j}=\sum_{s=1}^{n}x_{\nu_p+i\,s}a_{s\,\nu_q+j}=\sum_{t=1}^{k}\sum_{s=1}^{n_t}x_{\nu_p+i\,\nu_t+s}a_{\nu_t+s\,\nu_q+j}=\sum_{t=1}^{k}(X_{pt}A_{tq}\text{ の }(i,j)\text{ 成分})$$

より $Y_{pq}=\sum\limits_{t=1}^{k}A_{pt}X_{tq}$, $Z_{pq}=\sum\limits_{t=1}^{k}X_{pt}A_{tq}$ が成り立つ．仮定から $p\neq q$ ならば A_{pq} は零行列であり, $A_{pp}=a_pE_{n_p}$ だから, 上式より $Y_{pq}=A_{pp}X_{pq}=a_pX_{pq}$, $Z_{pq}=X_{pq}A_{qq}=a_qX_{pq}$ が得られる． $AX=XA$ ならば, すべての $p,q=1,2,\dots,k$ に対して $Y_{pq}=Z_{pq}$ だから $a_pX_{pq}=a_qX_{pq}$ すなわち $(a_p-a_q)X_{pq}=O$ である．仮定から $p\neq q$ ならば $a_p\neq a_q$ だから X_{pq} は零行列である．従って $X_i=X_{ii}$ とおけば X_i は n_i 次正方行列であり, X は

$X=\begin{pmatrix} X_1 & & & \text{\huge 0} \\ & X_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & X_k \end{pmatrix}$ の形の行列である．

8. (1) $L=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおけば $L^2=-E_2$ であり, $I=\begin{pmatrix} L & O \\ O & -L \end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix} O & -E_2 \\ E_2 & O \end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix} O & -L \\ -L & O \end{pmatrix}$ だから $I^2=\begin{pmatrix} L & O \\ O & -L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & O \\ O & -L \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L^2 & O \\ O & (-L)^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -E_2 & O \\ O & -E_2 \end{pmatrix}=-E_4$, $J^2=\begin{pmatrix} O & -E_2 \\ E_2 & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -E_2 \\ E_2 & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -E_2 & O \\ O & -E_2 \end{pmatrix}=-E_4$, $K^2=\begin{pmatrix} O & -L \\ -L & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -L \\ -L & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-L)^2 & O \\ O & (-L)^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -E_2 & O \\ O & -E_2 \end{pmatrix}=-E_4$,

$IJ = \begin{pmatrix} L & O \\ O & -L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -E_2 \\ E_2 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -L \\ -L & O \end{pmatrix} = K$, $JK = \begin{pmatrix} O & -E_2 \\ E_2 & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -L \\ -L & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & O \\ O & -L \end{pmatrix} = I$, $KI = \begin{pmatrix} O & -L \\ -L & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & O \\ O & -L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & (-L)^2 \\ -L^2 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -E_2 \\ E_2 & O \end{pmatrix} = J$, $JI = J(JK) = J^2K = -E_4K = -K$, $KJ = K(KI) = K^2I = -E_4I = -I$, $IK = I(IJ) = I^2J = -E_4J = -J$.

(2) $A\overline{A} = (aE_4+bI+cJ+dK)(aE_4-bI-cJ-dK) = a(aE_4+bI+cJ+dK)E_4-b(aE_4+bI+cJ+dK)I-c(aE_4+bI+cJ+dK)J-d(aE_4+bI+cJ+dK)K = a^2E_4^2+abIE_4+acJE_4+adKE_4-abE_4I-b^2I^2-bcJI-bdKI-acE_4J-bcI-c^2J^2-cdKJ-adE_4K-bdIK-cdJK-d^2K^2 = a^2E_4+abI+acJ+adK-abI+b^2E_4-bcJI-bdKI-acJ-bcIJ+c^2E_4-cdKJ-adK-bdIK-cdJK+d^2E_4 = (a^2+b^2+c^2+d^2)E_4-bc(IJ+JI)-cd(JK+KJ)-bd(KI+IK) = \|A\|E_4$. b, c, d をそれぞれ $-b, -c, -d$ で置き換えれば, 上式より $\overline{A}A = (aE_4-bI-cJ-dK)(aE_4+bI+cJ+dK) = (aE_4+(-b)I+(-c)J+(-d)K)(aE_4-(-b)I-(-c)J-(-d)K) = (a^2+(-b)^2+(-c)^2+(-d)^2)E_4 = \|A\|^2E_4$.

(3) $A = aE_4+bI+cJ+dK, B = pE_4+qI+rJ+sK \in \boldsymbol{H}$ ならば $AB = (aE_4+bI+cJ+dK)(pE_4+qI+rJ+sK) = p(aE_4+bI+cJ+dK)E_4+q(aE_4+bI+cJ+dK)I+r(aE_4+bI+cJ+dK)J+s(aE_4+bI+cJ+dK)K = apE_4^2+bpIE_4+cpJE_4+dpKE_4+aqE_4I+bqI^2+cqJI+dqKI+arE_4J+brIJ+crJ^2+drKJ+asE_4K+bsIK+csJK+dsK^2 = apE_4+bpI+cpJ+dpK+aqI-bqE_4-cqK+dqJ+arJ+brK-crE_4-drI+asK-bsJ+csI-dsE_4 = (ap-bq-cr-ds)E_4+(bp+aq-dr+cs)I+(cp+dq+ar-bs)J+(dp-cq+br+as)K \in \boldsymbol{H}$ である. $A \neq O$ ならば $|A| \neq 0$ だから, (2) の結果より $A\left(\dfrac{1}{\|A\|^2}\overline{A}\right) = \left(\dfrac{1}{\|A\|^2}\overline{A}\right)A = E_4$ だから, A は正則で, $A^{-1} = \dfrac{1}{\|A\|^2}\overline{A} = \dfrac{a}{\|A\|^2}E_4 + \dfrac{-b}{\|A\|^2}I + \dfrac{-c}{\|A\|^2}J + \dfrac{-d}{\|A\|^2}K \in \boldsymbol{H}$ である.

(4) $X = xE_4+yI+zJ+wK$ $(x,y,z,w \in \boldsymbol{R})$ とおけば $X^2 = (x^2-y^2-z^2-w^2)E_4+2xyI+2xzJ+2xwK$ だから $X^2+E_4 = O$ であるためには $x^2-y^2-z^2-w^2 = -1$ かつ $xy = xz = xw = 0$ であることが必要十分である. もし $x \neq 0$ ならば $y = z = w = 0$ であるが, このとき一つ目の方程式から $x^2 = -1$ となるため, x が実数であるという仮定に反する. 従って $x = 0$ であり, y, z, w が $y^2+z^2+w^2 = 1$ を満たすことが必要十分である. このとき, $y = \cos\varphi$, $\sqrt{z^2+w^2} = \sin\varphi$ $(0 \leqq \varphi \leqq \pi)$ とおけば $z^2+w^2 = \sin^2\varphi$ だから $z = \sin\varphi\cos\psi$, $w = \sin\varphi\sin\psi$ $(0 \leqq \psi < 2\pi)$ とおくことができる. 従って $X^2+E_4 = O$ を満たす $X \in \boldsymbol{H}$ 全体からなる集合は $\{\cos\varphi I+\sin\varphi\cos\psi J+\sin\varphi\sin\psi K \,|\, 0 \leqq \varphi \leqq \pi,\ 0 \leqq \psi < 2\pi\}$ で与えられる.

第 3 回小テストと解答

1. 下の行列の積を計算せよ. ただし a は定数とする.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$

[解答例] (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 18 \\ 1 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

線形数学 I 演習問題　第 4 回　正方行列・1 次写像

1. $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

2. $A = \bigl(a_{ij}\bigr)$ を n 次上半三角行列とする.

(1) $B = \bigl(b_{ij}\bigr)$ も n 次上半三角行列ならば AB も上半三角行列であり, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し, AB の (i, i) 成分は $a_{ii}b_{ii}$ であることを示せ.

(2) A が正則行列であるためには, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $a_{ii} \neq 0$ であることが必要十分であり, A が正則行列ならば A の逆行列も上半三角行列であることを示し, このとき $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して A の逆行列の (i, i) 成分は $\dfrac{1}{a_{ii}}$ であることを示せ.

3. 1 次写像 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ はベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ に写すとするとき, f を表す行列を求めよ.

4. a を定数とする. $f : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^4$ は $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4$ をそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2-a \end{pmatrix}$ に写す 1 次写像とする. このとき, f を表す行列を求めよ.

5. $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく. $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を含んで原点を通る平面を H とし, $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換とする. $\boldsymbol{x}$ が H に含まれるベクトルならば $f(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}$ が H に垂直なベクトルならば $f(\boldsymbol{x}) = 3\boldsymbol{x}$ が成り立つとき, f を表す行列を求めよ.

6. (1) 2 次正方行列 A の表す $\boldsymbol{R}^2$ の 1 次変換 T_A は, 直線 $y = 2x$ を直線 $y = -x$ の上に写し, 点 $(1, 1)$ を $(1, 1)$ に写す. さらに A の行列式の値が 4 であるとき, これらの条件をすべて満たす行列 A を求めよ.

(2) 2 次対称行列 B の表す $\boldsymbol{R}^2$ の 1 次変換 T_B は, 直線 $y = x$ を直線 $y = \dfrac{1}{2}x$ の上に写し, 直線 $y = 2x$ を直線 $y = -2x$ の上に写す. さらに B の行列式の値が 5 であるとき, これらの条件をすべて満たす行列 B をすべて求めよ.

7. $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3$ を $\boldsymbol{R}^3$ の零でないベクトルとし, $\boldsymbol{v}$ を方向ベクトルとして原点を通る $\boldsymbol{R}^3$ の直線 を ℓ, $\boldsymbol{v}$ に垂直で原点を通る $\boldsymbol{R}^3$ の平面を P とする.

(1) $\boldsymbol{R}^3$ の各点 $\boldsymbol{p}$ を ℓ に下した垂線の足に対応させる写像を表す行列を求めよ.

(2) $\boldsymbol{R}^3$ の各点 $\boldsymbol{p}$ を P に下した垂線の足に対応させる写像を表す行列を求めよ.

(3) ℓ に関する対称移動を表す行列を求めよ.

(4) P に関する対称移動を表す行列を求めよ.

第 4 回の演習問題の解答

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & g & h & i \\ 0 & 1 & j & k \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば $AB = \begin{pmatrix} 1 & a+g & b+aj+h & c+bl+ak+i \\ 0 & 1 & d+j & e+dl+k \\ 0 & 0 & 1 & f+l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから $AB = E_4$ となるためには, $a+g = b+aj+h = c+bl+ak+i = d+j = e+dl+k = f+l = 0$ が成り立つことが必要十分である．従って, $g = -a$, $j = -d$, $l = -f$, $h = -aj-b = ad-b$, $k = -dl-e = df-e$, $i = -bl-ak-c = ae+bf-adf-c$ だから $B = \begin{pmatrix} 1 & -a & ad-b & ae+bf-adf-c \\ 0 & 1 & -d & df-e \\ 0 & 0 & 1 & -f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．このとき, $BA = E_4$ であることも確かめられるため, $A^{-1} = B$ である.

2. (1) $AB = \begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix}$ とおく．仮定から $i > k$ ならば $a_{ik} = 0$ だから, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=i}^{n} a_{ik}b_{kj}$ である．さらに仮定から $k > j$ ならば $b_{kj} = 0$ だから, $i > j$ ならば上式から $c_{ij} = 0$ であり, $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$ である．故に AB は (i,i) 成分が $a_{ii}b_{ii}$ である上半三角行列である.

(2) A が正則行列のとき, $A^{-1} = \begin{pmatrix} a'_{ij} \end{pmatrix}$ とおけば, (i) より AA^{-1} の (i,i) 成分は $a_{ii}a'_{ii}$ である．一方, $AA^{-1} = E_n$ だから $a_{ii}a'_{ii} = 1$ が $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して成り立つため, $a_{ii} \neq 0$ であり, $a'_{ii} = \dfrac{1}{a_{ii}}$ が成り立つ.

$i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $a_{ii} \neq 0$ であると仮定して, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ に対して b_{ij}, b'_{ij} を次のように定める．$i > j$ ならば $b_{ij} = b'_{ij} = 0$ とおき, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $b_{ii} = b'_{ii} = \dfrac{1}{a_{ii}}$ とおく．帰納的に $j - i \leqq r - 1$ $(1 \leqq r \leqq n-1)$ を満たす i, j に対して b_{ij} と b'_{ij} が定義されたと仮定して, $j - i = r$ のとき, b_{ij} と b'_{ij} を $b_{ij} = -\dfrac{1}{a_{ii}} \sum_{k=i+1}^{j} a_{ik}b_{kj}$, $b'_{ij} = -\dfrac{1}{a_{jj}} \sum_{k=i+1}^{j} b_{ik}a_{kj}$ によって定義する．そこで, $B = \begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} b'_{ij} \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix}$, $B'A = \begin{pmatrix} c'_{ij} \end{pmatrix}$ とおく．$i > k$ ならば $a_{ik} = 0$, $k > j$ ならば $b_{kj} = 0$ だから, $i > j$ ならば $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=i}^{n} a_{ik}b_{kj} = 0$, $i > k$ ならば $b'_{ik} = 0$, $k > j$ ならば $a_{kj} = 0$ だから, $i > j$ ならば $c'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b'_{ik}a_{kj} = \sum_{k=i}^{n} b'_{ik}a_{kj} = 0$, $i = j$ ならば $b_{ii} = b'_{ii} = \dfrac{1}{a_{ii}}$ より $c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=i}^{n} a_{ik}b_{ki} = a_{ii}b_{ii} = 1$, $c'_{ii} = \sum_{k=1}^{n} b'_{ik}a_{ki} = \sum_{k=i}^{n} b'_{ik}a_{ki} = b'_{ii}a_{ii} = 1$, $i < j$ ならば b_{ij}, b'_{ij} の定義から $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=i}^{j} a_{ik}b_{kj} = 0$ $c'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b'_{ik}a_{kj} = \sum_{k=i}^{j} b'_{ik}a_{kj} = 0$ である．従って $AB = B'A = E_n$ が成り立つため, $B' = B'E_n = B'(AB) = (B'A)B = E_n = B$ が得られる．故に $AB = BA = E_n$ だから B は A の逆行列なるため, A は正則行列である.

3. $f(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(2\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ だから

$$f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdots (1), \quad f(\boldsymbol{e}_2) + f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdots (2), \quad 2f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} \cdots (3)$$

(3) から $f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ であり, これを (1), (2) に代入して $f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ を得る．従って, f を表す行列は $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ である.

4. 前問と同様に, $f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_4)=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\2-a\end{pmatrix}$ だから

$f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}\cdots(1)$, $f(\boldsymbol{e}_1)+f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\-3\end{pmatrix}\cdots(2)$, $f(\boldsymbol{e}_1)-f(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}\cdots(3)$,

$f(\boldsymbol{e}_1)-f(\boldsymbol{e}_3)-f(\boldsymbol{e}_4)=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\2-a\end{pmatrix}\cdots(4)$ である. $(2)-(1)$, $(1)-(3)$, $(3)-(4)$ を計算すれば, $f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\\-5\end{pmatrix}$,

$f(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_4)=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\a\end{pmatrix}$ だから f を表す行列は $\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\2&-3&1&-1\\-1&-1&-2&-2\\2&-5&0&a\end{pmatrix}$ である.

5. 仮定から $f(\boldsymbol{u})=-\boldsymbol{u}$, $f(\boldsymbol{v})=-\boldsymbol{v}$ であり, $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ だから f の線形性から

$$f(\boldsymbol{e}_1)+f(\boldsymbol{e}_2)+f(\boldsymbol{e}_3)=-(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\ \cdots(i),\qquad f(\boldsymbol{e}_2)+f(\boldsymbol{e}_3)=-(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\ \cdots(ii)$$

が得られる. 一方, $\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ の両方に垂直なベクトルとすれば $(\boldsymbol{w},\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})=0$ より $p+q+r=q+r=0$

である. 従って, $p=0$, $q=-r$ となるため, とくに $r=1$ の場合を考えると $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ は平面 H に垂直である. 故に, 仮定と f の線形性から

$$-f(\boldsymbol{e}_2)+f(\boldsymbol{e}_3)=3(-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\ \cdots(iii)$$

である. (i) から (ii) を辺々引けば $f(\boldsymbol{e}_1)=-\boldsymbol{e}_1$, (ii) から (iii) を辺々引けば $2f(\boldsymbol{e}_2)=2\boldsymbol{e}_2-4\boldsymbol{e}_3$, (ii) と (iii) を辺々加えれば $2f(\boldsymbol{e}_3)=-4\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$ が得られる. 以上から $f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ となるため, f を表す行列は $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}$ である.

6. (1) $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とおく. T_A は直線 $y=2x$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ を直線 $y=-x$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ に平行なベクトルに写すため, $T_A\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)=k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ を満たす実数 k がある. 従って $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ より $a+2b=k$, $c+2d=-k$ が成り立つ. また $T_A\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ より, $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ だから $a+b=1$, $c+d=1$ である. 故に $\begin{cases}a+2b=k\\a+b=1\end{cases}$, $\begin{cases}c+2d=-k\\c+d=1\end{cases}$ であり, それぞれ a と b, c と d に関する連立方程式とみれば, $a=-k+2$, $b=k-1$, $c=k+2$, $d=-k-1$ が得られる. さらに, A の行列式の値が 4 であることから $ad-bc=4$ が成り

立つため, 上の結果を代入して, $-2k=4$ を得る. 従って $k=-2$ だから $a=4,\ b=-3,\ c=0,\ d=1$ となり, $A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ である.

(2) B は2次対称行列だから $\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ とおける. T_B は直線 $y=x$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ を直線 $y=\frac{1}{2}x$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ に平行なベクトルに写すため, $T_B\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=k\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ を満たす実数 k が存在し, T_B は直線 $y=2x$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ を直線 $y=-2x$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ に平行なベクトルに写すため, $T_B\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)=l\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ を満たす実数 l がある. 従って $B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ より $a+b=2k,\ b+c=k$ が成り立ち, $B\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=l\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ より $a+2b=l,\ b+2c=-2l$ が成り立つ. 故に $\begin{cases}a+b=2k\\ a+2b=l\end{cases},\ \begin{cases}b+c=k\\ b+2c=-2l\end{cases}$ であり, それぞれ a と b, b と c に関する連立方程式とみれば, 前者から $a=4k-l,\ b=-2k+l$ が得られ, 後者から $b=2k+2l,\ c=-k-2l$ が得られる. よって $b=-2k+l=2k+2l$ だから $l=-4k$ となるため, $a=8k,\ b=-6k,\ c=7k$ である. さらに, B の行列式の値が5であることから $ac-b^2=5$ が成り立つため, 上の結果を代入して, $20k^2=5$ を得る. 従って $k=\pm\frac{1}{2}$ だから $a=4,\ b=-3,\ c=\frac{7}{2}$ または $a=-4,\ b=3,\ c=-\frac{7}{2}$ となり, $B=\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & \frac{7}{2}\end{pmatrix}$ または $B=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 3 & -\frac{7}{2}\end{pmatrix}$ である.

7. (1) ℓ に下した垂線の足を $t\boldsymbol{v}$ とすれば, $t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{v}$ は垂直だから $(t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{p},\boldsymbol{v})=0$. 従って, $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とすれば, $t=\dfrac{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}=\dfrac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}$. このとき $t\boldsymbol{v}=\dfrac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}a^2x+aby+acz\\ abx+b^2y+bcz\\ acx+bcy+c^2z\end{pmatrix}$ だから, 求める行列は $\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}a^2 & ab & ac\\ ab & b^2 & bc\\ ac & bc & c^2\end{pmatrix}$ である.

(2) P に下した垂線の足を $\boldsymbol{q}$ とすれば, $\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{v}$ は平行だから $\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}=s\boldsymbol{v}$ とおける. $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{v}$ は垂直だから $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{v})=0$. この式に $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}+s\boldsymbol{v}$ を代入すれば, $(\boldsymbol{p}+s\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=0$. 従って, $s=-\dfrac{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}=-\dfrac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}$. このとき $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}+s\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\dfrac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}(b^2+c^2)x-aby-acz\\ -abx+(a^2+c^2)y-bcz\\ -acx-bcy+(a^2+b^2)z\end{pmatrix}$ だから, 求める行列は $\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}b^2+c^2 & -ab & -ac\\ -ab & a^2+c^2 & -bc\\ -ac & -bc & a^2+b^2\end{pmatrix}$ である.

(3) ℓ に関して $\boldsymbol{p}$ と対称なベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすれば, $\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r})$ が $\boldsymbol{p}$ から ℓ に下した垂線の足だから $\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r})=\dfrac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}\boldsymbol{v}$ である. 従って, $\boldsymbol{r}=\dfrac{2(ax+by+cz)}{a^2+b^2+c^2}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{p}=\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}(a^2-b^2-c^2)x+2aby+2acz\\ 2abx+(-a^2+b^2-c^2)y+2bcz\\ 2acx+2bcy+(-a^2-b^2+c^2)z\end{pmatrix}$ だから, 求める行列は $\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}a^2-b^2-c^2 & 2ab & 2ac\\ 2ab & -a^2+b^2-c^2 & 2bc\\ 2ac & 2bc & -a^2-b^2+c^2\end{pmatrix}$ である.

(4) P に関して $\boldsymbol{p}$ と対称なベクトルを $\boldsymbol{u}$ とすれば, $\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{u})$ が $\boldsymbol{p}$ から P に下した垂線の足だから $\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{p} - \frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}\boldsymbol{v}$ である. 従って $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p} - \frac{2(ax+by+cz)}{a^2+b^2+c^2}\boldsymbol{v} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}(-a^2+b^2+c^2)x-2aby-2acz\\ -2abx+(a^2-b^2+c^2)y-2bcz\\ -2acx-2bcy+(a^2+b^2-c^2)z\end{pmatrix}$ だから, 求める行列は $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}-a^2+b^2+c^2 & -2ab & -2ac\\ -2ab & a^2-b^2+c^2 & -2bc\\ -2ac & -2bc & a^2+b^2-c^2\end{pmatrix}$ である.

第 4 回小テストと解答

1 次写像 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ はベクトル $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}6\\-3\\9\end{pmatrix}$ に写すとするとき, f を表す行列を求めよ.

[解答例] $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} = 3\boldsymbol{e}_3$ だから, 仮定から $f(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $f(3\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix}6\\-3\\9\end{pmatrix}$ である. 従って f の線形性から

$$f(\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{e}_2) + f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \cdots (1), \quad f(\boldsymbol{e}_2) + f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \cdots (2), \quad 3f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix}6\\-3\\9\end{pmatrix} \cdots (3)$$

(3) から $f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ であり, これを (2) に代入すれば $f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ が得られ, さらに (1) から $f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\1\\-3\end{pmatrix}$ を得る. 故に f を表す行列は $\begin{pmatrix}-4 & -1 & 2\\ 1 & -1 & -1\\ -3 & -2 & 3\end{pmatrix}$ である.

線形数学 I 演習問題　第 5 回　1 次写像の合成と行列の積

1. $f : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^4$ は $2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_4$ を $\boldsymbol{e}_1$ に, $\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ を $\boldsymbol{e}_2$ に, $\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$ を $\boldsymbol{e}_3$ に, $3\boldsymbol{e}_3 + 2\boldsymbol{e}_4$ を $\boldsymbol{e}_4$ に写す 1 次写像とする. f を表す行列を A とするとき, A の逆行列を求めよ.

2. $\varphi, \psi \in \boldsymbol{R}$ に対し, S_φ を原点を中心として反時計方向に φ だけ回転させる回転移動とし, T_ψ を方向ベクトルが $\begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix}$ で原点を通る直線に関する対称移動とする.

(1) 合成写像 $T_\psi \circ S_\varphi$, $S_\varphi \circ T_\psi$ はともに原点を通る直線に関する対称移動であることを示し, それぞれの対称移動の軸となる直線の方向ベクトルで長さが 1 であるものを 1 つずつ答えよ.

(2) $\varphi', \psi' \in \boldsymbol{R}$ が $S_{\varphi'} \circ T_{\psi'} = T_\psi \circ S_\varphi$ を満たすための条件を求めよ.

3. $\boldsymbol{R}^3$ の 2 つの単位ベクトル $\boldsymbol{u} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{e}_3$ の両方に垂直で, 第 1 成分が正の単位ベクトルを求めよ. このベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする.

(2) $\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{e}_3$ の両方に垂直な単位ベクトル, $\boldsymbol{z}$ は $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{u}$ の両方に垂直な単位ベクトルであり, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{z}$ の第 1 成分は負であるとするとき, これらの成分を求めよ.

(3) 1 次写像 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ は $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$, $f(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{z}$, $f(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{u}$ を満たすとする. このとき, f を表す行列を求めよ.

4. $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおき, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を含んで原点を通る平面を H とする. このとき, 次の条件 (1), (2), (3) を満たす $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を表す行列を求めよ.

(1) $\boldsymbol{x}$ が H に含まれるベクトルならば $f(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}$ である.

(2) $\boldsymbol{x}$ が H に垂直なベクトルならば $f(\boldsymbol{x})$ も H に垂直である.

(3) H に平行な平面 H' $(H' \neq H)$ で, f によって H' は H' に写されるものがある.

5. $\boldsymbol{R}^3$ において, 方程式 $\dfrac{x-1}{2} = y + 1 = \dfrac{z-2}{-1}$ が表す直線を ℓ とする. このとき, 次の条件 (1), (2) を両方とも満たす $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を表す行列を求めよ.

(1) $\boldsymbol{x}$ が ℓ に平行なベクトルならば $f(\boldsymbol{x}) = 3\boldsymbol{x}$ である.

(2) $\boldsymbol{x}$ が ℓ に垂直なベクトルならば $f(\boldsymbol{x}) = -2\boldsymbol{x}$ である.

6. (発展問題) c, d を実数の定数とする. $\boldsymbol{R}^2$ の二つのベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ に対し, $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の積 $\boldsymbol{u} * \boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{u} * \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} xz + cyw \\ xw + yz + dyw \end{pmatrix}$ で定めるとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{v}$ を固定したとき, 対応 $\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{u} * \boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{R}^2$ の 1 次変換であり, $\boldsymbol{u}$ を固定したとき, 対応 $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{u} * \boldsymbol{v}$ も $\boldsymbol{R}^2$ の 1 次変換であることを示せ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{R}^2$ で, $\boldsymbol{i} * \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{e}_1$ を満たすものが存在するための条件を求め, このとき $\boldsymbol{i}$ を求めよ.

(3) $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{R}^2$ で, $\boldsymbol{n} * \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ を満たすものが存在するための条件を求め, このとき $\boldsymbol{n}$ を求めよ.

(4) $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^2$ で, $\boldsymbol{p} * \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{p} * \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q} * \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$ を満たすものが存在することと, $\boldsymbol{0}$ とも $\boldsymbol{e}_1$ とも異なるベクトル $\boldsymbol{p}$ で $\boldsymbol{p} * \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}$ を満たすものが存在することは同値であることを示せ.

(5) $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^2$ で, $\boldsymbol{p} * \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{p} * \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q} * \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$ を満たすものが存在するための条件を求め, このとき $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ を求めよ.

(6) (5) で求めた条件のもとで, $\boldsymbol{R}^2$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q}$ の形に表されることを示し, $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ を満たす零でないベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の組をすべて求めよ.

第 5 回の演習問題の解答

1. 仮定から $A(2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_4)=\boldsymbol{e}_1$, $A(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_2$, $A(\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{e}_3$, $A(3\boldsymbol{e}_3+2\boldsymbol{e}_4)=\boldsymbol{e}_4$ だから $A(2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_4\ \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3\ 3\boldsymbol{e}_3+2\boldsymbol{e}_4)=(\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_4)=E_4$. 従って, $A^{-1}=(2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_4\ \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3\ 3\boldsymbol{e}_3+2\boldsymbol{e}_4)=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&2&3\\1&0&0&2\end{pmatrix}$.

2. (1) $R(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}$, $Q(\psi)=\begin{pmatrix}\cos 2\psi&\sin 2\psi\\\sin 2\psi&-\cos 2\psi\end{pmatrix}$ とおけば S_φ, T_ψ はそれぞれ $R(\varphi)$, $Q(\psi)$ によって表される 1 次変換である. 従って $T_\psi\circ S_\varphi$, $S_{\varphi'}\circ T_{\psi'}$ は, 加法定理を用いれば, それぞれ

$$Q(\psi)R(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos 2\psi&\sin 2\psi\\\sin 2\psi&-\cos 2\psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(2\psi-\varphi)&\sin(2\psi-\varphi)\\\sin(2\psi-\varphi)&-\cos(2\psi-\varphi)\end{pmatrix}$$
$$R(\varphi)Q(\psi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 2\psi&\sin 2\psi\\\sin 2\psi&-\cos 2\psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(2\psi+\varphi)&\sin(2\psi+\varphi)\\\sin(2\psi+\varphi)&-\cos(2\psi+\varphi)\end{pmatrix}$$

によって表される 1 次変換である. 従って $T_\psi\circ S_\varphi$, $S_\varphi\circ T_\psi$ はそれぞれ $\begin{pmatrix}\cos\bigl(\psi-\frac{\varphi}{2}\bigr)\\\sin\bigl(\psi-\frac{\varphi}{2}\bigr)\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\cos\bigl(\psi+\frac{\varphi}{2}\bigr)\\\sin\bigl(\psi+\frac{\varphi}{2}\bigr)\end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする原点を通る直線に関する対称移動である.

(2) $T_\psi\circ S_\varphi$, $S_{\varphi'}\circ T_{\psi,}$ はそれぞれ, 行列 $\begin{pmatrix}\cos(2\psi-\varphi)&\sin(2\psi-\varphi)\\\sin(2\psi-\varphi)&-\cos(2\psi-\varphi)\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\cos(2\psi'+\varphi')&\sin(2\psi'+\varphi')\\\sin(2\psi'+\varphi')&-\cos(2\psi'+\varphi')\end{pmatrix}$ で表される 1 次変換だから $S_{\varphi'}\circ T_{\psi'}=T_\psi\circ S_\varphi$ が成り立つためには $\cos(2\psi'+\varphi')=\cos(2\psi-\varphi)$ かつ $\sin(2\psi'+\varphi')=\sin(2\psi-\varphi)$ が成り立つことが必要十分である. 従って, 求める条件は $2(\psi'-\psi)+\varphi'+\varphi$ が 2π の整数倍になることである.

3. (1) $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{e}_3$ と垂直だから $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}$ とおける. このとき $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\frac{1}{3}(a+2b)$ だから $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{u}$ に垂直であるためには $a+2b=0$ であることが必要十分で, さらに $\boldsymbol{v}$ が単位ベクトルであることから $a^2+b^2=1$ である. $b=-\frac{a}{2}$ を $a^2+b^2=1$ に代入し, 仮定から $a>0$ だから $a=\frac{2}{\sqrt{5}}$ が得られる. 従って $b=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ だから $\boldsymbol{v}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ である.

(2) $\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{e}_3$ と垂直だから $\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}c\\d\\0\end{pmatrix}$ とおける. このとき $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\frac{1}{\sqrt{5}}(2c-d)$ だから $\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{v}$ に垂直であるためには $2c-d=0$ であることが必要十分で, さらに $\boldsymbol{w}$ が単位ベクトルであることから $c^2+d^2=1$ である. $d=2c$ を $c^2+d^2=1$ に代入し, 仮定から $c<0$ だから $c=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ が得られる. 従って $b=-\frac{2}{\sqrt{5}}$ だから $\boldsymbol{w}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$ である. $\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ とおけば $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{z})=\frac{1}{3}(p+2q+2r)$, $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{z})=\frac{1}{\sqrt{5}}(2p-q)$ だから $\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に垂直であるためには $p+2q+2r=0$ かつ $2p-q=0$ であることが必要十分で, さらに $\boldsymbol{z}$ が単位ベクトルであることから $p^2+q^2+r^2=1$ である. $q=2p$, $r=-\frac{p}{2}-q=-\frac{5p}{2}$ を $p^2+q^2+r^2=1$ に代入し, 仮定から $p<0$ だから $p=-\frac{2}{3\sqrt{5}}$ が得られる.

従って $q=-\dfrac{4}{3\sqrt{5}}$, $r=\dfrac{5}{3\sqrt{5}}$ だから $\boldsymbol{z}=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\-4\\5\end{pmatrix}$ である．

(3) $\boldsymbol{v}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$, $\boldsymbol{w}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)$ だから, f の線形性と仮定から $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2f(\boldsymbol{e}_1)-f(\boldsymbol{e}_2))=f(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}$, $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-f(\boldsymbol{e}_1)-2f(\boldsymbol{e}_2))=f(\boldsymbol{w})=\boldsymbol{z}$ が成り立つ．従って $2f(\boldsymbol{e}_1)-f(\boldsymbol{e}_2)=\sqrt{5}\boldsymbol{v}$, $f(\boldsymbol{e}_1)+2f(\boldsymbol{e}_2)=-\sqrt{5}\boldsymbol{z}$ だから, (1), (2) の結果から $f(\boldsymbol{e}_1)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2\boldsymbol{v}-\boldsymbol{z})=\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix}14\\-2\\-5\end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_2)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-\boldsymbol{v}-2\boldsymbol{z})=\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix}-2\\11\\-10\end{pmatrix}$ が得られる．また, $f(\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{u}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ だから f を表す行列は $\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix}14&-2&5\\-2&11&10\\-5&-10&10\end{pmatrix}$ である．

新 4. $\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の両方に垂直なベクトルとすれば $(\boldsymbol{w},\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})=0$ より $p+r=q-r=0$ である．従って, $p=-r$, $q=r$ だから, とくに $r=1$ の場合を考えると $\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ は平面 H に垂直である．仮定から $f(\boldsymbol{w})$ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に垂直だから H の法線ベクトル $\boldsymbol{w}$ の実数倍で, $f(\boldsymbol{w})=k\boldsymbol{w}$ を満たす実数 k がある．H と平行な平面 H' は $\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{w}+s\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v}$ (a は 0 でない定数) の形にパラメータ表示され, $a\boldsymbol{w}$ を位置ベクトルとする H' 上の点は f によって $f(a\boldsymbol{w})=ak\boldsymbol{w}$ に写されるため, H' が f によって H' に写されるならば $ak\boldsymbol{w}=a\boldsymbol{w}+b\boldsymbol{u}+c\boldsymbol{v}$ を満たす実数 b, c がある．このとき $a(k-1)\boldsymbol{w}=b\boldsymbol{u}+c\boldsymbol{v}$ で, この等式の両辺と $\boldsymbol{w}$ との内積を考えれば, $(\boldsymbol{w},\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})=0$ より $a(k-1)\|\boldsymbol{w}\|^2=b(\boldsymbol{w},\boldsymbol{u})+c(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})=0$ が得られるが, $a\neq 0$ で $\|\boldsymbol{w}\|^2=3$ だから, $k=1$ である．故に $f(\boldsymbol{w})=\boldsymbol{w}$ だから $-f(\boldsymbol{e}_1)+f(\boldsymbol{e}_2)+f(\boldsymbol{e}_3)=-\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3\ \cdots(*)$ が成り立つ．

一方, $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$ だから仮定から $f(\boldsymbol{e}_1)+f(\boldsymbol{e}_3)=2(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3)$, $f(\boldsymbol{e}_2)-f(\boldsymbol{e}_3)=2(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)$ が得られるため $f(\boldsymbol{e}_1)=2(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3)-f(\boldsymbol{e}_3)$, $f(\boldsymbol{e}_2)=2(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)+f(\boldsymbol{e}_3)$ である．これらを $(*)$ に代入して $f(\boldsymbol{e}_3)$ について解けば $f(\boldsymbol{e}_3)=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{e}_1-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{e}_2+\dfrac{5}{3}\boldsymbol{e}_3$ が得られるため, $f(\boldsymbol{e}_1)=\dfrac{5}{3}\boldsymbol{e}_1+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{e}_2+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{e}_3$, $f(\boldsymbol{e}_2)=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{e}_1+\dfrac{5}{3}\boldsymbol{e}_2-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{e}_3$ である．以上から f を表す行列は $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}5&1&1\\1&5&-1\\1&-1&5\end{pmatrix}$ である．

旧 4. 仮定から $f(\boldsymbol{u})=-\boldsymbol{u}$, $f(\boldsymbol{v})=-\boldsymbol{v}$ であり, $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$ だから f の線形性から

$$f(\boldsymbol{e}_1)-f(\boldsymbol{e}_2)+f(\boldsymbol{e}_3)=-(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\ \cdots(i),\qquad f(\boldsymbol{e}_2)-f(\boldsymbol{e}_3)=-(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)\ \cdots(ii)$$

が得られる．一方, $\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の両方に垂直なベクトルとすれば $(\boldsymbol{w},\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})=0$ より $p-q+r=q-r=0$ である．従って, $p=0$, $q=r$ となるため, とくに $r=1$ の場合を考えると $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ は平面 H に垂直である．故に, 仮定と f の線形性から $f(\boldsymbol{e}_2)+f(\boldsymbol{e}_3)=2(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\ \cdots(iii)$ である．(i) と (ii) を辺々加えれば $f(\boldsymbol{e}_1)=-\boldsymbol{e}_1$, (ii) と (iii) を辺々加えれば $2f(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$, (iii) から (ii) を辺々引けば $2f(\boldsymbol{e}_3)=3\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ が得られる．以上から $f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}0\\\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ となるため, f を表す行列は $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ である．

5. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$ は ℓ に平行なベクトルであり, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_3$ はともに ℓ に垂直である. 従って仮定から $f(2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3) = 3(2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)$, $f(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3) = -2(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)$, $f(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_3) = -2(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_3)$ が成り立つため, f の線形性から $2f(\boldsymbol{e}_1)+f(\boldsymbol{e}_2)-f(\boldsymbol{e}_3) = 6\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3$, $f(\boldsymbol{e}_2)+f(\boldsymbol{e}_3) = -2\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3$, $f(\boldsymbol{e}_1)+2f(\boldsymbol{e}_3) = -2\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_3$ が得られる. 2 つ目の式と 3 つ目の式から $f(\boldsymbol{e}_2) = -f(\boldsymbol{e}_3) - 2\boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3$, $f(\boldsymbol{e}_1) = -2f(\boldsymbol{e}_3) - 2\boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_3$ だから, これらを 1 つ目の式に代入すれば $f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}$ が得られるため, 上式から $f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$ を得る.
故に f を表す行列は $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{7}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$ である.

6. (1) $\boldsymbol{u}*\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} xz+cyw \\ xw+yz+dyw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & cw \\ w & z+dw \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & cy \\ y & x+dy \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ だから対応 $\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{u}*\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{u}*\boldsymbol{v}$ はそれぞれ行列 $\begin{pmatrix} z & cw \\ w & z+dw \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x & cy \\ y & x+dy \end{pmatrix}$ で表される $\boldsymbol{R}^2$ の 1 次変換である.

(2) $\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ とおく. $\boldsymbol{i}*\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} u^2+cv^2 \\ 2uv+dv^2 \end{pmatrix}$ だから $\boldsymbol{i}*\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{e}_1$ は $\begin{cases} u^2+cv^2 = -1 & \cdots(i) \\ 2uv+dv^2 = 0 & \cdots(ii) \end{cases}$ と同値である. (ii) より $v = 0$ または $2u+dv = 0$ であるが, $v = 0$ ならば (i) より $u^2 = -1$ が得られ, u が実数であることに反する. 故に $u = -\dfrac{dv}{2}$ であり, (i) に代入すれば $\left(\dfrac{d^2}{4}+c\right)v^2 = -1$ が得られるため $\dfrac{d^2}{4}+c < 0$ すなわち $d^2+4c < 0$ であることがわかる. 逆に $d^2+4c < 0$ の場合, $u = -\dfrac{dv}{2}$, $(d^2+4c)v^2 = -4$ より $\gamma = \sqrt{\dfrac{-1}{d^2+4c}}$ とおけば $(u,v) = (\pm d\gamma, \mp 2\gamma)$ (複号同順) だから $\boldsymbol{i} = \pm\begin{pmatrix} d\gamma \\ -2\gamma \end{pmatrix}$ とおけば $\boldsymbol{i}*\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{e}_1$ が成り立ち, $\boldsymbol{i}*\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{e}_1$ を満たす $\boldsymbol{i}$ は $\pm\begin{pmatrix} d\gamma \\ -2\gamma \end{pmatrix}$ に限られる. 従って $d^2+4c < 0$ が $\boldsymbol{i}*\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{e}_1$ を満たすものがあるための条件である.

(3) $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ とおく. $\boldsymbol{n}*\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} u^2+cv^2 \\ 2uv+dv^2 \end{pmatrix}$ だから $\boldsymbol{n}*\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases} u^2+cv^2 = 0 & \cdots(i) \\ 2uv+dv^2 = 0 & \cdots(ii) \end{cases}$ と同値である. (ii) より $v = 0$ または $2u+dv = 0$ であるが, $v = 0$ ならば (i) より $u = 0$ が得られ, $\boldsymbol{n}$ が $\boldsymbol{0}$ でないあることに反する. 故に $u = -\dfrac{dv}{2}$ であり, (i) に代入すれば $\left(\dfrac{d^2}{4}+c\right)v^2 = 0$ が得られ, $v \neq 0$ だから $\dfrac{d^2}{4}+c = 0$ すなわち $d^2+4c = 0$ であることがわかる. このとき, $v = 2k$ とおけば $u = -dk$ だから $\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{n} = k\begin{pmatrix} -d \\ 2 \end{pmatrix}$ という形のベクトルである. 従って $d^2+4c = 0$ が $\boldsymbol{n}*\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ を満たすものがあるための条件であり, $\boldsymbol{n}*\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{n}$ は $k\begin{pmatrix} -d \\ 2 \end{pmatrix}$ (k は 0 でない実数) で与えられる.

(4) $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^2$ で, $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}*\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$ を満たすものが存在すれば, $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{e}_1$ である. 実際, もし $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{e}_1$ ならば $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{e}_1*\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}*\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ となり, $\boldsymbol{q}$ が $\boldsymbol{0}$ でないことと矛盾する. 逆に $\boldsymbol{0}$ とも $\boldsymbol{e}_1$ とも異なるベクトル $\boldsymbol{p}$ で $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}$ を満たすものが存在するとき, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{p}$ とおけば $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{e}_1$ より $\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}$ であり, (1) の結果を用いると $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}*(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{p}*\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}-\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{q}*\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{p})*(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{p})*\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{p})*\boldsymbol{p} = \boldsymbol{e}_1*\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_1*\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}*\boldsymbol{p} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p} + \boldsymbol{p} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$ が得られる.

(5) (4) の結果から $\boldsymbol{0}$ とも $\boldsymbol{e}_1$ とも異なるベクトル $\boldsymbol{p}$ で $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}$ を満たすものが存在する条件を求めればよい. $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とおけば $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} a^2+cb^2 \\ 2ab+db^2 \end{pmatrix}$ だから $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}$ が成り立つためには a, b が $\begin{cases} a^2+cb^2 = a & \cdots(i) \\ 2ab+db^2 = b & \cdots(ii) \end{cases}$ を

満たすことが必要十分である．もし $b=0$ ならば (i) より a は 0 または 1 となって $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{0}$ または $\boldsymbol{e}_1$ に等しくなる．従って $\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_1$ ならば $b\neq 0$ であり, (ii) より $a=\dfrac{1-db}{2}$ が得られる．これを (i) に代入すれば $(d^2+4c)b^2=1$ が得られるため $d^2+4c>0$ であることがわかる．逆に $d^2+4c>0$ ならば $\lambda=\dfrac{1}{\sqrt{d^2+4c}}$ とおけば $b^2=\lambda^2$, $a=\dfrac{1-db}{2}$ だから $b=\pm\lambda$, $a=\dfrac{1\mp d\lambda}{2}$ であり, $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}$ を満たす $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}\frac{1-d\lambda}{2}\\ \lambda\end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix}\frac{1+d\lambda}{2}\\ -\lambda\end{pmatrix}$ で与えられ, $\lambda\neq 0$ だから $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{0}$ とも $\boldsymbol{e}_1$ とも異なる．以上から, 求める条件は $d^2+4c>0$ である．

$d^2+4c>0$ のとき, $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{R}^2$ が $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}*\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}$ を満たすとき, (4) の解答の前半でみたように, $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{0}$ とも $\boldsymbol{e}_1$ とも異なり, 同様に $\boldsymbol{q}$ も $\boldsymbol{0}$ とも $\boldsymbol{e}_1$ とも異なるため, 上で示したことから, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ は $\begin{pmatrix}\frac{1-d\lambda}{2}\\ \lambda\end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix}\frac{1+d\lambda}{2}\\ -\lambda\end{pmatrix}$ のいずれかである．もし, $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{q}$ ならば $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$ となって $\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$ に矛盾する．従って $\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{q}$ だから $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}\frac{1-d\lambda}{2}\\ \lambda\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}\frac{1+d\lambda}{2}\\ -\lambda\end{pmatrix}$ または $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}\frac{1+d\lambda}{2}\\ -\lambda\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}\frac{1-d\lambda}{2}\\ \lambda\end{pmatrix}$ である．いずれの場合にしても, $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{p}$ が成り立つため $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}*(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$ である．

(6) もし $\boldsymbol{q}=k\boldsymbol{p}$ を満たす実数 k が存在すれば $k\boldsymbol{p}=k(\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}*(k\boldsymbol{q})=\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$ が得られるため, $k=0$ または $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$ である．前者の場合は $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$ となるため, いずれにしても $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ が $\boldsymbol{0}$ でないことと矛盾する．同様に $\boldsymbol{p}=k\boldsymbol{q}$ を満たす実数 k も存在しない．従って $\boldsymbol{R}^2$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=s\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{q}$ の形に表される．$\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^2$ が $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ を満たすとし, $\boldsymbol{a}=s\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b}=u\boldsymbol{p}+v\boldsymbol{q}$ と表すと (1) の結果と $\boldsymbol{q}*\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$ から

$$\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}=(s\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{q})*(u\boldsymbol{p}+v\boldsymbol{q})=u(s\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{q})*\boldsymbol{p}+v(s\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{q})*\boldsymbol{q}=su\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p}+tu\boldsymbol{q}*\boldsymbol{p}+sv\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q}+tv\boldsymbol{q}*\boldsymbol{q}=su\boldsymbol{p}+tv\boldsymbol{q}$$

だから $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$ であるためには $su=tv=0$ であることが必要十分である．$s=0$ の場合, $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ だから $t\neq 0$ となるため $v=0$ である．また $u=0$ の場合, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ だから $v\neq 0$ となるため $t=0$ である．故に $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ を満たす零でないベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の組は $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(x\boldsymbol{p},y\boldsymbol{q})$ または $(y\boldsymbol{q},x\boldsymbol{p})$ (x, y は 0 でない実数) で与えられる．

第 5 回小テストと解答

$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ とおく．$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を含んで原点を通る平面を H とし, $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ を $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換とする．$\boldsymbol{x}$ が H に含まれるベクトルならば $f(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}$ が H に垂直なベクトルならば $f(\boldsymbol{x})=3\boldsymbol{x}$ が成り立つとき, f を表す行列を求めよ．

[解答例] 仮定から $f(\boldsymbol{u})=-\boldsymbol{u}$, $f(\boldsymbol{v})=-\boldsymbol{v}$ であり, $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ だから f の線形性から

$$f(\boldsymbol{e}_1)+f(\boldsymbol{e}_2)+f(\boldsymbol{e}_3)=-(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\ \cdots(i),\qquad f(\boldsymbol{e}_2)+f(\boldsymbol{e}_3)=-(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\ \cdots(ii)$$

が得られる．一方, $\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の両方に垂直なベクトルとすれば $(\boldsymbol{w},\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})=0$ より $p+q+r=q+r=0$ である．従って, $p=0$, $q=-r$ となるため, とくに $r=1$ の場合を考えると $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ は平面 H に垂直である．故に, 仮定と f の線形性から $-f(\boldsymbol{e}_2)+f(\boldsymbol{e}_3)=3(-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\ \cdots(iii)$ である．(i) から (ii) を辺々引けば $f(\boldsymbol{e}_1)=-\boldsymbol{e}_1$, (ii) から (iii) を辺々引けば $2f(\boldsymbol{e}_2)=2\boldsymbol{e}_2-4\boldsymbol{e}_3$, (ii) と (iii) を辺々加えれば $2f(\boldsymbol{e}_3)=-4\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$ が得られる．以上から $f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ となるため, f を表す行列は $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}$ である．

線形数学 I 演習問題　第 6 回　行列の基本変形

行に関する基本変形を行うことによって, 以下の行列を被約階段行列にせよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 & 18 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 12 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 & 18 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$　(11) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 11 \end{pmatrix}$　(12) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 & -4 \\ 2 & -2 & -3 & -3 \\ 5 & 1 & -6 & -7 \end{pmatrix}$

(13) $\begin{pmatrix} t-2 & -1 & -2 \\ -1 & t-2 & 2 \\ -2 & 2 & t+1 \end{pmatrix}$　(14) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$　(15) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

(16) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ 3 & 12 & -6 & 1 & 8 \\ 5 & -1 & 11 & -3 & 3 \end{pmatrix}$　(17) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 & -3 \\ -1 & 8 & 9 & 8 & 9 \end{pmatrix}$　(18) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & -5 & 9 \\ 4 & 3 & 11 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 12 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

(19) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 9 & 21 & 19 & 14 \\ 2 & 7 & 11 & 5 & -1 \end{pmatrix}$　(20) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 & -7 \\ 4 & 3 & -2 & 1 & 8 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$　(21) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

(22) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　(23) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 3 & 1 & 7 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & 11 & 19 & 11 \\ 2 & 7 & 11 & 5 & t \end{pmatrix}$　(24) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & t+3 \\ 4 & 3 & 2 & t & t \end{pmatrix}$

(25) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$　(26) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$　(27) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & 0 & a \end{pmatrix}$

2. 次の正方行列を, 可能な場合に基本行列の積の形に表せ.

(1) 1 の (3) の行列　(2) 1 の (13) の行列

(3) 1 の (19) の第 1 列から第 4 列までの行列　(4) 1 の (22) の第 1 列から第 4 列までの行列

(5) 1 の (27) の行列

第 6 回の演習問題の解答

1. (1) $\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\2&4&-3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1&2&0&4\\0&0&1&1\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}2&1&3&0\\3&-2&4&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&0\\3&-2&4&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&0\\0&-\frac{7}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{2}{7}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&0\\0&1&\frac{1}{7}&-\frac{2}{7}\end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&\frac{10}{7}&\frac{1}{7}\\0&1&\frac{1}{7}&-\frac{2}{7}\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&-4&1\\3&5&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-6&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&5\\0&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&5\\0&1&1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}1&-3&-2&-1\\2&-2&-3&-1\\1&5&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-3&-2&-1\\0&4&1&1\\0&8&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&-3&-2&-1\\0&1&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&8&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1&0&-\frac{5}{4}&-\frac{1}{4}\\0&1&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}2&3&-1&2\\3&4&-1&1\\5&6&-1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 行を引く}]{\text{第 2 行から}}\begin{pmatrix}2&3&-1&2\\1&1&0&-1\\5&6&-1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}}\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\2&3&-1&2\\5&6&-1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&1&-1&4\\0&1&-1&8\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&-5\\0&1&-1&4\\0&0&0&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}\begin{pmatrix}1&0&1&-5\\0&1&-1&4\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}2&-5&3&7\\1&-3&2&1\\4&-5&1&18\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}}\begin{pmatrix}1&-3&2&1\\2&-5&3&7\\4&-5&1&18\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-3&2&1\\0&1&-1&5\\0&7&-7&14\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1&0&-1&16\\0&1&-1&5\\0&0&0&-21\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{21}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}\begin{pmatrix}1&0&-1&16\\0&1&-1&5\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\3&2&1&-1\\1&-2&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&4&-4\\0&-4&4&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&1&-1&1\\0&-4&4&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&-1&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{3}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&-1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 12\\ 1 & -3 & 2 & 1\\ 4 & -5 & 1 & 18\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -1 & 12\\ 4 & -5 & 1 & 18\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 5 & -5 & 10\\ 0 & 7 & -7 & 14\end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$
$\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 7 & -7 & 14\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 7\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 1\\ 5 & 6 & -1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 2 & -2\\ 0 & -4 & 4 & -4\end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -4 & 4 & -4\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix}3 & -1 & -4 & -5\\ 1 & 1 & -1 & -2\\ 1 & 5 & 0 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行}} \begin{pmatrix}1 & 5 & 0 & -3\\ 1 & 1 & -1 & -2\\ 3 & -1 & -4 & -5\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 5 & 0 & -3\\ 0 & -4 & -1 & 1\\ 0 & -16 & -4 & -4\end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$
$\begin{pmatrix}1 & 5 & 0 & -3\\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ 0 & -16 & -4 & -4\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{7}{4}\\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

(11) $\begin{pmatrix}2 & 5 & 3 & 4\\ 3 & 8 & 5 & 5\\ 3 & 5 & 2 & 11\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を引く}]{\text{第 2 行から}} \begin{pmatrix}2 & 5 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 2 & 11\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 2 & 5 & 3 & 4\\ 3 & 5 & 2 & 11\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 2\\ 0 & -4 & -4 & 8\end{pmatrix} \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -4 & -4 & 8\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 7\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

(12) $\begin{pmatrix}3 & -5 & -5 & -4\\ 2 & -2 & -3 & -3\\ 5 & 1 & -6 & -7\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行を引く}]{\text{第 1 行から}} \begin{pmatrix}1 & -3 & -2 & -1\\ 2 & -2 & -3 & -3\\ 5 & 1 & -6 & -7\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & -3 & -2 & -1\\ 0 & 4 & 1 & -1\\ 0 & 16 & 4 & -2\end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\frac{1}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix}1 & -3 & -2 & -1\\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 16 & 4 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{7}{4}\\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{7}{4}\\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{5}{4} & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

(13) $\begin{pmatrix}t-2 & -1 & -2\\ -1 & t-2 & 2\\ -2 & 2 & t+1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3)\\ -1 & t-2 & 2\\ 0 & -2(t-3) & t-3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 1 行と第 2 行}}$
$\begin{pmatrix}-1 & t-2 & 2\\ 0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3)\\ 0 & -2(t-3) & t-3\end{pmatrix} \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}} \begin{pmatrix}1 & 2-t & -2\\ 0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3)\\ 0 & -2(t-3) & t-3\end{pmatrix} \cdots (*)$ より, $t=3$ ならば $(*)$ は
$\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ となり, 被約階段行列である. $t \neq 3$ ならば $(*) \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix}1 & 2-t & -2\\ 0 & -2(t-3) & t-3\\ 0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3)\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第 3 行を } \frac{1}{t-3} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を } -\frac{1}{2(t-3)} \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} 1 & 2-t & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & t-1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-t-2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{t+3}{2} \end{pmatrix}$$

と変形されるため, $t=-3$ ならば, 最後に得られた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるため, 被約階段行列である. $t \neq \pm 3$ ならば

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-t-2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{t+3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{2}{t+3} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{t+2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(14) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(15) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を引く}]{\text{第 2 行から}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行を引く}]{\text{第 1 行から}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{7} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{5}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$

(16) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ 3 & 12 & -6 & 1 & 8 \\ 5 & -1 & 11 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 18 & -18 & 4 & 26 \\ 0 & 9 & -9 & 2 & 33 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2 倍したものを引く}]{\text{第 2 行から第 3 行を}}$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 9 & -9 & 2 & 33 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 9 & -9 & 2 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -40 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{9} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{9} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -40 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -\frac{5}{9} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{9} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -40 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{40} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -\frac{5}{9} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{9} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 5 列の掃き出し}]{\text{(3,5) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -\frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(17) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 & -3 \\ -1 & 8 & 9 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{5} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(18) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & -5 & 9 \\ 4 & 3 & 11 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 12 & -4 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行を引く}]{\text{第 3 行から}} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & -5 & 9 \\ 4 & 3 & 11 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 1 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 11 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 6 & -8 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{3 倍したもの加える}]{\text{第 2 行に第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(19)
$$\begin{pmatrix}1&2&4&-6&1\\3&1&7&7&8\\1&9&21&19&14\\2&7&11&5&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&4&-6&1\\0&-5&-5&25&5\\0&7&17&25&13\\0&3&3&17&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&2&4&-6&1\\0&1&1&5&-1\\0&7&17&25&13\\0&3&3&17&-3\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&2&-16&3\\0&1&1&5&-1\\0&0&10&-10&20\\0&0&0&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{10}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}\begin{pmatrix}1&0&2&-16&3\\0&1&1&5&-1\\0&0&1&-1&2\\0&0&0&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0&-18&-1\\0&1&0&6&-3\\0&0&1&-1&2\\0&0&0&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}}\begin{pmatrix}1&0&0&-18&-1\\0&1&0&6&-3\\0&0&1&-1&2\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&-3\\0&0&1&0&2\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

(20)
$$\begin{pmatrix}1&-3&3&2&-7\\4&3&-2&1&8\\5&2&1&3&3\\5&6&1&3&7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-3&3&2&-7\\0&15&-14&-7&36\\0&17&-14&-7&38\\0&21&-14&-7&42\end{pmatrix}\xrightarrow[-1\text{ 倍したもの加える}]{\text{第 2 行に第 3 行を}}$$
$$\begin{pmatrix}1&-3&3&2&-7\\0&-2&0&0&-2\\0&17&-14&-7&38\\0&21&-14&-7&42\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&-3&3&2&-7\\0&1&0&0&1\\0&17&-14&-7&38\\0&21&-14&-7&42\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&3&2&-4\\0&1&0&0&1\\0&0&-14&-7&21\\0&0&-14&-7&21\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[-\frac{1}{14}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&0&3&2&-4\\0&1&0&0&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&-14&-7&21\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&0&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(21)
$$\begin{pmatrix}3&2&-3&1&-2\\4&3&-4&2&-1\\2&1&2&-1&4\\6&3&2&-2&5\end{pmatrix}\xrightarrow[-1\text{ 倍したもの加える}]{\text{第 1 行に第 3 行を}}\begin{pmatrix}1&1&-5&2&-6\\4&3&-4&2&-1\\2&1&2&-1&4\\6&3&2&-2&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$$
$$\begin{pmatrix}1&1&-5&2&-6\\0&-1&16&-6&23\\0&-1&12&-5&16\\0&-3&32&-14&41\end{pmatrix}\xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&1&-5&2&-6\\0&1&-16&6&-23\\0&-1&12&-5&16\\0&-3&32&-14&41\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&11&-4&17\\0&1&-16&6&-23\\0&0&-4&1&-7\\0&0&-16&4&-28\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[-\frac{1}{14}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}\begin{pmatrix}1&0&11&-4&17\\0&1&-16&6&-23\\0&0&1&-\frac{1}{4}&\frac{7}{4}\\0&0&-16&4&-28\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{5}{4}&-\frac{9}{4}\\0&1&0&2&5\\0&0&1&-\frac{1}{4}&\frac{7}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(22)
$$\begin{pmatrix}1&2&0&-1&-1\\-1&1&2&0&3\\2&0&1&1&8\\1&-2&-1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&0&-1&-1\\0&3&2&-1&2\\0&-4&1&3&10\\0&-4&-1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{を加える}]{\text{第 2 行に第 4 行}}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&0&-1&-1\\0&-1&1&1&5\\0&-4&1&3&10\\0&-4&-1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&2&0&-1&-1\\0&1&-1&-1&-5\\0&-4&1&3&10\\0&-4&-1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&2&1&9\\0&1&-1&-1&-5\\0&0&-3&-1&-10\\0&0&-5&-2&-17\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{-2 倍したもの加える}]{\text{第 4 行に第 3 行を}} \begin{pmatrix}1&0&2&1&9\\0&1&-1&-1&-5\\0&0&-3&-1&-10\\0&0&1&0&3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix}1&0&2&1&9\\0&1&-1&-1&-5\\0&0&1&0&3\\0&0&-3&-1&-10\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&3\\0&1&0&-1&-2\\0&0&1&0&3\\0&0&0&-1&-1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-1 倍する}]{\text{第 4 行を}} \begin{pmatrix}1&0&0&1&3\\0&1&0&-1&-2\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

(23) $\begin{pmatrix}1&2&4&-6&-7\\3&1&7&7&9\\1&9&11&19&11\\2&7&11&5&t\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&2&4&-6&-7\\0&-5&-5&25&30\\0&7&7&25&18\\0&3&3&17&t+14\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{$-\frac{1}{5}$ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix}1&2&4&-6&-7\\0&1&1&-5&-6\\0&7&7&25&18\\0&3&3&17&t+14\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&0&2&4&5\\0&1&1&-5&-6\\0&0&0&60&60\\0&0&0&32&t+32\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{$\frac{1}{60}$ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix}1&0&2&4&5\\0&1&1&-5&-6\\0&0&0&1&1\\0&0&0&32&t+32\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}}$$

$\begin{pmatrix}1&0&2&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&t\end{pmatrix} \cdots(*)$ より, $t=0$ ならば $(*)$ は $\begin{pmatrix}1&0&2&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ となるため, 被約階段行列である. $t \neq 0$ ならば $(*)$ $\xrightarrow[\text{$\frac{1}{t}$ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \begin{pmatrix}1&0&2&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 5 列の掃き出し}]{\text{(4,5) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$

(24) $\begin{pmatrix}1&2&3&1&1\\2&5&8&3&3\\1&3&5&2&t+3\\4&3&2&t&t\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&2&3&1&1\\0&1&2&1&1\\0&1&2&1&t+2\\0&-5&-10&t-4&t-4\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&1&1\\0&0&0&0&t+1\\0&0&0&t+1&t+1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&1&1\\0&0&0&t+1&t+1\\0&0&0&0&t+1\end{pmatrix} \cdots(*)$ より, $t=-1$ ならば $(*)$ は $\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ となるため, 被約階段行列である. $t \neq -1$ ならば $(*)$ $\xrightarrow[\text{を $\frac{1}{t+1}$ 倍する}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&2&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,5) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&2&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(25) $\begin{pmatrix}2&0&1&0\\1&2&1&1\\0&-1&0&-1\\1&1&-1&4\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を入れ換える}]{\text{第 1 行と第 4 行}} \begin{pmatrix}1&1&-1&4\\1&2&1&1\\0&-1&0&-1\\2&0&1&0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&1&2&-3\\0&-1&0&-1\\0&-2&3&-8\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(26) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(27) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & a-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & a-2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & a+7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \cdots (*)$ より,

$a = -2$ ならば $(*)$ は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるため, 被約階段行列である.

$a \neq -2$ ならば, $(*) \xrightarrow[\frac{1}{a+2}\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. 基本行列の逆行列は $P_n(i,j;c)^{-1} = P_n(i,j;-c)$, $Q_n(i;c)^{-1} = Q_n\left(i;\frac{1}{c}\right)$, $R_n(i,j)^{-1} = R_n(i,j)$ で与えられることに注意する.

(1) 与えられた行列を A とする. 1 の (3) の解答における行に関する変形を, 基本行列を左からかける形で表せば

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_3(3,1;-3)P_3(2,1;-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_3(2,3;-6)P_3(1,3;2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_3(3;-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{を左からかける}]{R_3(2,3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_3\left(3;\frac{1}{5}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_3(2,3;1)P_3(1,3;-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから

$P_3(2,3;1)P_3(1,3;-1)Q_3\left(3;\frac{1}{5}\right)R_3(2,3)Q_3(3;-1)P_3(2,3;-6)P_3(1,3;2)P_3(3,1;-3)P_3(2,1;-2)A = E_3$ が成り立つ. 従って, A は $P_3(2,3;1)P_3(1,3;-1)Q_3\left(3;\frac{1}{5}\right)R_3(2,3)Q_3(3;-1)P_3(2,3;-6)P_3(1,3;2)P_3(3,1;-3)P_3(2,1;-2)$ の逆行列 $P_3(2,1;2)P_3(3,1;3)P_3(1,3;-2)P_3(2,3;6)Q_3(3;-1)R_3(2,3)Q_3(3;5)P_3(1,3;1)P_3(2,3;-1)$ に等しい.

(2) 与えられた行列を A とする. 1 の (13) の解答から, A が正則になるのは $t \neq \pm 3$ の場合である. このとき, 1 の (3) の解答における行に関する変形を, 基本行列を左からかける形で表せば

$\begin{pmatrix} t-2 & -1 & -2 \\ -1 & t-2 & 2 \\ -2 & 2 & t+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_3(3,2;-2)P_3(1,2;t-2)} \begin{pmatrix} 0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3) \\ -1 & t-2 & 2 \\ 0 & -2(t-3) & t-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{R_3(1,2)}$

$\begin{pmatrix} -1 & t-2 & 2 \\ 0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3) \\ 0 & -2(t-3) & t-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_3(1;-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2-t & -2 \\ 0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3) \\ 0 & -2(t-3) & t-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{R_3(2,3)}$

$$\begin{pmatrix}1 & 2-t & -2\\ 0 & -2(t-3) & t-3\\ 0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3)\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_3\left(3;\frac{1}{t-3}\right)Q_3\left(2;-\frac{1}{2(t-3)}\right)}\begin{pmatrix}1 & 2-t & -2\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & t-1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_3(3,2;-t+1)P_3(1,2;t-2)}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{-t-2}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{t+3}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{-t-2}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{t+3}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_3\left(3;\frac{2}{t+3}\right)}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{t+2}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_3\left(2,3;\frac{1}{2}\right)P_3\left(1,2;\frac{t+2}{2}\right)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ だから

$P_3\left(2,3;\frac{1}{2}\right)P_3\left(1,2;\frac{t+2}{2}\right)Q_3\left(3;\frac{2}{t+3}\right)P_3(3,2;-t+1)P_3(1,2;t-2)Q_3\left(3;\frac{1}{t-3}\right)Q_3\left(2;-\frac{1}{2(t-3)}\right)R_3(2,3)Q_3(1;-1)$ $\times R_3(1,2)P_3(3,2;-2)P_3(1,2;t-2)A=E_3$ が成り立つ. 従って, A は $P_3\left(2,3;\frac{1}{2}\right)P_3\left(1,2;\frac{t+2}{2}\right)Q_3\left(3;\frac{2}{t+3}\right)$ $\times P_3(3,2;-t+1)P_3(1,2;t-2)Q_3\left(3;\frac{1}{t-3}\right)Q_3\left(2;-\frac{1}{2(t-3)}\right)R_3(2,3)Q_3(1;-1)R_3(1,2)P_3(3,2;-2)P_3(1,2;t-2)$ の逆行列 $P_3(1,2;-t+2)P_3(3,2;2)R_3(1,2)Q_3(1;-1)R_3(2,3)Q_3(2;-2(t-3))Q_3(3;t-3)P_3(1,2;-t+2)P_3(2,3;t-1)$ $\times Q_3\left(3;\frac{t+3}{2}\right)P_3\left(1,2;-\frac{t+2}{2}\right)P_3\left(2,3;-\frac{1}{2}\right)$ に等しい.

(3) 与えられた行列を A とする. 1 の (19) の解答における行に関する変形を, 基本行列を左からかける形で表せば

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -6\\ 3 & 1 & 7 & 7\\ 1 & 9 & 21 & 19\\ 2 & 7 & 11 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,1;-2)P_4(3,1;-1)P_4(2,1;-3)}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -6\\ 0 & -5 & -5 & 25\\ 0 & 7 & 17 & 25\\ 0 & 3 & 3 & 17\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_4\left(2;-\frac{1}{5}\right)}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -6\\ 0 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 7 & 17 & 25\\ 0 & 3 & 3 & 17\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,2;-3)P_4(3,2;-7)P_4(1,2;-2)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -16\\ 0 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 10 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_4\left(2;\frac{1}{10}\right)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -16\\ 0 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(2,3;-1)P_4(1,3;-2)}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -18\\ 0 & 1 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_4\left(2;\frac{1}{2}\right)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -18\\ 0 & 1 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(3,4;1)P_4(2,4;-6)P_4(1,4;18)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ だから

$P_4(3,4;1)P_4(2,4;-6)P_4(1,4;18)Q_4\left(2;\frac{1}{2}\right)P_4(2,3;-1)P_4(1,3;-2)Q_4\left(2;\frac{1}{10}\right)P_4(4,2;-3)P_4(3,2;-7)P_4(1,2;-2)$ $\times Q_4\left(2;-\frac{1}{5}\right)P_4(4,1;-2)P_4(3,1;-1)P_4(2,1;-3)A=E_4$ が成り立つ. 従って, 与えられた行列は $P_4(3,4;1)P_4(2,4;-6)P_4(1,4;18)Q_4\left(2;\frac{1}{2}\right)P_4(2,3;-1)P_4(1,3;-2)Q_4\left(2;\frac{1}{10}\right)P_4(4,2;-3)P_4(3,2;-7)P_4(1,2;-2)$ $\times Q_4\left(2;-\frac{1}{5}\right)P_4(4,1;-2)P_4(3,1;-1)P_4(2,1;-3)$ の逆行列 $P_4(2,1;3)P_4(3,1;1)P_4(4,1;2)Q_4(2;-5)P_4(1,2;2)$ $\times P_4(3,2;7)P_4(4,2;3)Q_4(2;10)P_4(1,3;2)P_4(2,3;1)Q_4(2;2)P_4(1,4;-18)P_4(2,4;6)P_4(3,4;-1)$ に等しい.

(4) 与えられた行列を A とする. 1 の (22) の解答における行に関する変形を, 基本行列を左からかける形で表せば

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,1;-1)P_4(3,1;-2)P_4(2,1;1)}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 2 & -1\\ 0 & -4 & 1 & 3\\ 0 & -4 & -1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(2,4;1)}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & 1 & 3\\ 0 & -4 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_4(2;-1)}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & -4 & 1 & 3\\ 0 & -4 & -1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,2;4)P_4(3,2;4)P_4(1,2;-2)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -3 & -1\\ 0 & 0 & -5 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,3;-2)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{を左からかける}]{R_4(3,4)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,3;3)P_4(2,3;1)P_4(1,3;-2)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_4(4;-1)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(2,4;1)P_4(1,4;-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ だから $P_4(2,4;1)P_4(1,4;-1)Q_4(4;-1)P_4(4,3;3)P_4(2,3;1)P_4(1,3;-2)R_4(3,4)$ $\times P_4(4,3;-2)P_4(4,2;4)P_4(3,2;4)P_4(1,2;-2)Q_4(2;-1)P_4(2,4;1)P_4(4,1;-1)P_4(3,1;-2)P_4(2,1;1)A = E_4$ が成り立つ．従って，A は $P_4(2,4;1)P_4(1,4;-1)Q_4(4;-1)P_4(4,3;3)P_4(2,3;1)P_4(1,3;-2)R_4(3,4)P_4(4,3;-2)P_4(4,2;4)$ $\times P_4(3,2;4)P_4(1,2;-2)Q_4(2;-1)P_4(2,4;1)P_4(4,1;-1)P_4(3,1;-2)P_4(2,1;1)$ の逆行列 $P_4(2,1;-1)P_4(3,1;2)P_4(4,1;1)P_4(2,4;-1)Q_4(2;-1)P_4(1,2;2)P_4(3,2;-4)P_4(4,2;-4)P_4(4,3;2)R_4(3,4)P_4(1,3;2)$ $\times P_4(2,3;-1)P_4(4,3;-3)Q_4(4;-1)P_4(1,4;1)P_4(2,4;-1)$ に等しい．

(5) 与えられた行列を A とする．1 の (27) の解答から，A が正則になるのは $a \neq -2$ の場合である．1 の (27) の解答における行に関する変形を，基本行列を左からかける形で表せば

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,1;-2)P_4(3,1;1)P_4(2,1;-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & a-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_4(2;-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & a-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,2;3)P_4(3,2;2)P_4(1,2;1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & a+7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(4,3;-1)P_4(2,3;-1)P_4(1,3;-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{Q_4\left(4;\frac{1}{a+2}\right)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を左からかける}]{P_4(3,4;-5)P_4(2,4;2)P_4(1,4;6)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ だから $P_4(3,4;-5)P_4(2,4;2)P_4(1,4;6)Q_4\left(4;\frac{1}{a+2}\right)$ $\times P_4(4,3;-1)P_4(2,3;-1)P_4(1,3;-2)P_4(4,2;3)P_4(3,2;2)P_4(1,2;1)Q_4(2;-1)P_4(4,2;3)P_4(3,2;2)P_4(1,2;1)A = E_4$ が成り立つ．従って，A は $P_4(3,4;-5)P_4(2,4;2)P_4(1,4;6)Q_4\left(4;\frac{1}{a+2}\right)P_4(4,3;-1)P_4(2,3;-1)P_4(1,3;-2)P_4(4,2;3)$ $\times P_4(3,2;2)P_4(1,2;1)Q_4(2;-1)P_4(4,2;3)P_4(3,2;2)P_4(1,2;1)$ の逆行列 $P_4(1,2;-1)P_4(3,2;-2)P_4(4,2;-3)Q_4(2;1)$ $\times P_4(1,2;-1)P_4(3,2;-2)P_4(4,2;-3)P_4(1,3;2)P_4(2,3;1)P_4(4,3;1)Q_4(4;a+2)P_4(1,4;-6)P_4(2,4;-2)P_4(3,4;5)$ に等しい．

第 6 回小テストと解答

行に関する基本変形を行うことによって，行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ を階段行列にせよ．

[解答例] $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 4 行を } -2 \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 行に加える}]{\text{第 3 行を } \frac{1}{2} \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

線形数学 I 演習問題　第 7 回　行列の階数

1. 次の行列の階数を求めよ．ただし, a, b, c, d は定数とする．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ a & -1 & -1 \end{pmatrix}$
(2) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$
(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & -1 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$
(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & -3 \\ 3 & 1 & 0 & -8 \\ -1 & a+1 & 4 & a \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
(6) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
(7) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
(8) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
(10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$
(11) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
(12) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

(13) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$
(14) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
(15) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$
(16) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & a \\ 4 & -2 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$

(17) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & a & 3 \\ a & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
(18) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & a \\ 4 & 2 & -2 & a+1 \end{pmatrix}$
(19) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & -7 \\ 3 & 1 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & 19 & 11 \\ 2 & 7 & a^2 & a+1 \end{pmatrix}$
(20) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(21) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & b \\ -1 & 0 & a & a-1 \end{pmatrix}$
(22) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & a+1 & a+3 \\ a & 0 & a^2+1 & 3a \\ -3 & -8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
(23) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & b \\ 1 & 2 & a & a+3 \end{pmatrix}$

(24) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & a+4 \\ 1 & -1 & a & 3 \end{pmatrix}$
(25) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2+2a & 2a^2-3a \\ 1 & 2 & a^2-2 & a^2-1 \end{pmatrix}$
(26) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & a+1 & a+3 \\ a & 0 & 4 & 3a \\ -3 & -8 & a & -1 \end{pmatrix}$

(27) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 7 & 7 \\ 2 & 7 & 11 & a^2-12 \\ 2 & 7 & a+9 & -8 \end{pmatrix}$
(28) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & a-2 \\ -1 & -1 & 1 & 2-a \\ -2 & a-3 & 2 & 2 \\ a+1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$
(29) $\begin{pmatrix} 1 & -a-2 & 1 & a \\ -1 & 1 & -1 & -a \\ -2 & 2 & a-1 & 2 \\ a+3 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

(30) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & a & b \\ 1 & -2 & c & d \end{pmatrix}$
(31) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 3 & 1 & 7 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & a+1 & 19 & 11 \\ 2 & 7 & 11 & 15 & a \end{pmatrix}$
(32) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & -10 & 10 & 7 \\ 8 & 10 & 20 & 12 & a^2-11 \\ 5 & 9 & a+15 & 13 & a-6 \end{pmatrix}$

第 7 回の演習問題の解答

1. (1) $\begin{pmatrix}1&1&a\\1&0&-1\\a&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&1&a\\0&-1&-a-1\\0&-a-1&-a^2-1\end{pmatrix}\xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&1&a\\0&1&a+1\\0&-a-1&-a^2-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&a+1\\0&0&2a\end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は $a=0$ ならば 2 であり, $a\neq 0$ ならば 3 である.

(2) $\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行}}\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&1&a\\0&a-1&1-a\\0&1-a&1-a^2\end{pmatrix}\cdots(*)$ だから $a=1$ ならば与えられた行列の階数は 1 である. $a\neq 1$ の場合, $(*)\xrightarrow[\frac{1}{a-1}\text{ 倍する}]{\text{第 2,3 行を}}\begin{pmatrix}1&1&a\\0&1&-1\\0&-1&-a-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1&0&a+1\\0&1&-1\\0&0&-a-2\end{pmatrix}$ だから $a=-2$ ならば与えられた行列の階数は 2 であり, $a\neq -2,1$ ならば与えられた行列の階数は 3 である.

(3) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&a&-1\\a+1&1&a\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&a&1\\0&1&2a+1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2a+1\\0&a&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2a+1\\0&0&-(a+1)(2a-1)\end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は $a=-1$ または $a=\dfrac{1}{2}$ ならば 2 であり, $a\neq -1,\dfrac{1}{2}$ ならば 3 である.

(4) $\begin{pmatrix}1&2&a&-3\\3&1&0&-8\\-1&a+1&4&a\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&a&-3\\0&-5&-3a&1\\0&a+3&a+4&a-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{a+3}{5}\text{倍したもの加える}]{\text{第 3 行に第 2 行を}}$
$\begin{pmatrix}1&2&a&-3\\0&-5&-3a&1\\0&0&-\frac{(3a+10)(a-2)}{5}&\frac{6(a-2)}{5}\end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は $a=2$ ならば 2 であり, $a\neq 2$ ならば 3 である.

(5) $\begin{pmatrix}4&-7&6&1\\1&0&5&2\\-1&5&5&3\\0&1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}}\begin{pmatrix}1&0&5&2\\4&-7&6&1\\-1&5&5&3\\0&1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&5&2\\0&-7&-14&-7\\0&5&10&5\\0&1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{7}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$
$\begin{pmatrix}1&0&5&2\\0&1&2&1\\0&5&10&5\\0&1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&5&2\\0&1&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は 2 である.

(6) $\begin{pmatrix}-2&1&1&-1\\1&1&-1&2\\1&-2&0&-1\\3&0&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{行の入れ換え}]{\text{第 1 行と第 2}}\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\-2&1&1&-1\\1&-2&0&-1\\3&0&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&3&-1&3\\0&-3&1&-3\\0&-3&1&-3\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は 2 である.

(7) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は 2 である.

(8) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は 2 である.

(9) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は 2 である.

(10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は 2 である.

(11) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は 2 である.

(12) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は 2 である.

(13) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は 2 である.

(14) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-1 倍したもの加える}]{\text{第 2 行に第 4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は 4 である.

(15) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \cdots (*)$ だから

$a=1$ ならば与えられた行列の階数は 1 である. $a \neq 1$ の場合, $(*) \xrightarrow[\frac{1}{a-1}\text{ 倍する}]{\text{第 2,3,4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -a-1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -a-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a+2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$ だから $a=-3$ ならば与えられた行列の階数は 3 であり, $a \neq -3, 1$ ならば与えられた行列の階数は 4 である.

(16) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & a \\ 4 & -2 & 0 & a-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 2 & -4 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 4 & a-5 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & a-5 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$ だから $a=2$ ならば与えられた行列の階数は 3 であり, $a \neq 2$ ならば与えられた行列の階数は 4 である.

(17) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & a & 3 \\ a & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & a-2 & -1 \\ 0 & a-2 & 2-a & 3-2a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$
だから $a=1$ ならば与えられた行列の階数は 2 であり, $a \neq 1$ ならば与えられた行列の階数は 4 である.

(18) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & a \\ 4 & 2 & -2 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & a \\ 0 & 6 & -6 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$ より,
$a=1$ の場合は与えられた行列の階数は 2 である. $a \neq 1$ の場合は, 最後に得られた行列をさらに (3,4) 成分に関して第 4 列の掃き出しを行えば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が得られるため, 与えられた行列の階数は 3 である.

(19) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & -7 \\ 3 & 1 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & 19 & 11 \\ 2 & 7 & a^2 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & -7 \\ 0 & -5 & 25 & 30 \\ 0 & 7 & 25 & 18 \\ 0 & 3 & a^2+12 & a+15 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 25 & 30 \\ 0 & 0 & 60 & 60 \\ 0 & 0 & a^2+27 & a+33 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 60 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & -(a+2)(a-3) \end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は $a=-2$ または $a=3$ ならば 3 であり, $a \neq -1, 3$ ならば 4 である.

(20) $\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\1&3&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\0&3-a&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-a^2&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\0&0&a^2-3a+3&1\end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&a^3\\0&1&0&-a^2\\0&0&1&a\\0&0&0&(1-a)^3\end{pmatrix}$ だから $a=1$ ならば与えられた行列の階数は 3 であり, $a\neq 1$ ならば与えられた行列の階数は 4 である.

(21) $\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&-1&-2\\2&1&-3&b\\-1&0&a&a-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&-1&-2\\0&-3&-3&b-6\\0&2&a&a+2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-2&-1\\0&-1&-1&-2\\0&0&0&b\\0&0&a-2&a-2\end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}}\begin{pmatrix}1&0&-2&-1\\0&-1&-1&-2\\0&0&a-2&a-2\\0&0&0&b\end{pmatrix}$ だから, $a=2$ かつ $b=0$ のとき階数は 2,「$a\neq 2$ かつ $b=0$」または「$a=2$ かつ $b\neq 0$」のとき階数は 3, $a\neq 2$ かつ $b\neq 0$ のとき階数は 4 である.

(22) $\begin{pmatrix}1&3&-1&0\\3&1&a+1&a+3\\a&0&a^2+1&3a\\-3&-8&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&3&-1&0\\0&-8&a+4&a+3\\0&-3a&a^2+a+1&3a\\0&1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}}$
$\begin{pmatrix}1&3&-1&0\\0&1&-1&-1\\0&-3a&a^2+a+1&3a\\0&-8&a+4&a+3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&1&-1&-1\\0&0&(a-1)^2&0\\0&0&a-4&a-5\end{pmatrix}$ だから, $a\neq 1$ ならば, 得られた行列の (3,3) 成分に関して第 3 列を掃き出せば $\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-1\\0&0&(a-1)^2&0\\0&0&0&a-5\end{pmatrix}$ となるため, 与えられた行列の階数は $a=5$ ならば 3 であり, $a\neq 1,5$ ならば 4 である. $a=1$ の場合は, 上の行列の第 3 行と第 4 行を入れ替えることにより, 与えられた行列の階数は 3 であることがわかる.

(23) $\begin{pmatrix}1&0&1&2\\-2&1&-1&-2\\0&-1&-1&b\\1&2&a&a+3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&2\\0&-1&-1&b\\0&2&a-1&a+1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&2\\0&0&0&b+2\\0&0&a-3&a-3\end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&2\\0&0&a-3&a-3\\0&0&0&b+2\end{pmatrix}$ だから, $a=3$ かつ $b=-2$ のとき階数は 2, 「$a\neq 3$ かつ $b=-2$」または「$a=3$ かつ $b\neq -2$」のとき階数は 3, $a\neq 3$ かつ $b\neq -2$ のとき階数は 4 である.

(24) $\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&-1\\2&1&4&a+4\\1&-1&a&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&-1\\0&1&2&a\\0&-1&a-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&-1\\0&0&0&a+1\\0&0&a+1&0\end{pmatrix}$ より,
$a=-1$ の場合は, 与えられた行列の階数は 2 である. $a\neq -1$ の場合は, 最後に得られた行列の第 3 行と第 4 行を入

れ替えれば, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$ が得られるため, 与えられた行列の階数は 4 である.

(25) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2+2a & 2a^2-3a \\ 1 & 2 & a^2-2 & a^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & a^2+2a & 2a^2-3a \\ 0 & 0 & a^2-1 & a^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+3) & (a-1)(2a-1) \\ 0 & 0 & (a-1)(a+1) & (a-1)(a+1) \end{pmatrix}$ より $a=1$ のとき階数は 2, $a=-1$ のときは階数は 3 である. $a \neq \pm 1$ の場合, 第 3 行を $a-1$, 第 4 行を $(a-1)(a+1)$ で割り, 第 3 行と第 4 行を入れ替えると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+3 & 2a-1 \end{pmatrix}$ となり, さらに (3,3) 成分に関して第 3 列を掃き出せば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix}$ となる. 従って $a=4$ ならば階数は 3, $a \neq \pm 1, 4$ ならば階数は 4 である.

(26) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & a+1 & a+3 \\ a & 0 & 4 & 3a \\ -3 & -8 & a & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & a+3 & a+3 \\ 0 & -3a & a+4 & 3a \\ 0 & 1 & a-3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 2 行と第 4 行}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-3 & -1 \\ 0 & -3a & a+4 & 3a \\ 0 & -5 & a+3 & a+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3a+8 & 3 \\ 0 & 1 & a-3 & -1 \\ 0 & 0 & (3a-2)(a-2) & 0 \\ 0 & 0 & 6(a-2) & a-2 \end{pmatrix}$ だから, $a \neq \frac{2}{3}, 2$ ならば, 得られた行列の (3,3) 成分に関して第 3 列を掃き出せば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & (3a-2)(a-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$ となるため, 与えられた行列の階数は 4 である. また, 得られた行列の第 3 行と第 4 行を入れ換えれば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3a+8 & 3 \\ 0 & 1 & a-3 & -1 \\ 0 & 0 & 6(a-2) & a-2 \\ 0 & 0 & (3a-2)(a-2) & 0 \end{pmatrix}$ となるため, 与えられた行列の階数は $a=2$ ならば 2, $a=\frac{2}{3}$ ならば 3 である.

(27) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 7 & 7 \\ 2 & 7 & 11 & a^2-12 \\ 2 & 7 & a+9 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & a^2-10 \\ 0 & 3 & a+3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$$\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&-5&-5&10\\0&0&0&a^2-4\\0&0&a&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 3 行と第 4 行}}\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&-5&-5&10\\0&0&a&0\\0&0&0&a^2-4\end{pmatrix}$$ だから, 与えられた行列の階数は $a=0$ または $a=\pm 2$ ならば 3 であり, $a\neq 0,\pm 2$ ならば 4 である.

(28) $$\begin{pmatrix}1&1&-a&a-2\\-1&-1&1&2-a\\-2&a-3&2&2\\a+1&2&-2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&1&-a&a-2\\0&0&1-a&0\\0&a-1&2-2a&2a-2\\0&1-a&(a-1)(a+2)&a(1-a)\end{pmatrix}$$ だから, $a=1$ ならば与えられた行列の階数は 1 である. $a\neq 1$ ならば得られた行列の第 2 行と第 4 行を $\dfrac{1}{1-a}$ 倍し, 第 3 行を $\dfrac{1}{a-1}$ 倍して, 基本変形を続けると $$\begin{pmatrix}1&1&-a&a-2\\0&0&1&0\\0&1&-2&2\\0&1&-a-2&a\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}\begin{pmatrix}1&1&-a&a-2\\0&1&-2&2\\0&0&1&0\\0&1&-a-2&a\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$
$$\begin{pmatrix}1&0&2-a&a-4\\0&1&-2&2\\0&0&1&0\\0&0&-a&a-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&a-4\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&a-2\end{pmatrix}$$ だから, $a=2$ ならば与えられた行列の階数は 3 であり, $a\neq 1,2$ ならば与えられた行列の階数は 4 である.

(29) $$\begin{pmatrix}1&-a-2&1&a\\-1&1&-1&-a\\-2&2&a-1&2\\a+3&-2&2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-a-2&1&a\\0&-(a+1)&0&0\\0&-2(a+1)&a+1&2(a+1)\\0&(a+1)(a+4)&-(a+1)&-(a+1)(a+2)\end{pmatrix}$$ だから, $a=-1$ ならば与えられた行列の階数は 1 である. $a\neq -1$ ならば得られた行列の第 2 行, 第 3 行, 第 4 行を $-\dfrac{1}{a+1}$ 倍して, 基本変形を続けると $$\begin{pmatrix}1&-a-2&1&a\\0&1&0&0\\0&2&-1&-2\\0&-a-4&1&a+2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&a\\0&1&0&0\\0&0&-1&-2\\0&0&1&a+2\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&a-2\\0&1&0&0\\0&0&-1&-2\\0&0&0&a\end{pmatrix}$$ だから, $a=0$ ならば与えられた行列の階数は 3 であり, $a\neq -1,0$ ならば与えられた行列の階数は 4 である.

(30) $$\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\2&-3&-1&1\\4&-5&a&b\\1&-2&c&d\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&-1&-3&3\\0&-1&a-4&b+4\\0&-1&c-1&d+1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{-1 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&3&-3\\0&-1&a-4&b+4\\0&-1&c-1&d+1\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&4&-4\\0&1&3&-3\\0&0&a-1&b+1\\0&0&c+2&d-2\end{pmatrix}\cdots(*).$$ $B=\begin{pmatrix}a-1&b+1\\c+2&d-2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4&-4\\3&-3\end{pmatrix}$ とおくと $(*)=\begin{pmatrix}E_2&C\\O&B\end{pmatrix}$ である. B が零行列ならば $(*)$ は階段行列で, 与えられた行列の階数は 2 である. B が正則行列ならば, B を行に関して基本変形すれば単位行列にできるため, $(*)$ の第 3 行と第 4 行を行に関して基本変形をすることによって, $(*)$ を対角成分がすべて 1 である階段行列に変形できる. 従ってこの場合は, 与えられた行列の階数は 4 である. B が零行列であることと, $\operatorname{rank} B=0$ であることは同値であり, B が正則行列であることと $\operatorname{rank} B=2$ であることは同値だから, B が正則行列でも零行列でもないことは $\operatorname{rank} B=1$ であることと同値である. このとき, B を行に関して基本変形

すれば第 1 行は零でなく第 2 行が零である階段行列に変形できるため, $(*)$ の第 3 行と第 4 行を行に関して基本変形をすることによって, $(*)$ を第 3 行までが零ではなく, 第 4 行が零である階段行列に変形できるため, 与えられた行列の階数は 3 である．以上から, $(a,b,c,d)=(1,-1,-2,2)$ ならば与えられた行列の階数は 2, $(a,b,c,d)\neq(1,-1,-2,2)$ かつ $(a-1)(d-2)-(b+1)(c+2)=0$ ならば与えられた行列の階数は 3 であり, $(a-1)(d-2)-(b+1)(c+2)\neq 0$ ならば与えられた行列の階数は 4 である.

(31) $\begin{pmatrix}1&2&4&-6&-7\\3&1&7&7&9\\1&9&a+1&19&11\\2&7&11&15&a\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&4&-6&-7\\0&-5&-5&25&30\\0&7&a-3&25&18\\0&3&3&27&a+14\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1&0&2&4&5\\0&-5&-5&25&30\\0&0&a-10&60&60\\0&0&0&42&a+32\end{pmatrix}$ だから, $a\neq 10$ ならば行列の階数は 4 であり, $a=10$ ならば, 得られた行列の (3,4) 成分に関して第 4 列を掃き出せば $\begin{pmatrix}1&0&2&4&5\\0&-5&-5&25&30\\0&0&0&60&60\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ となるため, 与えられた行列の階数は 3 である.

(32) $\begin{pmatrix}1&3&5&5&-1\\-2&4&-10&10&7\\8&10&20&12&a^2-11\\5&9&a+15&13&a-6\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&3&5&5&-1\\0&10&0&20&5\\0&-14&-20&-28&a^2-3\\0&-6&a-10&-12&a-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1&0&5&-1&-\frac{3}{2}\\0&10&0&20&5\\0&0&-20&0&a^2+4\\0&0&a-10&0&a+2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&-1&\frac{a^2}{4}-\frac{1}{2}\\0&10&0&20&5\\0&0&-20&0&a^2+4\\0&0&0&0&\frac{a(a-4)(a-6)}{20}\end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は a が 0, 2 または 6 ならば 3 であり, $a\neq 2,4,6$ ならば 4 である.

第 7 回小テストと解答

行列 $\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&1&-1&-1\\2&-1&1&3\\1&-2&2&3\end{pmatrix}$ の階数を求めよ.

[解答例] $\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&1&-1&-1\\2&-1&1&3\\1&-2&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&1&-1&-1\\0&1&-1&-1\\0&-1&2-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$
だから与えられた行列の階数は 2 である.

線形数学 I 演習問題　第 8 回　連立 1 次方程式

1. 次の連立 1 次方程式の解を求めよ. ただし, t は定数とする.

(1) $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x+4y-3z=5 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ 3x-2y+4z=1 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x-4y=1 \\ 3x+5y=2 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x-3y-2z=-1 \\ 2x-2y-3z=-1 \\ x+5y=1 \end{cases}$　(5) $\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ 3x+4y-z=1 \\ 5x+6y-z=3 \end{cases}$　(6) $\begin{cases} 2x-5y+3z=7 \\ x-3y+2z=1 \\ 4x-5y+z=18 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 3x+2y+z=-1 \\ x-2y+3z=0 \end{cases}$　(8) $\begin{cases} 2x-y-z=12 \\ x-3y+2z=1 \\ 4x-5y+z=18 \end{cases}$　(9) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 3x+4y-z=1 \\ 5x+6y-z=1 \end{cases}$

(10) $\begin{cases} 3x-y-4z=-5 \\ x+y-z=-2 \\ x+5y=-3 \end{cases}$　(11) $\begin{cases} 2x+5y+3z=4 \\ 3x+8y+5z=5 \\ 3x+5y+2z=11 \end{cases}$　(12) $\begin{cases} 3x-5y-5z=-4 \\ 2x-2y-3z=-3 \\ 5x+y-6z=-7 \end{cases}$

(13) $\begin{cases} (t-2)x-y-2z=0 \\ -x+(t-2)y+2z=0 \\ -2x+2y+(t+1)z=0 \end{cases}$　(14) $\begin{cases} x+y+2z+3w=6 \\ x+2y-z+4w=8 \end{cases}$　(15) $\begin{cases} 3x+2y+z+w=4 \\ 5x+y+2z+3w=6 \end{cases}$

(16) $\begin{cases} x-2y+4z-w=-6 \\ 3x+12y-6z+w=8 \\ 5x-y+11z-3w=3 \end{cases}$　(17) $\begin{cases} x+2y+z+2w=1 \\ 2x-y-3z-w=-3 \\ -x+8y+9z+8w=9 \end{cases}$　(18) $\begin{cases} 2x-4y-5w=9 \\ 4x+3y+11z-2w=4 \\ 5x+2y+12z-4w=7 \end{cases}$

(19) $\begin{cases} x+2y+4z-6w=1 \\ 3x+y+7z+7w=8 \\ x+9y+21z+19w=14 \\ 2x+7y+11z+5w=-1 \end{cases}$　(20) $\begin{cases} x-3y+3z+2w=-7 \\ 4x+3y-2z+w=8 \\ 5x+2y+z+3w=3 \\ 5x+6y+z+3w=7 \end{cases}$　(21) $\begin{cases} 3x+2y-3z+w=-2 \\ 4x+3y-4z+2w=-1 \\ 2x+y+2z-w=4 \\ 6x+3y+2z-2w=5 \end{cases}$

(22) $\begin{cases} x+2y-w=-1 \\ -x+y+2z=3 \\ 2x+z+w=8 \\ x-2y-z+w=2 \end{cases}$　(23) $\begin{cases} x+2y+4z-6w=-7 \\ 3x+y+7z+7w=9 \\ x+9y+11z+19w=11 \\ 2x+7y+11z+5w=t \end{cases}$　(24) $\begin{cases} x+2y+3z+w=1 \\ 2x+5y+8z+3w=3 \\ x+3y+5z+2w=t+3 \\ 4x+3y+2z+tw=t \end{cases}$

2. 以下の連立 1 次方程式が解をもつような, 定数 a, p, q, r, s に関する条件を求め, 解を求めよ.

(1) $\begin{cases} 2x+z=p \\ x+2y+z+w=q \\ -y-w=r \\ x+y-z+4w=s \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x-3y-3z+w=p \\ x-2y-2z+2w=q \\ 2x-5y-5z+3w=r \\ x-y-z+3w=s \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x-y+z+w=p \\ 2x-3y+z-w=q \\ -x-y-2z-2w=r \\ 2x-5y+aw=s \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+(k+1)y+2kz=k+1 \\ (k-1)x+(3k-1)y+kz=k-1 \\ (2k-1)x+(7k-1)y+3kz=3k-1 \end{cases}$ の解が 2 組以上あるような定数 k の値を求め, その場合の解を求めよ.

第 8 回の演習問題の解答

1. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -z = -1 \end{cases}$ と同値である. $y = t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = -2t + 4 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$ (t は任意) で与えられる.

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{2}{7}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x + \frac{10}{7}z = \frac{1}{7} \\ y + \frac{1}{7}z = -\frac{2}{7} \end{cases}$ と同値である. $z = 7t$ とおけば,
解は $\begin{cases} x = -10t + \frac{1}{7} \\ y = -t - \frac{2}{7} \\ z = 7t \end{cases}$ (t は任意) で与えられる.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は
$\begin{cases} x = -1 \\ 0 = 5 \\ -y = -1 \end{cases}$ と同値になるが, この方程式は解を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x - \frac{5}{4}z = -\frac{1}{4} \\ y + \frac{1}{4}z = \frac{1}{4} \end{cases}$ と同値である. $z = 4t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = 5t - \frac{1}{4} \\ y = -t + \frac{1}{4} \\ z = 4t \end{cases}$
(t は任意) で与えられる.

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を引く}]{\text{第 2 行から}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x + z = -15 \\ y - z = 4 \\ 0 = 4 \end{cases}$ と同値になるが, この方程式は解を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

(6) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 7 \\ 4 & -5 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -21 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x - z = 16 \\ y - z = 5 \\ 0 = -21 \end{cases}$ と同値になるが, この方程式は解を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

(7) $\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\3&2&1&-1\\1&-2&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&4&-4\\0&-4&4&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&1&-1&1\\0&-4&4&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&-1&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x+z=16\\y-z=1\\0=3\end{cases}$ と同値になるが, この方程式は解を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

(8) $\begin{pmatrix}2&-1&-1&12\\1&-3&2&1\\4&-5&1&18\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}}\begin{pmatrix}1&-3&2&1\\2&-1&-1&12\\4&-5&1&18\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-3&2&1\\0&5&-5&10\\0&7&-7&14\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$

$\begin{pmatrix}1&-3&2&1\\0&1&-1&2\\0&7&-7&14\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-1&7\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x-z=7\\y-z=2\end{cases}$ と同値である. $z=t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=t+7\\y=t+2\\z=t\end{cases}$ (t は任意) で与えられる.

(9) $\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\3&4&-1&1\\5&6&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-2&2&-2\\0&-4&4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&1&-1&1\\0&-4&4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x+z=-1\\y-z=1\end{cases}$ と同値である. $z=t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=-t-1\\y=t+1\\z=t\end{cases}$ (t は任意) で与えられる.

(10) $\begin{pmatrix}3&-1&-4&-5\\1&1&-1&-2\\1&5&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行}}\begin{pmatrix}1&5&0&-3\\1&1&-1&-2\\3&-1&-4&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&5&0&-3\\0&-4&-1&1\\0&-16&-4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$

$\begin{pmatrix}1&5&0&-3\\0&1&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&-16&-4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{5}{4}&-\frac{7}{4}\\0&1&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x-\frac{5}{4}z=-\frac{7}{4}\\y+\frac{1}{4}z=-\frac{1}{4}\end{cases}$ と同値である. $z=4t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=5t-\frac{7}{4}\\y=-t-\frac{1}{4}\\z=4t\end{cases}$ (t は任意) で与えられる.

(11) $\begin{pmatrix}2&5&3&4\\3&8&5&5\\3&5&2&11\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 行を引く}]{\text{第 2 行から}}\begin{pmatrix}2&5&3&4\\1&3&2&1\\3&5&2&11\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}}\begin{pmatrix}1&3&2&1\\2&5&3&4\\3&5&2&11\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix}1&3&2&1\\0&-1&-1&2\\0&-4&-4&8\end{pmatrix}\xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&3&2&1\\0&1&1&-2\\0&-4&-4&8\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-1&7\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x-z=7\\y+z=-2\end{cases}$ と同値である. $z=t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=t+7\\y=-t-2\\z=t\end{cases}$ (t は任意) で与えられる.

(12) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 & -4 \\ 2 & -2 & -3 & -3 \\ 5 & 1 & -6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行を引く}]{\text{第 1 行から}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & -3 \\ 5 & 1 & -6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{4 倍したものを引く}]{\text{第 3 行から第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x - 3y - 2z = -1 \\ 4y + z = -1 \\ 0 = 2 \end{cases}$ と同値になるが, この方程式は解を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

(13) $\begin{pmatrix} t-2 & -1 & -2 \\ -1 & t-2 & 2 \\ -2 & 2 & t+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3) \\ -1 & t-2 & 2 \\ 0 & -2(t-3) & t-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 1 行と第 2 行}}$

$\begin{pmatrix} -1 & t-2 & 2 \\ 0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3) \\ 0 & -2(t-3) & t-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-1 倍する}]{\text{第 1 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2-t & -2 \\ 0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3) \\ 0 & -2(t-3) & t-3 \end{pmatrix} \cdots (*)$ より, $t = 3$ ならば $(*)$ は $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となり, $t \neq 3$ ならば $(*) \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2-t & -2 \\ 0 & -2(t-3) & t-3 \\ 0 & (t-1)(t-3) & 2(t-3) \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行を $\frac{1}{t-3}$ 倍する}]{\text{第 2 行を $-\frac{1}{2(t-3)}$ 倍して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2-t & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & t-1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-t-2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{t+3}{2} \end{pmatrix} \cdots (**)$. $t = -3$ ならば $(**) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $t \neq \pm 3$ ならば

$(**) \xrightarrow[\text{$\frac{2}{t+3}$ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{t+2}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 以上から, $t = \pm 3$ のときに $x = y = z = 0$ 以外の解をもつ. $t = 3$ のとき, $x = s + 2t$, $y = s$, $z = t$ (s, t は任意) を解にもち, $t = -3$ のとき, $x = -\dfrac{1}{2}t$, $y = \dfrac{1}{2}t$, $z = t$ (t は任意) を解にもつ.

(14) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x + 5z + 2w = 4 \\ y - 3z + w = 2 \end{cases}$ と同値である. $z = s$, $w = t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = -5s - 2t + 4 \\ y = 3s - t + 2 \\ z = s \\ w = t \end{cases}$ (s, t は任意) で与えられる.

(15) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を引く}]{\text{第 2 行から}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行を引く}]{\text{第 1 行から}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x + 3y - w = 2 \\ -7y + z + 4w = -2 \end{cases}$ と同値である. $y = s$, $w = t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = -3s + t + 2 \\ y = s \\ z = 7s - 4t - 2 \\ w = t \end{cases}$ (s, t は任意) で与えられる.

(16) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ 3 & 12 & -6 & 1 & 8 \\ 5 & -1 & 11 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 18 & -18 & 4 & 26 \\ 0 & 9 & -9 & 2 & 33 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2 倍したものを引く}]{\text{第 2 行から第 3 行を}}$

$\begin{pmatrix}1 & -2 & 4 & -1 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -40\\ 0 & 9 & -9 & 2 & 33\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x-2y+4z-w=-6\\ 0=-40\\ 9y-9z+2w=33\end{cases}$ と同値になるが, この方程式は解を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

(17) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -3 & -1 & -3\\ -1 & 8 & 9 & 8 & 9\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -5 & -5 & -5 & -5\\ 0 & 10 & 10 & 10 & 10\end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 10 & 10 & 10 & 10\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x-z=-1\\ y+z+w=1\end{cases}$ と同値である. $z=s,\ w=t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=s-1\\ y=-s-t+1\\ z=s\\ w=t\end{cases}$ ($s,\ t$ は任意) で与えられる.

(18) $\begin{pmatrix}2 & -4 & 0 & -5 & 9\\ 4 & 3 & 11 & -2 & 4\\ 5 & 2 & 12 & -4 & 7\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行を引く}]{\text{第 3 行から}} \begin{pmatrix}2 & -4 & 0 & -5 & 9\\ 4 & 3 & 11 & -2 & 4\\ 1 & -1 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 1 行と第 3 行}} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -2 & 3\\ 4 & 3 & 11 & -2 & 4\\ 2 & -4 & 0 & -5 & 9\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 7 & 7 & 6 & -8\\ 0 & -2 & -2 & -1 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{3 倍したもの加える}]{\text{第 2 行に第 3 行を}} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1\\ 0 & -2 & -2 & -1 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5\end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は

$\begin{cases}x+2z=3\\ y+z=-2\\ w=1\end{cases}$ と同値である. $z=t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=-2t+3\\ y=-t-2\\ z=t\\ w=1\end{cases}$ (t は任意) で与えられる.

(19) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -6 & 1\\ 3 & 1 & 7 & 7 & 8\\ 1 & 9 & 21 & 19 & 14\\ 2 & 7 & 11 & 5 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -6 & 1\\ 0 & -5 & -5 & 25 & 5\\ 0 & 7 & 17 & 25 & 13\\ 0 & 3 & 3 & 17 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第行を}} \begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -6 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 5 & -1\\ 0 & 7 & 17 & 25 & 13\\ 0 & 3 & 3 & 17 & -3\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -16 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 10 & -10 & 20\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{10}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -16 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -18 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 6 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式の解は $\begin{cases}x=-1\\ y=-3\\ z=2\\ w=0\end{cases}$ である.

(20) $\begin{pmatrix}1&-3&3&2&-7\\4&3&-2&1&8\\5&2&1&3&3\\5&6&1&3&7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-3&3&2&-7\\0&15&-14&-7&36\\0&17&-14&-7&38\\0&21&-14&-7&42\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{-1 倍したもの加える}]{\text{第 2 行に第 3 行を}}$

$\begin{pmatrix}1&-3&3&2&-7\\0&-2&0&0&-2\\0&17&-14&-7&38\\0&21&-14&-7&42\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{$-\frac{1}{2}$ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&-3&3&2&-7\\0&1&0&0&1\\0&17&-14&-7&38\\0&21&-14&-7&42\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&3&2&-4\\0&1&0&0&1\\0&0&-14&-7&21\\0&0&-14&-7&21\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{$-\frac{1}{14}$ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&0&3&2&-4\\0&1&0&0&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&-14&-7&21\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&0&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は

$\begin{cases}x+\frac{1}{2}w=\frac{1}{2}\\y=1\\z+\frac{1}{2}w=-\frac{3}{2}\end{cases}$ と同値である. $w=2t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=-t+\frac{1}{2}\\y=1\\z=-t-\frac{3}{2}\\w=2t\end{cases}$ (t は任意) で与えられる.

(21) $\begin{pmatrix}3&2&-3&1&-2\\4&3&-4&2&-1\\2&1&2&-1&4\\6&3&2&-2&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{-1 倍したもの加える}]{\text{第 1 行に第 3 行を}}\begin{pmatrix}1&1&-5&2&-6\\4&3&-4&2&-1\\2&1&2&-1&4\\6&3&2&-2&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix}1&1&-5&2&-6\\0&-1&16&-6&23\\0&-1&12&-5&16\\0&-3&32&-14&41\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{-1 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&1&-5&2&-6\\0&1&-16&6&-23\\0&-1&12&-5&16\\0&-3&32&-14&41\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&11&-4&17\\0&1&-16&6&-23\\0&0&-4&1&-7\\0&0&-16&4&-28\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{$-\frac{1}{14}$ 倍する}]{\text{第 3 行を}}\begin{pmatrix}1&0&11&-4&17\\0&1&-16&6&-23\\0&0&1&-\frac{1}{4}&\frac{7}{4}\\0&0&-16&4&-28\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{5}{4}&-\frac{9}{4}\\0&1&0&2&5\\0&0&1&-\frac{1}{4}&\frac{7}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は

$\begin{cases}x-\frac{5}{4}w=-\frac{9}{4}\\y+2w=5\\z-\frac{1}{4}w=\frac{7}{4}\end{cases}$ と同値である. $w=4t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=5t-\frac{9}{4}\\y=-8t+5\\z=t+\frac{7}{4}\\w=4t\end{cases}$ (t は任意) で与えられる.

(22) $\begin{pmatrix}1&2&0&-1&-1\\-1&1&2&0&3\\2&0&1&1&8\\1&-2&-1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&0&-1&-1\\0&3&2&-1&2\\0&-4&1&3&10\\0&-4&-1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{を加える}]{\text{第 2 行に第 4 行}}$

$\begin{pmatrix}1&2&0&-1&-1\\0&-1&1&1&5\\0&-4&1&3&10\\0&-4&-1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{-1 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}1&2&0&-1&-1\\0&1&-1&-1&-5\\0&-4&1&3&10\\0&-4&-1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&2&1&9\\0&1&-1&-1&-5\\0&0&-3&-1&-10\\0&0&-5&-2&-17\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[-2\text{ 倍したもの加える}]{\text{第 4 行に第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(4,4)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ より，与えられた

方程式の解は $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \\ w = 1 \end{cases}$ である.

(23) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 3 & 1 & 7 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & 11 & 19 & 11 \\ 2 & 7 & 11 & 5 & t \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 0 & -5 & -5 & 25 & 30 \\ 0 & 7 & 7 & 25 & 18 \\ 0 & 3 & 3 & 17 & t+14 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 7 & 7 & 25 & 18 \\ 0 & 3 & 3 & 17 & t+14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & t+32 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{60}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & t+32 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(3,4)\text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x + 2w = 1 \\ y + z = -1 \\ w = 1 \\ 0 = t \end{cases}$ と同値であるため, $t \neq 0$ ならば解をもたず, $t = 0$

ならば $z = s$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = -2s + 1 \\ y = -s - 1 \\ z = s \\ w = 1 \end{cases}$ (s は任意) で与えられる.

(24) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & t+3 \\ 4 & 3 & 2 & t & t \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & t+2 \\ 0 & -5 & -10 & t-4 & t-4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+1 \\ 0 & 0 & 0 & t+1 & t+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ換え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t+1 & t+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+1 \end{pmatrix} \cdots (*)$$ より, $t = -1$ ならば $(*)$ は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ となり, 与えられた方程式は $\begin{cases} x - z - w = -1 \\ y + 2z + w = 1 \end{cases}$ と同値であるため, $z = u$, $w = v$ とおけ

ば, 解は $\begin{cases} x = u+v-1 \\ y = -2u-v+1 \\ z = u \\ w = v \end{cases}$ $(u, v$ は任意$)$ で与えられる. $t \neq -1$ ならば $(*)$ $\xrightarrow[\text{を } \frac{1}{t+1} \text{ 倍する}]{\text{第 3 行と第 4 行}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x-z-w=-1 \\ y+2z+w=1 \\ w=1 \\ 0=1 \end{cases}$ と同値になるが, この方程式は解を持たないため, 与えられた方程式も解を持たない.

2. (1) 与えられた連立 1 次方程式の拡大係数行列を行に関して基本変形する.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & p \\ 1 & 2 & 1 & 1 & q \\ 0 & -1 & 0 & -1 & r \\ 1 & 1 & -1 & 4 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{を入れ換える}]{\text{第 1 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & s \\ 1 & 2 & 1 & 1 & q \\ 0 & -1 & 0 & -1 & r \\ 2 & 0 & 1 & 0 & p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & s \\ 0 & 1 & 2 & -3 & q-s \\ 0 & -1 & 0 & -1 & r \\ 0 & -2 & 3 & -8 & p-2s \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 & 2s-q \\ 0 & 1 & 2 & -3 & q-s \\ 0 & 0 & 2 & -4 & q+r-s \\ 0 & 0 & 7 & -14 & p+2q-4s \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 & 2s-q \\ 0 & 1 & 2 & -3 & q-s \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{q+r-s}{2} \\ 0 & 0 & 7 & -14 & p+2q-4s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{q+3r+s}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -r \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{q+r-s}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2p-3q-7r-s}{2} \end{pmatrix}$ 故に, 与えられた方程式が解をもつための条件は $2p-3q-7r-s=0$ である. このとき, 与えられた方程式は $\begin{cases} x+w = \frac{q+3r+s}{2} \\ y+w=-r \\ z-2w = \frac{q+r-s}{2} \end{cases}$ と同値である. $w=t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = -t + \frac{q+3r+s}{2} \\ y = -t-r \\ z = 2t + \frac{q+r-s}{2} \\ w = t \end{cases}$ $(t$ は任意$)$ で与えられる.

(2) 拡大係数行列を基本変形する.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 & p \\ 1 & -2 & -2 & 2 & q \\ 2 & -5 & -5 & 3 & r \\ 1 & -1 & -1 & 3 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 1 & p \\ 0 & 1 & 1 & 1 & q-p \\ 0 & 1 & 1 & 1 & r-2p \\ 0 & 2 & 2 & 2 & s-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 3q-2p \\ 0 & 1 & 1 & 1 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-2q+p \end{pmatrix}$$

従って, 与えられた方程式が解をもつための条件は $r-q-p=0$ かつ $s-2q+p=0$ である. このとき, 与えられた方程式は $\begin{cases} x+4w = 3q-2p \\ y+z+w = q-p \end{cases}$ と同値である. $z=t$, $w=u$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = -4u-2p+3q \\ y = -t-u-p+q \\ z = t \\ w = u \end{cases}$ $(t, u$ は任意$)$ で与えられる.

(3) 拡大係数行列を基本変形する. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & p \\ 2 & -3 & 1 & -1 & q \\ -1 & -1 & -2 & -2 & r \\ 2 & -5 & 0 & a & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & p \\ 0 & -1 & -1 & -3 & q-2p \\ 0 & -2 & -1 & -1 & p+r \\ 0 & -3 & -2 & a-2 & s-2p \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2p-q \\ 0 & -2 & -1 & -1 & p+r \\ 0 & -3 & -2 & a-2 & s-2p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3p-q \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2p-q \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5p-2q+r \\ 0 & 0 & 1 & a+7 & 4p-3q+s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 & -7p+3q-2r \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3p+q-r \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5p-2q+r \\ 0 & 0 & 0 & a+2 & -p-q+s-r \end{pmatrix}$ より, $a \neq -2$ の場合, 左の拡大係数行列の第 4 行を $\frac{1}{a+2}$ 倍して $(4,4)$ 成分に関して第 4 列の掃き出しを行えば, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-7ap+3aq-2ar-20p-10r+6s}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-3ap+aq-ar-8p-4r+2s}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5ap-2aq+ar+15p+q+7r-5s}{a+2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-p-q+s-r}{a+2} \end{pmatrix}$ が得られるため, 与えられた方程式の解は $\begin{cases} x = \frac{-7ap+3aq-2ar-20p-10r+6s}{a+2} \\ y = \frac{-3ap+aq-ar-8p-4r+2s}{a+2} \\ z = \frac{5ap-2aq+ar+15p+q+7r-5s}{a+2} \\ w = \frac{-p-q+s-r}{a+2} \end{cases}$ である. $a = -2$ の場合, $-p-q+s-r \neq 0$ ならば与えられた方程式は解をもたず, $-p-q+s-r = 0$ ならば与えられた方程式は $\begin{cases} x-6w = -7p+3q-2r \\ y-2w = -3p+q-r \\ z+5w = 5p-2q+r \end{cases}$ と同値であるため, $w = t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x = 6t-7p+3q-2r \\ y = 2t-3p+q-r \\ z = -5t+5p-2q+r \\ w = t \end{cases}$ (t は任意) で与えられる.

3. $\begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2k & k+1 \\ k-1 & 3k-1 & k & k-1 \\ 2k-1 & 7k-1 & 3k & 3k-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2k & k+1 \\ 0 & 3k-k^2 & 3k-2k^2 & -k^2 \\ 0 & 6k-2k^2 & 5k-4k^2 & 2k-2k^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2\text{ 倍して加える}]{\text{第 3 行に第 2 行を}}$

$\begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2k & k+1 \\ 0 & 3k-k^2 & 3k-2k^2 & -k^2 \\ 0 & 0 & -k & 2k \end{pmatrix}$ より, $k \neq 0, 3$ ならば, 与えられた連立 1 次方程式は 1 組しか解がない. $k = 0$ の場合, 与えられた連立 1 次方程式はただ 1 つの方程式 $x+y=1$ と同値だから, 解は $\begin{cases} x = 1-s \\ y = s \\ z = t \end{cases}$ (s, t は任意) で与えられ, この場合は解が 2 組以上ある. $k = 3$ の場合, 与えられた連立 1 次方程式は $\begin{cases} x+4y+6z = 4 \\ -9z = -9 \\ -3z = 6 \end{cases}$ と同値である. この第 2 式からは $z = 1$, 第 3 式からは $z = -2$ が得られるため, 与えられた連立 1 次方程式は解を持たない.

第 8 回小テストと解答

連立一次方程式 $\begin{cases} x+2y+3z+w=1 \\ 2x+5y+8z+3w=3 \\ x+3y+5z+2w=2 \\ 4x+3y+2z-w=-1 \end{cases}$ の解を求めよ.

[解答例] $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -10 & -5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x-z-w=-1 \\ y+2z+w=1 \end{cases}$ と同値であるため, $z=s$, $w=t$ とおけば, 解は $\begin{cases} x=s+t-1 \\ y=-2s-t+1 \\ z=s \\ w=t \end{cases}$

(s, t は任意) で与えられる.

第 9 回小テストと解答

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

[解答例] $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{-1 倍する}]{\text{第 2 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\text{$-\frac{1}{a}$ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$ より

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ が与えられた行列の逆行列である.

線形数学 I 演習問題　第 9 回　逆行列の計算法

1. 以下の行列が正則行列ならば, その逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
(2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
(3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
(4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$
(5) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
(7) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
(8) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
(9) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
(10) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(11) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
(12) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
(13) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
(14) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
(15) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(16) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
(17) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
(18) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
(19) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$
(20) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(21) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
(22) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & a & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
(23) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$
(24) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

(25) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
(26) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
(27) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$
(28) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

(29) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
(30) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
(31) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
(32) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(33) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
(34) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
(35) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

(36) $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ a & 1+a^2 & ab & ac \\ b & ab & 1+b^2 & bc \\ c & ac & bc & 1+c^2 \end{pmatrix}$

第 9 回の演習問題の解答

1. (1)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&-1&1&0&0\\ 3&1&0&0&1&0\\ 2&-2&1&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&-1&1&0&0\\ 0&-5&3&-3&1&0\\ 0&-6&3&-2&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{-1 倍したもの加える}]{\text{第 2 行に第 3 行を}}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&-1&1&0&0\\ 0&1&0&-1&1&-1\\ 0&-6&3&-2&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&-1&3&-2&2\\ 0&1&0&-1&1&-1\\ 0&0&3&-8&6&-5\end{array}\right) \xrightarrow[\text{$\frac{1}{3}$ 倍する}]{\text{第 3 行を}}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&-1&3&-2&2\\ 0&1&0&-1&1&-1\\ 0&0&1&-\frac{8}{3}&2&-\frac{5}{3}\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\ 0&1&0&-1&1&-1\\ 0&0&1&-\frac{8}{3}&2&-\frac{5}{3}\end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} \frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\ -1&1&-1\\ -\frac{8}{3}&2&-\frac{5}{3}\end{pmatrix}.$$

(2)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3&1&2&1&0&0\\ 1&2&1&0&1&0\\ 2&-1&3&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&1&0&1&0\\ 3&1&2&1&0&0\\ 2&-1&3&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&1&0&1&0\\ 0&-5&-1&1&-3&0\\ 0&-5&1&0&-2&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{$-\frac{1}{5}$ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&1&0&1&0\\ 0&1&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}&0\\ 0&-5&1&0&-2&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&\frac{3}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&0\\ 0&1&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}&0\\ 0&0&2&-1&1&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{$\frac{1}{2}$ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&\frac{3}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&0\\ 0&1&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}&0\\ 0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&\frac{7}{10}&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{10}\\ 0&1&0&-\frac{1}{10}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{10}\\ 0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} \frac{7}{10}&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{10}\\ -\frac{1}{10}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{10}\\ -\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

(3)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&3&1&1&0&0\\ 2&6&-1&0&1&0\\ 1&4&2&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&3&1&1&0&0\\ 0&0&-3&-2&1&0\\ 0&1&1&-1&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&3&1&1&0&0\\ 0&1&1&-1&0&1\\ 0&0&-3&-2&1&0\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&-2&4&0&-3\\ 0&1&1&-1&0&1\\ 0&0&-3&-2&1&0\end{array}\right) \xrightarrow[\text{$-\frac{1}{3}$ 倍する}]{\text{第 3 行を}}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&-2&4&0&-3\\ 0&1&1&-1&0&1\\ 0&0&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&\frac{16}{3}&-\frac{2}{3}&-3\\ 0&1&0&-\frac{5}{3}&\frac{1}{3}&1\\ 0&0&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} \frac{16}{3}&-\frac{2}{3}&-3\\ -\frac{5}{3}&\frac{1}{3}&1\\ \frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}.$$

(4)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&-1&3&1&0&0\\ 1&-3&2&0&1&0\\ 4&-5&1&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-3&2&0&1&0\\ 2&-1&3&1&0&0\\ 4&-5&1&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-3&2&0&1&0\\ 0&5&-1&1&-2&0\\ 0&7&-7&0&-4&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{3 倍する}]{\text{第 2 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-3&2&0&1&0\\ 0&15&-3&3&-6&0\\ 0&7&-7&0&-4&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{-2 倍したもの加える}]{\text{第 2 行に第 3 行を}}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-3&2&0&1&0\\ 0&1&11&3&2&-2\\ 0&7&-7&0&-4&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&35&9&7&-6\\ 0&1&11&3&2&-2\\ 0&0&-84&-21&-18&15\end{array}\right) \xrightarrow[\text{$-\frac{1}{84}$ 倍する}]{\text{第 3 行を}}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&35&9&7&-6\\ 0&1&11&3&2&-2\\ 0&0&1&\frac{1}{4}&\frac{3}{14}&-\frac{5}{28}\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\ 0&1&0&\frac{1}{4}&-\frac{5}{14}&-\frac{1}{28}\\ 0&0&1&\frac{1}{4}&\frac{3}{14}&-\frac{5}{28}\end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} \frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&-\frac{5}{14}&-\frac{1}{28}\\ \frac{1}{4}&\frac{3}{14}&-\frac{5}{28}\end{pmatrix}.$$

$$(5)\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍したもの加える}]{\text{第 3 行に第 2 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 6 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{3 倍したもの加える}]{\text{第 2 行に第 3 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 11 & -10 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 10 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 11 & -10 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 24 & -22 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{3}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 10 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 11 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{24}{5} & -\frac{22}{5} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{26}{5} & -\frac{23}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{17}{5} & \frac{16}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{24}{5} & -\frac{22}{5} \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & \frac{26}{5} & -\frac{23}{5} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{17}{5} & \frac{16}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{24}{5} & -\frac{22}{5} \end{pmatrix}.$$

$$(6)\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{2 倍したもの加える}]{\text{第 1 行に第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(7)\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{3}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$(8)\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{を加える}]{\text{第 1 行に第 3 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{を加える}]{\text{第 2 行に第 3 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&2\\0&1&1&0&1&1\\0&0&1&-2&-5&-2\end{array}\right)\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&2\\0&1&0&2&6&3\\0&0&1&-2&-5&-2\end{array}\right)\text{ より }\begin{pmatrix}1&3&2\\2&6&3\\-2&-5&-2\end{pmatrix}.$$

(9) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc}4&1&2&1&0&0\\3&2&-1&0&1&0\\-2&-2&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{-1 倍したもの加える}]{\text{第 1 行に第 2 行を}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&3&1&-1&0\\3&2&-1&0&1&0\\-2&-2&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&3&1&-1&0\\0&5&-10&-3&4&0\\0&-4&8&2&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{$\frac{1}{2}$ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&3&1&-1&0\\0&1&-2&-\frac{3}{5}&\frac{4}{5}&0\\0&-4&8&2&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&0\\0&1&-2&-\frac{3}{5}&\frac{4}{5}&0\\0&0&0&-\frac{2}{5}&\frac{6}{5}&1\end{array}\right)$$ となり, 左半分の行列の階数は 2 であるため, 与えられた行列の逆行列は存在しない.

(10) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&3&1&0&0\\-1&-2&1&0&1&0\\3&1&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&-2&1&0&1&0\\2&1&3&1&0&0\\3&1&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{-1 倍する}]{\text{第 1 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&0&-1&0\\2&1&3&1&0&0\\3&1&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&0&-1&0\\0&-3&5&1&2&0\\0&-5&2&0&3&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{-2 倍したもの加える}]{\text{第 3 行に第 2 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&0&-1&0\\0&-3&5&1&2&0\\0&1&-8&-2&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&0&-1&0\\0&1&-8&-2&-1&1\\0&-3&5&1&2&0\end{array}\right)\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&15&4&1&-2\\0&1&-8&-2&-1&1\\0&0&-19&-5&-1&3\end{array}\right)\xrightarrow[\text{$-\frac{1}{19}$ 倍する}]{\text{第 3 行を}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&15&4&1&-2\\0&1&-8&-2&-1&1\\0&0&1&\frac{5}{19}&\frac{1}{19}&-\frac{3}{19}\end{array}\right)\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{19}&\frac{4}{19}&\frac{7}{19}\\0&1&0&\frac{2}{19}&-\frac{11}{19}&-\frac{5}{19}\\0&0&1&\frac{5}{19}&\frac{1}{19}&-\frac{3}{19}\end{array}\right)\text{ より }\begin{pmatrix}\frac{1}{19}&\frac{4}{19}&\frac{7}{19}\\\frac{2}{19}&-\frac{11}{19}&-\frac{5}{19}\\\frac{5}{19}&\frac{1}{19}&-\frac{3}{19}\end{pmatrix}.$$

(11) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-2&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\2&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-2&1&0&0\\0&2&-1&1&1&0\\0&-3&5&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{を加える}]{\text{第 2 行に第 3 行}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-2&1&0&0\\0&-1&4&-1&1&1\\0&-3&5&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{-1 倍する}]{\text{第 2 行を}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-2&1&0&0\\0&1&-4&1&-1&-1\\0&-3&5&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&1&1\\0&1&-4&1&-1&-1\\0&0&-7&1&-3&-2\end{array}\right)\xrightarrow[\text{$-\frac{1}{7}$ 倍する}]{\text{第 3 行を}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&1&1\\0&1&-4&1&-1&-1\\0&0&1&-\frac{1}{7}&\frac{3}{7}&\frac{2}{7}\end{array}\right)\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{2}{7}&\frac{1}{7}&\frac{3}{7}\\0&1&0&\frac{3}{7}&\frac{5}{7}&\frac{1}{7}\\0&0&1&-\frac{1}{7}&\frac{3}{7}&\frac{2}{7}\end{array}\right)\text{ より }\begin{pmatrix}\frac{2}{7}&\frac{1}{7}&\frac{3}{7}\\\frac{3}{7}&\frac{5}{7}&\frac{1}{7}\\-\frac{1}{7}&\frac{3}{7}&\frac{2}{7}\end{pmatrix}.$$

(12) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\2&3&-1&0&1&0\\3&4&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&1&-2&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -5 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(13) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(14) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(15) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(16) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍したもの加える}]{\text{第 3 行に第 2 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$ より, 与えられた行列の階数は 2 だから, 逆行列をもたない.

(17) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(18) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(19) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍したもの加える}]{\text{第 3 行に第 2 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$ より, 与えられた行列の階数は 2 だから, 逆行列をもたない.

(20) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(21) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a & -1 & 1 & 1-a \end{array}\right) \cdots (*)$$ より, $a = 2$ ならば与えられた行列の階数は 2 だから, 逆行列をもたない. $a \neq 2$ の場合, $$(*) \xrightarrow[\frac{1}{2-a}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a-2} & \frac{-1}{a-2} & \frac{a-1}{a-2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{a-1}{a-2} & \frac{-1}{a-2} & \frac{1}{a-2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{a-2} & \frac{1}{a-2} & \frac{-1}{a-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a-2} & \frac{-1}{a-2} & \frac{a-1}{a-2} \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} \frac{a-1}{a-2} & \frac{-1}{a-2} & \frac{1}{a-2} \\ \frac{-1}{a-2} & \frac{1}{a-2} & \frac{-1}{a-2} \\ \frac{1}{a-2} & \frac{-1}{a-2} & \frac{a-1}{a-2} \end{pmatrix}.$$

(22) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}$
$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a+1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a+1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -a & 1 & 1 & a+1 \end{array}\right) \cdots (*)$ より, $a = 0$ ならば与えられた行列の階数は 2 だから, 逆行列をもたない. $a \neq 0$ の場合, $(*) \xrightarrow[-\frac{1}{a}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{a+1}{a} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{a-1}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{a+1}{a} \end{array}\right)$ より
$\begin{pmatrix} \frac{a-1}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{a+1}{a} \end{pmatrix}$.

(23) $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}$
$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$ より $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(24) $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}$
$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ より $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(25) $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&1&1&-1&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&-1&1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&-1&1&-1\\ 0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&2&-1\\ 0&0&0&1&0&0&-1&1 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} 1&-1&1&-1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&2&-1\\ 0&0&-1&1 \end{pmatrix}.$$

(26) $$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&0\\ 1&0&2&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&2&0&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&-1&0&1&0\\ 0&1&0&2&0&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&-1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&-1&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&2&0&-1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&-1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&-1&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&2&0&-1&0\\ 0&1&0&0&0&2&0&-1\\ 0&0&1&0&-1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&-1&0&1 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} 2&0&-1&0\\ 0&2&0&-1\\ -1&0&1&0\\ 0&-1&0&1 \end{pmatrix}.$$

(27) $$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&-3&1&1&0&0&0\\ -1&-1&1&-1&0&1&0&0\\ -2&0&2&2&0&0&1&0\\ 4&2&-2&-2&0&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&-3&1&1&0&0&0\\ 0&0&-2&0&1&1&0&0\\ 0&2&-4&4&2&0&1&0\\ 0&-2&10&-6&-4&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&-3&1&1&0&0&0\\ 0&2&-4&4&2&0&1&0\\ 0&0&-2&0&1&1&0&0\\ 0&-2&10&-6&-4&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&-3&1&1&0&0&0\\ 0&1&-2&2&1&0&\frac{1}{2}&0\\ 0&0&-2&0&1&1&0&0\\ 0&-2&10&-6&-4&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&-1&-1&0&0&-\frac{1}{2}&0\\ 0&1&-2&2&1&0&\frac{1}{2}&0\\ 0&0&-2&0&1&1&0&0\\ 0&0&6&-2&-2&0&1&1 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&-1&-1&0&0&-\frac{1}{2}&0\\ 0&1&-2&2&1&0&\frac{1}{2}&0\\ 0&0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&6&-2&-2&0&1&1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&-1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\ 0&1&0&2&0&-1&\frac{1}{2}&0\\ 0&0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&0&-2&1&3&1&1 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&-1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\ 0&1&0&2&0&-1&\frac{1}{2}&0\\ 0&0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&-1&-2&-1&-\frac{1}{2}\\ 0&1&0&0&1&2&\frac{3}{2}&1\\ 0&0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2} \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} -1&-2&-1&-\frac{1}{2}\\ 1&2&\frac{3}{2}&1\\ -\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\ -\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(28) $$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&-3&1&1&1&0&0&0\\ -1&1&-1&-1&0&1&0&0\\ -2&2&0&2&0&0&1&0\\ 4&-2&2&-2&0&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&-3&1&1&1&0&0&0\\ 0&-2&0&0&1&1&0&0\\ 0&-4&2&4&2&0&1&0\\ 0&10&-2&-6&-4&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&-3&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\ 0&-4&2&4&2&0&1&0\\ 0&10&-2&-6&-4&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&1&1&\frac{5}{2}&\frac{3}{2}&0&0\\ 0&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&2&4&0&-2&1&0\\ 0&0&-2&-6&1&5&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & -2 & -6 & 1 & 5 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & -1 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 3 & 1 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & -1 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}
\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}
\end{array}\right) \text{より}
$$

$$
\begin{pmatrix}
-1 & -2 & -1 & -\frac{1}{2} \\
-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
1 & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\
-\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}
\end{pmatrix}.
$$

[注意] (28), (27) の行列をそれぞれ A, B とすれば, A は B の第 2 列と第 3 列を入れ替えた行列だから $A = BR_4(2,3)$ である. 従って $A^{-1} = (BR_4(2,3))^{-1} = R_4(2,3)^{-1}B^{-1} = R_4(2,3)B^{-1}$ だから A^{-1} は (27) で求めた B^{-1} の第 2 行と第 3 行を入れ替えた行列である.

(29)
$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -4 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -4 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{を加える}]{\text{第 2 行に第 4 行}}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & -4 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -4 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & -4 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -4 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\
0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -3 & -1 & -2 & -4 & 1 & -4 \\
0 & 0 & -5 & -2 & -1 & -4 & 0 & -3
\end{array}\right)
\xrightarrow[-2\text{ 倍したもの加える}]{\text{第 4 行に第 3 行を}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\
0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -3 & -1 & -2 & -4 & 1 & -4 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & -2 & 5
\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\
0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \\
0 & 0 & -3 & -1 & -2 & -4 & 1 & -4
\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 1 & -5 & -6 & 4 & -8 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & -2 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 7 & 8 & -5 & 11
\end{array}\right)
\xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 1 & -5 & -6 & 4 & -8 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & -2 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -7 & -8 & 5 & -11
\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -4 & -5 & 3 & -7 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -7 & -8 & 5 & -11
\end{array}\right) \text{より}
$$

$$
\begin{pmatrix}
2 & 2 & -1 & 3 \\
-4 & -5 & 3 & -7 \\
3 & 4 & -2 & 5 \\
-7 & -8 & 5 & -11
\end{pmatrix}.
$$

(30)
$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & -3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
4 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & -3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 9 & -10 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 15 & -10 & -5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[-1\text{ 倍したもの加える}]{\text{第 2 行に第 3 行を}}
$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -10 & -4 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 15 & -10 & -5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -7 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -10 & -4 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 40 & 15 & 1 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 20 & 8 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{40}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -7 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -10 & -4 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{40} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{40} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 20 & 8 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{7}{40} & \frac{1}{8} & \frac{7}{40} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{40} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{40} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{2 倍する}]{\text{第 4 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{7}{40} & \frac{1}{8} & \frac{7}{40} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{40} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{40} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{20} & -\frac{1}{2} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{20} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{3}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{20} & -\frac{1}{2} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{20} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} -\frac{9}{20} & -\frac{1}{2} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{7}{20} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(31) $$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 4 行}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(32) $$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 6 & 1 & -4 & -5 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[\frac{1}{6}\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{2}{3} & \frac{11}{6} & -\frac{1}{6} \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}\right)
\text{ より }
\begin{pmatrix}
-\frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\
\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & \frac{11}{6} & -\frac{1}{6} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6}
\end{pmatrix}.
$$

(33)
$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[-1\text{ 倍したもの加える}]{\text{第 4 行に第 1 行を}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 4 行}}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -2 & 1 & 3 & 1 & 0 & -3 \\
0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & -2
\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & -2 \\
0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -2 & 1 & 3 & 1 & 0 & -3
\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & -2 \\
0 & 0 & -2 & 1 & 3 & 1 & 0 & -3
\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 9 & 1 & 2 & -7
\end{array}\right)
\xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -9 & -1 & -2 & 7
\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 18 & 2 & 3 & -14 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -6 & -1 & -1 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -9 & -1 & -2 & 7
\end{array}\right)
\text{ より }
\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 1 \\
18 & 2 & 3 & -14 \\
-6 & -1 & -1 & 5 \\
-9 & -1 & -2 & 7
\end{pmatrix}.
$$

(34)
$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-2 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -4 & -5 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -4 & -5 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}
\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\
0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -4 & -5 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
2 & 0 & 2 & 4 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\
0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -5 & -5 & 0 & 1 & 0 & -2
\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
2 & 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & -2 & -\frac{1}{2} \\
0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1
\end{array}\right)
$$

となり, 左半分の行列の階数は 3 であるため, 与えられた行列の逆行列は存在しない.

(35)
$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 4 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{-1 倍する}]{\text{第 4 行を}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & -10 & 7 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 15 & -10 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 5 列の掃き出し}]{\text{(5,5) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 15 & 1 & 13 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 & -18 & 0 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \text{ より } \begin{pmatrix} -6 & 15 & 1 & 13 & 4 \\ 11 & -18 & 0 & -15 & -4 \\ 2 & -4 & 0 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(36)
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & b & c & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1+a^2 & ab & ac & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & ab & 1+b^2 & bc & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & ac & bc & 1+c^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & b & c & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -c & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & b & c & 1+a^2 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -c & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & c & 1+a^2+b^2 & -a & -b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -c & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1+a^2+b^2+c^2 & -a & -b & -c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -c & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{より } \begin{pmatrix} 1+a^2+b^2+c^2 & -a & -b & -c \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 1 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

線形数学 I 演習問題　第 10 回　行列式

1. 次の行列式の値を求めよ.

$$(1)\begin{vmatrix}2&3&4\\4&9&16\\8&27&64\end{vmatrix}\quad(2)\begin{vmatrix}2&-1&3\\1&-3&2\\4&-5&1\end{vmatrix}\quad(3)\begin{vmatrix}2&-1&1\\3&1&2\\5&5&4\end{vmatrix}\quad(4)\begin{vmatrix}2&-3&3\\4&3&-2\\5&2&4\end{vmatrix}\quad(5)\begin{vmatrix}5&-4&6\\-3&9&-5\\-8&7&9\end{vmatrix}\quad(6)\begin{vmatrix}1&0&2\\-1&-1&1\\2&1&2\end{vmatrix}$$

$$(7)\begin{vmatrix}-2&1&3\\4&-3&-5\\-5&3&7\end{vmatrix}\quad(8)\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&1&2\\2&1&-2\end{vmatrix}\quad(9)\begin{vmatrix}1&2&4&8\\8&1&2&4\\4&8&1&2\\2&4&8&1\end{vmatrix}\quad(10)\begin{vmatrix}1&-2&2&2\\2&0&-1&0\\4&-3&-1&-5\\1&1&3&-1\end{vmatrix}\quad(11)\begin{vmatrix}1&-3&3&2\\4&3&-2&1\\5&2&1&3\\5&6&1&2\end{vmatrix}$$

$$(12)\begin{vmatrix}2&3&0&1\\0&1&5&0\\1&0&0&4\\0&7&2&0\end{vmatrix}\quad(13)\begin{vmatrix}1&5&0&2\\2&0&3&0\\3&1&2&0\\0&2&0&5\end{vmatrix}\quad(14)\begin{vmatrix}1&2&-3&4\\8&7&6&-5\\2&2&-2&-2\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}\quad(15)\begin{vmatrix}1&-3&3&2\\2&3&-4&0\\4&3&2&3\\1&3&3&2\end{vmatrix}$$

$$(16)\begin{vmatrix}2&0&1&-1\\-4&2&3&1\\1&0&-1&2\\-2&1&0&2\end{vmatrix}\quad(17)\begin{vmatrix}2&1&-1&-1\\-2&-3&1&2\\-2&-1&3&1\\-1&-4&1&2\end{vmatrix}\quad(18)\begin{vmatrix}-3&-2&2&-5\\-2&3&-2&3\\4&-1&2&-2\\-3&2&-4&3\end{vmatrix}\quad(19)\begin{vmatrix}3&1&1&-1\\7&2&-4&1\\19&6&0&-3\\22&7&-1&-3\end{vmatrix}$$

$$(20)\begin{vmatrix}3&-1&2&1\\1&-2&1&3\\2&3&-2&1\\-1&1&3&2\end{vmatrix}\quad(21)\begin{vmatrix}3&2&5&-4\\-7&1&-8&6\\10&3&6&1\\2&5&4&3\end{vmatrix}\quad(22)\begin{vmatrix}3&-5&2&10\\2&0&1&-3\\-2&3&5&2\\4&-2&-3&2\end{vmatrix}\quad(23)\begin{vmatrix}3&-2&5&1\\1&3&2&5\\2&-5&-1&4\\-3&2&3&2\end{vmatrix}$$

$$(24)\begin{vmatrix}4&3&5&2\\2&4&7&7\\3&5&9&8\\7&2&3&3\end{vmatrix}\quad(25)\begin{vmatrix}3&-1&2&4\\2&1&1&3\\-2&0&3&-1\\0&-2&1&3\end{vmatrix}\quad(26)\begin{vmatrix}1&1&-c&c-2\\-1&-1&1&-c+2\\-2&c-3&2&2\\c+1&2&-2&-2\end{vmatrix}\quad(27)\begin{vmatrix}-1&-2&-3&4&1\\-2&3&4&1&3\\-5&-4&4&2&0\\3&2&-1&2&3\\2&3&3&0&-3\end{vmatrix}$$

$$(28)\begin{vmatrix}2&0&-3&1&4\\5&2&-1&-3&2\\-3&-1&0&4&1\\2&2&1&3&2\\-1&-3&3&-2&4\end{vmatrix}\quad(29)\begin{vmatrix}1&0&4&3&0\\3&4&0&2&0\\0&1&0&0&2\\6&0&2&5&0\\0&0&1&0&3\end{vmatrix}\quad(30)\begin{vmatrix}1&0&0&-1&0\\0&-1&0&0&1\\0&0&1&0&-1\\1&0&-1&0&0\\0&1&0&-1&0\end{vmatrix}\quad(31)\begin{vmatrix}1&0&0&-1&0\\0&-1&0&0&1\\0&0&1&0&-1\\-1&0&-1&0&0\\0&1&0&-1&0\end{vmatrix}$$

$$(32)\begin{vmatrix}2&3&0&1&0\\0&1&5&0&2\\1&0&0&4&1\\0&7&2&0&0\\2&0&3&4&0\end{vmatrix}\quad(33)\begin{vmatrix}4&2&1&0&0\\2&4&2&1&0\\1&2&4&2&1\\0&1&2&4&2\\0&0&1&2&4\end{vmatrix}\quad(34)\begin{vmatrix}4&-2&1&0&0\\-2&4&-2&1&0\\1&-2&4&-2&1\\0&1&-2&4&-2\\0&0&1&-2&4\end{vmatrix}\quad(35)\begin{vmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\\2&0&1&0&-1\\0&2&0&-1&0\\1&0&-1&0&1\end{vmatrix}$$

2. (発展問題) a, b, c を定数とし, A_n を, (i,j) 成分 a_{ij} が $a_{ii}=a\ (1 \leqq i \leqq n)$, $a_{i,i+1}=b$, $a_{i+1,i}=c\ (1 \leqq i \leqq n-1)$, $a_{ij}=0\ (|i-j| \geqq 2)$ である n 次正方行列とする. $n=3,4,\ldots$ に対して $|A_n| = a|A_{n-1}| - bc|A_{n-2}|$ が成り立つことを示せ. また, 以下の場合に $|A_n|$ の値を求めよ.

(1) $a=b=c=1$　(2) $a=0,\, b=-c\neq 0$　(3) $a=0,\, b=c\neq 0$　(3) $a^2=4bc$　(4) $a=b^2+1,\, b=c$

第 10 回の演習問題の解答

1. (1) $\begin{vmatrix}2&3&4\\4&9&16\\8&27&64\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&4\\0&3&8\\0&15&48\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3&8\\15&48\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3&8\\0&8\end{vmatrix}=48$

(2) $\begin{vmatrix}2&-1&3\\1&-3&2\\4&-5&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&5&-1\\1&-3&2\\0&7&-7\end{vmatrix}=(-1)^3\begin{vmatrix}5&-1\\7&-7\end{vmatrix}=28$

(3) $\begin{vmatrix}2&-1&1\\3&1&2\\5&5&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1\\-1&3&2\\-3&9&4\end{vmatrix}=(-1)^4\begin{vmatrix}-1&3\\-3&9\end{vmatrix}=0$

(4) $\begin{vmatrix}2&-3&3\\4&3&-2\\5&2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-3&3\\4&3&-2\\1&-1&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1&-9\\4&7&-26\\1&0&0\end{vmatrix}=(-1)^4\begin{vmatrix}-1&-9\\7&-26\end{vmatrix}=89$

(5) $\begin{vmatrix}5&-4&6\\-3&9&-5\\-8&7&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&5&1\\-3&9&-5\\-8&7&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1\\7&34&-5\\-26&-38&9\end{vmatrix}=(-1)^4\begin{vmatrix}7&34\\-26&-38\end{vmatrix}=884-266=618$

(6) $\begin{vmatrix}1&0&2\\-1&-1&1\\2&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&-1&3\\2&1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&3\\1&-2\end{vmatrix}=-1$

(7) $\begin{vmatrix}-2&1&3\\4&-3&-5\\-5&3&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0\\-2&-3&4\\1&3&-2\end{vmatrix}=(-1)^3\begin{vmatrix}-2&4\\1&-2\end{vmatrix}=0$

(8) $\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&1&2\\2&1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&3&5\\0&-3&-8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&5\\-3&-8\end{vmatrix}=-9$

(9) $\begin{vmatrix}1&2&4&8\\8&1&2&4\\4&8&1&2\\2&4&8&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}15&2&4&8\\15&1&2&4\\15&8&1&2\\15&4&8&1\end{vmatrix}=15\begin{vmatrix}1&2&4&8\\1&1&2&4\\1&8&1&2\\1&4&8&1\end{vmatrix}=15\begin{vmatrix}1&2&4&8\\0&-1&-2&-4\\0&6&-3&-6\\0&2&4&-7\end{vmatrix}=15\begin{vmatrix}1&2&4&8\\0&-1&-2&-4\\0&0&-15&-30\\0&0&0&-15\end{vmatrix}=-3375$

(10) $\begin{vmatrix}1&-2&2&2\\2&0&-1&0\\4&-3&-1&-5\\1&1&3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&-2&2&2\\0&0&-1&0\\2&-3&-1&-5\\7&1&3&-1\end{vmatrix}=-(-1)^5\begin{vmatrix}5&-2&2\\2&-3&-5\\7&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&-2&0\\2&-3&-8\\7&1&0\end{vmatrix}=-8(-1)^5\begin{vmatrix}5&-2\\7&1\end{vmatrix}=152$

(11) $\begin{vmatrix}1&-3&3&2\\4&3&-2&1\\5&2&1&3\\5&6&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\4&15&-14&-7\\5&17&-14&-7\\5&21&-14&-8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}15&-14&-7\\17&-14&-7\\21&-14&-8\end{vmatrix}=-14\begin{vmatrix}15&1&-7\\17&1&-7\\21&1&-8\end{vmatrix}=-14\begin{vmatrix}15&1&-7\\2&0&0\\21&1&-8\end{vmatrix}=$

$-28(-1)^3\begin{vmatrix}1&-7\\1&-8\end{vmatrix}=-28$

(12) $\begin{vmatrix}2&3&0&1\\0&1&5&0\\1&0&0&4\\0&7&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&3&0&-7\\0&1&5&0\\1&0&0&4\\0&7&2&0\end{vmatrix}=(-1)^4\begin{vmatrix}3&0&-7\\1&5&0\\7&2&0\end{vmatrix}=-7(-1)^4\begin{vmatrix}1&5\\7&2\end{vmatrix}=231$

(13) $$\begin{vmatrix}1&5&0&2\\2&0&3&0\\3&1&2&0\\0&2&0&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5&0&2\\0&-10&3&-4\\0&-14&2&-6\\0&2&0&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-10&3&-4\\-14&2&-6\\2&0&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&3&21\\0&2&29\\2&0&5\end{vmatrix}=(-1)^4 2\begin{vmatrix}3&21\\2&29\end{vmatrix}=90$$

(14) $$\begin{vmatrix}1&2&-3&4\\8&7&6&-5\\2&2&-2&-2\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&-4&5\\8&15&-2&3\\2&4&-4&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}=(-1)^5\begin{vmatrix}3&-4&5\\15&-2&3\\4&-4&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-27&0&-1\\15&-2&3\\-26&0&-6\end{vmatrix}=2(-1)^4\begin{vmatrix}-27&-1\\-26&-6\end{vmatrix}=272$$

(15) $$\begin{vmatrix}1&-3&3&2\\2&3&-4&0\\4&3&2&3\\1&3&3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-3&3&2\\3&0&-1&2\\5&0&5&5\\2&0&6&4\end{vmatrix}=-3(-1)^3\begin{vmatrix}3&-1&2\\5&5&5\\2&6&4\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}0&-1&0\\20&5&15\\20&6&16\end{vmatrix}=-3(-1)^3\begin{vmatrix}20&15\\20&16\end{vmatrix}=60$$

(16) $$\begin{vmatrix}2&0&1&-1\\-4&2&3&1\\1&0&-1&2\\-2&1&0&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&1&-1\\0&0&3&-3\\1&0&-1&2\\-2&1&0&2\end{vmatrix}=(-1)^6\begin{vmatrix}2&1&-1\\0&3&-3\\1&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&3&-5\\0&3&-3\\1&-1&2\end{vmatrix}=(-1)^4\begin{vmatrix}3&-5\\3&-3\end{vmatrix}=6$$

(17) $$\begin{vmatrix}2&1&-1&-1\\-2&-3&1&2\\-2&-1&3&1\\-1&-4&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\4&-3&-2&-1\\0&-1&2&0\\7&-4&-3&-2\end{vmatrix}=(-1)^3\begin{vmatrix}4&-2&-1\\0&2&0\\7&-3&-2\end{vmatrix}=-2(-1)^4\begin{vmatrix}4&-1\\7&-2\end{vmatrix}=2$$

(18) $$\begin{vmatrix}-3&-2&2&-5\\-2&3&-2&3\\4&-1&2&-2\\-3&2&-4&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&-2&2&-5\\-5&1&0&-2\\7&1&0&3\\-9&-2&0&-7\end{vmatrix}=2(-1)^4\begin{vmatrix}-5&1&-2\\7&1&3\\-9&-2&-7\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-5&1&-2\\12&0&5\\-19&0&-11\end{vmatrix}=2(-1)^3\begin{vmatrix}12&5\\-19&-11\end{vmatrix}=74$$

(19) $$\begin{vmatrix}3&1&1&-1\\7&2&-4&1\\19&6&0&-3\\22&7&-1&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&0&-1\\10&3&-3&1\\10&3&-3&-3\\13&4&-4&-3\end{vmatrix}=-(-1)^5\begin{vmatrix}10&3&-3\\10&3&-3\\13&4&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10&3&-3\\0&0&0\\13&4&-4\end{vmatrix}=0$$

(20) $$\begin{vmatrix}3&-1&2&1\\1&-2&1&3\\2&3&-2&1\\-1&1&3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-1&2&1\\-8&1&-5&0\\-1&4&-4&0\\-7&3&-1&0\end{vmatrix}=(-1)^5\begin{vmatrix}-8&1&-5\\-1&4&-4\\-7&3&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&1&0\\31&4&16\\17&3&14\end{vmatrix}=-(-1)^3\begin{vmatrix}31&16\\17&14\end{vmatrix}=162$$

(21) $$\begin{vmatrix}3&2&5&-4\\-7&1&-8&6\\10&3&6&1\\2&5&4&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}43&14&29&0\\-67&-17&-44&0\\10&3&6&1\\-28&-4&-14&0\end{vmatrix}=(-1)^7\begin{vmatrix}43&14&29\\-67&-17&-44\\-28&-4&-14\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}43&14&1\\-67&-17&-10\\-28&-4&-6\end{vmatrix}=$$
$$-\begin{vmatrix}43&14&1\\363&123&0\\230&80&0\end{vmatrix}=-(-1)^4\begin{vmatrix}363&123\\230&80\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-6&123\\-10&80\end{vmatrix}=-750$$

(22) $$\begin{vmatrix}3&-5&2&10\\2&0&1&-3\\-2&3&5&2\\4&-2&-3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-5&2&16\\0&0&1&0\\-12&3&5&17\\10&-2&-3&-7\end{vmatrix}=(-1)^5\begin{vmatrix}-1&-5&16\\-12&3&17\\10&-2&-7\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&0&0\\-12&63&-175\\10&-52&153\end{vmatrix}=$$
$$\begin{vmatrix}63&-175\\-52&153\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}11&-22\\-52&153\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}11&0\\-52&49\end{vmatrix}=539$$

(23) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -11 & -1 & -14 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -11 & -5 & -6 \\ 0 & 11 & 9 & 17 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -11 & -1 & -14 \\ -11 & -5 & -6 \\ 11 & 9 & 17 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -14 \\ 1 & -5 & -6 \\ -1 & 9 & 17 \end{vmatrix} =$

$11 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -14 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -836$

(24) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 7 \\ 3 & 5 & 9 & 8 \\ 7 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 7 & 7 \\ -2 & 5 & 9 & 8 \\ 5 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 10 & 17 & 11 \\ 0 & 11 & 19 & 12 \\ 0 & -13 & -22 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 17 & 11 \\ 11 & 19 & 12 \\ -13 & -22 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 17 & 11 \\ 1 & 2 & 1 \\ -13 & -22 & -7 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 10 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -13 & 4 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 22$

(25) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ -6 & 0 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -(-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 \\ -7 & 0 & -8 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3(-1)^3 \begin{vmatrix} -7 & -8 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 66$

(26) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -c & c-2 \\ -1 & -1 & 1 & -c+2 \\ -2 & c-3 & 2 & 2 \\ c+1 & 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -c & c-2 \\ 0 & 0 & 1-c & 0 \\ -2 & c-3 & 2 & 2 \\ c+1 & 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^5(1-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & c-2 \\ -2 & c-3 & 2 \\ c+1 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$

$(c-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & c-2 \\ 0 & c-1 & 2c-2 \\ c+1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (c-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & c-2 \\ 0 & 1 & 2 \\ c+1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (c-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & c-4 \\ 0 & 1 & 0 \\ c+1 & 2 & -6 \end{vmatrix} = (-1)^4(c-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & c-4 \\ c+1 & -6 \end{vmatrix}$

$= -(c-1)^3(c-2)$

(27) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ -5 & -4 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -6 & 12 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 7 & 1 \\ -5 & -4 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & -6 & 12 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 0 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 11 & 34 & -58 \\ 0 & -10 & -28 & 62 \\ -1 & -3 & -6 & 12 \end{vmatrix} = -(-1)^5 \begin{vmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 11 & 34 & -58 \\ -10 & -28 & 62 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ -10 & -28 & 62 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -29 & -23 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & 32 & 102 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -29 & -23 \\ 32 & 102 \end{vmatrix}$

$= - \begin{vmatrix} -29 & -23 \\ 32 & 102 \end{vmatrix} = 2222$

(28) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ -3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 5 & 4 \\ -3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & 11 & 4 \\ 8 & 0 & 3 & -14 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 5 & 4 \\ -4 & 1 & 11 & 4 \\ 8 & 3 & -14 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -14 & -8 \\ -1 & -1 & 5 & 4 \\ -5 & 0 & 16 & 8 \\ 5 & 0 & 1 & 13 \end{vmatrix} =$

$-(-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & -14 & -8 \\ -5 & 16 & 8 \\ 5 & 1 & 13 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & -14 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 13 \end{vmatrix} = -2(-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = -210$

(29) $\begin{vmatrix}1&0&4&3&0\\3&4&0&2&0\\0&1&0&0&2\\6&0&2&5&0\\0&0&1&0&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&4&3&0\\3&4&0&2&-8\\0&1&0&0&0\\6&0&2&5&0\\0&0&1&0&3\end{vmatrix}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&4&3&0\\3&0&2&-8\\6&2&5&0\\0&1&0&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&4&3&-12\\3&0&2&-8\\6&2&5&-6\\0&1&0&0\end{vmatrix}=-(-1)^6\begin{vmatrix}1&3&-12\\3&2&-8\\6&5&-6\end{vmatrix}=$

$-\begin{vmatrix}1&0&0\\3&-7&28\\6&-13&66\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-7&28\\-13&66\end{vmatrix}=98$

(30) $\begin{vmatrix}1&0&0&-1&0\\0&-1&0&0&1\\0&0&1&0&-1\\1&0&-1&0&0\\0&1&0&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&1\\0&0&1&0&-1\\-1&0&-1&1&0\\0&1&0&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&-1&1&0\\1&0&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&-1&1&0\\1&0&-1&1\end{vmatrix}=$

$(-1)\begin{vmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&1&-1\\0&-1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=0$

(31) $\begin{vmatrix}1&0&0&-1&0\\0&-1&0&0&1\\0&0&1&0&-1\\-1&0&-1&0&0\\0&1&0&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&1\\0&0&1&0&-1\\-1&0&-1&-1&0\\0&1&0&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&-1&-1&0\\1&0&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&-1&-1&0\\1&0&-1&1\end{vmatrix}=$

$(-1)\begin{vmatrix}1&0&-1\\-1&-1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&-1&-1\\0&-1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=2$

(32) $\begin{vmatrix}2&3&0&1&0\\0&1&5&0&2\\1&0&0&4&1\\0&7&2&0&0\\2&0&3&4&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&0&1&0\\-2&1&5&-8&0\\1&0&0&4&1\\0&7&2&0&0\\2&0&3&4&0\end{vmatrix}=(-1)^8\begin{vmatrix}2&3&0&1\\-2&1&5&-8\\0&7&2&0\\2&0&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&0&1\\0&4&5&-7\\0&7&2&0\\0&-3&3&3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}4&5&-7\\7&2&0\\-3&3&3\end{vmatrix}=$

$2\begin{vmatrix}-3&12&-7\\7&2&0\\0&0&3\end{vmatrix}=6(-1)^6\begin{vmatrix}-3&12\\7&2\end{vmatrix}=-540$

(33) $\begin{vmatrix}4&2&1&0&0\\2&4&2&1&0\\1&2&4&2&1\\0&1&2&4&2\\0&0&1&2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-6&-15&-8&-4\\0&0&-6&-3&-2\\1&2&4&2&1\\0&1&2&4&2\\0&0&1&2&4\end{vmatrix}=(-1)^4\begin{vmatrix}-6&-15&-8&-4\\0&-6&-3&-2\\1&2&4&2\\0&1&2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-3&16&8\\0&-6&-3&-2\\1&2&4&2\\0&1&2&4\end{vmatrix}=$

$(-1)^4\begin{vmatrix}-3&16&8\\-6&-3&-2\\1&2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&22&20\\0&9&22\\1&2&4\end{vmatrix}=(-1)^4\begin{vmatrix}22&20\\9&22\end{vmatrix}=304$

(34) $\begin{vmatrix}4&-2&1&0&0\\-2&4&-2&1&0\\1&-2&4&-2&1\\0&1&-2&4&-2\\0&0&1&-2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&6&-15&8&-4\\0&0&6&-3&2\\1&-2&4&-2&1\\0&1&-2&4&-2\\0&0&1&-2&4\end{vmatrix}=(-1)^4\begin{vmatrix}6&-15&8&-4\\0&6&-3&2\\1&-2&4&-2\\0&1&-2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-3&-16&8\\0&6&-3&2\\1&-2&4&-2\\0&1&-2&4\end{vmatrix}=$

$$(-1)^4\begin{vmatrix}-3 & -16 & 8\\ 6 & -3 & 2\\ 1 & -2 & 4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & -22 & 20\\ 0 & 9 & -22\\ 1 & -2 & 4\end{vmatrix} = (-1)^4\begin{vmatrix}-22 & 20\\ 9 & -22\end{vmatrix} = 304$$

(35) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1 & 0 & -3\\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -3\\ 2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\end{vmatrix} = -3(-1)^6\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 0\end{vmatrix} =$

$(-3)(-2)(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} = 18$

2. $|A_n|$ を第 1 列について展開すれば

$$|A_n| = \begin{vmatrix}a & b & 0 & \cdots & 0\\ c & a & b & & 0\\ 0 & c & & & \\ \vdots & & & A_{n-2} & \\ 0 & 0 & & & \end{vmatrix} = a|A_{n-1}| + (-1)^3c\begin{vmatrix}b & 0 & \cdots & 0\\ a & & & \\ & & A_{n-2} & \\ 0 & & & \end{vmatrix} = a|A_{n-1}| - bc|A_{n-2}|$$

が得られる. 従って $|A_n|-a|A_{n-1}|+bc|A_{n-2}|=0$ だから $x^2-ax+bc=0$ の解を α, β とおけば $bc=\alpha\beta$, $a=\alpha+\beta$ より $|A_n|-(\alpha+\beta)|A_{n-1}|+\alpha\beta|A_{n-2}|=0$ である. この等式の左辺の項を移項して, 次の等式を得る.

$$|A_n|-\alpha|A_{n-1}| = \beta(|A_{n-1}|-\alpha|A_{n-2}|)\ \cdots(i) \qquad |A_n|-\beta|A_{n-1}| = \alpha(|A_{n-1}|-\beta|A_{n-2}|)\ \cdots(ii)$$

$|A_1|=a$, $|A_2|=a^2-bc$ だから, (i) より, 数列 $\{|A_{n+1}|-\alpha|A_n|\}$ は初項 $a^2-bc-\alpha a$, 公比 β の等比数列であり, (ii) より, 数列 $\{|A_{n+1}|-\beta|A_n|\}$ は初項 $a^2-bc-\beta a$, 公比 α の等比数列である. 従って, 次の等式が成り立つ.

$$|A_{n+1}|-\alpha|A_n| = \beta^{n-1}(a^2-bc-\alpha a)\ \cdots(iii) \qquad |A_{n+1}|-\beta|A_n| = \alpha^{n-1}(a^2-bc-\beta a)\ \cdots(iv)$$

$a^2\neq 4bc$ の場合, $\alpha\neq\beta$ だから (iii) から (iv) を辺々引いて, 両辺を $\beta-\alpha$ で割れば, $|A_n|$ は次の等式で与えられる.

$$|A_n| = \frac{\beta^{n-1}(a^2-bc-\alpha a)-\alpha^{n-1}(a^2-bc-\beta a)}{\beta-\alpha}\ \cdots(v)$$

(1) $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}$ だから (v) より

$$\begin{aligned}|A_n| &= \frac{1}{\sqrt{3}i}\left(\alpha\beta^{n-1}-\alpha^{n-1}\beta\right) = \frac{1}{\sqrt{3}i}\left(\beta^{n-2}-\alpha^{n-2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}i}\left(\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n-2}-\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n-2}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}i}\left(\left(\cos\frac{(n-2)\pi}{3}-i\sin\frac{(n-2)\pi}{3}\right)-\left(\cos\frac{(n-2)\pi}{3}+i\sin\frac{(n-2)\pi}{3}\right)\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{(n-2)\pi}{3}\end{aligned}$$

だから, n を 6 で割った余りが 0, 1, 2, 3, 4, 5 のとき $|A_n|$ の値は, それぞれ 1, 1, 0, -1, -1, 0 である.

(2) $\alpha=-b$, $\beta=b$ だから (v) より $|A_n| = \dfrac{b^n+(-b)^n}{2}$. 故に n が奇数ならば $|A_n|=0$, n が偶数ならば $|A_n|=b^n$.

(3) $\alpha=bi$, $\beta=-bi$ だから (v) より $|A_n| = \dfrac{b}{2i}\left((-bi)^{n-1}-(bi)^{n-1}\right) = \dfrac{b^ni^{n-2}}{2}\left((-1)^{n-1}-1\right)$. 故に n が奇数ならば $|A_n|=0$, n が偶数ならば $|A_n|=-i^{n-2}b^n=(-1)^{\frac{n}{2}}b^n$ である.

(4) $\alpha=\beta=\dfrac{a}{2}$ だから (iii) より $|A_{n+1}|-\dfrac{a}{2}|A_n| = \left(\dfrac{a}{2}\right)^{n+1}$ である. $a\neq 0$ のとき, この両辺を $\left(\dfrac{a}{2}\right)^{n+1}$ で割れば $\left(\dfrac{a}{2}\right)^{-n-1}|A_{n+1}|-\left(\dfrac{a}{2}\right)^{-n}|A_n|=1$ となるため, 数列 $\left\{\left(\dfrac{a}{2}\right)^{-n}|A_n|\right\}$ は初項 2, 公差 1 の等差数列である. 従って $\left(\dfrac{a}{2}\right)^{-n}|A_n|=n+1$ となるため, $|A_n|=(n+1)\left(\dfrac{a}{2}\right)^n$ である.

(5) $\alpha=1,\ \beta=b^2$ だから, $b\neq\pm1$ ならば $\alpha\neq\beta$ である. このとき (v) より $|A_n|=\dfrac{b^{2n+2}-1}{b^2-1}$ であり, $b=\pm1$ ならば $a=2$ だから $a^2=4b^2$ となるため, (3) より $|A_n|=n+1$ である.

第 10 回小テストと解答

行列式 $\begin{vmatrix}-1&1&-2&1\\4&0&1&-2\\-4&4&0&1\\1&0&1&0\end{vmatrix}$ の値を求めよ.

[解答例 1] $\begin{vmatrix}-1&1&-2&1\\4&0&1&-2\\-4&4&0&1\\1&0&1&0\end{vmatrix}\overset{(注1)}{=}\begin{vmatrix}-1&0&0&0\\4&4&-7&2\\-4&0&8&-3\\1&1&-1&1\end{vmatrix}\overset{(注2)}{=}\begin{vmatrix}-1&0&0&0\\4&-1&-7&2\\-4&5&8&-3\\1&1&-1&1\end{vmatrix}\overset{(注3)}{=}\begin{vmatrix}-1&0&0&0\\4&-1&0&0\\-4&5&-27&7\\1&1&-8&3\end{vmatrix}\overset{(注4)}{=}$

$\begin{vmatrix}-1&0&0&0\\4&-1&0&0\\-4&5&1&7\\1&1&4&3\end{vmatrix}\overset{(注5)}{=}\begin{vmatrix}-1&0&0&0\\4&-1&0&0\\-4&5&1&0\\1&1&4&-25\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)\cdot1\cdot(-25)=-25$

(注 1) $(1,1)$ 成分に関して第 1 行の掃き出し.
(注 2) 第 2 列に第 3 列と第 4 列を加える.
(注 3) 第 3 列に第 2 列を -7 倍して加え, 第 4 列に第 2 列を 2 倍して加える.
(注 4) 第 3 列に第 4 列を 4 倍して加える.
(注 5) 第 4 列に第 3 列を -7 倍して加える.

[解答例 2] $\begin{vmatrix}-1&1&-2&1\\4&0&1&-2\\-4&4&0&1\\1&0&1&0\end{vmatrix}\overset{(注1)}{=}-\begin{vmatrix}-1&1&1&-2\\4&0&-2&1\\-4&4&1&0\\1&0&0&1\end{vmatrix}\overset{(注2)}{=}-\begin{vmatrix}1&1&1&-2\\3&0&-2&1\\-4&4&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}\overset{(注3)}{=}-\begin{vmatrix}5&-3&1&-2\\-5&8&-2&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}\overset{(注4)}{=}$

$-\begin{vmatrix}\frac{25}{8}&-3&1&-2\\0&8&-2&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=-\dfrac{25}{8}\cdot8\cdot1\cdot1=-25$

(注 1) 第 3 列と第 4 列を入れ替える.
(注 2) 第 1 列に第 4 列を -1 倍して加える.
(注 3) 第 1 列に第 3 列を 4 倍して加え, 第 2 列に第 3 列を -4 倍して加える.
(注 4) 第 1 列に第 2 列を $\dfrac{5}{8}$ 倍して加える.

線形数学 I 演習問題　第 11 回　行列式の計算法

1. 次の行列式の値を求めよ．ただし，(25) は n 次正方行列の行列式である．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 1 & b^2 & (c+a)^2 \\ 1 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} a & bc & a^3 \\ b & ca & b^3 \\ c & ab & c^3 \end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$　(6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} 1 & a^2-bc & a^3 \\ 1 & b^2-ca & b^3 \\ 1 & c^2-ab & c^3 \end{vmatrix}$　(8) $\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$　(9) $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

(10) $\begin{vmatrix} a & b-c & c-b \\ a-c & b & c-a \\ a-b & b-a & c \end{vmatrix}$　(11) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$　(12) $\begin{vmatrix} a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ c^2-ab & a^2-bc & b^2-ca \\ b^2-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix}$

(13) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ac \\ ab & (a+c)^2 & bc \\ ac & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}$　(14) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & abc \\ 1 & a & a^2 & bc \\ 1 & b & b^2 & ac \\ 1 & c & c^2 & ab \end{vmatrix}$　(15) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ a & b & -c & -d \\ b & a & -d & -c \end{vmatrix}$　(16) $\begin{vmatrix} a & b & 1 & 0 \\ b & a & b & 1 \\ 1 & b & a & b \\ 0 & 1 & b & a \end{vmatrix}$

(17) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -a & 1 & -2a & 1 \\ b^2 & 0 & a^2 & -2a \\ -ab^2 & b^2 & 0 & a^2 \end{vmatrix}$　(18) $\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$　(19) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$　(20) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$

(21) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}$　(22) $\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix}$　(23) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$　(24) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & t & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$

(25) $\begin{vmatrix} a & b & 1 & 0 & 0 \\ b & a & b & 1 & 0 \\ 1 & b & a & b & 1 \\ 0 & 1 & b & a & b \\ 0 & 0 & 1 & b & a \end{vmatrix}$　(26) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & 1 \\ a & 0 & a+b+p & a+c+q & 1 \\ b & a+b+r & 0 & b+c+s & 1 \\ c & a+c+t & b+c+u & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$　(27) $\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1 & x_0 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1 & x_2 & x_0 & & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_0 & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_0 \end{vmatrix}$

(28) $\begin{vmatrix} a & & & & & & b \\ b & a & & & \text{\huge 0} & & \\ & b & a & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & a & & \\ & \text{\huge 0} & & & b & a & \\ & & & & & b & a \end{vmatrix}$　(29) $\begin{vmatrix} x & -1 & & & & \\ & x & -1 & & \text{\huge 0} & \\ & & x & \ddots & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & -1 & \\ & & & & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$　(30) $\begin{vmatrix} 1 & -x & & & & \\ & 1 & -x & & \text{\huge 0} & \\ & & 1 & \ddots & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & -x & \\ & & & & 1 & -x \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{vmatrix}$

2. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & x & -1 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -10 & x \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} y & 1 & 0 & 0 \\ 1 & y & 1 & 0 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & y \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -z \\ 1 & 0 & -13 & 0 & 37 \end{vmatrix}$ の値がそれぞれ 0, 1, 1 になるような x, y, z の値をすべて求めよ．

3. $A=(a_{ij})$ を $a_{ij}=\begin{cases} a & i=j \\ b & i\neq j \end{cases}$ である n 次正方行列とするとき, A の行列式の値を求めよ.

4. (1) a, b, c, t を定数とし, $\alpha=a+b+c$, $\beta=abc$ とおくとき, 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & 1 \\ a & 0 & a+b+t & a+c+t & 1 \\ b & a+b+t & 0 & b+c+t & 1 \\ c & a+c+t & b+c+t & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ の値を α, β, t を用いて表わせ.

(2) $t=0,1$ のとき, 上の行列式の値がそれぞれ 8, 4 であるする. このとき, α, β の値を求めよ.

5. (1) k を奇数とし r は負でない実数とするとき $A^k=rE_n$ を満たす実数を成分とする n 次正方行列 A の行列式の値を求めよ.
(2) A, B は実数を成分とする 3 次正方行列であるとする. B が正則行列であり, $ABA^2=3B$ が成り立つとき, A の行列式の値を求めよ.
(3) n 次正方行列 A, B が関係式 $ABA=2BAB$ を満たしているとする. B の行列式の値が 3 で A が正則行列のとき, A の行列式の値を求めよ.

6. $\boldsymbol{v}_j$ $(j=1,2,3)$ を $\boldsymbol{R}^3$ の 3 つのベクトルとし, $\boldsymbol{v}_j$ を第 j 列とする 3 次正方行列を P とし, P が逆行列をもつとする. 1 次写像 $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ は $f(\boldsymbol{v}_1)=2\boldsymbol{v}_1$, $f(\boldsymbol{v}_2)=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$, $f(\boldsymbol{v}_3)=2\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2-3\boldsymbol{v}_3$ を満たすとする.
(1) f を表わす行列を A とするとき, $AP=PQ$ を満たす行列 Q を求めよ. (2) A の行列式の値を求めよ.

7. λ_i を (i,i) 成分とする n 次対角行列の余因子行列は対角行列であることを示し, その対角成分を求めよ.

8. A を n 次正方行列とするとき A の余因子行列 $\widetilde{A}$ の行列式の値は $|A|^{n-1}$ であることを示せ.

9. (発展問題) k を整数とする. 正の整数を成分にもつ n 次正方行列で, 行列式の値が k である行列の例を挙げよ.

10. (発展問題) A を n 次正方行列とする. $\operatorname{rank} A=n-1$ ならば $\operatorname{rank}\widetilde{A}\leqq 1$ であることを示せ.

11. (発展問題) A, B を n 次正方行列とする.
(1) A, B がともに正則ならば $\widetilde{AB}=\widetilde{B}\widetilde{A}$ が成り立つことを示せ.
(2) 0 に収束する数列 $\{\alpha_k\}_{k=1,2,\ldots}$ で, すべての k に対して $A+\alpha_k E_n$ が正則になるものが存在することを示せ.
(3) A, B の少なくとも一方が正則でない場合も $\widetilde{AB}=\widetilde{B}\widetilde{A}$ が成り立つことを示せ.
(4) $\operatorname{rank} A=n-1$ ならば $\operatorname{rank}\widetilde{A}=1$ であり, $\operatorname{rank} A\leqq n-2$ ならば $\widetilde{A}=O$ であることを示せ.

第11回の演習問題の解答

1. (1) $\begin{vmatrix}1&a&a^3\\1&b&b^3\\1&c&c^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&a^3\\0&b-a&b^3-a^3\\0&c-a&c^3-a^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b-a&b^3-a^3\\c-a&c^3-a^3\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&a^2+ab+b^2\\1&a^2+ac+c^2\end{vmatrix}=$
$(b-a)(c-a)(c^2-b^2+a(c-b))=(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$

(2) $\begin{vmatrix}1&a^2&a^3\\1&b^2&b^3\\1&c^2&c^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a^2&a^3\\0&b^2-a^2&b^3-a^3\\0&c^2-a^2&c^3-a^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b^2-a^2&b^3-a^3\\c^2-a^2&c^3-a^3\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}a+b&a^2+ab+b^2\\a+c&a^2+ac+c^2\end{vmatrix}=$

$(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}a+b&b^2\\a+c&c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(a(c^2-b^2)+bc(c-b))=(b-a)(c-a)(c-b)(ab+bc+ca)$

(3) $\begin{vmatrix}1&a^2&(b+c)^2\\1&b^2&(c+a)^2\\1&c^2&(a+b)^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a^2&(b+c)^2\\0&b^2-a^2&(c+a)^2-(b+c)^2\\0&c^2-a^2&(a+b)^2-(b+c)^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b^2-a^2&(a+b+2c)(a-b)\\c^2-a^2&(a+2b+c)(a-c)\end{vmatrix}=$

$(a-b)(c-a)\begin{vmatrix}-a-b&a+b+2c\\c+a&-a-2b-c\end{vmatrix}=(a-b)(c-a)\begin{vmatrix}-a-b&2c\\c+a&-2b\end{vmatrix}=2(a-b)(c-a)(b^2-c^2+ab-ac)=$
$2(a-b)(c-a)(b-c)(a+b+c)$

(4) $\begin{vmatrix}a&bc&a^3\\b&ca&b^3\\c&ab&c^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&bc&a^3\\b-a&ca-bc&b^3-a^3\\c-a&ab-bc&c^3-a^3\end{vmatrix}=(a-b)(c-a)\begin{vmatrix}a&bc&a^3\\-1&c&-a^2-ab-b^2\\1&-b&c^2+ca+a^2\end{vmatrix}=$

$(a-b)(c-a)\begin{vmatrix}0&ab+bc&-ac^2-a^2c\\0&c-b&c^2+ca-ab-b^2\\1&-c&c^2+ca+a^2\end{vmatrix}=(-1)^4(a-b)(c-a)\begin{vmatrix}b(c+a)&-ac(c+a)\\c-b&(c-b)(a+b+c)\end{vmatrix}=$

$(a-b)(c-a)(b-c)(c+a)\begin{vmatrix}b&-ac\\-1&-a-b-c\end{vmatrix}=-(a-b)(c-a)(b-c)(c+a)(b^2+(a+c)b+ac)=$
$-(a-b)(c-a)(b-c)(a+b)(b+c)(c+a)$

(5) $\begin{vmatrix}a^2&a&1\\a&a^2&a\\1&a&a^2\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}a^2&a&1\\1&a&1\\1&a&a^2\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}a^2&a&1\\1&a&1\\0&0&a^2-1\end{vmatrix}=a(a^2-1)\begin{vmatrix}a^2&a\\1&a\end{vmatrix}=a^2(a^2-1)^2$

(6) $\begin{vmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+b+c&b&c\\a+b+c&a&b\\a+b+c&c&a\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&b&c\\1&a&b\\1&c&a\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&b&c\\0&a-b&b-c\\0&c-b&a-c\end{vmatrix}=$

$(a+b+c)\begin{vmatrix}a-b&b-c\\c-b&a-c\end{vmatrix}=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(7) $\begin{vmatrix}1&a^2-bc&a^3\\1&b^2-ca&b^3\\1&c^2-ab&c^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a^2-bc&a^3\\0&b^2-a^2+bc-ca&b^3-a^3\\0&c^2-a^2+bc-ab&c^3-a^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(b-a)(a+b+c)&(b-a)(a^2+ab+b^2)\\(c-a)(a+b+c)&(c-a)(a^2+ca+c^2)\end{vmatrix}=$

$(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}a+b+c&a^2+ab+b^2\\a+b+c&a^2+ca+c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(a+b+c)\begin{vmatrix}1&a^2+ab+b^2\\1&a^2+ca+c^2\end{vmatrix}=$
$(b-a)(c-a)(a+b+c)(ca+c^2-ab-b^2)=(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)^2$

(8) $\begin{vmatrix}a+b+c&-c&-b\\-c&a+b+c&-a\\-b&-a&a+b+c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+b&a+b&-a-b\\-c&a+b+c&-a\\-b&-a&a+b+c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+b&0&0\\-c&a+b+2c&-a-c\\-b&-a+b&a+c\end{vmatrix}=$

$(a+b)\begin{vmatrix}a+b+2c&-a-c\\-a+b&a+c\end{vmatrix}=(a+b)\begin{vmatrix}b+c&-a-c\\b+c&a+c\end{vmatrix}=(a+b)(b+c)\begin{vmatrix}1&-a-c\\1&a+c\end{vmatrix}=2(a+b)(b+c)(c+a)$

(9) $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = (b^2+c^2)\begin{vmatrix} c^2+a^2 & bc \\ bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} - ab\begin{vmatrix} ab & bc \\ ca & a^2+b^2 \end{vmatrix} + ca\begin{vmatrix} ab & c^2+a^2 \\ ca & bc \end{vmatrix} =$

$(b^2+c^2)(a^4+a^2b^2+a^2c^2) - ab(a^3b+ab^3-abc^2) + ca(ab^2c-ac^3-a^3c) = 4a^2b^2c^2$

(10) $\begin{vmatrix} a & b-c & c-b \\ a-c & b & c-a \\ a-b & b-a & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+b-c & c-b \\ a-c & a+b-c & c-a \\ a-b & 0 & c \end{vmatrix} = (a+b-c)\begin{vmatrix} a & 1 & c-b \\ a-c & 1 & c-a \\ a-b & 0 & c \end{vmatrix} = (a+b-c)\begin{vmatrix} c & 0 & a-b \\ a-c & 1 & c-a \\ a-b & 0 & c \end{vmatrix}$

$= (-1)^4(a+b-c)\begin{vmatrix} c & a-b \\ a-b & c \end{vmatrix} = (a+b-c)(c^2-(a-b)^2) = (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$

(11) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & b+c+2a & b \\ 2(a+b+c) & a & c+a+2b \end{vmatrix} =$

$2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$

(12) $\begin{vmatrix} a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ c^2-ab & a^2-bc & b^2-ca \\ b^2-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca & b^2-ca & c^2-ab \\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca & a^2-bc & b^2-ca \\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix} =$

$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\begin{vmatrix} 1 & b^2-ca & c^2-ab \\ 1 & a^2-bc & b^2-ca \\ 1 & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix} =$

$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\begin{vmatrix} 1 & b^2-ca & c^2-ab \\ 0 & a^2-b^2-bc+ca & b^2-c^2-ca+ab \\ 0 & c^2-b^2-ab+ca & a^2-c^2+ab-bc \end{vmatrix} =$

$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\begin{vmatrix} (a-b)(a+b+c) & (b-c)(a+b+c) \\ (c-b)(a+b+c) & (a-c)(a+b+c) \end{vmatrix} =$

$(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-b & a-c \end{vmatrix} = (a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^2$

(13) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ac \\ ab & (a+c)^2 & bc \\ ac & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (b+c)^2+ab+ac & ab & ac \\ ab+(a+c)^2+bc & (a+c)^2 & bc \\ ac+bc+(a+b)^2 & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} (b+c)(a+b+c) & ab & ac \\ (a+c)(a+b+c) & (a+c)^2 & bc \\ (a+b)(a+b+c) & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} b+c & ab & ac \\ a+c & (a+c)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} =$

$(a+b+c)\begin{vmatrix} 2a+2b+2c & ab+(a+c)^2+bc & ac+bc+(a+b)^2 \\ a+c & (a+c)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} =$

$(a+b+c)\begin{vmatrix} 2(a+b+c) & (a+c)(a+b+c) & (a+b)(a+b+c) \\ a+c & (a+c)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)^2\begin{vmatrix} 2 & a+c & a+b \\ a+c & (a+c)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} =$

$(a+b+c)^2\begin{vmatrix} 2 & a+c & a+b \\ 0 & \frac{1}{2}(a+c)^2 & -\frac{1}{2}(a^2+ab+ac-bc) \\ 0 & -\frac{1}{2}(a^2+ab+ac-bc) & \frac{1}{2}(a+b)^2 \end{vmatrix} =$

$2(a+b+c)^2\begin{vmatrix} \frac{1}{2}(a+c)^2 & -\frac{1}{2}(a^2+ab+ac-bc) \\ -\frac{1}{2}(a^2+ab+ac-bc) & \frac{1}{2}(a+b)^2 \end{vmatrix} =$

$\frac{1}{2}(a+b+c)^2\left((a+b)^2(a+c)^2-(a^2+ab+ac-bc)^2\right)=2abc(a+b+c)^3$

(14) $\begin{vmatrix}1&1&1&abc\\1&a&a^2&bc\\1&b&b^2&ac\\1&c&c^2&ab\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&abc\\0&a-1&a^2-1&bc-abc\\0&b-1&b^2-1&ac-abc\\0&c-1&c^2-1&ab-abc\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a-1&a^2-1&bc-abc\\b-1&b^2-1&ac-abc\\c-1&c^2-1&ab-abc\end{vmatrix}=$

$(a-1)(b-1)(c-1)\begin{vmatrix}1&a+1&-bc\\1&b+1&-ac\\1&c+1&-ab\end{vmatrix}=(a-1)(b-1)(c-1)\begin{vmatrix}1&a+1&-bc\\0&b-a&bc-ac\\0&c-a&bc-ab\end{vmatrix}=(a-1)(b-1)(c-1)\begin{vmatrix}b-a&bc-ac\\c-a&bc-ab\end{vmatrix}=$

$(a-1)(b-1)(c-1)(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&c\\1&b\end{vmatrix}=(a-1)(b-1)(c-1)(b-a)(c-a)(b-c)$

(15) $\begin{vmatrix}a&b&c&d\\b&a&d&c\\a&b&-c&-d\\b&a&-d&-c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\b&a&d&c\\0&0&-2c&-2d\\b&a&-d&-c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\b&a&d&c\\0&0&-2c&-2d\\0&0&-2d&-2c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b\\b&a\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-2c&-2d\\-2d&-2c\end{vmatrix}=$

$4(a-b)(a+b)(c-d)(c+d)$

(16) $\begin{vmatrix}a&b&1&0\\b&a&b&1\\1&b&a&b\\0&1&b&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&b-ab&1-a^2&-ab\\0&a-b^2&b-ab&1-b^2\\1&b&a&b\\0&1&b&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b-ab&1-a^2&-ab\\a-b^2&b-ab&1-b^2\\1&b&a\end{vmatrix}=$

$\begin{vmatrix}b-ab&ab^2-a^2-b^2+1&a^2b-2ab\\a-b^2&b^3-2ab+b&ab^2-a^2-b^2+1\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}ab^2-a^2-b^2+1&a^2b-2ab\\b^3-2ab+b&ab^2-a^2-b^2+1\end{vmatrix}=$

$b^4-(3a^2-4a+2)b^2+(a^2-1)^2=b^4-2(a^2-1)b^2+(a^2-1)^2-(a^2-4a+4)b^2=(b^2-a^2+1)^2-((a-2)b)^2=$
$(b^2-(a-2)b-a^2+1)(b^2+(a-2)b-a^2+1)$

(17) $\begin{vmatrix}1&0&1&0\\-a&1&-2a&1\\b^2&0&a^2&-2a\\-ab^2&b^2&0&a^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\-a&1&-a&1\\b^2&0&a^2-b^2&-2a\\-ab^2&b^2&ab^2&a^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-a&1\\0&a^2-b^2&-2a\\b^2&ab^2&a^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-a&1\\0&a^2-b^2&-2a\\0&2ab^2&a^2-b^2\end{vmatrix}=$

$\begin{vmatrix}a^2-b^2&-2a\\2ab^2&a^2-b^2\end{vmatrix}=(a^2-b^2)^2+4a^2b^2=(a^2+b^2)^2$

(18) $\begin{vmatrix}0&a^2&b^2&1\\a^2&0&c^2&1\\b^2&c^2&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&a^2&b^2&1\\a^2&-a^2&c^2-a^2&1\\b^2&c^2-b^2&-b^2&1\\1&0&0&0\end{vmatrix}=(-1)^5\begin{vmatrix}a^2&b^2&1\\-a^2&c^2-a^2&1\\c^2-b^2&-b^2&1\end{vmatrix}=$

$-\begin{vmatrix}a^2&b^2&1\\-2a^2&c^2-a^2-b^2&0\\c^2-a^2-b^2&-2b^2&0\end{vmatrix}=-(-1)^4\begin{vmatrix}-2a^2&c^2-a^2-b^2\\c^2-a^2-b^2&-2b^2\end{vmatrix}=(a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2=$
$(a^2+b^2+2ab-c^2)(a^2+b^2-2ab-c^2)=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$

(19) $\begin{vmatrix}1&a&b&c+d\\1&b&c&d+a\\1&c&d&a+b\\1&d&a&b+c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&b&c+d\\1&b&c&d+a\\1&c&d&a+b\\0&d-c&a-d&c-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&b&c+d\\1&b&c&d+a\\0&c-b&d-c&b-d\\0&d-c&a-d&c-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&b&c+d\\0&b-a&c-b&a-c\\0&c-b&d-c&b-d\\0&d-c&a-d&c-a\end{vmatrix}=$

$\begin{vmatrix}b-a&c-b&a-c\\c-b&d-c&b-d\\d-c&a-d&c-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c-a&c-b&a-c\\d-b&d-c&b-d\\a-c&a-d&c-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&c-b&a-c\\0&d-c&b-d\\0&a-d&c-a\end{vmatrix}=0$

(20) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ a+b+c+d & a & d & c \\ a+b+c+d & d & a & b \\ a+b+c+d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & d & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & b & a \end{vmatrix} =$

$(a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & a-b & d-c & c-d \\ 0 & d-b & a-c & b-d \\ 0 & c-b & b-c & a-d \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & d-c & c-d \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & b-c & a-d \end{vmatrix} =$

$(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b+c-d & d-c & c-d \\ 0 & a-c & b-d \\ a-b+c-d & b-c & a-d \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} 1 & d-c & c-d \\ 0 & a-c & b-d \\ 1 & b-c & a-d \end{vmatrix} =$

$(a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} 1 & d-c & c-d \\ 0 & a-c & b-d \\ 0 & b-d & a-c \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} a-c & b-d \\ b-d & a-c \end{vmatrix} =$

$(a+b+c+d)(a-b+c-d)\left((a-c)^2-(b-d)^2\right) = (a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)$

(21) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ a+b+c+d & a & b & c \\ a+b+c+d & d & a & b \\ a+b+c+d & c & d & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & b & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & d & a \end{vmatrix} =$

$(a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & a-b & b-c & c-d \\ 0 & d-b & a-c & b-d \\ 0 & c-b & d-c & a-d \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-d \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & d-c & a-d \end{vmatrix} =$

$(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b+c-d & b-c & c-d \\ 0 & a-c & b-d \\ a-b+c-d & d-c & a-d \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} 1 & b-c & c-d \\ 0 & a-c & b-d \\ 1 & d-c & a-d \end{vmatrix} =$

$(a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} 1 & b-c & c-d \\ 0 & a-c & b-d \\ 0 & d-b & a-c \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} a-c & b-d \\ d-b & a-c \end{vmatrix} =$

$(a+b+c+d)(a-b+c-d)\left((a-c)^2+(b-d)^2\right)$

(22) $A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$ とおけば ${}^tAA = (a^2+b^2+c^2+d^2)E_4$ が成り立つ．この両辺の行列式を考えれば $|{}^tAA| = |{}^tA||A| = |A|^2$, $|(a^2+b^2+c^2+d^2)E_4| = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$ だから $|A|^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$ となるため $|A| = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ である．$A = (a_{ij})$ の行列式の定義

$$|A| = \sum_{[i_1,i_2,i_3,i_4]\text{ は } 1,2,3,4 \text{ の順列}} (-1)^{[i_1,i_2,i_3,i_4]\text{ の反転数}} a_{i_1 1}a_{i_2 2}a_{i_3 3}a_{i_4 4}$$

の右辺で，a^4 の項が現れるのは $[i_1,i_2,i_3,i_4] = [1,2,3,4]$ の場合のみだから，$|A|$ を a, b, c, d の多項式とみれば，$|A|$ の a^4 の係数は $(-1)^{[1,2,3,4]\text{ の反転数}} = (-1)^0 = 1$ である．一方，$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ の a^4 の係数も 1 だから $|A| = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ であることがわかる．

この方法と同じやり方で，$\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ が示される．

(23) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & b & c \\ -d & 0 & f \\ -e & -f & 0 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ -e & -f & 0 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ -d & 0 & f \end{vmatrix} = a(cdf - bef + af^2) -$
$b(-be^2 + aef + cde) + c(adf - bde + cd^2) = af(af - be + cd) - be(af - be + cd) + cd(af - be + cd) = (af - be + cd)^2$

(24) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & t & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2-t & 1 & 1 & 1 \\ a-b(t-1) & b & c & d \\ a^2-b^2(t-1) & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} =$

$-\begin{vmatrix} 2-t & 1 & 1 \\ a-b(t-1) & c & d \\ a^2-b^2(t-1) & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b(t-1)+d(t-2) & c-d & d \\ a^2-b^2(t-1)+d^2 & c^2-d^2 & d^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a-b(t-1)+d(t-2) & c-d \\ a^2-b^2(t-1)+d^2(t-2) & c^2-d^2 \end{vmatrix} =$

$-(c-d)\begin{vmatrix} a-b(t-1)+d(t-2) & 1 \\ a^2-b^2(t-1)+d^2(t-2) & c+d \end{vmatrix} = -(c-d)\begin{vmatrix} a-b(t-1)+d(t-2) & 1 \\ a(a-d)-b(b-d)(t-1) & c \end{vmatrix} =$
$(c-d)((a-c)(a-d)+(b-c)(b-d)(1-t))$

(25) $\begin{vmatrix} a & b & 1 & 0 & 0 \\ b & a & b & 1 & 0 \\ 1 & b & a & b & 1 \\ 0 & 1 & b & a & b \\ 0 & 0 & 1 & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b(1-a) & 1-a^2 & -ab & -a \\ 0 & a-b^2 & b(1-a) & 1-b^2 & -b \\ 1 & b & a & b & 1 \\ 0 & 1 & b & a & b \\ 0 & 0 & 1 & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b(1-a) & 1-a^2 & -ab & -a \\ a-b^2 & b(1-a) & 1-b^2 & -b \\ 1 & b & a & b \\ 0 & 1 & b & a \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 0 & (a-1)(b^2-a-1) & ab(a-2) & b^2(a-1)-a \\ 0 & b(b^2-2a+1) & (a-1)(b^2-a-1) & b(b^2-a-1) \\ 1 & b & a & b \\ 0 & 1 & b & a \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} (a-1)(b^2-a-1) & ab(a-2) & b^2(a-1)-a \\ b(b^2-2a+1) & (a-1)(b^2-a-1) & b(b^2-a-1) \\ 1 & b & a \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} (a-1)(b^2-a-1) & b((1-a)b^2+2a^2-2a-1) & -(1-a)^2b^2+a^3-2a \\ b(b^2-2a+1) & -b^4+(3a-2)b^2-a^2+1 & b((1-a)b^2+2a^2-2a-1) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} b((1-a)b^2+2a^2-2a-1) & -(1-a)^2b^2+a^3-2a \\ -b^4+(3a-2)b^2-a^2+1 & b((1-a)b^2+2a^2-2a-1) \end{vmatrix} =$
$(3a-4)b^4+(-4a^3+6a^2-2a+2)b^2+a(a-1)(a+1)(a^2-2) = ((3a-4)b^2-(a+1)(a^2-2))(b^2-a(a-1))$

(26) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & 1 \\ a & 0 & a+b+p & a+c+q & 1 \\ b & a+b+r & 0 & b+c+s & 1 \\ c & a+c+t & b+c+u & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c & 1 \\ a & -a & a+p & a+q & 0 \\ b & b+r & -b & b+s & 0 \\ c & c+t & c+u & -c & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -a & a+p & a+q \\ b & b+r & -b & b+s \\ c & c+t & c+u & -c \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} a & -2a & p & q \\ b & r & -2b & s \\ c & t & u & -2c \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2a & p & q \\ r & -2b & s \\ t & u & -2c \end{vmatrix} = 8abc - 2asu - 2bqt - 2cpr - pst - qru$

$$
(27)\quad
\begin{vmatrix}
x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\
x_1 & x_0 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\
x_1 & x_2 & x_0 & & x_{n-1} & x_n \\
\vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
x_1 & x_2 & x_3 & & x_0 & x_n \\
x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_0
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_0+x_1+\cdots+x_n \\
x_1 & x_0 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_0+x_1+\cdots+x_n \\
x_1 & x_2 & x_0 & & x_{n-1} & x_0+x_1+\cdots+x_n \\
\vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
x_1 & x_2 & x_3 & & x_0 & x_0+x_1+\cdots+x_n \\
x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_0+x_1+\cdots+x_n
\end{vmatrix}
=
$$

$$
\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)
\begin{vmatrix}
x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & 1 \\
x_1 & x_0 & x_2 & \dots & x_{n-1} & 1 \\
x_1 & x_2 & x_0 & & x_{n-1} & 1 \\
\vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
x_1 & x_2 & x_3 & & x_0 & 1 \\
x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & 1
\end{vmatrix}
=
\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)
\begin{vmatrix}
x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & 1 \\
x_1-x_0 & x_0-x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
x_1-x_0 & x_2-x_1 & x_0-x_2 & & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
x_1-x_0 & x_2-x_1 & x_3-x_2 & & x_0-x_{n-1} & 0 \\
x_1-x_0 & x_2-x_1 & x_3-x_2 & \dots & x_n-x_{n-1} & 0
\end{vmatrix}
=
$$

$$
(-1)^n\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)
\begin{vmatrix}
x_1-x_0 & x_0-x_1 & 0 & \dots & 0 \\
x_1-x_0 & x_2-x_1 & x_0-x_2 & & 0 \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
x_1-x_0 & x_2-x_1 & x_3-x_2 & & x_0-x_{n-1} \\
x_1-x_0 & x_2-x_1 & x_3-x_2 & \dots & x_n-x_{n-1}
\end{vmatrix}
$$

$j=n,n-1,\dots,1$ の順に第 j 列に第 $1,2,\dots,j-1$ 列をすべて加えると

$$
(\text{上式})=(-1)^n\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)
\begin{vmatrix}
x_1-x_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
x_1-x_0 & x_2-x_0 & 0 & & 0 \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
x_1-x_0 & x_2-x_0 & x_3-x_0 & & 0 \\
x_1-x_0 & x_2-x_0 & x_3-x_0 & \dots & x_n-x_0
\end{vmatrix}
=(-1)^n\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)\prod_{i=1}^{n}(x_i-x_0)
$$

$$
(28)\quad
\begin{vmatrix}
a & & & & & & b \\
b & a & & & & & \\
 & b & a & & \text{\huge 0} & & \\
 & & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & \ddots & a & & \\
 & \text{\huge 0} & & & b & a & \\
 & & & & & b & a
\end{vmatrix}
= a
\begin{vmatrix}
a & & & & & \\
b & a & & \text{\huge 0} & & \\
 & \ddots & \ddots & & & \\
 & & \ddots & a & & \\
 & \text{\huge 0} & & b & a & \\
 & & & & b & a
\end{vmatrix}
+(-1)^{n+1}b
\begin{vmatrix}
b & a & & & & \\
 & b & a & & \text{\huge 0} & \\
 & & \ddots & \ddots & & \\
 & & & \ddots & a & \\
 & \text{\huge 0} & & & b & a \\
 & & & & & b
\end{vmatrix}
= a^n-(-b)^n
$$

(29) $D_n(a_0,a_1,\ldots,a_n)=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & x & -1 & & & 0 \\ 0 & & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$ とおくと,

$$D_n(a_0,a_1,\ldots,a_n)=x\begin{vmatrix} x & -1 & & & 0 \\ 0 & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & x & -1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}+(-1)^{n+2}a_0\begin{vmatrix} -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ x & -1 & & & 0 \\ 0 & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & x & -1 \end{vmatrix}=xD_{n-1}(a_1,\ldots,a_n)+a_0$$

$$\begin{aligned}
&=x(xD_{n-2}(a_2,\ldots,a_n)+a_1)+a_0=x^2D_{n-2}(a_2,\ldots,a_n)+a_1x+a_0 \\
&=x^2(xD_{n-3}(a_3,\ldots,a_n)+a_2)+a_1x+a_0=x^3D_{n-3}(a_3,\ldots,a_n)+a_2x^2+a_1x+a_0=\cdots \\
&=x^{n-1}D_1(a_{n-1},a_n)+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0 \\
&=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0
\end{aligned}$$

(30) $F_n(a_0,a_1,\ldots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & -x & & & & \\ & 1 & -x & & \text{\huge 0} & \\ & & 1 & \ddots & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & -x & \\ & & & & 1 & -x \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \end{vmatrix}$ とおくと,

$$F_n(a_0,a_1,\ldots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & -x & & \text{\huge 0} & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & -x & \\ & \text{\huge 0} & & 1 & -x \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \end{vmatrix}+(-1)^na_n\begin{vmatrix} -x & & & & \\ 1 & -x & & \text{\huge 0} & \\ & 1 & \ddots & & \\ & \text{\huge 0} & \ddots & -x & \\ & & & 1 & -x \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&=a_nx^n+F_{n-1}(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1})=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+F_{n-2}(a_0,a_1,\ldots,a_{n-2})=\cdots \\
&=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+F_1(a_0,a_1)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0
\end{aligned}$$

2. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & x & -1 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -10 & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & x & -1 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & x^2-10 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{1+4}(-1)\begin{vmatrix} 0 & x & -1 \\ x & -1 & 0 \\ 9 & 0 & x^2-10 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^2 & 0 & -1 \\ x & -1 & 0 \\ 9 & 0 & x^2-10 \end{vmatrix}=$
$(-1)^{2+2}(-1)\begin{vmatrix} x^2 & -1 \\ 9 & x^2-10 \end{vmatrix}=-(x^4-10x^2+9)=-(x^2-9)(x^2-1)=(x-3)(x+3)(x-1)(x+1)$ より $x=\pm1,\pm3$.

$\begin{vmatrix} y & 1 & 0 & 0 \\ 1 & y & 1 & 0 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1-y^2 & -y & 0 \\ 1 & y & 1 & 0 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & y \end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1-y^2 & -y & 0 \\ 1 & y & 1 \\ 0 & 1 & y \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1-y^2 & -y & 0 \\ 1 & y & 1 \\ -y & 1-y^2 & 0 \end{vmatrix}=$
$-(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1-y^2 & -y \\ -y & 1-y^2 \end{vmatrix}=(1-y^2)^2-(-y)^2=x^4-3y^2+1$ だから $y^4-3y^2+1=1$. 従って $y^4-3y^2=0$ とな

るため $y = 0, \pm\sqrt{3}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -z \\ 1 & 0 & -13 & 0 & 37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & z & -13 & 0 & 37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ z & -13 & 0 & 37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & z^2-13 & 0 & 37 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -z & 0 \\ 0 & 1 & -z \\ z^2-13 & 0 & 37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -z & 0 \\ 0 & 1 & -z \\ 0 & z^3-13z & 37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -z \\ z^3-13z & 37 \end{vmatrix} = z^4 - 13z^2 + 37$$ より $z^4 - 13z^2 + 36 = 0$. この左辺は $(z-2)(z+2)(z-3)(z+3)$ と因数分解されるため $z = \pm 2, \pm 3$.

3. 与えられた n 次の行列式の値を D_n とおき, 第 1 列から第 2 列を引いて, 第 1 列に関して展開する. 次に, 第 2 項の行列式の $(1,1)$ に関して第 1 行を掃き出せば

$$D_n = \begin{vmatrix} a-b & b & b & & \dots & b \\ b-a & a & b & & & \\ 0 & b & a & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & a & b & b \\ & & & & b & a & b \\ 0 & & \dots & & b & b & a \end{vmatrix} = (a-b)D_{n-1} - (b-a) \begin{vmatrix} b & b & & \dots & & b \\ b & a & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b & b \\ & & & b & a & b \\ b & \dots & & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)D_{n-1} + (a-b) \begin{vmatrix} b & 0 & & & \dots & 0 \\ b & a-b & \ddots & & & \vdots \\ b & 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & a-b & 0 & 0 \\ & & & 0 & a-b & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a-b)D_{n-1} + b(a-b)^{n-1}$$

だから D_n に関する漸化式 $D_n = (a-b)D_{n-1} + b(a-b)^{n-1}$ が得られる. $a = b$ の場合は $D_n = 0$ だから, $a \neq b$ と仮定して上式の両辺を $(a-b)^n$ で割り, $x_n = \dfrac{D_n}{(a-b)^n}$ とおけば $x_n = x_{n-1} + \dfrac{b}{a-b}$ が得られるため, $\{x_n\}$ は公差 $\dfrac{b}{a-b}$ の等差数列である. $x_1 = \dfrac{D_1}{a-b} = \dfrac{a}{a-b}$ だから $x_n = \dfrac{a+(n-1)b}{a-b}$ となるため $D_n = (a-b)^n x_n = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$ である.

4. (1) $$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & 1 \\ a & 0 & a+b+t & a+c+t & 1 \\ b & a+b+t & 0 & b+c+t & 1 \\ c & a+c+t & b+c+t & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c & 1 \\ a & -a & a+t & a+t & 0 \\ b & b+t & -b & b+t & 0 \\ c & c+t & c+t & -c & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a & -a & a+t & a+t \\ b & b+t & -b & b+t \\ c & c+t & c+t & -c \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & -2a & t & t \\ b & t & -2b & t \\ c & t & t & -2c \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -2a & t & t \\ t & -2b & t \\ t & t & -2c \end{vmatrix} = 2t^3 - 8abc + 2at^2 + 2bt^2 + 2ct^2 = 2t^3 + 2\alpha t^2 - 8\beta.$$

(2) 仮定から $-8\beta = 8$, $2 + 2\alpha - 8\beta = 4$ だから $\beta = -1$, $\alpha = -3$.

5. (1) $A^k = rE_n$ より $|A|^k = |rE_n| = r^n$. また A の各成分は実数だから $|A|$ は実数である. 従って $|A|$ は方程式 $x^k = r^n$ の実数解で, k は奇数だからこの方程式はただ 1 つの実数解 $r^{\frac{n}{k}}$ をもつため, $|A| = r^{\frac{n}{k}}$ である.

(2) $ABA^2 = 3B$ の両辺の行列式を考えると, $|ABA^2| = |3B|$ であり, (左辺)$= |A||B||A|^2 = |A|^3|B|$, (右辺)$= |3E_3||B| = 27|B|$ だから $|A|^3|B| = 27|B|$. B は正則だから $|B| \neq 0$. また A の各成分は実数だから $|A|$ も実数である. 従って, $|A|^3 = 27$ より $|A| = 3$.
(3) 上と同様にして, $|A|^2|B| = 2^n|A||B|^2$ であり $|A| \neq 0$, $|B| = 3$ だから $|A| = 3{\cdot}2^n$.

6. (1) $AP = A\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A\boldsymbol{v}_1 & A\boldsymbol{v}_2 & A\boldsymbol{v}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f(\boldsymbol{v}_1) & f(\boldsymbol{v}_2) & f(\boldsymbol{v}_3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 & 2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 - 3\boldsymbol{v}_3\end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$ であり, P が逆行列をもつことから, $Q = P^{-1}AP = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$.
(2) $|Q| = \begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -3\end{vmatrix} = 6$. $A = PQP^{-1}$ だから $|A| = |PQP^{-1}| = |P||Q||P^{-1}| = 6|P||P^{-1}| = 6|PP^{-1}| = 6|E_3| = 6$.

7. D の第 i 行を除いた行列の第 i 列は零ベクトルになるため, D_{ij} は $i < j$ ならば第 i 列が, $j < i$ ならば第 $i-1$ 列が零ベクトルである行列である. 従って, $i \neq j$ ならば $|D_{ij}| = 0$ となるため, D の (i,j) 余因子は 0 である. 故に D の余因子行列は対角行列である. D の (i,i) 余因子は $(-1)^{i+i}|D_{ij}| = \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}\lambda_{i+1}\cdots\lambda_n$ であり, これが D の余因子行列の (i,i) 成分である.

8. 教科書の命題 4.15 より $A\widetilde{A} = |A|E_n$ の両辺の行列式を考えると, $|A\widetilde{A}| = |A||\widetilde{A}|$, $||A|E_n| = |A|^n$ より $|A||\widetilde{A}| = |A|^n$ である. A が正則ならば, 教科書の定理 4.16 から $|A| \neq 0$ だから $|A||\widetilde{A}| = |A|^n$ の両辺を $|A|$ で割って $|\widetilde{A}| = |A|^{n-1}$ が得られる. A が正則でない場合, $|A| = 0$ だから $A\widetilde{A} = |A|E_n = O$ である. もし $|\widetilde{A}| \neq 0$ ならば $\widetilde{A}$ の逆行列があるため, $A\widetilde{A} = O$ より, $A = O$ が得られるが, このとき $\widetilde{A} = O$ となるため, $|\widetilde{A}| \neq 0$ と矛盾が生じる. 故に, この場合も $|\widetilde{A}| = 0 = |A|^{n-1}$ である.

9. $T = (t_{ij})$ を $t_{ij} = 1$ $(i \leqq j)$, $t_{ij} = 0$ $(i > j)$ で与えられる n 次上半三角行列とすると, ${}^tTT$ の (i,j)-成分 $\sum_{l=1}^{n} t_{li}t_{lj}$ は, $i \leqq j$ ならば i, $i > j$ ならば j である. 従って, とくに ${}^tTT$ の各成分は正の整数である. また, T, ${}^tT$ はともに対角成分がすべて 1 であるような三角行列だから $|T| = |{}^tT| = 1$ である. k が正の整数の場合, ${}^tTT$ の第 1 列を k 倍したものを A とすれば A の各成分は正の整数で $|A| = k|{}^tTT| = k|{}^tT||T| = k$ である. また, A の第 1 列と第 2 列を入れ替えた行列を B とすれば, B は正の整数を成分にもち, 行列式の値が負の整数 $-k$ であるような行列の例になっている. また, すべての成分が 1 である n 次正方行列は正の整数を成分にもち, 行列式の値が 0 であるような行列の例になっている.

10. $\operatorname{rank} A = n-1$ ならば教科書の定理 3.9 より A は正則ではないため, 定理 4.16 から $|A| = 0$ である. よって, 教科書の命題 4.15 から $A\widetilde{A} = |A|E_n = O$ となり, 一般に $m \times n$ 行列 A と $n \times k$ 行列で B が $AB = O$ を満たせば $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leqq n$ である. この事実を用いれば $n - 1 + \operatorname{rank}\widetilde{A} = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank}\widetilde{A} \leqq n$ となるため $\operatorname{rank}\widetilde{A} \leqq 1$ が得られる.
[上で用いた事実の証明]
$\operatorname{rank} A = r$ とおく. 教科書の定理 3.5 から m 次基本行列の積で表される X と n 次基本行列の積で表される Y で $XAY = F_{mn}(r)$ となるものがある. $AB = O$ より $F_{mn}(r)Y^{-1}B = XAYY^{-1}B = XAB = XO = O$ である. $Y^{-1}B = \begin{pmatrix}B_1\\ B_2\end{pmatrix}$ (B_1 は $r \times k$ 行列, B_2 は $(n-r) \times k$ 行列) とおくと, $F_{mn}(r)Y^{-1}B = F_{mn}(r)\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B_1\\ O\end{pmatrix}$ だから $B_1 = O$ である. よって $Y^{-1}B = \begin{pmatrix}O\\ B_2\end{pmatrix}$ だから, $Y^{-1}B$ は r 行の零である行を含むため, $\operatorname{rank} Y^{-1}B \leqq n-r$

である．教科書の 3 章の演習問題 3.6 の (2) から, $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} Y^{-1}B \leqq n - r = n - \operatorname{rank} A$ となって結果が得られる．

11. (1) 教科書の命題4.15 より $A\widetilde{A} = |A|E_n$, $B\widetilde{B} = |B|E_n$, $AB\widetilde{AB} = |AB|E_n$ であるため, A, B がともに正則ならば, 第1,2,3式の両辺に左からそれぞれ A^{-1}, B^{-1}, $B^{-1}A^{-1}$ をかけて, $\widetilde{A} = |A|A^{-1}$, $\widetilde{B} = |B|B^{-1}$, $\widetilde{AB} = |AB|B^{-1}A^{-1}$ を得る．この最後の式の右辺は定理4.8 と定理2.1 の (4) から $|AB|B^{-1}A^{-1} = |A||B|B^{-1}A^{-1} = \left(|B|B^{-1}\right)\left(|A|A^{-1}\right) = \widetilde{B}\widetilde{A}$ に等しいため, 主張が示された．
(2) 定理4.16 から, 0 に収束する数列 $\{\alpha_k\}_{k=1,2,\dots}$ で, すべての k に対して $|A+\alpha_kE_n| \neq 0$ であるものが存在することを示せばよい．$A = (a_{ij})$ として, x の多項式 $F(x) = |A + xE_n|$ を考える．S' を $1, 2, \dots, n$ の順列 $[i_1, i_2, \dots, i_n]$ すべての集合 S から順列 $[1, 2, \dots, n]$ を除いた集合とし, $A + xE_n$ の (i, j) 成分を a'_{ij} とおくと命題4.5 から

$$\begin{vmatrix} x+a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & x+a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & x+a_{nn} \end{vmatrix} = (x+a_{11})(x+a_{22})\cdots(x+a_{nn}) + \sum_{[i_1,i_2,\dots,i_n]\in S'} (-1)^{N[i_1,i_2,\dots,i_n]} a'_{i_11}a'_{i_22}\cdots a'_{i_nn}$$

であり, $[i_1, i_2, \dots, i_n] \in S'$ ならば, $a'_{i_11}, a'_{i_22}, \dots, a'_{i_nn}$ のうちの少なくとも 1 つは変数 x を含まないため,

$$\sum_{[i_1,i_2,\dots,i_n]\in S'} (-1)^{N[i_1,i_2,\dots,i_n]} a'_{i_11}a'_{i_22}\cdots a'_{i_nn}$$

は x の $n-1$ 次以下の多項式である．よって, 上式から $F(x)$ は x^n の係数が 1 である x の n 次多項式であるため, n 次方程式 $F(x) = 0$ の解は n 個以下である．そこで，α を $F(x) = 0$ の正の実数解があれば, それらのうちで絶対値が最小のものとし, $F(x) = 0$ の正の実数解がなければ, $\alpha = 1$ とおいて, 数列 $\{\alpha_k\}_{k=1,2,\dots}$ を $\alpha_k = \dfrac{\alpha}{k+1}$ で定める．このときすべての $k = 1, 2, \dots$ に対して $|A + \alpha_kE_n| = F(\alpha_k) \neq 0$ である．
(3) 実数 x, y に対して, $A+xE_n$, $B+yE_n$, $(A+xE_n)(B+yE_n)$ の余因子行列をそれぞれ $A(x)$, $B(y)$, $C(x, y)$ とすれば, (1) によって, $A(x)$ が正則である x と $B(y)$ が正則である y に対して $B(y)A(x) = C(x, y)$ が成り立つ．(2) から A, B に対して 0 に収束する数列 $\{\alpha_k\}_{k=1,2,\dots}$, $\{\beta_k\}_{k=1,2,\dots}$ で, すべての k に対して $A+\alpha_kE_n$, $B+\beta_kE_n$ が正則になるものがあるため, $B(\beta_k)A(\alpha_k) = C(\alpha_k, \beta_k)$ がすべての k に対して成り立つ．$A(x)$, $B(y)$, $C(x, y)$ の (i, j) 成分をそれぞれ $a_{ij}(x)$, $b_{ij}(y)$, $c_{ij}(x, y)$ とおくと, これらはそれぞれ x, y, x と y の多項式で, $\{\alpha_k\}_{k=1,2,\dots}$, $\{\beta_k\}_{k=1,2,\dots}$ は 0 に収束するため, $\{a_{ij}(\alpha_k)\}_{k=1,2,\dots}$, $\{b_{ij}(\beta_k)\}_{k=1,2,\dots}$, $\{c_{ij}(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1,2,\dots}$ はそれぞれ $a_{ij}(0)$, $b_{ij}(0)$, $c_{ij}(0, 0)$ に収束する．従って $B(\beta_k)A(\alpha_k) = C(\alpha_k, \beta_k)$ $(k = 1, 2, \dots)$ より, $B(0)A(0) = C(0, 0)$ である．一方 $A(0) = \widetilde{A}$, $B(0) = \widetilde{B}$, $C(0, 0) = \widetilde{AB}$ だから主張が示された．
(4) $\operatorname{rank} A = r$ とおくと, 定理3.3 から, n 次基本行列の積で表される行列 X, Y で $XAY = F_{n,n}(r)$ となるものがある．系3.4 によって, X, Y は正則だから, $A = X^{-1}F_{n,n}(r)Y^{-1}$ となるため, (3) によって $\widetilde{A} = \widetilde{Y^{-1}}\widetilde{F_{n,n}(r)}\widetilde{X^{-1}}$ が成り立つ．問題8の結果と定理4.16 から $\widetilde{Y^{-1}}$ と $\widetilde{X^{-1}}$ は正則行列だから, 系3.6 の (2) によって, $\operatorname{rank} \widetilde{A} = \operatorname{rank} \widetilde{F_{n,n}(r)}$ が成り立つ．ここで, 問題 7 の結果から $\widetilde{F_{n,n}(n-1)}$ は (n, n) 成分のみが 1 で, 他の対角成分はすべて 0 である対角行列であるため, $\operatorname{rank} \widetilde{F_{n,n}(n-1)} = 1$ であり, $r \leqq n-2$ ならば $\widetilde{F_{n,n}(r)}$ は零行列であることに注意すれば, $\operatorname{rank} A = n-1$ ならば $\operatorname{rank} \widetilde{A} = \operatorname{rank} \widetilde{F_{n,n}(n-1)} = 1$ であり, $\operatorname{rank} A \leqq n-2$ ならば $\widetilde{A} = \widetilde{Y^{-1}}O\widetilde{X^{-1}} = O$ である．

第 11 回小テストと解答

行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

[解答例] $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{(注 1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{(注 2)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{(注 3)}{=}$

$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{(注 4)}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{(注 5)}{=} (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{(注 6)}{=} (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$

(注 1) 第 1 行を第 3 行に加える.
(注 2) 第 1 行と第 1 列を取り除く.
(注 3) 第 1 行を第 3 行に加える.
(注 4) 第 1 行と第 1 列を取り除いて -1 倍する.
(注 5) 第 1 行を -1 倍して第 2 行に加える
(注 6) 第 1 行と第 1 列を取り除いて -1 倍する.

第 12 回小テストと解答

(1) A, B はともに n 次正則行列で, 関係式 ${}^tABAB = {}^tBA^2BA$ が成り立つとき A の行列式の値を求めよ.

(2) $\begin{vmatrix} a & -b & p & q \\ b & a & r & s \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & d & -c \end{vmatrix}$ を求めよ.

[解答例] (1) 行列式の性質 $|{}^tA| = |A|$, $|AB| = |A||B|$ を用いれば

$$\left|{}^tABAB\right| = \left|{}^tA\right| |B||A||B| = |A||B||A||B| = |A|^2|B|^2$$
$$\left|{}^tBA^2BA\right| = \left|{}^tB\right| |A^2||B||A| = |B||A|^2|B||A| = |A|^3|B|^2$$

だから, 仮定から $|A|^2|B|^2 = |A|^3|B|^2$ である. A, B はともに正則行列だから, $|A|$ と $|B|$ は 0 ではないため, 上式の両辺を $|A|^2|B|^2$ で割って $|A| = 1$ が得られる.

(2) 行列式の性質 $\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$ を用いれば $\begin{vmatrix} a & -b & p & q \\ b & a & r & s \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & d & -c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ d & -c \end{vmatrix} = -(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

線形数学 I 演習問題　第12回　ベクトルの外積

1. 次の外積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{R}^3$ とするとき, 以下の等式が成り立つことを示せ.

(1) $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z} = -(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})\boldsymbol{y}$

(2) $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}) = D_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$

(3) $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$

(4) $\|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2$

(5) $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times (\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}) = D_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w})\boldsymbol{z} - D_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\boldsymbol{w} = D_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})\boldsymbol{y} - D_3(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w})\boldsymbol{x}$

(6) $D_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2\|\boldsymbol{z}\|^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})^2 - \|\boldsymbol{z}\|^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$

3. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^3$ とする.

(1) $((\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ となるのはどのような場合か答えよ.

(2) $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ となるのはどのような場合か答えよ.

4. $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を零でない 3 次元実ベクトル, 原点を通り $\boldsymbol{x}$ に垂直な平面を P とし, $\boldsymbol{u} = \dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ とおく.

(1) $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{y}$ を位置ベクトルとする点から P に下した垂線の足の位置ベクトルであることを示せ.

(2) 上記の垂線の長さは $|(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u})| = \dfrac{|(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})|}{\|\boldsymbol{x}\|}$ で与えられることを示せ

5. O を $\boldsymbol{R}^3$ の原点とし, A, B, C を $\boldsymbol{R}^3$ の点として, O, A, B, C は同一平面上にはないとする. $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 点 A から, 三点 O, B, C を通る平面に下ろした垂線の足の位置ベクトルを $s\boldsymbol{b} + t\boldsymbol{c}$ $(s, t \in \boldsymbol{R})$ の形に表せ.

(2) 点 A から, 三点 O, B, C を通る平面に下ろした垂線の長さを $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を用いて表せ.

(3) 点 A から, 二点 B, C を通る直線に下ろした垂線の足の位置ベクトルを $s\boldsymbol{b} + t\boldsymbol{c}$ $(s + t = 1)$ の形に表せ.

(4) 点 A から, 二点 B, C を通る直線に下ろした垂線の長さを $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を用いて表せ.

6. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{R}^3$ のベクトルとし, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の一方は他方の実数倍ではないとする. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + s\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} + t\boldsymbol{v}$ によってパラメータ表示される $\boldsymbol{R}^3$ の直線を, それぞれ l, m とする. このとき, l 上の点と m 上の点の最短距離を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を用いて表せ. また, P, Q をそれぞれ, l, m 上の点とするとき, 線分 PQ の長さが最小になるのは $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の両方のベクトルと垂直になる場合に限ることを示せ.

7. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を零でない 3 次元実ベクトルとし, 一方は他方のスカラー倍になっていないとする.

(1) $\boldsymbol{p}$ を「$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直なベクトル」に垂直なベクトルとすれば, $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p}$ を満たす実数 x, y が存在することを示せ.

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が垂直なとき, 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して $\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}) = t\boldsymbol{a}$ を満たす $t \in \boldsymbol{R}$ が存在することを示せ.

第 12 回の演習問題の解答

1. (1) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}7\\1\\-3\end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix}-6\\7\\2\end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

2. (1) $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ の第 j 成分 $(j=1,2,3)$ をそれぞれ x_j, y_j, z_j とする. $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}x_2y_3-x_3y_2\\-x_1y_3+x_3y_1\\x_1y_2-x_2y_1\end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z} &= \begin{pmatrix}(-x_1y_3+x_3y_1)z_3-(x_1y_2-x_2y_1)z_2\\-(x_2y_3-x_3y_2)z_3+(x_1y_2-x_2y_1)z_1\\(x_2y_3-x_3y_2)z_2-(-x_1y_3+x_3y_1)z_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-(y_2z_2+y_3z_3)x_1+(x_2z_2+x_3z_3)y_1\\-(y_1z_1+y_3z_3)x_2+(x_1z_1+x_3z_3)y_2\\-(y_1z_1+y_2z_2)x_3+(x_1z_1+x_2z_2)y_3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-(y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3)x_1+(x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)y_1\\-(y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3)x_2+(x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)y_2\\-(y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3)x_3+(x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})x_1\\-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})x_2\\-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})y_1\\(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})y_2\\(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})y_3\end{pmatrix}\\
&= -(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

(2) $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z}\end{pmatrix}$ とおき, A の (i,j) 成分を a_{ij} とすれば $i=1,2,3$ に対して $a_{i1}=x_i$, $a_{i3}=z_i$ だから, 教科書の定理 4.14 の (1) から

$$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (x_2y_3-x_3y_2)z_1-(x_1y_3-x_3y_1)z_2+(x_1y_2-x_2y_1)z_3 = a_{13}|A_{13}|-a_{23}|A_{23}|+a_{33}|A_{33}| = |A| = D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z}) = x_1(y_2z_3-y_3z_2)-x_2(y_1z_3-y_3z_1)+x_3(y_1z_2-y_2z_1) = a_{11}|A_{11}|-a_{21}|A_{21}|+a_{31}|A_{31}| = |A| = D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$

(3) (2) と (1) の結果から

$$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w}) = ((\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) = (-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\boldsymbol{y},\boldsymbol{w}) = -(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{w})$$

(4) (3) で, とくに $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{y}$ の場合を考えれば,

$$\|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2$$

(5) (1) と (2) の結果から

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w}) &= -(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w})\boldsymbol{y} = -(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w},\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}\\
&= -D_3(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}+D_3(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w},\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = -D_3(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\boldsymbol{x}+D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\boldsymbol{y}.\end{aligned}$$

また $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w}) = -(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w})\times(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})$ だから, 今示した結果から

$$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w}) = -(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{w})\times(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}) = -\left(-D_3(\boldsymbol{w},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{z}+D_3(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{w}\right) = D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{w})\boldsymbol{z}-D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\boldsymbol{w}$$

(6) A を (2) と同様に定めれば ${}^tAA = \begin{pmatrix}\|\boldsymbol{x}\|^2 & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\\(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \|\boldsymbol{y}\|^2 & (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\\(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) & \|\boldsymbol{z}\|^2\end{pmatrix}$ だから, この両辺の行列式を考えて, 右辺の行列の行列式を展開すれば, $D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = |A| = |{}^tA|$ より

$$D_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})^2 = \left|{}^tA\right||A| = \left|{}^tAA\right| = \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2\|\boldsymbol{z}\|^2-\|\boldsymbol{x}\|^2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})^2-\|\boldsymbol{y}\|^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})^2-\|\boldsymbol{z}\|^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2+2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$$

3. (1) 前問の (1) の結果より $((\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{y} = (-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{y} = -(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{y} = -(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ だから $((\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ となるのは $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が垂直であるか, または $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の一方が他方の実数倍である場合である.

(2) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ ならば $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ は成り立つ. $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ であると仮定する. $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ だから, $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ であるため, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の一方は他方の実数倍ではない. このとき, 問題 2 の (1) の結果より $-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ だから $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = 0$ かつ $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 1$ が成り立つ. 逆に $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = 0$ かつ $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 1$ ならば (1) の結果より $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ が成り立つ. 以上から $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ が成り立つのは $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ であるか, または $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ かつ $\boldsymbol{x}$ が単位ベクトルの場合である.

4. (1) $\boldsymbol{y}$ を位置ベクトルとする点から P に下した垂線の足の位置ベクトルを $\boldsymbol{z}$ とすれば $\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{u}$ と平行だから $\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y} = t\boldsymbol{u}$ を満たす実数 t があるため, $\boldsymbol{z}$ は $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}+t\boldsymbol{u}$ と表せる. また, $\boldsymbol{z}$ は P 上のベクトルだから $\boldsymbol{u}$ と垂直であるため $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{u}) = 0$ である. $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = 1$ だから $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}) - t$ となるため, $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{u}) = 0$ より $t = (\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})$ である. 従って $\boldsymbol{z}$ は $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} - (\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$ で与えられる. 一方, 問題 2 の (1) の結果から $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{u} = -(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}+\boldsymbol{y}$ だから $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{y}$ から P に下した垂線の足の位置ベクトル $\boldsymbol{z}$ に一致する.

(2) $\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y} = -(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$ が $\boldsymbol{y}$ を位置ベクトルとする点から P に下した垂線のベクトルだから, その長さは $\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\| = |(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})|\|\boldsymbol{u}\| = |(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})| = \dfrac{|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})|}{\|\boldsymbol{x}\|}$ である.

5. (1) 三点 O, B, C を通る平面を P とする. 仮定から O, B, C は同一直線上にないため, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の一方は他方の実数倍ではない. 従って $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ であり, P は原点を通り, $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ に垂直な平面である. $\boldsymbol{u} = \dfrac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|}$ とおけば, 前問の結果から, A から P に下ろした垂線の足の位置ベクトルは, $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{u}$ で与えられる. 問題 2 の (1), (4) の結果から

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{u} &= \left(\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|}\times\boldsymbol{a}\right)\times\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|} = \frac{1}{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|^2}((\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \\
&= \frac{1}{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|^2}(-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = -\frac{1}{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|^2}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}) \\
&= \frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|^2}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b} - \frac{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|^2}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{c} \\
&= \frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|^2}(-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}) - \frac{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|^2}(-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{c}) \\
&= \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\|\boldsymbol{c}\|^2-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}{\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2}\boldsymbol{b} + \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}{\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2}\boldsymbol{c}
\end{aligned}$$

が得られる.

(2) 点 A から, 三点 O, B, C を通る平面に下ろした垂線の長さは, 前問の (2) の結果から

$$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})| = \frac{|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|}{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\|} = \frac{|D_3(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|}{\sqrt{\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2}}.$$

(3) 点 A から, 二点 B, C を通る直線に下ろした垂線の足の位置ベクトルを $(1-t)\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{c}$ $(t\in\boldsymbol{R})$ とする. $(1-t)\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$ と垂直だから $((1-t)\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}) = 0$ である. 従って $t\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2 = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$ だから $t = \dfrac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}$ である. 故に, 二点 B, C を通る直線に下ろした垂線の足の位置ベクトルは

$$\left(1-\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}\right)\boldsymbol{b} + \frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{c} = \frac{(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b} + \frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{c}.$$

(4) $\dfrac{(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}+\dfrac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}=1$ であることに注意すれば, B, C を通る直線に下ろした垂線のベクトルは,

$$\begin{aligned}\frac{(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b}+\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}&=\frac{(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b}+\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{c}-\left(\frac{(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}+\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}\right)\boldsymbol{a}\\&=\frac{(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\\&=\frac{1}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2}\left((\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\right)\end{aligned}$$

となる. 従って, その長さの 2 乗は

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^4}\left((\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})^2\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|^2+2(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})^2\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\|^2\right)$$

となる. $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ とおけば, 上の値は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^4}\left((\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2\|\boldsymbol{x}\|^2-2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2\|\boldsymbol{y}\|^2\right)\\&\quad=\frac{1}{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^4}\left(\|\boldsymbol{x}\|^4\|\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^4+2\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\|\boldsymbol{x}\|^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2-\|\boldsymbol{y}\|^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2-2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^3\right)\\&\quad=\frac{1}{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^4}\left(\|\boldsymbol{x}\|^2+2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\|\boldsymbol{y}\|^2\right)\left(\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2\right)\\&\quad=\frac{1}{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^4}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2\left(\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2\right)=\frac{\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2}{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2}=\frac{\|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\|^2}{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2}\end{aligned}$$

に等しくなるため, 求める垂線の長さは, 以下の値になる.

$$\frac{\sqrt{\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\|^2-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})^2}}{\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\|}=\frac{\|(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\|}{\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\|}$$

6. $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{u}$ を位置ベクトルとする l 上の点 P と $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{v}$ を位置ベクトルとする m 上の点 Q の距離の 2 乗 $\mathrm{PQ}^2=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2$ を求める. $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+s\boldsymbol{u}-t\boldsymbol{v}$ だから $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ とおけば

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2&=\|\boldsymbol{c}+s\boldsymbol{u}-t\boldsymbol{v}\|^2=s^2\|\boldsymbol{u}\|^2-2st(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+t^2\|\boldsymbol{v}\|^2+2s(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})-2t(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})+\|\boldsymbol{c}\|^2\\&=\left(\|\boldsymbol{u}\|s-\frac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|}t+\frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|}\right)^2+\frac{\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2-(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^2}t^2-2\left((\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})-\frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\right)t+\|\boldsymbol{c}\|^2-\frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\\&=\left(\|\boldsymbol{u}\|s-\frac{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|}t+\frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|}\right)^2+\left(\frac{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{u}\|}t-\frac{\|\boldsymbol{u}\|(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|}+\frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|}\right)^2\\&\quad+\left(\|\boldsymbol{c}\|^2-\frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^2}-\frac{\|\boldsymbol{u}\|^2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})^2}{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2}+2\frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2}-\frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})^2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2}\right)\end{aligned}$$

だから $\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2=\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2-(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2$ であることに注意すれば, 上式から

$$s=\frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2}-\frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2}-\frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|^2}=\frac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-\|\boldsymbol{v}\|^2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2},\qquad t=\frac{\|\boldsymbol{u}\|^2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2}$$

のとき, $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2$ は最小値 $\|\boldsymbol{c}\|^2-\dfrac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^2}-\dfrac{\|\boldsymbol{u}\|^2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})^2}{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2}+2\dfrac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2}-\dfrac{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})^2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2}$ をとる. この値は

$$\frac{\|\boldsymbol{c}\|^2\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})^2\left(\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2+(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2\right)-\|\boldsymbol{u}\|^4(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})^2+2\|\boldsymbol{u}\|^2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2}$$

に等しいが, 上式の分子は $\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2=\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2-(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2$ を用いれば

$$\|\boldsymbol{c}\|^2\|\boldsymbol{u}\|^2\left(\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2-(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2\right)-\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})^2-\|\boldsymbol{u}\|^4(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})^2+2\|\boldsymbol{u}\|^2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$$

となるため, 2 の (6) の結果を用いると $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2$ の最小値は

$$\frac{\|\boldsymbol{c}\|^2\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2-\|\boldsymbol{c}\|^2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2-\|\boldsymbol{v}\|^2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})^2-\|\boldsymbol{u}\|^2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})^2+2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2}=\frac{D_3(\boldsymbol{c},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2}{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2}$$

に等しいことがわかる. $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ の最小値 $\dfrac{|D_3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|}{\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|}$ が l と m の最短距離である.

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-s\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v}$ だから $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の両方のベクトルと垂直になるためには $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-s\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-s\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=0$ が成り立つことが必要十分である. $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-s\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})=-\|\boldsymbol{u}|^2s+(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})t-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{u})$, $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}-s\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=-(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})s+\|\boldsymbol{v}\|^2t-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{v})$ だから $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の両方のベクトルと垂直になるためには $x=s$, $y=t$ が連立 1 次方程式

$$(*)\begin{cases}-\|\boldsymbol{u}|^2x+(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})y=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{u})\\-(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})x+\|\boldsymbol{v}\|^2y=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{v})\end{cases}$$

の解であることが必要十分であるが, 上で求めた $\mathrm{PQ}=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ が最小になる s, t の値はこの連立 1 次方程式 $(*)$ の解である. また $(*)$ の係数行列の行列式の値は $-\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2+(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2=-\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|^2$ で 0 でないため, $(*)$ はただ 1 つの解を持つ. 故に, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の両方のベクトルと垂直になるためには, 線分 PQ の長さが最小になるときに限る.

7. (1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直なベクトルを $\boldsymbol{c}$ (たとえば $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$) とすれば, $\boldsymbol{c}$ に垂直なベクトルの全体は, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を含み, 原点を含む平面であり, この平面上の任意のベクトルは $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ $(x,y\in\boldsymbol{R})$ と表せるため, $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}$ を満たす実数 x, y が存在する.

(2) $\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ の場合は $t=0$ とすれば $\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x})=t\boldsymbol{a}$ が成り立つため $\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x})\neq\boldsymbol{0}$ の場合を考える. このとき, $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}$ は互いに他方のスカラー倍ではないので, 原点を含み $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}$ を含む平面はただ一つに定まる. この平面を P とすれば, $\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}$ の両方に垂直なベクトルだから, P に垂直なベクトルである. 一方 $\boldsymbol{a}$ も $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}$ の両方に垂直なベクトルだから, P に垂直なベクトルである. 従って $\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x})=t\boldsymbol{a}$ を満たす $t\in\boldsymbol{R}$ が存在する.

第 13 回小テストと解答

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & x & -1 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & x \end{vmatrix} = 0$$ を満たす x を求めよ.

[解答例] $\begin{vmatrix} 0 & 0 & x & -1 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & x \end{vmatrix} \overset{(注1)}{=} (-1)^{1+4}(-1) \begin{vmatrix} 0 & x & -1 \\ x & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} x \begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & -1 \\ x & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(注2)}{=}$
$\begin{vmatrix} 0 & x & -1 \\ x & -1 & 0 \\ 4 & -5x & 0 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} \overset{(注3)}{=} (-1)^{1+3}(-1) \begin{vmatrix} x & -1 \\ 4 & -5x \end{vmatrix} - x^4 = -(x^4 - 5x^2 + 4) = -(x^2 - 4)(x^2 - 1)$ より $x = \pm 1, \pm 2$.

(注 1) 第 4 列を余因子展開する.

(注 2) 第 1 項の行列式の第 1 行を -5 倍して第 3 行に加え, 第 2 項の行列式の第 1 列と第 2 列を入れ替える.

(注 3) 第 1 項の行列式の第 1 行と第 3 列を取り除き, 第 2 項の下半三角行列の行列式を展開する.

(注 5) 第 1 行を -1 倍して第 2 行に加える

(注 6) 第 1 行と第 1 列を取り除いて -1 倍する.

第 14 回小テストと解答

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の両方に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{w}$ で, 3 次正方行列 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{pmatrix}$ の行列式の値が正になるものを求めよ.

[解答例] (1) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} (-1)(-1) - 0\cdot 1 \\ 1\cdot 1 - 1(-1) \\ 1\cdot 0 - 1(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{w} = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ とおけば, $\boldsymbol{w}$ は単位ベクトルで, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{pmatrix}$ の行列式の値は $D_3(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) =$
$\dfrac{1}{\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|} (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = 6 > 0$ だから, $\boldsymbol{w} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が求めるベクトルである.

第 15 回小テストと解答

1. 1 次写像 $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ はベクトル $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}$ に写すとするとき, f を表す行列を求めよ.

2. 連立 1 次方程式 $\begin{cases}x+2y-3z-2w=3\\x+3y+z-w=2\\2x+5y-2z-3w=5\end{cases}$ の解を求めよ.

3. $\begin{pmatrix}1&-2&2&-1\\1&-1&-1&2\\2&-3&1&1\\-1&3&-5&4\end{pmatrix}$ の階数を求めよ.

[1 の解答例] $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$, $\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=2\boldsymbol{e}_3$ だから, 仮定から $f(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $f(2\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}$ である. 従って f の線形性から

$$f(\boldsymbol{e}_1)+f(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\cdots(1),\quad f(\boldsymbol{e}_2)+f(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\cdots(2),\quad 2f(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}\cdots(3)$$

(3) から $f(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ であり, これを (2) に代入すれば $f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ が得られ, さらに (1) から $f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ を得る. 故に f を表す行列は $\begin{pmatrix}0&-1&2\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ である.

[2 の解答例] $\begin{pmatrix}1&2&-3&-2&3\\1&3&1&-1&2\\2&5&-2&-3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&-3&-2&3\\0&1&4&1&-1\\0&1&4&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-11&-4&5\\0&1&4&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$
より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x-11z-4w=5\\y+4z+w=-1\end{cases}$ と同値だから, $z=s$, $w=t$ とおけば, 解は $\begin{cases}x=11s+4t+5\\y=-4s-t-1\\z=s\\w=t\end{cases}$ (s, t は任意) で与えられる.

[3 の解答例] $\begin{pmatrix}1&-2&2&-1\\1&-1&-1&2\\2&-3&1&1\\-1&3&-5&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-2&2&-1\\0&1&-3&3\\0&1&-3&3\\0&1&-3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-4&5\\0&1&-3&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ だから, 与えられた行列の階数は 2 である.

線形数学 I 期末試験 ('14.7.28.)

1. 条件 $f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}$ を満たす 1 次写像 $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ を表す行列を求めよ.

2. 行列 $\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\2&-1&-2&1\\1&0&-3&2\\4&-2&0&-1\end{pmatrix}$ の階数を求めよ.

3. 次の連立一次方程式の解を求めよ. (解がない場合は「解なし」と答えよ.)

(1) $\begin{cases}2x & & +z & & =5\\ x & +4y & -z & +w & =0\\ & -y & & -w & =1\\ x & +y & +z & +2w & =1\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x & & +z & & =5\\ x & +4y & -z & +w & =1\\ & -y & & -w & =1\\ x & +y & +z & +2w & =1\end{cases}$

4. 次の行列が正則行列ならば, 逆行列を求めよ. (1) $\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-4&-3\\1&-2&-1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-4&-3\\1&-3&-4\end{pmatrix}$

5. (1) 行列式 $\begin{vmatrix}1&5&0&2\\2&0&3&0\\3&1&2&0\\0&2&0&5\end{vmatrix}$ の値を求めよ. (2) $\begin{vmatrix}1&0&-2&x\\0&x&-1&0\\x&-1&0&0\\0&0&x&-1\end{vmatrix}=0$ となるような x の値をすべて求めよ.

2011 年度　線形数学 I　試験問題

- 答えだけでなく, 途中の式変形や説明も適切に書くこと.
- 解法の指定がある場合は，指定にしたがった解法を用いること．(指定した解法を用いていない場合は点を与えない．)
- 解答用紙は裏も使うこと. 裏を使用しても足りなくなった場合は申し出ること.

$\boxed{1}$ 平面 $3x + 2y + 5z - 1 = 0$ のパラメータ表示を求めよ.

$\boxed{2}$ 次の連立１次方程式を, 拡大係数行列に対する基本変形を用いて 解け. (解がない場合は「解なし」と答えよ.)

$$(1)\ \begin{cases} x + 2y - z + 5w = -2 \\ 3x + y + 7z + 5w = 9 \\ 2x + y + 4z + 4w = 5 \\ -x + y - 5z + w = -7 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x + 3y - z + 7w = 3 \\ -2x - 6y - z - 8w = 1 \\ 3x + 9y + 2z + 11w = 2 \end{cases}$$

$\boxed{3}$ 次の行列が正則かどうか調べ, 正則な場合には逆行列を求めよ. (行列の基本変形を用いること.)

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{4}$ 次の行列式を計算せよ.

$$(1)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} 2 & x & 2 \\ x & 1 & 3 \\ 3 & 4 & x \end{vmatrix}$$

$$(3)\ \left| \begin{pmatrix} 12 & 15 & \sqrt{17} & 3 & 0 & 0 \\ 8 & \sqrt{53} & 7 & 11 & 5 & 0 \\ \sqrt{2} & 9 & 11 & 999 & 11 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 123 & 456 & \sqrt{2011} & 999 & 111 \\ 0 & 1 & \sqrt{2011} & 789 & 111 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right|$$

$\boxed{6}$ 次の問いに答えよ.

(1) A を n 次正方行列，$\boldsymbol{b}$ を n 次元数ベクトルとして，連立１次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える．連立１次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列 $(A\,|\,\boldsymbol{b})$ に行に関する基本変形をおこなって得られる行列を $(B\,|\,\boldsymbol{c})$ とする．このとき，n 次元数ベクトル $\boldsymbol{x}$ について，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$$

が成り立つことを示せ.

(2) n を奇数とする．n 次正方行列 A が ${}^tA = -A$ を満たすとき，$|A| = 0$ を示せ.

(配点：小問１問につき 10 点．部分点は 5 点刻み．)

2011 年度　線形数学 I　試験問題

1. 次の行列式の値を求めよ.

$$(1)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad (2)\ \begin{vmatrix} a & b-a & c-a \\ b & c-b & a-b \\ a+b & c-a & c-b \end{vmatrix} \quad (3)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad (4)\ \begin{vmatrix} 1 & x & x+1 & x-1 \\ x & -1 & x-1 & x+1 \\ x-1 & x+1 & 1 & 0 \\ x+1 & x-1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

2. 次の行列式が正則かどうか判定し, 正則な場合はその逆行列を求めよ. (c は定数)

$$(1)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & c & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 次の連立 1 次方程式を行列の基本変形を用いて解け. (c は定数)

$$(1)\ \begin{cases} x+2y-3z=2 \\ x-y+2z-w=2 \\ 2x+2y-3z-w=5 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x+2y+2z+w=1 \\ 2x+y+2z=1 \\ 3y+2z+2w=c \end{cases}$$

4. 空間上の点 P に P から原点を通る平面 $H: x+y+az=0$ (a は定数) に下ろした垂線の足を対応させる写像を考える. (平面への正射影) この写像は 1 次変換になり, この 1 次変換をを表す行列を A とする.

(1) 点 P をこの変換で移動した点を P′ とし, P, P′ の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'$ とする. $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ (H の法線ベクトル) に対して,

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} - \frac{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}$$

となることを, $\boldsymbol{p}'$ が H 上にあることと, $\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}$ が $\boldsymbol{n}$ の実数倍であることより示せ.
(2) A の行列式 $|A|$ を a を用いて表せ,
(3) A は正則でないことを示せ,

5. $m \times n$ 行列 A, $n \times l$ 行列 B に対して, ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ となることを示せ.
(${}^tA$ は A の転置行列で ${}^tA$ の (i,j) 成分は A の (j,i) 成分である. 証明は, 両辺の (i,j) 成分が等しいことを示す.)

6. 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列 $\left(A \,|\, \boldsymbol{b}\right)$ に対して行に関する基本変形を行って得られる行列を $\left(B \,|\, \boldsymbol{c}\right)$ とする. このとき, 2 つの連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ の解が等しいのはなぜか. 出来る限り詳しく説明せよ.

第１回　全体のイントロ．確認テスト．写像の定義, 平面ベクトル・空間ベクトルの復習．（教科書：1.1, 1.2.1）

第２回　空間内の直線と平面の方程式．（教科書：1.2.2, 1.2.3）

第３回　数ベクトル空間と行列の演算．（教科書：2.1, 2.2）

第４回　正則行列, １次写像．（教科書：2.3, 2.4 p.40 まで）

第５回　１次写像 (続き), １次変換に関する演習．（教科書：2.4 p.41 から, 2.5）

第６回　連立１次方程式と行列, 基本変形と基本行列．（教科書：3.1～3.3）

第７回　掃き出し法, 行列の階数．（教科書：3.4）

第８回　連立１次方程式の演習．（教科書：3.5）

第９回　逆行列の計算．（教科書：3.6）

第１０回　行列式の定義と, 簡単な行列式の計算．（教科書：4.1, 4.2）

第１１回　行列式の形 (展開式)．（教科書：4.3, 4.4）

第１２回　行列式の性質．（教科書：4.5)

第１３回　行列式の展開, 余因子行列.（教科書：4.6）

第１４回　行列式に関する演習．（教科書：4 章全体）

第１５回　試験．（教科書：1～4 章）

第１６回　全体のまとめ．最終演習.（教科書：1～4 章）