線形数学 II 演習問題

目 次

線形数学 II 演習問題　第 1 回　ベクトル空間・部分空間

1. 以下で与えられる $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合 V が $\boldsymbol{R}^3$ の加法とスカラー倍で $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間であるかどうかを, 理由とともに答えよ.

(1) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, xy \geqq 0 \right\}$　(2) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, z \neq 0 \right\}$　(3) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, z = x + 2y \right\}$

(4) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, z = 0 \right\}$　(5) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, xy = 0 \right\}$　(6) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, z^2 = x^2 + y^2 \right\}$

(7) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^3 = y^3 \right\}$　(8) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, xyz \leqq 0 \right\}$　(9) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x, y, z \text{ は整数} \right\}$

(10) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x & y \\ z & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$　(11) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(12) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x & y \\ y & z-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$　(13) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x & y \\ z^2 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(14) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \\ z & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

2. 以下で与えられる $M_n(\boldsymbol{C})$ の部分集合 V が $M_n(\boldsymbol{C})$ の加法とスカラー倍で $M_n(\boldsymbol{C})$ の部分空間であるかどうかを, 理由とともに答えよ. ただし, $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\boldsymbol{C})$ に対し, $\bar{a}_{ji}$ を (i, j) 成分とする $n \times m$ 行列を A^* で表す.

(1) $V = \{A \in M_n(\boldsymbol{C}) \,|\, \mathrm{tr}A = 0\}$　(2) $V = \{A \in M_n(\boldsymbol{C}) \,|\, A^* = A\}$　(3) $V = \{A \in M_n(\boldsymbol{C}) \,|\, A^*A = E_n\}$

(4) $V = \{A \in M_n(\boldsymbol{C}) \,|\, |A| = 0\}$　(5) $V = \{A \in M_n(\boldsymbol{C}) \,|\, A \text{ は上半三角行列}\}$

3. 以下で与えられるベクトル空間 V の部分集合 W が V の加法とスカラー倍で V の部分空間であるかどうかを, 理由とともに答えよ. ただし, 第 j 成分が x_j である $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し, $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}$ とおく.

(1) $V = \boldsymbol{K}^n$, $W = \{\boldsymbol{x} \in V |\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$. $(A \in M_{m,n}(\boldsymbol{K}),\ \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{K}^m)$

(2) $V = \boldsymbol{K}^n$, $W = \{\boldsymbol{x} \in V |\, \|\boldsymbol{x}\| = c\}$. ($c$ は負でない実数)

(3) $V = M_{l,m}(\boldsymbol{K})$, $W = \{X \in V |\, AXB = C\}$. $(A \in M_{k,l}(\boldsymbol{K}),\ B \in M_{m,n}(\boldsymbol{K}),\ C \in M_{k,n}(\boldsymbol{K}))$

(4) $V = M_{m,n}(\boldsymbol{K})$, $W = \{X \in V |\, AX - XB = C\}$. $(A \in M_m(\boldsymbol{K}),\ B \in M_n(\boldsymbol{K}),\ C \in M_{m,n}(\boldsymbol{K}))$

(5) $V = \{f \,|\, f : [a, b] \to \boldsymbol{R} \text{ は連続関数}\}$, $W = \left\{ f \in V \,\middle|\, \int_a^b f(x)p(x)dx = 0 \right\}$. $(a, b \in \boldsymbol{R},\ p \in V)$

(6) $V = \{f \,|\, f : [a, b] \to \boldsymbol{R} \text{ は連続関数}\}$, $W = \{f \in V |\, f(a) = f(b) = 0\}$. $(a, b \in \boldsymbol{R})$

第 1 回の演習問題の解答

1. (1) $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} \in V$ であるが $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \notin V$ だから V は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではない.

(2) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \notin V$ だから V は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではない.

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} \in V$, $r \in \boldsymbol{R}$ とすれば $z = x + 2y$, $w = u + 2v$ だから, $z + w = (x+u) + 2(y+v)$, $rz = rx + 2ry$ であり, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}x+u\\y+v\\z+w\end{pmatrix}$, $r\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}rx\\ry\\rz\end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, r\boldsymbol{x} \in V$ である. 従って V は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間である.

(4) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} \in V$, $r \in \boldsymbol{R}$ とすれば $z = w = 0$ だから, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}x+u\\y+v\\0\end{pmatrix}$, $r\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}rx\\ry\\0\end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, r\boldsymbol{x} \in V$ である. 従って V は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間である.

(5) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in V$ であるが $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \notin V$ だから V は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではない.

(6) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \in V$ であるが $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \notin V$ だから V は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではない.

(7) 実数 x, y が $x^3 = y^3$ を満たせば $(x-y)\left(\left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right) = x^3 - y^3 = 0$ より, $x = y$ だから, $V = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x = y\right\}$ である. 従って $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} \in V$, $r \in \boldsymbol{R}$ とすれば $x = y$, $u = v$ だから, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}x+u\\y+v\\z+w\end{pmatrix}$, $r\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}rx\\ry\\rz\end{pmatrix}$ と $x+u = y+v$, $rx = ry$ より, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, r\boldsymbol{x} \in V$ である. 従って V は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間である.

(8) $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \in V$ であるが $(-1)\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \notin V$ だから V は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではない.

(9) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in V$ であるが $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix} \notin V$ だから V は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではない.

(10) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ が V に属するためには $\begin{pmatrix}x & y\\z & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ が成り立つことが必要十分であるが, これは $x + 2y = z = 0$ が成り立つことと同値である. 従って $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} \in V$, $r \in \boldsymbol{R}$ とすれば $x + 2y = z = 0$,

$u+2v=w=0$ だから, $(x+u)+2(y+v)=z+w=0$, $rx+2ry=rz=0$ であり, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}x+u\\y+v\\z+w\end{pmatrix}$, $r\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}rx\\ry\\rz\end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, r\boldsymbol{x}\in V$ である. 従って V は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間である.

(11) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\notin V$ だから V は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではない.

(12) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\notin V$ だから V は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではない.

(13) $\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}\in V$ であるが $(-1)\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}\notin V$ だから V は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではない.

(14) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3$ が V に属するためには $\begin{pmatrix}x&y\\y&z\\z&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ が成り立つことが必要十分であるが, これは $x-2y=y-2z=z-2x=0$ が成り立つことと同値であり, さらにこれは $x=y=z=0$ であることと同値である. 従って V は $\boldsymbol{R}^3$ の零ベクトルのみからなる集合だから V は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間である.

2. (1) $A,B\in V$, $c\in\boldsymbol{C}$ ならば $\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}B=0$ だから $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B=0+0=0$, $\mathrm{tr}(cA)=c\,\mathrm{tr}A=0$ である. 故に $A+B, cA\in V$ だから V は $M_n(\boldsymbol{C})$ の部分空間である.

(2) $E_n\in V$ であるが, $(iE_n)^*=-iE_n\neq iE_n$ だから, $iE_n\notin V$ である. 故に V は $M_n(\boldsymbol{C})$ の部分空間ではない.

(3) $O_n^*O_n=O_n\neq E_n$ だから $O_n\notin V$ となるため, V は $M_n(\boldsymbol{C})$ の部分空間ではない.

(4) $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{e}_2&\boldsymbol{e}_3&\ldots&\boldsymbol{e}_n\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\ldots&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ とおけば, $|A|=|B|=0$ だから $A,B\in V$ であるが, $A+B=E_n$ だから $|A+B|=1\neq 0$ となるため $A+B\notin V$ である. 故に V は $M_n(\boldsymbol{C})$ の部分空間ではない.

(5) $A=(a_{jk}), B=(b_{jk})\in V$, $c\in\boldsymbol{C}$ ならば $1\leqq k<j\leqq n$ に対し, $a_{jk}=b_{jk}=0$ である. $A+B=(a_{jk}+b_{jk})$, $cA=(ca_{jk})$ であり, $1\leqq k<j\leqq n$ に対し, $a_{jk}+b_{jk}=ca_{jk}=0$ だから $A+B$ と cA も上半三角行列である. 従って $A+B, cA\in V$ となるため, V は $M_n(\boldsymbol{C})$ の部分空間である.

3. (1) $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ の場合, $A\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{b}$ だから $\boldsymbol{0}\notin W$ である. 従って $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ の場合は W は V の部分空間ではない.

$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ の場合, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in W$, $r\in\boldsymbol{K}$ ならば $A\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ だから $A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=A\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$, $A(r\boldsymbol{x})=rA\boldsymbol{x}=r\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ である. 故に $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, r\boldsymbol{x}\in W$ となるため, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ の場合は W は V の部分空間である.

(2) $c\neq 0$ の場合, $\|\boldsymbol{0}\|=0\neq c$ だから $\boldsymbol{0}\notin W$ である. 従って $c\neq 0$ の場合は W は V の部分空間ではない.

$c=0$ の場合, $\|\boldsymbol{x}\|=0$ であることは, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ であることと同値だから, W は V の零ベクトルのみからなる集合になるため W は V の部分空間である.

(3) $C\neq O_{k,n}$ の場合, $AO_{l,m}B=O_{k,n}\neq C$ だから $O_{l,m}\notin W$ である. 従って $C\neq O_{k,n}$ の場合は W は V の部分空間ではない.

$C=O_{k,n}$ の場合, $X,Y\in W$, $r\in\boldsymbol{K}$ ならば $AXB=AYB=O_{k,n}$ だから $A(X+Y)B=AXB+AYB=O_{k,n}+O_{k,n}=O_{k,n}$, $A(rX)B=rAXB=rO_{k,n}=O_{k,n}$ である. 故に $X+Y, rX\in W$ となるため, $C=O_{k,n}$ の場合は W は V の部分空間である.

(4) $C\neq O_{m,n}$ の場合, $AO_{m,n}-O_{m,n}B=O_{m,n}\neq C$ だから $O_{m,n}\notin W$ である. 従って $C\neq O_{m,n}$ の場合は W は V の部分空間ではない.

$C=O_{m,n}$ の場合, $X,Y\in W$, $r\in\boldsymbol{K}$ ならば $AX-XB=AY-YB=O_{m,n}$ だから $A(X+Y)-(X+Y)B=AX-XB+AY-YB=O_{m,n}+O_{m,n}=O_{m,n}$, $A(rX)-(rX)B=r(AX-XB)=rO_{m,n}=O_{m,n}$ である. 故に $X+Y, rX\in W$ となるため, $C=O_{m,n}$ の場合は W は V の部分空間である.

(5) $f, g \in W$, $r \in \boldsymbol{R}$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)p(x)dx = \int_a^b g(x)p(x)dx = 0$ だから

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(x)p(x)dx &= \int_a^b (f(x)+g(x))p(x)dx = \int_a^b (f(x)p(x)+g(x)p(x))dx \\ &= \int_a^b f(x)p(x)dx + \int_a^b g(x)p(x)dx = 0+0=0, \\ \int_a^b (rf)(x)p(x)dx &= \int_a^b rf(x)p(x)dx = r\int_a^b f(x)p(x)dx = r0 = 0\end{aligned}$$

となるため, $f+g, rf \in V$ である. 従って W は V の部分空間である.

(6) $f, g \in W$, $r \in \boldsymbol{R}$ ならば $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$ だから $(f+g)(a) = f(a)+g(a) = 0+0 = 0$, $(f+g)(b) = f(b)+g(b) = 0+0 = 0$, $(rf)(a) = rf(a) = r0 = 0$, $(rf)(b) = rf(b) = r0 = 0$ となるため, $f+g, rf \in V$ である. 従って W は V の部分空間である.

線形数学 II 小テスト　第 1 回　確認テスト

1. 斉次連立 1 次方程式 $\begin{cases} 2x+8y+12z=0 \\ 2x+2y+6z=0 \\ -2x-4y-8z=0 \end{cases}$ の解を求めよ.

[解答例] 係数行列を行に関して基本変形する.

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 12 \\ 2 & 2 & 6 \\ -2 & -4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$ より, 与えられた方程式は

$\begin{cases} 2x+4z=0 \\ -2y-2z=0 \end{cases}$ と同値だから, 求める解は $\begin{cases} x=-2t \\ y=-t \\ z=t \end{cases}$ (t は任意のスカラー) である.

2. 行列式 $\begin{vmatrix} x-3 & -8 & -12 \\ -2 & x-3 & -6 \\ 2 & 4 & x+7 \end{vmatrix}$ の値が 0 になるような x をすべて求めよ.

[解答例] $$\begin{vmatrix} x-3 & -8 & -12 \\ -2 & x-3 & -6 \\ 2 & 4 & x+7 \end{vmatrix} \overset{(注 1)}{=} \begin{vmatrix} x-3 & -8 & -12 \\ -2 & x-3 & -6 \\ 0 & x+1 & x+1 \end{vmatrix} \overset{(注 2)}{=} (x+1)\begin{vmatrix} x-3 & -8 & -12 \\ -2 & x-3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(注 3)}{=}$$

$$(x+1)\begin{vmatrix} x-3 & 4 & -12 \\ -2 & x+3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(注 4)}{=} (x+1)\begin{vmatrix} x-3 & 4 \\ -2 & x+3 \end{vmatrix} = (x+1)(x^2-1) = (x+1)^2(x-1)$$ だから, 与えられた行列式の値が 0 になる x は 1 と -1 である.

(注 1) 第 2 行を第 3 行に加える.
(注 2) 第 3 行の $x+1$ を前に出す.
(注 3) 第 3 列を -1 倍して第 2 列に加える.
(注 4) 第 3 行と第 3 列を取り除く.

線形数学 II 小テスト　第 2 回　ベクトルの 1 次独立性 1

以下で与えられるベクトルが 1 次独立かどうか, 理由を述べて答えよ.

(1) $\boldsymbol{K}^3$ のベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.　(2) $P(\boldsymbol{K})$ のベクトル $x^2 - x,\ x^2 - 1,\ x^2 - x - 2$.

[解答例] (1) $x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ とおけば, この左辺は $\begin{pmatrix} x+z \\ 2x+y+z \\ -x-y \end{pmatrix}$ に等しいため, この関係式は $\begin{cases} x+z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ -x-y=0 \end{cases}$ と同値である. この連立 1 次方程式の係数行列を行に関して基本変形する.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ より, 与えられた方程式は

$\begin{cases} x+z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ と同値である. 故に $x=-1,\ y=z=1$ ならば $x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ が成り立つので, 与えられた 3 つのベクトルは 1 次独立ではない.

(2) $p(x^2-x)+q(x^2-1)+r(x^2-x-2)=0$ とおくと, この左辺は $(p+q+r)x^2-(p+r)x-(q+2r)$ に等しいため, この関係式は $\begin{cases} p+q+r=0 \\ p+r=0 \\ q+2r=0 \end{cases}$ と同値である. 1 つ目と 2 つ目の式から $q=0$ が得られるので, 3 つ目の式から $r=0$. 従って 2 つ目の式から $p=0$ となるため, $p=q=r=0$ である. 故に $x^2-x,\ x^2-1,\ x^2-x-2$ は 1 次独立である.

[別解] $f(x)=x^2-x,\ g(x)=x^2-1,\ h(x)=x^2-x-2$ とおき, $pf(x)+qg(x)+rh(x)=0$ とおく. $f(x)=x(x-1)$, $g(x)=(x-1)(x+1)$, $h(x)=(x+1)(x-2)$ だから $x=0,1,-1$ を $pf(x)+qg(x)+rh(x)=0$ に代入すれば $-q-2r=0,\ r=0,\ 2p=0$ が得られる. 従って $p=q=r=0$ だから $x^2-x,\ x^2-1,\ x^2-x-2$ は 1 次独立である.

線形数学 II 小テスト　第 3 回　ベクトルの 1 次独立性 2

$\boldsymbol{K}^4$ の 4 つのベクトル $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ の中から, 1 次独立なベクトルで, 個数が最大になるものを 1 組選び出せ.

[解答例] $x\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}4\\3\\-3\\1\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}7\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \mathbf{0}$ を満たす x, y, z, w を求める.

$$\begin{pmatrix}1&3&4&7\\2&1&3&0\\-2&-1&-3&0\\1&0&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&3&4&7\\0&-5&-5&-14\\0&5&5&14\\0&-3&-3&-6\end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \begin{pmatrix}1&3&4&7\\0&-5&-5&-14\\0&5&5&14\\0&1&1&2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&4&7\\0&1&1&2\\0&5&5&14\\0&-5&-5&-14\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&2\\0&0&0&4\\0&0&0&-4\end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&2\\0&0&0&1\\0&0&0&-4\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,4)\text{ 成分に関して}}$$

$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, t を任意の定数とすれば $x = -t,\ y = -t,\ z = t,\ w = 0$ である. 従って, $z = 0$ の場合は $x = y = w = 0$ となるため, $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ は 1 次独立である.

$z = t = 1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix}4\\3\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ が成り立つため, 与えられた 4 つのベクトル $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ は 1 次従属である. 故に $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ は与えられた 4 つのベクトルの中で 1 次独立であるベクトルで, 個数が最大のものである.

線形数学 II 演習問題　第 2 回　ベクトル空間の基底と次元

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ とするとき, 以下で与えるベクトル空間の次元と一組の基底を求めよ.

(1) $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^4 | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$　(2) $\{\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{K}^3 | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^4$ がある $\}$

(3) $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^4 | B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$　(4) $\{\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{K}^4 | B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^4$ がある $\}$

(5) $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^4 | C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$　(6) $\{\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{K}^4 | C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^4$ がある $\}$

(7) $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^4 | D\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$　(8) $\{\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{K}^4 | D\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^4$ がある $\}$

2. 以下で与えるベクトル空間 V におけるベクトルの集合 S の中から, 1 次独立である極大な部分集合を 1 つ選ぶことにより, S で生成される V の部分空間の一組の基底を求めよ.

(1) $V = \boldsymbol{K}^4$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$　(2) $V = \boldsymbol{K}^4$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(3) $V = \boldsymbol{K}^4$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(4) $V = M_2(\boldsymbol{K})$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(5) $V = P(\boldsymbol{R})$, $S = \{1 + x + x^2 + x^3,\ 1 + x^2 + 2x^3,\ x - x^3\}$

(6) $V = P(\boldsymbol{R})$, $S = \{1 + x,\ 3 + 3x,\ 3x(1 + x),\ 1 + 2x + x^2,\ 1 + x^3\}$

(7) $C^\infty(0, 2\pi)$ における $\{1,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \sin^3 x,\ \cos^3 x,\ \sin 3x,\ \cos 3x\}$

3. $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V の k 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が 1 次独立であるとき, 次の k 個のベクトルは 1 次独立であるかどうか, 理由とともに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1} + \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_1$

(2) $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1} - \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_1$　(3) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_k$

4. 以下で与えるベクトル空間の次元と一組の基底を求めよ. ただし, (4), (5) の $M_n(\boldsymbol{C})$ は $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とみなす. また, (9) の $\mathrm{Seq}(\boldsymbol{R})$ は実数列全体からなる集合で, 数列の和と実数倍によって $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間になる.

(1) $\{A \in M_n(\boldsymbol{K}) \,|\, \mathrm{tr}\, A = 0\}$　(2) $\{A \in M_n(\boldsymbol{K}) \,|\, {}^tA = A\}$　(3) $\{A \in M_n(\boldsymbol{K}) \,|\, {}^tA = -A\}$

(4) $\{A \in M_n(\boldsymbol{C}) \,|\, A^* = A\}$　(5) $\{A \in M_n(\boldsymbol{C}) \,|\, A^* = -A\}$　(6) $\{A \in M_n(\boldsymbol{K}) \,|\, A$ は上半三角行列 $\}$

(7) $\{A \in M_n(\boldsymbol{K}) \,|\, A$ は対角成分がすべて 0 である上半三角行列 $\}$

(8) すべての自然数 n に対して $f(n) - 3f(n-1) + 3f(n-2) - f(n-3) = 0$ を満たすような x の多項式 $f(x)$ の全体からなる $P_4(\boldsymbol{K})$ の部分空間.

(9) 漸化式 $x_{n+3} = x_{n+2} - x_{n+1} + x_n$ を満たす数列 $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ 全体からなる, $\mathrm{Seq}(\boldsymbol{R})$ の部分空間.

(10) $f(-1) = f(1) = 0$ を満たす多項式 $f(x)$ 全体からなる $P_3(\boldsymbol{R})$ の部分空間.

(11) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ を満たす多項式 $f(x)$ 全体からなる $P_3(\boldsymbol{R})$ の部分空間.

(12) λ を実数の定数とするとき $\lambda f(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (x-t)^2 f(t)dt$ を満たす多項式 $f(x)$ 全体からなる $P_4(\boldsymbol{R})$ の部分空間. (λ の値によって場合分けせよ.)

第 2 回の演習問題の解答

1. $P = A, B, C, D$ とするとき, 連立 1 次方程式 $P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合の解と, 解をもつための $\boldsymbol{b}$ が満たすべき条件を求める.

(1), (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & p \\ 2 & 1 & 1 & 0 & q \\ -3 & 0 & 1 & -1 & r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & p \\ 0 & -3 & -5 & 2 & q-2p \\ 0 & 6 & 10 & -4 & r+3p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2q}{3} - \frac{p}{3} \\ 0 & -3 & -5 & 2 & q-2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-p+2q \end{pmatrix}$ より, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\begin{pmatrix} t-u \\ -5t+2u \\ 3t \\ 3u \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(t, u \in \boldsymbol{K})$ と表される.

$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ は 1 次独立だから, これらが (1) で与えられたベクトル空間の基底になり, その次元は 2 である.

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ が解をもつ条件は $r = p - 2q$ だから $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ p-2q \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $(p, q \in \boldsymbol{K})$ と表される. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は 1 次独立だから, これらが (2) で与えられたベクトル空間の基底になり, その次元は 2 である.

(3), (4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & p \\ 0 & 1 & 0 & 1 & q \\ 1 & 0 & -1 & -2 & r \\ 1 & -1 & 1 & 3 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & p \\ 0 & 1 & 0 & 1 & q \\ 0 & -1 & 0 & -1 & r-p \\ 0 & -2 & 2 & 4 & s-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & p-q \\ 0 & 1 & 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-p+q \\ 0 & 0 & 2 & 6 & s-p+2q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & p-q \\ 0 & 1 & 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 2 & 6 & s-p+2q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-p+q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{p}{2} + \frac{s}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 2 & 6 & s-p+2q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-p+q \end{pmatrix}$ より, $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\begin{pmatrix} t \\ t \\ 3t \\ -t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(t \in \boldsymbol{K})$ と表される. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立だから, これが (3) で与えられたベクトル空間の基底になり, その次元は 1 である.

$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ が解をもつ条件は $r = p - q$ だから $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ p-q \\ s \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(p, q, s \in \boldsymbol{K})$ と表される. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立だから, これらが (3) で与えられたベクトル空間の基底になり, その次元は 3 である.

(5), (6) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & p \\ 0 & 1 & -1 & -1 & q \\ 2 & -1 & 1 & 3 & r \\ 1 & -2 & 2 & 3 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & p \\ 0 & 1 & -1 & -1 & q \\ 0 & 1 & -1 & -1 & r-2p \\ 0 & -1 & 1 & 1 & s-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & p+q \\ 0 & 1 & -1 & -1 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-2p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p+q \end{pmatrix}$ より, $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\begin{pmatrix} -u \\ t+u \\ t \\ u \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t, u \in \boldsymbol{K})$ と表される.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立だから, これらが (5) で与えられたベクトル空間の基底になり, その次元は 2 である.

$C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ が解をもつ条件は $r = 2p+q$ かつ $s = p-q$ だから $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ 2p+q \\ p-q \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$(p, q \in \boldsymbol{K})$ と表される. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立だから, これらが (6) で与えられたベクトル空間の基底になり, その次元は 2 である.

(7), (8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & p \\ 2 & -1 & -1 & -1 & q \\ 1 & -3 & 0 & 1 & r \\ 3 & 1 & -2 & -3 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & p \\ 0 & -5 & 1 & 3 & q-2p \\ 0 & -5 & 1 & 3 & r-p \\ 0 & -5 & 1 & 3 & s-3p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{p}{5}+\frac{2q}{5} \\ 0 & -5 & 1 & 3 & q-2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r+p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p-q \end{pmatrix}$ より, $D\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\begin{pmatrix} 3t+4u \\ t+3u \\ 5t \\ 5u \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ $(t, u \in \boldsymbol{K})$ と表される.

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ は 1 次独立だから, これらが (7) で与えられたベクトル空間の基底になり, その次元は 2 である.

$D\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ が解をもつ条件は $r = -p+q$ かつ $s = p+q$ だから $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ -p+q \\ p+q \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(p, q \in \boldsymbol{K})$ と表される. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立だから, これらが (8) で与えられたベクトル空間の基底になり, その次元は 2 である.

2. (1) $x\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-2\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\6\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ を満たす x, y, z を求める. $\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\-1&0&-2\\2&-2&6\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&1\\0&2&-2\\0&-6&6\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ より, t を任意の定数とすれば $x=-2t,\ y=t,\ z=t$ である. 従って, $z=0$ の場合は $x=y=0$ となるため, $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$ は 1 次独立であるが, $-2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\4\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ が成り立つため, $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\6\end{pmatrix}$ は 1 次従属である. 故に $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$ は S の中で 1 次独立なベクトルからなる極大な集合であり, S で生成される V の部分空間の基底になる.

(2) $x\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\3\\2\\1\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ を満たす x, y, z, w を求める. $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\2&-1&3&-1\\3&1&2&1\\4&-1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-3&3&-3\\0&-2&2&-2\\0&-5&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{を }-\frac{1}{3}\text{ 倍}]{\text{第 2 行}}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&-1&1\\0&-2&2&-2\\0&-5&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&-4&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}}$ $\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&1\\0&0&-4&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&1\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, t を任意の定数とすれば $x=-t,\ y=-t,\ z=t,\ w=2t$ である. 従って, $w=0$ の場合は $x=y=z=0$ となるため, $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\2\\1\end{pmatrix}$ は 1 次独立であるが, $-\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\\2\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ が成り立つため, $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$ は 1 次従属である. 故に $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\2\\1\end{pmatrix}$ は S の中で 1 次独立なベクトルからなる極大な集合であり, S で生成される V の部分空間の基底になる.

(3) $x\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\2\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ を満たす x, y, z, w, u を求める. $\begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\2&-1&1&3&1\\0&1&1&1&0\\-1&2&1&0&1\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\0&-1&-1&-1&1\\0&1&1&1&0\\0&2&2&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\0&-1&-1&-1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 5 列の掃き出し}]{\text{(3,5) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\0&-1&-1&-1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, s, t を任意の定数とすれば $x=-s-2t$, $y=-s-t$, $z=s$, $w=t$, $u=0$ である. 従って, $z=w=0$ の場合は $x=y=u=0$ となるため, $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ は 1 次独立であるが, $-2\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$, $-2\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ が成り立つため, $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ は 1 次従属である. 故に $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ は S の中で 1 次独立なベクトルからなる極大な集合であり, S で生成される V の部分空間の基底になる.

(4) $f:\boldsymbol{R}^4\to M_4(\boldsymbol{R})$ を $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$ で定めれば, f は同型写像であり, この写像によって (1) で与えられたベクトルの集合と (2) で与えられたベクトルの集合は 1 対 1 に対応する. (3) の結果に教科書の命題 6.4 の (1) と問 6.3 を用いると, $\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$ は S の中で 1 次独立なベクトルからなる極大な集合であり, S で生成される V の部分空間の基底になる.

(5) $a(1+x+x^2+x^3)+b(1+x^2+2x^3)+c(x-x^3)=0$ とおくと, $(a+b)+(a+c)x+(a+b)x^2+(a+2b-c)x^3=0$ だから, a, b, c は $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&0\\1&2&-1\end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解である. $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&0\\1&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ より, a, b, c は t を任意の定数として $a=-t$, $b=c=t$ と表される. $c=0$ ならば $a=b=0$ となるため, $1+x+x^2+x^3, 1+x^2+2x^3$ は 1 次独立である. 一方, $-(1+x+x^2+x^3)+(1+x^2+2x^3)+(x-x^3)=0$ だから $1+x+x^2+x^3, 1+x^2+2x^3, x-x^3$ は 1 次従属である. 故に $1+x+x^2+x^3, 1+x^2+2x^3$ は S の中で 1 次独立なベクトルからなる極大な集合であり, S で生成される V の部分空間の基底になる.

(6) $3+3x=3(1+x)$ だから $\{1+x,\ 3x(1+x),\ 1+2x+x^2,\ 1+x^3\}$ の中で 1 次独立なベクトルからなる極大な部分集合を求めればよい．$a(1+x)+3bx(1+x)+c(1+2x+x^2)+d(1+x^3)=0$ とおくと，$(a+c+d)+(a+3b+2c)x+(3b+c)x^2+dx^3=0$ だから，$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ は $\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&3&2&0\\0&3&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解である．$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&3&2&0\\0&3&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&3&1&-1\\0&3&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&3&1&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&3&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より，a,b,c,d は t を任意の定数として $a=-3t, b=-t, c=3t, d=0$ と表される．$c=0$ ならば $a=b=0$ となるため，$1+x, 3x(1+x), x^3+1$ は 1 次独立である．一方，$-3(1+x)-3x(1+x)+3(x^2+2x+1)+0(x^3+1)=0$ だから $1+x,3x(1+x),x^2+2x+1,x^3+1$ は 1 次従属である．故に $1+x,3x(1+x),x^3+1$ は S の中で 1 次独立なベクトルからなる極大な集合であり，S で生成される V の部分空間の基底になる．

(7) $\sin^2 x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x,\ \cos^2 x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x$ だから $1,\sin 2x,\cos 2x,\sin^3 x,\cos^3 x,\sin 3x,\cos 3x$ が 1 次独立であることを示せば，これらは S の中で 1 次独立なベクトルからなる極大な集合であることがいえる．すべての $x\in(0,2\pi)$ に対して，$a_0+a_1\sin 2x+b_1\cos 2x+a_2\sin^3 x+b_2\cos^3 x+a_3\sin 3x+b_3\cos 3x=0$ が成り立つような実数の定数 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3$ が存在したとする．この等式に $x=\dfrac{\pi k}{4}$ $(k=1,2,3,4,5,6,7)$ を代入して，$a_0+a_1+\dfrac{a_2}{\sqrt{8}}+\dfrac{b_2}{\sqrt{8}}+\dfrac{a_3}{\sqrt{8}}-\dfrac{b_3}{\sqrt{8}}=0$, $a_0-b_1+a_2-a_3=0$, $a_0-a_1+\dfrac{a_2}{\sqrt{8}}-\dfrac{b_2}{\sqrt{8}}+\dfrac{a_3}{\sqrt{8}}+\dfrac{b_3}{\sqrt{8}}=0$, $a_0+b_1-b_2-b_3=0$, $a_0+a_1-\dfrac{a_2}{\sqrt{8}}-\dfrac{b_2}{\sqrt{8}}-\dfrac{a_3}{\sqrt{8}}+\dfrac{b_3}{\sqrt{8}}=0$, $a_0-b_1-a_2+a_3=0$, $a_0-a_1-\dfrac{a_2}{\sqrt{8}}+\dfrac{b_2}{\sqrt{8}}+\dfrac{a_3}{\sqrt{8}}+\dfrac{b_3}{\sqrt{8}}=0$ を得る．2 番目と 6 番目の等式より $a_0=b_1$ かつ $a_2=a_3$, 1 番目と 5 番目の等式より $a_1=-a_0$ かつ $b_3=a_2+b_2+a_3$, 3 番目と 7 番目の等式より $a_2=b_2$ かつ $a_0-a_1+\dfrac{a_3+b_3}{\sqrt{8}}=0$ が得られる．従って $a_2=a_3=b_2$, $-a_1=a_0=b_1$, $b_3=3a_2$, $a_0=-\dfrac{a_2}{\sqrt{2}}$ となり，4 番目の等式に代入すれば，$(-\sqrt{2}-4)a_2=0$ が得られるため，$a_2=0$ である．故に $a_0=a_1=a_2=a_3=b_1=b_2=b_3=0$ となるため，$1,\sin 2x,\cos 2x,\sin^3 x,\cos^3 x,\sin 3x,\cos 3x$ は 1 次独立であり，S で生成される V の部分空間の基底になる．

3. (1) $x_1(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)+x_2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)+\cdots+x_i(\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{a}_{i+1})+\cdots+x_{k-1}(\boldsymbol{a}_{k-1}+\boldsymbol{a}_k)+x_k(\boldsymbol{a}_k+\boldsymbol{a}_1)=\boldsymbol{0}$ とおけば，$(x_1+x_k)\boldsymbol{a}_1+(x_1+x_2)\boldsymbol{a}_2+\cdots+(x_{i-1}+x_i)\boldsymbol{a}_i+\cdots+(x_{k-1}+x_k)\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{0}$ であり，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_k$ は 1 次独立だから，$x_1+x_k=x_1+x_2=\cdots=x_{i-1}+x_i=\cdots=x_{k-1}+x_k=0$ である．従って $x_1=-x_k$ であり，$x_i=-x_{i-1}$ が $i=2,3,\dots,k$ に対して成り立つため，$x_i=(-1)^{i-1}x_1$ $(i=2,3,\dots,k)$ とくに $x_k=(-1)^{k-1}x_1$ だから，$x_1=-x_k$ に代入すれば $x_1=(-1)^k x_1$ が得られる．故に，k が奇数ならば $x_1=-x_1$ となるため $x_1=0$ であり，このことと $x_i=(-1)^{i-1}x_1$ より，$i=1,2,\dots,k$ に対して $x_i=0$ だから，$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\dots,\boldsymbol{a}_{k-1}+\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_k+\boldsymbol{a}_1$ は 1 次独立である．k が偶数ならば，$x_i=(-1)^{i-1}$ のとき，$x_1(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)+x_2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)+\cdots+x_{k-1}(\boldsymbol{a}_{k-1}+\boldsymbol{a}_k)+x_k(\boldsymbol{a}_k+\boldsymbol{a}_1)=\boldsymbol{0}$ が成り立つため，$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\dots,\boldsymbol{a}_{k-1}+\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_k+\boldsymbol{a}_1$ は 1 次従属である．

(2) $(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2)+(\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3)+\cdots+(\boldsymbol{a}_{k-1}-\boldsymbol{a}_k)+(\boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{a}_1)=\boldsymbol{0}$ だから $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3,\dots,\boldsymbol{a}_{k-1}-\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{a}_1$ は 1 次従属である．

(3) $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)+\cdots+x_k(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_k)=\boldsymbol{0}$ とおけば

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)\boldsymbol{a}_1+(x_2+x_3+\cdots+x_k)\boldsymbol{a}_2+\cdots+(x_i+x_{i+1}+\cdots+x_k)\boldsymbol{a}_i+\cdots+x_k\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{0}$$

だから $x_1+x_2+\cdots+x_k=x_2+x_3+\cdots+x_k=\cdots=x_i+x_{i+1}+\cdots+x_k=\cdots=x_k=0$ である．この等式から，i による帰納法で $x_{k-i+1}=0$ が $i=1,2,\dots,k$ に対して成り立つことが示されるため，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_k$

は 1 次独立である.

4. (i,j) 成分が 1 で, (i,j) 成分以外の成分がすべて 0 である n 次正方行列を $E_n(i,j)$ で表すことにする.

(1) $A=\big(a_{ij}\big)\in M_n(\boldsymbol{K})$ が $\operatorname{tr}A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}=0$ を満たすとき, $a_{nn}=-\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_{ii}$ だから

$$A=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}E_n(i,j)=\sum_{i\neq j}a_{ij}E_n(i,j)+\sum_{i=1}^{n-1}a_{ii}E_n(i,i)+a_{nn}E_n(n,n)=\sum_{i\neq j}a_{ij}E_n(i,j)+\sum_{i=1}^{n-1}a_{ii}(E_n(i,i)-E_n(n,n))$$

が成り立つ. さらに $i\neq j$ ならば $\operatorname{tr}E_n(i,j)=\operatorname{tr}(E_n(i,i)-E_n(n,n))=0$ であり, $E_n(i,j)$ $(i,j=1,2,\ldots,n,\ i\neq j)$, $E_n(i,i)-E_n(n,n)$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$ は 1 次独立だから, これらは与えられたベクトル空間の基底になる. 従って, 与えられたベクトル空間の次元は $n(n-1)+n-1=n^2-1$ である.

(2) $A=\big(a_{ij}\big)\in M_n(\boldsymbol{K})$ が ${}^tA=A$ を満たすためには $1\leqq i<j\leqq n$ に対し, $a_{ji}=a_{ij}$ であることが必要十分である. このとき,

$$A=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}E_n(i,j)=\sum_{i\neq j}a_{ij}E_n(i,j)+\sum_{i=1}^{n}a_{ii}E_n(i,i)=\sum_{i<j}a_{ij}(E_n(i,j)+E_n(j,i))+\sum_{i=1}^{n}a_{ii}E_n(i,i)$$

であり, ${}^t(E_n(i,j)+E_n(j,i))=E_n(i,j)+E_n(j,i)$, ${}^t(E_n(i,i)=E_n(i,i)$ が成り立つ. さらに $E_n(i,j)+E_n(j,i)$ $(1\leqq i<j\leqq n)$, $E_n(i,i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ は 1 次独立だから, これらは与えられたベクトル空間の基底になる. 従って, 与えられたベクトル空間の次元は ${}_nC_2+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ である.

(3) $A=\big(a_{ij}\big)\in M_n(\boldsymbol{K})$ が ${}^tA=-A$ を満たすためには $1\leqq i<j\leqq n$ に対し, $a_{ji}=-a_{ij}$ かつ $i=1,2,\ldots,n$ に対して $a_{ii}=0$ であることが必要十分である. このとき,

$$A=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}E_n(i,j)=\sum_{i\neq j}a_{ij}E_n(i,j)=\sum_{i<j}a_{ij}(E_n(i,j)-E_n(j,i))$$

であり, ${}^t(E_n(i,j)-E_n(j,i))=-(E_n(i,j)+E_n(j,i))$ が成り立つ. さらに $E_n(i,j)-E_n(j,i)$ $(1\leqq i<j\leqq n)$ は 1 次独立だから, これらは与えられたベクトル空間の基底になる. 従って, 与えられたベクトル空間の次元は ${}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ である.

(4) $A=\big(a_{jk}+ib_{jk}\big)\in M_n(\boldsymbol{C})$ $(a_{jk},b_{jk}\in\boldsymbol{R})$ が $A^*=A$ を満たすためには $1\leqq j<k\leqq n$ に対し, $a_{ji}=a_{jk}$, $b_{ji}=-bjk$ かつ $j=1,2,\ldots,n$ に対して $b_{jj}=0$ であることが必要十分である. このとき,

$$\begin{aligned}A&=\sum_{j,k=1}^{n}(a_{jk}+b_{jk}i)E_n(j,k)=\sum_{j\neq k}(a_{jk}+b_{jk}i)E_n(j,k)+\sum_{j=1}^{n}a_{jj}E_n(j,j)\\&=\sum_{i<j}a_{jk}(E_n(j,k)+E_n(k,j))+\sum_{i<j}b_{jk}i(E_n(j,k)-E_n(k,j))+\sum_{j=1}^{n}a_{jj}E_n(j,j)\end{aligned}$$

であり, $(E_n(j,k)+E_n(k,j))^*=E_n(j,k)+E_n(k,j)$, $(i(E_n(j,k)-E_n(k,j)))^*=i(E_n(j,k)-E_n(k,j))$, $E_n(j,j)^*=E_n(j,j)$ が成り立つ. さらに $E_n(j,k)+E_n(k,j)$, $i(E_n(j,k)-E_n(k,j))$ $(1\leqq i<j\leqq n)$, $E_n(j,j)$ $(j=1,2,\ldots,n)$ は $\boldsymbol{R}$ 上 1 次独立だから, これらは与えられたベクトル空間の基底になる. 従って, 与えられたベクトル空間の次元は ${}_nC_2+{}_nC_2+n=n^2$ である.

(5) $A=\big(a_{jk}+ib_{jk}\big)\in M_n(\boldsymbol{C})$ $(a_{jk},b_{jk}\in\boldsymbol{R})$ が $A^*=A$ を満たすためには $1\leqq j<k\leqq n$ に対し, $a_{ji}=-a_{jk}$, $b_{ji}=b_{jk}$ かつ $j=1,2,\ldots,n$ に対して $a_{jj}=0$ であることが必要十分である. このとき,

$$\begin{aligned}A&=\sum_{j,k=1}^{n}(a_{jk}+b_{jk}i)E_n(j,k)=\sum_{j\neq k}(a_{jk}+b_{jk}i)E_n(j,k)+\sum_{j=1}^{n}b_{jj}iE_n(j,j)\\&=\sum_{i<j}a_{jk}(E_n(j,k)-E_n(k,j))+\sum_{i<j}b_{jk}i(E_n(j,k)+E_n(k,j))+\sum_{j=1}^{n}b_{jj}iE_n(j,j)\end{aligned}$$

であり, $(E_n(j,k)-E_n(k,j))^* = -(E_n(j,k)-E_n(k,j))$, $(i(E_n(j,k)+E_n(k,j)))^* = -i(E_n(j,k)+E_n(k,j))$, $(iE_n(j,j))^* = -iE_n(j,j)$ が成り立つ. さらに $E_n(j,k)-E_n(k,j)$, $i(E_n(j,k)+E_n(k,j))$ $(1 \leqq i < j \leqq n)$, $iE_n(j,j)$ $(j=1,2,\dots,n)$ は $\boldsymbol{R}$ 上 1 次独立だから, これらは与えられたベクトル空間の基底になる. 従って, 与えられたベクトル空間の次元は ${}_nC_2 + {}_nC_2 + n = n^2$ である.

(6) $A = \big(a_{ij}\big) \in M_n(\boldsymbol{K})$ が上半三角行列であるためには $1 \leqq j < i \leqq n$ に対し, $a_{ij} = 0$ であることが必要十分である. このとき, $A = \sum\limits_{i \leqq j} a_{ij}E_n(i,j)$ であり, $E_n(i,j)$ $(1 \leqq i \leqq j \leqq n)$ は上半三角行列であり, これらは 1 次独立だから, 与えられたベクトル空間の基底になる. 従って, 与えられたベクトル空間の次元は ${}_nC_2 + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ である.

(7) $A = \big(a_{ij}\big) \in M_n(\boldsymbol{K})$ がは対角成分がすべて 0 である上半三角行列であるためには $1 \leqq j \leqq i \leqq n$ に対し, $a_{ij} = 0$ であることが必要十分である. このとき, $A = \sum\limits_{i<j} a_{ij}E_n(i,j)$ であり, $E_n(i,j)$ $(1 \leqq i < j \leqq n)$ は対角成分がすべて 0 である上半三角行列であり, これらは 1 次独立だから, 与えられたベクトル空間の基底になる. 従って, 与えられたベクトル空間の次元は ${}_nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ である.

(8) $g(x) = f(x) - f(x-1)$ とおくと, $f(n) - 3f(n-1) + 3f(n-2) - f(n-3) = f(n) - f(n-1) - 2(f(n-1) - f(n-2)) + f(n-2) - f(n-3) = g(n) - 2g(n-1) + g(n-2)$ だから仮定から $g(n) - 2g(n-1) + g(n-2) = 0$ である. 従って, $g(n) - g(n-1) = g(n-1) - g(n-2)$ がすべての自然数 n に対して成り立つため, 数列 $g(0), g(1), \dots$ は等差数列である. $d = g(1) - g(0)$ とおくと, $f(n) - f(n-1) = g(n) = g(0) + dn$ となるため, $f(n) = f(0) + \sum\limits_{k=1}^{n}(f(k) - f(k-1)) = f(0) + \sum\limits_{k=1}^{n}(g(0) + dn) = f(0) + g(0)n + \frac{d}{2}n(n-1)$ が任意の自然数 n に対して成り立つ. そこで $a = \frac{d}{2}$, $b = g(0) - \frac{d}{2}$, $c = f(0)$ とおいて, x の多項式 $F(x) = f(x) - (ax^2 + bx + c)$ を考えると, すべての自然数 n に対して $F(n) = 0$ となるため, 教科書の系 4.20 によって, $F(x) = 0$ である. 故に $f(x)$ は x の 2 次以下の多項式である. 逆に $f(x)$ が x の 2 次以下の多項式のとき, $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおけば $f(n) - 3f(n-1) + 3f(n-2) - f(n-3) = an^2 + bn + c - 3(a(n-1)^2 + b(n-1) + c) + 3(a(n-2)^2 + b(n-2) + c) - (a(n-3)^2 + b(n-3) + c) = 0$ である. よって, すべての自然数 n に対して $f(n) - 3f(n-1) + 3f(n-2) - f(n-3) = 0$ を満たすような x の多項式 $f(x)$ の全体からなる $P_4(\boldsymbol{K})$ の部分空間は $P_2(\boldsymbol{K})$ に一致するため, $1, x, x^2$ が基底で, その次元は 3 である.

(9) 数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ が漸化式 $x_{n+3} = x_{n+2} - x_{n+1} + x_n$ を満たすとし, $y_n = x_{n+1} - x_n$ によって数列 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ を定める. このとき, $y_{n+2} = x_{n+3} - x_{n+2} = -x_{n+1} + x_n = -y_n$ が $n = 0,1,2,\dots$ に対して成り立つため, 数列 $\{y_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{y_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ はともに公比 -1 の等比数列である. 従って $y_{2n} = (-1)^n(x_1 - x_0)$, $y_{2n+1} = (-1)^n(x_2 - x_1)$ が $n = 0,1,2,\dots$ に対して成り立つ. $x_n = x_0 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} y_k$ だから

$$
\begin{aligned}
x_{2m} &= x_0 + \sum_{k=0}^{2m-1} y_k = x_0 + \sum_{l=0}^{m-1} y_{2l} + \sum_{l=0}^{m-1} y_{2l+1} = x_0 + \sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l(x_1 - x_0) + \sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l(x_2 - x_1) \\
&= x_0 + \frac{1}{2}(1 - (-1)^m)(x_2 - x_0) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^m)x_0 + \frac{1}{2}(1 - (-1)^m)x_2 = \begin{cases} x_0 & m \text{ は偶数} \\ x_2 & m \text{ は奇数} \end{cases} \\
x_{2m+1} &= x_0 + \sum_{k=0}^{2m} y_k = x_0 + \sum_{l=0}^{m} y_{2l} + \sum_{l=0}^{m-1} y_{2l+1} = x_0 + \sum_{l=0}^{m}(-1)^l(x_1 - x_0) + \sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l(x_2 - x_1) \\
&= x_0 + \frac{1}{2}(1 - (-1)^m)(x_2 - x_0) + (-1)^m(x_1 - x_0) = \frac{1}{2}(1 - (-1)^m)x_0 + \frac{1}{2}(1 - (-1)^m)x_2 + (-1)^m x_1 \\
&= \begin{cases} x_1 & m \text{ は偶数} \\ x_0 - x_1 + x_2 & m \text{ は奇数} \end{cases}
\end{aligned}
$$

が得られる. そこで, 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ を, 0 以上の整数 k と $r = 0,1,2,3$ に対し

$$
a_{4k+r} = \begin{cases} 1 & r = 0,3 \\ 0 & r = 1,2 \end{cases} \qquad b_{4k+r} = \begin{cases} (-1)^{\frac{r+1}{2}} & r = 1,3 \\ 0 & r = 0,2 \end{cases} \qquad c_{4k+r} = \begin{cases} 1 & r = 2,3 \\ 0 & r = 0,1 \end{cases}
$$

によって定めれば, これらは漸化式 $x_{n+3} = x_{n+2} - x_{n+1} + x_n$ を満たし, この漸化式を満たす任意の数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し, $x_n = x_0a_n + x_1b_n + x_2c_n$ が 0 以上の整数 n について成り立つ. 従って, ベクトル空間 $\mathrm{Seq}(\boldsymbol{R})$ において, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = x_0\{a_n\}_{n=0}^{\infty} + x_1\{b_n\}_{n=0}^{\infty} + x_2\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ が成り立ち, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}, \{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ は 1 次独立だから, これらが漸化式 $x_{n+3} = x_{n+2} - x_{n+1} + x_n$ を満たす数列全体からなる $\mathrm{Seq}(\boldsymbol{R})$ の部分空間の基底になり, その次元は 3 である.

(10) $f(x) \in P_3(\boldsymbol{R})$ が $f(-1) = f(1) = 0$ を満たすためには, $f(x)$ が $x-1$ と $x+1$ を因数にもつことが必要十分である. 従って $f(x) = (x-1)(x+1)(ax+b) = a(x^3-x) + b(x^2-1)$ $(a, b \in \boldsymbol{R})$ と表され, x^3-x, x^2-1 は 1 次独立だから, これらは $f(-1) = f(1) = 0$ を満たす多項式 $f(x)$ 全体からなる $P_3(\boldsymbol{R})$ の部分空間の基底であり, その次元は 2 である.

(11) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3(\boldsymbol{R})$ に対し, $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{2b}{3} + 2d$ だから $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ であるためには $b = -3d$ であることが必要十分である. このとき $f(x) = ax^3 - d(3x^2-1) + cx$ と表され, $x^3, 3x^2-1, x$ は 1 次独立だから, これらは $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ を満たす多項式 $f(x)$ 全体からなる $P_3(\boldsymbol{R})$ の部分空間の基底であり, その次元は 3 である.

(12) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x-t)^2 f(t)dt = x^2\int_{-1}^{1} f(t)dt - 2x\int_{-1}^{1} tf(t)dt + \int_{-1}^{1} t^2 f(t)dt$ より $\displaystyle a = \int_{-1}^{1} f(t)dt$, $\displaystyle b = \int_{-1}^{1} tf(t)dt$, $\displaystyle c = \int_{-1}^{1} t^2 f(t)dt$ とおくと, 仮定から $\lambda f(x) = ax^2 - 2bx + c$ である.

［$\lambda \neq 0$ の場合］$f(x) = \dfrac{a}{\lambda}x^2 - \dfrac{2b}{\lambda}x + \dfrac{c}{\lambda}$ となるため, $\displaystyle a = \int_{-1}^{1}\left(\frac{a}{\lambda}t^2 - \frac{2b}{\lambda}t + \frac{c}{\lambda}\right)dt = \frac{2a}{3\lambda} + \frac{2c}{\lambda}$ より $c = \left(\dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{1}{3}\right)a$, $\displaystyle b = \int_{-1}^{1}\left(\frac{a}{\lambda}t^3 - \frac{2b}{\lambda}t^2 + \frac{c}{\lambda}t\right)dt = -\frac{4b}{3\lambda}$ より $(3\lambda+4)b = 0$, $\displaystyle c = \int_{-1}^{1}\left(\frac{a}{\lambda}t^4 - \frac{2b}{\lambda}t^3 + \frac{c}{\lambda}t^2\right)dt = \frac{2a}{5\lambda} + \frac{2c}{3\lambda}$ より $-6a + (15\lambda-10)c = 0$ が得られる. $c = \left(\dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{1}{3}\right)a$ を $-6a + (15\lambda-10)c = 0$ に代入すると $(45\lambda^2 - 60\lambda - 16)a = 0$ となるため $\lambda = \dfrac{2}{3} \pm \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ または $a = 0$ である. また $(3\lambda+4)b = 0$ より $\lambda = -\dfrac{4}{3}$ または $b = 0$ である.

・$\lambda = \dfrac{2}{3} \pm \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ならば $b = 0$ であり, $c = \left(\dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{1}{3}\right)a$ から $c = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}a$ となるため, $f(x) = a\left(x^2 \pm \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$ となる.

・$\lambda = -\dfrac{4}{3}$ ならば $a = 0$ であり, $c = \left(\dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{1}{3}\right)a$ から $c = 0$ となるため, $f(x) = bx$ となる.

・$\lambda \neq 0, \dfrac{2}{3} \pm \dfrac{2\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{4}{3}$ ならば $a = b = 0$ であり, $c = \left(\dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{1}{3}\right)a$ から $c = 0$ となるため, $f(x) = 0$ となる.

［$\lambda = 0$ の場合］$f(x) \in P_4(x)$ だから $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ とおけて, $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x-t)^2 f(t)dt = \int_{-1}^{1}(t^2 - 2xt + x^2)(a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0)dt = 2\Big(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5}\Big)x^2 - 4\Big(\frac{a_1}{3} + \frac{a_3}{5}\Big)x + 2\Big(\frac{a_0}{3} + \frac{a_2}{5} + \frac{a_4}{7}\Big)$ である. これが 0 になるためには, $a_0 + \dfrac{a_2}{3} + \dfrac{a_4}{5} = \dfrac{a_1}{3} + \dfrac{a_3}{5} = \dfrac{a_0}{3} + \dfrac{a_2}{5} + \dfrac{a_4}{7} = 0$ が成り立つことが必要十分である. これを a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 に関する斉次連立 1 次方程式とみて解を求めることにより, $a_0 = 3s$, $a_1 = 3t$, $a_2 = -30s$, $a_3 = -5t$, $a_4 = 35s$ (s, t は任意の実数) と表せる. よって $f(x)$ は $f(x) = s(35x^4 - 30x^2 + 3) + t(-5x^3 + 3x)$ という形の多項式になる.

以上から求める部分空間の次元は, $\lambda = \dfrac{2}{3} \pm \dfrac{2\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{4}{3}$ ならば 1 次元, $\lambda = 0$ ならば 2 次元, それ以外の場合は 0 次元である.

線形数学 II 小テスト　第 4 回　ベクトル空間の基底 1

$\boldsymbol{K}^4$ の 4 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ により生成される $\boldsymbol{K}^4$ の部分空間の基底を 1 組求め, 次元を答えよ.

[解答例] $x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2 + z\boldsymbol{v}_3 + w\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0}$ を満たす x, y, z, w を求める.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ より, s, t を任意の定数とすれば $\begin{cases} x = s - 3t \\ y = -s + t \\ z = s \\ w = t \end{cases}$ である.

故に, 任意の s, t に対して $(s-3t)\boldsymbol{v}_1 + (-s+t)\boldsymbol{v}_2 + s\boldsymbol{v}_3 + t\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0}$ が成り立つ. とくに $(s,t) = (1,0), (0,1)$ の場合を考えれば $\boldsymbol{v}_3 = -\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ と $\boldsymbol{v}_4 = 3\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ が成り立つため, 与えられた部分空間は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ で生成される.

一方, 等式 $x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ は最初の等式 $x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2 + z\boldsymbol{v}_3 + w\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0}$ において $z = w = 0$ の場合だから, 上の結果より $x = y = 0$ が得られるため, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は 1 次独立である.

以上から $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ で生成される $\boldsymbol{K}^4$ の部分空間の基底で, この部分空間の次元は 2 である.

線形数学 II 小テスト　第 5 回　ベクトル空間の基底 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ とするとき, 斉次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間の基底を一組求めよ.

[解答例] $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ より,

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\begin{pmatrix} -s \\ -s+2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(s, t \in \boldsymbol{K})$ と表される. $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立だから, これらが $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間の基底になる.

線形数学 II 演習問題　第 3 回　部分空間の和・直和

1. $\boldsymbol{K}^4$ の部分空間 V, W が以下で与えられるとき, $V+W$ の基底を一組求めて, 次元を答えよ.

(1) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x+y-z-2w=0 \\ -x+2y+z-w=0 \end{matrix} \right\}$, $\quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x+2y+2z-3w=0 \\ -4x+2y-3z+2w=0 \end{matrix} \right\}$.

(2) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x+y+2z+3w=0 \\ 3y+3z-2w=0 \end{matrix} \right\}$, $\quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x+2y+3z+2w=0 \\ x+3y+4z+2w=0 \end{matrix} \right\}$.

2. $\boldsymbol{K}^4$ の部分空間 V, W が以下で与えられるとき, $V \cap W$ の基底を一組求めて, 次元を答えよ.

(1) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(2) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

3. 以下の場合について, ベクトル空間 V とその部分空間 W, Z に対し, 次の (i), (ii) が成り立っていれば, そのことを示し, そうでなければその理由を述べよ. ただし, (1), (2), (3) では $V = \boldsymbol{K}^4$ とする.

(i) $V = W + Z$ である.　　(ii) $V = W \oplus Z$ である.

(1) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\quad Z = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.　(2) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\quad Z = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(3) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; z=w=0 \right\}$, $\quad Z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x+y+z+w=0 \\ x+2y+3z+4w=0 \end{matrix} \right\}$.

(4) $V = C^r(-a,a)$ $(a>0)$ とし $W = \{f \in V \mid x \in (-a,a)$ ならば $f(-x) = f(x)\}$, $Z = \{f \in V \mid x \in (-a,a)$ ならば $f(-x) = -f(x)\}$.

(5) V を収束する実数の数列全体からなるベクトル空間とし, W は 0 に収束する数列全体からなる V の部分空間, Z はすべての項が 1 である数列で生成される V の 1 次元部分空間.

(6) $V = P_n(\boldsymbol{R})$, $W = \left\{ f(x) \in V \;\middle|\; \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0 \right\}$, $Z = \{f(x) \in V \mid f(x) = c\ (c \in \boldsymbol{R})\}$.

(7) $V = M_n(\boldsymbol{K})$, $W = \{A \in M_n(\boldsymbol{K}) \mid A$ は上半三角行列 $\}$, $Z = \{A \in M_n(\boldsymbol{K}) \mid A$ は下半三角行列 $\}$.

(8) $V = M_n(\boldsymbol{R})$, $W = \{A \in M_n(\boldsymbol{R}) \mid A$ は上半三角行列 $\}$, $Z = \{A \in M_n(\boldsymbol{R}) \mid {}^tA = -A\}$.

4. a, b, c を互いに異なる $\boldsymbol{K}$ の要素とし, $P = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ とおく. このとき, $M_3(\boldsymbol{K})$ の部分空間 $V = \{A \in M_3(\boldsymbol{K}) \mid AP = PA\}$, $W = \{A \in M_3(\boldsymbol{K}) \mid AQ = QA\}$ の一組の基底を求め, 次元を答えよ.

第 3 回の演習問題の解答

1. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ より, 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+y-z-2w=0 \\ -x+2y+z-w=0 \end{cases}$ の解は s, t を任意のスカラーとして, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+t \\ t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は V を生成する. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 10 & 5 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ より, 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+2y+2z-3w=0 \\ -4x+2y-3z+2w=0 \end{cases}$ の解は s, t を任意のスカラーとして, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s-t \\ s \\ -2s+2t \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は W を生成する. 従って $V+W$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ によって生成される. $x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ とおけば $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{3}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $x=0, -y=z=w$ だから, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であるが, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 従って, これらは $V+W$ の基底になるため, $\dim(V+W)=3$ である.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ より, 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+y+2z+3w=0 \\ 3y+3z-2w=0 \end{cases}$ の解は s, t を任意のスカラーとして, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-11t \\ -s+2t \\ s \\ 3t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ は V を生成する. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

より, 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+2y+3z+2w=0 \\ x+3y+4z+2w=0 \end{cases}$ の解は $s,\ t$ を任意のスカラーとして, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-2t \\ -s \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は W を生成する. 従って $V+W$ は $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ によって生成される. $x\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ とおけば

$$\begin{pmatrix} -1 & -11 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -11 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -11 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(4,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より, $x=y=w=0$ だから, $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 従って, これらは $V+W$ の基底になるため, $\dim(V+W)=3$ である.

2. 一般に $\boldsymbol{K}^n$ の部分空間 $V=\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$, $W=\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_l \rangle$ が与えられたとき, $\boldsymbol{b} \in V\cap W$ であるためには, $x_1\boldsymbol{v}_1+x_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+x_k\boldsymbol{v}_k = y_1\boldsymbol{w}_1+y_2\boldsymbol{w}_2+\cdots+y_l\boldsymbol{w}_l=\boldsymbol{b}$ を満たす $x_1,x_2,\ldots,x_k,y_1,y_2,\ldots,y_l \in \boldsymbol{K}$ が存在することが必要十分である. 従って, $n\times k$ 行列 A, $n\times l$ 行列 B を $A=\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_k \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \cdots & \boldsymbol{w}_l \end{pmatrix}$ で定めれば, $\boldsymbol{b}\in V\cap W$ であることは, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} B & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式がともに解をもつことと同値である. さらにこのことは, $\begin{pmatrix} A & O & \boldsymbol{b} \\ O & B & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつことと同値である.

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とおいて, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \boldsymbol{w}_3 & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & p \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & q \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & p \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1,4 列の掃き出し}]{\text{(2,1),(5,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & p \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & q+r \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s-q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & q-2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & r-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & s-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2,5 列の掃き出し}]{\text{(2,3),(6,5) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & p-2q-2r \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & q+r \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s-q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & q-2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p-2q+3r}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s+p-q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(4,3), 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p-7q-2r+5s \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4q+r-3s \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s-q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & q-2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p-2q+3r}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p-q+s \end{pmatrix}$$

より, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \boldsymbol{w}_3 & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をも

つためには, $\begin{cases} p-7q-2r+5s=0 \\ p-2q+3r=0 \\ p-q+s=0 \end{cases}$ が成り立つことが必要十分である. これらを, p, q, r, s に関する斉次連立 1 次方程式とみなして, 解を求める. $\begin{pmatrix} 1 & -7 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -7 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \\ 0 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -7 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(3,4)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ より, 上記の条件は $\begin{cases} p+r=0 \\ q-r=0 \\ -2r+s=0 \end{cases}$ と同値である. 従って $p=-r, q=r, s=2r$ となるため, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \boldsymbol{w}_3 & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつためには, $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -r \\ r \\ r \\ 2r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と表されることが必要十分である. 故に, $V \cap W$ は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を基底とする $\boldsymbol{K}^4$ の 1 次元部分空間である.

(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とおいて, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \boldsymbol{w}_3 & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & q \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & r \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & q \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & s \end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{第 1,4 列の掃き出し}]{(1,1),(8,4)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & p+r \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & s-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2r & -2s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2,5 列の掃き出し}]{(2,2),(6,5)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & p-q \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2p-q+2r}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & s-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2p-q}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q+r-2s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & s-q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3,6 列の掃き出し}]{(3,3),(5,6)\text{ 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4p-3q+2r}{2} \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2p+2q-2r \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2p-q+2r}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s-3p+q-2r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2p-q}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2p+2q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q+r-2s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{2p-3q+2s}{2} \end{pmatrix}$ より, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \boldsymbol{w}_3 & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつためには, $\begin{cases} -3p+q-2r+s=0 \\ q+r-2s=0 \end{cases}$ が成り立つことが必要十分である. これらを, p, q, r, s に関する斉次連立 1 次方程式とみなして, 解を求める. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ より, 上記の条件は $\begin{cases} -3p-3r+3s=0 \\ q+r-2s=0 \end{cases}$ と同値である. 従って $p=-r+s, q=-r+2s$ となるため, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \boldsymbol{w}_3 & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$

を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつためには, $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -r+s \\ -r+2s \\ r \\ s \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表される

ことが必要十分である. 故に, $V \cap W$ は $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を基底とする $\boldsymbol{K}^4$ の 2 次元部分空間である.

3. (1) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{z}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく. $a\boldsymbol{w}_1 + b\boldsymbol{w}_2 + c\boldsymbol{z}_1 + d\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{0}$ が成り立つならば, $b-d=0$, $a+b+c+d=0$, $c=0$, $d=0$ だから $a=b=c=d=0$ となるため, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2$ は 1 次独立である. 教科書の定理 5.19 によって, これらは V の基底になる. 従って $V = W + Z$ であり, 教科書の命題 5.22 の (2) の条件が満たされるため, $V = W \oplus Z$ である.

(2) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{z}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2$ だから $W + Z = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \rangle$ である. また, $a\boldsymbol{w}_1 + b\boldsymbol{z}_1 + c\boldsymbol{z}_2 = \begin{pmatrix} c \\ a+b \\ a \\ b-c \end{pmatrix}$ だから, $a\boldsymbol{w}_1 + b\boldsymbol{z}_1 + c\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{0}$ ならば $a=b=c=0$ となるため, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2$ は 1 次独立である. 従って $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2$ は $W+Z$ の基底になるため, $\dim(W+Z) = 3 < 4 = \dim V$ である. 故に, 教科書の定理 5.18 によって $V = W + Z$ ではない. 従って $V = W \oplus Z$ ではない.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ より, 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x+2y+3z+4w=0 \end{cases}$ の解は s, t を任意のスカラーとして, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+2t \\ -2s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は Z を生成する. また, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は W を生成するため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ によって $W+Z$ は 生成される. これらのベクトルは 1 次独立だから, 教科書の定理 5.19 によって, これらは V の基底になる. 従って $V = W + Z$ であり, 教科書の命題 5.22 の (2) の条件が満たされるため, $V = W \oplus Z$ である.

(4) 任意の $f \in V$ に対して, $g, h \in V$ を $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$, $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ で定めれば $g \in W$, $h \in Z$ であり, $f = g + h$ が成り立つため, $V = W + Z$ である. $f \in W$, $g \in Z$ が $f + g = \boldsymbol{0}$ を満たすならば, 任意の $x \in (-a, a)$ に対して $f(x) = -g(x)$ と $f(-x) = -g(-x)$ が成り立つ. $f \in W$ より $f(-x) = f(x)$ であり, $g \in Z$ より $g(-x) = -g(x)$ が成り立つため, 2 つめの等式から $f(x) = g(x)$ が得られる. 故に $f = g$ で, $f + g = \boldsymbol{0}$ から $f = g = \boldsymbol{0}$ となるため, $V = W \oplus Z$ である.

(5) すべての項が 1 である数列を $\boldsymbol{1} = \{1_n\}$ とする. 任意の $\boldsymbol{a} = \{a_n\} \in V$ に対し, $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{1} = \{a_n - \alpha\}$ とおけば, $\boldsymbol{b}$ は 0 に収束する数列であるため, $\boldsymbol{b} \in W$ である. 従って任意の $\boldsymbol{a} \in V$ は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \alpha\boldsymbol{1}$ ($\boldsymbol{b} \in W$, $\alpha\boldsymbol{1} \in Z$) と表されるため, $V = W + Z$ である. $\boldsymbol{b} = \{b_n\} \in W$, $\boldsymbol{c} = \{c_n\} \in Z$ が $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{0}$ はすべての項が 0 で

ある数列) を満たすとする. $\boldsymbol{c} = \{c_n\} \in Z$ より $\boldsymbol{c} = c\mathbf{1}$ となる実数 c があるため, すべての自然数 n に対して $c_n = c$ である. 一方 $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c}$ より, すべての自然数 n に対して $b_n = -c_n$ となるため, $b_n = -c$ である. よって $\boldsymbol{b}$ は $-c$ に収束するが, $\boldsymbol{b} \in W$ より $-c = 0$, すなわち $c = 0$ である. 故に $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ となるため, $V = W \oplus Z$ である.

(6) 任意の $f(x) \in V$ に対し, $c = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$ とおき, $g(x), h(x) \in V$ を $g(x) = f(x) - c$, $h(x) = c$ で定めれば, $2c = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$ だから $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} (f(x) - c)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{-1}^{1} cdx = \int_{-1}^{1} f(x)dx - 2c = 0$ となるため $g(x) \in W$ であり, $h(x) \in Z$ である. さらに, $f(x) = g(x) + h(x)$ だから, $V = W + Z$ が成り立つ. $f(x) \in W \cap Z$ ならば $f(x) \in Z$ より $f(x) = c$ であり, $f(x) \in W$ より $c = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} cdx = \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ だから $f(x) = 0$ である. 従って $W \cap Z = \{0\}$ だから $V = W \oplus Z$ である.

(7) $A = (a_{ij}) \in M_n(\boldsymbol{K})$ に対し, $B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in M_n(\boldsymbol{K})$ を $b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \leqq j \\ 0 & i > j \end{cases}$, $c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i > j \\ 0 & i \geqq j \end{cases}$ で定めれば $B \in W, C \in Z$ であり, $A = B + C$ だから $V = W + Z$ が成り立つ. 一方, $E_n \in W \cap Z$ だから $W \cap Z \neq \{0\}$ となるため, $V = W \oplus Z$ ではない.

(8) $A = (a_{ij}) \in M_n(\boldsymbol{K})$ に対し, $B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in M_n(\boldsymbol{K})$ を $b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + a_{ji} & i < j \\ a_{ii} & i = j \\ 0 & i > j \end{cases}$, $c_{ij} = \begin{cases} -a_{ji} & i < j \\ 0 & i = j \\ a_{ij} & i > j \end{cases}$ で定めれば $B \in W, C \in Z$ であり, $A = B + C$ だから $V = W + Z$ が成り立つ. $A = (a_{ij}) \in W \cap Z$ とする. $A \in Z$ より, $i = j$ ならば $a_{ij} = 0$ であり, $i < j$ ならば $a_{ij} = -a_{ji}$ である. また $A \in W$ より, $i > j$ ならば $a_{ij} = 0$ だから, $i < j$ ならば $a_{ij} = -a_{ji} = 0$ である. 従って A は零行列になるため $W \cap Z = \{O\}$ である. 故に $V = W \oplus Z$ である.

4. $A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ とおくと, $AP = \begin{pmatrix} ax_{11} & bx_{12} & cx_{13} \\ ax_{21} & bx_{22} & cx_{23} \\ ax_{31} & bx_{32} & cx_{33} \end{pmatrix}$, $PA = \begin{pmatrix} ax_{11} & ax_{12} & ax_{13} \\ bx_{21} & bx_{22} & bx_{23} \\ cx_{31} & cx_{32} & cx_{33} \end{pmatrix}$ だから, $AP = PA$ であるためには, $bx_{12} = ax_{12}$, $ax_{21} = bx_{21}$, $cx_{23} = bx_{23}$, $bx_{32} = cx_{32}$, $cx_{13} = ax_{13}$, $ax_{31} = cx_{31}$ が成り立つこと, すなわち $(a-b)x_{12} = (a-b)x_{21} = (b-c)x_{23} = (b-c)x_{32} = (a-c)x_{13} = (a-c)x_{31} = 0$ が成り立つことが必要十分である. a, b, c は相異なるため, 上式から $i \neq j$ ならば $x_{ij} = 0$ が得られ, A は対角行列である. 従って $A \in V$ ならば A は対角行列であり, 逆に A が 3 次対角行列ならば $AP = PA$ が成り立つため, V は 3 次対角行列全体からなる集合である. 故に $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が V の一組の基底になり, $\dim V = 3$ である.

$AQ = \begin{pmatrix} ax_{11} & ax_{12} & bx_{13} \\ ax_{21} & ax_{22} & bx_{23} \\ ax_{31} & ax_{32} & bx_{33} \end{pmatrix}$, $QA = \begin{pmatrix} ax_{11} & ax_{12} & ax_{13} \\ ax_{21} & ax_{22} & ax_{23} \\ bx_{31} & bx_{32} & bx_{33} \end{pmatrix}$ だから, $AQ = QA$ であるためには, $bx_{23} = ax_{23}$, $ax_{32} = bx_{32}$, $bx_{13} = ax_{13}$, $ax_{31} = bx_{31}$ が成り立つこと, すなわち $(a-b)x_{23} = (a-b)x_{32} = (a-b)x_{13} = (a-b)x_{31} = 0$ が成り立つことが必要十分である. $a \neq b$ だから, 上式から $x_{23} = x_{32} = x_{13} = x_{31} = 0$ が得られるため, W は $\begin{pmatrix} p & q & 0 \\ r & s & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$ という形の行列全体からなる集合である. 従って $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が W の一組の基底になり, $\dim W = 5$ である.

線形数学 II 小テスト　第 6 回　部分空間の基底

$W = \{f(x) \in P_2(\boldsymbol{R}) \,|\, (x-1)f'(x) = 2f(x)\}$ で与えられる $P_2(\boldsymbol{R})$ の部分空間 W の基底を求めよ.

[解答例] $f(x) \in P_2(\boldsymbol{R})$ に対し, $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおけば $f'(x) = 2ax + b$ だから, $f(x) \in W$ であることは $(x-1)(2ax+b) = 2(ax^2+bx+c)$ が成り立つことと同値である. さらに $(x-1)(2ax+b) = 2(ax^2+bx+c)$ は $b+2a = b+2c = 0$ と同値だから, $f(x) \in W$ であるためには $c = a$, $b = -2a$ であることが必要十分である. このとき $f(x) = a(x-1)^2$ だから W は $(x-1)^2$ で生成されることがわかる. 故に $(x-1)^2$ は W の基底である.

線形数学 II 小テスト　第 7 回　部分空間の和と直和

$\boldsymbol{K}^4$ の部分空間 V, W が以下で与えられるとき, $V+W$ の基底を一組求めて, 次元を答えよ.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \,\middle|\, \begin{matrix} x+2y+z+3w=0 \\ x+3y+2z=0 \end{matrix} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \,\middle|\, \begin{matrix} 2x+z+2w=0 \\ -2x-y-2z+w=0 \end{matrix} \right\}.$$

[解答例] $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ より, 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+2y+z+3w=0 \\ x+3y+2z=0 \end{cases}$ の解は s, t を任意のスカラーとして, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-9t \\ -s+3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は V を生成する.

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ より, 連立 1 次方程式 $\begin{cases} 2x+z+2w=0 \\ -2x-y-2z+w=0 \end{cases}$ の解は s, t を任意のスカラーとして, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-t \\ -2s+3t \\ 2s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は W を生成する. 従って $V+W$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成される.

$x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ とおけば $\begin{pmatrix} 1 & -9 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -9 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & -3 & 2 \\ 0 & 9 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(4,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ より, $x = -\dfrac{16}{3}w$, $y = -w$, $z = \dfrac{8}{3}w$ だか

ら, $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-9\\3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\0\\1\end{pmatrix}$ は 1 次従属であるが, $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-9\\3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\2\\0\end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 従って, これらは $V+W$ の基底になるため, $\dim(V+W)=3$ である.

線形数学 II 小テスト　第 8 回　部分空間の基底 2

$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 2\\ 1 & -2 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ とする. V を $V = \{\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{K}^4 |\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^4$ がある $\}$ で与えられる $\boldsymbol{K}^4$ の部分空間とするとき, V の基底を一組求めよ.

[解答例] $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & a\\ 0 & -1 & -1 & 2 & b\\ 1 & -2 & -1 & 4 & c\\ 0 & 1 & 1 & -2 & d\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & a\\ 0 & -1 & -1 & 2 & b\\ 0 & -2 & -2 & 4 & c-a\\ 0 & 1 & 1 & -2 & d\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & a\\ 0 & -1 & -1 & 2 & b\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-a-2b\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+d\end{pmatrix}$ より, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ が解をもつ条件は $c-a-2b = b+d = 0$ だから $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}a\\b\\a+2b\\-b\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix}$ $(a, b \in \boldsymbol{K})$ と表される. $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix}$ は 1 次独立だから, これらが V の基底になり, その次元は 2 である.

線形数学 II 演習問題　第 4 回　1 次写像

1. ベクトル空間 V, W と写像 $f : V \to W$ を以下のように定義するとき, f が 1 次写像であるかどうかを, 理由とともに答えよ. $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{C}^n$ に対し $\bar{\boldsymbol{a}}$ は $\boldsymbol{a}$ の第 j 成分の共役複素数を第 j 成分とする $\boldsymbol{C}^n$ のベクトルとする. また, 写像 $\boldsymbol{\omega} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n$ に対し $\omega(t)$ $(t \in \boldsymbol{R})$ の第 j 成分を $\omega_j(t)$ とし, 関数 $\omega_j : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ が微分可能であるとき, $t \in \boldsymbol{R}$ を $\dfrac{d\omega_j}{dt}(t)$ を第 j 成分とする $\boldsymbol{R}^n$ のベクトルに対応させる写像を $\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n$ で表す.

(1) $V = \boldsymbol{C}^n$, $W = \boldsymbol{C}$, $f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{a}}$ $(\boldsymbol{a} \in V)$.

(2) $V = \boldsymbol{R}^n$, $W = \boldsymbol{R}$, $f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}$.

(3) $V = W = M_{m,n}(\boldsymbol{K})$, $f(X) = XAX$ $(A \in M_{n,m}(\boldsymbol{K}))$.

(4) $V = M_n(\boldsymbol{K})$, $W = \boldsymbol{K}$, $f(X) = |X|$.

(5) $V = M_{l,m}(\boldsymbol{K})$, $W = M_{k,n}(\boldsymbol{K})$, $f(X) = AXB$ $(A \in M_{k,l}(\boldsymbol{K}),\ B \in M_{m,n}(\boldsymbol{K}))$.

(6) $V = W = P_n(\boldsymbol{K})$, $f(\varphi(x)) = \varphi(x + a)$ $(a \in \boldsymbol{K})$.

(7) $V = \{\varphi \,|\, \varphi$ は閉区間 $[a, b]$ で定義された実数値連続関数$\}$, $W = \boldsymbol{R}$, $f(\varphi) = \displaystyle\int_a^b \varphi(x)p(x)dx$ $(p \in V)$.

(8) $V = \{\varphi \,|\, \varphi$ は閉区間 $[a, b]$ で定義された実数値連続関数$\}$, $W = \boldsymbol{R}$, $f(\varphi) = \varphi(c)$ $(c \in [a, b])$.

(9) $A \in M_n(\boldsymbol{R})$, $V = W = \left\{\boldsymbol{\omega} \,\middle|\, \boldsymbol{\omega} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n \text{ は, すべての } t \in \boldsymbol{R} \text{ に対し, } \dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}(t) = A\boldsymbol{\omega}(t) \text{ を満たす.}\right\}$, $f(\boldsymbol{\omega}) = \dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$.

(10) $A \in M_n(\boldsymbol{K})$, $V = W = \{\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x} : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{K}^n$ は, すべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対し, $\boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k)$ を満たす.$\}$, $f(\boldsymbol{x}) \in W$ は自然数 k を $\boldsymbol{x}(k+1)$ に対応させる写像.

2. 以下で与えられる行列 A に対し, $\mathrm{Ker}\, T_A$, $\mathrm{Im}\, T_A$ が 0 次元でない場合に, これらの基底をそれぞれ 1 組ずつ求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & -9 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(10) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \\ -3 & -8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$　(11) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　(12) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(13) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$　(14) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(15) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -a+3 & 2a-5 & a & -a \\ 0 & 1 & 3a-6 & -a \\ 3 & a-6 & 3a & -3a+2 \end{pmatrix}$

3. $f : V \to V$ を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V の 1 次変換とし, $\boldsymbol{x} \in V$ と自然数 l に対して, $f^{m-1}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ かつ $f^m(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ が成り立つとする. このとき, m 個のベクトル $\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}), f^2(\boldsymbol{x}), \dots, f^{m-1}(\boldsymbol{x})$ は 1 次独立であることを示せ. ここで f^k は f の k 回の合成写像を表す.

4. $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V の 1 次変換 $f : V \to V$ で $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f$ を満たすものがあるとき $\dim V$ は偶数であることを示せ. さらにこのとき, V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ で, $f(\boldsymbol{v}_{2i-1}) = \boldsymbol{v}_{2i}$, $f(\boldsymbol{v}_{2i}) = \boldsymbol{0}$ $(1 \leqq i \leqq \dfrac{n}{2})$ を満たすものがとれることを示せ.

5. $f : V \to W$, $g : W \to Z$ を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間の間の 1 次写像とするとき, $\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Im}\, f$ であるためには, $\mathrm{rank}(g \circ f) = \mathrm{rank}\, f + \mathrm{rank}\, g - \dim W$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

第 4 回の演習問題の解答

1. (1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $r \in \boldsymbol{C}$ に対し, $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = {}^t(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\bar{\boldsymbol{a}} = ({}^t\boldsymbol{x}+{}^t\boldsymbol{y})\,\bar{\boldsymbol{a}} = {}^t\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{a}}+{}^t\boldsymbol{y}\bar{\boldsymbol{a}} = f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$, $f(r\boldsymbol{x}) = {}^t(r\boldsymbol{x})\bar{\boldsymbol{a}} = (r({}^t\boldsymbol{x}))\,\bar{\boldsymbol{a}} = r({}^t\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{a}}) = rf(\boldsymbol{x})$ だから f は 1 次写像である.

(2) $f(2\boldsymbol{e}_1) = 4$, $f(\boldsymbol{e}_1) = 1$ だから $f(2\boldsymbol{e}_1) \neq 2f(\boldsymbol{e}_1)$ である. 従って f は 1 次写像ではない.

(3) $A = O$ の場合は, 任意の $X \in M_{m,n}(\boldsymbol{K})$ に対して $f(X) = O$ だから f は 1 次写像である.

$A \neq O$ の場合, $A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}$, $a_{pq} \neq 0$ とする. E_{qp} を (q,p) 成分だけが 1 で, その他の成分がすべて 0 である $m \times n$ 行列とすれば, $E_{qp}AE_{qp} = a_{pq}E_{qp}$ だから $f\bigl(2E_{qp}\bigr) = 4E_{qp}AE_{qp} = 4a_{pq}E_{qp} \neq 2a_{pq}E_{qp} = 2E_{qp}AE_{qp} = 2f\bigl(E_{qp}\bigr)$ である. 従って f は 1 次写像ではない.

(4) $n = 1$ の場合, $X = (x)$ の行列式の値は x だから, f は明らかに 1 次写像である.

$n \geqq 2$ の場合, n 次対角行列 A, B を $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_{n-1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}$ で定めれば A, B はともに対角成分に 0 を含むため $|A| = |B| = 0$ である. 一方 $A+B = E_n$ だから $f(A+B) = |A+B| = 1 \neq 0 = |A|+|B| = f(A)+f(B)$ となるため, f は 1 次写像ではない.

(5) $X, Y \in V$, $r \in \boldsymbol{K}$ に対し, $f(X+Y) = A(X+Y)B = (AX+AY)B = AXB+AYB = f(X)+f(Y)$, $f(rX) = A(rX)B = rAXB = rf(X)$ だから f は 1 次写像である.

(6) $\varphi(x), \psi(x) \in V$, $r \in \boldsymbol{R}$ に対し, $f(\varphi(x)+\psi(x)) = \varphi(x+a)+\psi(x+a) = f(\varphi(x))+f(\psi(x))$, $f(r\varphi(x)) = r\varphi(x+a) = rf(\varphi(x))$ だから f は 1 次写像である.

(7) $\varphi, \psi \in V$, $r \in \boldsymbol{R}$ に対し, $f(\varphi+\psi) = \displaystyle\int_a^b (\varphi+\psi)(x)p(x)dx = \int_a^b (\varphi(x)+\psi(x))p(x)dx = \int_a^b \varphi(x)p(x)dx + \int_a^b \psi(x)p(x)dx = f(\varphi)+f(\psi)$, $f(r\varphi) = \displaystyle\int_a^b (r\varphi)(x)p(x)dx = \int_a^b r\varphi(x)p(x)dx = r\int_a^b \varphi(x)p(x)dx = rf(\varphi)$ だから f は 1 次写像である.

(8) $\varphi, \psi \in V$, $r \in \boldsymbol{R}$ に対し, $f(\varphi+\psi) = (\varphi+\psi)(c) = \varphi(c)+\psi(c) = f(\varphi)+f(\psi)$, $f(r\varphi) = (r\varphi)(c) = r\varphi(c) = rf(\varphi)$ だから f は 1 次写像である.

(9) $\boldsymbol{\omega} \in V$ ならば, 任意の $t \in \boldsymbol{R}$ に対して $\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}(t) = A\boldsymbol{\omega}(t)$ だから, $\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\omega}'$ とおけば, $\boldsymbol{\omega}'$ の t における微分は $\dfrac{d\boldsymbol{\omega}'}{dt}(t) = \dfrac{d}{dt}(A\boldsymbol{\omega})(t) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(A\boldsymbol{\omega}(t+h)-A\boldsymbol{\omega}(t)) = \lim_{h\to 0} A\left(\frac{1}{h}(\boldsymbol{\omega}(t+h)-\boldsymbol{\omega}(t))\right) = A\left(\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\boldsymbol{\omega}(t+h)-\boldsymbol{\omega}(t))\right) = A\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}(t) = A\boldsymbol{\omega}'(t)$ となるため, $\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \in W$ である. 従って, $f(\boldsymbol{\omega}) = \dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ によって, V から W への写像 f が定まる.

$\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\chi} \in V$, $r \in \boldsymbol{R}$ に対し, $f(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\chi}) = \dfrac{d(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\chi})}{dt} = \dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}+\dfrac{d\boldsymbol{\chi}}{dt} = f(\boldsymbol{\omega})+f(\boldsymbol{\chi})$, $f(r\boldsymbol{\omega}) = \dfrac{d(r\boldsymbol{\omega})}{dt} = r\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = rf(\boldsymbol{\omega})$ だから f は 1 次写像である.

(10) $\boldsymbol{x} \in V$ ならば, すべての $k \in \boldsymbol{N}$ に対し, $\boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k)$ だから, $\tilde{\boldsymbol{x}} : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{K}^n$ を $\tilde{\boldsymbol{x}}(k) = \boldsymbol{x}(k+1)$ で定めれば, $\tilde{\boldsymbol{x}}(k+1) = \boldsymbol{x}(k+2) = A\boldsymbol{x}(k+1) = \tilde{\boldsymbol{x}}(k)$ が成り立つため, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in W$ である. 従って, $f(\boldsymbol{x}) = \tilde{\boldsymbol{x}}$ によって, V から W への写像 f が定まる.

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $r \in \boldsymbol{K}$ に対し, $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$, $f(r\boldsymbol{x})$ は $k \in \boldsymbol{N}$ をそれぞれ $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})(k+1) = \boldsymbol{x}(k+1)+\boldsymbol{y}(k+1)$, $(r\boldsymbol{x})(k+1) = r\boldsymbol{x}(k+1)$ に写す写像であり, $f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$, $rf(\boldsymbol{x})$ も $k \in \boldsymbol{N}$ をそれぞれ $(f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}))(k) = f(\boldsymbol{x})(k)+f(\boldsymbol{y})(k) = \boldsymbol{x}(k+1)+\boldsymbol{y}(k+1)$, $(rf(\boldsymbol{x}))(k) = r(f(\boldsymbol{x})(k)) = r\boldsymbol{x}(k+1)$ に写す写像である. 故に f は 1 次写像である.

2. (1) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 2 & -5 & q \\ 3 & -4 & r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 0 & -7 & q-2p \\ 0 & -7 & r-3p \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{7}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & \frac{2p-q}{7} \\ 0 & -7 & r-3p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5p+q}{7} \\ 0 & 1 & \frac{2p-q}{7} \\ 0 & 0 & r-p-q \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式が解をもつためには $r-p-q = 0$ であることが必要十分である. 従って, $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} T_A$ であるためには $\boldsymbol{b}$ が

$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ p+q \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式の解は $x = y = 0$ のみだから, $\operatorname{Ker} T_A$ は 0 次元である.

(2) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とし, $(A \ \boldsymbol{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & p \\ 3 & -5 & -1 & q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & p \\ 0 & -8 & -4 & q-3p \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{8} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3p-q}{8} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5p+q}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3p-q}{8} \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式は常に解をもつ. 従って, $\operatorname{Im} T_A = \boldsymbol{K}^2$ となるため, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ が $\operatorname{Im} T_A$ の基底になる. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x + \frac{1}{2}z = 0 \\ y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$ と同値であるため, $\operatorname{Ker} T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (t は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である.

(3) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とし, $(A \ \boldsymbol{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & p \\ -4 & 2 & -2 & q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & p \\ 0 & 0 & 0 & q+2p \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式が解をもつためには $q + 2p = 0$ であることが必要十分である. 従って, $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} T_A$ であるためには $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ -2p \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $2x - y + z = 0$ と同値であるため, $\operatorname{Ker} T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ -2s+t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (s, t は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である.

(4) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とし, $(A \ \boldsymbol{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & p \\ 1 & 3 & 2 & q \\ 2 & 1 & -3 & r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & q \\ 3 & -2 & 1 & p \\ 2 & 1 & -3 & r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & q \\ 0 & -11 & -5 & p-3q \\ 0 & -5 & -7 & r-2q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行に加える}]{\text{第 3 行を } -2 \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & q \\ 0 & -1 & 9 & p+q-2r \\ 0 & -5 & -7 & r-2q \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 29 & 3p+4q-6r \\ 0 & -1 & 9 & p+q-2r \\ 0 & 0 & -52 & -5p-7q+11r \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式は常に解をもつ. 従って, $\operatorname{Im} T_A = \boldsymbol{K}^3$ となるため, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が $\operatorname{Im} T_A$ の基底になる. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x + 29z = 0 \\ -y + 9z = 0 \\ -52z = 0 \end{cases}$ と同値であるため, その解は $x = y = z = 0$ のみとなり, $\operatorname{Ker} T_A$ は 0 次元である.

(5) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とし, $(A \ \boldsymbol{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & p \\ 1 & 0 & -1 & q \\ 5 & -3 & 1 & r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & p \\ 0 & 1 & -2 & q-p \\ 0 & 2 & -4 & r-5p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & q \\ 0 & 1 & -2 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & r-3p-2q \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式が解をもつために

は $r-3p-2q=0$ であることが必要十分である．従って，$\boldsymbol{b}\in\operatorname{Im}T_A$ であるためには $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}p\\q\\3p+2q\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である．故に $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im}T_A$ の基底である．$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ の場合，上の連立 1 次方程式は $\begin{cases}x-z=0\\y-2z=0\end{cases}$ と同値であるため，$\operatorname{Ker}T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}t\\2t\\t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ (t は任意の定数) と表される．よって，$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker}T_A$ の基底である．

(6) $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ とし，$\begin{pmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える．$\begin{pmatrix}2&4&1&3&p\\-1&-9&3&2&q\\2&8&-1&1&r\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}}$ $\begin{pmatrix}-1&-9&3&2&q\\2&4&1&3&p\\2&8&-1&1&r\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}-1&-9&3&2&q\\0&-14&7&7&p+2q\\0&-10&5&5&r+2q\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{14}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}}\begin{pmatrix}-1&-9&3&2&q\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{p+2q}{14}\\0&-10&5&5&r+2q\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}-1&0&-\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}&\frac{-9p-4q}{14}\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{p+2q}{14}\\0&0&0&0&\frac{7r-5p+4q}{7}\end{pmatrix}$ より，この連立 1 次方程式が解をもつためには $\dfrac{7r-5p+4q}{7}=0$ であることが必要十分である．従って，$\boldsymbol{b}\in\operatorname{Im}T_A$ であるためには $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}p\\q\\\frac{5}{7}p-\frac{4}{7}q\end{pmatrix}=\dfrac{p}{7}\begin{pmatrix}7\\0\\5\end{pmatrix}+\dfrac{q}{7}\begin{pmatrix}0\\7\\-4\end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である．故に $\begin{pmatrix}7\\0\\5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\7\\-4\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im}T_A$ の基底である．$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ の場合，上の連立 1 次方程式は $\begin{cases}-x-\frac{3}{2}z-\frac{5}{2}w=0\\y-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}w=0\end{cases}$ と同値であるため，$\operatorname{Ker}T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-3s-5t\\s+t\\2s\\2t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-3\\1\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-5\\1\\0\\2\end{pmatrix}$ (s, t は任意の定数) と表される．よって，$\begin{pmatrix}-3\\1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-5\\1\\0\\2\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker}T_A$ の基底である．

(7) $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\\s\end{pmatrix}$ とし，$\begin{pmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える．$\begin{pmatrix}1&0&2&1&p\\0&1&-1&1&q\\2&1&3&3&r\\1&-1&3&0&s\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix}1&0&2&1&p\\0&1&-1&1&q\\0&1&-1&1&r-2p\\0&-1&1&-1&s-p\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&2&1&p\\0&1&-1&1&q\\0&0&0&0&r-2p-q\\0&0&0&0&s-p+q\end{pmatrix}$ より，この連立 1 次方程式が解をもつためには $r-2p-q=s-p+q=0$ であることが必要十分である．従って，$\boldsymbol{b}\in\operatorname{Im}T_A$ であるためには $\boldsymbol{b}$ が

$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ 2p+q \\ p-q \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である．故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底である．$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x+2z+w=0 \\ y-z+w=0 \end{cases}$ と同値であるため, $\mathrm{Ker}\, T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2s-t \\ s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (s, t は任意の定数) と表される．よって, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\, T_A$ の基底である．

(8) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える．$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & p \\ -1 & -1 & 0 & -2 & q \\ 1 & 3 & 0 & 3 & r \\ -1 & 2 & 1 & -2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & 1 & -1 & p+q \\ 0 & 1 & -1 & 2 & r-p \\ 0 & 4 & 2 & -1 & p+s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -p-2q \\ 0 & 1 & 1 & -1 & p+q \\ 0 & 0 & -2 & 3 & r-2p-q \\ 0 & 0 & -2 & 3 & s-3p-4q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{r+3q}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{q+r}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 3 & r-2p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p-3q-r \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式が解をもつためには $s-p-3q-r=0$ であることが必要十分である．従って, $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\, T_A$ であるためには $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ p+3q+r \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である．故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底である．$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x+\frac{3}{2}w=0 \\ y+\frac{1}{2}w=0 \\ -2z+3w=0 \end{cases}$ と同値であるため, $\mathrm{Ker}\, T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3t \\ -t \\ 3t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (t は任意の定数) と表される．よって, $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\, T_A$ の基底である．

(9) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える．$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 & p \\ 1 & 2 & 1 & 1 & q \\ -1 & -1 & -2 & 2 & r \\ 1 & 2 & 1 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}}$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&1&q\\4&1&-1&1&p\\-1&-1&-2&2&r\\1&2&1&1&s\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&2&1&1&q\\0&-7&-5&-3&p-4q\\0&1&-1&3&r+q\\0&0&0&0&s-q\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}}\begin{pmatrix}1&2&1&1&q\\0&1&-1&3&r+q\\0&-7&-5&-3&p-4q\\0&0&0&0&s-q\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&3&-5&-q-r\\0&1&-1&3&r+q\\0&0&-12&18&p+3q+7r\\0&0&0&0&s-q\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{12}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}}\begin{pmatrix}1&0&3&-5&-q-r\\0&1&-1&3&r+q\\0&0&1&-\frac{3}{2}&\frac{-p-3q-7r}{12}\\0&0&0&0&s-q\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{p-q+3r}{4}\\0&1&0&\frac{3}{2}&\frac{-p+9q+5r}{12}\\0&0&1&-\frac{3}{2}&\frac{-p-3q-7r}{12}\\0&0&0&0&s-q\end{pmatrix}$$ より, この連立 1 次方程式が解をもつためには $s-q=0$ であることが必要十分である. 従って, $\boldsymbol{b}\in\operatorname{Im}T_A$ であるためには $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\\q\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im}T_A$ の基底である. $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases}x-\frac{1}{2}w=0\\y+\frac{3}{2}w=0\\z-\frac{3}{2}w=0\end{cases}$ と同値であるため, $\operatorname{Ker}T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}t\\-3t\\3t\\2t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\-3\\3\\2\end{pmatrix}$ (t は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix}1\\-3\\3\\2\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker}T_A$ の基底である.

(10) $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\\s\end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix}A&\boldsymbol{b}\end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix}1&3&-1&0&p\\2&1&3&5&q\\2&0&4&6&r\\-3&-8&2&-1&s\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$

$$\begin{pmatrix}1&3&-1&0&p\\0&-5&5&5&q-2p\\0&-6&6&6&r-2p\\0&1&-1&-1&s+3p\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}}\begin{pmatrix}1&3&-1&0&p\\0&1&-1&-1&s+3p\\0&-6&6&6&r-2p\\0&-5&5&5&q-2p\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&2&3&-s-8p\\0&1&-1&-1&s+3p\\0&0&0&0&r+6s+16p\\0&0&0&0&q+5s+13p\end{pmatrix}$$

より, この連立 1 次方程式が解をもつためには $r+6s+16p=q+5s+13p=0$ であることが必要十分である. 従って, $\boldsymbol{b}\in\operatorname{Im}T_A$ であるためには $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}p\\-5s-13p\\-6s-16p\\s\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}1\\-13\\-16\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\-5\\-6\\1\end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix}1\\-13\\-16\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-5\\-6\\1\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im}T_A$ の基底である. $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases}x+2z+3w=0\\y-z-w=0\end{cases}$

と同値であるため, $\mathrm{Ker}\, T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2s-3t \\ s+t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (s, t は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\, T_A$ の基底である.

(11) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & p \\ -1 & 3 & 2 & 1 & q \\ 1 & 2 & 1 & -2 & r \\ 0 & -1 & 2 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & p \\ 0 & 4 & 1 & 3 & q+p \\ 0 & 1 & 2 & -4 & r-p \\ 0 & -1 & 2 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & p \\ 0 & 1 & 2 & -4 & r-p \\ 0 & 4 & 1 & 3 & q+p \\ 0 & -1 & 2 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 & 2p-r \\ 0 & 1 & 2 & -4 & r-p \\ 0 & 0 & -7 & 19 & q+5p-4r \\ 0 & 0 & 4 & -3 & s+r-p \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 4 行を 2 倍して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 & 2p-r \\ 0 & 1 & 2 & -4 & r-p \\ 0 & 0 & 1 & 13 & q+3p-2r+2s \\ 0 & 0 & 4 & -3 & s+r-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 45 & 11p+3q-7r+6s \\ 0 & 1 & 0 & -30 & 5r-7p-2q-4s \\ 0 & 0 & 1 & 13 & q+3p-2r+2s \\ 0 & 0 & 0 & -55 & -13p-4q+9r-7s \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式は常に解をもつ. 従って, $\mathrm{Im}\, T_A = \boldsymbol{K}^4$ となるため, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ が $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底になる. 上の計算から, 係数行列 A は正則であるため, T_A は同型写像である. 従って, $\mathrm{Ker}\, T_A$ は 0 次元である.

(12) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & p \\ -1 & 0 & -2 & 2 & q \\ 2 & 1 & 2 & 3 & r \\ -1 & 2 & 1 & 2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & p \\ 0 & 2 & 1 & 4 & q+p \\ 0 & -3 & -4 & -1 & r-2p \\ 0 & 4 & 4 & 4 & s+p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & p \\ 0 & 4 & 4 & 4 & s+p \\ 0 & -3 & -4 & -1 & r-2p \\ 0 & 2 & 1 & 4 & q+p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{p-s}{2} \\ 0 & 4 & 4 & 4 & s+p \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \frac{4r+3s-5p}{4} \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \frac{2q-s+p}{2} \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{s+4r-3p}{4} \\ 0 & 4 & 0 & 12 & 4s-4p+4r \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \frac{4r+3s-5p}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4q+7p-4r-5s}{4} \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式が解をもつためには $\dfrac{4q+7p-4r-5s}{4} = 0$ であることが必要十分である. 従って, $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\, T_A$ であるためには $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ \frac{4q+7p-4r}{5} \end{pmatrix} = \dfrac{p}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \dfrac{q}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \dfrac{r}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底である. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合,

上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x+2w=0 \\ 4y+12w=0 \\ -z+2w=0 \end{cases}$ と同値であるため, $\operatorname{Ker} T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} -2t \\ -3t \\ 2t \\ t \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である.

(13) $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 & p \\ -1 & 0 & 1 & 1 & q \\ 3 & 2 & -1 & 1 & r \\ 1 & 3 & 0 & -1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 4 行}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & s \\ -1 & 0 & 1 & 1 & q \\ 3 & 2 & -1 & 1 & r \\ 2 & 3 & -1 & -2 & p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & s \\ 0 & 3 & 1 & 0 & q+s \\ 0 & -7 & -1 & 4 & r-3s \\ 0 & -3 & -1 & 0 & p-2s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -q \\ 0 & 3 & 1 & 0 & q+s \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 4 & \frac{7q+3r-2s}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p+q-s \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\frac{3}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -q \\ 0 & 3 & 1 & 0 & q+s \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{7q+3r-2s}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p+q-s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{3q+3r-2s}{4} \\ 0 & 3 & 0 & -3 & \frac{-3q-3r+6s}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \frac{7q+3r-2s}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p+q-s \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式が解をもつためには $p+q-s=0$ であることが必要十分である. 従って, $\boldsymbol{b}\in \operatorname{Im} T_A$ であるためには $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ p+q \end{pmatrix}=p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である. $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x+2w=0 \\ 3y-3w=0 \\ z+3w=0 \end{cases}$ と同値であるため, $\operatorname{Ker} T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} -2t \\ t \\ -3t \\ t \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である.

(14) $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ -1 & 0 & -1 & -2 & r \\ 1 & 1 & 0 & 2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & -1 & r+p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & s-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & -1 & r+p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p-q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & r+2p \\ 0 & 1 & -1 & 0 & r+p+q \\ 0 & 0 & 0 & -1 & r+p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p-q \end{pmatrix}$ だから, $\begin{pmatrix} A\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつためには $s-p-q=0$ であることが必要十分であ

る．このとき, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ p+q \end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ が $\operatorname{Im} T_A$ の基底になる．$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x+z=0 \\ y-z=0 \\ -w=0 \end{cases}$ と同値であるため, $\operatorname{Ker} T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-t\\t\\t\\0\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ (t は任意の定数) と表される．よって, $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である.

(15) $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\\s\end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & p \\ -a+3 & 2a-5 & a & -a & q \\ 0 & 1 & 3a-6 & -a & r \\ 3 & a-6 & 3a & -3a+2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & p \\ 0 & 1 & 3a-6 & -a & q+(a-3)p \\ 0 & 1 & 3a-6 & -a & r \\ 0 & a & 3a-6 & -3a+2 & s-3p \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6a-10 & -2a & p+2r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q+(a-3)p-r \\ 0 & 1 & 3(a-2) & -a & r \\ 0 & 0 & -3(a-1)(a-2) & (a-1)(a-2) & s-3p-ar \end{pmatrix} \cdots (*)$$

$a=1$ または $a=2$ の場合, $(*)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6a-10 & -2a & p+2r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q+(a-3)p-r \\ 0 & 1 & 3(a-2) & -a & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-3p-ar \end{pmatrix}$ だから, $\begin{pmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつためには, $\begin{cases} q+(a-3)p-r=0 \\ s-3p-ar=0 \end{cases}$ が成り立つことが必要十分である．このとき, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} p \\ (3-a)p+r \\ r \\ 3p+ar \end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}1\\3-a\\0\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\\1\\a\end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix}1\\3-a\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\a\end{pmatrix}$ が $\operatorname{Im} T_A$ の基底になる．$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x+(6a-10)z-2aw=0 \\ y+3(a-2)z-aw=0 \end{cases}$ と同値であるため, $\operatorname{Ker} T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} -(6a-10)s+2at \\ 3(2-a)s+at \\ s \\ t \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-6a+10\\3a-6\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2a\\a\\0\\1\end{pmatrix}$ (s, t は任意の定数) と表される．よって, $\begin{pmatrix}-6a+10\\3a-6\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2a\\a\\0\\1\end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である.

$a \neq 1, 2$ の場合, $(*)$ $\xrightarrow[-3(a-1)(a-2)\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6a-10 & -2a & p+2r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q+(a-3)p-r \\ 0 & 1 & 3(a-2) & -a & r \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{s-3p-ar}{3(a-1)(a-2)} \end{pmatrix}$ だから, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつためには, $q+(a-3)p-r=0$ が成り立つことが必要十分である. このとき, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ (3-a)p+r \\ r \\ s \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 3-a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3-a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が $\operatorname{Im} T_A$ の基底になる. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x+(6a-10)z-2aw=0 \\ y+3(a-2)z-aw=0 \\ z-\frac{1}{3}w=0 \end{cases}$ と同値であるため, $\operatorname{Ker} T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 10t \\ 6t \\ t \\ 3t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (t は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である.

3. $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1} \in \boldsymbol{K}$ に対して

$$a_0\boldsymbol{x} + a_1 f(\boldsymbol{x}) + a_2 f^2(\boldsymbol{x}) + \cdots + a_{m-1} f^{m-1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \ \cdots (*)$$

が成り立つと仮定して, $a_i = 0$ が $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ に対して成り立つことを i による数学的帰納法で示す. $(*)$ の両辺を f^k で写せば, $i \geqq m-k$ ならば $f^k(f^i(\boldsymbol{x})) = f^{i+k}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ だから, $k = 1, 2, \ldots, m-1$ に対して

$$a_0 f^k(\boldsymbol{x}) + a_1 f^{k+1}(\boldsymbol{x}) + \cdots + a_i f^{k+i}(\boldsymbol{x}) + \cdots + a_{m-k-1} f^{m-1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \ \cdots (**)$$

が成り立つ. $(**)$ で $k = m-1$ の場合, $a_0 f^{m-1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ で, $f^{m-1}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ だから $a_0 = 0$ が得られる, $j = 0, 1, \ldots, i-1$ $(1 \leqq i < m-1)$ に対して $a_j = 0$ が成り立つと仮定すると, $(**)$ で $k = m-i-1$ の場合を考えれば, 仮定から $a_i f^{m-1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ が得られるため, $f^{m-1}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ より $a_i = 0$ である. 故に $a_i = 0$ が $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ に対して成り立つため, $\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}), f^2(\boldsymbol{x}), \ldots, f^{m-1}(\boldsymbol{x})$ は 1 次独立である.

4. V の 1 次変換 $f : V \to V$ で $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ を満たすならば, 次元公式より $\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rank} f = \dim \operatorname{Im} f + \operatorname{rank} f = 2\operatorname{rank} f$ だから $\dim V$ は偶数である. $m = \dfrac{1}{2}\dim V$ とおけば, 上式より $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} f = m$ である. そこで, $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4, \ldots, \boldsymbol{v}_{2m}$ を $\operatorname{Ker} f$ の基底とすれば, 各 $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して $\boldsymbol{v}_{2i} \in \operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ だから, $f(\boldsymbol{v}_{2i-1}) = \boldsymbol{v}_{2i}$ を満たす $\boldsymbol{v}_{2i-1} \in V$ が存在する. このとき, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{2m}$ は V の基底である. 実際, $f(\boldsymbol{v}_{2i}) = \boldsymbol{0}$, $f(\boldsymbol{v}_{2i-1}) = \boldsymbol{v}_{2i}$ だから, $x_j \in \boldsymbol{K}$ に対し, $f\left(\sum_{j=1}^{2m} x_j \boldsymbol{v}_j\right) = \sum_{j=1}^{2m} x_j f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} x_{2i-1} f(\boldsymbol{v}_{2i-1}) = \sum_{i=1}^{m} x_{2i-1}\boldsymbol{v}_{2i}$ となるため, $\sum_{j=1}^{2m} x_j \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0}$ が成り立つならば, この両辺の f による像を考えれば, $\sum_{i=1}^{m} x_{2i-1}\boldsymbol{v}_{2i} = \boldsymbol{0}$ が得られる. $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4, \ldots, \boldsymbol{v}_{2m}$ は 1 次独立だから, 上式より $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して $x_{2i-1} = 0$ である. 従って $\sum_{i=1}^{m} x_{2i}\boldsymbol{v}_{2i} = \boldsymbol{0}$ で, 再度 $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4, \ldots, \boldsymbol{v}_{2m}$ の 1 次独立性を用いると, $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して $x_{2i} = 0$ であることがわかる. 故に $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{2m}$ は 1 次独立で, $\dim V = 2m$ だから, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{2m}$ は V の基底である.

5. 教科書の 6 章の演習問題 6.5(4) の等式 $\operatorname{rank}(g \circ f) = \operatorname{rank} f - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g)$ と, g に関する次元公式 $\dim W = \operatorname{rank} g + \dim \operatorname{Ker} g$ から

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(g \circ f) - (\operatorname{rank} f + \operatorname{rank} g - \dim W) &= \operatorname{rank} f - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) - (\operatorname{rank} f - \dim \operatorname{Ker} g) \\ &= \dim \operatorname{Ker} g - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) \end{aligned}$$

だから $\operatorname{rank}(g\circ f) = \operatorname{rank} f + \operatorname{rank} g - \dim W$ が成り立つことと $\dim \operatorname{Ker} g = \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g)$ が成り立つことは同値である．$\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$ は $\operatorname{Ker} g$ の部分空間だから $\dim \operatorname{Ker} g = \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g)$ が成り立つことと $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} g$ が成り立つことは同値であり, さらに $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} g$ は $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Im} f$ と同値である．故に $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Im} f$ であるためには, $\operatorname{rank}(g\circ f) = \operatorname{rank} f + \operatorname{rank} g - \dim W$ が成り立つことが必要十分である．

線形数学 II 小テスト　第 9 回　1 次写像の像と核

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ とおくとき, $\operatorname{Im} T_A$ と $\operatorname{Ker} T_A$ の基底を 1 組ずつめよ．

[解答例] $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ 2 & 3 & -5 & -1 & r \\ 1 & 0 & -1 & -2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ 0 & 1 & -1 & 1 & r-2p \\ 0 & -1 & 1 & -1 & s-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-2p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p+q \end{pmatrix}$ より，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ が解をもつ条件は $r - 2p - q = s - p + q = 0$ だから $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ 2p+q \\ p-q \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(p, q \in \boldsymbol{K})$ と表される．$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立だから，これらが $\operatorname{Im} T_A$ の基底である．また，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ すなわち $p = q = r = s = 0$ の場合の $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は，上の計算から $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} u+2v \\ u-v \\ u \\ v \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(u, v \in \boldsymbol{K})$ で与えられるため，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である．

線形数学 II 小テスト　第 10 回　1 次写像の像と核 2

x と y を変数とする実数係数の n 次同次多項式全体からなるベクトル空間を V_n とする．$D : V_3 \to V_1$ を

$$D(f(x,y)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

によって定めるとき, $\operatorname{Ker} D$ の基底を求めよ．

[解答例] $f(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \in V_3$ に対し, $D(f(x,y)) = 2(3a+c)x + 2(b+3d)y$ だから $f(x,y) \in \operatorname{Ker} D$ であるためには $c = -3a$ かつ $b = -3d$ であることが必要十分である．このとき

$$f(x,y) = ax^3 - 3dx^2y - 3axy^2 + dy^3 = a(x^3 - 3xy^2) + d(y^3 - 3x^2y)$$

であり, $x^3 - 3xy^2, y^3 - 3x^2y$ は 1 次独立だから, $x^3 - 3xy^2, y^3 - 3x^2y$ は $\operatorname{Ker} D$ の基底である．

線形数学 II 小テスト　第 11 回　1 次写像の像

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ とおくとき, $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底を 1 組求めよ.

[解答例 1] A を列に関して基本変形する.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底である.

[解答例 2] $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $(A\ \boldsymbol{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & p \\ 1 & 0 & 3 & 0 & q \\ 0 & 1 & 1 & 1 & r \\ 2 & -1 & 5 & -1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & p \\ 0 & 1 & 1 & 1 & q-p \\ 0 & 1 & 1 & 1 & r \\ 0 & 1 & 1 & 1 & s-2p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & q \\ 0 & 1 & 1 & 1 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r+p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p-q \end{pmatrix}$$

より, この連立 1 次方程式が解をもつ条件は $r+p-q = s-p-q = 0$ が成り立つことである. 従って, $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\, T_A$ であるためには $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ -p+q \\ p+q \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底である.

線形数学 II 演習問題　第５回　１次写像の表現行列

1. 以下で与えるベクトル空間 V と, V の基底 $B = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する V の 1 次変換 f の表現行列を求めよ.

ただし, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ とし, (5) と (8) の行列 A は正則行列であるとする.

(1) $V = \boldsymbol{K}^3$, $B = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right]$, $f = T_A$, ただし $A = \begin{pmatrix} -9 & 8 & 12 \\ 8 & -9 & 12 \\ 12 & 12 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $V = \boldsymbol{K}^3$, $B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$, $f = T_A$, ただし $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(3) $V = \boldsymbol{K}^3$, $B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$, $f = T_A$, ただし $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

(4) $V = \boldsymbol{K}^3$, $B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$, $f = T_A$, ただし $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 9 & -5 \\ -5 & 13 & -7 \end{pmatrix}$.

(5) $V = \{X \in M_2(\boldsymbol{K}) \mid \operatorname{tr} X = 0\}$, $B = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$, $f(X) = AXA^{-1}$.

(6) $V = \{X \in M_3(\boldsymbol{K}) \mid {}^tX = -X\}$, $B = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$, $f(X) = PX - XP$.

(7) $V = M_2(\boldsymbol{K})$, $B = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$, $f(X) = AX$.

(8) $V = M_2(\boldsymbol{K})$, $B = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$, $f(X) = AXA^{-1}$.

(9) $V = P_n(\boldsymbol{K})$, $B = [1, x, \ldots, x^n]$, $f(\varphi(x)) = \varphi(x + a)$.

(10) $V = P_n(\boldsymbol{K})$, $B = [1, x, \ldots, x^n]$, $f(\varphi(x)) = \varphi'(x)$.

2. 以下で与えるベクトル空間 V と V の 2 組の基底 B, B' に対し, B から B' への基底の変換行列を求めよ.

(1) $V = \boldsymbol{K}^3$, $B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$, $B' = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right]$

(2) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \,\middle|\, x + y + z = 0 \right\}$, $B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$, $B' = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$

(3) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \,\middle|\, x + y + z + w = 0 \right\}$, $B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$, $B' = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$

(4) $V = P_2(\boldsymbol{K})$, $B = [3 - 4x - x^2, -2 + 2x + x^2, -2 + 3x + x^2]$, $B' = [1 + x + 2x^2, 2 - x - x^2, 1 + 2x + 3x^2]$

(5) $V = P_3(\boldsymbol{K})$, $B = \left[1, x, \dfrac{x(x-1)}{2}, \dfrac{x(x-1)(x-2)}{6} \right]$, $B' = [1, x, x^2, x^3]$

第 5 回の演習問題の解答

1. A を $m \times n$ 行列とする． $\boldsymbol{K}^n$ の基底 $B = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ と $\boldsymbol{K}^m$ の基底 $B' = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する $T_A : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ の表現行列を $B = \begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix}$ とすれば, $A\boldsymbol{v}_j = T_A(\boldsymbol{v}_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}\boldsymbol{w}_i$ だから

$$\begin{pmatrix} A\boldsymbol{v}_1 & A\boldsymbol{v}_2 & \cdots & A\boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} b_{i1}\boldsymbol{w}_i & \sum\limits_{i=1}^{n} b_{i2}\boldsymbol{w}_i & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} b_{in}\boldsymbol{w}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \cdots & \boldsymbol{w}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

が成り立つ．従って, $Q = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \cdots & \boldsymbol{w}_m \end{pmatrix}$ とおけば $B = Q^{-1}\begin{pmatrix} A\boldsymbol{v}_1 & A\boldsymbol{v}_2 & \cdots & A\boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}$ が成り立つ．

(1) $T_A(\boldsymbol{v}_1) = A\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 34 \\ 34 \\ 51 \end{pmatrix} = 17\boldsymbol{v}_1$, $T_A(\boldsymbol{v}_2) = A\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -17 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} = -17\boldsymbol{v}_2$, $T_A(\boldsymbol{v}_3) = A\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -51 \\ -51 \\ 68 \end{pmatrix} = -17\boldsymbol{v}_3$ となるため, 求める行列は $\begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & -17 \end{pmatrix}$ である．

(2) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$ より $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} =$
$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ である．一方 $T_A(\boldsymbol{v}_1) = A\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $T_A(\boldsymbol{v}_2) = A\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$, $T_A(\boldsymbol{v}_3) = A\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ となるため, 求める行列は $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 10 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 0 & -5 & -9 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ である．

(3) $T_A(\boldsymbol{v}_1) = A\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_1$, $T_A(\boldsymbol{v}_2) = A\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, $T_A(\boldsymbol{v}_3) = A\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{v}_3$ となるため, 求める行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である．

(4) $T_A(\boldsymbol{v}_1) = A\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$, $T_A(\boldsymbol{v}_2) = A\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_2$, $T_A(\boldsymbol{v}_3) = A\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{v}_3$ となるため, 求める行列は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である．

(5) $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ より,

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} -ac & a^2 \\ -c^2 & ac \end{pmatrix}$$
$$= \frac{a^2}{ad-bc}\boldsymbol{v}_1 - \frac{ac}{ad-bc}\boldsymbol{v}_2 - \frac{c^2}{ad-bc}\boldsymbol{v}_3,$$
$$f(\boldsymbol{v}_2) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad+bc & -2ab \\ 2cd & -ad-bc \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{2ab}{ad-bc}\boldsymbol{v}_1 + \frac{ad+bc}{ad-bc}\boldsymbol{v}_2 + \frac{2cd}{ad-bc}\boldsymbol{v}_3,$$
$$f(\boldsymbol{v}_3) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} bd & -b^2 \\ d^2 & -bd \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{b^2}{ad-bc}\boldsymbol{v}_1 + \frac{bd}{ad-bc}\boldsymbol{v}_2 + \frac{d^2}{ad-bc}\boldsymbol{v}_3$$

だから, 求める行列は $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a^2 & -2ab & -b^2 \\ -ac & ad+bc & bd \\ -c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix}$ である.

(6) P, f の定義より,

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & -a & 0 \\ c & 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 \end{pmatrix} = c\boldsymbol{v}_2 - b\boldsymbol{v}_3,$$
$$f(\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -b & 0 & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & -c & 0 \end{pmatrix} = -c\boldsymbol{v}_1 + a\boldsymbol{v}_3,$$
$$f(\boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -c & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -c & 0 & a \\ 0 & -c & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & -b \\ a & b & 0 \end{pmatrix} = b\boldsymbol{v}_1 - a\boldsymbol{v}_2$$

だから, 求める行列は $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = P$ である.

(7) $f(\boldsymbol{v}_1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = a\boldsymbol{v}_1 + c\boldsymbol{v}_2$, $f(\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = b\boldsymbol{v}_1 + d\boldsymbol{v}_2$, $f(\boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = a\boldsymbol{v}_3 + c\boldsymbol{v}_4$, $f(\boldsymbol{v}_4) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = b\boldsymbol{v}_3 + d\boldsymbol{v}_4$ だから, 求

める行列は $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}$ である.

(8) $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ より,

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{v}_1) &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad & -ab \\ cd & -bc \end{pmatrix} \\
&= \frac{ad}{ad-bc}\boldsymbol{v}_1 + \frac{cd}{ad-bc}\boldsymbol{v}_2 - \frac{ab}{ad-bc}\boldsymbol{v}_3 - \frac{bc}{ad-bc}\boldsymbol{v}_4, \\
f(\boldsymbol{v}_2) &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} bd & -b^2 \\ d^2 & -bd \end{pmatrix} \\
&= \frac{bd}{ad-bc}\boldsymbol{v}_1 + \frac{d^2}{ad-bc}\boldsymbol{v}_2 - \frac{b^2}{ad-bc}\boldsymbol{v}_3 - \frac{bd}{ad-bc}\boldsymbol{v}_4, \\
f(\boldsymbol{v}_3) &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} -ac & a^2 \\ -c^2 & ac \end{pmatrix} \\
&= -\frac{ac}{ad-bc}\boldsymbol{v}_1 - \frac{c^2}{ad-bc}\boldsymbol{v}_2 + \frac{a^2}{ad-bc}\boldsymbol{v}_3 + \frac{ac}{ad-bc}\boldsymbol{v}_4, \\
f(\boldsymbol{v}_4) &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} -bc & ab \\ -cd & ad \end{pmatrix} \\
&= -\frac{bc}{ad-bc}\boldsymbol{v}_1 - \frac{cd}{ad-bc}\boldsymbol{v}_2 + \frac{ab}{ad-bc}\boldsymbol{v}_3 + \frac{ad}{ad-bc}\boldsymbol{v}_4
\end{aligned}$$

だから, 求める行列は $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad & bd & -ac & -bc \\ cd & d^2 & -c^2 & -cd \\ -ab & -b^2 & a^2 & ab \\ -bc & -bd & ac & ad \end{pmatrix} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} dA & -cA \\ -bA & aA \end{pmatrix}$ である.

(9) 2 項定理より $f(x^{j-1}) = (x+a)^{j-1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{j}\binom{j-1}{i-1}a^{j-i}x^{i-1}$ だから, 求める行列は $\dbinom{j-1}{i-1}a^{j-i}$ を (i,j) 成分とする $n+1$ 次正方行列である. ただし, $i>j$ のときは $\dbinom{j-1}{i-1} = 0$ とする.

(10) $f(x^{j-1}) = (x^{j-1})' = (j-1)x^{j-2}$ だから, 求める行列は, 第 1 列が $\mathbf{0}$, 第 j 列 $(2 \leqq j \leqq n+1)$ が $(j-1)\boldsymbol{e}_{j-1}$ である $n+1$ 次正方行列である.

2. (1) 求める基底の変換行列を $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$ とおけば, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{31}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{32}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = a_{13}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{33}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$ である.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&-2&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&3&-1&2&1\end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{3}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&-2&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{2}{3}&-\frac{4}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&1&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right)$ より $\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{4}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ である．従って，$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&4&3\\-1&1&-2\\4&8&6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{4}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4&3\\-1&1&-2\\4&8&6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{14}{3}&4&\frac{20}{3}\\-\frac{2}{3}&-1&-\frac{5}{3}\\-\frac{1}{3}&2&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ である．

(2) 求める基底の変換行列を $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ とおけば，$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\-1&-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ である．この等式の両辺の行列の第 1 行と第 2 行を比較すれば，$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ が得られるため，$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix}$ である．

(3) 求める基底の変換行列を $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{pmatrix}$ とおけば，$\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-3\end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-2\end{pmatrix} + a_{31}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\-1&-1&0\\-1&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-2\end{pmatrix} + a_{32}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\-1&-1&0\\-1&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\\2\end{pmatrix} = a_{13}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\-2\end{pmatrix} + a_{33}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\-1&-1&0\\-1&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}$ だから

$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&-2\\0&0&-1\\-3&-1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\-1&-1&0\\-1&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{pmatrix}$ である．この等式の両辺の行列の第 1,2,3 行を比較すれば，$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&-2\\0&0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{pmatrix}$ であり，$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\-1&-1&0&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&-1&1&-1&1&0\\0&1&0&1&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&1\\0&-1&1&-1&1&0\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&0&-2\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)$$

より $\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-1&0&-2\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ が得られるため，$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&-2\\0&0&-1\end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ である.

(4) $P_2(\boldsymbol{K})$ の基底 $[1, x, x^2]$ に関する $3-4x-x^2$, $-2+2x+x^2$, $-2+3x+x^2$, $1+x+2x^2$, $2-x-x^2$, $1+2x+3x^2$ の座標は順に $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ だから, 求める基底の変換行列を $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とおけば,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{31}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{32}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a_{13}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{33}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

だから $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ である. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行}}$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-1\text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$ $\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}}$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$ より $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ が得られるため,

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 0 \\ 7 & 1 & 10 \end{pmatrix}$ である.

(5) $\dfrac{x(x-1)}{2} = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}x^2$, $\dfrac{x(x-1)(x-2)}{6} = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3$ だから, 基底 B' から B への基底の変換行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ である. 教科書の 175 ページの注意と定理 6.21 により, 基底 B から B' への基底の変換行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ である.

線形数学 II 小テスト　第 12 回　次元公式

$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ とおくとき, $\mathrm{Ker}\,T_A$, $\mathrm{Im}\,T_A$ の次元を求めよ.

[解答例] A の階数を求める. $A \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 3-a & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^2-3a+3 & 1 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a^3 \\ 0 & 1 & 0 & -a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & (1-a)^3 \end{pmatrix} \cdots (*)$ より, $a \neq 1$ ならば $\mathrm{rank}\,A = 4$ だから A は正則行列である. この場合は $\mathrm{Ker}\,T_A = \{\mathbf{0}\}$, $\mathrm{Im}\,T_A = \boldsymbol{K}^4$ となり, $\dim \mathrm{Ker}\,T_A = 0$, $\dim \mathrm{Im}\,T_A = 4$ である. $a = 1$ のとき, $(*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, $\dim \mathrm{Im}\,T_A = \mathrm{rank}\,T_A = \mathrm{rank}\,A = 3$ であり, 次元公式から $\dim \mathrm{Ker}\,T_A = \dim \boldsymbol{K}^4 - \mathrm{rank}\,T_A = 4 - 3 = 1$ である.

線形数学 II 小テスト　第 13 回　1 次写像の表現行列

$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) P の逆行列を求めよ.

(2) $\boldsymbol{K}^3$ の基底 $B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$ に関する $\boldsymbol{K}^3$ の 1 次変換 T_A の表現行列を求めよ.

[解答例] (1) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$ より $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ である.

(2) 一般に A を $m \times n$ 行列, $B = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ を $\boldsymbol{K}^n$ の基底, $B' = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ を $\boldsymbol{K}^m$ の基底とするとき, $T_A : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ の表現行列を $A' = \left(a'_{ij}\right)$ とおき, $P = \left(\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_n\right)$, $Q = \left(\boldsymbol{w}_1 \ \boldsymbol{w}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{w}_m\right)$ とおけば, $\boldsymbol{v}_j = P\boldsymbol{e}_j$, $\boldsymbol{w}_i = Q\boldsymbol{e}_i$ より $AP\boldsymbol{e}_j = A\boldsymbol{v}_j = T_A(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a'_{ij}\boldsymbol{w}_i = \sum_{i=1}^{m} a'_{ij}Q\boldsymbol{e}_i = Q\left(\sum_{i=1}^{m} a'_{ij}\boldsymbol{e}_i\right)$ が $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して成り立つ. ここで, $\sum_{i=1}^{m} a'_{ij}\boldsymbol{e}_i$ は A' の第 j 列 $A'\boldsymbol{e}_j$ に他ならないため, 上式から $AP\boldsymbol{e}_j = QA'\boldsymbol{e}_j$ が得られる.

従って, $A' = Q^{-1}AP$ が成り立つ.

とくに $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ の場合, $P = Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ であり, (1) の結果から, B に関する T_A の表現行列は

$$P^{-1}AP = P^{-1}\begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 10 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 0 & -5 & -9 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

線形数学 II 小テスト　第 14 回　1 次写像の表現行列 2

$P_3(\boldsymbol{R})$ の 1 次変換 $F : P_3(\boldsymbol{R}) \to P_3(\boldsymbol{R})$ を $F(f(x)) = (x+1)f'(x) - f(x)$ で定める.

(1) $P_3(\boldsymbol{R})$ の基底 $[1, x, x^2, x^3]$ に関する F の表現行列を求めよ.

(2) $\mathrm{Ker}\, F$ の基底を 1 組求め, 次元を答えよ.

[解答例] (1) $F(1) = -1$, $F(x) = x+1-x = 1$, $F(x^2) = 2x(x+1)-x^2 = 2x+x^2$, $F(x^3) = 3x^2(x+1)-x^3 = 3x^2+2x^3$ より $[1, x, x^2, x^3]$ に関する F の表現行列は $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である.

(2) $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in P_3(\boldsymbol{R})$ が $\mathrm{Ker}\, F$ に属するためには $[1, x, x^2, x^3]$ に関する F の座標が, $[1, x, x^2, x^3]$ に関する F の表現行列を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解であることが必要十分である.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, F の座標 $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ が, この連立 1 次方程式の解であるためには, $a_0 = a_1$, $a_2 = a_3 = 0$ が成り立つことが必要十分である. 従って, $x+1$ は $\mathrm{Ker}\, F$ の基底であり, $\dim \mathrm{Ker}\, F = 1$ である.

線形数学 II 演習問題　第 6 回　行列の対角化

1. 次の行列の固有値と固有空間の基底を求め, 対角化可能ならば対角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \\ -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -5 & 17 & 10 \\ 7 & -21 & -12 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} -6 & -2 & -6 \\ 4 & 3 & 3 \\ 8 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$　(11) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$　(12) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}$　(13) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(14) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　(15) $\begin{pmatrix} -5 & 6 & 4 \\ -7 & 8 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　(16) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(17) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -6 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

(18) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$　(19) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$　(20) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$　(21) $\begin{pmatrix} 3 & -6 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

(22) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(23) $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & -3 \\ -7 & 1 & -6 \end{pmatrix}$　(24) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$　(25) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

(26) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -6 & -8 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　(27) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　(28) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -6 & -5 & 3 \\ -8 & -8 & 5 \end{pmatrix}$　(29) $\begin{pmatrix} -3a+9 & -2 & -a+2 \\ -3a+1 & 0 & -a \\ 9a-18 & 6 & 3a-3 \end{pmatrix}$

(30) $\begin{pmatrix} -6a+5 & 6 & -2a+3 \\ -3a+6 & 5 & -a+3 \\ 18a-18 & -18 & 6a-10 \end{pmatrix}$　(31) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　(32) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(33) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$　(34) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ -5 & -2 & -8 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 8 & -1 \end{pmatrix}$　(35) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -9 & -3 \\ 1 & 3 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

(36) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 7 & -7 & 1 \\ 2 & 10 & -10 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$　(37) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　(38) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & -8 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. 1 次写像 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ をそれぞれ } \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ に写す.}$$

(1) $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ をそれぞれ $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ の 1 次結合で表せ.

(2) $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ に関する f の表現行列を求めよ.

(3) f の固有値を求め, f の固有ベクトルを $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ の 1 次結合で表せ.

第 6 回の演習問題の解答

1. (1) $\begin{vmatrix} t-2 & -3 \\ -1 & t-4 \end{vmatrix} = t^2-6t+5=(t-1)(t-5)$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 5 である. $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ だから 5 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(2) $\begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -4 & t-3 \end{vmatrix} = t^2-4t-5=(t+1)(t-5)$ より, 与えられた行列の固有値は -1 と 5 である. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 5 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(3) $\begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ 0 & t-1 \end{vmatrix} = t^2-4t-5=(t-1)^2$ より, 与えられた行列の固有値は 1 のみである. このとき, 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(4) $\begin{vmatrix} t-3 & -8 & -12 \\ -2 & t-3 & -6 \\ 2 & 4 & t+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & -8 & -12 \\ -2 & t-3 & -6 \\ 0 & t+1 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & 4 & -12 \\ -2 & t+3 & -6 \\ 0 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix} t-3 & 4 \\ -2 & t+3 \end{vmatrix} = (t+1)^2(t-1)$

より, 与えられた行列の固有値は ± 1 である. $\begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ -2 & -2 & -6 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & -6 & -6 \\ -2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -4 & -8 & -12 \\ -2 & -4 & -6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(5) $\begin{vmatrix} t-4 & 1 & 2 \\ -2 & t-1 & 2 \\ -1 & 1 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & -(t-2) & 0 \\ -2 & t-1 & 2 \\ -1 & 1 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & 0 \\ -2 & t-3 & 2 \\ -1 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t-3 & 2 \\ 0 & t-1 \end{vmatrix} =$

$(t-1)(t-2)(t-3)$ より, 与えられた行列の固有値は 1, 2, 3 である. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(6) $\begin{vmatrix} t-1 & -3 & -2 \\ 5 & t-17 & -10 \\ -7 & 21 & t+12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -3 & -2 \\ 5 & t-17 & -10 \\ 7(t-2) & 0 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+13 & -3 & -2 \\ 75 & t-17 & -10 \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t+13 & -3 \\ 75 & t-17 \end{vmatrix} =$ $(t-2)(t^2-4t+4) = (t-2)^3$ より, 与えられた行列の固有値は 2 のみである. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 5 & -15 & -10 \\ -7 & 21 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(7) $\begin{vmatrix} t-4 & -1 & -1 \\ -2 & t-4 & -1 \\ 0 & -1 & t-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-4 & -1 & 0 \\ -2 & t-4 & -(t-3) \\ 0 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-4 & -1 & 0 \\ -2 & t-5 & 0 \\ 0 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-3)\begin{vmatrix} t-4 & -1 \\ -2 & t-5 \end{vmatrix} =$
$(t-3)(t^2-9t+18) = (t-3)^2(t-6)$ より, 与えられた行列の固有値は 3 と 6 である.
$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
だから 6 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(8) $\begin{vmatrix} t-4 & 4 & -2 \\ -2 & t+2 & -1 \\ 4 & -4 & t+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 4 & -2 \\ t & t+2 & -1 \\ 0 & -4 & t+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 4 & -2 \\ 0 & t-2 & 1 \\ 0 & -4 & t+2 \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ -4 & t+2 \end{vmatrix} = t^3$ より, 与えられた行列の固有値は 0 のみである. $\begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 0 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(9) $\begin{vmatrix} t+6 & 2 & 6 \\ -4 & t-3 & -3 \\ -8 & -2 & t-8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 2(t-2) & 0 \\ -4 & t-3 & -3 \\ -8 & -2 & t-8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & 0 \\ -4 & t+5 & -3 \\ -8 & 14 & t-8 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t+5 & -3 \\ 14 & t-8 \end{vmatrix} =$

$(t-2)(t^2-3t+2) = (t-1)(t-2)^2$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 2 である. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 \\ -4 & -2 & -3 \\ -8 & -2 & -7 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & -3 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ -4 & -1 & -3 \\ -8 & -2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(10) $\begin{vmatrix} t-1 & -2 & -1 \\ 1 & t-4 & -1 \\ -2 & 4 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & -(t-2) & 0 \\ 1 & t-4 & -1 \\ -2 & 4 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & 0 \\ 1 & t-3 & -1 \\ -2 & 2 & t \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t-3 & -1 \\ 2 & t \end{vmatrix} = (t-2)(t^2-3t+2) =$

$(t-1)(t-2)^2$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 2 である. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる.

故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(11) $\begin{vmatrix} t-6 & 3 & 7 \\ 1 & t-2 & -1 \\ -5 & 3 & t+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -(t-1) \\ 1 & t-2 & -1 \\ -5 & 3 & t+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 1 & t-2 & 0 \\ -5 & 3 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} t-2 & 0 \\ 3 & t+1 \end{vmatrix} =$

$(t+1)(t-1)(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は ± 1 と 2 である. $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$\begin{pmatrix} -7 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -18 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & -12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -18 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空

間の基底は $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}-4&3&7\\1&0&-1\\-5&3&8\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&3&3\\1&0&-1\\0&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&3&3\\1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ に対角化される.

(12) $\begin{vmatrix}t-1&-3&2\\3&t-13&7\\5&-19&t+10\end{vmatrix} = (t-1)(t-13)(t+10)-114-105+9(t+10)+133(t-1)-10(t-13) = t^3-4t^2+5t-2=(t-1)(t^2-3t+2)=(t-1)^2(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 2 である. $\begin{pmatrix}0&-3&2\\3&-12&7\\5&-19&11\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 2 行を }-2\text{ 倍して}}\begin{pmatrix}0&-3&2\\3&-12&7\\-1&5&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&-3&2\\0&3&-2\\-1&5&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&-2\\-1&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}1&-3&2\\3&-11&7\\5&-19&12\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-3&2\\0&-2&1\\0&-4&2\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(2,3)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(13) $\begin{vmatrix}t-5&2&-4\\-2&t&-2\\2&-1&t+1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-5&2&-4\\-2&t&-2\\0&t-1&t-1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-5&6&-4\\-2&t+2&-2\\0&0&t-1\end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix}t-5&6\\-2&t+2\end{vmatrix} = (t-1)(t^2-3t+2)=(t-1)^2(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 2 である. $\begin{pmatrix}-4&2&-4\\-2&1&-2\\2&-1&2\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}-3&2&-4\\-2&2&-2\\2&-1&3\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-2&2&-2\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&0&-4\\0&1&1\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}1&0&2\\2&2&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ に対角化される.

(14) $\begin{vmatrix}t+1&-2&-2\\-3&t+1&4\\2&-2&t-3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t+1&-2&-2\\-3&t+1&4\\-(t-1)&0&t-1\end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix}t+1&-2&-2\\-3&t+1&4\\-1&0&1\end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix}t-1&-2&-2\\1&t+1&4\\0&0&1\end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix}t-1&-2\\1&t+1\end{vmatrix} = (t-1)(t^2+1)$ より, 与えられた行列の固有値は $1, \pm i$ である. $\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-3&2&4\\2&-2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix}2&-2&-2\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}2&0&-4\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる.

$\begin{pmatrix} i+1 & -2 & -2 \\ -3 & i+1 & 4 \\ 2 & -2 & i-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 1 行を } -1 \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} i+1 & -2 & -2 \\ -3 & i+1 & 4 \\ -(i-1) & 0 & i-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{i-1}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} i+1 & -2 & -2 \\ -3 & i+1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} i-1 & -2 & 0 \\ 1 & i+1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & i+1 & 0 \\ 0 & i+1 & 1 \end{pmatrix}$ だから i に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \\ 1+i \end{pmatrix}$ で与えられる.
$\begin{pmatrix} -i+1 & -2 & -2 \\ -3 & -i+1 & 4 \\ 2 & -2 & -i-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 1 行を } -1 \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} -i+1 & -2 & -2 \\ -3 & -i+1 & 4 \\ i+1 & 0 & -(i+1) \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{i+1}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} -i+1 & -2 & -2 \\ -3 & -i+1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -i-1 & -2 & 0 \\ 1 & -i+1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i+1 & 0 \\ 0 & i-1 & -1 \end{pmatrix}$ だから $-i$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \\ 1-i \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 2 & 1+i & 1-i \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1+i & 1-i \end{pmatrix}$ によって対角行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$ に対角化される.

(15) $\begin{vmatrix} t+5 & -6 & -4 \\ 7 & t-8 & -4 \\ 2 & -2 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & -(t-2) & 0 \\ 7 & t-8 & -4 \\ 2 & -2 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & 0 \\ 7 & t-1 & -4 \\ 2 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t-1 & -4 \\ 0 & t-3 \end{vmatrix} =$
$(t-1)(t-2)(t-3)$ より, 与えられた行列の固有値は $1, 2, 3$ である. $\begin{pmatrix} 6 & -6 & -4 \\ 7 & -7 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & -4 \\ 7 & -6 & -4 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 8 & -6 & -4 \\ 7 & -5 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(16) $\begin{vmatrix} t+1 & 0 & -2 \\ 1 & t-1 & -1 \\ 1 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} t+1 & -2 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix} = t(t-1)^2$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 0 である.
$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる.
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 0 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に,

与えられた行列は $\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ に対角化される.

(17) $\begin{vmatrix}t-5&0&6\\-3&t+1&3\\-3&0&t+4\end{vmatrix}=(t+1)\begin{vmatrix}t-5&6\\-3&t+4\end{vmatrix}=(t+1)(t^2-t-2)=(t+1)^2(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は -1 と 2 である. $\begin{pmatrix}-6&0&6\\-3&0&3\\-3&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&0\\-3&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}-3&0&6\\-3&3&3\\-3&0&6\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-3&0&6\\0&3&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ に対角化される.

(18) $\begin{vmatrix}t+4&0&-6\\3&t-2&-3\\3&0&t-5\end{vmatrix}=(t-2)\begin{vmatrix}t+4&-6\\3&t-5\end{vmatrix}=(t-2)(t^2-t-2)=(t+1)(t-2)^2$ より, 与えられた行列の固有値は -1 と 2 である. $\begin{pmatrix}3&0&-6\\3&-3&-3\\3&0&-6\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}3&0&-6\\0&-3&3\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}6&0&-6\\3&0&-3\\3&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}6&0&-6\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ に対角化される.

(19) $\begin{vmatrix}t-1&0&2\\-2&t+1&2\\2&-2&t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-1&0&2\\-(t+1)&t+1&0\\2&-2&t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-1&0&2\\0&t+1&0\\0&-2&t\end{vmatrix}=(t+1)\begin{vmatrix}t-1&2\\0&t\end{vmatrix}=t(t+1)(t-1)$ より, 与えられた行列の固有値は $0, \pm 1$ である. $\begin{pmatrix}-2&0&2\\-2&0&2\\2&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-2&0&2\\0&0&0\\0&-2&1\end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}-1&0&2\\-2&1&2\\2&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-2\\0&-2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 0 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}0&0&2\\-2&2&2\\2&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&2\\-2&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&2\\-2&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は

$\begin{pmatrix}2&2&1\\1&2&1\\2&1&0\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ に対角化される.

(20) $\begin{vmatrix}t-1&-2&3\\1&t&-1\\1&-2&t+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-1&-2&3\\1&t&-1\\0&-(t+2)&t+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-1&1&3\\1&t-1&-1\\0&0&t+2\end{vmatrix}=(t+2)\begin{vmatrix}t-1&1\\1&t-1\end{vmatrix}=(t+2)(t^2-2t)=$ $t(t+2)(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は $-2, 0, 2$ である. $\begin{pmatrix}-3&-2&3\\1&-2&-1\\1&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&-8&0\\1&-2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&-8&0\\1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから -2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}-1&-2&3\\1&0&-1\\1&-2&1\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&-2&2\\1&0&-1\\0&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&-2&2\\1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 0 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&2&-1\\1&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&4&-4\\0&0&0\end{pmatrix}D\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&4&-4\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ に対角化される.

(21) $\begin{vmatrix}t-3&6&4\\-1&t+2&2\\1&-3&t-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-3&6&4\\-1&t+2&2\\0&t-1&t-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-3&2&4\\-1&t&2\\0&0&t-1\end{vmatrix}=(t-1)\begin{vmatrix}t-3&2\\-1&t\end{vmatrix}=(t-1)(t^2-3t+2)=$ $(t-1)^2(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 2 である.
$\begin{pmatrix}-2&6&4\\-1&3&2\\1&-3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&3&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ で与えられる.
$\begin{pmatrix}-1&6&4\\-1&4&2\\1&-3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-1&6&4\\0&-2&-2\\0&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-1&0&-2\\0&-2&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}3&2&2\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ に対角化される.

(22) $\begin{vmatrix}t-3&-1&1\\-2&t-3&2\\-1&-1&t-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-2&0&-(t-2)\\-2&t-3&2\\-1&-1&t-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-2&0&0\\-2&t-3&0\\-1&-1&t-2\end{vmatrix}=(t-2)\begin{vmatrix}t-3&0\\-1&t-2\end{vmatrix}=$ $(t-2)^2(t-3)$ より, 与えられた行列の固有値は 2 と 3 である. $\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-2&-1&2\\-1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}0&-1&1\\-2&0&2\\-1&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&-1&1\\-2&0&2\\0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(23) $\begin{vmatrix} t-6 & 1 & -5 \\ 3 & t-2 & 3 \\ 7 & -1 & t+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & 0 & t+1 \\ 3 & t-2 & 3 \\ 7 & -1 & t+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & 0 & 0 \\ 3 & t-2 & 0 \\ 7 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t-2 & 0 \\ -1 & t-1 \end{vmatrix} =$ $(t+1)(t-1)(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は $\pm 1, 2$ である. $\begin{pmatrix} -7 & 1 & -5 \\ 3 & -3 & 3 \\ 7 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -5 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 7 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -5 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(24) $\begin{vmatrix} t-2 & 1 & -1 \\ -1 & t+2 & -1 \\ -1 & 5 & t-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 1 & 0 \\ -1 & t+2 & t+1 \\ -1 & 5 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 1 & 0 \\ 0 & t-3 & 0 \\ -1 & 5 & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t+1)(t-2)(t-3)$ より, 与えられた行列の固有値は $-1, 2, 3$ である. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(25) $\begin{vmatrix} t-4 & 5 & -1 \\ -3 & t+4 & -1 \\ -3 & 5 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -(t-1) & 0 \\ -3 & t+4 & -1 \\ -3 & 5 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ -3 & t+1 & -1 \\ -3 & 2 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t+1 & -1 \\ 2 & t-2 \end{vmatrix} =$

$(t-1)(t^2-t)=t(t-1)^2$ より, 与えられた行列の固有値は 0 と 1 である. $\begin{pmatrix}-3&5&-1\\-3&5&-1\\-3&5&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-3&5&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}-4&5&-1\\-3&4&-1\\-3&5&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-4&5&-1\\1&-1&0\\3&-3&0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 0 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-3&5&1\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ に対角化される.

(26) $\begin{vmatrix}t-3&-3&1\\6&t+8&-3\\-2&-3&t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-1&0&-(t-1)\\6&t+8&-3\\-2&-3&t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-1&0&0\\6&t+8&3\\-2&-3&t-2\end{vmatrix}=(t-1)\begin{vmatrix}t+8&3\\-3&t-2\end{vmatrix}=$

$(t-1)(t^2+6t-7)=(t-1)^2(t+7)$ より, 与えられた行列の固有値は -7 と 1 である.

$\begin{pmatrix}-2&-3&1\\6&9&-3\\-2&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-2&-3&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ で与えられる.

$\begin{pmatrix}-10&-3&1\\6&1&-3\\-2&-3&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-10&-3&1\\-24&-8&0\\-72&-24&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-1&0&1\\-24&-8&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから -7 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\2&3&1\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-7\end{pmatrix}$ に対角化される.

(27) $\begin{vmatrix}t-4&-6&-2\\1&t-4&-2\\-2&-1&t-1\end{vmatrix}=(t-4)^2(t-1)+2-24+6(t-1)-2(t-4)-4(t-4)=t^3-9t^2+24t-20=(t-2)(t^2-7t+10)$

$=(t-2)^2(t-5)$ より, 与えられた行列の固有値は 2 と 5 である. $\begin{pmatrix}-2&-6&-2\\1&-2&-2\\-2&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&-10&-6\\1&-2&-2\\0&-5&-3\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&\frac{4}{3}&0\\0&-5&-3\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}1&-6&-2\\1&1&-2\\-2&-1&4\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-6&-2\\0&7&0\\0&-13&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&7&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 5 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(28) $\begin{vmatrix}t-3&-2&1\\6&t+5&-3\\8&8&t-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-1&-2&1\\-(t-1)&t+5&-3\\0&8&t-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-1&-2&1\\0&t+3&-2\\0&8&t-5\end{vmatrix}=(t-1)\begin{vmatrix}t+3&-2\\8&t-5\end{vmatrix}=$

$(t-1)(t^2-2t+1)=(t-1)^3$ より, 与えられた行列の固有値は 1 のみである. $\begin{pmatrix}-2&-2&1\\6&6&-3\\8&8&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(29) $\begin{vmatrix}t+3a-9 & 2 & a-2\\ 3a-1 & t & a\\ -9a+18 & -6 & t-3a+3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t+3a-9 & 2 & a-2\\ 3a-1 & t & a\\ 3(t-3) & 0 & t-3\end{vmatrix} = (t-3)\begin{vmatrix}t+3a-9 & 2 & a-2\\ 3a-1 & t & a\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix} =$
$(t-3)\begin{vmatrix}t-3 & 2 & a-2\\ -1 & t & a\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = (t-3)\begin{vmatrix}t-3 & 2\\ -1 & t\end{vmatrix} = (t-3)(t^2-3t+2) = (t-1)(t-2)(t-3)$ より, 与えられた行列の固有値は 1, 2, 3 である. $\begin{pmatrix}3a-8 & 2 & a-2\\ 3a-1 & 1 & a\\ -9a+18 & -6 & -3a+4\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行を第 3 行に加える}]{\text{第 1 行を 2 倍したものと}} \begin{pmatrix}3a-8 & 2 & a-2\\ 3a-1 & 1 & a\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}3a-6 & 0 & a-2\\ 3a & 0 & a\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行に加える}]{\text{第 2 行を } -1 \text{ 倍して}} \begin{pmatrix}-6 & 0 & -2\\ 3a & 0 & a\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix}-6 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}3a-7 & 2 & a-2\\ 3a-1 & 2 & a\\ -9a+18 & -6 & -3a+5\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行を第 3 行に加える}]{\text{第 1 行を 2 倍したものと}} \begin{pmatrix}3a-7 & 2 & a-2\\ 3a-1 & 2 & a\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}-6 & 0 & -2\\ 3a-1 & 2 & a\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}2\\1\\-6\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}3a-6 & 2 & a-2\\ 3a-1 & 3 & a\\ -9a+18 & -6 & -3a+6\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行を第 3 行に加える}]{\text{第 1 行を 2 倍したものと}} \begin{pmatrix}3a-6 & 2 & a-2\\ 3a-1 & 3 & a\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}3a-16 & 0 & a-6\\ 3a-16 & 0 & a-6\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行に加える}]{\text{第 2 行を } -1 \text{ 倍して}} \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 3a-16 & 0 & a-6\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}-a+6\\-a+2\\3a-16\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}1 & 2 & -a+6\\ 1 & 1 & -a+2\\ -3 & -6 & 3a-16\end{pmatrix}$ によって対角行列 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ に対角化される.

(30) $\begin{vmatrix}t+6a-5 & -6 & 2a-3\\ 3a-6 & t-5 & a-3\\ -18a+18 & 18 & t-6a+10\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t+6a-5 & -6 & 2a-3\\ 3a-6 & t-5 & a-3\\ 3(t+1) & 0 & t+1\end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix}t+6a-5 & -6 & 2a-3\\ 3a-6 & t-5 & a-3\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix} =$
$(t+1)\begin{vmatrix}t+4 & -6 & 2a-3\\ 3 & t-5 & a-3\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix}t+4 & -6\\ 3 & t-5\end{vmatrix} = (t+1)(t^2-t-2) = (t+1)^2(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は -1 と 2 である. $\begin{pmatrix}6a-6 & -6 & 2a-3\\ 3a-6 & -6 & a-3\\ -18a+18 & 18 & -6a+9\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}6a-6 & -6 & 2a-3\\ -3a & 0 & -a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \cdots (*)$ だから, $a=0$ ならば -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ で与えられる. $a \neq 0$ ならば $(*) \xrightarrow[-\frac{1}{a} \text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix}6a-6 & -6 & 2a-3\\ 3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$\begin{pmatrix} 6a-3 & -6 & 2a-3 \\ 3a-6 & -3 & a-3 \\ -18a+18 & 18 & -6a+12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 3a-6 & -3 & a-3 \\ -18 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $a=0$ ならば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ によって対角行列 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対角化され, $a \neq 0$ ならば対角化不可能である.

(31) $\begin{vmatrix} t & 0 & 0 & -1 \\ 2 & t & 2 & 0 \\ -3 & -1 & t-3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 0 & 0 & -1 \\ -3t+2 & 0 & t^2-3t+2 & t \\ -3 & -1 & t-3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 0 & -1 \\ -3t+2 & t^2-3t+2 & t \\ 2 & 0 & t-3 \end{vmatrix} =$ $(t-1)(t-2)\begin{vmatrix} t & -1 \\ 2 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)(t^2-3t+2) = (t-1)^2(t-2)^2$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 2 である. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(1,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ によって対角行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(32) $\begin{vmatrix} t+4 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & t+1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & t+1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & t-5 \end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix} t+4 & 0 & -3 \\ -3 & t+1 & 3 \\ 6 & 0 & t-5 \end{vmatrix} = (t+1)^2\begin{vmatrix} t+4 & -3 \\ 6 & t-5 \end{vmatrix} = (t+1)^2(t^2-t+2)$ $(t+1)^3(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は -1 と 2 である. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

だから -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}6&0&0&-3\\-3&3&0&3\\0&0&3&0\\6&0&0&-3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(1,4) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix}6&0&0&-3\\3&3&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\1&0&0&2\end{pmatrix}$ によって対角行列 $\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ に対角化される.

(33) $\begin{vmatrix}t+3&2&2&-1\\-2&t-3&-2&0\\-3&-1&t-2&1\\4&2&2&t-2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-1&0&0&-t+1\\-2&t-3&-2&0\\-3&-1&t-2&1\\4&2&2&t-2\end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix}1&0&0&-1\\-2&t-3&-2&0\\-3&-1&t-2&1\\4&2&2&t-2\end{vmatrix} =$ $(t-1)(t-2)\begin{vmatrix}t&-1\\2&t-3\end{vmatrix} = (t-1)(t-2)(t^2-3t+2) = (t-1)^2(t-2)^2$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と 2 である. $\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\2&1&2&0\\-3&-1&-2&1\\2&0&0&-2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&2&2\\0&-1&-2&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&2&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}2&0&0&-1\\2&2&2&0\\-3&-1&-1&1\\2&0&0&-1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(1,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix}2&0&0&-1\\2&2&2&0\\-1&-1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}2&0&0&-1\\0&0&0&0\\-1&-1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}0&1&1&0\\-2&-2&0&1\\1&0&-1&-1\\0&1&2&0\end{pmatrix}$ によって対角行列 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ に対角化される.

(34) $\begin{vmatrix}t-3&-2&-4&-1\\5&t+2&8&-1\\-2&0&t-4&2\\-5&-2&-8&t+1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-3&-2&-4&-1\\5&t+2&8&-1\\-2&0&t-4&2\\0&t&0&t\end{vmatrix} = t\begin{vmatrix}t-3&-2&-4&-1\\5&t+2&8&-1\\-2&0&t-4&2\\0&1&0&1\end{vmatrix} =$ $t\begin{vmatrix}t-3&-1&-4&-1\\5&t+3&8&-1\\-2&-2&t-4&2\\0&0&0&1\end{vmatrix} = t\begin{vmatrix}t-3&-1&-4\\5&t+3&8\\-2&-2&t-4\end{vmatrix} = t\begin{vmatrix}t-2&-1&-4\\-(t-2)&t+3&8\\0&-2&t-4\end{vmatrix} = t(t-2)\begin{vmatrix}1&-1&-4\\-1&t+3&8\\0&-2&t-4\end{vmatrix} =$ $t(t-2)\begin{vmatrix}1&-1&-4\\0&t+2&4\\0&-2&t-4\end{vmatrix} = t(t-2)\begin{vmatrix}t+2&4\\-2&t-4\end{vmatrix} = t^2(t-2)^2$ より, 与えられた行列の固有値は 0 と 2 である.

$\begin{pmatrix}-3&-2&-4&-1\\5&2&8&-1\\-2&0&-4&2\\-5&-2&-8&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&-2&2&-4\\0&2&-2&4\\-2&0&-4&2\\0&-2&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&2&-2&4\\-2&0&-4&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ だから 0 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}-1&-2&-4&-1\\5&4&8&-1\\-2&0&-2&2\\-5&-2&-8&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-1&-2&-4&-1\\0&-6&-12&-6\\0&4&6&4\\0&8&12&8\end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\0&-6&-12&-6\\0&0&-2&0\\0&0&-4&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\0&-6&0&-6\\0&0&-2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は対角化不可能である.

(35) $\begin{vmatrix}t-4&-6&9&3\\-1&t-3&3&1\\-2&-4&t+5&2\\-1&-2&3&t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-4&-6&9&3\\-1&t-3&3&1\\-2&-4&t+5&2\\0&-(t-1)&0&t-1\end{vmatrix}=(t-1)\begin{vmatrix}t-4&-6&9&3\\-1&t-3&3&1\\-2&-4&t+5&2\\0&-1&0&1\end{vmatrix}=$
$(t-1)\begin{vmatrix}t-4&-3&9&3\\-1&t-2&3&1\\-2&-2&t+5&2\\0&0&0&1\end{vmatrix}=(t-1)\begin{vmatrix}t-4&-3&9\\-1&t-2&3\\-2&-2&t+5\end{vmatrix}=(t-1)\begin{vmatrix}t-4&-3&9\\-1&t-2&3\\0&-2(t-1)&t-1\end{vmatrix}=$
$(t-1)^2\begin{vmatrix}t-4&-3&9\\-1&t-2&3\\0&-2&1\end{vmatrix}=(t-1)^2\begin{vmatrix}t-4&15&9\\-1&t+4&3\\0&0&1\end{vmatrix}=(t-1)^2\begin{vmatrix}t-4&15\\-1&t+4\end{vmatrix}=(t-1)^3(t+1)$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と -1 である. $\begin{pmatrix}-3&-6&9&3\\-1&-2&3&1\\-2&-4&6&2\\-1&-2&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&-2&3&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}-5&-6&9&3\\-1&-4&3&1\\-2&-4&4&2\\-1&-2&3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&14&-6&-2\\-1&-4&3&1\\0&4&-2&0\\0&2&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix}0&12&-6&0\\-1&-3&3&0\\0&4&-2&0\\0&2&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&3&0&0\\0&4&-2&0\\0&2&0&-2\end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}3\\1\\2\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}-2&3&1&3\\1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ によって対角行列 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ に対角化される.

(36) $\begin{vmatrix} t-3 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & t-7 & 7 & -1 \\ -2 & -10 & t+10 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & t+3 & -(t+3) & 0 \\ -2 & -10 & t+10 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & t-1 \end{vmatrix} = (t+3)\begin{vmatrix} t-3 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -10 & t+10 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & t-1 \end{vmatrix} =$

$(t+3)\begin{vmatrix} t-3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -10 & t & -1 \\ 0 & 4 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t+3)\begin{vmatrix} t-3 & 1 & -1 \\ -2 & t & -1 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t+3)(t-1)\begin{vmatrix} t-3 & 1 \\ -2 & t \end{vmatrix} = (t+3)(t-1)(t^3-3t+2) =$

$(t+3)(t-1)^2(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は $-3,\ 1,\ 2$ である. $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & -6 & 7 & -1 \\ -2 & -10 & 11 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(1,4) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ で

与えられる. $\begin{pmatrix} -6 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & -10 & 7 & -1 \\ -2 & -10 & 7 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -6 & -3 & 4 & 0 \\ -2 & -11 & 8 & 0 \\ -2 & -11 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -6 & -3 & 4 & 0 \\ 10 & -5 & 0 & 0 \\ 10 & -5 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -12 & 0 & 4 & 0 \\ 10 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ だから -3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 7 & -1 \\ -2 & -10 & 12 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}}$

$\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行

列は $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ によって対角行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(37) $\begin{vmatrix} t+1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & t-1 & -1 & 0 \\ -a & -1 & t-a & -2 \\ -1 & -1 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & t-1 & -1 & 0 \\ t-a+1 & 0 & t-a+1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t-a+1)\begin{vmatrix} t+1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & t-1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & t-3 \end{vmatrix} =$

$(t-a+1)\begin{vmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 0 & t-1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t-a+1)\begin{vmatrix} t & 1 & 2 \\ 0 & t-1 & 0 \\ -1 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-a+1)(t-1)\begin{vmatrix} t & 2 \\ -1 & t-3 \end{vmatrix} =$

$(t-a+1)(t-1)(t^2-3t+2) = (t-a+1)(t-1)^2(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は $1,\ 2,\ a-1$ であ

る. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -a & -1 & 1-a & -2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -a & -1 & 2-a & -2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -a-1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -a+3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は, $a=3$ ならば $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられ, $a \neq 3$ ならば $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $a \neq 2, 3$ の場合, $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ -1 & a-2 & -1 & 0 \\ -a & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & a-4 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & a^2-2a+1 & -a+1 & 2 \\ -1 & a-2 & -1 & 0 \\ 0 & -a^2+2a-1 & a-1 & -2 \\ 0 & -a+1 & 1 & a-4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{に加える}]{\text{第 1 行を第 3 行}} \begin{pmatrix} 0 & a^2-2a+1 & -a+1 & 2 \\ -1 & a-2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a+1 & 1 & a-4 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{して第 1 行に加える}]{\text{第 4 行を } a-1 \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (a-2)(a-3) \\ -1 & a-2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a+1 & 1 & a-4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (a-2)(a-3) \\ -1 & a-2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(4,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (a-2)(a-3) \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ だから $a-1$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. 以上から, $a=3$ の場合, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ によって対角行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対角化され, $a=2$ の場合, 与えられた行列は対角化不可能, $a \neq 2, 3$ の場合, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ によって対角行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(38) $\begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & t+3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & t-1 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & t-3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & t+3 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & t-1 & -4 \\ -2 & -4 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t+1)(t-1) \begin{vmatrix} t+3 & 0 & 2 \\ 8 & t-1 & -4 \\ -4 & 0 & t-3 \end{vmatrix} =$

$(t+1)(t-1)^2\begin{vmatrix} t+3 & 2 \\ -4 & t-3 \end{vmatrix} = (t+1)^2(t-1)^3$ より, 与えられた行列の固有値は 1, -1 である.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow[\text{第 5 列の掃き出し}]{\text{(5,5) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 8 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

によって対角行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対角化される.

2. (1) $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{w}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $(= A$ とおく)

(3) f の固有値は f の行列表現 A の固有値だから上の結果から 0, 1, 3. また, これらに対する固有ベクトルはそれぞれ $k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $(k \neq 0)$ となるため, f の固有値 0, 1, 3 に対する固有ベクトルは順に $k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$, $k(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})$, $k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-2\boldsymbol{w})$ となる.

線形数学 II 小テスト　第 15 回　基底の変換行列

$\boldsymbol{K}^3$ の部分空間 $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \,\middle|\, x+y+z=0\right\}$ と, その基底 $B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right]$, $B' = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right]$ に対し, B から B' への基底の変換行列を求めよ.

[解答例] 求める基底の変換行列を $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ とおけば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ である. この等式の両辺の行列の第 1 行と第 2 行を比較すれば, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が得られるため, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ である.

線形数学 II 小テスト　第 16 回　固有値の計算

$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ.

[解答例] $\begin{vmatrix} t+4 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & t+1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & t+1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & t-5 \end{vmatrix} = (t+1)^2\begin{vmatrix} t+4 & -3 \\ 6 & t-5 \end{vmatrix} = (t+1)^2(t^2-t+2) = (t+1)^3(t-2)$ より, 与えられた行列の固有値は -1 と 2 である.

線形数学 II 小テスト　第 17 回　固有値と固有空間

行列 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と, 各固有値に対する固有空間の基底を 1 組ずつ求めよ.

[解答例] $\begin{vmatrix} t-1 & 2 & 1 \\ -4 & t-7 & -2 \\ 2 & 2 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 1 \\ -4 & t-3 & -2 \\ 2 & -2(t-3) & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 1 \\ -4 & t-3 & -2 \\ -6 & 0 & t-6 \end{vmatrix} = (t-3)\begin{vmatrix} t-1 & 1 \\ -6 & t-6 \end{vmatrix} =$ $(t-3)^2(t-4)$ より, 与えられた行列の固有値は 3 と 4 である. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 4 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる.

線形数学 II 小テスト　第 18 回　行列の対角化

$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 3 & 5 & 3 \\ -12 & -12 & -10 \end{pmatrix}$ の固有値と, 各固有値に対する固有空間の基底を 1 組求め, 対角化可能ならば対角化せよ.

[解答例] $\begin{vmatrix} t-8 & -6 & -6 \\ -3 & t-5 & -3 \\ 12 & 12 & t+10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-8 & 0 & -6 \\ -3 & t-2 & -3 \\ 12 & -(t-2) & t+10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-8 & 0 & -6 \\ -3 & t-2 & -3 \\ 9 & 0 & t+7 \end{vmatrix} = (t-2)\begin{vmatrix} t-8 & -6 \\ 9 & t+7 \end{vmatrix} =$ $(t-2)(t^2-t-2) = (t+1)(t-2)^2$ より, 与えられた行列の固有値は -1 と 2 である. $\begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ -3 & -3 & -3 \\ 12 & 12 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -9 & -6 & -6 \\ -3 & -6 & -3 \\ 12 & 12 & 9 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 0 & -12 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 3 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対角化される.

線形数学 II 小テスト　第 19 回　行列の n 乗

行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ の n 乗を求めよ.

[解答例] A の固有方程式は $x^2 - 5x + 6 = 0$ だから, 固有値は 2 と 3 である. 2, 3 に対する固有ベクトルとして, それぞれ $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとり, $P = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ である. 従って $A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}$ だから, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ より $A^n = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 3{\cdot}2^n - 2{\cdot}3^n & 6{\cdot}2^n - 6{\cdot}3^n \\ -2^n + 3^n & -2^{n+1} + 3^{n+1} \end{pmatrix}$.

線形数学 II 演習問題　第 7 回　計量ベクトル空間

1. 以下で与える計量ベクトル空間 V に対し, 与えられた V の基底 $B = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ をシュミットの直交化法によって正規直交化せよ. ただし (1)〜(14) の内積は標準内積とする.

(1) $V = \boldsymbol{R}^3$, $B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$.　(2) $V = \boldsymbol{R}^3$, $B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$.

(3) $V = \boldsymbol{R}^3$, $B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$.　(4) $V = \boldsymbol{R}^3$, $B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$.

(5) $V = \boldsymbol{R}^3$, $B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.　(6) $V = \boldsymbol{R}^3$, $B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right]$.

(7) $V = \boldsymbol{R}^3$, $B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.　(8) $V = \boldsymbol{R}^3$, $B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$.

(9) $V = \boldsymbol{C}^3$, $B = \left[\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -i \\ -i \end{pmatrix}\right]$.　(10) $V = \boldsymbol{R}^4$, $B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right]$.

(11) $V = \boldsymbol{R}^4$, $B = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.　(12) $V = \boldsymbol{R}^4$, $B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$.

(13) $V = \boldsymbol{R}^4$, $B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.　(14) $V = \boldsymbol{R}^4$, $B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.

(15) $V = P_3(\boldsymbol{R})$, $(f(x), g(x)) = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$ $(f(x), g(x) \in V)$, $B = [1, x, x^2, x^3]$.

2. 以下で与えられる $\boldsymbol{R}^3$ の基底を $\boldsymbol{R}^3$ の標準内積に関して正規直交化し, 与えられた基底から, 正規直交化して得られる基底への変換行列を求めよ.

(1) $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}\right]$　(2) $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$　(3) $\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$　(4) $\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right]$

3. 以下の連立 1 次方程式の解全体からなる $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間の正規直交基底を 1 組求めよ.

(1) $\begin{cases} x + y - 2z - w = 0 \\ y - z + w = 0 \\ 2x + 3y - 5z - w = 0 \\ x - z - 2w = 0 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x - y - z + 2w = 0 \\ y + z - w = 0 \\ 2x - y - z + 3w = 0 \\ x - 2y - 2z + 3w = 0 \end{cases}$

第 7 回の演習問題の解答

1. (1) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = 2$, $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = 1$ より $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = -1$, $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = -\dfrac{3}{2}$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2 = \dfrac{3}{2}$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2 = 12$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ である.

(2) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = 2$, $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = 1$ より $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = -1$, $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = \dfrac{15}{2}$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2 = \dfrac{11}{2}$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{15}{22}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{6}{11}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2 = \dfrac{36}{11}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$ である.

(3) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = 3$, $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = -1$ より $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = 4$, $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = \dfrac{19}{3}$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2 = \dfrac{14}{3}$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \dfrac{19}{42}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2 = \dfrac{1}{14}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ である.

(4) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = 9$, $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = 3$ より $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = 4$, $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = \dfrac{2}{3}$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2 = 1$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{4}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \dfrac{2}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$\dfrac{5}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2=\dfrac{25}{9}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは

$\left[\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}, \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right]$ である.

(5) $\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2=2$, $(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1)=1$ より $\boldsymbol{w}_2=\boldsymbol{v}_2-\dfrac{(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$.

$(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_1)=1$, $(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_2)=\dfrac{1}{2}$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2=\dfrac{3}{2}$ より $\boldsymbol{w}_3=\boldsymbol{v}_3-\dfrac{(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1-\dfrac{(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}=$

$\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2=\dfrac{4}{3}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは

$\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right]$ である.

(6) $\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2=2$, $(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1)=-1$ より $\boldsymbol{w}_2=\boldsymbol{v}_2-\dfrac{(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$.

$(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_1)=-1$, $(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_2)=-\dfrac{1}{2}$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2=\dfrac{11}{2}$ より $\boldsymbol{w}_3=\boldsymbol{v}_3-\dfrac{(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1-\dfrac{(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}+\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+$

$\dfrac{1}{22}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}=\dfrac{7}{11}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2=\dfrac{49}{11}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは

$\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\right]$ である.

(7) $\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2=3$, $(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1)=-1$ より $\boldsymbol{w}_2=\boldsymbol{v}_2-\dfrac{(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

$(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_1)=0$, $(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_2)=2$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2=\dfrac{8}{3}$ より $\boldsymbol{w}_3=\boldsymbol{v}_3-\dfrac{(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1-\dfrac{(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$,

$\|\boldsymbol{w}_3\|^2=\dfrac{1}{2}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは

$\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]$ である.

(8) $\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2=6$, $(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1)=3$ より $\boldsymbol{w}_2=\boldsymbol{v}_2-\dfrac{(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\dfrac{5}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = 7,\ (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = -\frac{5}{2},\ \|\boldsymbol{w}_2\|^2 = \frac{25}{2}$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{7}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{7}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \|\boldsymbol{w}_3\|^2 = \frac{49}{3}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$ である.

(9) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix},\ \|\boldsymbol{w}_1\|^2 = 4,\ (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = 2-2i$ より $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} - \frac{1-i}{2}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 1+3i \end{pmatrix}$. $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = 2,\ (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = -2,\ \|\boldsymbol{w}_2\|^2 = 4$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ -i \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 1+3i \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2i \\ -1-3i \\ 1+i \end{pmatrix},\ \|\boldsymbol{w}_3\|^2 = 1$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 1+3i \end{pmatrix}, \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2i \\ -1-3i \\ 1+i \end{pmatrix}\right]$ である.

(10) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \|\boldsymbol{w}_1\|^2 = 4,\ (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = -4$ より $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = 0,\ \|\boldsymbol{w}_2\|^2 = 16$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. $(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_1) = 4$, $(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_2) = -16,\ (\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_3) = 0,\ \|\boldsymbol{w}_3\|^2 = 4$ より $\boldsymbol{w}_4 = \boldsymbol{v}_4 - \frac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_3)}{\|\boldsymbol{w}_3\|^2}\boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \|\boldsymbol{w}_4\|^2 = 4$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ である.

(11) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = 9$, $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = 3$ より $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = 6$, $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = -2$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2 = 2$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_1) = 3$, $(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_2) = 1$, $(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_3) = -1$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2 = 3$ より $\boldsymbol{w}_4 = \boldsymbol{v}_4 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_3)}{\|\boldsymbol{w}_3\|^2}\boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_4\|^2 = \dfrac{1}{6}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$ である.

(12) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = 2$, $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = 0$ より $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = 1$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2 = 3$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$. $(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_1) = (\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_2) = 1$, $(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_3) = \dfrac{1}{6}$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2 = \dfrac{7}{6}$ より $\boldsymbol{w}_4 = \boldsymbol{v}_4 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_3)}{\|\boldsymbol{w}_3\|^2}\boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{42}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_4\|^2 = \dfrac{1}{7}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ である.

(13) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = 4$, $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = 4$ より $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = 4$,

$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = -3$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2 = 6$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_1) = 2$, $(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_2) = 3$, $(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_3) = -\dfrac{5}{2}$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2 = \dfrac{1}{2}$ より $\boldsymbol{w}_4 = \boldsymbol{v}_4 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_3)}{\|\boldsymbol{w}_3\|^2}\boldsymbol{w}_3 =$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \dfrac{5}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_4\|^2 = 3$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ である.

(14) $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = 4$, $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = -1$ より $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = -2$, $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = \dfrac{1}{2}$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2 = \dfrac{11}{4}$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} -$ $\dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$. $(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_1) = -1$, $(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_2) = \dfrac{7}{4}$, $(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_3) = \dfrac{2}{11}$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2 = \dfrac{10}{11}$ より $\boldsymbol{w}_4 = \boldsymbol{v}_4 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 -$ $\dfrac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_3)}{\|\boldsymbol{w}_3\|^2}\boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \dfrac{7}{44}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{55}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \dfrac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_4\|^2 = \dfrac{32}{5}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{2\sqrt{11}}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{110}}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$ である.

(15) $\boldsymbol{w}_1 = 1$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = \displaystyle\int_0^1 1^2 dx = 1$, $(x, 1) = \displaystyle\int_0^1 x dx = \dfrac{1}{2}$ より $\boldsymbol{w}_2 = x - \dfrac{(x,1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}1 = x - \dfrac{1}{2}$.

$(x^2, 1) = \displaystyle\int_0^1 x^2 dx = \dfrac{1}{3}$, $(x^2, x) = \displaystyle\int_0^1 x^3 dx = \dfrac{1}{4}$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2 = \displaystyle\int_0^1 \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 dx = \left[\dfrac{1}{3}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^3\right]_0^1 = \dfrac{1}{12}$ より $\boldsymbol{w}_3 = x^2 - \dfrac{(x^2,1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}1 - \dfrac{(x^2, x - \frac{1}{2})}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = x^2 - x + \dfrac{1}{6}$. $(x^3, 1) = \displaystyle\int_0^1 x^3 dx = \dfrac{1}{4}$, $(x^3, x) = \displaystyle\int_0^1 x^4 dx = \dfrac{1}{5}$, $(x^3, x^2) = \displaystyle\int_0^1 x^5 dx = \dfrac{1}{6}$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2 = \displaystyle\int_0^1 \left(x^2 - x + \dfrac{1}{6}\right)^2 dx = \displaystyle\int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \dfrac{4}{3}x^2 - \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{36}\right)^2 dx =$ $\left[\dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{4}{9}x^3 - \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{36}x\right]_0^1 = \dfrac{1}{180}$ より $\boldsymbol{w}_4 = x^3 - \dfrac{(x^3,1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}1 - \dfrac{(x^3, x - \frac{1}{2})}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) -$

$\dfrac{\left(x^3, x^2-x+\frac{1}{6}\right)}{\|\boldsymbol{w}_3\|^2}\left(x^2-x+\dfrac{1}{6}\right)=x^3-\dfrac{1}{4}-\dfrac{9}{10}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{3}{2}\left(x^2-x+\dfrac{1}{6}\right)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{5}x-\dfrac{1}{20}.$
$\|\boldsymbol{w}_4\|^2=\displaystyle\int_0^1\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{5}x-\frac{1}{20}\right)^2dx=\int_0^1\left(x^6-3x^5+\frac{69}{20}x^4-\frac{19}{10}x^3+\frac{51}{100}x^2+\frac{3}{50}x+\frac{1}{400}\right)dx=$
$\left[\dfrac{1}{7}x^7-\dfrac{1}{2}x^6+\dfrac{69}{100}x^5-\dfrac{19}{40}x^4+\dfrac{17}{100}x^3+\dfrac{3}{100}x^2+\dfrac{1}{400}x\right]_0^1=\dfrac{1}{2800}$ だから, 与えられた基底ををシュミットの直交化法により正規直交化したものは $\left[1, \sqrt{3}(2x-1), \sqrt{5}(6x^2-6x+1), \sqrt{7}(20x^3-30x^2+12x-1)\right]$ である.

2. 各問で与えられた $\boldsymbol{R}^3$ の基底を $B=[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}]$ とし, これを直交化して得られる正規直交基底を $B'=[\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}',\boldsymbol{z}']$ とする.

(1) $\boldsymbol{x}'=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}''=\boldsymbol{y}-\dfrac{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x}=-2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z}''=\boldsymbol{z}-\dfrac{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x}-\dfrac{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}'')}{\|\boldsymbol{y}''\|^2}\boldsymbol{y}''=$ $\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}-\dfrac{7}{5}(-2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\dfrac{9}{5}\boldsymbol{x}-\dfrac{7}{5}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$ より $\boldsymbol{y}'=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{y}''\|}\boldsymbol{y}''=\begin{pmatrix}0\\\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z}'=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{z}''\|}\boldsymbol{z}''=\begin{pmatrix}0\\\frac{4}{5}\\-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$. また, 上式から $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}'=\dfrac{1}{5}\boldsymbol{y}''=-\dfrac{2}{5}\boldsymbol{x}+\dfrac{1}{5}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}'=\boldsymbol{z}''=\dfrac{9}{5}\boldsymbol{x}-\dfrac{7}{5}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$ だから B から B' への基底の変換行列は $\begin{pmatrix}1&-\frac{2}{5}&\frac{9}{5}\\0&\frac{1}{5}&-\frac{7}{5}\\0&0&1\end{pmatrix}$ である.

(2) $\boldsymbol{x}'=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}''=\boldsymbol{y}-\dfrac{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z}''=\boldsymbol{z}-\dfrac{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x}-\dfrac{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}'')}{\|\boldsymbol{y}''\|^2}\boldsymbol{y}''=$ $\boldsymbol{z}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\right)=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{x}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ より $\boldsymbol{y}'=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{y}''\|}\boldsymbol{y}''=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z}'=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{z}''\|}\boldsymbol{z}''=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\-\frac{\sqrt{3}}{6}\end{pmatrix}$. また, 上式から $\boldsymbol{x}'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}'=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\boldsymbol{y}''=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\boldsymbol{x}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{z}''=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\boldsymbol{x}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\boldsymbol{y}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{z}$ だから B から B' への基底の変換行列は $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{3}}{6}\\0&\frac{\sqrt{6}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{6}\\0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ である.

(3) $\boldsymbol{x}'=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}''=\boldsymbol{y}-\dfrac{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x}=-\dfrac{1}{9}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}-\frac{11}{9}\\\frac{26}{9}\\-\frac{2}{9}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z}''=\boldsymbol{z}-\dfrac{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x}-\dfrac{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}'')}{\|\boldsymbol{y}''\|^2}\boldsymbol{y}''=\boldsymbol{z}+$ $\dfrac{5}{9}\boldsymbol{x}-\dfrac{50}{89}\left(-\dfrac{1}{9}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\right)=\dfrac{495}{801}\boldsymbol{x}-\dfrac{50}{89}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}-\frac{18}{89}\\-\frac{6}{89}\\\frac{21}{89}\end{pmatrix}$ より $\boldsymbol{y}'=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{y}''\|}\boldsymbol{y}''=\begin{pmatrix}-\frac{11\sqrt{89}}{267}\\\frac{26\sqrt{89}}{267}\\-\frac{2\sqrt{89}}{267}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z}'=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{z}''\|}\boldsymbol{z}''=\begin{pmatrix}-\frac{6\sqrt{89}}{89}\\-\frac{2\sqrt{89}}{89}\\\frac{7\sqrt{89}}{89}\end{pmatrix}$. また, 上式から $\boldsymbol{x}'=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}'=\dfrac{3\sqrt{89}}{89}\boldsymbol{y}''=-\dfrac{\sqrt{89}}{267}\boldsymbol{x}+\dfrac{3\sqrt{89}}{89}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}'=\dfrac{\sqrt{89}}{3}\boldsymbol{z}''=\dfrac{55\sqrt{89}}{267}\boldsymbol{x}-\dfrac{50\sqrt{89}}{267}\boldsymbol{y}+\dfrac{\sqrt{89}}{3}\boldsymbol{z}$ だから B から B' への基底の変換行列は $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{\sqrt{89}}{267}&\frac{55\sqrt{89}}{267}\\0&\frac{3\sqrt{89}}{89}&-\frac{50\sqrt{89}}{267}\\0&0&\frac{\sqrt{89}}{3}\end{pmatrix}$ である.

(4) $\boldsymbol{x}'=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}=\dfrac{1}{7}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\\frac{3}{7}\\\frac{6}{7}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}''=\boldsymbol{y}-\dfrac{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x}=-\dfrac{48}{49}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\frac{345}{49}\\\frac{248}{49}\\-\frac{239}{49}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z}''=\boldsymbol{z}-\dfrac{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\boldsymbol{x}-\dfrac{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}'')}{\|\boldsymbol{y}''\|^2}\boldsymbol{y}''=$

$\boldsymbol{z}-\frac{64}{49}\boldsymbol{x}-\frac{522}{2425}\left(-\frac{48}{49}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\right)=-\frac{2656}{2425}\boldsymbol{x}-\frac{522}{2425}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}\frac{423}{485}\\-\frac{2444}{2425}\\\frac{515}{2425}\end{pmatrix}$ より $\boldsymbol{y}'=\frac{1}{\|\boldsymbol{y}''\|}\boldsymbol{y}''=\begin{pmatrix}\frac{69\sqrt{194}}{1358}\\\frac{124\sqrt{194}}{3395}\\-\frac{239\sqrt{194}}{6790}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z}'=\frac{1}{\|\boldsymbol{z}''\|}\boldsymbol{z}''=\begin{pmatrix}\frac{9\sqrt{194}}{194}\\-\frac{26\sqrt{194}}{485}\\\frac{11\sqrt{194}}{970}\end{pmatrix}$. また, 上式から $\boldsymbol{x}'=\frac{1}{7}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}'=\frac{7\sqrt{194}}{970}\boldsymbol{y}''=-\frac{24\sqrt{194}}{3395}\boldsymbol{x}+\frac{7\sqrt{194}}{970}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}'=\frac{5\sqrt{194}}{94}\boldsymbol{z}''=-\frac{1328\sqrt{194}}{22795}\boldsymbol{x}-\frac{261\sqrt{194}}{22795}\boldsymbol{y}+\frac{5\sqrt{194}}{94}\boldsymbol{z}$ だから B から B' への基底の変換行列は $\begin{pmatrix}\frac{1}{7}&-\frac{24\sqrt{194}}{3395}&-\frac{1328\sqrt{194}}{22795}\\0&\frac{7\sqrt{194}}{970}&-\frac{261\sqrt{194}}{22795}\\0&0&\frac{5\sqrt{194}}{94}\end{pmatrix}$ である. である.

3. (1) $\begin{pmatrix}1&1&-2&-1\\0&1&-1&1\\2&3&-5&-1\\1&0&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&1&-2&-1\\0&1&-1&1\\0&1&-1&1\\0&-1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x-z-2w=0\\y-z+w=0\end{cases}$ と同値である. $z=s$, $w=t$ とおくと $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s+2t\\s-t\\s\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ となるため, $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ とおけば $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ が W の基底になる. そこで, $\boldsymbol{w}_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2'=\boldsymbol{v}_2-(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1)\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\\-4\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{w}_2'\|}\boldsymbol{w}_2'=\frac{1}{\sqrt{51}}\begin{pmatrix}5\\-4\\-1\\3\end{pmatrix}$ とおけば $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2$ は W の正規直交基底になる.

(2) $\begin{pmatrix}1&-1&-1&2\\0&1&1&-1\\2&-1&-1&3\\1&-2&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-1&-1&2\\0&1&1&-1\\0&1&1&-1\\0&-1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases}x+w=0\\y+z-w=0\end{cases}$ と同値である. $z=s$, $w=t$ とおくと $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t\\-s+t\\s\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ となるため, $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ とおけば $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ が W の基底になる. そこで, $\boldsymbol{w}_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2'=\boldsymbol{v}_2-(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1)\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{w}_2'\|}\boldsymbol{w}_2'=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\2\end{pmatrix}$ とおけば $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2$ は W の正規直交基底になる.

線形数学 II 小テスト　第 20 回　計量ベクトル空間

$P_2(\boldsymbol{R})$ における内積を $(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ で定めるとき, $P_2(\boldsymbol{R})$ のベクトル $1, x$ の両方に垂直で零でないベクトルを求めよ. また, そのようなベクトルのうちで, 長さが 1 のものを求めよ.

[解答例] $f(x) = ax^2 + bx + c$ が $1, x$ の両方に垂直であるとする.

$$(f(x), 1) = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c, \quad (f(x), x) = \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx)\,dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2}$$

だから $ax^2 + bx + c \in P_2(\boldsymbol{R})$ が $1, x$ の両方に垂直であるためには, $\begin{cases} \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0 & \cdots (i) \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} = 0 & \cdots (ii) \end{cases}$ が成り立つことが必要十分である. (i) から (ii) の両辺を 2 倍したものを辺々引けば, $-\dfrac{a}{6} - \dfrac{b}{6} = 0$ が得られるため, $b = -a$ であり, これを (i) に代入して $c = \dfrac{a}{6}$ を得る. 従って, $1, x$ の両方に垂直で零でない $P_2(\boldsymbol{R})$ のベクトル $f(x)$ は $f(x) = a\left(x^2 - x + \dfrac{1}{6}\right)$ (a は 0 でない実数) の形の多項式である. このとき,

$$\|f(x)\|^2 = (f(x), f(x)) = \int_0^1 a^2\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx = \int_0^1 a^2\left(x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right)dx = \frac{a^2}{180}$$

だから $\|f(x)\| = 1$ であるためには $a = \pm 6\sqrt{5}$ であることが必要十分である. 従って, $1, x$ の両方に垂直で長さが 1 のものは, $\pm\sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$ である.

線形数学 II 小テスト　第 21 回　ベクトル空間の内積

$\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\left[\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right]$ を $\boldsymbol{R}^3$ の標準内積に関して, シュミットの直交化法によって正規直交化せよ.

[解答例] $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_1\|^2 = 9$, $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = 3$ より $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$.

$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = 4$, $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = \dfrac{2}{3}$, $\|\boldsymbol{w}_2\|^2 = 1$ より $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \dfrac{4}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} - \dfrac{2}{9}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} =$

$\dfrac{5}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\|\boldsymbol{w}_3\|^2 = \dfrac{25}{9}$ だから, 与えられた基底をシュミットの直交化法により正規直交化したものは

$\left[\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}, \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right]$ である.

線形数学 II 小テスト　第 22 回　正規直交化法

2 次以下の実数係数の多項式全体からなるベクトル空間 $P_2(\boldsymbol{R})$ に $(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ で定義される内積を与える．このとき, $P_2(\boldsymbol{R})$ の基底 $[x^2, x, 1]$ をシュミットの直交化法によって正規直交化せよ．

[解答例] $\boldsymbol{w}_1 = x^2$ とおけば $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1) = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \dfrac{2}{5}$, $(x, \boldsymbol{w}_1) = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$ より $\boldsymbol{w}_2 = x - \dfrac{(x, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)}\boldsymbol{w}_1 = x$ とおく．$(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2) = (1, \boldsymbol{w}_1) = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \dfrac{2}{3}$, $(1, \boldsymbol{w}_2) = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$ より $\boldsymbol{w}_3 = 1 - \dfrac{(1, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)}\boldsymbol{w}_1 - \dfrac{(1, \boldsymbol{w}_2)}{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2)}\boldsymbol{w}_2 = 1 - \dfrac{5x^2}{3}$ とおく．$(\boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_3) = \int_{-1}^{1}\left(1 - \dfrac{5x^2}{3}\right)^2 dx = \int_{-1}^{1}\left(1 - \dfrac{10x^2}{3} + \dfrac{25x^4}{9}\right)dx = \dfrac{8}{9}$ より, 求める正規直交基底は $\left[\dfrac{\sqrt{10}x^2}{2}, \dfrac{\sqrt{6}x}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}(3 - 5x^2)\right]$ である．

線形数学 II 小テスト　第 23 回　部分空間の正規直交基底

連立 1 次方程式 $\begin{cases} x - y - z + 2w = 0 \\ y + z - w = 0 \\ 2x - y - z + 3w = 0 \\ x - 2y - 2z + 3w = 0 \end{cases}$ の解全体からなる $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間の正規直交基底を 1 組求めよ．

[解答例] $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, 与えられた方程式は $\begin{cases} x + w = 0 \\ y + z - w = 0 \end{cases}$ と同値である．$z = s$, $w = t$ とおくと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -s + t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるため, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が W の基底になる．そこで, $\boldsymbol{w}_1 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{w}_2' = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{w}_2'\|}\boldsymbol{w}_2' = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とおけば $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ は W の正規直交基底になる．

線形数学 II 演習問題　第 8 回　直交補空間

1. $\boldsymbol{K}^4$ の部分空間 V が以下で与えられるとき, V と V の直交補空間 $V^\perp$ の正規直交基底を一組ずつ求めよ.

(1) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x+y-z-2w=0 \\ -x+2y+z-w=0 \end{matrix} \right\}$　(2) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x+2y+2z-3w=0 \\ -4x+2y-3z+2w=0 \end{matrix} \right\}$

(3) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x+y+2z+3w=0 \\ 3y+3z-2w=0 \end{matrix} \right\}$　(4) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x+2y+3z+2w=0 \\ x+3y+4z+2w=0 \end{matrix} \right\}$

2. $\boldsymbol{K}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ が以下で与えられるとき, $\boldsymbol{K}^n$ の部分空間 V, W を $V = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$, $W = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$ で定める. $V^\perp \cap W^\perp$ の正規直交基底を求め, その基底を含むような $V^\perp$, $W^\perp$ および $V^\perp + W^\perp$ の正規直交基底を一組ずつ求めよ.

(1) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$　(2) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$　(4) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

3. $\boldsymbol{R}^4$ の 2 つのベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成される部分空間を W とする.

(1) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の両方に垂直で, 1 次独立であるようなベクトルの組 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を 1 組求めよ.
(2) W の直交補空間 $W^\perp$ の正規直交基底を 1 組求めよ.

4. $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成される $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間を W とする. $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ は「$\boldsymbol{x} \in W$ ならば $f(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}$」と「$\boldsymbol{x} \in W^\perp$ ならば $f(\boldsymbol{x}) = -3\boldsymbol{x}$」を満たす 1 次変換であるとする. このとき, $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ で, この基底に関する f の表現行列が対角行列になるものを 1 組求めよ.

5. $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して, $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換 $f_{\boldsymbol{a}} : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を $f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}$ で定める.

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ のとき, $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ に関する $f_{\boldsymbol{a}}$ の表現行列を求めよ.
(2) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき, $\operatorname{Ker} f_{\boldsymbol{a}} = \langle \boldsymbol{a} \rangle$, $\operatorname{Im} f_{\boldsymbol{a}} = \langle \boldsymbol{a} \rangle^\perp$ であることを示せ.
(3) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が垂直ならば $\operatorname{Im}(f_{\boldsymbol{b}} \circ f_{\boldsymbol{a}}) = \langle \boldsymbol{a} \rangle$ であることを示せ.
(4) $\operatorname{rank}(f_{\boldsymbol{b}} \circ f_{\boldsymbol{a}}) = 1$ であるためには, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が垂直であることが必要十分であることを示せ.

第 8 回の演習問題の解答

1. (1) 与えられた部分空間 V は第 3 回の演習問題 1 の (1) の V と同じものだから, V は $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ を基底にもつ. 前者のベクトルを $\boldsymbol{v}_1$, 後者のベクトルを $\boldsymbol{v}_2$ とおけば, $\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1)}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}$ より, V の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}$ が得られる. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \in V^{\perp}$ であるためには $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_1) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_2) = 0$ であることが必要十分だから, $V^{\perp}$ は連立 1 次方程式 $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + w = 0 \end{cases}$ の解空間である. この方程式の解は, s, t を任意のスカラーとして $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s\\t\\-s\\-s-t\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$ で与えられるため, $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$ は $V^{\perp}$ の基底である. 前者のベクトルを $\boldsymbol{w}_1$, 後者のベクトルを $\boldsymbol{w}_2$ とおけば, $\boldsymbol{w}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\\-2\end{pmatrix}$ より, $V^{\perp}$ の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\\-2\end{pmatrix}$ が得られる.

(2) 与えられた部分空間 V は第 3 回の演習問題 1 の (1) の W と同じものだから, V は $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$ を基底にもつ. 前者のベクトルを $\boldsymbol{v}_1$, 後者のベクトルを $\boldsymbol{v}_2$ とおけば, $\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1)}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\\1\end{pmatrix} + \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\0\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\3\end{pmatrix}$ より, V の正規直交基底 $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\3\end{pmatrix}$ が得られる. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \in V^{\perp}$ であるためには $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_1) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_2) = 0$ であることが必要十分だから, $V^{\perp}$ は連立 1 次方程式 $\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ -x + 2z + w = 0 \end{cases}$ の解空間である. この方程式の解は, s, t を

任意のスカラーとして $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -2s+2t \\ t \\ s-2t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ で与えられるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は $V^{\perp}$ の基底である. 前者のベクトルを $\boldsymbol{w}_1$, 後者のベクトルを $\boldsymbol{w}_2$ とおけば, $\boldsymbol{w}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ より, $V^{\perp}$ の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が得られる.

(3) 与えられた部分空間 V は第 3 回の演習問題 1 の (2) の V と同じものだから, V は $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ を基底にもつ. 前者のベクトルを $\boldsymbol{v}_1$, 後者のベクトルを $\boldsymbol{v}_2$ とおけば, $\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1)}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ より, V の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{107}}\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ が得られる. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in V^{\perp}$ であるためには $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_1) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_2) = 0$ であることが必要十分だから, $V^{\perp}$ は連立 1 次方程式 $\begin{cases} -x-y+z=0 \\ -11x+2y+3w=0 \end{cases}$ の解空間である. この方程式の解は, s, t を任意のスカラーとして $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s \\ 3t \\ 3s+3t \\ 11s-2t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (t-s)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ で与えられるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ は $V^{\perp}$ の基底である. 前者のベクトルを $\boldsymbol{w}_1$, 後者のベクトルを $\boldsymbol{w}_2$ とおけば, $\boldsymbol{w}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 14 \\ 13 \\ -13 \end{pmatrix}$ より, $V^{\perp}$ の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{562}}\begin{pmatrix} -1 \\ 14 \\ 13 \\ -13 \end{pmatrix}$ が得られる.

(4) 与えられた部分空間 V は第 3 回の演習問題 1 の (2) の W と同じものだから, V は $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を基底にも

つ. 前者のベクトルを $\boldsymbol{v}_1$, 後者のベクトルを $\boldsymbol{v}_2$ とおけば, $\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1)}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ より, V の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{33}}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ が得られる. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in V^\perp$ であるためには $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_1) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_2) = 0$ であることが必要十分だから, $V^\perp$ は連立 1 次方程式 $\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -2x + w = 0 \end{cases}$ の解空間である. この方程式の解は, s, t を任意のスカラーとして $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ s+t \\ 2s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられるため, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $V^\perp$ の基底である.
前者のベクトルを $\boldsymbol{w}_1$, 後者のベクトルを $\boldsymbol{w}_2$ とおけば, $\boldsymbol{w}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ より, $V^\perp$ の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ が得られる.

2. $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}$ とおくと, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し, 次の等式が成り立つ

$$A^*\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} {}^t\bar{\boldsymbol{a}}_1\boldsymbol{x} \\ {}^t\bar{\boldsymbol{a}}_2\boldsymbol{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{a}}_1 \\ {}^t\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{a}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1) \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_2) \end{pmatrix}, \quad B^*\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} {}^t\bar{\boldsymbol{b}}_1\boldsymbol{x} \\ {}^t\bar{\boldsymbol{b}}_2\boldsymbol{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{b}}_1 \\ {}^t\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{b}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_1) \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_2) \end{pmatrix}$$

従って $\boldsymbol{x} \in V^\perp$ は $A^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ と同値, $\boldsymbol{x} \in W^\perp$ は $B^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ と同値であり, $\boldsymbol{x} \in V^\perp \cap W^\perp$ は $\begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ と同値である.

(1) $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 4 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $\begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases} x + 2w = 0 \\ y + 3w = 0 \\ -z + 2w = 0 \end{cases}$ と同値である. この

方程式の解は $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$ ($t \in \boldsymbol{K}$ は任意) だから, $\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$ は $V^{\perp} \cap W^{\perp}$ の基底である．よって $\boldsymbol{u} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{u}$ は $V^{\perp} \cap W^{\perp}$ の正規直交基底である．$A^* = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\-1 & 0 & -2 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\0 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & -4 & 0 & -10\\0 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$ より, $A^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}x - 4y - 10w = 0\\2y + z + 4w = 0\end{cases}$ と同値である．この方程式の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}4s+10t\\s\\-2s-4t\\t\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}4\\1\\-2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}10\\0\\-4\\1\end{pmatrix}$ ($s, t \in \boldsymbol{K}$ は任意) で与えられるため, $\begin{pmatrix}4\\1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}10\\0\\-4\\1\end{pmatrix}$ は $V^{\perp}$ の基底になり, $\dim V^{\perp} = 2$ である．また $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}4s+10t\\s\\-2s-4t\\t\end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{u}$ が直交するためには, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}(5s+9t)$ より, $t = -\dfrac{5s}{9}$ であることが必要十分である．このとき, $\boldsymbol{x} = -\dfrac{s}{9}\begin{pmatrix}14\\-9\\-2\\5\end{pmatrix}$ だから, $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{3\sqrt{34}}\begin{pmatrix}14\\-9\\-2\\5\end{pmatrix}$ は $V^{\perp}$ の正規直交基底である．$B^* = \begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & 3\\-1 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行}} \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 2\\2 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 2\\0 & 5 & 4 & 7\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}-1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\0 & 5 & 4 & 7\end{pmatrix}$ より, $B^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}-x - \frac{3}{5}z - \frac{4}{5}w = 0\\5y + 4z + 7w = 0\end{cases}$ と同値である．この方程式の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-3s-4t\\-4s-7t\\5s\\5t\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}-3\\-4\\5\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\-7\\0\\5\end{pmatrix}$ ($s, t \in \boldsymbol{K}$ は任意) で与えられるため, $\begin{pmatrix}-3\\-4\\5\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-4\\-7\\0\\5\end{pmatrix}$ は $W^{\perp}$ の基底になり, $\dim W^{\perp} = 2$ である．また $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-3s-4t\\-4s-7t\\5s\\5t\end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{u}$ が直交するためには, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}(28s+34t)$ より, $t = -\dfrac{14s}{17}$ であることが必要十分である．このとき, $\boldsymbol{x} = \dfrac{5s}{17}\begin{pmatrix}1\\6\\17\\-14\end{pmatrix}$ だから, $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{3\sqrt{58}}\begin{pmatrix}1\\6\\17\\-14\end{pmatrix}$ は $W^{\perp}$ の正規直交基底である．以上から, $\dim(V^{\perp} + W^{\perp}) = \dim V^{\perp} + \dim W^{\perp} - \dim(V^{\perp} \cap W^{\perp}) = 3$ であり, $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{3\sqrt{34}}\begin{pmatrix}14\\-9\\-2\\5\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{3\sqrt{58}}\begin{pmatrix}1\\6\\17\\-14\end{pmatrix}$ は $V^{\perp} + W^{\perp}$ を生成するため, これらのベクトルは $V^{\perp} + W^{\perp}$ の基底になる．2 つ目のベクトルを $\boldsymbol{v}'$, 3 つ目のベク

トルを $\boldsymbol{w}'$ とおけば, $\|\boldsymbol{v}'\|=1$, $(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{u})=0$, $(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{v}')=-\dfrac{8}{\sqrt{493}}$ より $\boldsymbol{w}'-\dfrac{(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}-\dfrac{(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{v}')}{\|\boldsymbol{v}'\|^2}\boldsymbol{v}'=\dfrac{1}{17\sqrt{58}}\begin{pmatrix}43\\10\\91\\-66\end{pmatrix}$

となるため, $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{3\sqrt{34}}\begin{pmatrix}14\\-9\\-2\\5\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{14586}}\begin{pmatrix}43\\10\\91\\-66\end{pmatrix}$ は $V^\perp+W^\perp$ の正規直交基底である.

(2) $A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\2&0&-1&-2\end{pmatrix}$, $B^*=\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\2&3&0&1\end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix}A^*\\B^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\2&0&-1&-2\\1&1&-1&0\\2&3&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&-2&-3&-2\\0&0&-2&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(4,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&3&-1\\0&0&-7&0\\0&0&-2&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&0&-7&0\\0&0&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$ より, $\begin{pmatrix}A^*\\B^*\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は

$\begin{cases}x-w=0\\-7z=0\\y+w=0\end{cases}$ と同値である. この方程式の解は $\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ ($t\in\boldsymbol{K}$ は任意) だから, $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ は $V^\perp\cap W^\perp$ の基

底である. よって $\boldsymbol{u}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{u}$ は $V^\perp\cap W^\perp$ の正規直交基底である. $A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\2&0&-1&-2\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&-2&-3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&-1\\0&-2&-3&-2\end{pmatrix}$ より, $A^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}x-\frac{1}{2}z-w=0\\2y+3z+2w=0\end{cases}$

と同値である. この方程式の解は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}s+t\\-3s-t\\2s\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ ($s,t\in\boldsymbol{K}$ は任意) で与えられるため,

$\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ は $V^\perp$ の基底になり, $\dim V^\perp=2$ である. また $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}s+t\\-3s-t\\2s\\t\end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{u}$ が直交するためには, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}(4s+3t)$ より, $t=-\dfrac{4s}{3}$ であることが必要十分である. このとき, $\boldsymbol{x}=-\dfrac{s}{3}\begin{pmatrix}1\\5\\-6\\4\end{pmatrix}$ だから, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{78}}\begin{pmatrix}1\\5\\-6\\4\end{pmatrix}$

は $V^\perp$ の正規直交基底である. $B^*=\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\2&3&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix}1&0&-3&-1\\0&1&2&1\end{pmatrix}$ より, $B^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}x-3z-w=0\\y+2z+w=0\end{cases}$ と同値である. この方程式の解は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}3s+t\\-2s-t\\s\\t\end{pmatrix}=$

$s\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $(s,t\in\boldsymbol{K}$ は任意) で与えられるため, $\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ は $W^\perp$ の基底になり, $\dim W^\perp=2$ である．また $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}3s+t\\-2s-t\\s\\t\end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{u}$ が直交するためには, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(5s+3t)$ より, $t=-\dfrac{5s}{3}$ であることが必要十分である．このとき, $\boldsymbol{x}=\dfrac{s}{3}\begin{pmatrix}4\\-1\\3\\-5\end{pmatrix}$ だから, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\dfrac{1}{\sqrt{51}}\begin{pmatrix}4\\-1\\3\\-5\end{pmatrix}$ は $W^\perp$ の正規直交基底である．以上から, $\dim(V^\perp+W^\perp)=\dim V^\perp+\dim W^\perp-\dim(V^\perp\cap W^\perp)=3$ であり, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\dfrac{1}{\sqrt{78}}\begin{pmatrix}1\\5\\-6\\4\end{pmatrix},\dfrac{1}{\sqrt{51}}\begin{pmatrix}4\\-1\\3\\-5\end{pmatrix}$ は $V^\perp+W^\perp$ を生成するため, これらのベクトルは $V^\perp+W^\perp$ の基底になる．2 つ目のベクトルを $\boldsymbol{v}'$, 3 つ目のベクトルを $\boldsymbol{w}'$ とおけば, $\|\boldsymbol{v}'\|=1$, $(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{u})=0$, $(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{v}')=-\dfrac{13}{\sqrt{442}}$ より $\boldsymbol{w}'-\dfrac{(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}-\dfrac{(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{v}')}{\|\boldsymbol{v}'\|^2}\boldsymbol{v}'=\dfrac{3}{2\sqrt{51}}\begin{pmatrix}3\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$ となるため, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\dfrac{1}{\sqrt{78}}\begin{pmatrix}1\\5\\-6\\4\end{pmatrix},\dfrac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}3\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$ は $V^\perp+W^\perp$ の正規直交基底である．

(3) $A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\2&0&2&3\end{pmatrix}$, $B^*=\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&1&-1&-4\end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix}A^*\\B^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\2&0&2&3\\1&3&-1&-2\\2&1&-1&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&-2&0&-1\\0&2&-2&-4\\0&-1&-3&-8\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(4,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&-2&-6\\0&0&6&15\\0&0&-8&-20\\0&-1&-3&-8\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&0&6&15\\0&0&0&0\\0&-1&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ より, $\begin{pmatrix}A^*\\B^*\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}x-w=0\\6z+15w=0\\-y-\frac{1}{2}w=0\end{cases}$ と同値である．この方程式の解は $\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\\2\end{pmatrix}$ $(t\in\boldsymbol{K}$ は任意) だから, $\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\\2\end{pmatrix}$ は $V^\perp\cap W^\perp$ の基底である．よって $\boldsymbol{u}=\dfrac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\\2\end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{u}$ は $V^\perp\cap W^\perp$ の正規直交基底である．$A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\2&0&2&3\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&-2&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(2,4) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-3&1&0\\0&-2&0&-1\end{pmatrix}$ より, $A^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}x-3y+z=0\\-2y-w=0\end{cases}$ と

同値である．この方程式の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3s-t \\ s \\ t \\ -2s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(s,t \in \boldsymbol{K}$ は任意$)$ で与えられるため，$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $V^\perp$ の基底になり，$\dim V^\perp = 2$ である．また $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3s-t \\ s \\ t \\ -2s \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{u}$ が直交するためには，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \dfrac{1}{\sqrt{34}}(s-7t)$ より，$s = 7t$ であることが必要十分である．このとき，$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 20 \\ 7 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix}$ だから，$\dfrac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{646}}\begin{pmatrix} 20 \\ 7 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix}$ は $V^\perp$ の正規直交基底である．$B^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(2,3)\text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ より，$B^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases} x - 2y - 2w = 0 \\ -5y + z = 0 \end{cases}$ と同値である．この方程式の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2s+2t \\ s \\ 5s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(s,t \in \boldsymbol{K}$ は任意$)$ で与えられるため，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $W^\perp$ の基底になり，$\dim W^\perp = 2$ である．また $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2s+2t \\ s \\ 5s \\ t \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{u}$ が直交するためには，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \dfrac{1}{\sqrt{34}}(-22s + 6t)$ より，$t = \dfrac{11s}{3}$ であることが必要十分である．このとき，$\boldsymbol{x} = \dfrac{s}{3}\begin{pmatrix} 28 \\ 3 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix}$ だから，$\dfrac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{1139}}\begin{pmatrix} 28 \\ 3 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix}$ は $W^\perp$ の正規直交基底である．以上から，$\dim(V^\perp + W^\perp) = \dim V^\perp + \dim W^\perp - \dim(V^\perp \cap W^\perp) = 3$ であり，$\dfrac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{646}}\begin{pmatrix} 20 \\ 7 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{1139}}\begin{pmatrix} 28 \\ 3 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix}$ は $V^\perp + W^\perp$ を生成するため，これらのベクトルは $V^\perp + W^\perp$ の基底になる．2 つ目のベクトルを $\boldsymbol{v}'$，3 つ目のベクトルを $\boldsymbol{w}'$ とおけば，$\|\boldsymbol{v}'\| = 1$，$(\boldsymbol{w}', \boldsymbol{u}) = 0$，$(\boldsymbol{w}', \boldsymbol{v}') = \dfrac{26}{\sqrt{2546}}$ より $\boldsymbol{w}' - \dfrac{(\boldsymbol{w}', \boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u} - \dfrac{(\boldsymbol{w}', \boldsymbol{v}')}{\|\boldsymbol{v}'\|^2}\boldsymbol{v}' = \dfrac{17}{19\sqrt{1139}}\begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ 16 \\ 23 \end{pmatrix}$ となるため，$\dfrac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{646}}\begin{pmatrix} 20 \\ 7 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{1045}}\begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ 16 \\ 23 \end{pmatrix}$ は $V^\perp + W^\perp$ の正規直交基底である．

(4) $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 7 & -1 \end{pmatrix}$, $B^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & -9 \\ 0 & 2 & 7 & 7 & -3 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 9 & 9 & -9 \\ 0 & 2 & 7 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -9 & -9 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & -9 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $\begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases} x + v = 0 \\ 9z + 9v - 9w = 0 \\ 2y + 4w = 0 \end{cases}$ と同値である．この方程式の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} s \\ -2t \\ s+t \\ -s \\ t \end{pmatrix} =$ $s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($s, t \in \boldsymbol{K}$ は任意) だから, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $V^\perp \cap W^\perp$ の基底である．$\boldsymbol{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおき, $\boldsymbol{u}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $\|\boldsymbol{u}\| = 1$, $(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より, $\boldsymbol{u}' - \dfrac{(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|}\boldsymbol{u} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ だから, $\boldsymbol{v} = \dfrac{1}{\sqrt{51}}\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ は $V^\perp \cap W^\perp$ の正規直交基底である．$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & -9 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & -9 \end{pmatrix}$ より, $A^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases} x + y + v + 2w = 0 \\ 9z + 9v - 9w = 0 \end{cases}$ と同値である．この方程式の解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -s-t-2u \\ s \\ -t+u \\ t \\ u \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

($s, t, u \in \boldsymbol{K}$ は任意) で与えられるため, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $V^\perp$ の基底になり, $\dim V^\perp = 3$ である．また $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -s-t-2u \\ s \\ -t+u \\ t \\ u \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ が直交するためには, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \dfrac{-s-3t-u}{\sqrt{3}}$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = \dfrac{-5s+7u}{\sqrt{51}}$ より, $u = \dfrac{5s}{7}$, $t = -\dfrac{4s}{7}$ であることが必要十分である．このとき, $\boldsymbol{x} = \dfrac{s}{7}\begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ 9 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

だから, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{51}}\begin{pmatrix}-1\\-6\\2\\1\\3\end{pmatrix}, \dfrac{1}{2\sqrt{85}}\begin{pmatrix}-13\\7\\9\\-4\\5\end{pmatrix}$ は $V^\perp$ の正規直交基底である. $B^* = \begin{pmatrix}1&3&5&6&1\\1&5&3&4&7\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&3&5&6&1\\0&2&-2&-2&6\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1&0&8&9&-8\\0&2&-2&-2&6\end{pmatrix}$ より, $B^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\begin{cases}x+8z+9v-8w=0\\2y-2z-2v+6z=0\end{cases}$ と同値である. この方程式の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-8s-9t+8u\\s+t-3u\\s\\t\\u\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}-8\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-9\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}8\\-3\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ $(s,t,u \in \boldsymbol{K}$ は任意) で与えられるため, $\begin{pmatrix}-8\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-9\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\-3\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ は $W^\perp$ の基底になり, $\dim W^\perp = 3$ である. また $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}-8s-9t+8u\\s+t-3u\\s\\t\\u\end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{u}$ が直交するためには, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \dfrac{-7s-10t+8u}{\sqrt{3}}$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = \dfrac{4s+4t+13u}{\sqrt{51}}$ より, $s = -\dfrac{27u}{2}$, $t = \dfrac{41u}{4}$ であることが必要十分である. このとき, $\boldsymbol{x} = \dfrac{u}{4}\begin{pmatrix}95\\-25\\-54\\41\\4\end{pmatrix}$ だから, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{51}}\begin{pmatrix}-1\\-6\\2\\1\\3\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{14263}}\begin{pmatrix}95\\-25\\-54\\41\\4\end{pmatrix}$ は $W^\perp$ の正規直交基底である. 以上から, $\dim(V^\perp + W^\perp) = \dim V^\perp + \dim W^\perp - \dim(V^\perp \cap W^\perp) = 4$ であり, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{51}}\begin{pmatrix}-1\\-6\\2\\1\\3\end{pmatrix}, \dfrac{1}{2\sqrt{85}}\begin{pmatrix}-13\\7\\9\\-4\\5\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{14263}}\begin{pmatrix}95\\-25\\-54\\41\\4\end{pmatrix}$ は $V^\perp + W^\perp$ を生成するため, これらのベクトルは $V^\perp + W^\perp$ の基底になる. 3 つ目のベクトルを $\boldsymbol{v}'$, 4 つ目のベクトルを $\boldsymbol{w}'$ とおけば, $\|\boldsymbol{v}'\| = 1$, $(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{w}',\boldsymbol{v}) = 0$, $(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{v}') = -\dfrac{60}{\sqrt{4195}}$ より $\boldsymbol{w}' - \dfrac{(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u} - \dfrac{(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{v}\|^2}\boldsymbol{v} - \dfrac{(\boldsymbol{w}',\boldsymbol{v}')}{\|\boldsymbol{v}'\|^2}\boldsymbol{v}' = \dfrac{17}{\sqrt{14263}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$ となるため,

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{51}}\begin{pmatrix}-1\\-6\\2\\1\\3\end{pmatrix}, \dfrac{1}{2\sqrt{85}}\begin{pmatrix}-13\\7\\9\\-4\\5\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$ は $V^\perp + W^\perp$ の正規直交基底である.

3. (1) $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の両方に垂直とすれば, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) = 0$ より $z = x$, $w = -x - 2y$ だから, 例えば $(x, y) = (1, 0), (0, 1)$ として $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ と定めればよい.

(2) $W^\perp$ は $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ で生成される $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間だから, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ を直交化すればよい. $\boldsymbol{z} = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおくと, $\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ より $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{33}}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}\right]$ は $W^\perp$ の正規直交基底である.

4. $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を直交化したものを $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ とすると, $\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であり, $\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v} + r\boldsymbol{v}_1$ とおいて, $(\boldsymbol{v}_2', \boldsymbol{v}_1) = 0$ となる r は $r = -(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ だから, $\boldsymbol{v}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{v}_2'\|}\boldsymbol{v}_2' = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ である. このとき, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ は W の正規直交基底である. さらに $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{v}_3$ は $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ の両方に垂直な単位ベクトルであり, $W^\perp$ を生成する. 故に, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底であり, $f(\boldsymbol{v}_1) = 2\boldsymbol{v}_1$, $f(\boldsymbol{v}_2) = 2\boldsymbol{v}_2$, $f(\boldsymbol{v}_3) = -3\boldsymbol{v}_3$ だから, この基底に関する f の表現行列は対角行列である.

5. (1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対し, $f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -cy + bz \\ cx - az \\ -bx + ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ だから $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ に関する $f_{\boldsymbol{a}}$ の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ である.

(2) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ より, 外積の性質から $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるためには $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}$ の実数倍であることが必要十分だから $\operatorname{Ker} f_{\boldsymbol{a}} = \langle \boldsymbol{a} \rangle$ である. また $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}$ はつねに $\boldsymbol{a}$ と垂直なベクトルだから $\operatorname{Im} f_{\boldsymbol{a}}$ は $\langle \boldsymbol{a} \rangle^\perp$ に含まれる. $\dim \operatorname{Ker} f_{\boldsymbol{a}} = 1$ だから, 次元公式により $\dim \operatorname{Im} f_{\boldsymbol{a}} = \operatorname{rank} f_{\boldsymbol{a}} = 2$ となり $\operatorname{Im} f_{\boldsymbol{a}}$ の次元は $\langle \boldsymbol{a} \rangle^\perp$ の次元に等しくなるため, $\operatorname{Im} f_{\boldsymbol{a}} = \langle \boldsymbol{a} \rangle^\perp$ である.

(3) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^3$ に対し, 等式 $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z} = -(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})\boldsymbol{y}$ が成り立つため,

$$(f_{\boldsymbol{b}} \circ f_{\boldsymbol{a}})(\boldsymbol{x}) = f_{\boldsymbol{b}}(f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})) = f_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}) = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{x}$$

が得られる. 従って, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が垂直ならば $(f_{\boldsymbol{b}} \circ f_{\boldsymbol{a}})(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} \in \langle \boldsymbol{a} \rangle$ だから $\operatorname{Im}(f_{\boldsymbol{b}} \circ f_{\boldsymbol{a}}) \subset \langle \boldsymbol{a} \rangle$ である. また, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ だから, $\bar{\boldsymbol{b}} = \dfrac{1}{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})}\boldsymbol{b}$ とおけば, $(\bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{b}) = 1$ だから $t \in \boldsymbol{R}$ に対し, $(f_{\boldsymbol{b}} \circ f_{\boldsymbol{a}})(t\bar{\boldsymbol{b}}) = (t\bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} = t(\bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} = t\boldsymbol{a}$ となって, $\operatorname{Im}(f_{\boldsymbol{b}} \circ f_{\boldsymbol{a}}) \supset \langle \boldsymbol{a} \rangle$ であることがわかる. 故に $\operatorname{Im}(f_{\boldsymbol{b}} \circ f_{\boldsymbol{a}}) = \langle \boldsymbol{a} \rangle$ である.

(4) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ ならば $f_{\boldsymbol{a}}$ はすべてのベクトルを零ベクトルに写す写像になるため, $f_{\boldsymbol{b}} \circ f_{\boldsymbol{a}}$ の階数が 1 ならば $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ で

ある. 従って (2) により $\operatorname{rank} f_{\boldsymbol{a}} = \dim\langle \boldsymbol{a}\rangle^\perp = 2$, $\operatorname{rank} f_{\boldsymbol{b}} = \dim\langle \boldsymbol{b}\rangle^\perp = 2$ だから, $\operatorname{rank}(f_{\boldsymbol{b}}\circ f_{\boldsymbol{a}}) = \operatorname{rank} f_{\boldsymbol{a}} + \operatorname{rank} f_{\boldsymbol{b}} - \dim \boldsymbol{R}^3$ が成り立つ. 故に第 4 回の演習問題 5 の結果と (1) により $\langle \boldsymbol{b}\rangle = \operatorname{Ker} f_{\boldsymbol{b}} \subset \operatorname{Im} f_{\boldsymbol{a}} = \langle \boldsymbol{a}\rangle^\perp$ だから $\boldsymbol{b} \in \langle \boldsymbol{a}\rangle^\perp$ となるため, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は垂直である. 逆に $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が垂直ならば $f_{\boldsymbol{b}}\circ f_{\boldsymbol{a}}$ の階数が 1 になることは (3) から明らかである.

線形数学 II 小テスト　第 24 回　直交補空間

$\boldsymbol{R}^4$ の部分空間 $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ の直交補空間 $W^\perp$ の正規直交基底を 1 組求めよ.

[解答例] $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in W^\perp$ であるためには $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_1) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_2) = 0$ であることが必要十分だから, $W^\perp$ は方程式 $\begin{cases} x + z = 0 \\ y + 2z + w = 0 \end{cases}$ の解空間である. この解は, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ -2s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (s, t を任意) で与えられるため, $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $W^\perp$ の基底である. $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば,
$\boldsymbol{w}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ より, $W^\perp$ の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を得る.

線形数学 II 演習問題　第 9 回　正規行列の対角化

1. 以下の行列はそれぞれ次のいずれの場合にあてはまるか答え, その理由も述べよ.
(a) ユニタリー行列で対角化可能　(b) ユニタリー行列では対角化できないが, 対角化可能　(c) 対角化不可能

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 4 \\ -6 & -2 & -6 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -2 & -6 & -6 \\ 2 & 8 & 8 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

2. 次の対称行列を対角化する直交行列を求めよ. ただし (1), (2) では $ab \neq 0$, (7) では $b \neq 0$ とする.

(1) $\begin{pmatrix} a^2+c & ab \\ ab & b^2+c \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} a^2+c & 0 & ab \\ 0 & d & 0 \\ ab & 0 & b^2+c \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} a & \sqrt{2}b & 0 \\ \sqrt{2}b & a & \sqrt{2}b \\ 0 & \sqrt{2}b & a \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \\ -4 & 4 & -13 \end{pmatrix}$　(10) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$　(11) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$　(12) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(13) $\begin{pmatrix} 8 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 6 & -7 \end{pmatrix}$　(14) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 6 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$　(15) $\begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} & 4 \\ \sqrt{2} & 3 & 2\sqrt{2} \\ 4 & 2\sqrt{2} & 15 \end{pmatrix}$　(16) $\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} & -2 \\ -\sqrt{3} & 1 & -2\sqrt{3} \\ -2 & -2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$

(17) $\begin{pmatrix} a-1 & 1 & -b \\ 1 & a-1 & b \\ -b & b & a-b^2 \end{pmatrix}$　(18) $\begin{pmatrix} 3 & -2a & 2a-2 \\ -2a & a+1 & -2 \\ 2a-2 & -2 & -a+2 \end{pmatrix}$　(19) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(20) $\begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & -3 & 7 \end{pmatrix}$　(21) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 6 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　(22) $\begin{pmatrix} a & c & d & b \\ c & a & b & d \\ d & b & a & c \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$

第 9 回の演習問題の解答

1. (1) と (8) は対称行列だから (a). (4) と (5) は正規行列になっているためこれらも (a). (3) は固有値 1, 2 をもち, これらに対する固有ベクトルはそれぞれ, $k\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $l\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}$ の形になり, 固有ベクトルからなる $\boldsymbol{K}^3$ の基底 $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}$ がとれるため, この行列は対角化可能である. しかし, 相異なる固有値に対する固有ベクトル (たとえば $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$) は直交しないため, ユニタリー行列では対角化不可能である. (6) は固有値 1, 2 をもち, これらに対する固有ベクトルはそれぞれ, $k\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $l\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$ の形になり, 固有ベクトルからなる $\boldsymbol{K}^3$ の基底 $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$ がとれるため, この行列は対角化可能である. しかし, 相異なる固有値に対する固有ベクトル (たとえば $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}$) は直交しないため, ユニタリー行列では対角化不可能である. 従って, (3) と (6) は (b) の場合にあてはまる. (2) は固有値 1, 2 をもち, これらに対する固有ベクトルはそれぞれ, $k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $l\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ の形になるが, $\boldsymbol{K}^3$ を生成しないため, 対角化不可能. (7) は固有値 1, 3 をもち, これらに対する固有ベクトルはそれぞれ, $k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $l\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ の形になるが, $\boldsymbol{K}^3$ を生成しないため, 対角化不可能. 従って, (2) と (7) は (c) の場合にあてはまる.

2. (1) $\begin{vmatrix}t-a^2-c & -ab\\ -ab & t-b^2-c\end{vmatrix}=(t-a^2-c)(t-b^2-c)-a^2b^2=t^2-(a^2+b^2+2c)t+c(a^2+b^2+c)=(t-c)(t-a^2-b^2-c)$ だから, 与えられた行列の固有値は c と a^2+b^2+c である. $\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}-a^2 & -ab\\ -ab & -b^2\end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間の基底であり, $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}b^2 & -ab\\ -ab & a^2\end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間の基底だから, $\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ は, それぞれ c, a^2+b^2+c に対する固有ベクトルである. 従って, $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}b & a\\ -a & b\end{pmatrix}$ は与えられた行列を対角化する直交行列である.

(2) $\begin{vmatrix}t-a^2-c & 0 & -ab\\ 0 & t-d & 0\\ -ab & 0 & t-b^2-c\end{vmatrix}=(t-d)\begin{vmatrix}t-a^2-c & -ab\\ -ab & t-b^2-c\end{vmatrix}=(t-d)(t-c)(t-a^2-b^2-c)$ だから, 与

えられた行列の固有値は $c,\ d,\ a^2+b^2+c$ である．$d \neq c, a^2+b^2+c$ の場合，$\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -a^2 & 0 & -ab \\ 0 & c-d & 0 \\ -ab & 0 & -b^2 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立１次方程式の解空間の基底，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} d-a^2-c & 0 & -ab \\ 0 & 0 & 0 \\ -ab & 0 & d-b^2-c \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立１次方程式の解空間の基底であり，$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} b^2 & 0 & -ab \\ 0 & a^2+b^2+c-d & 0 \\ -ab & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立１次方程式の解空間の基底である．$d = c$ の場合，$\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -a^2 & 0 & -ab \\ 0 & 0 & 0 \\ -ab & 0 & -b^2 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立１次方程式の解空間の基底であり，$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} b^2 & 0 & -ab \\ 0 & a^2+b^2+c-d & 0 \\ -ab & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立１次方程式の解空間の基底である．$d = a^2+b^2+c$ の場合，$\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -a^2 & 0 & -ab \\ 0 & -a^2-b^2 & 0 \\ -ab & 0 & -b^2 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立１次方程式の解空間の基底であり，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} b^2 & 0 & -ab \\ 0 & 0 & 0 \\ -ab & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立１次方程式の解空間の基底である．以上から，$\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ は，それぞれ $c,\ d,\ a^2+b^2+c$ に対する固有ベクトルであり，互いに直交するため，$\begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$ は与えられた行列を対角化する直交行列である．

(3) $\begin{vmatrix} t-3 & -1 & -2 \\ -1 & t-3 & 2 \\ -2 & 2 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-4 & -1 & -2 \\ t-4 & t-3 & 2 \\ 0 & 2 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-4 & -1 & -2 \\ 0 & t-2 & 4 \\ 0 & 2 & t \end{vmatrix} = (t-4)\begin{vmatrix} t-2 & 4 \\ 2 & t \end{vmatrix} = (t-4)(t^2-2t-8) = (t-4)^2(t+2)$ より，与えられた行列の固有値は -2 と 4 である．$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 4 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる．$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば，$\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから 4 に対する固有空間の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が得られる．$\begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 \\ -1 & -5 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -1 & -5 & 2 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから -2 に対する

固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ で与えられる．故に，与えられた行列は $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$ に対角化される．

(4) $\begin{vmatrix}t+1 & 2 & -4\\ 2 & t-2 & -2\\ -4 & -2 & t+1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-3 & 2 & -4\\ 0 & t-2 & -2\\ t-3 & -2 & t+1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-3 & 2 & -4\\ 0 & t-2 & -2\\ 0 & -4 & t+5\end{vmatrix} = (t-3)\begin{vmatrix}t-2 & -2\\ -4 & t+5\end{vmatrix} = (t-3)(t^2+3t-18) = (t-3)^2(t+6)$ より，与えられた行列の固有値は -6 と 3 である．$\begin{pmatrix}4&2&-4\\2&1&-2\\-4&-2&4\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}4&2&-4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ で与えられる．$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ とおけば，$\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + \dfrac{4}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}$ が得られる．$\begin{pmatrix}-5&2&-4\\2&-8&-2\\-4&-2&-5\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&-18&-9\\2&-8&-2\\0&-18&-9\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&-18&-9\\2&-4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから -6 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ で与えられる．故に，与えられた行列は $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-6\end{pmatrix}$ に対角化される．

(5) $\begin{vmatrix}t-1 & -1 & -1\\ -1 & t & 0\\ -1 & 0 & t\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-1 & -1 & 0\\ -1 & t & -t\\ -1 & 0 & t\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-1 & -1 & 0\\ -2 & t & 0\\ -1 & 0 & t\end{vmatrix} = t\begin{vmatrix}t-1 & -1\\ -2 & t\end{vmatrix} = t(t^2-t-2) = t(t-2)(t+1)$ より，与えられた行列の固有値は $-1, 0, 2$ である．$\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-1&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&0&0\\-1&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる．$\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 0 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる．

$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&2&0\\-1&0&2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&-1&1\\0&2&-2\\-1&0&2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間

の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ に対角化される.

(6) $\begin{vmatrix}t-1 & 0 & -2\\ 0 & t-1 & -2\\ -2 & -2 & t+1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-1 & 0 & -2\\ -t+1 & t-1 & -2\\ 0 & -2 & t+1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-1 & 0 & -2\\ 0 & t-1 & -4\\ 0 & -2 & t+1\end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix}t-1 & -4\\ -2 & t+1\end{vmatrix} = (t-1)(t^2-9) =$ $(t-1)(t-3)(t+3)$ より, 与えられた行列の固有値は $-3, 1, 3$ である. $\begin{pmatrix}-4 & 0 & -2\\ 0 & -4 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix}-4 & 0 & -2\\ 0 & -4 & -2\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix}-4 & 0 & -2\\ 0 & -4 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ だから -3 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -2\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の正 6 規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ に対角化される.

(7) $\begin{vmatrix}t-a & -\sqrt{2}b & 0\\ -\sqrt{2}b & t-a & -\sqrt{2}b\\ 0 & -\sqrt{2}b & t-a\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-a & -\sqrt{2}b & 0\\ 0 & t-a & -\sqrt{2}b\\ -t+a & -\sqrt{2}b & t-a\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-a & -\sqrt{2}b & 0\\ 0 & t-a & -\sqrt{2}b\\ 0 & -2\sqrt{2}b & t-a\end{vmatrix} = (t-a)\begin{vmatrix}t-a & -\sqrt{2}b\\ -2\sqrt{2}b & t-a\end{vmatrix} =$ $(t-a)(t-a+2b)(t-a-2b)$ より, 与えられた行列の固有値は $a, a\pm 2b$ である. $\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{2}b & 0\\ -\sqrt{2}b & 0 & -\sqrt{2}b\\ 0 & -\sqrt{2}b & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{\sqrt{2}b}\text{倍する}]{\text{各行を}}$ $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ だから a に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}-2b & -\sqrt{2}b & 0\\ -\sqrt{2}b & -2b & -\sqrt{2}b\\ 0 & -\sqrt{2}b & -2b\end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{\sqrt{2}b}\text{倍する}]{\text{各行を}} \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1 & 0\\ 1 & \sqrt{2} & 1\\ 0 & 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix}0 & -1 & -\sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{2} & 1\\ 0 & 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2)\text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$ だから $a-2b$ に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}2b & -\sqrt{2}b & 0\\ -\sqrt{2}b & 2b & -\sqrt{2}b\\ 0 & -\sqrt{2}b & 2b\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[-\frac{1}{\sqrt{2}b}\text{倍する}]{\text{各行を}} \begin{pmatrix}-\sqrt{2} & 1 & 0\\ 1 & -\sqrt{2} & 1\\ 0 & 1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix}0 & -1 & \sqrt{2}\\ 1 & -\sqrt{2} & 1\\ 0 & 1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$ だから

$a+2b$ に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a-2b & 0\\ 0 & 0 & a+2b\end{pmatrix}$ に対角化される.

(8) $\begin{vmatrix}t-1 & 1 & 3\\ 1 & t+1 & 1\\ 3 & 1 & t-1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-4 & 1 & 3\\ 0 & t+1 & 1\\ -t+4 & 1 & t-1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-4 & 1 & 3\\ 0 & t+1 & 1\\ 0 & 2 & t+2\end{vmatrix} = (t-4)\begin{vmatrix}t+1 & 1\\ 2 & t+2\end{vmatrix} = (t-4)(t^2+3t) =$ $t(t-4)(t+3)$ より, 与えられた行列の固有値は $-3, 0, 4$ である. $\begin{pmatrix}-4 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0 & -7 & 7\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 7 & -7\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0 & -7 & 7\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ だから -3 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -4\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ だから 0 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0 & -14 & 0\\ 1 & 5 & 1\\ 0 & -14 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix}0 & -14 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ だから 4 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$ に対角化される.

(9) $\begin{vmatrix}t-2 & -1 & 4\\ -1 & t-2 & -4\\ 4 & -4 & t+13\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-3 & -1 & 4\\ t-3 & t-2 & -4\\ 0 & -4 & t+13\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-3 & -1 & 4\\ 0 & t-1 & -8\\ 0 & -4 & t+13\end{vmatrix} = (t-3)\begin{vmatrix}t-1 & -8\\ -4 & t+13\end{vmatrix} =$ $(t-3)(t^2+12t-45) = (t-3)^2(t+15)$ より, 与えられた行列の固有値は -15 と 3 である. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ -1 & 1 & -4\\ 4 & -4 & 16\end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ で与えられる. $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ が得られる. $\begin{pmatrix}-17 & -1 & 4\\ -1 & -17 & -4\\ 4 & -4 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix}-9 & -9 & 0\\ -9 & -9 & 0\\ 4 & -4 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$

$\begin{pmatrix} -9 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix}$ だから -15 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(10) $\begin{vmatrix} t-1 & -3 & -2 \\ -3 & t-1 & -2 \\ -2 & -2 & t+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+2 & -3 & -2 \\ -t-2 & t-1 & -2 \\ 0 & -2 & t+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+2 & -3 & -2 \\ 0 & t-4 & -4 \\ 0 & -2 & t+3 \end{vmatrix} = (t+2)\begin{vmatrix} t-4 & -4 \\ -2 & t+3 \end{vmatrix} = (t+2)(t^2-t-20) = (t+2)(t+4)(t-5)$ より, 与えられた行列の固有値は -4, -2, 5 である. $\begin{pmatrix} -5 & -3 & -2 \\ -3 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ だから -4 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ -3 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -7 & -7 & 0 \\ -7 & -7 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ だから -2 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ -3 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -7 & 14 \\ 0 & 7 & -14 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ だから 5 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(11) $\begin{vmatrix} t-1 & 1 & -2 \\ 1 & t-1 & 2 \\ -2 & 2 & t-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 1 & -2 \\ t & t-1 & 2 \\ 0 & 2 & t-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 1 & -2 \\ 0 & t-2 & 4 \\ 0 & 2 & t-4 \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} t-2 & 4 \\ 2 & t-4 \end{vmatrix} = t(t^2-6t) = t^2(t-6)$ より, 与えられた行列の固有値は 0 と 6 である. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 0 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから 0 に対する固有空間の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が得られる. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -24 & -12 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix}$ だから 6 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与え

られる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(12) $\begin{vmatrix} t-3 & -2 & -4 \\ -2 & t & -2 \\ -4 & -2 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & -2 & -4 \\ 0 & t & -2 \\ -t-1 & -2 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & -2 & -4 \\ 0 & t & -2 \\ 0 & -4 & t-7 \end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix} t & -2 \\ -4 & t-7 \end{vmatrix} = (t+1)(t^2-7t-8) = (t+1)^2(t-8)$ より, 与えられた行列の固有値は -1 と 8 である. $\begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間の正規直交基底 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ が得られる. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 18 & -9 \\ -2 & 8 & -2 \\ 0 & -18 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & -18 & 9 \end{pmatrix}$ だから 8 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(13) $\begin{vmatrix} t-8 & -3 & 2 \\ -3 & t & -6 \\ 2 & -6 & t+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-8 & 3t-27 & 2 \\ -3 & t-9 & -6 \\ 2 & 0 & t+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & 0 & 20 \\ -3 & t-9 & -6 \\ 2 & 0 & t+7 \end{vmatrix} = (t-9)\begin{vmatrix} t+1 & 20 \\ 2 & t+7 \end{vmatrix} = (t-9)(t^2+8t-33) = (t-9)(t-3)(t+11)$ より, 与えられた行列の固有値は $-11, 3, 9$ である. $\begin{pmatrix} -19 & -3 & 2 \\ -3 & -11 & -6 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -19 & -3 & 2 \\ -60 & -20 & 0 \\ -36 & -12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -10 & 0 & 2 \\ -60 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから -11 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -5 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \\ 2 & -6 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -8 & 12 \\ -3 & 3 & -6 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -6 \\ 2 & -6 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ だから 9 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与

えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{35}} & -\frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{35}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{5}{\sqrt{35}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & 0 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(14) $\begin{vmatrix} t-2 & -6 & -3 \\ -6 & t+3 & -2 \\ -3 & -2 & t+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & -3 \\ -6 & t+7 & -2 \\ -3 & -2(t+7) & t+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & -3 \\ -6 & t+7 & -2 \\ -15 & 0 & t+2 \end{vmatrix} = (t+7)\begin{vmatrix} t-2 & -3 \\ -15 & t+2 \end{vmatrix} =$ $(t+7)(t^2-49) = (t+7)^2(t-7)$ より, 与えられた行列の固有値は -7 と 7 である. $\begin{pmatrix} -9 & -6 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ だから -7 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ だから 0 に対する固有空間の正規直交基底 $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ が得られる. $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \\ -6 & 10 & -2 \\ -3 & -2 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 14 & 0 & -42 \\ -21 & 0 & 63 \\ -3 & -2 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 14 & 0 & -42 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ だから 7 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{35}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{35}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{35}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(15) $\begin{vmatrix} t-4 & -\sqrt{2} & -4 \\ -\sqrt{2} & t-3 & -2\sqrt{2} \\ -4 & -2\sqrt{2} & t-15 \end{vmatrix} = (t-4)(t-3)(t-15) - 16 - 16 - 2(t-15) - 8(t-4) - 16(t-3) = t^3 - 22t^2 + 91t - 102 = (t-2)(t^2-20t+51) = (t-2)(t-3)(t-17)$ より, 与えられた行列の固有値は $2, 3, 17$ である. $\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} & -4 \\ -\sqrt{2} & -1 & -2\sqrt{2} \\ -4 & -2\sqrt{2} & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & -1 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & -4 \\ -\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} \\ -4 & -2\sqrt{2} & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2)\text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & -4 \\ -\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ だから 3 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 13 & -\sqrt{2} & -4 \\ -\sqrt{2} & 14 & -2\sqrt{2} \\ -4 & -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 5 & -5\sqrt{2} & 0 \\ -5\sqrt{2} & 10 & 0 \\ -4 & -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 5 & -5\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ だから 17 に対する固有空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{21}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}$

によって $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(16) $\begin{vmatrix} t-3 & \sqrt{3} & 2 \\ \sqrt{3} & t-1 & 2\sqrt{3} \\ 2 & 2\sqrt{3} & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-3 & \sqrt{3} & -2t+8 \\ \sqrt{3} & t-1 & 0 \\ 2 & 2\sqrt{3} & t-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & 5\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & t-1 & 0 \\ 2 & 2\sqrt{3} & t-4 \end{vmatrix} = (t-4)\begin{vmatrix} t+1 & 5\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & t-1 \end{vmatrix} = (t-4)(t^2-16) =$
$(t-4)^2(t+4)$ より, 与えられた行列の固有値は -4 と 4 である. $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 2 \\ \sqrt{3} & 3 & 2\sqrt{3} \\ 2 & 2\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
だから 4 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ だから 4 に対する固有空間の正規直交基底 $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ が得られる. $\begin{pmatrix} -7 & \sqrt{3} & 2 \\ \sqrt{3} & -5 & 2\sqrt{3} \\ 2 & 2\sqrt{3} & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -7 & \sqrt{3} & 2 \\ 8\sqrt{3} & -8 & 0 \\ -12 & 4\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 8\sqrt{3} & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから -4 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, 与えられた行列は $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(17) $\begin{vmatrix} t-a+1 & -1 & b \\ -1 & t-a+1 & -b \\ b & -b & t-a+b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-a & t-a & 0 \\ -1 & t-a+1 & -b \\ b & -b & t-a+b^2 \end{vmatrix} = (t-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & t-a+1 & -b \\ b & -b & t-a+b^2 \end{vmatrix} =$
$(t-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & t-a+2 & -b \\ b & -2b & t-a+b^2 \end{vmatrix} = (t-a)\begin{vmatrix} t-a+2 & -b \\ -2b & t-a+b^2 \end{vmatrix} = (t-a)((t-a+2)(t-a+b^2)-2b^2) =$
$(t-a)((t-a)^2+(b^2+2)(t-a)) = (t-a)^2(t-a+b^2+2)$ より, 与えられた行列の固有値は a, $a-b^2-2$ である.
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & b \\ -1 & 1 & -b \\ b & -b & b^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから a に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる.
$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{b}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -b \\ b \\ 2 \end{pmatrix}$ より, a に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{2b^2+4}}\begin{pmatrix} -b \\ b \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -b^2-1 & -1 & b \\ -1 & -b^2-1 & -b \\ b & -b & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 0 & b^2(b^2+2) & b(b^2+2) \\ -1 & -b^2-1 & -b \\ 0 & -b(b^2+2) & -(b^2+2) \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{b^2+2}\text{ 倍する}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 0 & b^2(b^2+2) & b(b^2+2) \\ -1 & -b^2-1 & -b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$

だから $a-b^2-2$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\-1\\b\end{pmatrix}$ で与えられる．従って，$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-b}{\sqrt{2b^2+4}} & \frac{1}{\sqrt{b^2+2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{b}{\sqrt{2b^2+4}} & \frac{-1}{\sqrt{b^2+2}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2b^2+4}} & \frac{b}{\sqrt{b^2+2}}\end{pmatrix}$ は与えられた行列を対角化する直交行列である．

(18) $\begin{vmatrix}t-3 & 2a & -2a+2\\ 2a & t-a-1 & 2\\ -2a+2 & 2 & t+a-2\end{vmatrix} = (t-3)(t-a-1)(t+a-2)-16a(a-1)-4(t-3)-4(a-1)^2(t-a-1)-4a^2(t+a-2) = t^3-6t^2-3(3a^2-3a+1)t-9a^2+9a+10 = (t+1)(t^2-7t-(3a-5)(3a+2)) = (t+1)(t+3a-5)(t-3a-2)$ より，与えられた行列の固有値は -1, $-3a+5$, $3a+2$ である．

$\begin{pmatrix}-4 & 2a & -2a+2\\ 2a & -a-2 & 2\\ -2a+2 & 2 & a-3\end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}} \begin{pmatrix}2 & -a & a-1\\ 2a & -a-2 & 2\\ -2a+2 & 2 & a-3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix}2 & -a & a-1\\ 0 & (a+1)(a-2) & -(a+1)(a-2)\\ 0 & -(a+1)(a-2) & (a+1)(a-2)\end{pmatrix}$ だから，-1 に対する固有空間の基底は，$a \neq -1, 2$ ならば $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ で与えられ，$a=-1$ または 2 ならば $\begin{pmatrix}a\\2\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-a+1\\0\\2\end{pmatrix}$ で与えられる．$\begin{pmatrix}-3a+2 & 2a & -2a+2\\ 2a & -4a+4 & 2\\ -2a+2 & 2 & -2a+3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 1 行を }-1\text{ 倍して}}$ $\begin{pmatrix}-3a+2 & 2a & -2a+2\\ 2a & -4a+4 & 2\\ a & -2a+2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix}(2a-1)(a-2) & -2(2a-1)(a-2) & 0\\ 0 & 0 & 0\\ a & -2a+2 & 1\end{pmatrix}$ だから，$-3a+5$ に対する固有空間の基底は，$a \neq \dfrac{1}{2}, 2$ ならば $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ で与えられ，$a=\dfrac{1}{2}$ または 2 ならば $\begin{pmatrix}1\\0\\-a\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\2a-2\end{pmatrix}$ で与えられる．$\begin{pmatrix}3a-1 & 2a & -2a+2\\ 2a & 2a+1 & 2\\ -2a+2 & 2 & 4a\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 1 行を 2 倍して}} \begin{pmatrix}3a-1 & 2a & -2a+2\\ 2a & 2a+1 & 2\\ 4a & 4a+2 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix}(2a-1)(a+1) & (2a-1)(a+1) & 0\\ 2a & 2a+1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ だから，$3a+2$ に対する固有空間の基底は，$a \neq -1, \dfrac{1}{2}$ ならば $\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ で与えられ，$a=-1$ または $\dfrac{1}{2}$ ならば $\begin{pmatrix}1\\0\\-a\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\2\\-2a-1\end{pmatrix}$ で与えられる．

$a \neq -1, \dfrac{1}{2}, 2$ の場合，$\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，$\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$，$\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ はそれぞれ，固有値 -1, $-3a+5$, $3a+2$ に対する固有空間の基底だから，$\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$ は与えられた行列を対角化する直交行列である．

$a=-1$ の場合，$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$ は固有値 -1 に対する固有空間の基底であり，$\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ は固有値 8 に対する固有空間の基底である．$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$ とおけば，$\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \dfrac{2}{5}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} = \dfrac{2}{5}\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}$ より，-1 に

対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}$ で与えられる．従って，$\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ は与えられた行列を対角化する直交行列である．

$a=\dfrac{1}{2}$ の場合，$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ は固有値 -1 に対する固有空間の基底であり，$\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ は固有値 $\dfrac{7}{2}$ に対する固有空間の基底である．$\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ とおけば，$\boldsymbol{v}_2-\dfrac{(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}-\dfrac{2}{5}\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}-2\\5\\-4\end{pmatrix}$ より，$\dfrac{7}{2}$ に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}, \dfrac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\5\\-4\end{pmatrix}$ で与えられる．従って，$\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}}\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}}\end{pmatrix}$ は与えられた行列を対角化する直交行列である．

$a=2$ の場合，$\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ は固有値 -1 に対する固有空間の基底であり，$\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ は固有値 8 に対する固有空間の基底である．$\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ とおけば，$\boldsymbol{v}_2-\dfrac{(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\dfrac{4}{5}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}$ より，-1 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \dfrac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}$ で与えられる．従って，$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ は与えられた行列を対角化する直交行列である．

(19) $\begin{vmatrix}t-2 & 2 & 1 & -1\\ 2 & t-2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & t-2 & -2\\ -1 & -1 & -2 & t-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t-4 & -(t-4) & 0 & 0\\ 2 & t-2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & t-2 & -2\\ 0 & 0 & t-4 & t-4\end{vmatrix}=(t-4)^2\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 2 & t-2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & t-2 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=$
$(t-4)^2\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & t & 2 & -1\\ 1 & 2 & t & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(t-4)^2\begin{vmatrix}t & 2\\ 2 & t\end{vmatrix}=(t-4)^2(t-2)(t+2)$ より，与えられた行列の固有値は 4, ± 2 である．

$\begin{pmatrix}2 & 2 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2 & -2\\ -1 & -1 & -2 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}0 & 0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & -3 & 3\\ 1 & 1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}0 & 0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ だから，2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる．$\begin{pmatrix}0 & 2 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & -2\\ -1 & -1 & -2 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -2 & -2\end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(4,3)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -2 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2)\text{ 成分に関して}}\begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -2 & -2\end{pmatrix}$ だから，2 に対する固有空間の基底は

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -4 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -15 & -9 \\ 0 & -6 & 9 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(4,3)\text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{pmatrix}$ だから, -2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 従って, $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ は与えられた行列を対角化する直交行列である.

(20) $\begin{vmatrix} t-10 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & t-7 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & t-6 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & t-7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-10 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & t-11 & 0 & t-11 \\ 0 & -3 & t-6 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & t-7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-12 & -(t-12) & 0 & -(t-12) \\ 2 & t-11 & 0 & t-11 \\ 0 & -3 & t-6 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & t-7 \end{vmatrix} =$ $(t-12)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & t-11 & 0 & t-11 \\ 0 & -3 & t-6 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & t-7 \end{vmatrix} = (t-12)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & t-9 & 0 & t-9 \\ 0 & -3 & t-6 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & t-6 \end{vmatrix} = (t-12)\begin{vmatrix} t-9 & 0 & t-9 \\ -3 & t-6 & 3 \\ -3 & 3 & t-6 \end{vmatrix} =$ $(t-9)(t-12)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & t-6 & 3 \\ -3 & 3 & t-6 \end{vmatrix} = (t-9)(t-12)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & t-6 & 6 \\ -3 & 3 & t-3 \end{vmatrix} = (t-9)(t-12)\begin{vmatrix} t-6 & 6 \\ 3 & t-3 \end{vmatrix} = t(t-9)^2(t-12)$ より, 与えられた行列の固有値は 0, 9, 12 である. $\begin{pmatrix} -10 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -7 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(4,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -39 & 30 & -69 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 108 & -108 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 11 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 108 & -108 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 0 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(4,3)\text{ 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, 9 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & 6 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(4,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 9 & -6 & -9 \\ 0 & 9 & -6 & -9 \\ 0 & -3 & 6 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(3,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(1,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから，12 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる．$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば，$\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ より，9 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる．従って，$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ は与えられた行列を対角化する直交行列である．

(21) $\begin{vmatrix} t-3 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & t-3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & t-6 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & -(t-2) & 0 & 0 \\ -1 & t-3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & t-2 & -2(t-2) \\ 1 & 1 & -2 & t-3 \end{vmatrix} = (t-2)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & t-3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & t-3 \end{vmatrix} = (t-2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & t-4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & t-7 \end{vmatrix} = (t-2)^2 \begin{vmatrix} t-4 & 5 \\ 2 & t-7 \end{vmatrix} = (t-2)^2(t^2-11t+18) = (t-2)^3(t-9)$ より，与えられた行列の固有値は 2 と 9 である．$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから，2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる．$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(4,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -7 & 14 & -35 \\ 0 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -14 \\ 1 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 14 & -28 \\ 0 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -14 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(3,3)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -14 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから，9 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる．$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1$ とおけば，$\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{\|\boldsymbol{w}_2\|^2}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ より，2 に対する固有

空間の正規直交基底は $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\6\end{pmatrix}$ で与えられる．従って，$\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{42}} & -\frac{1}{\sqrt{7}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{42}} & -\frac{1}{\sqrt{7}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{42}} & \frac{2}{\sqrt{7}}\\ 0 & 0 & \frac{6}{\sqrt{42}} & \frac{1}{\sqrt{7}}\end{pmatrix}$ は与えられた行列を対角化する直交行列である．

(22) $\begin{vmatrix}t-a & -c & -d & -b\\ -c & t-a & -b & -d\\ -d & -b & t-a & -c\\ -b & -d & -c & t-a\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t-a-b-c-d & t-a-b-c-d & t-a-b-c-d & t-a-b-c-d\\ -c & t-a & -b & -d\\ -d & -b & t-a & -c\\ -b & -d & -c & t-a\end{vmatrix} =$

$(t-a-b-c-d)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -c & t-a & -b & -d\\ -d & -b & t-a & -c\\ -b & -d & -c & t-a\end{vmatrix} = (t-a-b-c-d)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -c & t-a+c & -b+c & c-d\\ -d & -b+d & t-a+d & -c+d\\ -b & b-d & b-c & t-a+b\end{vmatrix} =$

$(t-a-b-c-d)\begin{vmatrix}t-a+c & -b+c & c-d\\ -b+d & t-a+d & -c+d\\ b-d & b-c & t-a+b\end{vmatrix} = (t-a-b-c-d)\begin{vmatrix}t-a+b+c-d & 0 & t-a+b+c-d\\ -b+d & t-a+d & -c+d\\ b-d & b-c & t-a+b\end{vmatrix} =$

$(t-a-b-c-d)(t-a+b+c-d)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ -b+d & t-a+d & -c+d\\ b-d & b-c & t-a+b\end{vmatrix} =$

$(t-a-b-c-d)(t-a+b+c-d)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -b+d & t-a+d & b-c\\ b-d & b-c & t-a+d\end{vmatrix} =$

$(t-a-b-c-d)(t-a+b+c-d)\begin{vmatrix}t-a+d & b-c\\ b-c & t-a+d\end{vmatrix} = (t-a-b-c-d)(t-a+b+c-d)(t-a+b-c+d)(t-a-b+c+d)$

より，与えられた行列の固有値は $a+b+c+d$, $a-b-c+d$, $a-b+c-d$, $a+b-c-d$ である．

$\begin{pmatrix}b+c+d & -c & -d & -b\\ -c & b+c+d & -b & -d\\ -d & -b & b+c+d & -c\\ -b & -d & -c & b+c+d\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 行に加える}]{\text{第 1,2,3 行を}} \begin{pmatrix}b+c+d & -c & -d & -b\\ -c & b+c+d & -b & -d\\ -d & -b & b+c+d & -c\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ だから，$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ は $a+b+c+d$ に対する固有ベクトルである．$\begin{pmatrix}-b-c+d & -c & -d & -b\\ -c & -b-c+d & -b & -d\\ -d & -b & -b-c+d & -c\\ -b & -d & -c & -b-c+d\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{と第 2 行を第 4 行に加える}]{\text{第 1,3 行を } -1 \text{ 倍したもの}} \begin{pmatrix}-b-c+d & -c & -d & -b\\ -c & -b-c+d & -b & -d\\ -d & -b & -b-c+d & -c\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ だから，$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ は $a-b-c+d$ に対する固有ベクトルである．$\begin{pmatrix}-b+c-d & -c & -d & -b\\ -c & -b+c-d & -b & -d\\ -d & -b & -b+c-d & -c\\ -b & -d & -c & -b+c-d\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{と第 3 行を第 4 行に加える}]{\text{第 1,2 行を } -1 \text{ 倍したもの}}$

$\begin{pmatrix}-b+c-d & -c & -d & -b\\ -c & -b+c-d & -b & -d\\ -d & -b & -b+c-d & -c\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ だから，$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ は $a-b+c-d$ に対する固有ベクトルである．

$$\begin{pmatrix} b-c-d & -c & -d & -b \\ -c & b-c-d & -b & -d \\ -d & -b & b-c-d & -c \\ -b & -d & -c & b-c-d \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{と第 1 行を第 4 行に加える}]{\text{第 2,3 行を } -1 \text{ 倍したもの}} \begin{pmatrix} b-c-d & -c & -d & -b \\ -c & b-c-d & -b & -d \\ -d & -b & b-c-d & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ だから，

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $a+b-c-d$ に対する固有ベクトルである．$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{K}^4$ の直交系だから 1 次独立であるため，これらは $\boldsymbol{K}^4$ の基底である．よって，$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は与えられた行列の固有ベクトルからなる $\boldsymbol{K}^4$ の基底だから，$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ は与えられた行列を対角化する直交行列である．

線形数学 II 小テスト　第 25 回　実対称行列の対角化

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を対角化する直交行列を求めよ．

[解答例] $\begin{vmatrix} t & -1 & -1 \\ -1 & t & -1 \\ -1 & -1 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & -t-1 & 0 \\ -1 & t & -1 \\ -1 & -1 & t \end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & t-1 & -1 \\ -1 & -2 & t \end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ -2 & t \end{vmatrix} = (t+1)^2(t-2)$ より，与えられた行列の固有値は $-1, 2$ である．$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ で与えられる．$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおけば，$\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ より，-1 に対する固有空間の正規直交基底は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ で与えられる．

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}\text{ 倍する}]{\text{第 1 行を}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる．従って，$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ は与えられた行列を対角化する直交行列である．

線形数学 II 小テスト　第 26 回　実対称行列の対角化２

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ を対角化する直交行列を求めよ．

[解答例] $\begin{vmatrix} t-3 & -2 & -4 \\ -2 & t & -2 \\ -4 & -2 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & -2 & -4 \\ 0 & t & -2 \\ -t-1 & -2 & t-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+1 & -2 & -4 \\ 0 & t & -2 \\ 0 & -4 & t-7 \end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix} t & -2 \\ -4 & t-7 \end{vmatrix} = (t+1)(t^2-7t-8) = (t+1)^2(t-8)$ より，与えられた行列の固有値は -1 と 8 である．$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ で与えられる．$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおけば，$\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから -1 に対する固有空間の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ が得られる．$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 18 & -9 \\ -2 & 8 & -2 \\ 0 & -18 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & -18 & 9 \end{pmatrix}$ だから 8 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる．故に，与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ に対角化される．

線形数学 II 小テスト　第 27 回　復習その 1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とおくとき, $\mathrm{Ker}\, T_A$, $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底をそれぞれ 1 組ずつ求めよ.

[解答例] $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ -1 & 0 & -1 & -2 & r \\ 1 & 1 & 0 & 2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & -1 & r+p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & s-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & -1 & r+p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p-q \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{(3,4) \text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & r+2p \\ 0 & 1 & -1 & 0 & r+p+q \\ 0 & 0 & 0 & -1 & r+p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-p-q \end{pmatrix}$$

だから, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつためには $s-p-q=0$ であることが必要十分である. このとき, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ p+q \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底になる. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x+z=0 \\ y-z=0 \\ -w=0 \end{cases}$ と同値であるため, $\mathrm{Ker}\, T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (t は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\, T_A$ の基底である.

線形数学 II 小テスト　第 28 回　復習その 2

1 次写像 $D : P_2(\boldsymbol{R}) \to P_2(\boldsymbol{R})$ を $D(f(x)) = x^2 f(x+2) - x(2x+1)f(x+1) + x(x+1)f(x)$ で定める.
　(1) $P_2(\boldsymbol{R})$ の基底 $[1, x, x^2]$ に関する D の表現行列を求めよ.　(2) $\operatorname{Ker} D$ の基底と次元を求めよ.

[解答例] (1) $D(1) = 0$, $D(x) = -x$, $D(x^2) = -x$ となるため, 与えられた基底に関する D の表現行列は次のような行列である.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ が $\operatorname{Ker} D$ に属することと $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であることは同値だから, $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \operatorname{Ker} D$ であるためには, $c = -b$ が成り立つことが必要十分である. このとき, $f(x) = a + b(x - x^2)$ だから, $1, x - x^2$ は $\operatorname{Ker} D$ の基底で, $\dim \operatorname{Ker} D = 2$ である.

線形数学 II 小テスト　第 28 回　復習その 3

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ a & 1-a & a \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有空間の基底を求め, 対角化可能ならば対角化せよ.

[解答例] $\begin{vmatrix} t-2 & 1 & -1 \\ -a & t-1+a & -a \\ -1 & 1 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & -1 \\ -a & t-1 & -a \\ -1 & t-1 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 0 & -1 \\ -a & t-1 & -a \\ a-1 & 0 & t-2+a \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} t-2 & -1 \\ a-1 & t-2+a \end{vmatrix} = (t-1)^2(t+a-3)$ より, 与えられた行列の固有値は 1 と $-a+3$ である. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -a & a & -a \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. $\begin{pmatrix} 1-a & 1 & -1 \\ -a & 2 & -a \\ -1 & 1 & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1-a & 1 & -1 \\ a-2 & 0 & 2-a \\ a-2 & 0 & 2-a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 2 行を } -1 \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} 1-a & 1 & -1 \\ a-2 & 0 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, $a \neq 2$ ならば $-a+3$ に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 従って $a \neq 2$ ならば与えられた行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a+3 \end{pmatrix}$ に対角化される. $a = 2$ ならば, 与えられた行列の固有値は 1 のみで, 1 に対する固有空間の次元は 2 だから, 与えられた行列は対角化不可能である.

2015 年度 線形数学 II 試験問題 (電気電子系学類) 2016 年 1 月 29 日実施

1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の定める 1 次写像 $T_A : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^4$ について, 以下の問に答えよ.

(1) $\mathrm{Im}\, T_A$ の次元と基底を求めよ. (8 点)

(2) $\mathrm{Ker}\, T_A$ の次元と基底を求めよ. (8 点)

(3) $U = \mathrm{Ker}\, T_A$ とするとき, U の直交補空間 $U^\perp$ の次元と基底を求めよ. ただし, 内積は標準内積とする. (4 点)

2. $P_2(\boldsymbol{R})$ を, 2 次以下の実数係数 1 変数多項式 $f(x)$ 全体のなす $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とする. $P_2(\boldsymbol{R})$ の 1 次変換 $T : P_2(\boldsymbol{R}) \to P_2(\boldsymbol{R})$ を, $f(x) \in P_2(\boldsymbol{R})$ に対して

$$T(f(x)) = (x^2 + x + 1)f''(x) - (2x + 1)f'(x) + 2f(x)$$

で定めるとき, 以下の問に答えよ.

(1) $P_2(\boldsymbol{R})$ の基底 $[1, x, x^2]$ に関する T の表現行列を求めよ. (10 点)

(2) $\mathrm{Ker}\, T$ の次元と基底を求めよ. (10 点)

3. 次の $\boldsymbol{R}^3$ のベクトルの組に対して, グラム・シュミットの直交化法を適用し, $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底をつくれ. ただし, 内積は標準内積とする. (10 点)

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき, 以下の問に答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ. (8 点)

(2) (1) で求めた各固有値に対する固有空間の基底を求めよ. (8 点)

(3) A が対角化可能かどうか調べ, 対角化可能ならば対角化せよ. (4 点)

5. 実対称行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) A の固有値をすべて求め, 各固有値に対する固有空間の基底を求めよ. (10 点)

(2) A を対角化する直交行列 T を求め, $T^{-1}AT$ を求めよ. (10 点)

6. $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^3$ かつ $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ とし, $a \in \boldsymbol{R}$ として 3 次正方行列 A を $A = aE_3 + \boldsymbol{v}\,{}^t\boldsymbol{v}$ によって定める. 次の (1) または (2) のいずれか一方を解答せよ. (10 点)

(1) $A\boldsymbol{v}$ を a と $\boldsymbol{v}$ を用いて表すことによって $\boldsymbol{v}$ は A のある固有値に対する固有ベクトルであることを示し, $\boldsymbol{v}$ に対応する A の固有値を a と $\boldsymbol{v}$ を用いて表せ.

(2) a は A の固有値であることを示し, a に対する A の固有空間は $\boldsymbol{v}$ で生成される $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間の直交補空間であることを示せ.

2015 年度 線形数学 II 試験問題の解答例 (電気電子系学類) 2016 年 1 月 29 日実施

[1 の解答例] $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $(A\ \boldsymbol{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ 1 & 0 & 1 & 1 & r \\ 0 & 1 & -1 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\ \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\ \text{成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s-q \end{pmatrix}$$

(1) 上の計算から, 考えている連立 1 次方程式が解をもつ条件は $r-p=s-q=0$ が成り立つことである. 従って, $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\ T_A$ であるためには $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ p \\ q \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\ T_A$ の基底で, $\dim \mathrm{Im}\ T_A = 2$ である.

(2) $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合の上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x+z+w=0 \\ y-z+w=0 \end{cases}$ と同値であるため, $\mathrm{Ker}\, T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -s-t \\ s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (s, t は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\, T_A$ の基底で, $\dim \mathrm{Ker}\, T_A = 2$ である.

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$ が $U^\perp$ に属するための条件は, (2) の結果から $\boldsymbol{x}$ と $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}$ と $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の内積がともに 0 であることだから, $\begin{cases} -x+y+z=0 \\ -x-y+w=0 \end{cases}$ が成り立つことが必要十分である. このとき $x=s$, $y=t$ とおけば,

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ s-t \\ s+t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $U^\perp$ の基底で, $\dim U^\perp = 2$ である.

[2 の解答例] (1) $T(1)=2$, $T(x)=-1$, $T(x^2)=2$ だから, 与えられた基底に関する T の表現行列は $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である.

(2) $a+bx+cx^2 \in \mathrm{Ker}\, T$ であるためには $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解であること, すなわち $2a-b+2c=0$ を満たすことが必要十分である. $\mathrm{Ker}\, T$ の要素は a, c を任意の実数として,

$a+2(a+c)x+cx^2=a(1+2x)+c(2x+x^2)$ の形のもの全体からなる．また，$1+2x, 2x+x^2$ は明らかに 1 次独立だから $1+2x, 2x+x^2$ は $\mathrm{Ker}\,T$ の基底である．

［3 の解答例］$\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{w}_2=\boldsymbol{v}_2-\dfrac{(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_1)}\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_3=\boldsymbol{v}_3-\dfrac{(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_1)}\boldsymbol{w}_1-\dfrac{(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_2)}{(\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_2)}\boldsymbol{w}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}-0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ とおけば，求める $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底は，$\dfrac{1}{\|\boldsymbol{w}_1\|}\boldsymbol{w}_1, \dfrac{1}{\|\boldsymbol{w}_2\|}\boldsymbol{w}_2, \dfrac{1}{\|\boldsymbol{w}_3\|}\boldsymbol{w}_3$ で与えられるため $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ が求めるものである．

［4 の解答例］(1) $|xE_3-A|=\begin{vmatrix}x-1&-1&1\\1&x-3&1\\1&-1&x-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-1&x-2&1\\1&x-2&1\\1&0&x-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-2&0&0\\1&x-2&1\\1&0&x-1\end{vmatrix}=(x-2)\begin{vmatrix}x-2&1\\0&x-1\end{vmatrix}=(x-1)(x-2)^2$ より，A の固有値は 1 と 2 である．

(2) $E_3-A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&-2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&-1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$ より，E_3-A を係数行列とする斉次連立 1 次方程式は $\begin{cases}-y+z=0\\x-y=0\end{cases}$ と同値である．従って $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ は 1 に対する A の固有空間の基底である．$2E_3-A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ より，$2E_3-A$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式は $x-y+z=0$ と同値である．従って $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ は 2 に対する A の固有空間の基底である．故に，A の固有ベクトルからなる $\boldsymbol{R}^3$ の基底が存在するため，A は対角化可能であり，$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ とおけば，P は正則行列であり，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ である．

［5 の解答例］(1) $|xE_3-A|=\begin{vmatrix}x+1&-2&-1\\-2&x-2&-2\\-1&-2&x+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+1&-2&-1\\-2&x-2&-2\\-x-2&0&x+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&-2&-1\\-4&x-2&-2\\0&0&x+2\end{vmatrix}=(x+2)^2(x-4)$ より，A の固有値は -2 と 4 である．

$$-2E_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ より, $-2E_3 - A$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式は $-x - 2y - z = 0$ と同値である. 従って $y = s$, $z = t$ とおけば, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は -2 に対する A の固有空間の基底である.

$$4E_3 - A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(1,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ より, $4E_3 - A$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式は $\begin{cases} 3y - 6z = 0 \\ -2x + 2z = 0 \end{cases}$ と同値である. 従って $z = t$ とおけば $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 4 に対する A の固有空間の基底である.

(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{2}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ であり, $\dfrac{1}{\|\boldsymbol{w}_1\|}\boldsymbol{w}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\|\boldsymbol{w}_2\|}\boldsymbol{w}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ だから, $\dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ は -2 に対する A の固有空間の正規直交基底である. また $\dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 4 に対する A の固有空間の基底である. 従って $T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ とおけば, T は直交行列で, $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ である.

[6 の解答例] (1) ${}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{v}\|^2$ であることに注意すれば, $A\boldsymbol{v} = (aE_3 + \boldsymbol{v}\,{}^t\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} = aE_3\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\,{}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{v} = (a + \|\boldsymbol{v}\|^2)\boldsymbol{v}$ である. $\boldsymbol{v}$ は零ベクトルでないため, 上式より $a + \|\boldsymbol{v}\|^2$ は A の固有値であり, $\boldsymbol{v}$ は $a + \|\boldsymbol{v}\|^2$ に対する A の固有ベクトルである.

(2) $\boldsymbol{v}$ で生成される $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間の直交補空間を W とおく. ${}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ であることに注意すれば, $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して $A\boldsymbol{w} = (aE_3 + \boldsymbol{v}\,{}^t\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} = aE_3\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\,{}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{w} = a\boldsymbol{w} + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\boldsymbol{v}$ が成り立つ. $\boldsymbol{w} \in W$ かつ $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ だから, 上式より $A\boldsymbol{w} = a\boldsymbol{w}$ となるため a は A の固有値であり, $\boldsymbol{w}$ は a に対する固有ベクトルである. 逆に $A\boldsymbol{w} = a\boldsymbol{w}$ ならば, 上式より $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ が得られ, $\boldsymbol{v}$ は零ベクトルでないため, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ が成り立つ. 故に $\boldsymbol{w}$ が a に対する A の固有ベクトルならば $\boldsymbol{w} \in W$ である. 以上から a に対する A の固有空間は W である.

2012 年度　線形数学 II　試験問題　(電気電子系学類)

1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 2 & -6 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -9 & 2 & -7 \end{pmatrix}$ の定める 1 次写像 $T_A : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^4$ について, 以下の問に答えよ.

   (1) $\mathrm{Im}\, T_A$ の次元と基底を求めよ.

   (2) $\mathrm{Ker}\, T_A$ の次元と基底を求めよ.

   (3) $U = \mathrm{Im}\, T_A$ とするとき, U の直交補空間 $U^\perp$ の次元と基底を求めよ. ただし, 内積は標準内積とする.

2. $P_n(\boldsymbol{R})$ を, n 次以下の実数係数 1 変数多項式 $f(x)$ 全体のなす $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とする. $P_3(\boldsymbol{R})$ から $P_2(\boldsymbol{R})$ への 1 次写像 $T : P_3(\boldsymbol{R}) \to P_2(\boldsymbol{R})$ を, $f(x) \in P_3(\boldsymbol{R})$ に対して

$$T(f(x)) = (1 + x - 2x^2)\frac{d^3 f(x)}{dx^3} + (1 + x)\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + 2\frac{df(x)}{dx}$$

   で定めるとき, 以下の問に答えよ.

   (1) $P_3(\boldsymbol{R})$ の基底 $[1, x, x^2, x^3]$ と $P_2(\boldsymbol{R})$ の基底 $[1, x, x^2]$ に関する T の表現行列を求めよ.

   (2) $\mathrm{Ker}\, T$ の次元と基底を求めよ.

3. 次の $\boldsymbol{R}^3$ のベクトルの組に対して, グラム・シュミットの直交化法を適用し, $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底をつくれ. ただし, 内積は標準内積とする.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき, 以下の問に答えよ.

   (1) A の固有値をすべて求めよ.

   (2) A が対角化可能かどうか調べ, 対角化可能ならば対角化せよ.

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき, 以下の問に答えよ.

   (1) A の固有値をすべて求めよ.

   (2) A が対角化可能かどうか調べ, 対角化可能ならば対角化せよ.

6. 実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

   (1) A の固有値をすべて求めよ.

   (2) A を対角化する直交行列 T を求め, $T^{-1}AT$ を求めよ.

7. V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底であるためには, V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して, $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ をみたす $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{K}$ がただ 1 通りに定まることが必要十分であることを示せ.

2012 年度　線形数学 II　試験問題解答　(電気電子系学類)

1. $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $(A\,\boldsymbol{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 & p \\ 2 & -6 & 1 & -4 & q \\ 1 & -3 & -1 & 1 & r \\ 3 & -9 & 2 & -7 & s \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 & p \\ 0 & 0 & 5 & -10 & q-2p \\ 0 & 0 & 1 & -2 & r-p \\ 0 & 0 & 8 & -16 & s-3p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 & p \\ 0 & 0 & 1 & -2 & r-p \\ 0 & 0 & 5 & -10 & q-2p \\ 0 & 0 & 8 & -16 & s-3p \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 2r-p \\ 0 & 0 & 1 & -2 & r-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q+3p-5r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s+5p-8r \end{pmatrix}$$

(1) 上の計算から, 考えている連立 1 次方程式が解をもつ条件は $q+3p-5r = s+5p-8r = 0$ が成り立つことである. 従って, $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\ T_A$ であるためには $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ -3p+5r \\ r \\ -5p+8r \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\ T_A$ の基底で, $\dim \mathrm{Im}\ T_A = 2$ である.

(2) $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合の上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x-3y-w=0 \\ z-2w=0 \end{cases}$ と同値であるため, $\mathrm{Ker}\,T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3s+t \\ s \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (s, t は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\,T_A$ の基底で, $\dim \mathrm{Ker}\,T_A = 2$ である.

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$ が $U^\perp$ に属するための条件は, (1) の結果から $\boldsymbol{x}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ の内積がともに 0 であることだから, $\begin{cases} x-3y-5w=0 \\ 5y+z+8w=0 \end{cases}$ が成り立つことが必要十分である. このとき $y = s$, $w = t$ とおけば,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3s+5t \\ s \\ -5s-8t \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$ だから, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $U^\perp$ の基底で, $\dim U^\perp = 2$ である.

2. (1) $T(1) = 0$, $T(x) = 2$, $T(x^2) = 2+6x$, $T(x^3) = 6+12x$ だから, 与えられた基底に関する T の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である.

(2) $a+bx+cx^2+dx^3 \in \operatorname{Ker} T$ であるためには $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解であることが必要十分である．$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから, $\operatorname{Ker} T$ の要素は a, d を任意の実数として, $a-dx-2dx^2+dx^3 = a+d(-x-2x^2+x^3)$ の形のもの全体からなる．また, $1, -x-2x^2+x^3$ は明らかに 1 次独立だから $1, -x-2x^2+x^3$ は $\operatorname{Ker} T$ の基底である．

3. $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)}\boldsymbol{w}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2)}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{5}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば, 求める $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底は, $\dfrac{1}{\|\boldsymbol{w}_1\|}\boldsymbol{w}_1, \dfrac{1}{\|\boldsymbol{w}_2\|}\boldsymbol{w}_2, \dfrac{1}{\|\boldsymbol{w}_3\|}\boldsymbol{w}_3$ で与えられるため $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が求めるものである．

4. (1) $|xE_3 - A| = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ 1 & x-3 & 1 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & x-2 & 1 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 1 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 1 & 0 & x-1 \end{vmatrix} =$ $(x-2)\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)^2$ より, A の固有値は 1 と 2 である．

(2) $E_3 - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ より, $E_3 - A$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式は $\begin{cases} -y+z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ と同値である．従って $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 に対する A の固有空間の基底である．$2E_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $2E_3 - A$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式は $x-y+z=0$ と同値である．従って $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 2 に対する A の固有空間の基底である．故に, A の固有ベクトルからなる $\boldsymbol{R}^3$ の基底が存在するため, A は対角化可能であり, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, P は正則行列であり, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ である．

5. (1) $|xE_3 - A| = \begin{vmatrix} x-3 & 0 & 0 \\ -1 & x-2 & 0 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-3)(x-2)^2$ より, A の固有値は 3 と 2 である.

(2) $2E_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ より, $2E_3 - A$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式は $\begin{cases} -x = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$ と同値である. 2 に対する A の固有空間を V_2 とおけば, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は V_1 の基底だから, V_1 の次元は 1 である. A の固有方程式の解である 2 の重複度は 2 で, V_1 の次元より大きいので, A は対角化不可能である.

6. (1) $|xE_2 - A| = \begin{vmatrix} x-6 & -2 \\ -2 & x-9 \end{vmatrix} = (x-5)(x-10)$ より, A の固有値は 5 と 10 である.

(2) $5E_2 - A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ より, $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 5 に対する A の固有空間の正規直交基底である. $10E_2 - A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ より, $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は 10 に対する A の固有空間の正規直交基底である. よって $T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ とおけば T は直交行列で, $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ である.

7. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底であると仮定する. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V を生成するため, V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して, $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ をみたす $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{K}$ が存在する. もし, $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \boldsymbol{K}$ に対して $\boldsymbol{x} = y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{v}_n$ が成り立てば,

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{v}_n$$

だから , 右辺を左辺に移項して

$$(x_1 - y_1)\boldsymbol{v}_1 + (x_2 - y_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (x_n - y_n)\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

を得る. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立だから, 上の等式から, $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = \cdots = x_n - y_n = 0$ が得られる. 故に, すべての $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $x_j = y_j$ が成り立つため, $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ をみたす $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{K}$ はただ 1 通りに定まる.

V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して, $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ をみたす $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{K}$ がただ 1 通りに定まると仮定すれば, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V を生成することは明らかである. また, $\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{v}_n$ であり, 零ベクトル $\boldsymbol{0}$ に対して $\boldsymbol{0} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ をみたす $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \boldsymbol{K}$ がただ 1 通りに定まることから, そのような $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ に限る. 故に $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立でもあるため, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基底である.

2012 年度　線形数学 II　最終演習問題　(電気電子系学類)

- 答えだけでなく, 途中の式変形や説明も適切に書くこと.
- 解答用紙は裏も使うこと. 裏を使用しても足りなくなった場合は申し出ること.

$\boxed{1}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ の定める 1 次写像 $T_A : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^4$ について, 以下の問に答えよ.

(1) $\mathrm{Im}\, T_A$ の次元と基底を求めよ.

(2) $\mathrm{Ker}\, T_A$ の次元と基底を求めよ.

$\boxed{2}$ $P_n(\boldsymbol{R})$ を, n 次以下の実数係数 1 変数多項式 $f(x)$ 全体のなす $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とする. $P_2(\boldsymbol{R})$ から $P_1(\boldsymbol{R})$ への 1 次写像 $T : P_2(\boldsymbol{R}) \to P_1(\boldsymbol{R})$ を, $f(x) \in P_2(\boldsymbol{R})$ に対して

$$T(f(x)) = (1+x)\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + x\frac{df(x)}{dx} - 2f(x)$$

で定めるとき, 以下の問に答えよ.

(1) $P_2(\boldsymbol{R})$ の基底 $[1, x, x^2]$ と $P_1(\boldsymbol{R})$ の基底 $[1, x]$ に関する T の表現行列を求めよ.

(2) $\mathrm{Ker}\, T$ の次元と基底を求めよ.

$\boxed{3}$ 次の $\boldsymbol{R}^3$ のベクトルの組に対して, グラム・シュミットの直交化法を適用し, $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底をつくれ. ただし, 内積は標準内積とする.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{4}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ とするとき, 以下の問に答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A が対角化可能かどうか調べ, 対角化可能ならば対角化せよ.

$\boxed{5}$ n 次正方行列 A に対して，λ_1, λ_2 を互いに異なる A の固有値とする．$\boldsymbol{v}_1$ が A の固有値 λ_1 の固有ベクトル, $\boldsymbol{v}_2$ が A の固有値 λ_2 の固有ベクトルであるとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は 1 次独立であることを示せ．

$\boxed{6}$ n 次実対称行列 A に対して，λ_1, λ_2 を互いに異なる A の固有値とする．$\boldsymbol{v}_1$ が A の固有値 λ_1 の固有ベクトル, $\boldsymbol{v}_2$ が A の固有値 λ_2 の固有ベクトルであるとき，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は互いに直交することを示せ．(ただし，λ_1, λ_2 が実数であることは証明なしに用いてよい．)

【重要】最終演習に関する注意事項

- 答えだけでなく，途中の式変形や説明も適切に書くこと．（答案の記述に不足・不備がある場合は減点の対象となります．）
- 計算問題は検算を行うなどしてミスのないようにして下さい.
- 解答用紙は裏も使うこと. 裏を使用しても足りなくなった場合は申し出ること.

2012 年度　線形数学 II　最終演習問題解答　(電気電子系学類)

1. $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし, $(A\ \boldsymbol{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & p \\ 0 & 1 & 1 & 1 & q \\ 2 & -1 & 5 & -1 & r \\ 1 & 0 & 3 & 0 & s \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & p \\ 0 & 1 & 1 & 1 & q \\ 0 & 3 & 1 & -1 & r-2p \\ 0 & 2 & 1 & 0 & s-p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & p+2q \\ 0 & 1 & 1 & 1 & q \\ 0 & 0 & -2 & -4 & r-2p-3q \\ 0 & 0 & -1 & -2 & s-p-2q \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{の入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & p+2q \\ 0 & 1 & 1 & 1 & q \\ 0 & 0 & -1 & -2 & s-p-2q \\ 0 & 0 & -2 & -4 & r-2p-3q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 & s-3p-6q \\ 0 & 1 & 0 & -1 & s-p-q \\ 0 & 0 & -1 & -2 & s-p-2q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r+q-2s \end{pmatrix}$$

(1) 上の計算から, 考えている連立 1 次方程式が解をもつ条件は $r+q-2s=0$ が成り立つことである. 従って, $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\, T_A$ であるためには $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ -q+2s \\ s \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底で, $\dim \mathrm{Im}\, T_A = 3$ である.

(2) $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合の上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x - 6w = 0 \\ y - w = 0 \\ -z - 2w = 0 \end{cases}$ と同値であるため, $\mathrm{Ker}\, T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 6t \\ t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\, T_A$ の基底で, $\dim \mathrm{Ker}\, T_A = 1$ である.

2. (1) $T(1) = -2$, $T(x) = -x$, $T(x^2) = 2 + 2x$ だから, 与えられた基底に関する T の表現行列は $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ である.

(2) $a + bx + cx^2 \in \mathrm{Ker}\, T$ であるためには $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解であることが必要十分だから, $\mathrm{Ker}\, T$ の要素は a, d を任意の実数として, $c + 2cx + cx^2 = c(1 + 2x + x^2)$ の形のもの全体からなる. 従って $1 + 2x + x^2$ は $\mathrm{Ker}\, T$ の基底である.

3. $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} 111 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)}\boldsymbol{w}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2)}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおけば, 求める $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底は, $\dfrac{1}{\|\boldsymbol{w}_1\|}\boldsymbol{w}_1, \dfrac{1}{\|\boldsymbol{w}_2\|}\boldsymbol{w}_2, \dfrac{1}{\|\boldsymbol{w}_3\|}\boldsymbol{w}_3$ で与え

られるため $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ が求めるものである.

4. (1) $|xE_3 - A| = \begin{vmatrix}x-3 & 2 & -2\\-2 & x+2 & -4\\-1 & 2 & x-4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x-3 & 2 & 0\\-2 & x+2 & x-2\\-1 & 2 & x-2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x-3 & 2 & 0\\-1 & x & 0\\-1 & 2 & x-2\end{vmatrix} =$
$(x-2)\begin{vmatrix}x-3 & 2\\-1 & x\end{vmatrix} = (x-1)(x-2)^2$ より, A の固有値は 1 と 2 である.

(2) $E_3 - A = \begin{pmatrix}-2 & 2 & -2\\-2 & 3 & -4\\-1 & 2 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix}0 & -2 & 4\\0 & -1 & 2\\-1 & 2 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & -1 & 2\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ より, $E_3 - A$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式は $\begin{cases}-y+2z=0\\-x+z=0\end{cases}$ と同値である. 従って $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ は 1 に対する A の固有空間の基底である. $2E_3 - A = \begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\-2 & 4 & -4\\-1 & 2 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(1,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ より, $2E_3 - A$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式は $-x+y-2z=0$ と同値である. 従って $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ は 2 に対する A の固有空間の基底である. 故に, A の固有ベクトルからなる $\boldsymbol{R}^3$ の基底が存在するため, A は対角化可能であり, $P = \begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\2 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ とおけば, P は正則行列であり, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ である.

2013 年度　線形数学 II　試験問題　(電気電子系学類)

1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & -8 \\ 2 & -1 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ の定める 1 次写像 $T_A : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^4$ について, 以下の問に答えよ.

   (1) $\mathrm{Im}\, T_A$ の次元と基底を求めよ.

   (2) $\mathrm{Ker}\, T_A$ の次元と基底を求めよ.

   (3) $U = \mathrm{Im}\, T_A$ とするとき, U の直交補空間 $U^\perp$ の次元と基底を求めよ. ただし, 内積は標準内積とする.

2. $P_n(\boldsymbol{R})$ を, n 次以下の実数係数 1 変数多項式 $f(x)$ 全体のなす $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とする. $P_2(\boldsymbol{R})$ から $P_1(\boldsymbol{R})$ への 1 次写像 $T : P_2(\boldsymbol{R}) \to P_1(\boldsymbol{R})$ を, $f(x) \in P_2(\boldsymbol{R})$ に対して

$$T(f(x)) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + x\frac{df(x)}{dx} - 2f(x)$$

   で定めるとき, 以下の問に答えよ.

   (1) $P_3(\boldsymbol{R})$ の基底 $[1,\, x,\, x^2]$ と $P_2(\boldsymbol{R})$ の基底 $[1,\, x]$ に関する T の表現行列を求めよ.

   (2) $\mathrm{Ker}\, T$ の次元と基底を求めよ.

3. 次の $\boldsymbol{R}^3$ のベクトルの組に対して, グラム・シュミットの直交化法を適用し, $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底をつくれ. ただし, 内積は標準内積とする.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき, 以下の問に答えよ.

   (1) A の固有値をすべて求めよ.

   (2) (1) で求めた各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

   (3) A が対角化可能かどうか調べ, 対角化可能ならば対角化せよ.

5. 実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

   (1) A の固有値をすべて求め, 各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

   (2) A を対角化する直交行列 T を求め, $T^{-1}AT$ を求めよ.

6. $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が対角化可能であるための $a,\, b,\, c$ の条件を求めよ.

2013 年度　線形数学 II　期末試験問題 (2014 年 1 月 27 日実施)

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ に対し, $\operatorname{Ker} T_A$, $\operatorname{Im} T_A$ の基底をそれぞれ 1 組ずつ求めよ.

2. $P_2(\boldsymbol{R})$ の 1 次変換 $F : P_2(\boldsymbol{R}) \to P_2(\boldsymbol{R})$ を $F(f(x)) = (2x-1)f'(x) - 4f(x)$ で定める.
   (1) $P_2(\boldsymbol{R})$ の基底 $[1, x, x^2]$ に関する F の表現行列を求めよ.
   (2) $\operatorname{Ker} F$ の基底を 1 組求め, 次元を答えよ.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく.
   (1) A, B の固有値をすべて求めよ.
   (2) A が対角化可能であれば対角化し, 対角化不可能であればその理由を述べよ.
   (3) B が対角化可能であれば対角化し, 対角化不可能であればその理由を述べよ.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ を対角化する直交行列を求めよ.

2013 年度　線形数学 II　期末試験解答例

1. $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & p \\ 1 & 0 & -1 & q \\ 5 & -3 & 1 & r \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & p \\ 0 & 1 & -2 & q-p \\ 0 & 2 & -4 & r-5p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & q \\ 0 & 1 & -2 & q-p \\ 0 & 0 & 0 & r-3p-2q \end{pmatrix}$ より, この連立 1 次方程式が解をもつためには $r - 3p - 2q = 0$ であることが必要十分である. 従って, $\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} T_A$ であるためには $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ 3p+2q \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Im} T_A$ の基底である. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合, 上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ と同値であるため, $\operatorname{Ker} T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意の定数) と表される. よって, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底である.

2. (1) $F(1) = -4$, $F(x) = 2x - 1 - 4x = -1 - 2x$, $F(x^2) = 2x(2x-1) - 4x^2 = -2x$ より $[1, x, x^2]$ に関する F の表現行列は $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である.

(2) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in P_2(\boldsymbol{R})$ が $\operatorname{Ker} F$ に属するためには $[1, x, x^2]$ に関する $f(x)$ の座標が, $[1, x, x^2]$ に関する F の表現行列を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解であることが必要十分である. (1) より, $[1, x, x^2]$ に関する $f(x)$ の座標が, この連立 1 次方程式の解であるためには, $-4a_0 - a_1 = 0$, $-2a_1 - 2a_2 = 0$ が成り立つことが必要十分である. $a_1 = -4t$ とおくと $a_0 = t$, $a_2 = 4t$ だから $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ である. 従って, $1 - 4x + 4x^2$ は $\operatorname{Ker} F$ の基底であり, $\dim \operatorname{Ker} F = 1$ である.

3. (1) $|xE_3 - A| = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ -1 & x & -1 \\ -1 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ x-1 & x & -1 \\ 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x-2)$ より, A の固有値は 1 と 2 である. $|xE_3 - B| = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ -1 & x & 0 \\ -1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ x-1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^3$ より, B の固有値は 1 のみである.

(2) $E_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

で与えられる．$2E_3-A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&2&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 2 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる．故に，A は $\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ に対角化される．

(3) $E_3-B=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 1 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ で与えられる．故に B は対角化不可能である．

4. $|xE_3-A|=\begin{vmatrix}x-1&-4&4\\-4&x-1&-4\\4&-4&x-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-5&-4&4\\0&x-1&-4\\-x+5&-4&x-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-5&-4&4\\0&x-1&-4\\0&-8&x+3\end{vmatrix}=$ $(x-5)\begin{vmatrix}x-1&-4\\-8&x+3\end{vmatrix}=(x-5)(x^2+2x-35)=(x-5)^2(x+7)$ より，A の固有値は 5 と -7 である．

$5E_3-A=\begin{pmatrix}4&-4&4\\-4&4&-4\\4&-4&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}4&-4&4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ だから 5 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ で与えられる．$\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ とおけば，$\boldsymbol{v}_2-\dfrac{(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1)}{\|\boldsymbol{w}_1\|^2}\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ だから 5 に対する固有空間の正規直交基底 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ が得られる．

$-7E_3-A=\begin{pmatrix}-8&-4&4\\-4&-8&-4\\4&-4&-8\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&-12&-12\\0&-12&-12\\4&-4&-8\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}0&-12&-12\\0&0&0\\4&0&-4\end{pmatrix}$ だから -7 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる．従って -7 に対する固有空間の正規直交基底は $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ で与えられる．故に $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ とおけば，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&-7\end{pmatrix}$ である．

線形数学 II 期末再試験 (2014 年 2 月 3 日実施)

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ に対し, $\mathrm{Ker}\,T_A$, $\mathrm{Im}\,T_A$ の基底をそれぞれ 1 組ずつ求めよ.

[解答例] $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおけば $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は $\begin{cases} x - z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}$ と同値である. 従って $z = t$ とおけば, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表されるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\,T_A$ の基底である. また, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は $x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ と同値だから, 上の $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解で $t = 1$ の場合を考えれば, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次従属であることがわかる. 一方 $z = 0$ とおけば $x = y = 0$ が得られるため, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である. 故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\,T_A$ の基底である.

2. $P_2(\boldsymbol{R})$ の 1 次変換 $F : P_2(\boldsymbol{R}) \to P_2(\boldsymbol{R})$ を $F(f(x)) = (x+1)f'(x) - 2f(x)$ で定める.
(1) $P_2(\boldsymbol{R})$ の基底 $[1, x, x^2]$ に関する F の表現行列を求めよ.
(2) $\mathrm{Ker}\,F$ の基底を 1 組求め, 次元を答えよ.

[解答例] (1) $F(1) = -2$, $F(x) = x + 1 - 2x = 1 - x$, $F(x^2) = 2x(x+1) - 2x^2 = 2x$ より $[1, x, x^2]$ に関する F の表現行列は $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である.

(2) $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in P_2(\boldsymbol{R})$ が $\mathrm{Ker}\,F$ に属するためには $[1, x, x^2]$ に関する $f(x)$ の座標が, $[1, x, x^2]$ に関する F の表現行列を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解であることが必要十分である. (1) より, $[1, x, x^2]$ に関する $f(x)$ の座標が, この連立 1 次方程式の解であるためには, $-2a_0 + a_1 = 0$, $-a_1 + 2a_2 = 0$ が成り立つことが必要十分である. $a_1 = 2t$ とおくと $a_0 = t$, $a_2 = t$ だから $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である. 従って, $1 + 2x + x^2$ は $\mathrm{Ker}\,F$ の基底であり, $\dim \mathrm{Ker}\,F = 1$ である.

3. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & -1 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ とおく.
(1) A, B の固有値をすべて求めよ.
(2) A が対角化可能であれば対角化し, 対角化不可能であればその理由を述べよ.
(3) B が対角化可能であれば対角化し, 対角化不可能であればその理由を述べよ.

[解答例] (1) $|tE_3 - A| = \begin{vmatrix} t-5 & 2 & -1 \\ 0 & t-7 & 1 \\ 0 & 2 & t-6 \end{vmatrix} = (t-5)\begin{vmatrix} t-7 & 1 \\ 2 & t-6 \end{vmatrix} = (t-5)(t^2 - 13t + 40) = (t-5)^2(t-8)$ より, A の固有値は 5 と 8 である.

$$|tE_3-B| = \begin{vmatrix} t-2 & 2 & -1 \\ -3 & t-7 & 1 \\ 3 & 2 & t-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 2 & -1 \\ -3 & t-7 & 1 \\ 0 & t-5 & t-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & 3 & -1 \\ -3 & t-8 & 1 \\ 0 & 0 & t-5 \end{vmatrix} = (t-5)\begin{vmatrix} t-2 & 3 \\ -3 & t-8 \end{vmatrix} =$$
$(t-5)(t^2-10t+25) = (t-5)^3$ より, B の固有値は 5 のみである.

(2) $5E_3 - A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 5 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. $8E_3 - A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 8 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, A は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ に対角化される.

(3) $5E_3 - B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ だから 5 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる. 故に, B の固有値 5 に対する固有空間の次元は 2 次元で, B の固有値は 5 のみだから, B は対角化不可能である.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 8 \\ 8 & 1 & 8 \\ 8 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ を対角化する直交行列を求めよ.

[解答例] $|tE_3 - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -8 & -8 \\ -8 & t-1 & -8 \\ -8 & -8 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-1 & -8 & -8 \\ -8 & t-1 & -8 \\ -t-7 & 0 & t+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-9 & -8 & -8 \\ -16 & t-1 & -8 \\ 0 & 0 & t+7 \end{vmatrix} = (t+7)\begin{vmatrix} t-9 & -8 \\ -16 & t-1 \end{vmatrix} =$
$(t+7)(t^2-10t-119) = (t+7)^2(t-17)$ より, 与えられた行列の固有値は $-7, 17$ である. $-7E_3 - A = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 \end{pmatrix}$
$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} -8 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおくと, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は固有値 -7 に対する固有空間の基底である. $\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1)}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ より, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は固有値 -7 に対する固有空間の正規直交基底である. $\begin{pmatrix} 16 & -8 & -8 \\ -8 & 16 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 24 & -24 \\ -8 & 16 & -8 \\ 0 & -24 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分に関して}}$
$\begin{pmatrix} 0 & 24 & -24 \\ -8 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 17 に対する固有空間の正規直交基底である. 以上から与えられた行列は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ によって $\begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$ に対角化される.

線形数学 II 中間試験問題　(2010 年 11 月 30 日実施)

1. (1) $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-2\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$ で生成される $\boldsymbol{K}^3$ の部分空間の基底を一組求めよ.

(2) $P_2(\boldsymbol{R})$ の部分空間 V を $V = \left\{ f(x) \in P_2(\boldsymbol{R}) \,\middle|\, \int_{-1}^{1} f(t)dt = 0 \right\}$ で定めるとき, $P_2(\boldsymbol{R}) = V \oplus W$ を満たす $P_2(\boldsymbol{R})$ の部分空間 W と, V と W の基底をそれぞれ一組ずつ求めよ.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とおくとき, $\mathrm{Ker}\, T_A$, $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底をそれぞれ 1 組ずつ求めよ.

3. (1) $P_3(\boldsymbol{R})$ の 1 次変換 $f : P_3(\boldsymbol{R}) \to P_3(\boldsymbol{R})$ を $f(\varphi(x)) = (x+1)\varphi'(x) - 3\varphi(x)$ で定めるとき, $P_3(\boldsymbol{R})$ の基底 $[1, x, x^2, x^3]$ に関する f の表現行列を求めよ.

(2) $\boldsymbol{K}^3$ の部分空間 $\left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \,\middle|\, x+y+z=0 \right\}$ と, その基底 $B = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} \right]$, $B' = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} \right]$ に対し, B から B' への基底の変換行列を求めよ.

線形数学 II 期末試験問題　(2011 年 2 月 4 日実施)

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ とおくとき, $\mathrm{Ker}\, T_A$, $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底をそれぞれ 1 組ずつ求めよ.

2. $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ とし, W を $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ で生成される $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間とする. $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次変換 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ は W の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ を $-2\boldsymbol{x}$ に写し, W の直交補空間 $W^\perp$ の任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ を $3\boldsymbol{y}$ に写すとする.

(1) $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3]$ で, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W$ であるものを一組求めよ.

(2) $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3]$ に関する f の表現行列を求めよ.

3. a を定数として, $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 1 \\ -a+5 & 7 & -1 \\ a-5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ とおく. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $a = 0$ のとき, A の相異なる固有値をすべて求めて, それぞれの固有値に対する固有空間の基底を 1 組ずつ求めよ.

(2) $a = 2$ のとき, A が対角化可能であれば, A を対角化する行列を求め, 対角化不可能ならば, その理由を答えよ.

4. 対称行列 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ を対角化する実直交行列を求めよ.

線形数学 II 中間試験問題の解答 (2010 年 11 月 30 日実施)

1. (1) $x\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-3\\-2\\5\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ を満たす x, y, z を求める. $\begin{pmatrix}1&-3&1\\2&-2&3\\1&5&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}$ $\begin{pmatrix}1&-3&1\\0&4&1\\0&8&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&-7&0\\0&4&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ より, t を任意の定数とすれば $x=7t$, $y=t$, $z=-4t$ である. 従って, $y=0$ の場合は $x=z=0$ となるため, $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$ は 1 次独立であるが, $7\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-2\\5\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ が成り立つため, $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-3\\-2\\5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$ は 1 次従属である. 故に $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-3\\-2\\5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$ の中で 1 次独立なベクトルからなる極大な集合であり, $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-3\\-2\\5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$ で生成される $\boldsymbol{K}^3$ の部分空間の基底になる.

[別解] $\begin{pmatrix}1&-3&1\\2&-2&3\\1&5&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 行の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&4&1\\1&8&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{4}\text{ 倍する}]{\text{第 2 列を}}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&1\\1&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 行の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&2&0\end{pmatrix}$ より, $\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ が求める基底である.

(2) $f(x)=ax^2+bx+c$ のとき $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(t)dt=\int_{-1}^{1}(at^2+bt+c)dt=\frac{2a}{3}+2c$ だから $f(x)\in V$ であるためには $\dfrac{2a}{3}+2c=0$ であることが必要十分であり, これは $a=-3c$ と同値である. 従って

$$V=\left\{f(x)\in P_2(\boldsymbol{R})\,\middle|\,f(x)=bx+c(1-3x^2)\ (c\in\boldsymbol{R})\right\}=\langle x,1-3x^2\rangle$$

であり, $x,1-3x^2$ は 1 次独立だから, $x,1-3x^2$ は V の基底である. そこで, $W=\langle 1\rangle$ で W を定めれば, 1 は W の基底で, $V+W=\langle 1,x,1-3x^2\rangle=P_2(\boldsymbol{R})$ であり, さらに $1,x,1-3x^2$ は 1 次独立だから $P_2(\boldsymbol{R})=V\oplus W$ である. (教科書の命題 5.22 参照)

2. $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\\s\end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix}A\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える.

$\begin{pmatrix}1&0&1&1&p\\0&1&-1&1&q\\-1&0&-1&-2&r\\1&1&0&2&s\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&1&p\\0&1&-1&1&q\\0&0&0&-1&r+p\\0&1&-1&1&s-p\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&1&p\\0&1&-1&1&q\\0&0&0&-1&r+p\\0&0&0&0&s-p-q\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分に関して}}\begin{pmatrix}1&0&1&0&r+2p\\0&1&-1&0&r+p+q\\0&0&0&-1&r+p\\0&0&0&0&s-p-q\end{pmatrix}$ だから, $\begin{pmatrix}A\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式が解をもつため

には $s-p-q=0$ であることが必要十分である．このとき，$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ p+q \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と表されるため，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底になる．$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ の場合，上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x+z=0 \\ y-z=0 \\ -w=0 \end{cases}$ と同値であるため，$\mathrm{Ker}\, T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (t は任意の定数) と表される．よって，$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\, T_A$ の基底である．

3. (1) $f(1)=-3$, $f(x)=1-2x$, $f(x^2)=2x(x+1)-3x^2=2x-x^2$, $f(x^3)=3x^2(x+1)-3x^3=3x^2$ だから，求める行列は $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．

(2) 求める基底の変換行列を $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ とおけば，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ である．この等式の両辺の行列の第 1 行と第 2 行を比較すれば，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が得られるため，$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ である．

線形数学 II 期末試験問題の解答 (2011 年 2 月 4 日実施)

1. $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とし，$(A\ \boldsymbol{b})$ を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を考える．$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & p \\ 2 & -3 & 1 & -1 & q \\ 0 & 1 & -3 & -1 & r \\ 3 & -5 & 3 & -1 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & p \\ 0 & 1 & -3 & -1 & q-2p \\ 0 & 1 & -3 & -1 & r \\ 0 & 1 & -3 & -1 & s-3p \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -2 & -3p+2q \\ 0 & 1 & -3 & -1 & q-2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2p-q+r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -p-q+s \end{pmatrix}$ より，この連立 1 次方程式が解をもつ条件は $2p-q+r=-p-q+s=0$ が成り立つことである．従って，$\boldsymbol{b}\in \mathrm{Im}\, T_A$ であるためには $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} p \\ q \\ -2p+q \\ p+q \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ という形に表されることが必要十分である．故に $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Im}\, T_A$ の

基底である．$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ の場合の上の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x-4z-2w=0 \\ y-3z-w=0 \end{cases}$ と同値であるため, $\mathrm{Ker}\,T_A$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 4s+2t \\ 3s+t \\ s \\ t \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (s, t は任意の定数) と表される．よって, $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\,T_A$ の基底である．

2. (1) $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ をシュミットの直交化法によって直交化する．$\boldsymbol{v}-\dfrac{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}-\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから, $\boldsymbol{w}_1=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{u}\|}\boldsymbol{u}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{w}_2'\|}\boldsymbol{w}_2'=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2$ は W の正規直交基底である．$\boldsymbol{w}_3$ は $\boldsymbol{w}_1$ と $\boldsymbol{w}_2$ の両方に垂直な単位ベクトルだから, $\boldsymbol{w}_3$ を $\boldsymbol{w}_3=\boldsymbol{w}_1\times\boldsymbol{w}_2=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ と定めれば, $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底である．

(2) $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\in W$ であり, $\boldsymbol{w}_3$ は $\boldsymbol{w}_1$ と $\boldsymbol{w}_2$ に垂直だから $\boldsymbol{w}_3\in W^{\perp}$ である．従って f についての仮定から $f(\boldsymbol{w}_1)=-2\boldsymbol{w}_1$, $f(\boldsymbol{w}_2)=-2\boldsymbol{w}_4$, $f(\boldsymbol{w}_3)=3\boldsymbol{w}_3$ だから, $[\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3]$ に関する f の表現行列は $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ である．

3. (1) $|tE_3-A|=\begin{vmatrix} t-a & 2 & -1 \\ a-5 & t-7 & 1 \\ -a+5 & 2 & t-6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} t-a & 2 & -1 \\ a-5 & t-7 & 1 \\ 0 & t-5 & t-5 \end{vmatrix}=(t-5)\begin{vmatrix} t-a & 2 & -1 \\ a-5 & t-7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$ $(t-5)\begin{vmatrix} t-a & 3 & -1 \\ a-5 & t-8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(t-5)\begin{vmatrix} t-a & 3 \\ a-5 & t-8 \end{vmatrix}=(t-5)(t^2-(a+8)t+5(a+3))=(t-5)^2(t-a-3)$ だから, A の固有値は 5 と $a+3$ である．5 に対する A の固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおけば x, y, z は $5E_3-A=\begin{pmatrix} 5-a & 2 & -1 \\ a-5 & -2 & 1 \\ 5-a & 2 & -1 \end{pmatrix}$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解であるため, $(5-a)x+2y-z=0$ である．$x=s$, $y=t$ とおくと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s \\ t \\ (5-a)s+2t \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5-a \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5-a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は固有値 5 に対する A の固有空間の基底である．

$a\neq 2$ の場合, a に対する A の固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおけば x, y, z は $(a+3)E_3-A$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解であるため, $(a+3)E_3-A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a-5 & a-4 & 1 \\ -a+5 & 2 & a-3 \end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a-2 & a-2 & 0 \\ 2a-4 & 2a-4 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\frac{1}{a-2}\text{ 倍する}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2a-4 & 2a-4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{(2,2)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ である. $x = s$ とおくと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -s \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 $a+3$ に対する A の固有空間の基底である. とくに, $a = 0$ の場合は A の固有値は 3 と 5 であり, 3 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 5 に対する固有空間の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で与えられる.

(2) (1) の結果から, $a = 2$ の場合は A の固有値は 5 のみで, 1 に対する A の固有空間の次元は 2 次元であるため, A の固有ベクトルからなる $\boldsymbol{K}^3$ の基底は存在しない. よって $a = 2$ の場合は A は対角化不可能である.
($a \neq 2$ ならば (1) で求めた固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5-a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立であるため, A の固有ベクトルからなる $\boldsymbol{K}^3$ の基底が存在する. よって $a \neq 2$ の場合は A は対角化可能である. 以上から A が対角化不可能になるような a は 2 のみである.)

4. 与えられた行列を A とおくと $|tE_3 - A| = \begin{vmatrix} t-2 & -2 & 4 \\ -2 & t+1 & 2 \\ 4 & 2 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-2 & -2 & 4 \\ -2 & t+1 & 2 \\ 0 & 2t+4 & t+2 \end{vmatrix} =$
$(t+2)\begin{vmatrix} t-2 & -2 & 4 \\ -2 & t+1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (t+2)\begin{vmatrix} t-2 & -10 & 4 \\ -2 & t-3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (t+2)\begin{vmatrix} t-2 & -10 \\ -2 & t-3 \end{vmatrix} = (t+2)(t^2-5t-14) = (t+2)^2(t-7)$
となるため A の固有値は -2 と 7 である.

-2 に対する A の固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおけば x, y, z は $-2E_3 - A$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解であるため, $-2E_3 - A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $-2x - y + 2z = 0$ である. $x = s,\ z = t$ とおくと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -2s+2t \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は固有値 -2 に対する A の固有空間の基底である. $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{v}_2)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)}\boldsymbol{w}_1 = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ とおけば,

$\dfrac{1}{\|\boldsymbol{w}_1\|}\boldsymbol{w}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\|\boldsymbol{w}_2\|}\boldsymbol{w}_2 = \dfrac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ は固有値 -2 に対する A の固有空間の正規直交基底である. 7 に対する A の固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおけば x, y, z は $7E_3 - A$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解であるため,

$7E_3 - A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}\text{ 倍}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1)\text{ 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 18 & 9 \\ 1 & -4 & -1 \\ 0 & 18 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ 倍}]{\text{第 1 行を}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 0 & 18 & 9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 0 & 18 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分に関して}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $\begin{cases} 2y + z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ である．$y = s$ とおくと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s \\ s \\ -2s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ だから $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{v}_3$ は固有値 7 に対する A の固有空間の基底である．$\boldsymbol{w}_3 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{v}_3\|}\boldsymbol{v}_3 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{w}_3$ は固有値 7 に対する A の固有空間の正規直交基底である.

以上から, A を対角化する実直交行列 (の 1 つ) は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$ で与えられる.