3.1　正則性判定と逆行列の計算

n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

の正則性判定および, 正則であるときその逆行列 A^{-1} を計算する方法.

(1) $n \times 2n$ 行列 $(A \,|\, E_n)$ をつくり, 左半分 (A の入っている側) が階段行列となるように行に関する基本変形を繰り返す.

$$(A \,|\, E_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$\vdots$ (行に関する基本変形を繰り返す.)

$$\downarrow$$

$$(B \,|\, C)$$

【ポイント】階段行列とは次のような形の行列のことである.

♠ は, 0 以外の成分をもつ行において最も左にある 0 でない成分. ♠ の位置は行が下がる毎に１つ以上右にずれることに注意.

(2) (1) の変形後に得られた行列 $(B \,|\, C)$ の左半分 の階段行列を見て A の階数をチェック. このとき, $\mathrm{rank}\, A = n$ ならば A は正則であるので, 次の (3) のステップに進む. $\mathrm{rank}\, A < n$ ならば A は正則でない. (正則でない場合はここで終了.)

【ポイント】n 次正方行列 A に対して次のことが成り立つ.
A : 正則 $\iff \mathrm{rank}\, A = n$.
(教科書 p.66, 系 3.4)

(3) $(B \,|\, C)$ に対して, さらに行に関する基本変形を繰り返し, 左半分が単位行列になるように変形. 左半分が単位行列になったとき, 右半分に出来ている行列が A^{-1} である.

【ポイント】$\mathrm{rank}\, A = n$ のときはかならず行に関する基本変形で単位行列にできることに注意.

$$(B \,|\, C)$$

$$\downarrow$$

$\vdots$ (行に関する基本変形を繰り返す.)

$$\downarrow$$

$$(E_n \,|\, X)$$

………………………………………………………………………………

$(A \,|\, E_n)$ から $(B \,|\, C)$, さらに $(E_n \,|\, X)$ にいたる行に関する変形

$$(A \,|\, E_n) \to (A_1 \,|\, C_1) \to (A_2 \,|\, C_2) \to \cdots \to (A_\ell \,|\, C_\ell) = (E_n \,|\, X)$$

の各段階において, 変形に対応する基本行列を左から順に $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_\ell$ とすると, $k = 1, 2, \ldots, \ell$ に対して, $(A_k \,|\, C_k) = X_k(A_{k-1} \,|\, C_{k-1}) = (X_k A_{k-1} \,|\, X_k C_{k-1})$ であるから (ただし $A_0 = A, C_0 = E_n$),

$$(E_n \,|\, X) = (X_\ell \cdots X_2 X_1 A \,|\, X_\ell \cdots X_2 X_1 E_n) = (X_\ell \cdots X_2 X_1 A \,|\, X_\ell \cdots X_2 X_1).$$

$(E_n \,|\, X)$ の右半分である X は $XA = E_n$ となる行列であるので, $X = A^{-1}$ となる.

【重要！！】左の説明から分かるように, この計算方法では行に関する基本変形のみを用いなくては逆行列が得られない. 列に関する基本変形を混ぜると最後の答えが A の逆行列にならないのである.

【ポイント】行に関する基本変形の場合は, 基本行列を変形前の行列の左から掛け, 列に関する基本変形の場合は基本行列を右から掛ける. 詳しくは教科書 p.59〜60 をみること.

例題 3.1 次の行列 A が正則かどうか判定し, 正則な場合には逆行列を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

【解】 A の右側に単位行列を付け加えて出来る 3×6 行列

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

を行に関する基本変形で左半分が単位行列に変形できれば, A は正則で, そのときの右半分が求める逆行列になる。

$(1,1)$ 成分で第 1 列を掃き出して

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

となる。$(2,2)$ 成分で第 2 列を掃き出して

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

となる。$(3,3)$ 成分で第 3 列を掃き出して

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

となり、右半分の

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

が求める逆行列である。 □

例題 3.2 次の行列 A が正則かどうか判定し, 正則な場合には逆行列を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

【解】 A の右側に単位行列を付け加えて出来る 3×6 行列

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

に対し, 行に関する基本変形を行っていく.

$(1,1)$ 成分で第 1 列を掃き出すと,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

となる. さらに, 第 2 行の (-2) 倍を第 3 行に加えると,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

となり, 左半分の形から行列 A の階数が 2 であることがわかる. よって, A は正則ではない. □

3.2　連立１次方程式の解き方

$x_1, x_2, \dots, x_n$ を未知数とする連立１次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

の解き方.

【ポイント】左の連立１次方程式に対して,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

とおくとき, 左の連立１次方程式は, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表される.
とくに, A を左の連立１次方程式の**係数行列**, A と $\boldsymbol{b}$ を並べた行列 $(A\,|\,\boldsymbol{b})$ を**拡大係数行列**という.

(1) 拡大係数行列をつくる.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

(2) 拡大係数行列に対して, 行に関する基本変形を繰り返し, 係数行列の部分が被約階段行列になるように変形する.

【ポイント】被約階段行列とは次のような形の行列のことである.

$$\begin{pmatrix} 1*\cdots*0*\cdots*0*\cdots*0** \\ \quad 1*\cdots*0*\cdots*0** \\ \qquad 1*\cdots*\vdots ** \\ \qquad\quad \ddots\ 0\ \vdots\,\vdots \\ \qquad\qquad 1** \\ \mathbf{0} \qquad\qquad \end{pmatrix}$$

被約階段行列は, 階段行列からさらに行に関する基本変形を続行することで得られる. 具体的には, 階段行列が

$$\begin{pmatrix} \spadesuit & & & & \\ & \spadesuit & & & \\ & & \spadesuit & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & \spadesuit \end{pmatrix}$$

の形をしているとき, $\spadesuit$ を用いて列を掃き出して, $\spadesuit$ の上部の成分をすべて 0 にし, かつ, 各行に $\spadesuit^{-1}$ をかけて $\spadesuit$ を 1 にすることで得られる.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$\downarrow$

$\vdots$ (行に関する基本変形を繰り返す.)

$\downarrow$

$$\left(\begin{array}{l|l} 1*\cdots*0*\cdots*0\ *\cdots*0\ ** & c_1 \\ \qquad 1*\cdots*0\ *\cdots*0\ ** & c_2 \\ \qquad\qquad 1\ *\cdots*\vdots\ ** & \vdots \\ \qquad\qquad\quad \ddots\ \ 0\ \vdots\ \vdots & \vdots \\ \qquad\qquad\qquad 1\ ** & c_r \\ & c_{r+1} \\ \quad \mathbf{0} & \end{array}\right)$$

(3) 上の (2) で得られた行列を拡大係数行列にもつ連立１次方程式を書くと, 解がすぐに書ける形になっている. (ただし, $c_{r+1} \neq 0$ のときは「解なし」となる.)

【ポイント】各行の先頭の 1 に対応する未知数が, その他の未知数をパラメータとして表される形で解が書ける. 一般に, 連立１次方程式が $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つための必要十分条件は, $\mathrm{rank}(A\,|\,\boldsymbol{b}) = \mathrm{rank}\,A$ となることであり, 解に含まれるパラメータの個数は, (未知数の個数) $-\ \mathrm{rank}\,A$ となる.

例題 3.3 上の (3) を例で説明する. 未知数 x, y, z, w に関する連立１次方程式に対して, (2) で得られる行列が $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ であったとき, (3) で得られる連立１次方程式は $\begin{cases} x + 2z - w = 5 \\ y - z + 3w = 1 \end{cases}$ となり, x, y が z, w で表される形となっている. よって, $z = s, w = t$ とおくことにより, s, t をパラメータとして, $x = 5 - 2s + t, y = 1 + s - 3t$, $z = s, w = t$ (s, t は任意の実数) と解が表せる.

例題 3.4

$$\begin{cases} x+ & 3y & -2z & = 2 \\ 2x+ & 5y+ & 3z & = 3 \\ x+ & 2y+ & 5z & = 1 \end{cases}$$

【解】 拡大係数行列は $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right)$ となる. $(1,1)$ 成分で第 1 列を掃き出すと

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \end{array}\right)$$

となる. $(2,2)$ 成分が -1 なので, そのまま $(2,2)$ 成分で掃き出すと

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 19 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

この行列に対応する連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x+ & & +19z & = -1 \\ & -y & +7z & = -1 \end{cases}$$

となり, 解は

$$\begin{cases} x & = -19s - 1 \\ y & = 7s + 1 \\ z & = s \end{cases}$$

(s は任意の実数）となる. □

例題 3.5

$$\begin{cases} x+ & 3y & -2z & = 1 \\ 2x+ & 5y+ & 3z & = 2 \\ x+ & 2y+ & 5z & = 3 \end{cases}$$

【解】 拡大係数行列は $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right)$ となる. $(1,1)$ 成分で第 1 列を掃き出すと

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \end{array}\right)$$

となる. $(2,2)$ 成分が -1 なので, そのまま $(2,2)$ 成分で掃き出すと

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 19 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

この行列に対応する連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x & & +19z & = 1 \\ & -y & +7z & = 0 \\ & & 0 & = 2 \end{cases}$$

となるので, 解なし. □

4.1　行列式

4.1.1　行列式の形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{[i_1,i_2,\ldots,i_n]\in\{1,2,\ldots,n\text{ の順列 }\}} (-1)^{N_{[i_1,i_2,\ldots,i_n]}} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$$

ただし, $N_{[i_1,i_2,\ldots,i_n]}$ は, $i_k > i_j$ かつ $k < j$ となる (i_k, i_j) の組の個数を表す.

(※ 実際の行列式の計算で, 上の式が直接使われることはほとんどない.)

【ポイント】$a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$ は, 同じ行の成分をとらないように各列から取り出した成分の積である.　このような $a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$ の取り方は $n!$ 個ある.

【補足】**反転数**という.
(例) $N_{[2,3,1]} = 2$,
$N_{[4,2,3,1]} = 5$.

4.1.2　三角行列の行列式

三角行列の行列式は, 対角成分の積となる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ * & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

【ポイント】左のことは行列式の形からすぐにわかる. 実際, 三角行列では $a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$ のうち, 値が 0 の成分が含まれないような取り方は, 対角成分の積 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ しかなく, さらに $N_{[1,2,\ldots,n]} = 0$ であるため符号は正となるからである.

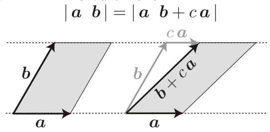
4.1.3　行列式と基本変形

(1) A' : A の第 j 列の c 倍を第 k 列 $(k \neq j)$ に加えた行列 $\Longrightarrow |\,A'\,| = |\,A\,|$.
　A'' : A の第 j 行の c 倍を第 k 行 $(k \neq j)$ に加えた行列 $\Longrightarrow |\,A''\,| = |\,A\,|$.

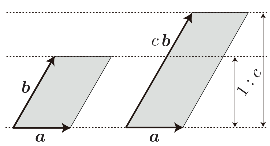
(2) A' : A の第 j 列を c 倍 $(c \neq 0)$ した行列 $\Longrightarrow |\,A'\,| = c|\,A\,|$.
　A'' : A の第 j 行を c 倍 $(c \neq 0)$ した行列 $\Longrightarrow |\,A''\,| = c|\,A\,|$.

(3) A' : A の第 j 列と第 k 列 $(k \neq j)$ を入れ替えた行列 $\Longrightarrow |\,A'\,| = -|\,A\,|$.
　A'' : A の第 j 行と第 k 行 $(k \neq j)$ を入れ替えた行列 $\Longrightarrow |\,A''\,| = -|\,A\,|$.

【参考】(1), (2) の列に関する基本変形の場合は図形的に考えると覚えやすい. なお, 行に関する場合は, 一般に $|\,{}^tA\,| = |\,A\,|$ が成り立つことから, 列の場合に帰着される.
(1) ある列の定数倍を他の列に加えても面積は変わらない.
$|\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\,| = |\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}+c\,\boldsymbol{a}\,|$



(2) ある列を c 倍 $(c > 0)$ すると面積は c 倍になる.
$|\,\boldsymbol{a}\ \ c\boldsymbol{b}\,| = c\,|\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\,|$



4.1.4　数値成分の行列式の計算

n 次正方行列のすべての成分が数値で与えられているとき, A の行列式 $|\,A\,|$ は, 基本変形による行列式の変化に注意しながら, 基本変形によって三角行列の行列式に帰着することで計算できる. (例題 4.1 参照.)

例題 4.1 次の行列式を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

【解】

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 1 行の } (-2) \text{ 倍を第 2 行に加える.} \\ \text{第 1 行の } (-3) \text{ 倍を第 3 行に加える.}\end{array}\right)$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \qquad (\text{第 2 行と第 3 行を入れ替える. })$$

$$= (-1)\cdot(1\cdot(-7)\cdot(-3)) \qquad (\text{三角行列の行列式は対角成分の積. })$$

$$= -21$$

□

【注意】行列式の計算では, $|\,A\,|$ の値を式変形で求めるのだから, 等号で式をつないでいく. 逆行列の計算や連立 1 次方程式の解法で用いたときのように変形前と変形後の行列を矢印 (→) でつなぐことはしないので注意.

4.1.5 行列式の性質

(1) A: n 次正方行列, B: m 次正方行列 $\Longrightarrow \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |\,A\,|\,|\,B\,|$

(2) A, B: n 次正方行列 $\Longrightarrow |\,A\,B\,| = |\,A\,|\,|\,B\,|$

例題 4.2 次の行列式を求めよ.

$$(1)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

【解】

【ポイント】4.1.5(1) の公式は, 次数が 1 つ下がった行列式に帰着させるのに使われることが多い.

$$(1)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} \text{第 1 行の } (-2) \text{ 倍を第 2 行に加える.} \\ \text{第 1 行の } (-1) \text{ 倍を第 3 行に加える.} \\ \text{第 1 行の 1 倍を第 4 行に加える.} \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |\,A\,|\,|\,B\,| \text{ より.} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 14 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} \text{第 1 行の } (-2) \text{ 倍を第 2 行に加える.} \\ \text{第 1 行の } (-3) \text{ 倍を第 3 行に加える.} \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 14 & 7 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |\,A\,|\,|\,B\,| \text{ より.} \right)$$

$$= 10 \cdot 7 - 2 \cdot 14$$

$$= 70 - 28 = 42$$

【注意】$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = |\,A\,|\,|\,B\,|$ は成り立たないので注意. 一般に, A が m 次正方行列, B が n 次正方行列であるとき, $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\,A\,|\,|\,B\,|$ となる.

$$(2)\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} \text{第 1 列と第 3 列を入れ替える.} \\ \text{第 2 列と第 4 列を入れ替える.} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |\,A\,|\,|\,B\,| \text{ より.} \right)$$

$$= (3 \cdot 1 - 2 \cdot 2)(1 \cdot 5 - 2 \cdot 3)$$

$$= (-1)(-1) = 1$$

□

例題 4.3 次の行列式を求めよ.

$$\left| \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 15 & 2 & 1 \\ 71 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 123 & 59 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \right|$$

【解】

$$\left| \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 15 & 2 & 1 \\ 71 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 123 & 59 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 15 & 2 & 1 \\ 71 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 123 & 59 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad (|\,AB\,| = |\,A\,|\,|\,B\,| \text{ より.})$$

$$= 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 21(2 \cdot 2 - 1 \cdot 3)(1 \cdot 5 - 1 \cdot 2)$$

$$= 21 \cdot 1 \cdot 3 = 63$$

□

4.1.6　行列式の展開

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ の行列式 $|\,A\,|$ は, 以下のように, $(n-1)$ 次行列式の和に分解する.

第 j 列に関する展開

$$|\,A\,| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第 i 行に関する展開

$$|\,A\,| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

【補足】A_{ij} を, A の第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $(n-1)$ 次正方行列とするとき, $(-1)^{i+j}|\,A_{ij}\,|$ を A の (i,j)-**余因子**という. A の (i,j)-余因子を Δ_{ij} で表すと, 第 j 列に関する展開, 第 i 行に関する展開はそれぞれ,

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

(第 j 列に関する展開)

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

(第 i 行に関する展開)

となる.

例題 4.4 次の行列式を求めよ.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & -1 \\ 2 & -1 & x \end{vmatrix}$$

【解】

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & -1 \\ 2 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & x+2 \\ 1 & x & 0 \\ 2 & -1 & x+2 \end{vmatrix} \qquad (\text{第 1 列の 1 倍を第 3 列に加える. })$$

$$= (-1)^{1+3}(x+2)\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(x+2)\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} \qquad (\text{第 3 列に関して展開. })$$

$$= (x+2)(1\cdot(-1) - 2x + x^2 - 1) = (x+2)(x^2 - 2x - 2)$$

□

4.1.7　行列式の応用

A: n 次正方行列

- A: 正則 $\Longleftrightarrow |\,A\,| \neq 0$.
- A: 正則 $\Longrightarrow |\,A^{-1}\,| = |\,A\,|^{-1},\ A^{-1} = \dfrac{1}{|\,A\,|}\widetilde{A}$　　(ただし, $\widetilde{A}$ は A の余因子行列.)
- 斉次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が自明でない解をもつ $\Longleftrightarrow |\,A\,| = 0$

【補足】$\widetilde{A} = {}^t(\Delta_{ij})$ を A の**余因子行列**という. 例えば, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の場合, $\Delta_{11} = d$, $\Delta_{12} = -c$, $\Delta_{21} = -b$, $\Delta_{22} = a$ となるので, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ となる. とくに, $\dfrac{1}{|\,A\,|}\widetilde{A} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

【補足】$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解にもつ. この解を自明な解という. $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ である解を自明でない解 (あるいは非自明な解) という.