球面の間の連続写像の写像度とその応用

円周の間の連続写像に「写像度」と呼ばれる整数を対応させることにより, 連続写像の性質を調べるのが本論の目的である. 円周の間の連続写像の写像度とは, 直観的には, 円周上の点が円周を正の向きに 1 周するとき, その点の像は円周を何回かまわるが, この回数を符号まで込めて考えたものであるが, これを厳密に定義するために最初の節で準備をする. 次に, 写像度の定義を与え, いくつかの重要な性質を証明し, その応用として第 3 節では, Brouwer の不動点定理と呼ばれる結果や,「複素数を係数とする代数方程式は複素数の範囲で解をもつ」という代数学の基本定理などを示す. さらに最後の節では, 写像度が高次元の球面の間の連続写像に対しても定義されることについても言及し, 「3 次元空間における体積のある 3 つの領域を同時に 2 等分するような平面が存在する」というハムサンドイッチの定理をはじめとする種々の応用例を示す.

§1. 準備

記号 1.1 $a, b \in \boldsymbol{R}$ $(a < b)$ に対し, $(a, b) = \{x \in \boldsymbol{R} | \, a < x < b\}$, $[a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} | \, a \leqq x \leqq b\}$ とおき, それぞれ $\boldsymbol{R}$ の開区間, 閉区間と呼ぶ. $[0, 1]^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n | \, 0 \leqq x_j \leqq 1\}$ とおき, n 次元立方体という. $D^n = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n | \, \|\boldsymbol{x}\| \leqq 1\}$, $S^n = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1} | \, \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ とおき, それぞれ n 次元球体, n 次元球面という. 特に, S^1 は原点を中心とする単位円, D^2 は S^1 を境界とする円板であり, S^2 は原点を中心とする単位球面である.

以下で用いる位相空間に関するいくつかの結果を述べる.

定理 1.2 閉区間 $[a, b]$ は連結かつコンパクトである.

定理 1.3 連結な位相空間族の直積位相空間は連結である. また, コンパクトな位相空間族の直積位相空間はコンパクトである.

定理 1.4 (1) $\boldsymbol{R}$ の部分集合 X が連結であるためには X が (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $\boldsymbol{R}$ のいずれかの形になっていることが必要十分である.

(2) $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 X がコンパクトであるためには X が有界な閉集合であることが必要十分である.

定理 1.5 (最大値・最小値の定理) X をコンパクトな位相空間とし, $f : X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とすれば, f は最大値と最小値をもつ.

定理 1.6 (中間値の定理) X を連結な位相空間とし, $f : X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする. $a, b \in X$ に対し, $f(a) < k < f(b)$ ならば, $f(c) = k$ を満たす $c \in X$ が存在する.

系 1.7 X を $\boldsymbol{R}$ の部分集合, $f : X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする. $[a, b] \subset X$ であり, $f(a) \neq f(b)$ ならば, $f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の値 d に対し, $f(c) = d$ となる $c \in (a, b)$ が存在する.

中間値の定理から次の結果がただちに得られる.

補題 1.8 X を連結な位相空間とし, $f : X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする. すべての $x \in X$ に対して $f(x)$ が整数ならば, f は定数値関数である.

集合 X, Y の間の 2 つの写像 $f, g : X \to Y$ に対し, $f(x) = g(x)$ を満たす x を f と g の一致点という. 特に, X が Y の部分集合で, g が包含写像 $g(x) = x$ の場合, f と g の一致点を f の不動点または固定点という.

中間値の定理を用いれば, 以下のことが容易に示される.

定理 1.9 閉区間 $[a, b]$ からそれ自身への連続写像は不動点をもつ.

系 1.10　連続写像 $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ の像が有界ならば f は不動点をもつ.

定理 1.11　$f: S^1 \to \boldsymbol{R}$ を連続写像とするとき, $f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ を満たす $\boldsymbol{x} \in S^1$ が存在する.

証明　$h: [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を $h(t) = f(\cos \pi t, \sin \pi t) - f(-\cos \pi t, -\sin \pi t)$ で定義すれば, h は連続で, $h(0) = -h(1)$ が成り立つ. $h(0) = 0$ ならば $\boldsymbol{x} = (1,0)$ が $f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ を満たす. $h(0) \neq 0$ ならば $h(0)$ と $h(1)$ の符号が異なるため, 中間値の定理により $h(t_0) = 0$ となる $t_0 \in [0,1]$ が存在する. このとき $\boldsymbol{x} = (\cos \pi t_0, \sin \pi t_0)$ が $f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ を満たす. □

定義 1.12　(X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする. 写像 $f: X \to Y$ が次の性質をもつとき, f は一様連続であるという.
「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, "$d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$" を満たすような $\delta > 0$ が存在する.」

次の定理はコンパクト距離空間で定義された連続写像の本質的な性質の 1 つである.

定理 1.13　(X, d_X) をコンパクト距離空間, (Y, d_Y) を距離空間とすれば, 連続写像 $f: X \to Y$ は一様連続である.

$\boldsymbol{R}^2$ と $\boldsymbol{C}$ を対応 $(x,y) \leftrightarrow x + iy$ により同一視して, 1 次元球面 (円周) S^1 を絶対値 1 の複素数全体の集合, 2 次元球体 (円板) D^2 を絶対値 1 以下の複素数全体の集合とみなす.

$e: \boldsymbol{R} \to S^1$ を $e(t) = \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t$ で定義される写像とし, $l: S^1 - \{-1\} \to \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を

$$l(x+iy) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \cos^{-1} x & y \geqq 0 \\ -\frac{1}{2\pi} \cos^{-1} x & y \leqq 0 \end{cases}$$

$(x, y \in \boldsymbol{R},\ x^2 + y^2 = 1)$ で定めると次の補題は容易に示される.

補題 1.14　(1) e, l は連続であり, $z \in S^1 - \{-1\}$ ならば $e(l(z)) = z$, $|t| < \dfrac{1}{2}$ ならば $l(e(t)) = t$ が成り立つ.

(2) $s, t \in \boldsymbol{R}$ に対し, $e(s+t) = e(s)e(t)$ である.

(3) $e(t) = e(s)$ であることと, $t - s$ が整数であることは同値である.

(4) 任意の $\delta > 0$ に対して, $\rho > 0$ で次の条件を満たすものがある.

$$0 < |z+1| < \rho \text{ かつ } z \in S^1 \text{ ならば } -\frac{1}{2} < l(z) < -\frac{1}{2} + \delta \text{ または } \frac{1}{2} - \delta < l(z) < \frac{1}{2}.$$

補題 1.15　$f: [0,1]^n \to S^1$ を連続写像, $\boldsymbol{x}_0 \in [0,1]^n$ とする.

(1) $f(\boldsymbol{x}_0) = e(t_0)$ を満たす 実数 t_0 に対し, 連続写像 $\tilde{f}: [0,1]^n \to \boldsymbol{R}$ で, $e \circ \tilde{f} = f$ かつ $\tilde{f}(\boldsymbol{x}_0) = t_0$ を満たすものが存在する.

(2) 連続写像 $\tilde{f}, \tilde{g}: [0,1]^n \to \boldsymbol{R}$ が $e \circ \tilde{f} = e \circ \tilde{g} = f$ を満たせば, $k = \tilde{g}(\boldsymbol{x}_0) - \tilde{f}(\boldsymbol{x}_0)$ とおくと k は整数で, すべての $\boldsymbol{x} \in [0,1]^n$ に対して, $\tilde{g}(\boldsymbol{x}) = \tilde{f}(\boldsymbol{x}) + k$ が成り立つ.

証明　(1) (1.2), (1.3) より, $[0,1]^n$ はコンパクトだから (1.13) から f は一様連続である. 従って, 「$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \delta$ ならば $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < 2$」を満たすような $\delta > 0$ がある. $N > \dfrac{\sqrt{n}}{\delta}$ である整数 N をとれば, 任意の $j = 1, 2, \ldots, N$ と $\boldsymbol{x} \in [0,1]^n$ に対して, $\dfrac{j}{n}\boldsymbol{x} \in [0,1]^n$ であることに注意すると $\left\| \dfrac{j}{N}\boldsymbol{x} - \dfrac{j-1}{N}\boldsymbol{x} \right\| = \dfrac{\|\boldsymbol{x}\|}{N} < \delta$ だから $\left| f\left(\dfrac{j}{N}\boldsymbol{x}\right) - f\left(\dfrac{j-1}{N}\boldsymbol{x}\right) \right| < 2$ である. 一般に $z, w \in S^1$ が $|z - w| < 2$ を満たすことと $\dfrac{z}{w} \neq -1$ であることは同値だから, $g_j(\boldsymbol{x}) = f\left(\boldsymbol{x}_0 + \dfrac{j}{N}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\right) f\left(\boldsymbol{x}_0 + \dfrac{j-1}{N}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\right)^{-1}$ とおくと, g_j は $[0,1]^n$ から $S^1 - \{-1\}$ への写像であり, $g_j(\boldsymbol{x}_0) = 1$ となる. このとき, $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) g_1(\boldsymbol{x}) g_2(\boldsymbol{x}) \cdots g_N(\boldsymbol{x})$ がすべての $\boldsymbol{x} \in [0,1]^n$ に対して成り立つ. そこで, $\tilde{f}$ を $\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = t_0 + \sum_{j=1}^{N} l(g_j(\boldsymbol{x}))$ で定めると $\tilde{f}(\boldsymbol{x}_0) = t_0$ であり, (1.14) の (1), (2) を用いて

$$e(\tilde{f}(\boldsymbol{x})) = e\left(t_0 + \sum_{j=1}^{N} l(g_j(\boldsymbol{x}))\right) = e(t_0) e(l(g_1(\boldsymbol{x}))) \cdots e(l(g_N(\boldsymbol{x}))) = f(0, \ldots, 0) g_1(\boldsymbol{x}) \cdots g_N(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}).$$

(2) すべての $\boldsymbol{x} \in [0,1]^n$ に対し, $e(\tilde{g}(\boldsymbol{x})) = e(\tilde{f}(\boldsymbol{x}))$ が成り立つため, (1.14) の (3) により, $\tilde{g}(\boldsymbol{x}) - \tilde{f}(\boldsymbol{x})$ は整数である. 従って $\boldsymbol{x} \in [0,1]^n$ を固定して, $h(t) = \tilde{g}(\boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)) - \tilde{f}(\boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0))$ により写像 $h : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を定めると h は連続で常に整数を値にとる. 故に (1.8) から h は定数値関数で, $h(1) = h(0) = k$ だから $\tilde{g}(\boldsymbol{x}) = \tilde{f}(\boldsymbol{x}) + k$ である. □

上の (2) において, 特に $k = 0$ の場合を考えると, (1) の条件を満たす $\tilde{f}$ はただ 1 つしか存在しないことがわかる.

§2. 円周の間の写像の写像度の定義と性質

定義 2.1 連続写像 $f : S^1 \to S^1$ に対し, $f \circ e : \boldsymbol{R} \to S^1$ の定義域を $[0,1]$ に制限した写像を $f' : [0,1] \to S^1$ とし, $f(1) = e(t_0)$ を満たす $t_0 \in \boldsymbol{R}$ を選ぶ. (1.15) により, $e \circ \tilde{f} = f'$, $\tilde{f}(0) = t_0$ を満たす $\tilde{f} : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ がただ 1 つあるが, $e(\tilde{f}(1)) = f'(1) = f(e(1)) = f(1) = f(e(0)) = f'(0) = e(\tilde{f}(0))$ だから $\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$ は整数である. そこで, f の写像度と呼ばれる整数 $\deg f$ を $\deg f = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$ で定義する.

$f(1) = e(s_0)$ である $s_0 \in \boldsymbol{R}$ に対し, $e \circ \tilde{g} = f'$, $\tilde{g}(0) = s_0$ を満たす $\tilde{g} : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ をとれば, (1.15) の (2) から $\tilde{g}(t) = \tilde{f}(t) + \tilde{g}(0) - \tilde{f}(0)$ がすべての $t \in [0,1]$ について成り立つため $\tilde{g}(1) - \tilde{g}(0) = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$ である. 従って, 上の写像度の定義は $f(1) = e(t_0)$ を満たす $t_0 \in \boldsymbol{R}$ の選び方に依存しない.

命題 2.2 p_0 を S^1 の定点とする. $c, id_{S^1}, T : S^1 \to S^1$ をそれぞれ, 定値写像 $c(z) = p_0$, 恒等写像 $id_{S^1}(z) = z$, 対心写像 $T(z) = -z$ とすれば, $\deg c = 0$, $\deg id_{S^1} = \deg T = 1$ である.

証明 $e(t_0) = p_0$ を満たす $t_0 \in [0,1]$ を選び, $\tilde{c} : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を定値写像 $\tilde{c}(t) = t_0$ とすれば $e(\tilde{c}(t)) = p_0 = c(e(t))$ だから $\deg c = \tilde{c}(1) - \tilde{c}(0) = t_0 - t_0 = 0$. $i : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を包含写像とすれば, $e(i(t)) = e(t) = id_{S^1}(e(t))$ だから $\deg id_{S^1} = i(1) - i(0) = 1 - 0 = 1$. $\widetilde{T} : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を $\widetilde{T}(t) = t + \dfrac{1}{2}$ で定めると, $e(\widetilde{T}(t)) = e\left(t + \frac{1}{2}\right) = T(e(t))$ だから $\deg T = \widetilde{T}(1) - \widetilde{T}(0) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2} = 1$. □

命題 2.3 $f, g : S^1 \to S^1$ を 連続写像とする. 複素数の積を用いて $fg : S^1 \to S^1$ を $(fg)(z) = f(z)g(z)$ で定める.
(1) $\deg(fg) = \deg f + \deg g$. (2) $\deg(f \circ g) = (\deg f)(\deg g)$.

証明 $f', g' : [0,1] \to S^1$ を $f \circ e, g \circ e : \boldsymbol{R} \to S^1$ の定義域を $[0,1]$ に制限した写像とし, $f(1) = e(t_0)$, $g(1) = e(s_0)$ を満たす $t_0, s_0 \in \boldsymbol{R}$ を選んでおく. $e \circ \tilde{f} = f'$, $e \circ \tilde{g} = g'$, $\tilde{f}(0) = t_0$, $\tilde{g}(0) = s_0$ を満たす $\tilde{f}, \tilde{g} : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ をとる.

(1) $\tilde{h} : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を $\tilde{h}(t) = \tilde{f}(t) + \tilde{g}(t)$ で定めれば,
$$e(\tilde{h}(t)) = e(\tilde{f}(t) + \tilde{g}(t)) = e(\tilde{f}(t))e(\tilde{g}(t)) = f(e(t))g(e(t)) = (fg)(e(t))$$
だから $\deg(fg) = \tilde{h}(1) - \tilde{h}(0) = (\tilde{f}(1) + \tilde{g}(1)) - (\tilde{f}(0) + \tilde{g}(0)) = (\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)) + (\tilde{g}(1) - \tilde{g}(0)) = \deg f + \deg g$.

(2) $t \in \boldsymbol{R}$ に対し, t 以下の最大の整数を $[t]$ で表す. $\hat{f} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を $\hat{f}(t) = \tilde{f}(t - [t]) + [t] \deg f$ で定める. $a \in \boldsymbol{R}$ が整数でないならば, $\lim\limits_{t \to a}[t] = [a]$ だから $\hat{f}$ は a で連続である. a が整数ならば $\lim\limits_{t \to a+0}[t] = a$, $\lim\limits_{t \to a-0}[t] = a - 1$ であり, $\tilde{f}(1) = \tilde{f}(0) + \deg f$ が成り立つため,
$$\begin{aligned}\lim_{t \to a+0} \hat{f}(t) &= \lim_{t \to a+0} \tilde{f}(t - [t]) + \lim_{t \to a+0} [t] \deg f = \tilde{f}(0) + a \deg f = \tilde{f}(1) + (a-1) \deg f \\ &= \lim_{t \to a-0} \tilde{f}(t - [t]) + \lim_{t \to a-0} [t] \deg f = \lim_{t \to a-0} \hat{f}(t)\end{aligned}$$
が得られる. 従って $\hat{f}$ は連続である. $\hat{f}$ の定義と $[\tilde{g}(t)]$ が整数であることから, 次の等式が得られる.
$$\begin{aligned}e(\hat{f} \circ \tilde{g}(t)) &= e(\hat{f}(\tilde{g}(t))) = e(\tilde{f}(\tilde{g}(t) - [\tilde{g}(t)]) + [\tilde{g}(t)](\deg f)) = e(\tilde{f}(\tilde{g}(t) - [\tilde{g}(t)])) = f(e(\tilde{g}(t) - [\tilde{g}(t)])) \\ &= f(e(\tilde{g}(t))) = f(g(e(t))) = (f \circ g)(e(t))\end{aligned}$$
従って, $\deg(f \circ g)$ の定義から $\deg(f \circ g) = (\hat{f} \circ \tilde{g})(1) - (\hat{f} \circ \tilde{g})(0)$ であるが, $\hat{f}$ の定義と $\tilde{g}(1) = \tilde{g}(0) + \deg g$, およ

び実数 t, 整数 n に対して $[t+n]=[t]+n$ が成り立つことから, この等式の左辺は

$$\begin{aligned}\hat{f}(\tilde{g}(1))-\hat{f}(\tilde{g}(0)) &= \tilde{f}(\tilde{g}(1)-[\tilde{g}(1)])+[\tilde{g}(1)]\deg f-(\tilde{f}(\tilde{g}(0)-[\tilde{g}(0)])+[\tilde{g}(0)]\deg f)\\ &= \tilde{f}(\tilde{g}(0)+\deg g-[\tilde{g}(0)+\deg g])+[\tilde{g}(0)+\deg g]\deg f-(\tilde{f}(\tilde{g}(0)-[\tilde{g}(0)])+[\tilde{g}(0)](\deg f))\\ &= \tilde{f}(\tilde{g}(0)-[\tilde{g}(0)])+[\tilde{g}(0)]\deg f+(\deg g)(\deg f)-(\tilde{f}(\tilde{g}(0)-[\tilde{g}(0)])+[\tilde{g}(0)](\deg f))\\ &= (\deg f)(\deg g)\end{aligned}$$

に等しいため, $\deg(f\circ g)=(\deg f)(\deg g)$ が得られる $\square$

系 2.4 n を整数とするとき $p_n(z)=z^n$ で定義される写像 $p_n: S^1\to S^1$ の写像度は n である.

証明 $n=0$ の場合 p_0 は定値写像だから (2.2) から $\deg p_0=0$. $n>0$ の場合 p_n は恒等写像 id_{S^1} の n 乗 $id_{S^1}^n$ だから (2.2) と (2.3) の (1) から $\deg p_n = n\deg id_{S^1}=n$. $n<0$ の場合 $p_np_{-n}=p_0$ だから (2.3) の (1) から $\deg p_n+\deg p_{-n}=\deg p_0=0$. 一方 $\deg p_{-n}=-n$ だから $\deg p_n=n$. $\square$

$p_n(\cos\theta+i\sin\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$ だから θ が 0 から 2π まで動いて S^1 上の点 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ が時計回りに S^1 を 1 周するとき $p_n(z)$ は $n>0$ ならば $p_n(z)$ は同じ向きに S^1 を n 周まわり, $n<0$ ならば $p_n(z)$ は逆向きに S^1 を $-n$ 周まわるため, 上の事実は要するに S^1 を n 回まわる写像の写像度は n であることを示しているに過ぎない.

命題 2.5 $f: S^1\to S^1$ を 連続写像とし, n を自然数, k を整数とする. $\xi_n=e\left(\frac{1}{n}\right)$ とおくとき, すべての $x\in S^1$ に対して $f(\xi_n x)=\xi_n^k f(x)$ であれば $\deg f-k$ は n の倍数である.

証明 $f': [0,1]\to S^1$ は $f\circ e$ の定義域を制限した写像, $\tilde{f}: [0,1]\to \boldsymbol{R}$ は $e\circ\tilde{f}=f'$ を満たす写像とする. 任意の $x\in\left[0,\frac{n-1}{n}\right]$ に対して $e\left(\tilde{f}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)\right)=f\left(e\left(x+\dfrac{1}{n}\right)\right)=f(\xi_n e(x))=\xi_n^k f(e(x))=e(\tilde{f}(x))e\left(\dfrac{k}{n}\right)=e\left(\tilde{f}(x)+\dfrac{k}{n}\right)$ だから (1.14) の (3) により, $\tilde{f}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-\tilde{f}(x)-\dfrac{k}{n}$ は整数である. 従って $x\mapsto \tilde{f}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-\tilde{f}(x)-\dfrac{k}{n}$ は $\left[0,\frac{n-1}{n}\right]$ で定義された整数値をとる連続関数だから (1.8) により, 定数値関数である. そこで $m=\tilde{f}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-\tilde{f}(x)-\dfrac{k}{n}$ とおくと, $\deg f=\tilde{f}(1)-\tilde{f}(0)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\tilde{f}\left(\frac{j}{n}\right)-\tilde{f}\left(\frac{j-1}{n}\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(m+\frac{k}{n}\right)=mn+k$ で, m は整数だから $\deg f-k$ は n の倍数である. $\square$

定義 2.6 X, Y を位相空間, $f,g: X\to Y$ を連続写像とする. 連続写像 $H: X\times[0,1]\to Y$ で, 各 $x\in X$ に対して $H(x,0)=f(x)$, $H(x,1)=g(x)$ を満たすものが存在するとき f と g はホモトピックであるといい, H を f から g へのホモトピーという.

f と g がホモトピックであることを $f\simeq g$ で表せば, $\simeq$ は X から Y への連続写像全体の集合における同値関係であることが容易に確かめられる.

命題 2.7 $f,g: S^1\to S^1$ がホモトピックな連続写像ならば $\deg f=\deg g$ である.

証明 $H: S^1\times[0,1]\to S^1$ を f から g へのホモトピーとする. $H': [0,1]^2\to S^1$ を $H'(s,t)=H(e(s),t)$ で定め, $H'(0,0)=f(1)=e(t_0)$ を満たす $t_0\in\boldsymbol{R}$ をとる. (1.15) の (1) から 連続写像 $\widetilde{H}: [0,1]^2\to\boldsymbol{R}$ で, $e\circ\widetilde{H}=H'$ かつ $\widetilde{H}(0,0)=t_0$ を満たすものがある. このとき $s\in[0,1]$ に対し, $e(\widetilde{H}(s,0))=H'(s,0)=H(e(s),0)=f(e(s))$, $e(\widetilde{H}(s,1))=H'(s,1)=H(e(s),1)=g(e(s))$ だから $\deg f=\widetilde{H}(1,0)-\widetilde{H}(0,0)$, $\deg g=\widetilde{H}(1,1)-\widetilde{H}(0,1)$ である. 一方 $t\in[0,1]$ に対し, $e(\widetilde{H}(1,t))=H'(1,t)=H(e(1),t)=H(1,t)=H(e(0),t)=H'(0,t)=e(\widetilde{H}(0,t))$ となるため $t\mapsto\widetilde{H}(1,t)-\widetilde{H}(0,t)$ は $[0,1]$ で定義された整数値をとる連続関数だから (1.8) により, 定数値関数である. 従って, 上式から $\deg f=\deg g$ である. $\square$

命題 2.8　連続写像 $f : S^1 \to S^1$ に関する次の 4 つの条件は同値である.

(1) 連続写像 $F : D^2 \to S^1$ で, $x \in S^1$ ならば $F(x) = f(x)$ となるものがある.

(2) f は定値写像にホモトピックである.

(3) $\deg\, f = 0$.

(4) 連続写像 $\bar{f} : S^1 \to \boldsymbol{R}$ で, $e \circ \bar{f} = f$ を満たすものがある.

証明　(1) ⇒ (2); $H : S^1 \times [0,1] \to S^1$ を $H(z,t) = F(tz)$ で定めると, $H(z,0) = F(0)$, $H(z,1) = f(z)$ だから H は定値写像から f へのホモトピーである.

(2) ⇒ (3); f が定値写像にホモトピックならば (2.7) と (2.2) から $\deg\, f = 0$ である.

(3) ⇒ (4); $\tilde{f} : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ を $e(\tilde{f}(x)) = f(e(x))$ $(x \in [0,1])$ を満たす連続関数とすれば, 仮定から $\tilde{f}(1) = \tilde{f}(0)$ である. $t_0 = \tilde{f}(1) = \tilde{f}(0)$ とおき, $\bar{f} : S^1 \to \boldsymbol{R}$ を次で定めると, 1 以外の点では明らかに $\bar{f}$ は連続である.

$$\bar{f}(z) = \begin{cases} \tilde{f}(l(-z) + \frac{1}{2}) & z \neq 1 \\ t_0 & z = 1 \end{cases}$$

$\tilde{f}$ の 0, 1 における連続性から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, “$0 < x < \delta$ または $1 - \delta < x < 1$ ならば $|\tilde{f}(x) - t_0| < \varepsilon$” を満たす $\delta > 0$ がある. 一方 (1.11) の (3) から $\rho > 0$ で, “$0 < |z-1| < \rho$ かつ $z \in S^1$ ならば $0 < l(-z) + \frac{1}{2} < \delta$ または $1 - \delta < l(z) + \frac{1}{2} < 1$” を満たすものがある. 従って, $\bar{f}$ は 1 においても連続である. $e \circ \bar{f} = f$ は $\bar{f}$ の定義からただちにわかる.

(4) ⇒ (1); (1.4) の (2) により S^1 はコンパクトで, (1.5) から $\bar{f}$ は最大値と最小値をもつため, $\bar{f}(S^1) \subset [-M, M]$ を満たす正の実数 M がとれる. このとき $z \neq 0$ ならば $\left|\bar{f}\left(\frac{z}{|z|}\right)\right| \leqq M$ であるため, $z \to 0$ ならば $|z|\bar{f}\left(\frac{z}{|z|}\right) \to 0$ である. そこで $F : D^2 \to S^1$ を

$$F(z) = \begin{cases} e\left(|z|\bar{f}\left(\frac{z}{|z|}\right)\right) & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

で定めれば, F は 0 においても連続だから F は連続写像で, $z \in S^1$ ならば $\bar{f}$ についての仮定から $F(z) = e(\bar{f}(z)) = f(z)$ が成り立つ. □

系 2.9　$f, g : S^1 \to S^1$ を連続写像とするとき, f と g がホモトピックであるためには, $\deg\, f = \deg\, g$ が成り立つことが必要十分である.

証明　$\deg\, f = \deg\, g$ が成り立つと仮定する. $\bar{g} : S^1 \to S^1$ を $\bar{g}(z) = \dfrac{1}{g(z)}$ で定義すると, 積 $\bar{g}g$ は定値写像だから (2.3) の (1), (2.2) より $\deg\, \bar{g} + \deg\, g = \deg(\bar{g}g) = 0$. 従って, $\deg\, \bar{g} = -\deg\, g$ だから $\deg\,(f\bar{g}) = \deg\, f + \deg\, \bar{g} = \deg\, f - \deg\, g = 0$. 故に (2.8) から $f\bar{g}$ は定値写像にホモトピックである. $H : S^1 \times [0,1] \to S^1$ を $f\bar{g}$ から定値写像 c $(c(z) = \cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$ へのホモトピー $(H(z,0) = f(z)\bar{g}(z),\ H(z,1) = \cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$ として, $G : S^1 \times [0,1] \to S^1$ を $G(z,t) = g(z)H(z,t)(\cos(t\theta_0) - i\sin(t\theta_0))$ で定めれば, G は f から g へのホモトピーである. □

位相空間 X, Y に対し, $C(X,Y)$ を X から Y への連続写像全体からなる集合とし, $C(X,Y)$ における同値関係 $\simeq$ を “$f \simeq g \Leftrightarrow f$ と g はホモトピックである.” により定める. このとき, 商集合 $C(X,Y)/\simeq$ を $[X,Y]$ で表し, X から Y への連続写像のホモトピー集合という. $p : C(X,Y) \to [X,Y]$ を商写像として, 連続写像 $f : X \to Y$ が属する同値類 $p(f)$ を f のホモトピー類といい, $[f]$ で表す.

特に, $Y = S^1$ の場合, $f, g \in C(X, S^1)$ に対し, S^1 における積を用いて, f と g の積 $fg : X \to S^1$ を $(fg)(x) = f(x)g(x)$ で定めれば, fg は連続だから $fg \in C(X, S^1)$ である. このとき, あきらかに積の結合法則および交換法則が成り立つ. $c_1 : X \to S^1$ を $1 \in S^1$ への定値写像とすれば, 任意の $f \in C(X, S^1)$ に対して, $fc_1 = c_1 f = f$

であり，$f': X \to S^1$ を $f'(x) = \overline{f(x)}$ で定めれば，$ff' = f'f = c_1$ が成り立つため，$C(X, S^1)$ は c_1 を単位元とするアーベル群になることがわかる．

さらに，$f \simeq f'$, $g \simeq g'$ のとき f と f', g と g' の間のホモトピーをそれぞれ $H, H' : X \times [0,1] \to S^1$ ($H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$, $H'(x,0) = f'(x)$, $H'(x,1) = g'(x)$) として，$G : X \times [0,1] \to S^1$ を $G(x,t) = H(x,t)H'(x,t)$ で定めると，$G(x,0) = (fg)(x)$, $G(x,1) = (f'g')(x)$ が成り立つため，$fg \simeq f'g'$ がわかる．そこで，$\alpha, \beta \in [X, S^1]$ の積を $\alpha\beta = [fg]$ ($\alpha = [f]$, $\beta = [g]$) で定めれば，これは $\alpha = [f]$, $\beta = [g]$ を満たす $f, g \in C(X, S^1)$ の選び方によらない．従って，$p : C(X, S^1) \to [X, S^1]$ がアーベル群の準同型写像になるような $[X, S^1]$ の群構造が定義される．

$\boldsymbol{Z}$ を整数全体の集合とし，通常の加法でアーベル群とみなせば，(2.3) の (1) により写像度 deg は $C(S^1, S^1)$ から $\boldsymbol{Z}$ へのアーベル群の準同型写像 $\deg : C(S^1, S^1) \to \boldsymbol{Z}$ である．写像 $d : [S^1, S^1] \to \boldsymbol{Z}$ を $d(\alpha) = \deg f$ ($\alpha = [f]$) で定めれば，(2.7) により $\alpha = [f]$ を満たす $f \in C(X, S^1)$ の選び方によらない．また，$d(\alpha\beta) = \deg(fg) = \deg f + \deg g = d(\alpha) + d(\beta)$ ($\alpha = [f]$, $\beta = [g]$) だから d はアーベル群の準同型写像であり，$\deg = d \circ p$ が成り立つ．

定理 2.10　$d : [S^1, S^1] \to \boldsymbol{Z}$ はアーベル群の同型写像である．

証明　任意の $n \in \boldsymbol{Z}$ に対して，(2.4) から $d([p_n]) = \deg p_n = n$ だから d は全射である．また，$d(\alpha) = d(\beta)$ ($\alpha = [f]$, $\beta = [g]$) とすれば，$\deg f = \deg g$ だから (2.9) により $f \simeq g$ である．故に $\alpha = \beta$ となるため，d は単射でもある．□

命題 2.11　任意の連続関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ に対し，$e \circ f : X \to S^1$ は定値写像にホモトピックである．

証明　$H : X \times [0,1] \to S^1$ を $H(x,t) = e(tf(x))$ で定めれば，H は定値写像から $e \circ f$ へのホモトピーである．□

$\mu : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ を，$\mu(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$ で定めれば μ は連続関数である．このとき，$t \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $\mu(t\boldsymbol{x}) = |t|\mu(\boldsymbol{x})$, $\|\boldsymbol{x}\| \leqq \sqrt{n}\mu(\boldsymbol{x})$ が成り立ち，$\boldsymbol{x}$ が原点 $\boldsymbol{0}$ であることと $\mu(\boldsymbol{x}) = 0$ であることは同値であることに注意する．$\boldsymbol{z}_0$ をすべての成分が $\dfrac{1}{2}$ である $[0,1]^n$ の点とすれば，$\boldsymbol{x} \in [0,1]^n$ であるためには，$\mu(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0) \leqq \dfrac{1}{2}$ であることが必要十分である．また $\partial[0,1]^n = \left\{\boldsymbol{x} \in [0,1]^n \,\middle|\, \mu(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0) = \dfrac{1}{2}\right\}$ とおく．

命題 2.12　$\eta_n : [0,1]^n \to D^n$ を次のように定めれば，η_n は $\partial[0,1]^n$ を S^{n-1} の上に写す同相写像である．

$$\eta_n(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{2\mu(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0)}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0\|}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0) & \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{z}_0 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}_0 \end{cases}$$

証明　$\boldsymbol{x} \in [0,1]^n$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{z}_0$ ならば $\|\eta_n(\boldsymbol{x})\| = 2\mu(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0)$ だから，$\eta_n(\boldsymbol{x}) \in D^n$ であり，$\eta_n(\boldsymbol{x}) \in S^{n-1}$ であることと，$\boldsymbol{x} \in \partial[0,1]^n$ であることは同値である．また μ の連続性から $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{z}_0} \|\eta_n(\boldsymbol{x})\| = \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{z}_0} 2\mu(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0) = 0$ だから η_n は $\boldsymbol{z}_0$ で連続である．η_n は $\boldsymbol{z}_0$ 以外の点で明らかに連続だから，η_n は連続写像である．$\eta_n^{-1} : D^n \to [0,1]^n$ を

$$\eta_n^{-1}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{\|\boldsymbol{x}\|}{2\mu(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

で定めれば，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $\mu(\eta_n^{-1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{z}_0) = \dfrac{\|\boldsymbol{x}\|}{2}$ だから，$\boldsymbol{x} \in D^n$ ならば $\eta_n^{-1}(\boldsymbol{x}) \in [0,1]^n$ である．$\boldsymbol{x} \in D^n$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $\|\eta_n^{-1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{z}_0\| = \dfrac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{2\mu(\boldsymbol{x})} \leqq \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|$ だから η_n^{-1} は原点で連続である．η_n^{-1} は原点以外の点で明らかに連続だから，η_n^{-1} は連続写像である．$\|\eta_n(\boldsymbol{x})\| = 2\mu(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0)$ と $\mu(\eta_n(\boldsymbol{x})) = \dfrac{2\mu(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0)^2}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_0\|}$ を用いれば，任意の $\boldsymbol{x} \in [0,1]^n$ に対して $\eta_n^{-1}(\eta_n(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$ であることが示され，$\|\eta_n^{-1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{z}_0\| = \dfrac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{2\mu(\boldsymbol{x})}$ と $\mu(\eta_n^{-1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{z}_0) = \dfrac{\|\boldsymbol{x}\|}{2}$ を用いれば，任意の $\boldsymbol{x} \in D^n$ に対して $\eta_n(\eta_n^{-1}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$ であることが示されるため，η_n^{-1} は η_n の逆写像である．□

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$, $y \in \boldsymbol{R}$ に対し，$\boldsymbol{R}^{n+1}$ の点 $(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ を $(\boldsymbol{x}, y)$ で表す．

命題 2.13　$\rho_n : D^n \to S^n$ を

$$\rho_n(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sin(\pi\|\boldsymbol{x}\|)}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}, \cos(\pi\|\boldsymbol{x}\|)\right) & \boldsymbol{x} \neq 0 \\ (0,0,\dots,0,1) & \boldsymbol{x} = 0 \end{cases}$$

によって定めれば ρ_n は S^{n-1} の点をすべて $(0,0,\dots,0,-1)$ に写す連続な全射である．さらに $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$ かつ $\rho_n(\boldsymbol{x}) = \rho_n(\boldsymbol{x}')$ が成り立つのは, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ がともに S^{n-1} に属している場合に限る.

証明　$\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n$, $y \in \boldsymbol{R}$ に対し, $\|(\boldsymbol{z}, y)\|^2 = \|\boldsymbol{z}\|^2 + y^2$ だから, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $\|\rho_n(\boldsymbol{x})\| = 1$ となるため $\rho_n(\boldsymbol{x}) \in S^n$ である．ρ_n が原点以外の点で連続であることは明らかである．$\boldsymbol{x} \in D^n$ かつ $\boldsymbol{x} \neq 0$ ならば $\left\|\dfrac{\sin(\pi\|\boldsymbol{x}\|)}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}\right\| = \sin(\pi\|\boldsymbol{x}\|)$ だから, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} \frac{\sin(\pi\|\boldsymbol{x}\|)}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x} = 0$ となるため, ρ_n は原点でも連続である．$(\boldsymbol{z}, y) \in S^n$ ($\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^n$, $y \in [-1,1]$) に対し, $(\boldsymbol{z}, y) \neq (0,0,\dots,0,\pm 1)$ ならば, $\|\boldsymbol{z}\|^2 + y^2 = 1$ かつ $y \neq \pm 1$ だから, $\left\|\dfrac{\cos^{-1} y}{\pi\sqrt{1-y^2}}\boldsymbol{z}\right\| = \dfrac{\cos^{-1} y}{\pi}$ であることに注意すれば, $\rho_n\left(\dfrac{\cos^{-1} y}{\pi\sqrt{1-y^2}}\boldsymbol{z}\right) = (\boldsymbol{z}, y)$ が成り立つ．また, $\rho_n(0,0,\dots,0) = (0,0,\dots,0,1)$ であり $\boldsymbol{x} \in S^{n-1}$ ならば $\rho_n(\boldsymbol{x}) = (0,0,\dots,0,-1)$ だから ρ_n は S^{n-1} の点をすべて $(0,0,\dots,0,-1)$ に写す全射である.

ρ_n の定義から, $\rho_n(\boldsymbol{x}) = (0,0,\dots,0,1)$ となる $\boldsymbol{x} \in D^n$ は 0 のみである．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in D^n - (S^{n-1} \cup \{\boldsymbol{0}\})$ かつ $\rho_n(\boldsymbol{x}) = \rho_n(\boldsymbol{x}')$ ならば, $\sin(\pi\|\boldsymbol{x}\|)$, $\sin(\pi\|\boldsymbol{x}'\|)$ はともに 0 でないため, $\dfrac{\sin(\pi\|\boldsymbol{x}\|)}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x} = \dfrac{\sin(\pi\|\boldsymbol{x}'\|)}{\|\boldsymbol{x}'\|}\boldsymbol{x}'$ かつ $\cos(\pi\|\boldsymbol{x}\|) = \cos(\pi\|\boldsymbol{x}'\|)$ より $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ が導かれる．従って, 後半の主張が成り立つ.　□

注意 2.14　(1) n が 1 以上の整数ならば D^n は弧状連結だから, 上の結果から S^n は弧状連結である．(2.16) により $\partial[0,1]^n$ は S^{n-1} と同相だから, n が 2 以上の整数ならば $\partial[0,1]^n$ は 弧状連結である.

(2) D_n は $\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合であることからコンパクトで, S^n はハウスドルフ空間だから, ρ_n は閉写像である．従って, ρ_n は商写像である.

(2.12), (2.13) と上の (2) から次のことがわかる.

補題 2.15　$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ または $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \partial[0,1]^n$ であるとき $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$ で表すことにして $[0,1]^n$ の関係 $\sim$ を定めれば, $\sim$ は同値関係であり, $\rho_n \circ \eta_n : [0,1]^n \to S^n$ はこの同値関係による商写像である.

定理 2.16　n が 2 以上の整数ならば, S^n から S^1 への任意の連続写像は, 定値写像にホモトピックである.

証明　$f : S^n \to S^1$ を連続写像とし, $f(0,0,\dots,0,1) = p_0$ とおく．$e(t_0) = p_0$ を満たす $t_0 \in \boldsymbol{R}$ を 1 つ選び, $\rho_n\eta_n(0,0,\dots,0) = (0,0,\dots,0,1)$ であることに注意すれば, (1.15) の (1) から, 連続写像 $g : [0,1]^n \to \boldsymbol{R}$ で, $e \circ g = f \circ \rho_n \circ \eta_n$ かつ $g(0,0,\dots,0) = t_0$ を満たすものがある．$\partial[0,1]^n$ は η_n によって S^{n-1} の上に同相に写り, S^{n-1} は ρ_n によって $(0,0,\dots,0,1)$ に写るため, $\partial[0,1]^n$ のすべての点は $e \circ g = f \circ \rho_n \circ \eta_n$ によって p_0 に写る．従って, $\partial[0,1]^n$ は g によって, $e^{-1}(p_0) = \{n + t_0 | n \in \boldsymbol{Z}\}$ に写される．(2.14) の (1) により, $\partial[0,1]^n$ の g による像は t_0 を含む $e^{-1}(p_0)$ の弧状連結な部分集合であるが, $e^{-1}(p_0)$ は $\boldsymbol{R}$ の離散位相をもつ部分空間であるため, $\partial[0,1]^n$ の g による像は t_0 のみからなる集合である．故に (2.15) から, 連続写像 $\tilde{f} : S^n \to \boldsymbol{R}$ で, $\tilde{f} \circ \rho_n \circ \eta_n = g$ を満たすものがある．このとき $e \circ \tilde{f} \circ \rho_n \circ \eta_n = e \circ g = f \circ \rho_n \circ \eta_n$ であり, $\rho_n \circ \eta$ は全射だから, $e \circ \tilde{f} = f$ が成り立つため, (2.11) によって f は定値写像にホモトピックである.　□

§3.　応用

定理 3.1　連続写像 $f, g : S^1 \to S^1$ の写像度が異なれば, f と g は一致点をもつ．特に, f の写像度が 1 と異なれば, f は不動点をもち, f の写像度が 0 と異なれば, f は全射である.

証明 任意の $\boldsymbol{x} \in S^1$ に対して, $f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})$ が成り立てば $\deg f = \deg g$ であることを示せばよい. このとき, 任意の $t \in [0,1]$ に対して $(1-t)f(\boldsymbol{x}) \neq tg(\boldsymbol{x})$ だから, 連続写像 $F : S^1 \times [0,1] \to S^1$ を $F(\boldsymbol{x}, t) = \dfrac{(1-t)f(\boldsymbol{x}) - tg(\boldsymbol{x})}{\|(1-t)f(\boldsymbol{x}) - tg(\boldsymbol{x})\|}$ で定義できる. $F(\boldsymbol{x}, 0) = f(\boldsymbol{x})$, $F(\boldsymbol{x}, 1) = -g(\boldsymbol{x})$ だから (2.11), (2.3) の (2), (2.2) により, $\deg f = \deg(-g) = \deg(T \circ g) = (\deg T)(\deg g) = \deg g$. □

定理 3.2 連続写像 $f : D^2 \to D^2$ は $f(S^1) \subset S^1$ を満たし, $f|_{S^1} : S^1 \to S^1$ を $f|_{S^1}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ で与えられる写像としたとき $\deg(f|_{S^1}) \neq 0$ であるとする. このとき, f は任意の連続写像 $g : D^2 \to D^2$ と一致点をもつ. 特に, D^2 から D^2 への連続写像はつねに不動点をもつ.

証明 任意の $\boldsymbol{x} \in D^2$ に対して, $f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})$ が成り立つと仮定する. 各 $\boldsymbol{x} \in D^2$ に対し, $g(\boldsymbol{x})$ を始点として $f(\boldsymbol{x})$ を通る半直線と S^1 との交点を $F(\boldsymbol{x})$ とする. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^2$ に対し, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を表すとし, $u(\boldsymbol{x}) = \dfrac{f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})}{\|f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})\|}$, $s(\boldsymbol{x}) = -(f(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{x})) + \sqrt{1 - \|f(\boldsymbol{x})\|^2 + (f(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{x}))^2}$ によって $u : D^2 \to S^1$, $s : D^2 \to \boldsymbol{R}$ を定めれば, $F(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + s(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x})$ であり, $F : D^2 \to S^1$ は連続である. また, $\boldsymbol{x} \in S^1$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \in S^1$ だから $F(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ である. 従って, $f|_{S^1}$ は D^2 への拡張 F をもつため, (2.12) により $\deg(f|_{S^1}) = 0$ となって仮定に反する. □

上の定理の最後の主張は (1.9) の 2 次元のバージョンである. これを用いると, (1.10) の 2 次元のバージョンが容易に示される.

系 3.3 連続写像 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ の像が有界ならば f は不動点をもつ.

また (1.11) の 2 次元のバージョンは以下のようになる.

定理 3.4 任意の連続写像 $f : S^2 \to \boldsymbol{R}^2$ に対し, $f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ となる点 $\boldsymbol{x} \in S^2$ が存在する.

証明 $h : D^2 \to S^2$ を $h(x_1, x_2) = \left(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\right)$ で定める. すべての $\boldsymbol{x} \in S^2$ に対して, $f(-\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{x})$ と仮定すれば, $G : D^2 \to S^1$ を $G(\boldsymbol{x}) = \dfrac{f(h(\boldsymbol{x})) - f(-h(\boldsymbol{x}))}{\|f(h(\boldsymbol{x})) - f(-h(\boldsymbol{x}))\|}$ で定めることができる. $g : S^1 \to S^1$ を G の S^1 への制限とすれば, (2.12) により $\deg g = 0$ である. 一方すべての $x \in S^1$ に対して, $g(-x) = -g(x)$ が成り立つため, (2.5) において $n = 2$, $k = 1$ の場合を考えれば, $\deg g$ は奇数であり, 矛盾が生じる. □

定理 3.5 (1) 連続写像 $f : S^1 \to S^1$ の写像度が奇数ならば $f(-x) = -f(x)$ となる点 $x \in S^1$ が存在する.
(2) 連続写像 $f : S^1 \to S^1$ の写像度が偶数ならば $f(-x) = f(x)$ となる点 $x \in S^1$ が存在する.

証明 (1) すべての $z \in S^1$ に対して, $f(-z) \neq -f(z)$ ならば, f の写像度は偶数であることを示す. $g : S^1 \to S^1$ を $g(z) = \dfrac{f(z) + f(-z)}{|f(z) + f(-z)|}$ で定めると, すべての $z \in S^1$ に対して $g(-z) = g(z)$ だから, (2.5) において $n = 2$, $k = 0$ の場合を考えれば, g の写像度は偶数である. ところが任意の $z \in S^1$ と $t \in [0,1]$ に対して, $(1-t)f(z) + tg(z) \neq 0$ だから $H : S^1 \times [0,1] \to S^1$ を $H(z, t) = \dfrac{(1-t)f(z) + tg(z)}{|(1-t)f(z) + tg(z)|}$ で定義できる. $H(z, 0) = f(z)$, $H(z, 1) = g(z)$ だから f は g にホモトピックである. 従って (2.7) から $\deg f = \deg g$ となって, $\deg f$ は偶数である.

(2) すべての $z \in S^1$ に対して, $f(-z) \neq f(z)$ ならば, f の写像度は奇数であることを示す. $g : S^1 \to S^1$ を $g(z) = \dfrac{f(z) - (-z)}{|f(z) - f(-z)|}$ で定めると, すべての $z \in S^1$ に対して $g(-z) = -g(z)$ だから, (2.5) において $n = 2$, $k = 1$ の場合を考えれば, g の写像度は奇数である. ところが任意の $z \in S^1$ と $t \in [0,1]$ に対して, $(1-t)f(z) - tg(z) \neq 0$ だから $H : S^1 \times [0,1] \to S^1$ を $H(z, t) = \dfrac{(1-t)f(z) - tg(z)}{|(1-t)f(z) - tg(z)|}$ で定義できる. $H(z, 0) = f(z)$, $H(z, 1) = g(z)$ だから f は g にホモトピックである. 従って (2.7) から $\deg f = \deg g$ となって, $\deg f$ は奇数である. □

定理 3.6 (代数学の基本定理) 複素数を係数とする n 次代数方程式 $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ は

$r = \max\{1, |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|\}$ とおくと, 絶対値が r 以下である複素数の解を少なくとも一つもつ.

証明 $f : D^2 \to D^2$ を $f(z) = z^n$ で定義すれば, f は連続で $f(S^1) \subset S^1$ を満たす. 一方, $|z| \leqq r$ ならば

$$\begin{aligned}|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| &\leqq |a_{n-1}||z^{n-1}| + \cdots + |a_1||z| + |a_0| \leqq |a_{n-1}|r^{n-1} + \cdots + |a_1|r + |a_0| \\ &= r^{n-1}\Big(|a_{n-1}| + \cdots + \frac{|a_1|}{r^{n-2}} + \frac{|a_0|}{r^{n-1}}\Big) \leqq r^{n-1}(|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|) \leqq r^n\end{aligned}$$

だから, 連続写像 $g : D^2 \to D^2$ が $g(z) = -\dfrac{1}{r^n}(a_{n-1}(rz)^{n-1} + \cdots + a_1(rz) + a_0)$ で定義できる. (2.4) から $\deg(f|_{S^1}) = n \neq 0$ だから (3.2) により $z_0 \in D^2$ で $f(z_0) = g(z_0)$ を満たす $z_0 \in D^2$ が存在する. このとき $(rz_0)^n = -(a_{n-1}(rz_0)^{n-1} + \cdots + a_1(rz_0) + a_0)$ だから rz_0 は与えられた方程式の解である. □

§4. 一般化

写像度は一般に n 次元球面の間の連続写像に対しても定義される.

定理 4.1 連続写像 $f : S^n \to S^n$ に対して f の写像度と呼ばれる整数 $\deg f$ で, 以下の性質をもつものが定義される.

(1) 定値写像の写像度は 0 である.
(2) 恒等写像の写像度は 1 である.
(3) 対心写像の写像度は $(-1)^{n+1}$ である.
(4) $f, g : S^n \to S^n$ を連続写像とするとき, $\deg(g \circ f) = (\deg g)(\deg f)$ が成り立つ.
(5) $f, g : S^n \to S^n$ がホモトピックな連続写像ならば $\deg f = \deg g$ である.
(6) 連続写像 $f : S^n \to S^n$ がすべての $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対し $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ を満たせば, $\deg f$ は奇数である.
(7) 連続写像 $f : S^n \to S^n$ がすべての $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対し $f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ を満たせば, $\deg f$ は偶数である.

上の結果を用いれば, 前と同様の証明法で前節の (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) はそれぞれ以下のように一般化される.

定理 4.2 連続写像 $f, g : S^n \to S^n$ が $\deg f \neq (-1)^{n+1} \deg g$ を満たせば, f と g は一致点をもつ. 特に, f の写像度が $(-1)^{n+1}$ と異なれば, f は不動点をもち, f の写像度が 0 と異なれば, f は全射である.

証明 任意の $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対して, $f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})$ が成り立てば $\deg f = (-1)^{n+1} \deg g$ であることを示せばよい. このとき, 任意の $t \in [0, 1]$ に対して $(1-t)f(\boldsymbol{x}) \neq tg(\boldsymbol{x})$ だから, 連続写像 $F : S^n \times [0, 1] \to S^n$ を $F(\boldsymbol{x}, t) = \dfrac{(1-t)f(\boldsymbol{x}) - tg(\boldsymbol{x})}{\|(1-t)f(\boldsymbol{x}) - tg(\boldsymbol{x})\|}$ で定義できる. $F(\boldsymbol{x}, 0) = f(\boldsymbol{x})$, $F(\boldsymbol{x}, 1) = -g(\boldsymbol{x})$ だから (4.1) の性質 (5), (4), (3) により, $\deg f = \deg(-g) = \deg(T \circ g) = (\deg T)(\deg g) = (-1)^{n+1} \deg g$. とくに $g = id_{S^n}$ のとき, $\deg g = 1$ だから $\deg f \neq (-1)^{n+1}$ ならば, f は不動点をもつ. 任意の $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対し, $g : S^n \to S^n$ を $\boldsymbol{x}$ への定値写像とすると, $\deg g = 0$ だから $\deg f \neq 0$ ならば f と g は一致点をもつため $f(\boldsymbol{x}_0) = g(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{x}_0 \in S^n$ がある. □

定理 4.3 $f : D^n \to D^n$ は $f(S^{n-1}) \subset S^{n-1}$, $\deg(f|_{S^{n-1}}) \neq 0$ を満たす連続写像とする. このとき, f は任意の連続写像 $g : D^n \to D^n$ と一致点をもつ. 特に, D^n から D^n への連続写像はつねに不動点をもつ.

証明 任意の $\boldsymbol{x} \in D^n$ に対して, $f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})$ が成り立つと仮定する. 各 $\boldsymbol{x} \in D^n$ に対し, $g(\boldsymbol{x})$ を始点として $f(\boldsymbol{x})$ を通る半直線と S^{n-1} との交点を $h(\boldsymbol{x})$ とする. ここで

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})}{\|f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})\|}, \quad s(\boldsymbol{x}) = -(f(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{x})) + \sqrt{1 - \|f(\boldsymbol{x})\|^2 + (f(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{x}))^2}$$

とおけば, $h(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + s(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x})$ となり, $h : D^n \to S^{n-1}$ は連続である. また, $\boldsymbol{x} \in S^{n-1}$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \in S^{n-1}$ だ

から $h(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ である．$F : S^{n-1} \times [0,1] \to S^{n-1}$ を $F(\boldsymbol{x}, t) = h(t\boldsymbol{x})$ で定めれば $F(\boldsymbol{x}, 0)$ は $\boldsymbol{x}$ の定値写像で, $F(\boldsymbol{x}, 1) = h(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ となるため, $f|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ は定値写像にホモトピックである．(4.1) の (1), (2) により, 仮定と矛盾が生じる． $\square$

上の定理を Brouwer の一致点定理といい, その特別の場合を Brouwer の不動点定理という．

系 4.4 連続写像 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ の像が有界ならば f は不動点をもつ．

定理 4.5 n が偶数で, f の写像度が 0 でなければ $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ となる点 $\boldsymbol{x} \in S^n$ が存在する．

証明 $T : S^n \to S^n$ を対心写像とするとき $\deg(T \circ f) = \deg(f \circ T) = (-1)^{n+1} \deg f = -\deg f \neq 0$ だから $\deg(T \circ f) \neq (-1)^{n+1} \deg(f \circ T)$ となるため (4.2) から $T \circ f$ と $f \circ T$ は一致点をもつ． $\square$

定理 4.6 (Frobenius の定理) 各成分が負でない実数であるような正則行列は正の実数の固有値をもつ．

証明 $A = (a_{ij})$ を各成分が負でない実数であるような n 次正則行列とし, $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ を A から定まる線型写像とする．A の各成分は負でないから, $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n))$ とすれば, $x_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ならば $y_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ である．また A は正則行列だから $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ である．そこで, $N = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S^{n-1} | x_i \geqq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$ とおき, $g : N \to N$ を $g(\boldsymbol{x}) = \dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\|f(\boldsymbol{x})\|}$ で定める．N は D^{n-1} と同相だから Brouwer の不動点定理により, $g(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ を満たす $\boldsymbol{v} \in N$ がある．このとき $f(\boldsymbol{v}) = \|f(\boldsymbol{v})\|\boldsymbol{v}$ が成り立つため, $\|f(\boldsymbol{v})\|$ は A の正の固有値である． $\square$

$\boldsymbol{x} \in S^n$ に対し, $\boldsymbol{R}^{n+1}$ のベクトルで $\boldsymbol{x}$ と直交するものを $\boldsymbol{x}$ における S^n の接ベクトルという．写像 $v : S^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ で, 各 $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対して $v(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}$ における S^n の接ベクトルになるものを S^n の接ベクトル場といい, v が連続であれば連続な接ベクトル場という．また $v(\boldsymbol{x}) = 0$ となる $\boldsymbol{x} \in S^n$ を v の零点または特異点という．$v : S^{2m-1} \to \boldsymbol{R}^{2m}$ を $v(x_1, x_2, \ldots, x_{2m}) = (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2m}, x_{2m-1})$ で定めれば, v は零点をもたない S^{2m-1} の接ベクトル場である．従って奇数次元の球面上には零点をもたない接ベクトル場がある．

定理 4.7 偶数次元の球面上の連続な接ベクトル場は必ず零点をもつ．

証明 S^{2m} 上に零点をもたない連続な接ベクトル場 $v : S^{2m} \to \boldsymbol{R}^{2m+1}$ が存在すると仮定する．$f : S^{2m} \to S^{2m}$ を $f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{v(\boldsymbol{x})}{\|v(\boldsymbol{x})\|}$ で定義すれば, 各 $\boldsymbol{x} \in S^{2m}$ に対し, $\boldsymbol{x}$ と $f(\boldsymbol{x})$ は直交するため, f は不動点をもたない．従って (4.2) から $\deg f = (-1)^{2m+1} = -1$ である．一方 $H : S^{2m} \times [0,1] \to S^{2m}$ を $H(\boldsymbol{x}, t) = \cos \dfrac{\pi t}{2} f(\boldsymbol{x}) + \sin \dfrac{\pi t}{2} \boldsymbol{x}$ で定めれば, 任意の $\boldsymbol{x} \in S^{2m}$ に対して $H(\boldsymbol{x}, 0) = f(\boldsymbol{x})$, $H(\boldsymbol{x}, 1) = \boldsymbol{x}$ が成り立つ．従って, f は S^{2m} の恒等写像にホモトピックになり, $\deg f = 1$ が得られて矛盾が生じる． $\square$

群 G の積を与える写像を $\mu : G \times G \to G$ $(\mu(g, h) = gh)$, 逆元を対応させる写像を $\iota : G \to G$ $(\iota(g) = g^{-1})$ とする．G に位相が与えられていて, $G \times G$ には直積位相を与えたとき, μ と ι がともに連続写像であるとき, G を位相群という．G が有限群の場合は, G に離散位相を与えることによって, G を位相群とみなす．

X を位相空間, G を位相群とする．連続写像 $\alpha : G \times X \to X$ が次の条件 (i), (ii) を満たすとき, α を G の X への作用という．さらに (iii) が成り立つとき G の X 上への作用は自由であるという．

(i) e を G の単位元とするとき, 任意の $x \in X$ に対して $\alpha(e, x) = x$.
(ii) 任意の $g, h \in G$ と $x \in X$ に対して $\alpha(gh, x) = \alpha(g, \alpha(h, x))$.
(iii) $\alpha(g, x) = x$ となる $x \in X$ があれば $g = e$ である．

$g \in G$ に対して写像 $\alpha_g : X \to X$ を $\alpha_g(x) = \alpha(g, x)$ で定めれば, α_g は連続で, $\alpha_e = id_X$, $\alpha_{gh} = \alpha_g \circ \alpha_h$ が成り立

つため, $\alpha_g \circ \alpha_{g^{-1}} = \alpha_{g^{-1}} \circ \alpha_g = id_X$ だから $\alpha_g^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$ である. 従って α_g は同相写像である.

定理 4.8 群 G の偶数次元球面 S^{2m} 上への自由な作用があれば, G の位数は 1 か 2 である.

証明 $\alpha : G \times S^{2m} \to S^{2m}$ を G の S^{2m} 上への自由な作用とする. $g \in G$ が単位元でなければ写像 $g : S^{2m} \to S^{2m}$ $\boldsymbol{x} \mapsto \alpha(g, \boldsymbol{x})$ は不動点をもたないため (4.2) から $\deg\, g = (-1)^{2m+1} = -1$ である. 従って $g, h \in G$ $g, h \neq e$ とすれば $\deg(gh) = (\deg\, g)(\deg\, h) = 1$ だから $gh = e$ である. とくに $g^2 = e$ だから $g = g^2 h = h$ となって G の単位元以外の要素はただ 1 つである. □

$\boldsymbol{R}$ を加法に関して位相群とみなしたとき, $\boldsymbol{R}$ の位相空間 X への作用 $\varphi : \boldsymbol{R} \times X \to X$ を X 上の力学系という. すべての $t \in \boldsymbol{R}$ に対して $\varphi(t, x_0) = x_0$ を満たすような X の点 x_0 を力学系 φ の特異点という.

補題 4.9 X をコンパクトな位相空間, φ を X 上の力学系とする. $t \in \boldsymbol{R}$ に対して $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ で定義される写像 $\varphi_t : X \to X$ がすべての $t \in \boldsymbol{R}$ に対して不動点を持つならば, φ の特異点が存在する.

証明 整数 n に対して $F_n = \{x \in X \,|\, \varphi_{2^{-n}}(x) = x\}$ とおけば, F_n は閉集合で, 仮定から F_n は空集合ではない. $\varphi_{2^{-n-1}} \circ \varphi_{2^{-n-1}} = \varphi_{2^{-n}}$ だから $F_n \supset F_{n+1}$ が成り立つため, $(F_n)_{n \in \boldsymbol{Z}}$ の任意の有限個の共通部分は空でない. 従って X のコンパクト性から $\bigcap_{n \in \boldsymbol{Z}} F_n \neq \emptyset$ である. そこで $x_0 \in \bigcap_{n \in \boldsymbol{Z}} F_n$ をとると, x_0 は φ の特異点であることを示す. まず $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$ から任意の $m \in \boldsymbol{Z}$ に対して F_n の各点は $\varphi_{m2^{-n}}$ の不動点であるため, $A = \{m2^{-n} \,|\, m, n \in \boldsymbol{Z}\}$ とおけば任意の $t \in A$ に対して x_0 は φ_t の不動点である. A は $\boldsymbol{R}$ の稠密な部分集合で, $A \times \{x_0\} \subset \varphi^{-1}(x_0)$ だから, この両辺の閉包を考えると $\boldsymbol{R} \times \{x_0\} \subset \varphi^{-1}(x_0)$ である. 従って任意の $t \in \boldsymbol{R}$ に対して $\varphi(t, x_0) = x_0$ である. □

定理 4.10 (1) D^n 上のどのような力学系も少なくとも 1 つの特異点をもつ.
(2) 偶数次元球面上のどのような力学系も少なくとも 1 つの特異点をもつ.

証明 (1) φ を D^n 上の力学系とすれば, Brouwer の不動点定理により, すべての $t \in \boldsymbol{R}$ に対して $\varphi_t : D^n \to D^n$ は不動点をもつため, (4.9) により φ は特異点をもつ.

(2) φ を S^{2m} 上の力学系とすれば, すべての $t \in \boldsymbol{R}$ に対して φ_t は恒等写像にホモトピックだから $\deg\, \varphi_t = 1$ である. (4.2) から $\varphi_t : S^{2m} \to S^{2m}$ は不動点をもつため, (4.9) により φ は特異点をもつ. □

定理 4.11 連続写像 $f : S^n \to S^n$ の写像度が奇数ならば $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ となる点 $\boldsymbol{x} \in S^n$ が存在する.

証明 すべての $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対して, $f(-\boldsymbol{x}) \neq -f(\boldsymbol{x})$ ならば, f の写像度は偶数であることを示す. $g : S^n \to S^n$ を $g(\boldsymbol{x}) = \dfrac{f(\boldsymbol{x}) + f(-\boldsymbol{x})}{\|f(\boldsymbol{x}) + f(-\boldsymbol{x})\|}$ で定めると, すべての $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対して $g(-\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$ だから (4.1) の (7) から g の写像度は偶数である. 任意の $\boldsymbol{x} \in S^n$ と $t \in [0, 1]$ に対して, $(1-t)f(\boldsymbol{x}) + tg(\boldsymbol{x}) \neq 0$ だから $H : S^n \times [0, 1] \to S^n$ を $H(\boldsymbol{x}, t) = \dfrac{(1-t)f(\boldsymbol{x}) + tg(\boldsymbol{x})}{\|(1-t)f(\boldsymbol{x}) + tg(\boldsymbol{x})\|}$ で定義できる. $H(\boldsymbol{x}, 0) = f(\boldsymbol{x})$, $H(\boldsymbol{x}, 1) = g(\boldsymbol{x})$ だから f は g にホモトピックである. 従って (4.1) の (5) から $\deg\, f = \deg\, g$ だから, $\deg\, f$ は偶数である. □

定理 4.12 $f : S^n \to \boldsymbol{R}^n$ を連続写像とするとき, $f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ を満たす $\boldsymbol{x} \in S^n$ が存在する.

証明 $h : D^n \to S^n$ を $h(\boldsymbol{x}) = \left(\boldsymbol{x}, \sqrt{1 - \|\boldsymbol{x}\|^2}\right)$ で定める. すべての $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対して, $f(-\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{x})$ と仮定すれば, $G : D^n \to S^{n-1}$ を $G(\boldsymbol{x}) = \dfrac{f(h(\boldsymbol{x})) - f(-h(\boldsymbol{x}))}{\|f(h(\boldsymbol{x})) - f(-h(\boldsymbol{x}))\|}$ で定義できる. $g : S^{n-1} \to S^{n-1}$ を G の S^{n-1} への制限, $c : S^{n-1} \to S^{n-1}$ を $G(\boldsymbol{0})$ への定値写像とし, $H : S^{n-1} \times [0, 1] \to S^{n-1}$ を $H(\boldsymbol{x}, t) = G(t\boldsymbol{x})$ で定めれば, H は c から g へのホモトピーである. 従って (4.1) の (5), (1) から $\deg\, g = 0$ である. 一方すべての $\boldsymbol{x} \in S^{n-1}$ に対して, $g(-\boldsymbol{x}) = -g(\boldsymbol{x})$ が成り立つため (4.1) の (6) から $\deg\, g$ は奇数であり, 矛盾が生じる. □

上の定理を Borsuk の対心点定理または Borsuk-Ulam の定理という.

次の定理は $n=2$ の場合は中間値の定理の簡単な応用として得られるが, 一般の n に対しては, (4.12) を用いて示される.

定理 4.13 (ハムサンドウィッチの定理) $\boldsymbol{R}^n$ のなかに n 個の有界な可測集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ が任意に与えられたとき, $\boldsymbol{R}^n$ の超平面 P で, 次のようなものが存在する. 各 j に対し, P で分割される A_j の 2 つの部分の測度は等しい.

証明 $\boldsymbol{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \boldsymbol{R}^{n+1} | x_{n+1} = 0\}$ とみなし, $\boldsymbol{n} = (0, 0, \ldots, 0, 1) \in \boldsymbol{R}^{n+1}$ とおく. 各 $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対し, $\boldsymbol{x}$ に垂直で $\boldsymbol{n}$ を含む $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の超平面を $Q_{\boldsymbol{x}}$ とする. $\boldsymbol{n} \notin \boldsymbol{R}^n$ だから $Q_{\boldsymbol{x}}$ は $\boldsymbol{R}^n$ に一致しない. そこで, $Q_{\boldsymbol{x}}$ に関して $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}$ と同じ側にある A_j の測度を $u_j(\boldsymbol{x})$ で表す. このとき各 $u_j : S^n \to \boldsymbol{R}$ は連続だから, $f(\boldsymbol{x}) = (u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}), \ldots, u_n(\boldsymbol{x}))$ で定義される連続写像 $f : S^n \to \boldsymbol{R}^n$ に対して (4.12) を用いると, $u_j(\boldsymbol{p}) = u_j(-\boldsymbol{p})$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ を満たす $\boldsymbol{p} \in S^n$ が存在する. 各 $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対して $Q_{\boldsymbol{x}} = Q_{-\boldsymbol{x}}$ で, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}$ と $-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}$ は $Q_{\boldsymbol{x}}$ に関して反対側にあるため A_j の測度を v_j とすれば $u_j(\boldsymbol{x}) + u_j(-\boldsymbol{x}) = v_j$ が成り立つ. 従って $u_j(\boldsymbol{p}) = u_j(-\boldsymbol{p}) = \dfrac{v_j}{2}$ であり, $Q_{\boldsymbol{p}}$ は $\boldsymbol{R}^n$ と平行でないため, $Q_{\boldsymbol{p}}$ と $\boldsymbol{R}^n$ の交わりを P とすればよい. $\square$

定理 4.14 (Lusternik-Schnirelmann の定理) S^n の空でない $n+1$ 個の閉集合 $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$ が, $S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} F_i$ を満たせば, $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$ のなかの少なくとも 1 つは対心点である 2 点を含む.

証明 $\bigcap_{i=1}^{n+1} F_i \neq \emptyset$ のときは, $\boldsymbol{x} \in \bigcap_{i=1}^{n+1} F_i$ をとれば, $-\boldsymbol{x} \in F_i$ であるような F_i が求めるものである. 従って, $\bigcap_{i=1}^{n+1} F_i = \emptyset$ と仮定してよい. $f_i : S^n \to \boldsymbol{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ を $f_i(\boldsymbol{x}) = \inf\{\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| \,|\, \boldsymbol{y} \in F_i\}$ で定めれば f_i は連続である. また F_i は閉集合だから $\boldsymbol{x} \in F_i$ であるためには $f_i(\boldsymbol{x}) = 0$ であることが必要十分であり, 上の仮定から, すべての $\boldsymbol{x} \in S^n$ に対して $\sum_{i=1}^{n+1} f_i(\boldsymbol{x}) \neq 0$ である. そこで, 関数 $s : S^n \to \boldsymbol{R}$ を $s(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(\boldsymbol{x})$ で定め, 写像 $f : S^n \to \boldsymbol{R}^n$ を $f(\boldsymbol{x}) = \left(\dfrac{f_1(\boldsymbol{x})}{s(\boldsymbol{x})}, \dfrac{f_2(\boldsymbol{x})}{s(\boldsymbol{x})}, \ldots, \dfrac{f_n(\boldsymbol{x})}{s(\boldsymbol{x})}\right)$ で定めると, Borsuk の対心点定理から $f(\boldsymbol{x}) = f(-\boldsymbol{x})$ を満たす $\boldsymbol{x} \in S^n$ が存在する. このような $\boldsymbol{x}$ を含む F_i をとれば $f_i(\boldsymbol{x}) = 0$ だから, $i < n+1$ ならば $\dfrac{f_i(-\boldsymbol{x})}{s(-\boldsymbol{x})} = \dfrac{f_i(\boldsymbol{x})}{s(\boldsymbol{x})} = 0$ より $f_i(-\boldsymbol{x}) = 0$ で, $i = n+1$ ならば $\dfrac{f_{n+1}(-\boldsymbol{x})}{s(-\boldsymbol{x})} = 1 - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{f_i(-\boldsymbol{x})}{s(-\boldsymbol{x})} = 1 - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{f_i(\boldsymbol{x})}{s(\boldsymbol{x})} = \dfrac{f_{n+1}(\boldsymbol{x})}{s(\boldsymbol{x})} = 0$ より, $f_{n+1}(-\boldsymbol{x}) = 0$ である. いずれにしても $-\boldsymbol{x} \in F_i$ が成り立つ. $\square$

参考文献

[1] 中岡　稔, 「不動点定理とその周辺」, 岩波書店, 1977.

[2] Spanier, Edwin H., *Algebraic Topology*, Springer Verlag, 1966.