1　ベクトル空間

1.1　ベクトル空間の定義

$\boldsymbol{K}$ は実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ または複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ を表すものとする.

定義 1.1 集合 V に対し, 写像 $\alpha : V \times V \to V$, $\mu : \boldsymbol{K} \times V \to V$ が定義されていて, α による $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の像を $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, μ による $(r, \boldsymbol{x})$ の像を $r\boldsymbol{x}$ で表すとき, 次の条件が満たされるとする.

(1) 結合法則 ： 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$, $r, s \in \boldsymbol{K}$ に対して $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$, $(rs)\boldsymbol{x} = r(s\boldsymbol{x})$ が成り立つ.

(2) 単位元の存在 ： V の要素 $\boldsymbol{0}$ で, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ となるものがある. また, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ である.

(3) 逆元の存在 ： 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $\boldsymbol{x}' \in V$ で, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たすものがある. このような $\boldsymbol{x}'$ を $-\boldsymbol{x}$ で表す.

(4) 交換法則 ： 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対し $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ が成り立つ.

(5) 分配法則 ： 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $r, s \in \boldsymbol{K}$ に対して $r(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = r\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{y}$, $(r+s)\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{x}$ が成り立つ.

このとき, V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 ($\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ の場合は実ベクトル空間, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ の場合は複素ベクトル空間ともいう), V の要素をベクトル, $\boldsymbol{K}$ の要素をスカラーと呼び, 写像 α を加法, μ をスカラー倍という.

定義 1.2 V の部分集合 W が条件 "$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W, r \in \boldsymbol{K} \Rightarrow \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, r\boldsymbol{x} \in W$"を満たすとき, W を V の部分空間という. このとき W は V の加法とスカラー倍により $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間である.

定義 1.3 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする.
1) V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に対し $\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{v}_n$ $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \boldsymbol{K})$ の形のベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の１次結合という.
2) S を V の部分集合とするとき, S の有限個の要素の１次結合になるベクトル全体の集合を $\langle S \rangle$ で表せば, これは V の部分空間であり, S で生成される (張られる) V の部分空間という. とくに $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ の場合, $\langle S \rangle$ を $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ で表す.

1.2　ベクトルの１次独立性

定義 1.4 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする.
V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が条件 "$\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ ならば $\lambda_i = 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$"を満たすとき $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は１次独立であるといい, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が１次独立でないとき, これらは１次従属であるという.

注意 1.5 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ が１次従属ならば, これらにベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ を付け加えた $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ も１次従属である. また $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ のうちに零ベクトルがあれば, これらは１次従属である.

命題 1.6 ベクトル空間 V の n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の１次結合として表される $n+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{n+1}$ は１次従属である.

この結果から次の結果が得られる.

系 1.6.1 ベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が１次独立であり, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ が V を生成していれば $n \leqq m$ である.

1.3 ベクトル空間の基底と次元

定義 1.7 $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V の部分集合 S が V を生成し *(すなわち* $V = \langle S \rangle$*)*, S の任意の有限個のベクトルが１次独立であるとき, S を V の基底という. とくに, S が有限集合の場合, $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が V の基底であるためには, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V を生成する１次独立なベクトルであることが必要十分である.

定理 1.8 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m \in V$ は１次独立なベクトル, $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_l \in V$ は V を生成するとする. $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_l$ のうちからベクトル $\boldsymbol{y}_{i_1}, \boldsymbol{y}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{y}_{i_s}$ を選んで, $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_{i_1}, \boldsymbol{y}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{y}_{i_s}\}$ が V の基底になるようにできる.

系 1.8.1 有限個のベクトルで生成されるベクトル空間には基底が存在する.

(1.6.1) からただちに, 次のことがわかる.

命題 1.9 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ がともに V の基底ならば $n = m$ である.

以後, とくに断らない限り, ベクトル空間はすべて有限個のベクトルで生成されるとする. 上の結果により, ベクトル空間の次元を次のように定義することができる.

定義 1.10 V が n 個のベクトルからなる基底を持つとき, V の次元は n であるといい, V の次元を $\dim V$ で表す.

(1.8) により次のことが分かる.

定理 1.11 $\dim V$ 個の要素をもつ V の部分集合 S が１次独立であるか, または V を生成すれば S は V の基底になる.

定理 1.12 W が有限次元ベクトル空間 V の部分空間ならば $\dim W \leqq \dim V$ であり, 等号が成立するのは $W = V$ の場合に限る.

1.4 部分空間の直和

定義 1.13 $W_1, W_2, \ldots, W_k$ をベクトル空間 V の部分空間とする.

1) V の部分集合 $W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_k$ で生成される部分空間を $W_1, W_2, \ldots, W_k$ の和と呼んで $W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ で表す.

2) $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ であり, 次の条件が満たされるとき, V は $W_1, W_2, \ldots, W_k$ の直和であるといい, このことを $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$ で表す.

$$\text{“}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}\ (\boldsymbol{x}_i \in W_i,\ i = 1, 2, \ldots, k) \text{ ならば } \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \cdots = \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}\text{”}$$

上の 1) の定義を言い替えれば

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_k = \{\boldsymbol{x} \in V \,|\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_k,\ \boldsymbol{w}_j \in W_j\ (j = 1, 2, \ldots, k)\}$$

である.

命題 1.14 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 $W_1, W_2, \ldots, W_k$ を V の部分空間とする. $S_j = \{\boldsymbol{w}_{1j}, \boldsymbol{w}_{2j}, \ldots, \boldsymbol{w}_{d_j j}\}$ を W_j *(*$j = 1, 2, \ldots, k$*)* の基底とするとき, 以下の命題は同値である.

(1) $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$ は V の基底である.

(2) $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ かつ $\dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_k = \dim V$ である.

(3) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$

2　１次写像

2.1　１次写像と行列

定義 2.1 V, W を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする．写像 $f: V \to W$ が任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と $r \in \boldsymbol{K}$ に対して，$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$, $f(r\boldsymbol{x}) = rf(\boldsymbol{x})$ をみたすとき f を１次写像 *(*線形写像*)* という．とくに, $V = W$ の場合，１次写像 $f: V \to V$ を１次変換ともいう．

命題 2.2 $f, f': V \to W$, $g: W \to Z$ を１次写像とする．

1) $f + f, rf: V \to W$ *(*$r \in \boldsymbol{K}$*)* を $(f+f')(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + f'(\boldsymbol{x})$, $(rf)(\boldsymbol{x}) = rf(\boldsymbol{x})$ で定めれば，これらは１次写像である．

2) 合成写像 $g \circ f: V \to Z$, 恒等写像 $id_V: V \to V$ は１次写像である．

3) f が *1* 対 *1* 上への写像ならば，逆写像 $f^{-1}: W \to V$ も１次写像である．

定義 2.3 １次写像 $f: V \to W$ に逆写像 f^{-1} が存在して，この逆写像も１次写像であるとき，f を同型写像という．上の *3)* の結果により f が同型写像であるためには f が *1* 対 *1* 上への写像であることが必要十分である．

命題 2.4 V, W を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とし，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ を W のベクトルとする．このとき，１次写像 $f: V \to W$ で $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$ *(*$j = 1, 2, \ldots, n$*)* を満たすものがただ *1* つ存在する．

定義 2.5 *1)* V, W を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とし，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ をそれぞれ, V, W の基底とする．１次写像 $f: V \to W$ に対し，$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i$ *(*$a_{ij} \in \boldsymbol{K}$*)* とすれば，$m \times n$ 行列 (a_{ij}) を f の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ に関する表現行列という．とくに $V = W$, $\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{w}_j$ *(*$j = 1, 2, \ldots, n$*)* の場合，n 次正方行列 (a_{ij}) を f の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ に関する表現行列という．

2) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n\}$ を V の基底とする．V の恒等写像 $id_V: V \to V$ の基底 $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ に関する表現行列を，基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ から $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n\}$ への基底の変換行列という．

注意 2.6 *1)* A を $\boldsymbol{K}$ の要素を成分にもつ $m \times n$ 行列とすれば，$T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定められる１次写像 $T_A: \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^m$ の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m\}$ に関する表現行列は A に他ならない．

2) 上の定義 *2)* における基底の変換行列を $P = (p_{ij})$ とすれば，各 $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\boldsymbol{v}'_j = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}\boldsymbol{v}_i$ である．

命題 2.7 $f, f': V \to W$, $g: W \to Z$ を１次写像とし，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$, $\{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l\}$ をそれぞれ, V, W, Z の基底とする．

1) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ に関する f, f', $f + f'$, rf *(*$r \in \boldsymbol{K}$*)* の表現行列を $M(f)$, $M(f')$, $M(f + f')$, $M(rf)$ とし，$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$, $\{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l\}$ に関する g の表現行列を $M(g)$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_l\}$ に関する $g \circ f$ の表現行列を $M(g \circ f)$ とすれば，$M(f + f') = M(f) + M(f')$, $M(rf) = rM(f)$, $M(g \circ f) = M(g)M(f)$ が成り立つ．

2) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ に関する V の恒等写像 id_V の表現行列は単位行列 E_n である．

3) f が同型写像ならば *1)* の $M(f)$ は正則行列であり，$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ に関する f^{-1} の表現行列を $M(f^{-1})$ とすれば $M(f^{-1}) = M(f)^{-1}$ である．

命題 2.8 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n\}$ を V の基底，$\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$, $\{\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_m\}$ を W の基底とし，$f: V \to W$ を１次写像とする．f の $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ に関する表現行列を A, $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n\}$, $\{\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_m\}$ に関する表現行列を B, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ から $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n\}$ への V の基底の変換行列を P, $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ から $\{\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_m\}$ への W の基底の変換行列を Q とすれば $B = Q^{-1}AP$ である．とくに $V = W$, $\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{w}_j$, $\boldsymbol{v}'_j = \boldsymbol{w}'_j$ *(*$1 \leqq j \leqq n$*)* ならば $B = P^{-1}AP$ である．

定義 2.9 *5.1.7* 1次写像 $f : V \to W$ に対し, $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ を

$$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x} \in V |\, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}, \qquad \mathrm{Im}\, f = \{\boldsymbol{y} \in V |\, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \text{ を満たす } \boldsymbol{x} \in V \text{ がある }\}$$

により定めれば, これらはそれぞれ V, W の部分空間であるが, $\mathrm{Ker}\, f$ を f の核, $\mathrm{Im}\, f$ を f の像という.

命題 2.10 1次写像 $f : V \to W$ が *1* 対 *1* 写像であるためには $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ であることが必要十分である.

定理 2.11 1次写像 $f : V \to W$ に対し, $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_r\}$ を $\mathrm{Im}\, f$ の基底, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ を $\mathrm{Ker}\, f$ の基底とする. $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_{j-k}$ を満たす $\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{v}_{k+2}, \dots, \boldsymbol{v}_{k+r}$ をとれば, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_{k+r}\}$ は V の基底である. 従って, 次の等式が成り立つ.

$$\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim V$$

定義 2.12 $f : V \to W$ を1次写像とするとき, $\dim \mathrm{Im}\, f$ を f の階数と呼んで, $\mathrm{rank}\, f$ で表す.

命題 2.13 $f : V \to W$ を1次写像とする. $\dim V = \dim W$ のとき, f が *1* 対 *1* 写像であるか, または上への写像ならば f は同型写像である.

証明 f が 1 対 1 写像ならば $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ だから (2.11) により $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim V$ である. 従って (1.12) により $\mathrm{Im}\, f = V$ となるため, f は上への写像でもある. f が上への写像ならば $\mathrm{Im}\, f = V$ だから (2.11) により $\dim \mathrm{Ker}\, f = 0$ である. 従って $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ だから (2.10) により f は 1 対 1 写像でもある. いずれにしても f は同型写像であることがわかる. □

2.2 固有値・固有空間

定義 2.14 *1)* V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間, $f : V \to V$ を1次変換とする. $f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$ を満たす $\lambda \in \boldsymbol{K}$ と零でないベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ が存在するとき, λ を f の固有値, $\boldsymbol{v}$ を λ に対する固有ベクトルという. このとき $\mathrm{Ker}(\lambda id_V - f) = \{\boldsymbol{v} \in V |\, f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}\}$ は V の 0 でない部分空間であるが, これを λ に対する固有空間という.

2) A を $\boldsymbol{K}$ の要素を成分とする n 次正方行列, $T_A : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n$ を A から定まる1次変換とする. A の固有値とは T_A の固有値のこととし, 固有値 λ に対する T_A の固有ベクトル, 固有空間をそれぞれ A の固有ベクトル, 固有空間と呼ぶことにする.

3) $i \neq j$ ならば $d_{ij} = 0$ であるような正方行列 (d_{ij}) を対角行列という. 正方行列 A に対し, $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P が存在するとき, A は対角化可能であるという.

上の定義と (1.14) により次のことがわかる.

命題 2.15 V が1次変換 $f : V \to V$ の固有空間の直和であるためには, f の固有ベクトルからなる V の基底が存在することが必要十分である.

命題 2.16 $\lambda \in \boldsymbol{K}$ が $\boldsymbol{K}$ の要素を成分とする n 次正方行列 A の固有値であるためには $|\lambda E_n - A| = 0$ が成り立つことが必要十分である.

定義 2.17 n 次正方行列 A に対して x を変数とする n 次多項式 $|xE_n - A|$ を A の固有多項式と呼んで $F_A(x)$ で表すことにする. また, n 次方程式 $F_A(x) = 0$ を A の固有方程式という.

P が n 次正則行列ならば $xE_n - P^{-1}AP = P^{-1}(xE_n - A)P$ だから $|xE_n - P^{-1}AP| = |xE_n - A|$ である. 従って, 次の結果が得られる.

命題 2.18 n 次正方行列 A, n 次正則行列 P に対して $F_{P^{-1}AP}(x) = F_A(x)$ が成り立つ.

(2.8) と上の結果から次のことがわかる.

命題 2.19 V を $\boldsymbol{K}$ 上の n 次元ベクトル空間, $f : V \to V$ を１次変換とし, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n\}$ を V の基底とする. A, B をそれぞれ $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n\}$ に関する f の表現行列とすると $F_A(x) = F_B(x)$ である.

この結果により次のように定義できる.

定義 2.20 V を $\boldsymbol{K}$ 上の n 次元ベクトル空間, $f : V \to V$ を１次変換とし, $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ を V の基底, A をこの基底に関する f の表現行列とする. このとき $F_A(x)$ を f の固有多項式といい, $F_f(x)$ で表す. また x に関する n 次方程式 $F_f(x) = 0$ を f の固有方程式という.

命題 2.21 V を $\boldsymbol{K}$ 上の n 次元ベクトル空間, $f : V \to V$ を１次変換とする. $\lambda \in \boldsymbol{K}$ が f の固有値になるための必要十分条件は $F_f(\lambda) = 0$ が成り立つことである. 従って, f の固有値の全体は x に関する n 次方程式 $F_f(x) = 0$ の $\boldsymbol{K}$ に属する解の全体に一致して, f の異なる固有値は高々 n 個である.

証明 $\boldsymbol{x} \in V$ に対し, $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{v}_j$ とし, x_j を第 j 成分に持つ $\boldsymbol{K}^n$ のベクトルを $\boldsymbol{p}$ とすれば

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \boldsymbol{v}_i$$

より $f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$ が成り立つためには $A\boldsymbol{p} = \lambda \boldsymbol{p}$ が成り立つことが必要十分である. また, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ であるためには $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ であることが必要十分だから, $\lambda \in \boldsymbol{K}$ が f の固有値になるためには $\lambda \in \boldsymbol{K}$ が A の固有値であることが必要十分である. 従って (2.16) により結果が得られる. □

注意 2.22 「複素数を係数とする n 次方程式は, 複素数の範囲に解を持つ.」という「代数学の基本定理」が成り立つため, 上の結果から $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ の場合は１次写像 $f : V \to V$ の固有方程式の解はすべて f の固有値である.

定理 2.23 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ を１次変換 $f : V \to V$ の相異なる固有値, W_j を λ_j に対する固有空間とすると,

"$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ $(\boldsymbol{x}_i \in W_i,\ i = 1, 2, \ldots, k)$ ならば $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \cdots = \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$"

が成り立つ. 従って $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ ならば $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$ である.

命題 2.24 V を $\boldsymbol{K}$ 上の n 次元ベクトル空間, $f : V \to V$ を１次変換とし, $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ を V の基底, A をこの基底に関する f の表現行列とする. V が f の固有空間の直和になるためには A が対角化可能であることが必要十分である.

2.3 不変部分空間

定義 2.25 $f : V \to V$ を１次変換とする. V の部分空間 W が $f(W) \subset W$ を満たすとき, W を f の不変部分空間という.

命題 2.26 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間, $f : V \to V$ を１次変換とする.

1) W が f の不変部分空間であるとき, $\bar{f} : W \to W$ を $\bar{f}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ で定めて, V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ が W の基底になるようにとる. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ に関する $\bar{f}$ の表現行列を A とすれば, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ に関する f の表現行列は $\left(\begin{smallmatrix} A & C \\ O & B \end{smallmatrix}\right)$ という形になる.

2) W_j $(1 \leqq j \leqq m)$ が f の不変部分空間であり, $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$ が成り立つとする. $\bar{f}_j : W_j \to W_j$ を $\bar{f}_j(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ で定め, W_j の基底 $\{\boldsymbol{v}_{k_{j-1}+1}, \boldsymbol{v}_{k_{j-1}+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{k_j}\}$ $(0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_d = n)$ に関する $\bar{f}_j$ の表現行列を A_j とすれば, V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ に関する f の表現行列は下のようになる.

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \Large 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \Large 0 & & & A_m \end{pmatrix}$$

命題 2.27 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間, $f:V\to V$ を１次変換とする．W が f の不変部分空間であるとき, $\bar{f}:W\to W$ を $\bar{f}(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})$ で定めれば, f の固有多項式は $\bar{f}$ の固有多項式で割り切れる．

証明 V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ を (2.26) のようにとると, (2.26) から

$$F_f(x)=\begin{vmatrix} xE_k-A & -C \\ O & xE_{n-k}-B \end{vmatrix}=|xE_k-A||xE_{n-k}-B|=F_A(x)F_B(x)=F_{\bar{f}}(x)F_B(x).$$

□

3 内積と正規行列の対角化

3.1 内積

定義 3.1 V を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とし, 写像 $B:V\times V\to\boldsymbol{K}$ は任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in V$, $\lambda\in\boldsymbol{K}(\subset\boldsymbol{C})$ に対して, 次の性質 *(1)〜(4)* を満たすとする．

(1) $B(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})=B(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})+B(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})$, $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2)=B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)+B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2)$

(2) $B(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\lambda B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $B(\boldsymbol{x},\lambda\boldsymbol{y})=\bar{\lambda}B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$

(3) $B(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=\overline{B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}$

(4) $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{R}$ であり, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ ならば $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})>0$ である．

このとき 写像 B を V の内積, $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積といい, 内積の定義されたベクトル空間を計量ベクトル空間と呼ぶ．

定義 3.2 *1)* V, W をそれぞれ内積 B_V, B_W が定義されている計量ベクトル空間とする．１次写像 $f:V\to W$ が任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ に対して $B_V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=B_W(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))$ を満たすとき f は内積を保つといい, さらに f が同型写像ならば f を計量同型写像という．２つの計量ベクトル空間の間に計量同型写像が存在するとき, これらの計量ベクトル空間は計量同型であるという．

2) V を B を内積にもつ計量ベクトル空間とする．$\boldsymbol{x}\in V$ に対し, $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$ とおいて, $\|\boldsymbol{x}\|$ をベクトル $\boldsymbol{x}$ の「長さ」または「ノルム」という．長さが１のベクトルを単位ベクトルという．また, $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ を満たす２つのベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ は直交するといい, V の部分集合 S, T に対して S のベクトルと T のベクトルが常に直交するとき S と T は直交するという．

以後, 計量ベクトル空間における２つのベクトルの内積は $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ と略記する．

例 3.3 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{K}^n$ に対し $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の第 j 成分をそれぞれ x_j, y_j とするとき $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{j=1}^{n}x_j\bar{y}_j$ で $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を定めればこれは $\boldsymbol{K}^n$ の内積である．以後, 特に断らない限り, この内積により $\boldsymbol{K}^n$ を計量ベクトル空間とみなす．

命題 3.4 $f:V\to W$ を計量ベクトル空間の間の１次写像とする．f が内積を保つことと, 任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して $\|f(\boldsymbol{x})\|=\|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つことは同値であり, このとき f は１対１写像である．

証明 任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して $\|f(\boldsymbol{x})\|=\|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つとすれば, $\|f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|^2=\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2$ であり, この左辺は $\|f(\boldsymbol{x})\|^2+(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))+\overline{(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))}+\|f(\boldsymbol{y})\|^2$ に等しく, 右辺は $\|\boldsymbol{x}\|^2+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}+\|\boldsymbol{y}\|^2$ に等しいため, $(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))+\overline{(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}$ が成り立つ．$\boldsymbol{y}$ を $i\boldsymbol{y}$ で置き換え, 両辺を i で割れば $(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))-\overline{(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}$ となり, これと上式を辺々たして２で割れば $(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を得る．逆は明らかであり, 上の結果から f が内積を保てば $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{0}$ に限るため f は１対１写像である． □

3.2 正規直交基底

定義 3.5 計量ベクトル空間 V の零でないベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ が "$i \neq j$ ならば $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = 0$" を満たすときこれらを直交系といい, さらに各ベクトルが単位ベクトルのときこれらを正規直交系という. 直交系, 正規直交系が V の基底であるとき, それぞれ直交基底, 正規直交基底という.

命題 3.6 V を計量ベクトル空間とする.

1) $c \in \boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $\|c\boldsymbol{x}\| = |c|\|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つ. 従って $\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\boldsymbol{x}$ は単位ベクトルである. これより, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が V の直交系 *(*直交基底*)* ならば $\frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1, \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_2\|}\boldsymbol{v}_2, \ldots, \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_k\|}\boldsymbol{v}_k$ は V の正規直交系 *(*正規直交基底*)* である.

2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が V の直交系で, $\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \boldsymbol{v}_j$ ならば $\lambda_j = \frac{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}_j)}{\|\boldsymbol{v}_j\|^2}$ である. 従って, 直交系は１次独立である.

3) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が V の直交基底ならば任意の $\boldsymbol{y} \in V$ は $\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}_j)}{\|\boldsymbol{v}_j\|^2}\boldsymbol{v}_j$ と表せる. とくに $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が正規直交基底ならば $\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}_j)\boldsymbol{v}_j$ である.

定理 3.7 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を計量ベクトル空間 V の１次独立なベクトルとすると, V の正規直交系 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ で次の条件を満たすものが存在する.

(∗) 各 $j = 1, 2, \ldots, n$ に対し, $a_{ij} \in \boldsymbol{K}$ *(*$i = 1, 2, \ldots, j-1$*)* と正の実数 a_{jj} で $\boldsymbol{w}_j = a_{1j}\boldsymbol{v}_1 + a_{2j}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{jj}\boldsymbol{v}_j$ を満たすものがある.

さらに $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が V の基底ならば $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$ は V の正規直交基底である.

証明 $\boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1$ とし, 正規直交系 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_{k-1}$ が定まり, 各 $j = 1, 2, \ldots, k-1$ に対して $\boldsymbol{w}_j = a_{1j}\boldsymbol{v}_1 + a_{2j}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{jj}\boldsymbol{v}_j$ $(a_{ij} \in \boldsymbol{K})$ の形に表せたとする. $\boldsymbol{w}'_k = -\sum_{i=1}^{k-1} (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_i)\boldsymbol{w}_i + \boldsymbol{v}_k$ とおけば, $\boldsymbol{w}_i$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_i$ の１次結合であることから $\boldsymbol{w}'_k = \sum_{i=1}^{k-1} a'_{ik}\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_k$ の形になる. 従って $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の１次独立性により $\boldsymbol{w}'_k \neq \boldsymbol{0}$ である. そこで, $\boldsymbol{w}_k = \frac{1}{\|\boldsymbol{w}'_k\|}\boldsymbol{w}'_k$ によって $\boldsymbol{w}_k$ を定めれば, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ は正規直交系であり, $\boldsymbol{w}_j = a_{1j}\boldsymbol{v}_1 + a_{2j}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{jj}\boldsymbol{v}_j$ $(a_{jj} = \frac{1}{\|\boldsymbol{w}'_k\|})$ の形になる. $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ は (3.6) の 2) により１次独立だから $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が V の基底ならば (1.11) により $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$ は V の基底である. □

系 3.7.1 計量ベクトル空間には正規直交基底が存在する.

命題 3.8 $f : V \to W$ を１次写像, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の正規直交基底とする. f が内積を保つためには, $\{f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ が W の正規直交系であることが必要十分である.

証明 f が内積を保つためには, $\{f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ が W の正規直交系になることは明らかである. 逆に $\{f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ が W の正規直交系であるとして $\boldsymbol{x} \in V$ を任意にとる. $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{v}_j$ とすれば $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が正規直交系であることから $\|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$. また $\{f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ が正規直交系で $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(\boldsymbol{v}_j)$ より $\|f(\boldsymbol{x})\|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$ となる. 従って $\|f(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$ となるため (3.4) から f は内積を保つ.□

定義 3.9 V を計量ベクトル空間, W を V の部分空間とする. $W^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in V \,|\, \boldsymbol{y} \in W \Rightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}\}$ とおくと $W^{\perp}$ は V の部分空間であり, これを W の直交補空間という.

命題 3.10 V を計量ベクトル空間, W を V の部分空間とすれば $V = W \oplus W^{\perp}$, $(W^{\perp})^{\perp} = W$ が成り立つ.

3.3 随伴写像

補題 3.11 V を計量ベクトル空間, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ とする. 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$ ならば $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ である.

証明 仮定から任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 0$ だから, とくに $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ とすれば $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ がわかる. □

定理 3.12 V, W を計量ベクトル空間, $f : V \to W$ を1次写像とすれば, 1次写像 $f^* : W \to V$ で, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{y} \in W$ に対して $(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, f^*(\boldsymbol{y}))$ が成り立つものがただ1つ存在する.

証明 V, W の正規直交基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ をとり, これらに関する f の表現行列を $A = (a_{ij})$ とする. $f^* : W \to V$ を $f^*(\boldsymbol{w}_j) = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ji} \boldsymbol{v}_i$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ を満たす1次写像とする (2.4). このとき, $\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{y} \in W$ に対し, $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{m} y_j \boldsymbol{w}_j$ とすると, 次の等式から $(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, f^*(\boldsymbol{y}))$ である.

$(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\sum_{i=1}^{n} x_i f(\boldsymbol{v}_i), \sum_{j=1}^{m} y_j \boldsymbol{w}_j) = (\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ki} x_i \boldsymbol{w}_j, \sum_{j=1}^{m} y_j \boldsymbol{w}_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ji} x_i \bar{y}_j,$

$(\boldsymbol{x}, f^*(\boldsymbol{y})) = (\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^{m} y_j f^*(\boldsymbol{w}_j)) = (\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ji} y_j \boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ji} x_i \bar{y}_j$

$g : W \to V$ も任意の $\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{y} \in W$ に対して $(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{y}))$ を満たすとすれば $(\boldsymbol{x}, f^*(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{y}))$ が任意の $\boldsymbol{x}$ に対して成り立つから (3.11) により $f^*(\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{y})$ である. 従って $f^* = g$ である. □

定義 3.13 *1)* 上の定理の1次写像 $f^* : W \to V$ を f の随伴写像という. *2)* $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対し, $\bar{a}_{ji}$ を (i, j)-成分にもつ $n \times m$ 行列を A の共役転置行列と呼んで, A^* で表す.

(3.12) の証明から次のことがわかる.

命題 3.14 V, W を計量ベクトル空間, $f : V \to W$ を1次写像とする. V, W の正規直交基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ に関する f の表現行列を A とすれば, $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ に関する f^* の表現行列は A^* である.

とくに $V = \boldsymbol{K}^n$, $W = \boldsymbol{K}^m$ の場合を考えれば (2.6) の 1) により $(T_A)^* = T_{A^*}$ である.

命題 3.15 $f, f' : V \to W$, $g : W \to Z$ を1次写像とすると, $(f + f')^* = f^* + f'^*$, $(rf)^* = \bar{r} f^*$ $(r \in \boldsymbol{K})$, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, $(f^*)^* = f$ が成り立つ.

証明 $\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{y} \in W$, $\boldsymbol{z} \in Z$ を任意にとると以下の等式と, 随伴写像の一意性から結果得られる.

$((f + f')(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) + (f'(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, f^*(\boldsymbol{y})) + (\boldsymbol{x}, f'^*(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, (f^* + f'^*)(\boldsymbol{y}))$

$((rf)(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = r(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = r(\boldsymbol{x}, f^*(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, (\bar{r} f^*)(\boldsymbol{y}))$

$((g \circ f)(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{z}) = (g(f(\boldsymbol{x})), \boldsymbol{z}) = (f(\boldsymbol{x}), g^*(\boldsymbol{z})) = (\boldsymbol{x}, f^*(g^*(\boldsymbol{z})))$

$(f^*(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}) = \overline{(\boldsymbol{x}, f^*(\boldsymbol{y}))} = \overline{(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})} = (\boldsymbol{y}, f(\boldsymbol{x}))$ □

命題 3.16 $f : V \to W$ を1次写像とする.

1) f が内積を保つためには $f^* \circ f = id_V$ が成り立つことが必要十分である.

2) $\dim V = \dim W$ の場合, $f^* \circ f = id_V$ または $f \circ f^* = id_W$ のいずれかが成り立てば f は計量同型写像で, $f^* = f^{-1}$ である.

証明 1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して, $(\boldsymbol{x}, (f^* \circ f)(\boldsymbol{y})) = (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))$ だから $f^* \circ f = id_V$ が成り立てば, f は内積を保ち, 逆に f が内積を保てば $(\boldsymbol{x}, (f^* \circ f)(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して成り立つため, (3.11) により $(f^* \circ f)(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}$ が任意の $\boldsymbol{y} \in V$ に対して成り立つ.

2) $f^* \circ f = id_V$ が成り立つとして, $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$ とすれば $\boldsymbol{x} = f^* \circ f(\boldsymbol{x}) = f^*(f(\boldsymbol{x})) = f^*(f(\boldsymbol{y})) = f^* \circ f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}$ だから f は1対1写像である. 従って (2.13) により f は同型写像であり, 1) により f は内積を保つため f は計量同型写像である. また, $f^* \circ f = id_V = f^{-1} \circ f$ だから $f^* = f^{-1}$ を得る.

$f \circ f^* = id_W$ が成り立てば, 任意の $\boldsymbol{w} \in W$ に対し. $f(f^*(\boldsymbol{w})) = f \circ f^*(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}$ だから f は上への写像である. 従って (2.13) により f は同型写像であり, $f \circ f^* = id_W = f \circ f^{-1}$ だから $f^* = f^{-1}$ を得る. よって $f^* \circ f = f^{-1} \circ f = id_V$ だから 1) により f は内積を保つ. □

命題 3.17 W が計量ベクトル空間 V の１次変換 f の不変部分空間ならば W の直交補空間 $W^{\perp}$ は f の随伴写像の f^* の不変部分空間である.

証明 $\boldsymbol{x} \in W^{\perp}$, $\boldsymbol{y} \in W$ に対し, $f(\boldsymbol{y}) \in W$ だから上の結果から $(f^*(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, (f^*)^*(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{y})) = 0$. 従って $f^*(\boldsymbol{x}) \in W^{\perp}$ である. □

3.4 正規写像

定義 3.18 $f \circ f^* = f^* \circ f$ を満たす１次変換 $f : V \to V$ を正規写像という.

正規写像の定義と (3.16) の 2) から次の結果は明らかである.

命題 3.19 １次変換 $f : V \to V$ が $f^* = f$, $f^* = -f$, $f^* \circ f = id_V$, $f \circ f^* = id_V$ のいずれかを満たせば f は正規写像である.

定義 3.20 A を正方行列とする. $AA^* = A^*A$ が成り立つとき, A を正規行列, $A^* = A$ が成り立つとき, A をエルミート行列, $A^* = -A$ が成り立つとき, A を歪エルミート行列, $A^* = A^{-1}$ が成り立つとき, A をユニタリー行列という.

命題 3.21 A を $\boldsymbol{K}$ の要素を成分に持つ n 次正方行列とするとき, A がユニタリー行列であるためには, A の列ベクトル $A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \ldots, A\boldsymbol{e}_n$ が $\boldsymbol{K}^n$ の正規直交系であることが必要十分である.

証明 $A = (a_{ij})$ とすれば A^*A の (j,i) 成分は $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\bar{a}_{kj} = (A\boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{e}_j)$ であることから, $A^*A = E_n$ であるためには $A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \ldots, A\boldsymbol{e}_n$ が $\boldsymbol{K}^n$ の正規直交系であることが必要十分である. □

命題 3.22 f を１次変換とする. *1)* $f^* = f$ ならば f の固有方程式の解はすべて実数である.
2) $f^* = -f$ ならば f の固有方程式の解はすべて純虚数である.
3) $f^* = f^{-1}$ ならば f の固有方程式の解はすべて絶対値 *1* の複素数である.

証明 V の正規直交基底を 1 組選び, その基底に関する f の表現行列を A とすると, 同じ基底に関する f^* の表現行列は (3.14) により A^* である. $\lambda \in \boldsymbol{C}$ を f の固有方程式の解として, A を複素行列とみなせば, λ は A の固有値である. そこで λ に対する A の固有ベクトル $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{C}^n$ $(n = \dim V)$ を 1 つ選ぶ.

1) 仮定から $A^* = A$ で $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ だから $\lambda(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\lambda\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, A^*\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \lambda\boldsymbol{v}) = \bar{\lambda}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ となるため $(\lambda - \bar{\lambda})(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$. $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ より $\lambda - \bar{\lambda} = 0$, 従って λ は実数である.

2) 仮定から $A^* = -A$ で $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ だから $\lambda(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\lambda\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, A^*\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, -A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, -\lambda\boldsymbol{v}) = -\bar{\lambda}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ となるため $(\lambda + \bar{\lambda})(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$. $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ より $\lambda + \bar{\lambda} = 0$, 従って λ は純虚数である.

3) 仮定から $A^*A = E_n$ で $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ だから $|\lambda|^2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\lambda\boldsymbol{v}, \lambda\boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, A^*A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ となるため $(|\lambda|^2 - 1)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$. $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ より $|\lambda|^2 = 1$, 従って λ は絶対値 1 の複素数である. □

命題 3.23 １次変換 $f : V \to V$ の固有ベクトルからなる V の正規直交基底が存在すれば, f は正規写像である.

証明 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を f の固有ベクトルからなる V の正規直交基底とし, $f(\boldsymbol{v}_j) = \lambda_j\boldsymbol{v}_j$ とすれば (3.14) から $f^*(\boldsymbol{v}_j) = \bar{\lambda}_j\boldsymbol{v}_j$ である. 従って $(f^* \circ f)(\boldsymbol{v}_j) = \lambda_j f^*(\boldsymbol{v}_j) = |\lambda_j|^2\boldsymbol{v}_j$, $(f \circ f^*)(\boldsymbol{v}_j) = \bar{\lambda}_j f(\boldsymbol{v}_j) = |\lambda_j|^2\boldsymbol{v}_j$ だから $(f^* \circ f)(\boldsymbol{v}_j) = (f \circ f^*)(\boldsymbol{v}_j)$ が $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して成り立ち, (2.4) により, $f^* \circ f = f \circ f^*$ である. □

補題 3.24 λ を正規写像 $f : V \to V$ の固有値, $\boldsymbol{v}$ を λ に関する f の固有ベクトルとすれば $f^*(\boldsymbol{v}) = \bar{\lambda}\boldsymbol{v}$ である.

証明 $\boldsymbol{x} \in V$ に対し, $(\boldsymbol{x}, f^*(\boldsymbol{v}) - \bar{\lambda}\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{x}, f^*(\boldsymbol{v})) - (\boldsymbol{x}, \bar{\lambda}\boldsymbol{v}) = (f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v}) - \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = (f(\boldsymbol{x}) - \lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ より, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$ とすると, $f(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$ だから $(\boldsymbol{v}, f^*(\boldsymbol{v}) - \bar{\lambda}\boldsymbol{v}) = 0$. $\boldsymbol{x} = f^*(\boldsymbol{v})$ とすると, $(f^*(\boldsymbol{v}), f^*(\boldsymbol{v}) - \bar{\lambda}\boldsymbol{v}) = (f(f^*(\boldsymbol{v})) - \lambda f^*(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}) = (f^*(f(\boldsymbol{v})) - \lambda f^*(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}) = (f^*(\lambda\boldsymbol{v}) - \lambda f^*(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}) = 0$ だから上で得た式とから $(f^*(\boldsymbol{v}) - \bar{\lambda}\boldsymbol{v}, f^*(\boldsymbol{v}) - \bar{\lambda}\boldsymbol{v}) = 0$. □

命題 3.25 *$f : V \to V$ を正規写像とする. λ, μ が f の相異なる固有値で $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ をそれぞれ λ, μ に対する f の固有ベクトルとすれば $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ である.*

証明 (3.24) により $f^*(\boldsymbol{w}) = \bar{\mu}\boldsymbol{w}$ だから $\lambda(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\lambda\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (f(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}, f^*(\boldsymbol{w})) = (\boldsymbol{v}, \bar{\mu}\boldsymbol{w}) = \mu(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ である. 従って $(\lambda - \mu)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ で $\lambda \neq \mu$ だから $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ である. □

補題 3.26 *$f : V \to V$ を正規写像, $\boldsymbol{v}$ を f の固有ベクトルとすれば $\boldsymbol{v}$ で生成される部分空間 $\langle \boldsymbol{v} \rangle$ の直交補空間 $\langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp$ は f の不変部分空間である.*

証明 $\langle \boldsymbol{v} \rangle$ は (3.24) により f^* の不変部分空間だから, (3.17) と (3.15) により $\langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp$ は $(f^*)^* = f$ の不変部分空間である. □

定理 3.27 *V を $\boldsymbol{K}$ 上の計量ベクトル空間とする. $f : V \to V$ は正規写像で, f の固有多項式の解がすべて $\boldsymbol{K}$ に属しているとき f の固有ベクトルからなる V の正規直交基底が存在する.*

証明 V の次元に関する帰納法で示す. $\dim V = 1$ のときは主張は明らかに成り立つ. $\dim V = n - 1$ のときに主張が成り立つと仮定して $\dim V = n$ の場合を考える. λ を f の固有多項式の解とすれば (2.21) により λ は f の固有値である. λ に対する f の固有ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とすると (3.26) により $\langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp$ は f の不変部分空間である. $\bar{f} : \langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp \to \langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp$ を $\bar{f}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ で定めれば (2.27) により $\bar{f}$ の固有多項式の解はすべて $\boldsymbol{K}$ に属する. (3.10) から $V = \langle \boldsymbol{v} \rangle \oplus \langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp$ であるため (1.14) により $\dim \langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp = n - 1$. 従って $\bar{f}$ に対して帰納法の仮定が適用できるため $\bar{f}$ の固有ベクトルからなる $\dim \langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が存在する. そこで $\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|}\boldsymbol{v}$ とおけば, (1.14) から $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は f の固有ベクトルからなる V の基底であり, $\boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp = \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle^\perp$ だから $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は正規直交系である. □

系 3.27.1 *A を $\boldsymbol{K}$ の要素を成分とする n 次正規行列とし, A の固有多項式の解がすべて $\boldsymbol{K}$ に属していれば, A はユニタリー行列で対角化可能である.*

証明 仮定から $T_A \circ (T_A)^* = T_A \circ T_{A^*} = T_{AA^*} = T_{A^*A} = T_{A^*} \circ T_A = (T_A)^* \circ T_A$ だから $T_A : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n$ は正規写像である. 従って (3.27) により T_A の固有ベクトルからなる $\boldsymbol{K}^n$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が存在する. このとき, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ に関する T_A の表現行列は対角行列であることに注意する. 基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ から $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ への変換行列を P とすれば $P = (\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2 \cdots \boldsymbol{v}_n)$ であるため (3.21) により P はユニタリー行列である. $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ に関する T_A の表現行列は A だから (2.8) により $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ に関する T_A の表現行列は $P^{-1}AP$ となるため, $P^{-1}AP$ は対角行列である. □

命題 3.28 *$f : V \to V$ を正規写像とする.*
1) f の固有方程式の解がすべて実数ならば $f^* = f$ である.
2) $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ であり f の固有値がすべて純虚数ならば $f^* = -f$ である.
3) $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ であり f の固有値がすべて絶対値 1 の複素数ならば $f^* = f^{-1}$ である.

証明 いずれの場合でも (2.21), (2.22), (3.27) から f の固有ベクトルからなる V の正規直交基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が存在する. ここで, $f(\boldsymbol{v}_j) = \lambda_j \boldsymbol{v}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ とする.
1) (3.14) から $f^*(\boldsymbol{v}_j) = \bar{\lambda}_j \boldsymbol{v}_j = \lambda_j \boldsymbol{v}_j = f(\boldsymbol{v}_j)$ となるため (2.4) により $f^* = f$ である.
2) (3.14) から $f^*(\boldsymbol{v}_j) = \bar{\lambda}_j \boldsymbol{v}_j = -\lambda_j \boldsymbol{v}_j = -f(\boldsymbol{v}_j)$ となるため (2.4) により $f^* = -f$ である.
3) (3.14) から $f^* \circ f(\boldsymbol{v}_j) = f^*(f(\boldsymbol{v}_j)) = f^*(\lambda_j \boldsymbol{v}_j) = \lambda_j f^*(\boldsymbol{v}_j) = |\lambda_j|^2 \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_j = id_V(\boldsymbol{v}_j)$ となるため (2.4) により $f^* \circ f = id_V$ である. 同様にして $f \circ f^* = id_V$ も示されるため, $f^* = f^{-1}$ である. □

4　２次形式

4.1　２次形式の定義

n 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し, ${}^t\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}$ を $n\times 1$ 行列とみなしたときの転置行列とする.

定義 4.1 *A を実数を成分にもつ n 次対称行列とする. $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を対応させる関数 $Q_A:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ を A を係数行列とする (実) 2次形式という.*

$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ の第 j 成分を x_j とし, A の (i,j)-成分を a_{ij} とすれば, $a_{ji}=a_{ij}$ より

$$Q_A(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+\sum_{1\leqq i<j\leqq n}2a_{ij}x_ix_j\quad\cdots(*)$$

である. 従って Q_A は $x_1,x_2,\ldots,x_n$ の「2次関数」であるといえる. 逆に, $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ を実数を係数とする2次の同次式とすると, $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{1\leqq i\leqq j\leqq n}c_{ij}x_ix_j$ の形に表されるが, c_{ii} を (i,i)-成分, $\frac{c_{ij}}{2}$ $(i<j)$ を (i,j)-成分と (i,j)-成分にもつ n 次対称行列を A とすれば $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)=Q_A(\boldsymbol{x})$ である.

命題 4.2 *A, B を n 次実対称行列とする. $Q_A=Q_B:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ (すなわち, すべての $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して $Q_A(\boldsymbol{x})=Q_B(\boldsymbol{x})$) ならば $A=B$ である.*

証明 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ とし, $\boldsymbol{e}_j\in\boldsymbol{R}^n$ の基本ベクトルとすれば, $Q_A(\boldsymbol{e}_i)={}^t\boldsymbol{e}_iA\boldsymbol{e}_i=a_{ii}$, $Q_A(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)={}^t(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)A(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)={}^t\boldsymbol{e}_iA\boldsymbol{e}_i+{}^t\boldsymbol{e}_iA\boldsymbol{e}_j+{}^t\boldsymbol{e}_jA\boldsymbol{e}_i+{}^t\boldsymbol{e}_jA\boldsymbol{e}_j=a_{ii}+a_{ij}+a_{ji}+a_{jj}=a_{ii}+2a_{ij}+a_{jj}$ であり, 同様に $Q_B(\boldsymbol{e}_i)=b_{ii}$, $Q_B(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)=b_{ii}+2b_{ij}+b_{jj}$ を得る. 仮定からすべての $1\leqq i,j\leqq n$ に対して $Q_A(\boldsymbol{e}_i)=Q_B(\boldsymbol{e}_i)$ $Q_A(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)=Q_B(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)$ だから $a_{ii}=b_{ii}$, $a_{ii}+2a_{ij}+a_{jj}=b_{ii}+2b_{ij}+b_{jj}$ が成り立つ. これらの式から $a_{ij}=b_{ij}$ が得られる. □

次の命題は明らかである.

命題 4.3 *$r\in\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し, $Q_A(r\boldsymbol{x})=r^2Q_A(\boldsymbol{x})$.*

4.2　２次形式の符号数

まず, 次の結果が成り立つことに注意する.

命題 4.4 *A が零行列でないならば 2次形式 $Q_A:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ に関して以下のいずれか 1つだけが成り立つ.*

1) $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ ならば $Q_A(\boldsymbol{x})>0$ である.

2) $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ ならば $Q_A(\boldsymbol{x})<0$ である.

3) すべての $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し, $Q_A(\boldsymbol{x})\geqq 0$ であり, $Q_A(\boldsymbol{a})=0$ となる $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ がある.

4) すべての $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対し, $Q_A(\boldsymbol{x})\leqq 0$ であり, $Q_A(\boldsymbol{a})=0$ となる $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ がある.

5) $Q_A(\boldsymbol{a})>0$ となる $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{R}^n$ と $Q_A(\boldsymbol{b})<0$ となる $\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^n$ がある.

定義 4.5 *実対称行列 A が上の命題の 1) を満たすとき, A を正値対称行列といい, 2) を満たすとき, A を負値対称行列という. また, 5) を満たすとき A は不定符号であるという.*

命題 4.6 *A を n 次対称行列, P を n 次正方行列とするとき, 任意の $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して $Q_A(P\boldsymbol{y})=Q_{{}^tPAP}(\boldsymbol{y})$ が成り立つ.*

証明 $Q_A(P\boldsymbol{y}) = {}^t(P\boldsymbol{y})A(P\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{y}({}^tPAP)\boldsymbol{y} = Q_{{}^tPAP}(\boldsymbol{y})$. □

R_{ij} $(1 \leqq i, j \leqq n)$ を n 次単位行列 E_n の第 i 行と第 j 行を入れ替えて得られる行列とすると $R_{ij}^{-1} = {}^tR_{ij} = R_{ij}$ であり, 次の結果は容易に示される.

補題 4.7 A を n 次正方行列とするとき, $R_{ij}A$ は A の第 i 行と第 j 行を入れ替えて得られる行列, AR_{ij} は A の第 i 列と第 j 列を入れ替えて得られる行列である. 従って $R_{ij}AR_{ij}$ の対角成分は A の対角成分の i 番目と j 番目を入れ替えたものである.

2 次形式 Q_A は「平方完成」できる. すなわち, 次の定理が成り立つ.

定理 4.8 A を n 次実対称行列とするとき, 正則行列 P で $P^{-1}\boldsymbol{x}$ の第 j 成分を y_j とすれば,

$$Q_A(\boldsymbol{x}) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2 \qquad (0 \leqq p \leqq n,\ 0 \leqq q \leqq n-p)$$

という形になるものが存在する.

証明 まず, 正則行列 T で $T^{-1}\boldsymbol{x}$ の第 j 成分を y_j とすれば, $Q_A(\boldsymbol{x}) = c_1y_1^2 + \cdots + c_ny_n^2$ の形になるものがあることを n による帰納法で示す. $A = O$ ならば主張は明らかだから, $A \neq O$ と仮定する. A の (i,j)-成分を a_{ij} とする. まず $n=1$ のときは主張は明らかであり, A が $n-1$ 次対称行列のときに主張が成り立つと仮定する.

(1) $a_{kk} \neq 0$ となる k がある場合;
$\boldsymbol{u} = R_{kn}^{-1}\boldsymbol{x}$ とおいて, $\boldsymbol{u}$ の第 j 成分を u_j とすれば, (4.6) から $Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_A(R_{kn}\boldsymbol{u}) = Q_{{}^tR_{kn}AR_{kn}}(\boldsymbol{u})$ である. ${}^tR_{kn}AR_{kn} = R_{kn}AR_{kn} = (b_{ij})$ とすれば, (4.7) から $b_{nn} = a_{kk} \neq 0$ であり, ${}^tR_{kn}AR_{kn}$ は対称行列であることに注意する. そこで $b_{in} = b_{ni}$ を用いて, 以下のように u_n に関して平方完成する.

$$\begin{aligned} Q_A(\boldsymbol{x}) &= Q_{{}^tR_{kn}AR_{kn}}(\boldsymbol{u}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}u_iu_j = \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}u_iu_j + b_{nn}u_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2b_{in}u_iu_n \\ &= \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}u_iu_j + b_{nn}\left(u_n + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_{in}}{b_{nn}}u_i\right)^2 - b_{nn}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_{in}}{b_{nn}}u_i\right)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{n-1}\left(b_{ij} - \frac{b_{in}b_{jn}}{b_{nn}}\right)u_iu_j + b_{nn}\left(u_n + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_{in}}{b_{nn}}u_i\right)^2 \quad \cdots \ (i) \end{aligned}$$

従って $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \text{\huge 0} & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ \text{\huge 0} & & 1 & 0 \\ \frac{b_{1n}}{b_{nn}} & \cdots & \frac{b_{n-1\,n}}{b_{nn}} & 1 \end{pmatrix}$ (P_1 の (n,i)-成分 $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ は $\frac{b_{in}}{b_{nn}}$) とおき, $\boldsymbol{v} = P_1\boldsymbol{u}$ とおいて $\boldsymbol{v}$ の第 i 成分を v_i とすれば P_1 は正則行列であり, $v_i = u_i$ $(i < n)$, $v_n = u_n + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_{in}}{b_{nn}}u_i$ が成り立つ. このとき $\boldsymbol{v} = P_1R_{kn}^{-1}\boldsymbol{x}$ であり, (i) から

$$Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_A(R_{kn}P_1^{-1}\boldsymbol{v}) = Q_{{}^tR_{kn}AR_{kn}}(P_1^{-1}\boldsymbol{v}) = \sum_{i,j=1}^{n-1}\left(b_{ij} - \frac{b_{in}b_{jn}}{b_{nn}}\right)v_iv_j + b_{nn}v_n^2 \quad \cdots \ (ii)$$

を得る. さらに $b_{ij} - \frac{b_{in}b_{jn}}{b_{nn}}$ を (i,j)-成分にもつ $n-1$ 次対称行列を B として, $C = \begin{pmatrix} B & \boldsymbol{0} \\ {}^t\boldsymbol{0} & b_{nn} \end{pmatrix}$ とおき, $\boldsymbol{v}' \in \boldsymbol{R}^{n-1}$ を $\boldsymbol{v}$ から第 n 成分を除いたベクトルとすれば $\boldsymbol{v} = P_1R_{kn}^{-1}\boldsymbol{x}$ ならば (ii) から以下の等式が得られる.

$$Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_C(\boldsymbol{v}) = Q_B(\boldsymbol{v}') + b_{nn}v_n^2 \quad \cdots \ (iii)$$

B に帰納法の仮定を用いると, $n-1$ 次正則行列 T_1 で $\boldsymbol{v}' \in \boldsymbol{R}^{n-1}$ に対し $\boldsymbol{w}' = T_1^{-1}\boldsymbol{v}'$ の第 i 成分を w_i とすれば $Q_B(\boldsymbol{v}') = c_1w_1^2 + \cdots + c_{n-1}w_{n-1}^2$ いう形になるものがある. $T_2 = \begin{pmatrix} T_1 & \boldsymbol{0} \\ {}^t\boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix}$, とおくと T_2 も正則である. $\boldsymbol{w} = T_2^{-1}\boldsymbol{v}$

とおいて, $\boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}' \in \boldsymbol{R}^{n-1}$ をそれぞれ $\boldsymbol{v}$, vw から第 n 成分を除いたベクトルとすれば $\boldsymbol{w}' = T_1^{-1}\boldsymbol{v}'$, $w_n = v_n$ と (iii) から $\boldsymbol{w} = T_2^{-1}P_1R_{kn}^{-1}\boldsymbol{x}$ ならば $Q_A(\boldsymbol{x}) = c_1w_1^2 + \cdots + c_{n-1}w_{n-1}^2 + b_{nn}w_n^2$ である. ゆえに A が n 次対称行列の場合も主張が成り立つ.

(2) $a_{11} = \cdots = a_{nn} = 0$ の場合;
$A \neq O$ だから a_{kl} が 0 でないような k, l がある. $x_k = u_k + u_l$, $x_l = u_k - u_l$, $x_i = u_i$ $(i \neq k, l)$, すなわち P_3 を第 i 行が $i = k$ なら ${}^t\boldsymbol{e}_k + {}^t\boldsymbol{e}_l$, $i = l$ なら ${}^t\boldsymbol{e}_k - {}^t\boldsymbol{e}_l$, $i \neq k, l$ なら ${}^t\boldsymbol{e}_i$ であるような n 次正則行列として $\boldsymbol{u} = P_3^{-1}\boldsymbol{x}$ とおけば, $Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_A(P_3\boldsymbol{u}) = 2a_{kl}u_k^2 + \cdots$ となり, u_k^2 の係数は 0 でないため, $Q_{{}^tP_3AP_3}(\boldsymbol{u}) = Q_A(P_3\boldsymbol{u})$ は上の (1) の場合に帰着する.

正則行列 T で $\boldsymbol{y} = T^{-1}\boldsymbol{x}$ の第 j 成分を y_j とすれば, $Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_A(T\boldsymbol{y}) = c_1y_1^2 + \cdots + c_ny_n^2$ の形になるものを選ぶ. $\boldsymbol{y}$ の成分の順序を入れ替えることにより, $c_1, \ldots, c_p > 0$, $c_{p+1}, \ldots, c_{p+q} < 0$, $c_{p+q+1} = \cdots = c_n = 0$ の形にする. すなわち R_{ij} の形をした行列の積で表される行列 R で $\boldsymbol{z} = R^{-1}\boldsymbol{y}$ とおけば,

$$Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_A(TR\boldsymbol{z}) = c_1'z_1^2 + \cdots + c_p'z_p^2 + c_{p+1}'z_{p+1}^2 + \cdots + c_{p+q}'z_{p+q}^2 \quad (c_1', \ldots, c_p' > 0,\ c_{p+1}', \ldots, c_{p+q}' < 0)$$

となるものがある. 最後に, D を対角行列で i 番目の対角成分が $1 \leqq i \leqq p$ なら $\frac{1}{\sqrt{c_i'}}$, $p+1 \leqq i \leqq p+q$ なら $\frac{1}{\sqrt{-c_i'}}$, $p+q+1 \leqq i \leqq n$ なら 1 で与えられるものとして $\boldsymbol{w} = D^{-1}\boldsymbol{z}$ とおけば

$$Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_A(TRD\boldsymbol{w}) = w_1^2 + \cdots + w_p^2 - w_{p+1}^2 - \cdots - w_{p+q}^2$$

となる. □

n 次対角行列 $\begin{pmatrix} E_p & & \text{\Large 0} \\ & -E_q & \\ \text{\Large 0} & & O \end{pmatrix}$ を $D_{p,q}$ で表すことにする.

系 4.8.1 実数を成分にもつ n 次対称行列 A に対し, 正則行列 P で, ${}^tPAP = D_{p,q}$ という形になるものがある.

証明 2 次形式 Q_A に対し, 正則行列 P で (4.8) の条件を満たすものをとれば, (4.6) から任意の $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, $Q_{{}^tPAP}(\boldsymbol{y}) = Q_A(P\boldsymbol{y}) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2 = Q_{D_{p,q}}(\boldsymbol{y})$ が成り立つため (4.2) から ${}^tPAP = D_{p,q}$ である. □

上の結果における (p, q) は一意的に定まる. すなわち, 次の「Sylvester の慣性法則」と呼ばれる結果が成り立つ.

定理 4.9 正則行列 P に対して ${}^tPD_{p,q}P = D_{s,t}$ ならば $p = s$ かつ $q = t$ である.

証明 P は正則行列だから $s + t = \operatorname{rank} D_{s,t} = \operatorname{rank} {}^tPD_{p,q}P = \operatorname{rank} D_{p,q} = p + q$ である. $p < s$ と仮定して矛盾を導く. P の (i, j)-成分を a_{ij} とすれば, $p < s$ だから $\sum_{j=1}^{s} p_{ij}y_j = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ を満たす $(0, 0, \ldots, 0)$ とは異なる $(y_1, y_2, \ldots, y_s)$ がある. さらに $y_{s+1} = \cdots = y_n = 0$ とおき, $x_j = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}y_j$ によって $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を定めれば, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ の定め方から $x_1 = \cdots = x_p = 0$ である. このように定めた x_j, y_j を第 j 成分にもつ列ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ とすれば, $Q_{D_{s,t}}(\boldsymbol{y}) = y_1^2 + \cdots + y_s^2 > 0$, $Q_{D_{p,q}}(\boldsymbol{x}) = -|x_{p+1}|^2 - \cdots - |x_{p+q}|^2 \leqq 0$ が成り立つ. ところが, $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ だから $Q_{D_{p,q}}(\boldsymbol{x}) = Q_{{}^tPD_{p,q}P}(\boldsymbol{y}) = Q_{D_{s,t}}(\boldsymbol{y})$ となるため矛盾が生じる. ${}^t(P^{-1})D_{s,t}P^{-1} = D_{p,q}$ だから, 上と同じ議論で $s < p$ からも矛盾が導かれる. □

定義 4.10 *A, B を実対称行列とする. $B = {}^tPAP$ を満たす実正則行列 P が存在するとき, 2 次形式 Q_A と Q_B は同値であるという.*

命題 4.11 *2 つの 2 次形式が上の意味で同値であるという関係は, いわゆる同値関係である. すなわち, 次のことが成り立つ.*

(1) $Q_A(\boldsymbol{x})$ と $Q_A(\boldsymbol{x})$ は同値である.

(2) $Q_A(\boldsymbol{x})$ と $Q_B(\boldsymbol{x})$ が同値ならば $Q_B(\boldsymbol{x})$ と $Q_A(\boldsymbol{x})$ は同値である.

(3) $Q_A(\boldsymbol{x})$ と $Q_B(\boldsymbol{x})$ が同値で $Q_B(\boldsymbol{x})$ と $Q_C(\boldsymbol{x})$ が同値ならば $Q_A(\boldsymbol{x})$ と $Q_C(\boldsymbol{x})$ は同値である.

証明 $A = {}^tE_nAE_n$ だから (1) が成り立ち, $B = {}^tPAP$ ならば $A = {}^t(P^{-1})BP^{-1}$ だから (2) が成り立つ. また, $B = {}^tPAP$ かつ $C = {}^tQBQ$ ならば $C = {}^t(PQ)A(PQ)$ だから (3) が成り立つ. □

(4.8), (4.11) により, 任意の 2 次形式 Q_A に対して, Q_A と $Q_{D_{p,q}}$ が同値になるような負でない整数の対 (p,q) が存在するが, (4.9) により, この対は A に関して一意的に定まる. そこで, 次のように定義する.

定義 4.12 2 次形式 Q_A に対して, Q_A と $Q_{D_{p,q}}$ が同値になるような負でない整数の対 (p,q) を Q_A の符号数という.

命題 4.13 $f : V \to V$ を 1 次変換とし, V は f の固有空間の直和であるとする. f の相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, 各 $i = 1, 2, \dots, k$ に対し, λ_i に対する f の固有値空間の次元を n_i とすれば f の固有多項式 $F_f(x)$ は $(x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\cdots(x-\lambda_k)^{n_k}$ と因数分解される.

証明 $i = 1, 2, \dots, k$ に対し $\{\boldsymbol{v}_{n_1+\cdots+n_{i-1}+1}, \boldsymbol{v}_{n_1+\cdots+n_{i-1}+2}, \dots, \boldsymbol{v}_{n_1+\cdots+n_{i-1}+n_i}\}$ が λ_i に対する f の固有空間の基底になるように V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ をとれば, この基底に関する f の表現行列 A は, (j,j)-成分が λ_i $(n_1 + \cdots + n_{i-1} + 1 \leqq j \leqq n_1 + \cdots + n_{i-1} + n_i)$ であるような対角行列となるため $F_f(x) = |xE_n - A| = (x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\cdots(x-\lambda_k)^{n_k}$ である. □

A を n 次実対称行列とすれば $T_A : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n$ は $T_A^* = T_{A^*} = T_A$ を満たすため (3.22) により, A の固有方程式の解はすべて実数である.

命題 4.14 A を n 次実対称行列として A の固有多項式は

$$F_A(x) = x^{n-p-q}(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n) \quad \lambda_1, \dots, \lambda_p > 0,\ \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q} < 0$$

と因数分解されているとする. このとき, 2 次形式 Q_A の符号数は (p,q) である.

証明 A は実対称行列だから, エルミート行列である. 従って (3.22) により, A の固有方程式の解はすべて実数になるため, (3.27.1) により, 実数を成分とするユニタリー行列 T で $T^{-1}AT$ が対角行列になるものが存在する. ここで, $T^{-1} = T^* = {}^tT$ であり, T の列ベクトルを適当に入れ換えることにより ${}^tTAT = T^{-1}AT$ の (i,i)-成分は λ_i $(i = 1, 2, \dots, p+q)$, 0 $(i = s+t+1, s+t+2, \dots, n)$ であると仮定してよい. $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$ と変数変換すれば $Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_{{}^tTAT}(\boldsymbol{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_{p+q} y_{p+q}^2$ となる. さらに, $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ $(i = 1, 2, \dots, p)$, $\frac{1}{\sqrt{-\lambda_i}}$ $(i = p+1, p+2, \dots, p+q)$, 1 $(i = p+q+1, p+q+2, \dots, n)$ を (i,i)-成分にもつ対角行列を S として $\boldsymbol{y} = S\boldsymbol{z}$ と変数変換すれば $Q_A(\boldsymbol{x}) = Q_{{}^t(TS)A(TS)}(\boldsymbol{z}) = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_{p+q}^2$ となるため, Q_A の符号数は (p,q) である. □

注意 4.15 一般に n が 3 以上 *(*5 以上の場合は特に*)* ならば n 次方程式の解の符号と重複度を調べるのは困難なので, 上の結果を用いて Q_A の符号数を求める方法は実用的ではない. *(4.8)* の証明の手順のように, $Q_A(\boldsymbol{x})$ を平方完成して符号数を求める方が現実的である.

命題 4.16 零でない実対称行列 A に対し, A の符号数を (p,q) とすれば, 以下が成り立つ.

(1) A が正値対称行列であるための必要十分条件は $p = n$ かつ $q = 0$ である.

(2) A が負値対称行列であるための必要十分条件は $p = 0$ かつ $q = n$ である.

(3) A が *(4.4)* の *3)* を満たすための必要十分条件は $p < n$ かつ $q = 0$ である.

(4) A が *(4.4)* の *4)* を満たすための必要十分条件は $p = 0$ かつ $q < n$ である.

(5) A が不定符号であるための必要十分条件は $p > 0$ かつ $q > 0$ である.

証明 任意の $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し, $Q_A(P\boldsymbol{y}) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2$ であり P は正則行列だから $\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{R}^n$ 全体を動けば $P\boldsymbol{y}$ も $\boldsymbol{R}^n$ 全体を動く. 従って $p = n$ かつ $q = 0$ ならば A は正値対称行列, $p = 0$ かつ $q = n$ ならば A は負値対称行列, $p < n$ かつ $q = 0$ ならば A は (4.4) の 3) を満たし, $p = 0$ かつ $q < n$ ならば A は (4.4) の 4) を満たし, $p > 0$ かつ $q > 0$ ならば A は不定符号である. □

4.3 多変数関数の極大・極小

この節では, 2次形式の応用として多変数関数の極大・極小の判定法を与える.

定義 4.17 X を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合, $f : X \to \boldsymbol{R}$ を関数とする. $\boldsymbol{p} \in X$ に対し, $\varepsilon > 0$ で "$\boldsymbol{x} \in X$ かつ $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < \varepsilon$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \leqq f(\boldsymbol{p})$"を満たすものがあるとき, f は $\boldsymbol{p}$ で極大であるといい, $f(\boldsymbol{p})$ を f の極大値という. また, $\varepsilon > 0$ で "$\boldsymbol{x} \in X$ かつ $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < \varepsilon$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \geqq f(\boldsymbol{p})$"を満たすものがあるとき, f は $\boldsymbol{p}$ で極小であるといい, $f(\boldsymbol{p})$ を f の極小値という.

X を $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合, $f : X \to \boldsymbol{R}$ をすべての変数に関して偏微分可能で偏導関数がすべて連続であるとき, $\boldsymbol{x} \in X$ に対し, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ が $(1, i)$-成分であるような $1 \times n$ 行列を $f'(\boldsymbol{x})$ で表す. このとき, f が $\boldsymbol{p} \in X$ において極大または極小であるための必要条件として次の結果が容易に示される.

命題 4.18 $f : X \to \boldsymbol{R}$ が $\boldsymbol{p} \in X$ において, すべての変数に関して偏微分可能であるとし, 「$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < c$ ならば $\boldsymbol{x} \in X$」となる $c > 0$ が存在するとき, f が $\boldsymbol{p} \in X$ において極大または極小ならば $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p}) = 0$ である.

さらに $f : X \to \boldsymbol{R}$ が2回偏微分可能で2次偏導関数がすべて連続であるような関数のとき, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x})$ が (i, j)-成分であるような n 次正方行列を $f''(\boldsymbol{x})$ とする. すなわち

$$f''(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_j}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_j}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}.$$

このとき $f''(\boldsymbol{x})$ は対称行列であることが知られている.

補題 4.19 $A = (a_{ij})$ を $m \times n$ として $M = \sqrt{\sum\limits_{1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n} a_{ij}^2}$ とおくと, 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $\|A\boldsymbol{x}\| \leqq M\|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つ.

証明 $\boldsymbol{x}$ の第 i 成分を x_i とし, A の第 i 行を $\boldsymbol{a}_i$ とすると, シュワルツの不等式から $(\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_i)^2 = ({}^t\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x})^2 \leqq \|{}^t\boldsymbol{a}_i\|^2\|\boldsymbol{x}\|^2 = (\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}^2)\|\boldsymbol{x}\|^2$. 従って $\|A\boldsymbol{x}\|^2 = \sum\limits_{i=1}^m(\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_i)^2 \leqq \sum\limits_{i=1}^m(\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}^2)\|\boldsymbol{x}\|^2 = M^2\|\boldsymbol{x}\|^2$. □

補題 4.20 A が正値対称行列ならば正の実数 μ で,「$\|\boldsymbol{x}\| = 1$ ならば $Q_A(\boldsymbol{x}) \geqq \mu$」を満たすものがある. また A が負値対称行列ならば負の実数 ν で,「$\|\boldsymbol{x}\| = 1$ ならば $Q_A(\boldsymbol{x}) \leqq \nu$」を満たすものがある.

証明 A が正値対称行列ならば (4.8.1), (4.16) から正則行列 P で ${}^tPAP = E_n$ となるものがとれる. $P = (p_{ij})$, $\mu = (\sum\limits_{i,j=1}^n p_{ij}^2)^{-1}$, $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ とおくと, $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ のとき (4.19) を用いると $1 = \|P\boldsymbol{y}\| \leqq \frac{1}{\sqrt{\mu}}\|\boldsymbol{y}\|$ だから $Q_A(P\boldsymbol{y}) = Q_{E_n}(\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{y}\|^2 \geqq \mu$. 後半も同様. □

多変数関数のテイラーの定理から次の定理が示される.

定理 4.21 $f : X \to \boldsymbol{R}$ が r 回偏微分可能で, r 次偏導関数がすべて連続であるとする. $\boldsymbol{p} \in X$ に対し,「$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < c$ ならば $\boldsymbol{x} \in X$」となる $c > 0$ があるとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ で, $0 < \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < \delta$ ならば

$$\left| f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - \sum_{k=1}^{r} \sum_{i_1+\cdots+i_n=k} \frac{1}{i_1!\cdots i_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}(\boldsymbol{p})(x_1-p_1)^{i_1}\cdots(x_n-p_n)^{i_n} \right| < \varepsilon \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^r$$

を満たすようなものがある.

とくに $r = 2$ の場合を考えると次の結果が得られる.

系 4.21.1 $f : X \to \boldsymbol{R}$ が 2 回偏微分可能で, 2 次偏導関数がすべて連続であるとする. $\boldsymbol{p} \in X$ に対し,「$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < c$ ならば $\boldsymbol{x} \in X$」となる $c > 0$ があるとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ で, $0 < \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < \delta$ ならば

$$\left| f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) - f'(\boldsymbol{p}) - \frac{1}{2} Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}) \right| < \varepsilon \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2$$

を満たすようなものがある.

$f : X \to \boldsymbol{R}$ は 2 回偏微分可能で 2 次偏導関数はすべて連続であるとする. $\boldsymbol{p} \in X$ であり, 十分小さな $r > 0$ をとれば「$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < r$ ならば $\boldsymbol{x} \in X$」が成り立つとする. このとき f が $\boldsymbol{p}$ で極大か極小であるかを判定する次の定理を証明する.

定理 4.22 $f'(\boldsymbol{p}) = (0, \dots, 0)$ とする.

(1) $f''(\boldsymbol{p})$ が正値対称行列ならば $\boldsymbol{p}$ で f は極小.

(2) $f''(\boldsymbol{p})$ が負値対称行列ならば $\boldsymbol{p}$ で f は極大.

(3) $f''(\boldsymbol{p})$ が不定符号ならば $\boldsymbol{p}$ で f は極大でも極小でもない.

証明 まず (4.21.1) から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $0 < \delta < r$ で $0 < \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < \delta$ ならば

$$\frac{1}{2} Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}) - \varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2 < f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) < \frac{1}{2} Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}) + \varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|^2 \quad \cdots \ (*)$$

を満たすようなものがある.

(1) $f''(\boldsymbol{p})$ が正値対称行列ならば (4.20) から正の実数 μ で,「$\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$ ならば $Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{v}) \geqq \mu\|\boldsymbol{v}\|$」を満たすものがとれる. $\varepsilon = \frac{1}{2}\mu$ に対して $\delta > 0$ を選べば, $(*)$ から $0 < \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| < \delta$ ならば $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{p})$ が成り立つ.

(2) 証明は (1) と同様にできる.

(3) $f''(\boldsymbol{p})$ が不定符号ならば $Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{a}) > 0$, $Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{b}) < 0$ となる $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$ をとり, (4.3) から, 適当なスカラー倍をすることにより $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\| = 1$ と仮定してよい. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{a}$ $(|t| < r)$ のとき $\varepsilon = \frac{1}{3} Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{a})$ に対して $0 < \delta \leqq r$ を選んで $(*)$ から $0 < |t| < \delta$ ならば $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) > \frac{t^2}{6} Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{a}) > 0$ である. 従って f は $\boldsymbol{p}$ で極大ではない. また $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{b}$ $(|t| < r)$ のとき $\varepsilon = -\frac{1}{3} Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{b})$ に対して $0 < \delta \leqq r$ を選んで $(*)$ から $0 < |t| < \delta$ ならば $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) < \frac{t^2}{6} Q_{f''(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{b}) < 0$ である. 従って f は $\boldsymbol{p}$ で極小ではない. $\square$